Introducción al Cálculo Tensorial - Ejercicios resueltos Grupo A

Nieto Coronel Joel Gastón

Universidad Mayor de San Andrés

12 de diciembre del 2020

El estudio del cálculo tensorial requiere una cierta cantidad de material antecedente que puede parecer no muy importante pero que sin el no se puede avanzar muy lejos, en este capítulo introducimos el criterio de suma de Einstein.

Indices mudos e indices libres

Analicemos la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 + ... + a_{in}x_n$$

esta equivale a

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4 + ... + a_{in}x_n$$

observe que se reemplazo j por k, pero la sumatoria sigue siendo la misma,por esta razón al índice j se le llama índice mudo.
además note que podemos tomar cualquier valor para i siempre que $0 \leq i \leq n$, por está razón i es un índice libre.

Criterio de suma de Einstein

Una expresión que involucra un par de índices repetidos (tenemos los siguientes casos: un par de sub indices, un par de índices donde uno es sub indice y el otro es un super indice, y el último caso un par de super indices) deberá representar su suma sobre los valores $1, 2, 3, ..., n$ de los índices repetidos, a no ser que explicitamente se diga lo contrario, la excepción a esta regla es el caracter n, el cual representa el rango de toda la suma.

Observación 1 Cualquier índice libre en una expresión deberá tener el mismo rango como índices de suma, a no ser que se diga lo contrario.

Observación 2 Ningún índice puede aparecer más de dos veces en una expresión dada

Ejemplo 1

Escribir la expresión $a_i b_i$ completa $(n = 6)$. Sea $Q = a_i b_i$, aplicando el criterio de suma de Einstein, aplicado al par de sub índices repetidos i tenemos

$$Q = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4 + a_5 b_5 + a_6 b_6$$

Observe que i es un índice mudo ya que si reemplazamos i por j, tenemos

$$Q = a_j b_j$$

Ejemplo 2

Escribir la expresión R^i_{jki} completa $(n = 4)$; cuales son los indices mudos y cuales son los indices libres? y cuantas sumas hay?
Aplicando el criterio de Einstein al par de índices repetidos i, tenemos:

$$Q = R^i_{jki}$$

$$Q = R^1_{jk1} + R^2_{jk2} + R^3_{jk3} + R^4_{jk4}$$

Los índices libres son j y k, y el índice mudo es i. Por la observación 2 hay $4^2 = 16$ sumas ya que $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$, por ejemplo un par de estas 16 sumas son :
Si $j = 2$,$k = 3$ entonces $Q = R^1_{231} + R^2_{232} + R^3_{233} + R^4_{234}$
Si $j = 4$,$k = 1$ entonces $Q = R^1_{411} + R^2_{412} + R^3_{413} + R^4_{414}$

Ejemplo 3

Si $n = 3$ expandir $Q = a^{ij} x_i x_j$
Primero sumamos con respecto del par de índices i:

$$Q = a^{1j} x_1 x_j + a^{2j} x_2 x_j + a^{3j} x_3 x_j$$

luego con respecto al par de índices j: $Q = (a^{11} x_1 x_1 + a^{12} x_1 x_2 + a^{13} x_1 x_3) + (a^{21} x_2 x_1 + a^{22} x_2 x_2 + a^{23} x_2 x_3) + (a^{31} x_3 x_1 + a^{32} x_3 x_2 + a^{33} x_3 x_3)$

Sustituciones

Supongamos que queremos sustituir esta expresión $y_i = a_{ij}x_j$ en la ecuación $Q = b_{ij}y_ix_j$,entonces obtenemos la siguiente expresión $Q = b_{ij}a_{ij}x_jx_j$, la cual es absurda, la sustitución correcta se realiza de la siguiente manera:

- $Q = b_{ij}y_ix_j$; $y_i = a_{ij}x_j$
- $y_i = a_{ir}x_r$ cambiamos los indices mudos en esta caso j por r.
- $Q = b_{ij}a_{ir}x_rx_j$ luego sustituimos.

Delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \delta_i^j = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

la representación matricial de la Delta de Kronecker, es la matriz identidad, por ejemplo:

- Para $n = 2$, $I_2 = [\delta_{ij}]$

$$I_2 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Para $n = 3$, $I_3 = [\delta_{ij}]$

$$I_3 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Evaluar $\delta^i_j x_i$ para n arbitrario.
Sea $Q = \delta^i_j x_i$, aplicando el criterio de suma al par de índices repetido i, y tomando en cuenta $1 \leq j \leq n$

$$Q = \delta^1_j x_1 + \delta^2_j x_2 + \delta^3_j x_3 + ... + \delta^j_j x_j + ... + \delta^n_j x_n$$

$$Q = \delta^j_j x_j = x_j$$

Por lo tanto:

$$\delta^i_j x_i = x_j$$

Ejemplo 5

Para n arbitrario evaluar:

- δ_{ii}
- $\delta_{ij}\delta_{ij}$
- $\delta_{ij}\delta^{j}_{k}c_{ik}$

Solución:

- $Q = \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + ... + \delta_{nn} = 1 + 1 + ... + 1 = n$, entonces $\delta_{ii} = n$.
- $P = \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} + ... + \delta_{nj}\delta_{nj}$
  $P = (\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{12}\delta_{12} + ... + \delta_{1n}\delta_{1n}) + (\delta_{21}\delta_{21} + \delta_{22}\delta_{22} + ... + \delta_{2n}\delta_{2n}) + ... + (\delta_{n1}\delta_{n1} + \delta_{n2}\delta_{n2} + ... + \delta_{nn}\delta_{nn}) = ...$
  $... = (1) + (1) + ... + (1) = n$
  Otra forma:
  $P = \delta_{ij}\delta_{ij} = ... = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} + ... + \delta_{jj}\delta_{jj} + ... + \delta_{nj}\delta_{nj}$
  ya que $1 \leq j \leq n$.

$P = \delta_{ij}\delta_{ij} = ... \; ... = \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{33}\delta_{33} + ... + \delta_{jj}\delta_{jj} + ... + \delta_{nn}\delta_{nn}$
luego... $P = \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + ... + \delta_{jj} + ... + \delta_{nn} = \delta_{ii} = n$

- $R = \delta_{ij}\delta^{j}_{k}c_{ik} = \delta_{ii}\delta^{i}_{k}c_{ik} = \delta^{i}_{k}c_{ik} = \delta^{i}_{i}c_{ii} = c_{ii}$
  $R = c_{11} + c_{22} + ... + c_{nn}$

Ejemplo 6

Escribir cada una de las siguientes expresiones teniendo en cuenta el convenio de sumación de los índices repetidos.

- $Q = a_1x^1x^3 + a_2x^2x^3 + a_3x^3x^3 + a_4x^4x^3 + ... + a_nx^nx^3$

$$a_1x^1x^3 + a_2x^2x^3 + a_3x^3x^3 + a_4x^4x^3 + ... + a_nx^nx^3 = a_ix^ix^3$$

$$Q = a_ix^ix^3$$

- $P = A^{21}B_1 + A^{22}B_2 + A^{23}B_3 + ... + A^{2n}B_n$

$$P = A^{21}B_1 + A^{22}B_2 + A^{23}B_3 + ... + A^{2n}B_n = A^{2j}B_j$$

$$P = A^{2j}B_j$$

- $R = A^j_1 B^1 + A^j_2 B^2 + A^j_3 B^3 + ...A^j_n B^n$

$$R = A^j_1 B^1 + A^j_2 B^2 + A^j_3 B^3 + ... + A^j_n B^n = A^j_k B^k$$

$$R = A^j_k B^k$$

- $S = g^{12} g_{11} + g^{22} g_{21} + g^{23} g_{31} + g^{24} g_{41}$

$$S = g^{12} g_{11} + g^{22} g_{21} + g^{23} g_{31} + g^{24} g_{41} = g^{2k} g_{k1}$$

$$S = g^{2k} g_{k1}$$

- $T = B^{121}_{11} + B^{122}_{12} + B^{221}_{21} + B^{222}_{22}$

$$T = B^{121}_{11} + B^{122}_{12} + B^{221}_{21} + B^{222}_{22} = B^{12j}_{1j} + B^{22j}_{2j} = B^{i2j}_{ij}$$

$$T = B^{i2j}_{ij}$$

Ejemplo 7

Escribir término a término cada una de las siguiente sumas indicadas

- $$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}A^k\right); n = 3$$

- $$A^{jk}B_k^pC_j; n = 2$$

- $$\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$$

- $$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{g}A^k\right) = \frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g}A^1\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}A^2\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g}A^3\right)$$

- $$A^{jk}B_k^pC_j = A^{1k}B_k^pC_1 + A^{2k}B_k^pC_2$$
  $$A^{jk}B_k^pC_j = \left(A^{11}B_1^pC_1 + A^{12}B_2^pC_1\right) + \left(A^{21}B_1^pC_2 + A^{22}B_2^pC_2\right)$$
  $$A^{jk}B_k^pC_j = A^{11}B_1^pC_1 + A^{12}B_2^pC_1 + A^{21}B_1^pC_2 + A^{22}B_2^pC_2$$
  en este caso p es un índice libre y puede tomar cualquier valor entero positivo.

- $$\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^m} = \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial\bar{x}^m} + \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial\bar{x}^m} + \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial\bar{x}^m} + ... + \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^n}\frac{\partial x^n}{\partial\bar{x}^m}$$

Una aplicación al álgebra lineal

- Escribir el sistema de ecuaciones

$$a_{pq}x^q = d_p$$

para $n = 3$

- Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices cuadradas de tamaño 2, expresar el producto AB usando el convenio de la suma de Einstein (de los indices repetidos).
- Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ dos matrices cuadradas , si B es la inversa de A resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$b_{ij}x_j = y_i$$

- $$a_{pq}x^q = d_p$$

  primero

  $$a_{p1}x^1 + a_{p2}x^2 + a_{p3}x^3 = d_p$$

  después...

  $$a_{11}x^1 + a_{12}x^2 + a_{13}x^3 = d_1$$
  $$a_{21}x^1 + a_{22}x^2 + a_{23}x^3 = d_2$$
  $$a_{31}x^1 + a_{32}x^2 + a_{33}x^3 = d_3$$

  en forma matricial

  $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

- $$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = AB$$

$$C = [c_{pq}]$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = a_{1k}b_{k1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = a_{1k}b_{k2}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = a_{2k}b_{k1}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = a_{2k}b_{k2}$$

por lo tanto

$$c_{pq} = a_{pk} b_{kq}$$

donde k es índice mudo y p, q son los indices libres.

- Ya que B es la inversa de A entonces

  $$AB = BA = I$$

  $$a_{pk} b_{kq} = \delta_{pq}$$

  partamos de...

  $$b_{ij} x_j = y_i$$

  cambiando los indices:

  $$b_{kq} x_q = y_k$$

  multiplicando por a_{pk}

  $$a_{pk} b_{kq} x_q = a_{pk} y_k$$

  luego

  $$\delta_{pq} x_q = a_{pk} y_k$$

  $$x_p = a_{pk} y_k$$

Ecuaciones de transformación

Sean las ecuaciones de trasformación T que relacionan dos sistemas de coordenadas distintos $(x^1, x^2, ..., x^N)$ y $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^N)$, para un espacio N dimensional.

$$\begin{gathered}\bar{x}^1 = \bar{x}^1(x^1, x^2, ..., x^N) \\ \bar{x}^2 = \bar{x}^2(x^1, x^2, ..., x^N) \\ . \\ . \\ . \\ \bar{x}^N = \bar{x}^N(x^1, x^2, ..., x^N)\end{gathered}$$

por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, sean las coordenadas cartesianas $\bar{x}^1 = x$, $\bar{x}^2 = y$ y las coordenadas polares $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, se tiene las siguientes relaciones:

$$\bar{x}^1 = x^1 cos\left(x^2\right)$$

$$\bar{x}^2 = x^1 sen\left(x^2\right)$$

Matriz Jacobiana $\mathbf{J}$ para la transformación T

Definimos a la matriz jacobiana para T de la siguiente manera:

$$J = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right)$$

en forma matricial para espacios de dimensión 2 y 3 se tiene

Matriz jacobiana para un espacio de dimensión 2

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

Matriz jacobiana para un espacio de dimensión 3

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

también llamamos al determinante de J como el Jacobiano de la transformación T.

por ejemplo en $\mathbb{R}^2$, sean las coordenadas cartesianas $\bar{x}^1 = x$, $\bar{x}^2 = y$ y las coordenadas polares $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, se tiene las siguientes ecuaciones de transformación T:

$$\bar{x}^1 = x^1 cos\left(x^2\right)$$

$$\bar{x}^2 = x^1 sen\left(x^2\right)$$

Entonces la matriz Jacobiana de T es

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & -x^1 sen\left(x^2\right) \\ sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) \end{bmatrix}$$

Sean las ecuaciones de trasformación T^{-1} que relacionan dos sistemas de coordenadas distintos $(x^1, x^2, ..., x^N)$ y $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^N)$, para un espacio N dimensional.

$$
\begin{gathered}
x^1 = x^1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^N) \\
x^2 = x^2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^N) \\
. \\
. \\
. \\
x^N = x^N(\bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^N)
\end{gathered}
$$

NOTA note que T^{-1} es la transformación inversa de T.

Matriz Jacobiana $\bar{J}$ para la transformación T^{-1}

Definimos a la matriz jacobiana para T^{-1} de la siguiente manera:

$$\bar{J} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \right)$$

en forma matricial para espacios de dimensión 2 y 3 se tiene

Matriz jacobiana para un espacio de dimensión 2

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} \end{bmatrix}$$

Matriz jacobiana para un espacio de dimensión 3

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix}$$

también llamamos al determinante de $\bar{J}$ como el Jacobiano de la transformación T^{-1}.

La relación entre J y $\bar{J}$ es:

$$J\bar{J} = \bar{J}J = I_{n\times n}$$

es decir:

$$J^{-1} = \bar{J}$$

utilizando la notación que hemos estado desarrollando

$$\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^q} = \delta^p_q$$

Ejemplo 8

Usando la delta de Kronecker calcular la derivada parcial si los a_{ij} son constantes:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^j)$$

$\frac{\partial}{\partial x^k}(a_{ij}x^j) = a_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial x^k} = a_{ij}\delta^j_k = a_{ik}$

Tensor alternante o símbolo de permutación

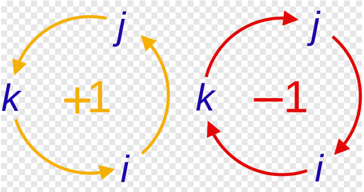
El tensor alternante o símbolo de permutación ϵ_{ijk} está definido de la siguiente manera:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & si & i=j; j=k; i=k \\ +1 & si & (i,j,k)=(1,2,3),(2,3,1) \quad o \quad (3,1,2) \\ -1 & si & (i,j,k)=(1,3,2),(2,1,3) \quad o \quad (3,2,1) \end{cases}$$

En forma matricial el tensor alternante es:

$$\epsilon_{ijk} = \left\{ \begin{bmatrix} \epsilon_{111} & \epsilon_{112} & \epsilon_{113} \\ \epsilon_{121} & \epsilon_{122} & \epsilon_{123} \\ \epsilon_{131} & \epsilon_{132} & \epsilon_{133} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \epsilon_{211} & \epsilon_{212} & \epsilon_{213} \\ \epsilon_{221} & \epsilon_{222} & \epsilon_{223} \\ \epsilon_{231} & \epsilon_{232} & \epsilon_{233} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \epsilon_{311} & \epsilon_{312} & \epsilon_{313} \\ \epsilon_{321} & \epsilon_{322} & \epsilon_{323} \\ \epsilon_{331} & \epsilon_{332} & \epsilon_{333} \end{bmatrix} \right\}$$

$$\epsilon_{ijk} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$



$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$$

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$$

Ejemplo 9

Simplificar $\delta_{ij}\epsilon_{ijk}$.
Por el criterio de suma y la definición de la delta de kronecker

$$\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = \delta_{ii}\epsilon_{iik} = \epsilon_{iik}$$

como ϵ_{iik} tiene dos índices iguales aplicando la definición de tensor alternante...

$$\epsilon_{iik} = 0$$

luego

$$\delta_{ij}\epsilon_{ijk} = 0$$

Ejemplo 10

Escribir el producto escalar entre dos vectores a y b en términos del criterio de la suma: $a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = a_ie_i$
$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 = b_je_j$
$e_1 = \hat{\imath} = (1,0,0)$; $e_2 = \hat{\jmath} = (0,1,0)$ y $e_3 = \hat{k} = (0,0,1)$
$a \circ b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_ib_i$ o también...
$a \circ b = a_ie_i \circ b_je_j = a_ib_je_i \circ e_j$
pero $\delta_{ij} = e_i \circ e_j$ $a \circ b = a_ib_j\delta_{ij} = a_jb_j$

Ejemplo 11

Nieto Coronel Joel Gastón

Simplificar $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{1jk}\epsilon_{1jk} + \epsilon_{2jk}\epsilon_{2jk} + \epsilon_{3jk}\epsilon_{3jk}$$
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \left(\epsilon_{12k}\epsilon_{12k} + \epsilon_{13k}\epsilon_{13k}\right) + \left(\epsilon_{21k}\epsilon_{21k} + \epsilon_{23k}\epsilon_{23k}\right) + \left(\epsilon_{31k}\epsilon_{31k} + \epsilon_{32k}\epsilon_{32k}\right)$$
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = \left(\epsilon_{123}\right)^2 + \left(\epsilon_{132}\right)^2 + \left(\epsilon_{213}\right)^2 + \left(\epsilon_{231}\right)^2 + \left(\epsilon_{312}\right)^2 + \left(\epsilon_{321}\right)^2$$
$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$$

Ejemplo 10

Expresar $a \times b$ en términos del tensor de alternante,
$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ $b = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$, $e_1 = \hat{\imath} = (1, 0, 0)$,
$e_2 = \hat{\jmath} = (0, 1, 0)$ y $e_3 = \hat{k} = (0, 0, 1)$

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$a \times b = e_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) - e_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + e_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)$
$a \times b = e_1 a_2 b_3 - e_1 a_3 b_2 - e_2 a_1 b_3 + e_2 a_3 b_1 + e_3 a_1 b_2 - e_3 a_2 b_1$

$a \times b =$
$\epsilon_{123} e_1 a_2 b_3 + \epsilon_{132} e_1 a_3 b_2 + \epsilon_{213} e_2 a_1 b_3 + \epsilon_{231} e_2 a_3 b_1 + \epsilon_{312} e_3 a_1 b_2 + \epsilon_{321} e_3 a_2 b_1$
después..

después...

$a \times b =$

$(\epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2) e_1 + (\epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{231} a_3 b_1) e_2 + (\epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1) e_3$

notemos que

$\epsilon_{1jk} a_j b_k = \epsilon_{11k} a_1 b_k + \epsilon_{12k} a_2 b_k + \epsilon_{13k} a_3 b_k = \epsilon_{12k} a_2 b_k + \epsilon_{13k} a_3 b_k$

$\epsilon_{1jk} a_j b_k = \epsilon_{121} a_2 b_1 + \epsilon_{122} a_2 b_2 + \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{131} a_3 b_1 + \epsilon_{132} a_3 b_2 + \epsilon_{133} a_3 b_3$

$\epsilon_{1jk} a_j b_k = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2$

Aplicando esto a los dos casos restantes tenemos:

$\epsilon_{2jk} a_j b_k = \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{231} a_3 b_1$

$\epsilon_{3jk} a_j b_k = \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1$

reemplazando...

$a \times b = \epsilon_{1jk} a_j b_k e_1 + \epsilon_{2jk} a_j b_k e_2 + \epsilon_{3jk} a_j b_k e_3$

aplicando el criterio de la suma...

$a \times b = \epsilon_{ijk} a_j b_k e_i$

o equivalentemente:

$a \times b = \epsilon_{ijk} e_i a_j b_k$

Ejemplo 12

A partir de la anterior relación tenemos que el triple producto escalar entre 3 vectores de $\mathbb{R}^3$:

$a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = a_ie_i$

$b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 = b_ie_i$

$c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = c_ie_i$

donde $e_1 = \hat{\imath} = (1,0,0)$, $e_2 = \hat{\jmath} = (0,1,0)$ y $e_3 = \hat{k} = (0,0,1)$.

$$a \circ b \times c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Apliquemos lo visto en los ejemplos anteriores:

reemplacemos $a = a_ie_i, b = b_ie_i$ y $c = c_ie_i$ en..

$a \circ b \times c = a \circ (b \times c) = a_ie_i \circ (\epsilon_{pqr}e_pb_qc_r)$

$a \circ b \times c = e_i \circ e_p\epsilon_{pqr}a_ib_qc_r$

$a \circ b \times c = \delta_{ip}\epsilon_{pqr}a_ib_qc_r$

$a \circ b \times c = \epsilon_{pqr}a_pb_qc_r$

Operadores diferenciales en coordenadas cartesianas utilizando notación de indices

sean $x^1 = x$. $x^2 = y$, $x^3 = z$; $e_1 = \hat{\imath}$, $e_2 = \hat{\jmath}$, $e_3 = \hat{k}$,
$\overrightarrow{A} = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3$ un campo vectorial y ϕ es un campo escalar.

- **Gradiente**

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1} e_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2} e_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3} e_3$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} e_k$$

- **Divergencia**

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3}$$

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = \frac{\partial A^k}{\partial x^k}$$

- **Rotacional**

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \epsilon_{ijk} e_i \frac{\partial A^k}{\partial x^j}$$

Ejemplo 14

Verificar:

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \epsilon_{ijk} e_i \frac{\partial A^k}{\partial x^j}$$

desarrollando:

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \epsilon_{1jk} e_1 \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \epsilon_{2jk} e_2 \frac{\partial A^k}{\partial x^j} + \epsilon_{3jk} e_3 \frac{\partial A^k}{\partial x^j}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \epsilon_{1jk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} e_1 + \epsilon_{2jk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} e_2 + \epsilon_{3jk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} e_3$$

Pero...

$$\epsilon_{1jk} \frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \epsilon_{11k} \frac{\partial A^k}{\partial x^1} + \epsilon_{12k} \frac{\partial A^k}{\partial x^2} + \epsilon_{13k} \frac{\partial A^k}{\partial x^3}$$

desarrollamos por separado cada término de la última ecuación

$$\epsilon_{11k} \frac{\partial A^k}{\partial x^1} = \epsilon_{111} \frac{\partial A^k}{\partial x^1} + \epsilon_{112} \frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \epsilon_{113} \frac{\partial A^3}{\partial x^1} = (0) \frac{\partial A^k}{\partial x^1} + (0) \frac{\partial A^2}{\partial x^1} + (0) \frac{\partial A^3}{\partial x^1}$$

$$\epsilon_{11k} \frac{\partial A^k}{\partial x^1} = 0$$

$$\epsilon_{12k}\frac{\partial A^k}{\partial x^2} = \epsilon_{121}\frac{\partial A^1}{\partial x^2} + \epsilon_{122}\frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \epsilon_{123}\frac{\partial A^3}{\partial x^2} = (0)\frac{\partial A^1}{\partial x^2} + (0)\frac{\partial A^2}{\partial x^2} + (1)\frac{\partial A^3}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_{12k}\frac{\partial A^k}{\partial x^2} = \epsilon_{123}\frac{\partial A^3}{\partial x^2} = \frac{\partial A^3}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_{13k}\frac{\partial A^k}{\partial x^3} = \epsilon_{131}\frac{\partial A^1}{\partial x^3} + \epsilon_{132}\frac{\partial A^2}{\partial x^3} + \epsilon_{133}\frac{\partial A^3}{\partial x^3}$$

$$\epsilon_{13k}\frac{\partial A^k}{\partial x^3} = (0)\frac{\partial A^1}{\partial x^3} + (-1)\frac{\partial A^2}{\partial x^3} + (0)\frac{\partial A^3}{\partial x^3}$$

$$\epsilon_{13k}\frac{\partial A^k}{\partial x^3} = \epsilon_{132}\frac{\partial A^2}{\partial x^3} = (-1)\frac{\partial A^2}{\partial x^3} = -\frac{\partial A^2}{\partial x^3}$$

por lo tanto:

$$\epsilon_{1jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \epsilon_{11k}\frac{\partial A^k}{\partial x^1} + \epsilon_{12k}\frac{\partial A^k}{\partial x^2} + \epsilon_{13k}\frac{\partial A^k}{\partial x^3}$$

$$\epsilon_{1jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = 0 + \epsilon_{123}\frac{\partial A^3}{\partial x^2} + \epsilon_{132}\frac{\partial A^2}{\partial x^3}$$

$$\epsilon_{1jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3} - - - (1)$$

De la misma forma para:

$$\epsilon_{2jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \epsilon_{21k}\frac{\partial A^k}{\partial x^1} + \epsilon_{22k}\frac{\partial A^k}{\partial x^2} + \epsilon_{23k}\frac{\partial A^k}{\partial x^3}$$

Claramente:

$$\epsilon_{2jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \epsilon_{213}\frac{\partial A^3}{\partial x^1} + 0 + \epsilon_{231}\frac{\partial A^1}{\partial x^3}$$

$$\epsilon_{2jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = (-1)\frac{\partial A^3}{\partial x^1} + (1)\frac{\partial A^1}{\partial x^3}$$

$$\epsilon_{2jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1} - - - (2)$$

Por último...

$$\epsilon_{3jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \epsilon_{31k}\frac{\partial A^k}{\partial x^1} + \epsilon_{32k}\frac{\partial A^k}{\partial x^2} + \epsilon_{33k}\frac{\partial A^k}{\partial x^3}$$

Claramente se tiene...

$$\epsilon_{3jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \epsilon_{312}\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \epsilon_{321}\frac{\partial A^1}{\partial x^2} + 0$$

$$\epsilon_{3jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = (1)\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + (-1)\frac{\partial A^1}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_{3jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j} = \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2} - - - (3)$$

reemplazando (1), (2) y (3) en...

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \epsilon_{1jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j}e_1 + \epsilon_{2jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j}e_2 + \epsilon_{3jk}\frac{\partial A^k}{\partial x^j}e_3$$

y se tiene:

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right)e_1 + \left(\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}\right)e_2 + \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right)e_3$$

Nota

$$\nabla\times\overrightarrow{A} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ A^1 & A^2 & A^3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}\right)e_1 - \left(\frac{\partial A^3}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^3}\right)e_2 + \left(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}\right)e_3$$

Relación entre el tensor de alternante y la delta de Kronecker

Una importante relación entre ϵ_{ijk} y δ_{ij} es la siguiente ecuación

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$$

Esta ecuación tiene cuatro índices libres (i, j, l y m) y por lo tanto representa 81 ecuaciones diferentes !! por otro lado el índice mudo en la expresión es k.

Ejemplo 12

Simplificar $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$
Considerando $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij}$ entones...
$\epsilon_{ijk}\epsilon_{kij} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = \delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ii} = (3 \cdot 3) - 3 = 6$

Ejemplo 13

Sean $a = a_i e_i$, $b = b_j e_j$ y $c = c_k e_k$, demostrar que :

$$a \times (b \times c) = (a \circ c)b - (a \circ b)c$$

Sea $a = a_i e_i$, $b = b_j e_j$ y $c = c_k e_k$

$a \times (b \times c) = a_i e_i \times (\epsilon_{rjk} e_r b_j c_k) = a_i b_j c_k \epsilon_{rjk}(e_i \times e_r)$

$a \times (b \times c) = a_i b_j c_k \epsilon_{rjk} \epsilon_{sir} e_s = a_i b_j c_k (\delta_{sj}\delta_{ik} - \delta_{sk}\delta_{ij}) e_s$

$a \times (b \times c) = a_i b_j c_k \delta_{sj}\delta_{ik} e_s - a_i b_j c_k \delta_{sk}\delta_{ij} e_s$

$a \times (b \times c) = a_i b_j c_i \delta_{jj}\delta_{ii} e_j - a_i b_i c_k \delta_{kk}\delta_{ii} e_k = a_i b_j c_i e_j - a_i b_i c_k e_k$

$a \times (b \times c) = (a_i c_i) b_j e_j - (a_i b_i) c_k e_k$

$a \times (b \times c) = (a \circ c) b_j e_j - (a \circ b) c_k e_k = (a \circ c)b - (a \circ b)c$

Noción de tensor

Considerar las bases $B = \{u_1, u_2\}$ y $B' = \{v_1, v_2\}$ para $\mathbb{R}^2$, donde $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$, $v_1 = (2, 1)$ y $v_2 = (-3, 4)$.
Cada vector v del plano se puede representar como combinación lineal de los vectores de la base B o de la base B', con respecto a cada base un vector v tiene coordenadas distintas pero la ley de transformación de un sistema B de referencia a otro sistema de referencia B', es una transformación lineal y homogénea, hallemos esta ley de transformación en este caso:

- Encontrar la matriz de transición (de cambió de base) de B' a B.
- Encontrar la matriz de transición (de cambió de base) de B a B'.
- Determinar $[v]_B$ y $[v]_{B'}$ si $v = (3, -5)$

Escribamos los vectores de la base B' como combinaciones lineales de los vectores de la base de B.

$$v_1 = (2,1) = (2)(1,0) + (1)(0,1) = (2)u_1 + (1)u_2$$

$$v_2 = (-3,4) = (-3)(1,0) + (4)(0,1) = (-3)u_1 + (4)u_2$$

Entonces:

$$[v_1]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; [v_2]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

construimos la matriz P dada por la siguiente ecuación

$$A = \left[[v_1]_B \,|\, [v_2]_B \right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

donde la matriz cumple:

$$A\,[u]_{B'} = [u]_B$$

y además

$$[u]_{B'} = A^{-1}\,[u]_B$$

P es la matriz de transición o cambio de base de B' a B, y

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

pero $|P| = 11$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

A^{-1} es la matriz de transición de B a B'.

Sea $v \in V$, entonces

$$v = x^1 u_1 + x^2 u_2$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$v = \bar{x}^1 v_1 + \bar{x}^2 v_2$$

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix}$$

reemplazando en $A\,[u]_{B'} = [u]_B$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

y también

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Estas dos últimas ecuaciones son las relaciones entre las coordenadas de un vector $v \in \mathbb{R}^2$ en la base B y en la base B'

Si $v = (3, -5)$ sus coordenadas en la base B son

$$v = (3)(1,0) + (-5)(0,1) = (3)u_1 + (-5)u_2$$

entonces:

$$[v]_B = [(3,-5)]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

luego:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{11} \\ \frac{-13}{11} \end{bmatrix}$$

donde:

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{11} \\ \frac{-13}{11} \end{bmatrix}$$

$$v = \left(\frac{-3}{11}\right) v_1 + \left(\frac{-13}{11}\right) v_2$$

$$v = \left(\frac{-3}{11}\right)(2,1) + \left(\frac{-13}{11}\right)(-3,4)$$

$$v = \left(\frac{-6+39}{11}, \frac{-3-52}{11}\right) = \left(\frac{33}{11}, \frac{-55}{11}\right)$$

$$v = (3, -5)$$

Observaciones importantes

Note que las ecuaciones de transformación entre los sistemas de referencia son

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$2\bar{x}^1 - 3\bar{x}^2 = x^1$$

$$\bar{x}^1 + 4\bar{x}^2 = x^2$$

y también

$$\begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{4}{11}x^1 + \frac{3}{11}x^2 = \bar{x}^1$$

$$\frac{-1}{11}x^1 + \frac{2}{11}x^2 = \bar{x}^2$$

Si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

y

$$D = \begin{bmatrix} \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{-1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$a_{11}\bar{x}^1 + a_{12}\bar{x}^2 = x^1$$
$$a_{21}\bar{x}^1 + a_{22}\bar{x}^2 = x^2$$

y

$$d_{11}x^1 + d_{12}x^2 = \bar{x}^1$$
$$d_{21}x^1 + d_{22}x^2 = \bar{x}^2$$

utilizando el convenio de la suma de Einstein se tiene:

$$d_{i1}x^1 + d_{i2}x^2 = \bar{x}^i$$
$$d_{ij}x^j = \bar{x}^i$$

y también

$$a_{i1}\bar{x}^1 + a_{i2}\bar{x}^2 = x^i$$

$$a_{ij}\bar{x}^j = x^i$$

ya que $AD = DA = I$ entonces $a_{ik}d_{kj} = \delta_{ij}$
Note que para el vector $v = (3, -5)$ sus coordenadas con respecto a la base B son:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

y con respecto a la base B'

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{11} \\ \frac{-13}{11} \end{bmatrix}$$

En general ocurre que cuando se cambia de sistema de un referencia B a otro sistema de referencia B' las coordenadas de un vector cambian.

Hay alguna propiedad de un vector que no dependa del sistema de coordenadas que utilice para representarlo?, Si su tamaño. por ejemplo en el anterior caso tenemos:

$$\|v\|^2 = v \circ v$$

si expresamos a v en el sistema coordenado B, v se se puede expresar como:

$$v = x^1 u_1 + x^2 u_2$$

reemplazando:

$$\|v\|^2 = v \circ v = (x^1 u_1 + x^2 u_2) \circ (x^1 u_1 + x^2 u_2)$$
$$\|v\|^2 = (x^1 u_1 + x^2 u_2) \circ (x^1 u_1 + x^2 u_2)$$

$$\|v\|^2 = (x^1 u_1) \circ (x^1 u_1 + x^2 u_2) + (x^2 u_2) \circ (x^1 u_1 + x^2 u_2)$$
$$\|v\|^2 = (x^1 u_1) \circ (x^1 u_1) + (x^1 u_1) \circ (x^2 u_2) + (x^2 u_2) \circ (x^1 u_1) + (x^2 u_2) \circ (x^2 u_2)$$
$$\|v\|^2 = (u_1 \circ u_1) x^1 x^1 + (u_1 \circ u_2) x^1 x^2 + (u_2 \circ u_1) x^2 x^1 + (u_2 \circ u_2) x^2 x^2$$

Si...

$$g_{11} = u_1 \circ u_1 = 1$$
$$g_{12} = u_1 \circ u_2 = 0$$
$$g_{21} = u_2 \circ u_1 = 0$$
$$g_{22} = u_2 \circ u_2 = 1$$

se tiene:

$$\|v\|^2 = g_{11}x^1x^1 + g_{12}x^1x^2 + g_{21}x^2x^1 + g_{22}x^2x^2$$

aplicando el convenio de la suma de Einstein

$$\|v\|^2 = g_{1q}x^1x^q + g_{2q}x^2x^q$$

$$\|v\|^2 = g_{pq}x^px^q$$

o en forma matricial:

$$\|v\|^2 = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \circ u_1 & u_1 \circ u_2 \\ u_2 \circ u_1 & u_2 \circ u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\|v\|^2 = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

lo que en este caso equivale a:

$$\|v\|^2 = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

Simplificando la norma o el tamaño de v es:

$$\|v\|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$$

por ejemplo las coordenadas de v en sistema de referencia B es

$$[v]_B = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = 3$$

$$x^2 = -5$$

$$\|v\|^2 = (3)^2 + (-5)^2 = 34 \Rightarrow \|v\| = \sqrt{34}$$

pero que pasa en el otro sistema de referencia B'?, pues las coordenadas de v con respecto a B' son

$$v = \bar{x}^1 v_1 + \bar{x}^2 v_2$$

y la norma o tamaño de v esta dado por:

$$\|v\|^2 = v \circ v$$

$$\|v\|^2 = v \circ v = (\bar{x}^1 v_1 + \bar{x}^2 v_2) \circ (\bar{x}^1 v_1 + \bar{x}^2 v_2)$$
$$\|v\|^2 = (\bar{x}^1 v_1 + \bar{x}^2 v_2) \circ (\bar{x}^1 v_1 + \bar{x}^2 v_2)$$

$$\|v\|^2 = (\bar{x}^1 v_1) \circ (\bar{x}^1 v_1 + \bar{x}^2 v_2) + (\bar{x}^2 v_2) \circ (\bar{x}^1 v_1 + \bar{x}^2 v_2)$$
$$\|v\|^2 = (\bar{x}^1 v_1) \circ (\bar{x}^1 v_1) + (\bar{x}^1 v_1) \circ (\bar{x}^2 v_2) + (\bar{x}^2 v_2) \circ (\bar{x}^1 v_1) + (\bar{x}^2 u_2) \circ (\bar{x}^2 u_2)$$
$$\|v\|^2 = (v_1 \circ v_1)\bar{x}^1\bar{x}^1 + (v_1 \circ v_2)\bar{x}^1\bar{x}^2 + (v_2 \circ v_1)\bar{x}^2\bar{x}^1 + (v_2 \circ v_2)\bar{x}^2\bar{x}^2$$

Si...

$$\bar{g}_{11} = v_1 \circ v_1 = 5$$

$$\bar{g}_{12} = v_1 \circ v_2 = -2$$

$$\bar{g}_{21} = v_2 \circ v_1 = -2$$

$$\bar{g}_{22} = v_2 \circ v_2 = 25$$

se tiene:

$$\|v\|^2 = \bar{g}_{11}\bar{x}^1\bar{x}^1 + \bar{g}_{12}\bar{x}^1\bar{x}^2 + \bar{g}_{21}\bar{x}^2\bar{x}^1 + \bar{g}_{22}\bar{x}^2\bar{x}^2$$

aplicando el convenio de la suma de Einstein

$$\|v\|^2 = \bar{g}_{1q}\bar{x}^1\bar{x}^q + \bar{g}_{2q}\bar{x}^2\bar{x}^q$$

$$\|v\|^2 = \bar{g}_{pq}\bar{x}^p\bar{x}^q$$

o en forma matricial:

$$\|v\|^2 = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \circ v_1 & v_1 \circ v_2 \\ v_2 \circ v_1 & v_2 \circ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix}$$

$$\|v\|^2 = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix}$$

lo que en este caso equivale a:

$$\|v\|^2 = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix}$$

Simplificando la norma o el tamaño de v es:

$$\|v\|^2 = 5(\bar{x}^1)^2 - 4(\bar{x}^1)(\bar{x}^2) + 25(\bar{x}^2)^2$$

por ejemplo las coordenadas de v en sistema de referencia B es

$$[v]_{B'} = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{11} \\ \frac{-13}{11} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}^1 = \frac{-3}{11}$$

$$\bar{x}^2 = \frac{-13}{11}$$

$$\|v\|^2 = 5\left(\frac{-3}{11}\right)^2 - 4\left(\frac{-3}{11}\right)\left(\frac{-13}{11}\right) + 25\left(\frac{-13}{11}\right)^2 = 34$$

$$\|v\| = \sqrt{34}$$

Es claro, a partir de los cálculos anteriores, que la norma o tamaño de un vector es un invariante bajo cambios de coordenadas, es decir que independientemente del sistema coordenadas escogido la norma o tamaño de un vector no cambia.

$$\|v\|^2 = g_{pq}x^p x^q = \bar{g}_{pq}\bar{x}^p\bar{x}^q$$

En el ejemplo anterior se tienes tres ejemplos de tensores de orden 0, orden 1 y orden 2, uno de cada uno tipo, y estos son:
Ejemplo tensor de orden 0 La norma de un vector

$$\|v\|^2 = g_{pq}x^p x^q = \bar{g}_{pq}\bar{x}^p \bar{x}^q$$

Ejemplo de tensor de orden 1 Cualquier vector del plano v, cuyas coordenadas (x^1, x^2) en un sistema de referencia B se transforman en las coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ en otro sistema de referencia B' mediante la siguiente ley de transformación (lineal y homogénea)

$$\bar{x}^i = d_{ij}x^j$$

Ejemplo de tensor de orden 2 Para ver este ejemplo, rescatemos las siguientes ecuaciones

$$\|v\|^2 = \begin{bmatrix} x^1 & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\|v\|^2 = \begin{bmatrix} \bar{x}^1 & \bar{x}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \end{bmatrix}$$

Si

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \bar{g}_{11} & \bar{g}_{12} \\ \bar{g}_{21} & \bar{g}_{22} \end{bmatrix}$$

entonces

$$\|v\|^2 = [v]_B^T G [v]_B$$

$$\|v\|^2 = [v]_{B'}^T \bar{G} [v]_{B'}$$

pero

$$A[v]_{B'} = [v]_B$$

$$[v]_{B'} = D[v]_B$$

reemplazando

$$\|v\|^2 = (A[v]_{B'})^T \, G \, (A[v]_{B'})$$

$$\|v\|^2 = [v]_{B'}^T \left(A^T G A\right) [v]_{B'}$$

de donde:

$$A^T G A = \bar{G}$$

si $A = (a_{ij})$ y $A^T = (b_{ij})$, se tiene

$$(AG)_{rs} = a_{rk} g_{ks}$$

$$(AGA^T)_{pq} = (AG)_{pi} b_{iq}$$

$$(AGA^T)_{pq} = a_{pk} g_{ki} b_{iq}$$

$$\bar{g}_{pq} = a_{pk} g_{ki} b_{iq}$$

$$\bar{g}_{pq} = a_{pk} b_{iq} g_{ki}$$

es decir G en el sistema de coordenadas (x^1, x^2) se transforma el al sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, mediante la siguiente ley de transformación

$$\bar{g}_{pq} = a_{pk} b_{iq} g_{ki}$$

Tensores de orden 0 y 1

Ahora consideremos un vector v, sus componentes se transforman de un sistema de coordenadas x^1, x^2 y x^3 a otro sistema de coordenadas $\bar{x}^1, \bar{x}^2$ y $\bar{x}^3$ mediante la siguiente regla:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente:

$$\bar{v}_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3$$
$$\bar{v}_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3$$
$$\bar{v}_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3$$

aplicando el convenio de la suma:

$$\bar{v}_j = a_{j1}v_1 + a_{j2}v_2 + a_{j3}v_3$$
$$\bar{v}_j = a_{ji}v_i - - - -(*)$$

Esta ecuación proporciona la definición matemática de un vector: v es un vector si sus componentes se transforman de acuerdo con la regla $*$

Del mismo modo, un escalar s se define por la propiedad de que su valor no cambia por una transformación de coordenadas:

$$\bar{s} = s$$

Donde:

- s esta en coordenadas x^1, x^2 y x^3.
- $\bar{s}$ esta en coordenadas $\bar{x}^1, \bar{x}^2$ y$\bar{x}^3$.

Por lo que al usar estas nuevas definiciones de escalares y vectores, en términos de sus propiedades de transformación bajo una transformación de ejes de coordenadas, se pueden obtener una serie de resultados rigurosos.

Consideremos un campo vectorial $V = (V^i)$ definidas en algún subconjunto L de $\mathbb{R}^n$ (que para cada i la componente $V^i = V^i(\mathbf{x})$ es un campo escalar).En cada sistema de coordenadas admisible de una región U que contiene a L, sea las n componentes $V^1, V^2, ..., V^n$ de V se expresan como n funciones reales:

$$T^1, T^2, ..., T^n \text{ en el sistema } x^1, x^2, ..., x^n$$
$$\bar{T}^1, \bar{T}^2, ..., \bar{T}^n \text{ en el sistema } \bar{x}^1, \bar{x}^2, ..., \bar{x}^n$$

Vector contravariante o tensor contravariante 1

El campo vectorial V es un tensor contravariante de orden uno (o tensor contravariante) siempre que sus componentes (T^i) y $(\bar{T}^i)$ en relación con los respectivos sistemas de coordenadas (x^i) y $(\bar{x}^i)$ 'obedezcan la siguiente ley de transformación ley de transformación:

$$\bar{T}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} T^r$$

Ejemplo 14

Demostrar que el vector tangente a una curva es un tensor contravariante de orden 1.
Sea C una curva dada por la parametrización en el sistema de coordenadas x^i:

$$x^i = x^i(t)$$

con $a \leq t \leq b$
El vector tangente $\mathbf{T} = (T^i)$ es definido por la siguiente fórmula :

$$T^i = \frac{dx^i}{dt}$$

bajo un cambio de coordenadas , la misma curva en el sistema de coordenadas $\bar{x}^i$ esta dada por:

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(t) = \bar{x}^i(x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t))$$

con $a \leq t \leq b$
y el vector tangente para C en el sistema de coordenadas $\bar{x}^i$ tiene componentes

$$\bar{T}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dt}$$

Pero, por la regla de la cadena:

$$\bar{T}^i = \frac{d\bar{x}^i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{dx^r}{dt}$$

o equivalentemente:

$$\bar{T}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}T^r$$

Demostramos que **T** es un vector contravariante, concluimos en general que, bajo un cambio de coordenadas, el vector tangente de una curva se transforma como un tensor contravariante de orden uno

Vectores covariantes o tensores covariantes de orden 1

El campo vectorial V es un tensor covariante de orden uno (o tensor covariante) siempre que sus componentes (T_i) y $(\bar{T}_i)$ en relación con los respectivos sistemas de coordenadas (x^i) y $(\bar{x}^i)$ ‘obedezcan la siguiente ley de transformación ley de transformación:

$$\bar{T}_i = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} T_r$$

Ejemplo 15

Demostrar que el gradiente es un vector covariante o tensor covariante de orden 1.
Sea $F(\mathbf{x})$ un campo escalar diferenciable, definido en un sistema de coordenadas x^i de $\mathbb{R}^n$, El gradiente de F es un campo vectorial dado por:

$$\nabla F \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}, \frac{\partial F}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x^n} \right)$$

En el sistema de coordenadas $\bar{x}^i$, el gradiente esta dado por

$$\bar{\nabla} F \equiv \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^1}, \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^2}, ..., \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^1} \right)$$

notemos que la componente i-esima de este último vector es:

$$\bar{T}_i = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}^i}$$

, entonces por la regla de la cadena:

$$\bar{T}_i = \frac{\partial F}{\partial x^r} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}$$

luego:

$$\bar{T}_i = \frac{\partial F}{\partial x^r}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}$$
$$\bar{T}_i = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial F}{\partial x^r}$$

pero la componente r-esima de ∇F es

$$T_r = \frac{\partial F}{\partial x^r}$$

Reemplazando:

$$\bar{T}_i = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}T_r$$

Entonces ∇F es un vector covariante o tensor de orden 1. Los vectores tangentes y los vectores de gradiente son realmente dos tipos diferentes de vectores. En el cálculo tensorial está vitalmente relacionado con la distinción entre contravarianza y covarianza, y emplea consistentemente índices superiores(contravarianza) para indicar uno e índices inferiores (covarianza) para indicar el otro.

Ejemplo 16

Supongamos que $\left(T^i\right)$ es un un vector contravariante en $\mathbb{R}^2$ y que $\left(T^i\right) = \left(x^2, x^1\right)$ en el sistema de coordenadas x^i.
Calcular $\left(\bar{T}^i\right)$ en el sistema de coordenadas $\bar{x}^i$, bajo el sistema de coordenadas:

$$\bar{x}^1 = \left(x^2\right)^2$$

$$\bar{x}^2 = x^1 x^2$$

Por definición de contravarianza:

$$\bar{T}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} T^r$$

$$\bar{T}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} T^1 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} T^2$$

Luego:

$$\bar{T}^1 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} T^1 + \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} T^2$$

$$\bar{T}^2 = \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} T^1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} T^2$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{T}^1 \\ \bar{T}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} \bar{T}^1 \\ \bar{T}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x^1 \end{bmatrix}$$

Simplificando:

$$\begin{bmatrix} \bar{T}^1 \\ \bar{T}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1 x^2 \\ \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 \end{bmatrix}$$

Reemplazando las ecuaciones de transformación tenemos:

$$\bar{T}^1 = 2\bar{x}^2$$

$$\bar{T}^2 = \bar{x}^1 + \frac{\left(\bar{x}^2\right)^2}{\bar{x}^1}$$

Ejemplo 17

Calcular $\bar{T}_i$ en el sistema de coordenadas $\bar{x}^i$ si $\mathbf{V} = (T_i) = \left(x^2, x^1 + 2x^2\right)$ es un vector covariante bajo la siguiente transfomación de coordenadas:

$$\bar{x}^1 = \left(x^2\right)^2$$

$$\bar{x}^2 = x^1 x^2$$

Utilizando la definición

$$\bar{T}_i = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} T_r$$

$$\bar{T}_i = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^i} T_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^i} T_2$$

luego:

$$\bar{T}_1 = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} T_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} T_2$$

$$\bar{T}_2 = \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} T_1 + \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} T_2$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

Notemos que :

$$\bar{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} \end{bmatrix}$$

pero

$$J^{-1} = \bar{J} = \begin{bmatrix} 0 & 2x^2 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2\left(x^2\right)^2} \begin{bmatrix} x_1 & -2x^2 \\ -x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} -\frac{x^1}{2\left(x^2\right)^2} & \frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{2x^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{J}^T = \begin{bmatrix} -\frac{x^1}{2\left(x^2\right)^2} & \frac{1}{2x^2} \\ \frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix}$$

reemplazando en:

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

tenemos...

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x^1}{2\left(x^2\right)^2} & \frac{1}{2x^2} \\ \frac{1}{x^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ x^1 + 2x^2 \end{bmatrix}$$

Simplificando:

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $(\bar{T}^i) = (1, 1)$ para todos los puntos en el sistema $\bar{x}^i$ (excluyendo $\bar{x}^1 = 0$)

Tensores contravariantes de orden 2

Sea $\mathbf{V} = (V^{ij})$ un campo matricial, que es una matriz de $n \times n$ campos escalares $V^{ij}(\mathbf{x})$, todo definido sobre la misma región U en $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{V}$ asume una representación T^{ij} en (x^i) y $\bar{T}^{ij}$ en $(\bar{x}^i)$ donde (x^i) y $\bar{x}^i$ son sistemas de coordenadas.

El campo matricial V es un tensor contravariante de orden 2 si sus componentes (T^{ij}) en (x^i) y $(\bar{T}^{ij})$ en $(\bar{x}^i)$, se relacionan mediante la siguiente ley de transformación:

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s} T^{rs}$$

Tensores covariantes de orden 2

El campo matricial V es un tensor covariante de orden 2 si sus componentes (T_{ij}) en (x^i) y $(\bar{T}_{ij})$ en $(\bar{x}^i)$, se relacionan mediante la siguiente ley de transformación:

$$\bar{T}_{ij} = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} T_{rs}$$

Tensores mixtos de orden 2

El campo matricial V es un tensor mixto de orden 2, contravariante de orden 1 y covariante de orden 1 ,si sus componentes (T^i_j) en (x^i) y $(\bar{T}^i_j)$ en $(\bar{x}^i)$, se relacionan mediante la siguiente ley de transformación:

$$\bar{T}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} T^r_s$$

Ejemplo

Supongamos que las componentes contravariantes de un tensor T de orden 2 en un sistema de coordenadas $(x^1.x^2)$ de $\mathbb{R}^2$ son $T^{11} = 1, T^{12} = 1, T^{21} = -1$ y $T^{22} = 2$.

- Encontrar las componentes $\bar{T}^{ij}$ de T en el sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, donde las ecuaciones de transformación que relaciona el sistema $(x^1.x^2)$ con $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ son:

$$\bar{x}^1 = \left(x^1\right)^2$$

$$\bar{x}^2 = x^1 x^2$$

- Calcular los valores de $\bar{T}^{ij}$ en el punto cuyas coordenadas son $x^1 = 1$, $x^2 = -2$

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s} T^{rs}$$

$$\bar{T}^{ij} = T^{rs} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^s}$$

$$\bar{T}^{ij} = J^i_r T^{rs} J^s_j$$

$$\bar{T} = J T J^T$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1 & 0 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix}$$

$$J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1 & x^2 \\ 0 & x^1 \end{bmatrix}$$

$$T = T^{ij} = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} \\ T^{21} & T^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$JTJ^T = \begin{bmatrix} 2x^1 & 0 \\ x^2 & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x^1 & x^2 \\ 0 & x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(x^1)^2 & 2x^1x^2 + 2(x^1)^2 \\ 2x^1x^2 - 2(x^1)^2 & 2(x^1)^2 + (x^2)^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{T} = \bar{T}^{ij} = \begin{bmatrix} \bar{T}^{11} & \bar{T}^{12} \\ \bar{T}^{21} & \bar{T}^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(x^1)^2 & 2x^1x^2 + 2(x^1)^2 \\ 2x^1x^2 - 2(x^1)^2 & 2(x^1)^2 + (x^2)^2 \end{bmatrix}$$

Operación con tensores

Sean dos tensores T y S, ambos p contravariante y q covariante

$$T = T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

$$S = S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

suma de tensores Tensores del mismo orden se suman elemento a elemento:

$$T + S = T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} + S^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

multiplicación de un tensor por un escalar sea c un escalar y T un tensor p contravariante y q covariante, entonces la multiplicación del escalar c por el tensor T es:

$$cT = cT^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

Producto exterior de tensores: Sea T un tensor p contravariante y q covariante, y S un tensor r contravariante y x covariante, entonces el producto exterior entre S y T es:

$$ST = S^{i_1 i_2 \dots i_r}_{j_1 j_2 \dots j_s} T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

Contracción de un tensor Sea T un tensor p contravariante y q covariante, que es de orden $p+q$.

$$T = T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

sean n y m enteros positivos con $1 \leq n \leq p$ y $1 \leq m \leq q$, talque $i_n = i_m = t$ entonces:

$$T^{i_1 i_2 \dots t \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots t \dots j_q}$$

es un tensor de orden $p+q-2$, y $p-1$ contravariante y $q-1$ covariante.

Nota Contraer un tensor, es igualar dos indices, y luego realizar la suma con respecto a ese par de indices.

Ejemplos

Contraer i con k si:

$$A_{ij}^{k} = \left\{ \underset{k=1}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}} ; \underset{k=2}{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}} ; \underset{k=3}{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}} \right\}$$

Note A_{ij}^{k} que es un tensor de orden 3, con un indices k contravariante y con dos indices j, k covariantes, tenemos que igualar los indices i y k, es decir $i = k = r$ y obtenemos un tensor B de orden 1 dado por:

$$B = A_{rj}^{r} = A_{1j}^{1} + A_{2j}^{2} + A_{3j}^{3}$$

$$j = 1 \Rightarrow A_{r1}^{r} = A_{11}^{1} + A_{21}^{2} + A_{31}^{3}$$

$$j = 2 \Rightarrow A_{r2}^{r} = A_{12}^{1} + A_{22}^{2} + A_{32}^{3}$$

$$j = 3 \Rightarrow A_{r3}^{r} = A_{13}^{1} + A_{23}^{2} + A_{33}^{3}$$

Reemplazando:

$$A^r_{r1} = A^1_{11} + A^2_{21} + A^3_{31} = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$A^r_{r2} = A^1_{12} + A^2_{22} + A^3_{32} = 0 + 6 + 2 = 8$$

$$A^r_{r3} = A^1_{13} + A^2_{23} + A^3_{33} = 5 + 3 + 6 = 14$$

es decir, si contraemos los indices i, k se obtiene el siguiente tensor de orden 1...

$$B = A^r_{rj} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Dados los tensores, en base canónica (natural), calcular los productos internos $T_{ik}A^i$ y $T_{ik}A^k$

$$T_{ik} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^p = \overrightarrow{e}_1 + 2\overrightarrow{e}_2 + 3\overrightarrow{e}_3$$

Las coordenadas contravariantes del tensor $A^p =$

$$A^p = A^1\overrightarrow{e}_1 + A^2\overrightarrow{e}_2 + A^3\overrightarrow{e}_3$$

$$A^1 = 1$$

$$A^2 = 2$$

$$A^3 = 3$$

o en forma matricial

$$A^p = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T_{ik}A^i = T_{1k}A^1 + T_{2k}A^2 + T_{3k}A^3$$

para $k = 1, 2, 3$:

$$T_{i1}A^i = T_{11}A^1 + T_{21}A^2 + T_{31}A^3$$

$$T_{i2}A^i = T_{12}A^1 + T_{22}A^2 + T_{32}A^3$$

$$T_{i3}A^i = T_{13}A^1 + T_{23}A^2 + T_{33}A^3$$

luego:

$$\begin{bmatrix} T_{i1}A^i \\ T_{i2}A^i \\ T_{i3}A^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{i1}A^i \\ T_{i2}A^i \\ T_{i3}A^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T^i_{ik} = \begin{bmatrix} T_{i1}A^i \\ T_{i2}A^i \\ T_{i3}A^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$S_k = T^i_{ik} = \begin{bmatrix} 10 \\ 17 \\ 16 \end{bmatrix}$$

para $T_{ik}A^k$, se tiene:

$$T_{ik}A^k = T_{i1}A^1 + T_{i2}A^2 + T_{i3}A^3$$

si $i = 1, 2, 3$

$$T_{1k}A^k = T_{11}A^1 + T_{12}A^2 + T_{13}A^3$$
$$T_{2k}A^k = T_{21}A^1 + T_{22}A^2 + T_{23}A^3$$
$$T_{3k}A^k = T_{31}A^1 + T_{32}A^2 + T_{33}A^3$$

$$T_{ik}A^k = \begin{bmatrix} T_{1k}A^k \\ T_{2k}A^k \\ T_{3k}A^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$$

$$T_{ik}A^k = \begin{bmatrix} T_{1k}A^k \\ T_{2k}A^k \\ T_{3k}A^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T_{ik}A^k = \begin{bmatrix} T_{1k}A^k \\ T_{2k}A^k \\ T_{3k}A^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 19 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$R_i = T_{ik}A^k = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 19 \end{bmatrix}$$

El tensor métrico o fundamental

El concepto de distancia (o métrica) es fundamental en las matemáticas aplicadas. Con frecuencia, el concepto de distancia más útil en una aplicación particular es no euclidiano (bajo el cual la relación pitagórica para los triángulos rectángulos geodésicos no es válida).
El cálculo tensorial proporciona una herramienta natural para las formas asumidas por la métrica euclidiana en sistemas de coordenadas particulares.

Una definición del tensor métrico y tensor recíproco

El tensor métrico $G = (g_{pq})$ se puede calcular mediante la siguiente ecuación:

$$G = J^T J$$

el tensor recíproco viene determinado por:

$$G^{-1} = (g^{pq})$$

Otra forma de calcular el tensor métrico

Un sistema de coordenadas con una base formada por los vectores α_1 , α_2 y α_3 es ortogonal si y solo si

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 \circ \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 \circ \alpha_3 = 0$$

es decir los vectores de la base son ortogonales a pares.
El tensor métrico g_{pq} es la representación matricial de un producto interior definido en un punto del sistema de coordenadas curvilíneo, y esta determinado de la siguiente manera

$$g_{pq} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \circ \alpha_1 & \alpha_1 \circ \alpha_2 & \alpha_1 \circ \alpha_3 \\ \alpha_2 \circ \alpha_1 & \alpha_2 \circ \alpha_2 & \alpha_2 \circ \alpha_3 \\ \alpha_3 \circ \alpha_1 & \alpha_3 \circ \alpha_2 & \alpha_3 \circ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$g_{pq} = \alpha_p \circ \alpha_q$$

$$1 \leq p \leq 3$$

$$1 \leq q \leq 3$$

p y q son enteros positivos.

Norma o tamaño de un vector y ángulo entre dos vectores

Sean $v = v^i$ las coordenadas contravariantes $(x^1, x^2, ..., x^n)$ de un vector v, entonces la norma del vector v (tensor de orden 1) esta dada por la siguiente relación:

$$\|v\|^2 = g_{ij} v^i v^j$$

Sean $u = u^i$ y $v = v^i$ las coordenadas contravariantes $(x^1, x^2, ..., x^n)$ de dos vectores u y v, entonces el ángulo θ entre estos dos vectores esta dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{g_{ij} u^i v^j}{\sqrt{g_{pq} u^p u^q}\sqrt{g_{rs} v^r v^s}}$$

Ejemplo

Demostrar con la métrica para coordenadas polares los vectores:

$$u^i = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5x^1}\right) = \frac{3}{5}e_1 + \frac{4}{5x^1}e_2$$

$$v^i = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5x^1}\right) = -\frac{4}{5}e_1 + \frac{3}{5x^1}e_2$$

son ortonormales.

Para coordenadas polares tenemos las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\bar{x}^1 = x^1 \cos(x^2)$$

$$\bar{x}^2 = x^1 \sin(x^2)$$

entonces la matriz Jacobiana de T es

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \cos\left(x^2\right) & -x^1 \sin\left(x^2\right) \\ \sin\left(x^2\right) & x^1 \cos\left(x^2\right) \end{bmatrix}$$

Luego el tensor métrico $G = (g_{ij})$ para coordenadas polares es:

$$G = J^T J$$

$$G = \begin{bmatrix} \cos\left(x^2\right) & \sin\left(x^2\right) \\ -x^1 \sin\left(x^2\right) & x^1 \cos\left(x^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(x^2\right) & -x^1 \sin\left(x^2\right) \\ \sin\left(x^2\right) & x^1 \cos\left(x^2\right) \end{bmatrix}$$

$$G = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(x^1\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(x^1\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$u^i = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5x^1}\right) = \frac{3}{5}e_1 + \frac{4}{5x^1}e_2$$
$$u^i = u^1 e_1 + u^2 e_2$$

las coordenadas del tensor u^i son

$$u^1 = \frac{3}{5}$$
$$u^2 = \frac{4}{5x^1}$$

La norma al cuadrado de $u = u^i$ es:

$$\|u\|^2 = g_{ij} u^i u^j$$
$$\|u\|^2 = g_{1j} u^1 u^j + g_{2j} u^2 u^j$$
$$\|u\|^2 = g_{11} u^1 u^1 + g_{12} u^1 u^2 + g_{21} u^2 u^1 + g_{22} u^2 u^2$$
$$\|u\|^2 = (1) u^1 u^1 + (0) u^1 u^2 + (0) u^2 u^1 + \left(x^1\right)^2 u^2 u^2$$
$$\|u\|^2 = (1)\left(u^1\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(u^2\right)^2$$
$$\|u\|^2 = \left(u^1\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(u^2\right)^2$$
$$\|u\|^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(\frac{4}{5x^1}\right)^2$$

simplificando:

$$\|u\|^2 = 1$$

$$\|u\| = 1$$

$u = u^i$ es un vector (tensor de orden 1) unitario.

$$v^i = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5x^1}\right) = -\frac{4}{5}e_1 + \frac{3}{5x^1}e_2$$

$$v^i = v^1 e_1 + v^2 e_2$$

las coordenadas del tensor v^i son

$$v^1 = -\frac{4}{5}$$

$$v^2 = \frac{3}{5x^1}$$

La norma al cuadrado de $v = v^i$ es:

$$\|v\|^2 = g_{ij} v^i v^j$$

$$\|v\|^2 = g_{1j} v^1 v^j + g_{2j} v^2 v^j$$

$$\|v\|^2 = g_{11} v^1 v^1 + g_{12} v^1 v^2 + g_{21} v^2 v^1 + g_{22} v^2 v^2$$

$$\|v\|^2 = (1) v^1 v^1 + (0) v^1 v^2 + (0) v^2 v^1 + \left(x^1\right)^2 v^2 v^2$$

$$\|v\|^2 = (1) \left(v^1\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(v^2\right)^2$$

$$\|v\|^2 = \left(v^1\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(v^2\right)^2$$

$$\|v\|^2 = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(x^1\right)^2 \left(\frac{3}{5x^1}\right)^2$$

$$\|v\|^2 = 1$$

$$\|v\| = 1$$

$v = v^i$ es un vector (tensor de orden 1) unitario.

Probemos que u^i y v^j son ortogonales, es decir que el ángulo que forman estos dos tensores de orden 1 es de $\frac{\pi}{2}$.

$$g_{ij}u^i v^j = g_{1j}u^1 v^j + g_{2j}u^2 v^j$$

$$g_{ij}u^i v^j = g_{11}u^1 v^1 + g_{12}u^1 v^2 + g_{21}u^2 v^1 + g_{22}u^2 v^2$$

$$g_{ij}u^i v^j = (1)u^1 v^1 + (0)u^1 v^2 + (0)u^2 v^1 + \left(x^1\right)^2 u^2 v^2$$

$$g_{ij}u^i v^j = u^1 v^1 + \left(x^1\right)^2 u^2 v^2 = 0$$

reemplazando:

$$g_{ij}u^i v^j = \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(x^1\right)^2 \left(\frac{4}{5x^1}\right)\left(\frac{3}{5x^1}\right)$$

entonces:

$$\cos(\theta) = 0$$

el ángulo que forman u y v es:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo

Calcular la longitud de arco de la curva $u = x^1 = \frac{\pi}{4}$, $v = x^2 = t$, sobre una esfera unitaria centrada en el origen de coordenadas, para $0 \leq t \leq 2\pi$

- Dibujar la curva sobre la esfera.
- Utilizar geometría intrínseca
- Utilizar geometría extrínseca

Las ecuaciones de transformación son las siguientes

$$x = a\sin(u)\cos(v)$$

$$y = a\sin(u)\sin(v)$$

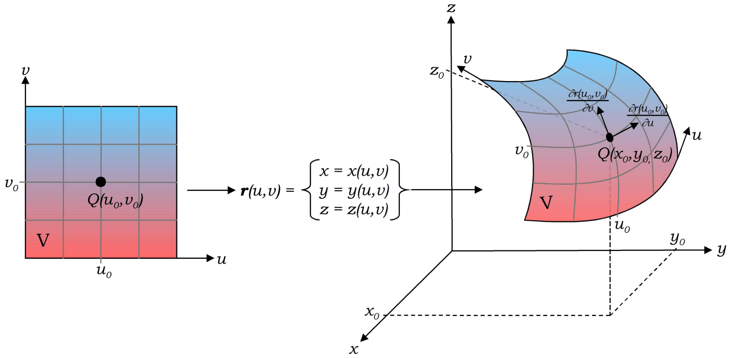
$$z = a\cos(u)$$

$$\overrightarrow{r}(u,v) = a\sin(u)\cos(v)\hat{\imath} + a\sin(u)\sin(v)\hat{\jmath} + a\cos(u)\hat{k}$$

Estas a su vez son las ecuaciones de parametrización de la esfera de radio a

$$\alpha_1 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = a\cos(u)\cos(v)\hat{\imath} + a\cos(u)\sin(v)\hat{\jmath} - a\sin(u)\hat{k}$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = -a\sin(u)\sin(v)\hat{\imath} + a\sin(u)\cos(v)\hat{\jmath}$$



Entonces el tensor métrico es:

$$g_{pq} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \sin^2(u) \end{bmatrix}$$

Entonces el elemento de línea esta dada por :

$$(ds)^2 = \sum_{p=1}^{2} \sum_{q=1}^{2} g_{pq} dx^p dx^q$$

donde: $x^1 = u$ y $x^2 = v$

$$(ds)^2 = \sum_{p=1}^{2} g_{p1} dx^p dx^1 + g_{p2} dx^p dx^2$$

$$(ds)^2 = (g_{11} dx^1 dx^1 + g_{12} dx^1 dx^2) + (g_{21} dx^2 dx^1 + g_{22} dx^2 dx^2)$$

$$(ds)^2 = (g_{11} dudu + g_{12} dudv) + (g_{21} dvdu + g_{22} dvdv)$$

$$(ds)^2 = g_{11}(du)^2 + g_{12} dudv + g_{21} dvdu + g_{22}(dv)^2$$

$$(ds)^2 = a^2(du)^2 + (0)dudv + (0)dvdu + a^2 \sin^2(u)(dv)^2$$

por lo tanto

$$(ds)^2 = a^2(du)^2 + a^2 \sin^2(u)(dv)^2$$

En el anterior problema se tiene dos coordenadas curvilíneas u, v, por que para identificar un punto de la esfera se necesita de dos coordenadas, que son la latitud u y longitud v

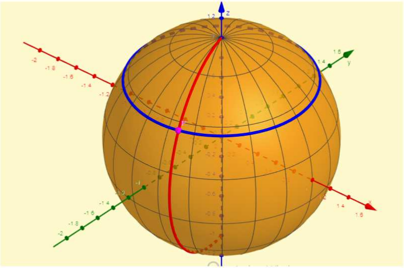


Figure: Esfera de radio a

la curva roja sobre la esfera representa la latitud u y la curva azul representa la longitud v, la intersección de ambas curvas da como resultado las coordenadas (u, v) sobre la esfera de radio a

La curva que se sobre la superficie es:

$$x = a\sin(u)\cos(v)$$
$$y = a\sin(u)\sin(v)$$
$$z = a\cos(u)$$
$$x^1 = u = \frac{\pi}{4}$$
$$x^2 = v = t$$
$$a = 1$$
$$x = \sin(\frac{\pi}{4})\cos(t)$$
$$y = \sin(\frac{\pi}{4})\sin(t)$$
$$z = \cos(\frac{\pi}{4})$$

luego:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t)$$
$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

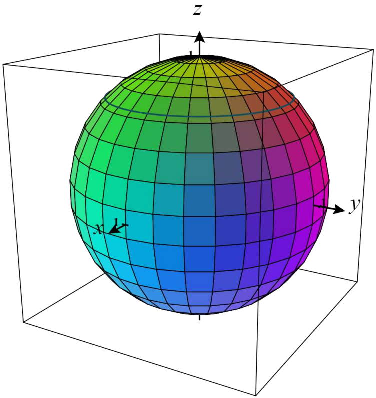


Figure: Esfera de radio 1, con la curva $x^1 = u = \frac{\pi}{4}$,$x^2 = v = t$

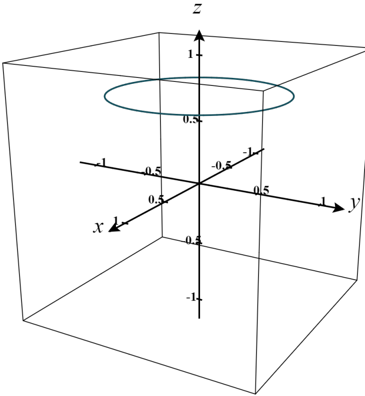


Figure: la curva $\overrightarrow{r}(t)$ sobre la esfera

Cálculo de la longitud de arco, usando la geometría extrínseca

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\| dt$$

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t), \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t), 0\right)$$

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\|^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t)\right)^2$$

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

reemplazando:

$$s = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} dt$$

$$s = \sqrt{2}\pi$$

Utilizando geometría intrínseca

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$$

por la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \alpha_1 \frac{du}{dt} + \alpha_2 \frac{dv}{dt}$$

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\|^2 = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \circ \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}$$

pero

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\|^2 = \left(\alpha_1 \frac{du}{dt} + \alpha_2 \frac{dv}{dt}\right) \circ \left(\alpha_1 \frac{du}{dt} + \alpha_2 \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\|^2 = \left(\alpha_1 \frac{du}{dt}\right) \circ \left(\alpha_1 \frac{du}{dt}\right) + \left(\alpha_1 \frac{du}{dt}\right) \circ \left(\alpha_2 \frac{dv}{dt}\right) + \left(\alpha_2 \frac{dv}{dt}\right) \circ \left(\alpha_1 \frac{du}{dt}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\alpha_2 \frac{dv}{dt}\right) \circ \left(\alpha_2 \frac{dv}{dt}\right)$$

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\|^2 = (\alpha_1 \circ \alpha_1)\frac{du}{dt}\frac{du}{dt} + (\alpha_1 \circ \alpha_2)\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + (\alpha_2 \circ \alpha_1)\frac{dv}{dt}\frac{du}{dt} + (\alpha_2 \circ \alpha_2)\frac{dv}{dt}\frac{dv}{dt}$$

pero

$$g_{11} = \alpha_1 \circ \alpha_1 = 1$$

$$g_{12} = \alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$$

$$g_{21} = \alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$$

$$g_{22} = \alpha_2 \circ \alpha_2 = \sin^2(u) = \sin^2(x^1)$$

y

$$u = x^1; v = x^2$$

entonces:

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\|^2 = g_{11}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{12}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + g_{21}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{22}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt}$$

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\|^2 = g_{1q}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^q}{dt} + g_{2q}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^q}{dt}$$

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\|^2 = g_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}$$

$$\left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\| = \sqrt{g_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}}$$

entones la longitud de arco sobre la esfera es

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} \right\| dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{pq}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}}dt$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{12}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + g_{21}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{22}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt}}dt$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left((1)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^1}{dt} + (\sin^2(x^1))\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt}\right)}dt$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + (\sin^2(x^1))\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2}dt$$

$$x^1 = u = \frac{\pi}{4}$$

$$x^2 = v = t$$

$$\frac{dx^1}{dt} = 0$$

$$\frac{dx^2}{dt} = 1$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(0)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)(1)^2}dt$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2}}dt = \sqrt{2}\pi$$

La longitud de arco en el espacio euclidiano

La expresión o fórmula clásica para calcular la longitud de arco en varios sistemas de coordenadas conducen a una fórmula general del tipo

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

$$s_{(t)} = \int_0^t \sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt \tag{1}$$

Donde $g_{ij} = g_{ij}(x^1, x^2, ..., x^n) = g_{ji}$ son funciones de las coordenadas y s representa la longitud de arco entre $a \leq t \leq b$ de la curva $x^i = x^i(t)$

Ejemplo

La longitud de arco en el espacio euclidiano de tres dimensiones in un sistema de coordenadas rectangular (x^1, x^2, x^3) es:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \delta_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

$$s_{(t)} = \int_0^t \sqrt{\delta_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}\,dt \tag{2}$$

de manera equivalente

$$(ds)^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j$$

En general se tiene la ecuación para el cuadrado de la diferencial del arco:

$$(ds)^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

Ejemplo

Sean (x^1, x^2) y $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ son dos sistemas coordenados relacionados por las siguientes ecuaciones de transformación T:

$$T = \begin{cases} \bar{x}^1 = e^{x^1 + x^2} \\ \bar{x}^2 = e^{x^1 - x^2} \end{cases}$$

- Hallar la matriz jacobiana J de la transformación de coordenadas T
- Hallar las ecuaciones de transformación inversa T^{-1}.
- Hallar la matriz jacobiana $\bar{J}$ de la transformación inversa de coordenadas.
- Calcular el tensor métrico G.

- $$T = \begin{cases} \bar{x}^1 = e^{x^1+x^2} \\ \bar{x}^2 = e^{x^1-x^2} \end{cases}$$

$$ln(\bar{x}^1) = x^1 + x^2$$

$$ln(\bar{x}^2) = x^1 - x^2$$

entonces:

$$x^1 = \frac{ln(\bar{x}^1) + ln(\bar{x}^2)}{2}$$

$$x^2 = \frac{ln(\bar{x}^1) - ln(\bar{x}^2)}{2}$$

Las ecuaciones de transformación inversa son:

$$T^{-1} = \begin{cases} x^1 = \frac{ln(\bar{x}^1)+ln(\bar{x}^2)}{2} \\ x^2 = \frac{ln(\bar{x}^1)-ln(\bar{x}^2)}{2} \end{cases}$$

La matriz jacobiana para la transformación T es:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} e^{x^1+x^2} & e^{x^1+x^2} \\ e^{x^1-x^2} & -e^{x^1-x^2} \end{bmatrix}$$

La matriz jacobiana de la transformación T^{-1} es:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} \end{bmatrix}$$

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\bar{x}^1} & \frac{1}{2\bar{x}^2} \\ \frac{1}{2\bar{x}^1} & -\frac{1}{2\bar{x}^2} \end{bmatrix}$$

El tensor métrico $G = g_{ij}$ esta dado por la siguiente ecuación:

$$G = J^T J = \begin{bmatrix} e^{x^1+x^2} & e^{x^1+x^2} \\ e^{x^1-x^2} & -e^{x^1-x^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x^1+x^2} & e^{x^1+x^2} \\ e^{x^1-x^2} & -e^{x^1-x^2} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} e^{2(x^1+x^2)} + e^{2x^1} & e^{2(x^1+x^2)} - e^{2x^1} \\ e^{2x^1} - e^{2(x^1-x^2)} & e^{2x^1} + e^{2(x^1-x^2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = e^{2(x^1+x^2)} + e^{2x^1}$$

$$g_{12} = e^{2(x^1+x^2)} - e^{2x^1}$$

$$g_{21} = e^{2x^1} - e^{2(x^1-x^2)}$$

$$g_{22} = e^{2x^1} + e^{2(x^1-x^2)}$$

Ejemplo

Usando la métrica euclidiana para coordenadas polares , calcular la longitud de arco par la curva:

$$C : x^1 = 2acos(t) \ , \ x^2 = t \ , \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Para coordenadas polares tenemos las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\bar{x}^1 = x^1 cos(x^2)$$

$$\bar{x}^2 = x^1 sen(x^2)$$

entonces la matriz Jacobiana de T e

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & -x^1 sen\left(x^2\right) \\ sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) \end{bmatrix}$$

Luego el tensor métrico $G = (g_{ij})$ para coordenadas polares es:

$$G = J^T J$$

$$G = \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & sen\left(x^2\right) \\ -x^1 sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & -x^1 sen\left(x^2\right) \\ sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) \end{bmatrix}$$

$$G = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(x^1\right)^2 \end{bmatrix}$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(x^1\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

luego:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{1j}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^j}{dt} + g_{2j}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{11}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{12}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + g_{21}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{22}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{11}\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + g_{22}\left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (1)\left(-2asen(t)\right)^2 + \left(x^1\right)^2(1)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (1)\left(-2asen(t)\right)^2 + \left(2acos(t)\right)^2(1)^2$$

$$\frac{ds}{dt} = 2a$$

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2adt = a\pi$$

$$s = a\pi$$

Ejemplo

Usar la métrica

$$G = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (x^1)^2 \end{bmatrix}$$

calcular la longitud de arco de la curva dada por $x^1 = 3 - t$;
$x^2 = 6t + 3{:}x^3 = ln(t)$
y $1 \leq t \leq e$

Consideremos:

$$G = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & (x^1)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

Utilicemos:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{1j}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^j}{dt} + g_{2j}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^j}{dt} + g_{3j}\frac{dx^3}{dt}\frac{dx^j}{dt}$$

$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{11}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{12}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + g_{13}\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^3}{dt} + g_{21}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{22}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt} + \ldots$
$\ldots + g_{23}\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^3}{dt} + g_{31}\frac{dx^3}{dt}\frac{dx^1}{dt} + g_{32}\frac{dx^3}{dt}\frac{dx^2}{dt} + g_{33}\frac{dx^3}{dt}\frac{dx^3}{dt}$
luego...
$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = (12)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^1}{dt} + (4)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + (0)\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^3}{dt} + (4)\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^1}{dt} + (1)\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^2}{dt} + \ldots$
$\ldots + (1)\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^3}{dt} + (0)\frac{dx^3}{dt}\frac{dx^1}{dt} + (1)\frac{dx^3}{dt}\frac{dx^2}{dt} + (x^1)^2\frac{dx^3}{dt}\frac{dx^3}{dt}$
Simplificando

$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 12\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + 8\frac{dx^1}{dt}\frac{dx^2}{dt} + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + 2\frac{dx^2}{dt}\frac{dx^3}{dt} + (x^1)^2\left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2$

$$\frac{dx^1}{dt} = -1$$

$$\frac{dx^2}{dt} = 6$$

$$\frac{dx^3}{dt} = \frac{1}{t}$$

Reemplazando:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 12(1) + 8(-6) + 36 + 2(6)(\frac{1}{t}) + (3-t)^2\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{t+3}{t}\right)^2$$

$$s = \int_1^e \left(1 + \frac{3}{t}\right) dt = 2 + e$$

$$s = 2 + e$$

Ejemplo

Dada la superficie $z = x + y^2$, utilizando ecuaciones transformación, hallar:

- Su métrica asociada
- Elemento de área para la métrica elegida.
- El área de la superficie sobre el triángulo $0 \leq y \leq 1$; $0 \leq x \leq y$.

primero hallemos la ecuaciones de transformación en este caso

$$x = x^1$$

$$y = x^2$$

$$z = x^1 + \left(x^2\right)^2$$

$\bar{x}^1 = x$, $\bar{x}^2 = y$, $\bar{x}^3 = z$

de donde

$$\bar{x}^1 = x^1$$

$$\bar{x}^2 = x^2$$

$$\bar{x}^3 = x^1 + \left(x^2\right)^2$$

Nota $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ con las coordenadas cartesianas y (x^1, x^2) son las coordenadas en la superficie $z = x + y^2$

Sea $\overrightarrow{r}$ el vector de posición en coordenadas cartesianas.

$$\overrightarrow{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$\overrightarrow{r} = x^1\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + \left(x^1 + \left(x^2\right)^2\right)\hat{k}$$

además:

$$\hat{\imath} = e_1$$
$$\hat{\jmath} = e_2$$
$$\hat{k} = e_3$$

entonces...

$$\overrightarrow{r} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \left(x^1 + \left(x^2\right)^2\right) e_3$$

después:

$$\alpha_1 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^1} = e_1 + e_3$$
$$\alpha_2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^2} = e_2 + \left(2x^2\right) e_3$$

Luego el tensor métrico esta dado por:

$$g_{11} = 2$$
$$g_{12} = 2x^2$$
$$g_{21} = 2x^2$$
$$g_{22} = 1 + 4\left(x^2\right)^2$$

la métrica (tensor métrico g_{ij}) para la superficie dada es:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2x^2 \\ 2x^2 & 1+4\left(x^2\right)^2 \end{bmatrix}$$

Elemento de área para la métrica esta dado por:

$$dS = \sqrt{|G|}$$

$$|G| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$$

$$\sqrt{|G|} = \sqrt{\left(2+8\left(x^2\right)^2\right) - 4\left(x^2\right)^2}$$

$$\sqrt{|G|} = \sqrt{2+4\left(x^2\right)^2}$$

o equivalentemente:

$$\sqrt{|G|} = \sqrt{2+4y^2}$$

el elemento de área también se puede hallar de la siguiente manera

$$\left\| \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^1} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^2} \right\|^2 = \|\alpha_1 \times \alpha_2\|^2$$

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\|^2 = \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 \sin^2(\theta)$$

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\|^2 = \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 \left(1 - \cos^2(\theta)\right)$$

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\|^2 = \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 - \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 \cos^2(\theta)$$

pero $\alpha_1 \circ \alpha_2 = \|\alpha_1\| \|\alpha_2\| \cos(\theta)$

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\|^2 = \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 - \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 \cos^2(\theta)$$

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\|^2 = \|\alpha_1\|^2 \|\alpha_2\|^2 - (\alpha_1 \circ \alpha_2)^2$$

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\|^2 = (\alpha_1 \circ \alpha_1)(\alpha_2 \circ \alpha_2) - (\alpha_1 \circ \alpha_2)(\alpha_2 \circ \alpha_1)$$

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\|^2 = g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}$$

$$\|\alpha_1 \times \alpha_2\| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}}$$

de donde :

$$\sqrt{|G|} = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^1} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^2} \right\| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21}}$$

el área S del rectángulo pedida se obtiene resolviendo la siguiente integral

$$S = \iint_R \sqrt{G}\, dx^1 dx^2$$

$$S = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{2+4y^2}\, dx dy$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{2+4y^2}\, y dy$$

$$S = \frac{6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{12}$$

Relación entre covarianza y contravarianza

Para tensores de orden 1 se tiene las siguientes relaciones:

$$T_i = g_{ij} T^j$$

$$T^i = g^{ij} T_j$$

En las coordenadas curvilíneas (x^1, x^2, x^3), mostrara que los vectores contravariantes

$$T = T^i = \left(-\frac{x^1}{x^2}, 1, 0\right)$$

$$S = S^i = \left(\frac{1}{x^2}, 0, 0\right)$$

Si (x^1, x^2, x^3) esta relacionado con las coordenadas rectangulares $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ mediante:

$$\bar{x}^1 = x^2$$

$$\bar{x}^2 = x^3$$

$$\bar{x}^3 = x^1 x^2$$

donde $x^2 \neq 0$

- Hallar las coordenadas covariantes de del vector T.
- Hallar las coordenadas covariantes de del vector S.

Calculemos la matriz jacobiana para la transformación:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = J^T J$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & x^1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(x^2\right)^2 & x^1 x^2 & 0 \\ x^1 x^2 & 1 + \left(x^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces el tensor métrico es:

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(x^2\right)^2 & x^1 x^2 & 0 \\ x^1 x^2 & 1 + \left(x^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^i = \left(-\frac{x^1}{x^2}, 1, 0\right) = T^1 e_1 + T^2 e_2 + T^3 e_3$$

$$S^i = \left(\frac{1}{x^2}, 0, 0\right) = S^1 e_1 + S^2 e_2 + S^3 e_3$$

Las coordenadas contravariantes de los tensores T^i y S^i son:

$$T^1 = -\frac{x^1}{x^2}; T^2 = 1; T^3 = 0$$

$$S^1 = \frac{1}{x^2}; S^2 = 0; S^3 = 0$$

las coordenadas covariantes T_i Y S_i de estos mismos tensores se hallan mediante la siguiente relación

$$T_i = g_{ij} T^j$$

$$S_i = g_{ij} S^j$$

$$T_i = g_{i1}\, T^1 + g_{i2}\, T^2 + g_{i3}\, T^3$$

para $i = 1, 2, 3$

$$T_1 = g_{11}\, T^1 + g_{12}\, T^2 + g_{13}\, T^3$$
$$T_2 = g_{21}\, T^1 + g_{22}\, T^2 + g_{23}\, T^3$$
$$T_3 = g_{31}\, T^1 + g_{32}\, T^2 + g_{33}\, T^3$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(x^2\right)^2 & x^1 x^2 & 0 \\ x^1 x^2 & 1 + \left(x^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{x^1}{x^2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces el tensor T de orden 1, en coordenadas covariantes es:

$$T = T_1 e^1 + T_2 e^2 + T_3 e^3$$

$$T = (0)\, e^1 + (1)\, e^2 + (0) e^3$$

$$T = e^2$$

Notalos vectores e^1, e^2, e^3 son los vectores de la base covariante o también la base dual de e_1, e_2, e_3

$$S_i = g_{i1} S^1 + g_{i2} S^2 + g_{i3} S^3$$

para $i = 1, 2, 3$

$$S_1 = g_{11} S^1 + g_{12} S^2 + g_{13} S^3$$
$$S_2 = g_{21} S^1 + g_{22} S^2 + g_{23} S^3$$
$$S_3 = g_{31} S^1 + g_{32} S^2 + g_{33} S^3$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^1 \\ S^2 \\ S^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(x^2\right)^2 & x^1 x^2 & 0 \\ x^1 x^2 & 1 + \left(x^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{x^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces el tensor S de orden 1, en coordenadas covariantes es:

$$S = S_1 e^1 + S_2 e^2 + S_3 e^3$$

$$S = \left(x^2\right) e^1 + \left(x^1\right) e^2 + (0) e^3$$

$$S = \left(x^2\right) e^1 + \left(x^1\right) e^2$$

Notalos vectores e^1, e^2, e^3 son los vectores de la base covariante o también la base dual de e_1, e_2, e_3

Ejemplo 18

Sea $\phi = \phi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ un campo escalar en $\mathbb{R}^3$, hallar el gradiente de ϕ en coordenadas cilíndricas Recordemos que las ecuaciones de transformación F en este caso son

$$\bar{x}^1 = x^1 cos\left(x^2\right)$$

$$\bar{x}^2 = x^1 sen\left(x^2\right)$$

$$\bar{x}^3 = x^3$$

Donde: $\bar{x}^1 = x$,$\bar{x}^2 = y$,$\bar{x}^3 = z$,$x^1 = r$,$x^2 = \theta$,y $x^3 = z$
También consideremos que $\nabla\phi$ es un vector covariante, es decir

$$\nabla\phi \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^1}, \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^2}, \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^3}\right)$$

Donde su i-ésima coordenada o componente es:

$$\bar{T}_i = \frac{\partial\phi}{\partial\bar{x}^i}$$

Ahora calculamos el jacobiano de la transformación F el cual es:

$$J = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} \end{array} \right]$$

$$J = \left[\begin{array}{ccc} cos\left(x^2\right) & -x^1 sen\left(x^2\right) & 0 \\ sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$J^T = \left[\begin{array}{ccc} cos\left(x^2\right) & sen\left(x^2\right) & 0 \\ -x^1 sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Entonces el tensor métrico:

$$G = J^T J$$

$$G = \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & sen\left(x^2\right) & 0 \\ -x^1 sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & -x^1 sen\left(x^2\right) & 0 \\ sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(x^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de esto tenemos el tensor recíproco $G^{-1} = (g^{ij})$

$$G^{-1} = (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(x^1\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando la relación: Pero

$$T^i = g^{ij} T_j$$

$$\begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} - - - - (*)$$

La i-esima coordenada de $\nabla\phi$ en el sistema de coordenadas $(\bar{x}^i)$ es

$$\bar{T}_i = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i}$$

pero la ley de transformación para vectores covariantes es

$$\bar{T}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} T_j$$

luego

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \bar{T}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} T_j$$

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \bar{T}_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^k} T_j = \delta^j_k T_j = T_k$$

Reemplazando:

$$\bar{T}_i = \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i}$$

en

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \bar{T}_i = T_k$$

tenemos

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i} = T_k$$

simplificando

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^k} = T_k$$

Reemplazando esto en $*$

$$\begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

Simplificando:

$$\begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(x^1\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \\ \frac{1}{\left(x^1\right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\nabla \phi = \left(T^1, T^2, T^3 \right)$$

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^1}, \frac{1}{\left(x^1\right)^2} \frac{\partial \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \right)$$

Estas coordenadas no están en base física, para eso tenemos que corregir:

Donde $\alpha_1 = \sqrt{g_{11}}e_1$,$\alpha_2 = \sqrt{g_{22}}e_2$,$\alpha_3 = \sqrt{g_{33}}e_3$, reemplazando los datos tenemos:
$\alpha_1 = e_1$,$\alpha_2 = re_2$,$\alpha_3 = e_3$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}e_1 + \frac{1}{x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}e_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x^3}e_3$$

Entonces $\nabla\phi$ en coordenadas físicas es:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, \frac{1}{x^1}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}, \frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)$$

Nota Las coordenadas físicas son A^i

$$A^1 = \sqrt{g_{11}}\,T^1$$

$$A^2 = \sqrt{g_{22}}\,T^2$$

$$A^3 = \sqrt{g_{33}}\,T^3$$

Un resultado inesperado

Si revisamos nuestro cálculos en el anterior problema hemos probado que el gradiente de un campo escalar ϕ expresado en sus componentes contravariantes (T^i) se obtiene a partir de :

$$\begin{bmatrix} T^1 \\ T^2 \\ T^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

$$T^1 = g^{11}\frac{\partial \phi}{\partial x^1} + g^{12}\frac{\partial \phi}{\partial x^2} + g^{13}\frac{\partial \phi}{\partial x^3}$$
$$T^2 = g^{21}\frac{\partial \phi}{\partial x^1} + g^{22}\frac{\partial \phi}{\partial x^2} + g^{23}\frac{\partial \phi}{\partial x^3}$$
$$T^3 = g^{31}\frac{\partial \phi}{\partial x^1} + g^{32}\frac{\partial \phi}{\partial x^2} + g^{33}\frac{\partial \phi}{\partial x^3}$$

$$T^i = g^{i1}\frac{\partial \phi}{\partial x^1} + g^{i2}\frac{\partial \phi}{\partial x^2} + g^{i3}\frac{\partial \phi}{\partial x^3}$$
$$T^i = g^{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x^j}$$

Por lo tanto la i- esima coordenada contravariante de $\nabla\phi$ es

$$(\nabla\phi)^i = \left(g^{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x^j}\right)$$

Por lo tanto en un espacio de dimensión n, cuya base contravariante es $e_1, ..., e_n$, en un sistema de coordenadas $(x^1, x^2, ..., x^n)$, el gradiente de un campo escalar ϕ es:

$$\nabla\phi = g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}e_i$$

Nota: La fórmula anterior para el gradiente del campo escalar ϕ esta expresada en sus coordenadas contravariantes.

Un caso particular destacado

Si el sistema es ortogonal se tiene:

$$\nabla\phi = \left(g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}, g^{33}\frac{\partial\phi}{\partial x^3} \right)$$

o equivalentemente

$$\nabla\phi = \left(\frac{1}{g_{11}}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, \frac{1}{g_{22}}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}, \frac{1}{g_{33}}\frac{\partial\phi}{\partial x^3} \right)$$

en coordenadas físicas:

$$\nabla\phi = \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}, \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^3} \right)$$

Ejemplo

Expresar el siguiente vector en coordenadas cilíndricas físicas

$$\overrightarrow{B} = \frac{xy^2}{x^2+y^2} i + \frac{y^3}{x^2+y^2} j + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} k$$

como estamos en el sistema de coordenadas ortogonales rectangulares $\bar{x}^1$,$\bar{x}^2$ y $\bar{x}^3$ tenemos:

$$\overrightarrow{B} = \bar{B}_1 e^1 + \bar{B}_2 e^2 + \bar{B}_3 e^3 = \bar{B}_i e^i$$

$$\bar{B}_1 = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

$$\bar{B}_2 = \frac{y^3}{x^2+y^2}$$

$$\bar{B}_3 = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Nota: Si un sistema de coordenadas es ortogonal, las coordenadas contravariantes y covariantes son iguales,esa es la razón por la que para un vector en el sistema de coordenadas rectangulares no se diferencia entre coordenadas covariantes y contravariantes.

Las ecuaciones de transformación son:

$$x = \bar{x}^1 = x^1 cos\left(x^2\right)$$

$$y = \bar{x}^2 = x^1 sen\left(x^2\right)$$

$$z = \bar{x}^3 = x^3$$

Como $\overrightarrow{B}$ es un vector entonces es un tensor, ya que sus coordenadas están representadas con respecto a un sistema de coordenadas ortogonal no, sus coordenadas son contravariantes o covariantes en este caso no hay distinción, asumamos que $\overrightarrow{B}$ es un tensor covariante de orden 1, por lo tanto

$$\bar{B}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} B_j$$

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \bar{B}_i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} B_j = \delta^j_k B_j = B_k$$

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \bar{B}_i = B_k$$

$$B_k = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \bar{B}_i$$

$$B_k = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^k} \bar{B}_1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^k} \bar{B}_2 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^k} \bar{B}_3$$

desarrollando:

$$B_1 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} \bar{B}_1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} \bar{B}_2 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} \bar{B}_3$$

$$B_2 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} \bar{B}_1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} \bar{B}_2 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} \bar{B}_3$$

$$B_3 = \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} \bar{B}_1 + \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} \bar{B}_2 + \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \bar{B}_3$$

en forma matricial

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \end{bmatrix}$$

$$J^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^3} & \frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & -x^1 sen\left(x^2\right) & 0 \\ sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J^T = \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & sen\left(x^2\right) & 0 \\ -x^1 sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & sen\left(x^2\right) & 0 \\ -x^1 sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 cos(x^2)(sen(x^2))^2 \\ x^1(sen(x^2))^3 \\ x^1(cos(x^2)^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1(sen(x^2))^2 \\ 0 \\ x^1(cos(x^2))^2 \end{bmatrix}$$

Entonces el tensor métrico:

$$G = J^T J$$

$$G = \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & sen\left(x^2\right) & 0 \\ -x^1 sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(x^2\right) & -x^1 sen\left(x^2\right) & 0 \\ sen\left(x^2\right) & x^1 cos\left(x^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(x^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1(sen(x^2))^2 \\ 0 \\ x^1(cos(x^2))^2 \end{bmatrix}$$

como el sistema de referencia es ortogonal

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} B_1 \\ \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} B_2 \\ \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} B_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1(sen(x^2))^2 \\ 0 \\ x^1(cos(x^2))^2 \end{bmatrix}$$

como $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = z$ entonces las componentes físicas de $\overrightarrow{B}$ en coordenadas cilíndricas son

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rsen^2\theta \\ 0 \\ rcos^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{B} = A_1\hat{i}_1 + A_2\hat{i}_2 + A_3\hat{i}_3 = rsen^2\theta\hat{i}_1 + rcos^2\theta\hat{i}_3$$

Símbolos de Christoffel

Los símbolos de Christoffel tienen la utilidad de permitir definir la derivada de un tensor de tal forma que el resultado sea también un tensor, además permiten responder la pregunta ¿ cuándo dos vectores en un espacio de N dimensiones no necesariamente euclidiano son paralelos?, en esta sección nos interesa saber como calcularlos
Los símbolos de Christoffel de primera clase o especie están dados por:

$$[pq, r] = \Gamma_{pqr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right\}$$

y los símbolos de Christoffel de segunda clase o especie están dados por:

$$\left\{ \begin{array}{c} s \\ pq \end{array} \right\} = \Gamma^s_{pq} = g^{sr}\Gamma_{pqr} = g_{sr}\,[pq, r]$$

Lineas Geodésicas

En el espacio E_n y su métrica g_{pq} las ecuaciones de la curva de longitud mínima que une dos puntos de E_n esta dada por

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

Ejemplo

Nieto Coronel Joel Gastón

Escribir los símbolos de Christoffel de segunda clase para la forma métrica

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left[\left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2\right]\left(dx^2\right)^2$$

y las ecuaciones correspondientes de las lineas geodésicas.

Primero hallemos el tensor métrico:

$$ds^2 = \left(dx^1\right)^2 + \left[\left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2\right]\left(dx^2\right)^2$$

lo que equivale a:

$$ds^2 = (1)dx^1dx^1 + (0)dx^1dx^2 + (0)dx^2dx^1 + \left[\left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2\right]dx^2dx^2$$

$$ds^2 = g_{11}dx^1dx^1 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}dx^2dx^2$$

El tensor métrico es:

$$G = (g_{pq}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2 \end{bmatrix}$$

Hallemos los símbolos de Christoffel

$$[pq, r] = \Gamma_{pqr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right\}$$

$$2\Gamma_{pqr} = \left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right\}$$

Para $r = 1$

$$2\Gamma_{pq1} = \frac{\partial g_{p1}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{q1}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^1}$$

Desarrollando:

$$2\Gamma_{pq1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} & \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} \\ \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^1} & \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{111} & \Gamma_{121} \\ \Gamma_{211} & \Gamma_{221} \end{array} \right]$$

Luego:

$$2\Gamma_{pq1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 2x^1 \end{array} \right] \Rightarrow \Gamma_{pq1} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & x^1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Gamma_{111} & \Gamma_{121} \\ \Gamma_{211} & \Gamma_{221} \end{array} \right]$$

Para $r = 2$

$$2\Gamma_{pq2} = \frac{\partial g_{p2}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{q2}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^2}$$

Desarrollando:

$$2\Gamma_{pq2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} & \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} & \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{112} & \Gamma_{122} \\ \Gamma_{212} & \Gamma_{222} \end{bmatrix}$$

Luego:

$$2\Gamma_{pq2} = \begin{bmatrix} 0 & -2x^1 \\ -2x^1 & 2x^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_{pq2} = \begin{bmatrix} 0 & -x^1 \\ -x^1 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{112} & \Gamma_{122} \\ \Gamma_{212} & \Gamma_{222} \end{bmatrix}$$

Ahorma hallemos los simbolos de Christoffel de segunda clase especie, para esto necesitamos el tensor recíproco $G^{-1} = (g^{pq})$ en este caso

$$G^{-1} = (g^{pq}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^2)^2 - (x^1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}$$

partamos de

$$\Gamma^s_{pq} = g^{sr}\Gamma_{pqr}$$

$$\Gamma^s_{pq} = g^{s1}\Gamma_{pq1} + g^{s2}\Gamma_{pq2}$$

para $s = 1$

$$\Gamma^1_{pq} = g^{11}\Gamma_{pq1} + g^{12}\Gamma_{pq2}$$

para $s = 2$

$$\Gamma^2_{pq} = g^{21}\Gamma_{pq1} + g^{22}\Gamma_{pq2}$$

Reemplazando

$$\Gamma^1_{pq} = (1)\Gamma_{pq1} + (0)\Gamma_{pq2} = \Gamma_{pq1}$$

$$\Gamma^2_{pq} = (0)\Gamma_{pq1} + \left(\frac{1}{(x^2)^2 - (x^1)^2}\right)\Gamma_{pq2} = \left(\frac{1}{(x^2)^2 - (x^1)^2}\right)\Gamma_{pq2}$$

luego:

$$\Gamma^1_{pq} = \Gamma_{pq1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \left(\frac{1}{(x^2)^2 - (x^1)^2}\right)\Gamma_{pq2} = \left(\frac{1}{(x^2)^2 - (x^1)^2}\right)\begin{bmatrix} 0 & -x^1 \\ -x^1 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{x^1}{(x^2)^2-(x_1)^2} \\ \frac{-x^1}{(x^2)^2-(x^1)^2} & \frac{x^2}{(x^2)^2-(x^1)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{bmatrix}$$

Hallemos las ecuaciones de las líneas geodésicas

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

Desarrollando está última ecuación tenemos: para $r = 1$:

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{1q}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^q}{ds} + \Gamma^1_{2q}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{11}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^1_{12}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^1_{21}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^1_{22}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + (0)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds} + (0)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + (0)\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} + (x^1)\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + (x^1)\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$$

para $r = 2$:

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{1q}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^q}{ds} + \Gamma^1_{2q}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{11}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^2_{12}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^2_{21}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^2_{22}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} - \frac{2x^1}{\left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \left(\frac{x^2}{\left(x^2\right)^2 - \left(x^1\right)^2}\right)\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$$

Las ecuaciones de las lineas geodésicas son:

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + (x^1)\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} - \frac{2x^1}{(x^2)^2 - (x^1)^2}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \left(\frac{x^2}{(x^2)^2 - (x^1)^2}\right)\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$$

Una propiedad importante

Demostrar

$$\Gamma_{pqr} = \Gamma_{qpr}$$

Los símbolos de Christoffel de primera clase están determinados por las siguiente ecuación

$$\Gamma_{pqr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right\}$$

permutando los índices p y q se tienen

$$\Gamma_{qpr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^r}\right\}$$

reordenando se tiene:

$$\Gamma_{qpr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^r}\right\}$$

ya que $g_{pq} = g_{qp}$

$$\Gamma_{qpr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right\} = \Gamma_{pqr}$$

por lo tanto

$$\Gamma_{pqr} = \Gamma_{qpr}$$

Es decir los símbolos de Christoffel de primera clase son simétricos con respecto a los indices q y p.

Símbolos de Christoffel para sistemas de coordenadas ortogonales

Hallar los símbolos de Christoffel de primera clase o especie para un sistema de coordenadas ortogonal. Tenemos que simplificar las siguientes expresiones

$$[pq, r] = \Gamma_{pqr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right\}$$

y los símbolos de Christoffel de segunda clase o especie están dados por:

$$\left\{\begin{array}{c} s \\ pq \end{array}\right\} = \Gamma^s_{pq} = g^{sr}\Gamma_{pqr} = g_{sr}\,[pq, r]$$

Ya que para un sistema de coordenadas ortogonales, la matriz que representa al tensor métrico es una matriz diagonal, es decir si $p \neq q$ entonces $g_{pq} = 0$, considerando esto consideremos tres casos:

- Si $p = q = r$ entonces
$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}\right\}$$
$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$
- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces
$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}\right\}$$
pero $g_{pq} = 0$ ya que $p \neq q$, luego
$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$
- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:
$$\Gamma_{ppr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}\right\}$$
Como $p \neq r$ se tiene $g_{pr} = 0$, luego
$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

En un sistema de coordenado ortogonal los símbolos de Christoffel de segunda especie se tiene son:

$$\Gamma^{s}_{pq} = g^{sr}\Gamma_{pqr}$$

$$\Gamma^{r}_{pq} = g^{rr}\Gamma_{pqr}$$

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma^{p}_{pp} = g^{pp}\Gamma_{ppp}$$

$$\Gamma^{p}_{pp} = g^{pp}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{p}}$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma^{p}_{pq} = g^{pp}\Gamma_{pqp}$$

$$\Gamma^{p}_{pq} = g^{pp}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{q}}$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma^{r}_{pp} = g^{rr}\Gamma_{ppr}$$

$$\Gamma^{r}_{pp} = -g^{rr}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{r}}$$

en resumen...

Símbolos de Christoffel de primera especie para un sistema de coordenadas ortogonales

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{p}}$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{q}}$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{r}}$$

- Si p, q y r ($p \neq q$, $q \neq r$ y $p \neq r$)son distintos entonces :

$$\Gamma_{pqr} = 0$$

Símbolos de Christoffel de segunda especie para un sistema de coordenadas ortogonales

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma^{p}_{pp} = g^{pp}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{p}}$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma^{p}_{pq} = g^{pp}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{q}}$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma^{r}_{pp} = -g^{rr}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^{r}}$$

- Si p, q y r ($p \neq q$, $q \neq r$ y $p \neq r$)son distintos entonces :

$$\Gamma^{r}_{pq} = 0$$

Ejemplo

Calcular los símbolos de Christoffel para los siguientes sistema de coordenadas:

- Cilíndricas
- Esféricas
- Cilíndricas parabólicas

- Símbolos de Christoffel de primera y segunda especie para coordenadas cilíndricas:
  Ecuaciones de transformación para coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$z = z$$

si $x = \bar{x}^1$,$y = \bar{x}^2$,$z = \bar{x}^3$, $r = x^1$,$\theta = x^2$ y $z = x^3$, entonces:

$$\bar{x}^1 = x^1\cos\left(x^2\right)$$

$$\bar{x}^2 = x^1\sin\left(x^2\right)$$

$$\bar{x}^3 = x^3$$

Calculemos el tensor métrico Ses el vector de posición $\overrightarrow{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$

$$\overrightarrow{r} = x^1 \cos\left(x^2\right)\hat{\imath} + x^1 \sin\left(x^2\right)\hat{\jmath} + x^3\hat{k}$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^1} = \cos\left(x^2\right)\hat{\imath} + \sin\left(x^2\right)\hat{\jmath}$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^2} = -x^1 \sin\left(x^2\right)\hat{\imath} + x^1 \cos\left(x^2\right)\hat{\jmath}$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial x^3} = \hat{k}$$

Los elementos del tensor métrico son:

$$g_{11} = \alpha_1 \circ \alpha_1 = 1$$

$$g_{12} = \alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$$

$$g_{13} = \alpha_1 \circ \alpha_3 = 0$$

$$g_{21} = \alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$$

$$g_{22} = \alpha_2 \circ \alpha_2 = \left(x^1\right)^2 = r^2$$

$$g_{23} = \alpha_2 \circ \alpha_3 = 0$$

$$g_{31} = \alpha_3 \circ \alpha_1 = 0$$

$$g_{32} = \alpha_3 \circ \alpha_2 = 0$$

$$g_{33} = \alpha_3 \circ \alpha_3 = 1$$

Por lo tanto el tensor métrico es

$$G = (g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(x^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota El sistema de coordenadas cilíndrico es ortogonal los p, q y r pueden tomar valores entre $1, 2$ y 3, entonces:

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}\right\}$$

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

Si $p = 1$

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0$$

Si $p = 2$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 0$$

Si $p = 3$

$$\Gamma_{333} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 0$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^p}\right\}$$

pero $g_{pq} = 0$ ya que $p \neq q$, luego

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

Si $p = 1$

$$\Gamma_{1q1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^q}$$

Si $p = 2$

$$\Gamma_{2q2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^q}$$

Si $p = 3$

$$\Gamma_{3q3} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^q}$$

Si $p = 1$

$$\Gamma_{1q1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^q}$$

ya que $g_{11} = 1$, se tiene:

$$\Gamma_{1q1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^q} = 0$$

para $q = 2, 3$, es decir:

$$\Gamma_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0$$

$$\Gamma_{131} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0$$

$$\Gamma_{121} = 0$$

$$\Gamma_{131} = 0$$

Si $p = 2$

$$\Gamma_{2q2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^q}$$

ya que $g_{22} = \left(x^1\right)^2$ y $q = 1, 3$

$$\Gamma_{212} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = \frac{1}{2}\left(2x^1\right) = x^1$$

$$\Gamma_{232} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = 0$$

luego...

$$\Gamma_{212} = x^1$$

$$\Gamma_{232} = 0$$

Si $p = 3$

$$\Gamma_{3q3} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^q}$$

Ya que $g_{33} = 1$ y $q = 1, 2$, se tiene:

$$\Gamma_{313} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = 0$$

$$\Gamma_{323} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 0$$

luego...

$$\Gamma_{313} = 0$$

$$\Gamma_{323} = 0$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}\right\}$$

Como $p \neq r$ se tiene $g_{pr} = 0$, luego

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

Si $p = 1$

$$\Gamma_{11r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^r}$$

Si $p = 2$

$$\Gamma_{22r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^r}$$

Si $p = 3$

$$\Gamma_{33r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^r}$$

Si $p = 1$

$$\Gamma_{11r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^r}$$

ya que $g_{11} = 1$ y $r = 2, 3$ entonces

$$\Gamma_{112} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0$$
$$\Gamma_{113} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^3} = 0$$

$$\Gamma_{112} = 0$$
$$\Gamma_{113} = 0$$

Si $p = 2$

$$\Gamma_{22r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^r}$$

ya que $g_{22} = \left(x^1\right)^2$ y $r = 1, 3$ se tiene:

$$\Gamma_{221} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -\frac{1}{2}\left(2x^1\right) = -x^1$$

$$\Gamma_{223} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^3} = 0$$

$$\Gamma_{221} = -x^1$$

$$\Gamma_{223} = 0$$

Si $p = 3$

$$\Gamma_{33r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^r}$$

ya que $g_{33} = 1$ y $r = 2, 3$ se tiene:

$$\Gamma_{331} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = 0$$

$$\Gamma_{332} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = 0$$

$$\Gamma_{331} = 0$$

$$\Gamma_{332} = 0$$

Apliquemos

$$\Gamma_{pqr} = \Gamma_{qpr}$$

entonces

$$\Gamma_{111} = 0$$

$$\Gamma_{121} = \Gamma_{211} = 0$$

$$\Gamma_{131} = \Gamma_{311} = 0$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{122} = x^1$$

$$\Gamma_{222} = 0$$

$$\Gamma_{232} = \Gamma_{322} = 0$$

$$\Gamma_{313} = \Gamma_{133} = 0$$

$$\Gamma_{323} = \Gamma_{233} = 0$$

$$\Gamma_{333} = 0$$

$$\Gamma_{112} = 0$$

$$\Gamma_{113} = 0$$

$$\Gamma_{221} = -x^1$$

$$\Gamma_{223} = 0$$

$$\Gamma_{331} = 0$$

$$\Gamma_{332} = 0$$

Todos los demás Γ_{pqr} son nulos.

En resumen...

$$\Gamma_{pqr} = \left\{ \underset{r=1}{\begin{bmatrix} \Gamma_{111} & \Gamma_{121} & \Gamma_{131} \\ \Gamma_{211} & \Gamma_{221} & \Gamma_{231} \\ \Gamma_{311} & \Gamma_{321} & \Gamma_{331} \end{bmatrix}} ; \underset{r=2}{\begin{bmatrix} \Gamma_{112} & \Gamma_{122} & \Gamma_{132} \\ \Gamma_{212} & \Gamma_{222} & \Gamma_{232} \\ \Gamma_{312} & \Gamma_{322} & \Gamma_{332} \end{bmatrix}} ; \underset{r=3}{\begin{bmatrix} \Gamma_{113} & \Gamma_{123} & \Gamma_{133} \\ \Gamma_{213} & \Gamma_{223} & \Gamma_{233} \\ \Gamma_{313} & \Gamma_{323} & \Gamma_{333} \end{bmatrix}} \right\}$$

reemplazando...

$$\Gamma_{pqr} = \left\{ \underset{r=1}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} ; \underset{r=2}{\begin{bmatrix} 0 & x^1 & 0 \\ x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} ; \underset{r=3}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

Para los símbolos de Chirstoffel de segunda clase se tiene que desarrollar:

$$\Gamma^s_{pq} = g^{sr}\Gamma_{pqr}$$

aplicando el convenio de los indices repetidos:

$$\Gamma^s_{pq} = g^{s1}\Gamma_{pq1} + g^{s2}\Gamma_{pq2} + g^{s3}\Gamma_{pq3}$$

para $s = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{pq} &= g^{11}\Gamma_{pq1} + g^{12}\Gamma_{pq2} + g^{13}\Gamma_{pq3} \\ \Gamma^2_{pq} &= g^{21}\Gamma_{pq1} + g^{22}\Gamma_{pq2} + g^{23}\Gamma_{pq3} \\ \Gamma^3_{pq} &= g^{31}\Gamma_{pq1} + g^{32}\Gamma_{pq2} + g^{33}\Gamma_{pq3} \end{aligned}$$

pero

$$\Gamma^1_{pq} = (1)\Gamma_{pq1} + (0)\Gamma_{pq2} + g^{13}\Gamma_{pq3} = \Gamma_{pq1}$$

$$\Gamma^2_{pq} = (0)\Gamma_{pq1} + \frac{1}{(x^1)^2}\Gamma_{pq2} + g^{23}\Gamma_{pq3}$$

$$\Gamma^3_{pq} = (0)\Gamma_{pq1} + (0)\Gamma_{pq2} + (1)\Gamma_{pq3}$$

$$\Gamma^1_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \frac{1}{(x^1)^2}\Gamma_{pq2} = \frac{1}{(x^1)^2}\begin{bmatrix} 0 & x^1 & 0 \\ x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En resumen:

$$\Gamma^1_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{13} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^1_{23} \\ \Gamma^1_{31} & \Gamma^1_{32} & \Gamma^1_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ \frac{1}{x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{13} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} & \Gamma^2_{23} \\ \Gamma^2_{31} & \Gamma^2_{32} & \Gamma^2_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{13} \\ \Gamma^3_{21} & \Gamma^3_{22} & \Gamma^3_{23} \\ \Gamma^3_{31} & \Gamma^3_{32} & \Gamma^3_{33} \end{bmatrix}$$

Derivada covariante

Derivada covariante de un tensor de orden cero ϕ, un tensor de orden cero es un escalar o invariante

$$\phi_{,p} = \frac{\partial \phi}{\partial x^p}$$

Note que la derivada de un tensor de orden cero ϕ es un tensor covariante de orden 1, y es mas $\phi_{,p}$ es el gradiente del campo escalar ϕ.

$$\nabla \phi = \phi_{,p} = \frac{\partial \phi}{\partial x^p}$$

Derivada covariante de un tensor covariante de un tensor covariante A_p con respecto de x^q, denotado por $A_{p,q}$ se define por:

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^s_{pq} A_s$$

Derivada covariante de un tensor covariante de un tensor contravariante A^p con respecto de x^q, denotado por $A^p_{,q}$ se define por:

$$A^p_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{qs} A^s$$

Ejemplo

Considerar en E_3 al tensor covariante A_p que en un sistema de coordenadas cilíndricas, sus componentes covariantes son :

$$A_1 = r\sin^2(\theta)$$

$$A_2 = r^3\cos^2(\theta)$$

$$A_3 = 2$$

- Calcular $A_{p,1}$.
- Calcular $A_{p,2}$.
- Calcular $A_{p,3}$.

$$r = x^1$$

$$\theta = x^2$$

$$z = x^3$$

tenemos que aplicar la siguiente ecuación

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^s_{pq} A_s$$

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^1_{pq} A_1 - \Gamma^2_{pq} A_2 - \Gamma^3_{pq} A_3$$

para $q = 1, 2, 3$

$$A_{p,1} = \frac{\partial A_p}{\partial x^1} - \Gamma^1_{p1} A_1 - \Gamma^2_{p1} A_2 - \Gamma^3_{p1} A_3$$

$$A_{p,2} = \frac{\partial A_p}{\partial x^2} - \Gamma^1_{p2} A_1 - \Gamma^2_{p2} A_2 - \Gamma^3_{p2} A_3$$

$$A_{p,3} = \frac{\partial A_p}{\partial x^3} - \Gamma^1_{p3} A_1 - \Gamma^2_{p3} A_2 - \Gamma^3_{p3} A_3$$

$$A_{1,1} = \frac{\partial A_1}{\partial x^1} - \Gamma^1_{11} A_1 - \Gamma^2_{11} A_2 - \Gamma^3_{11} A_3$$
$$A_{2,1} = \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \Gamma^1_{21} A_1 - \Gamma^2_{21} A_2 - \Gamma^3_{21} A_3$$
$$A_{3,1} = \frac{\partial A_3}{\partial x^1} - \Gamma^1_{31} A_1 - \Gamma^2_{31} A_2 - \Gamma^3_{31} A_3$$

$$A_{p,1} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x^1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial A_3}{\partial x^1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^2_{11} & \Gamma^3_{11} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^2_{21} & \Gamma^3_{21} \\ \Gamma^1_{31} & \Gamma^2_{31} & \Gamma^3_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,1} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1}\left(x^1 \sin^2(x^2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x^1}\left((x^1)^2 \cos^3(x^2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x^1}(2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \sin^2(x^2) \\ (x^1)^2 \cos^3(x^2) \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,1} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2(x^2) \\ 2x^1 \cos^3(x^2) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ x^1 \cos^3(x^2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2(x^2) \\ x^1 \cos^3(x^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,1} = \begin{bmatrix} \sin^2(x^2) \\ x^1 \cos^3(x^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,1} = \begin{bmatrix} \sin^2(\theta) \\ r \cos^3(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,2} = \frac{\partial A_p}{\partial x^2} - \Gamma^1_{p2}A_1 - \Gamma^2_{p2}A_2 - \Gamma^3_{p2}A_3$$

$$A_{1,2} = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} - \Gamma^1_{12}A_1 - \Gamma^2_{12}A_2 - \Gamma^3_{12}A_3$$

$$A_{2,2} = \frac{\partial A_2}{\partial x^2} - \Gamma^1_{22}A_1 - \Gamma^2_{22}A_2 - \Gamma^3_{22}A_3$$

$$A_{3,2} = \frac{\partial A_3}{\partial x^2} - \Gamma^1_{32}A_1 - \Gamma^2_{32}A_2 - \Gamma^3_{32}A_3$$

$$A_{p,2} = \begin{bmatrix} A_{1,2} \\ A_{2,2} \\ A_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial A_3}{\partial x^2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma^1_{12} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^3_{12} \\ \Gamma^1_{22} & \Gamma^2_{22} & \Gamma^3_{22} \\ \Gamma^1_{32} & \Gamma^2_{32} & \Gamma^3_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,2} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2}\left(x^1 \sin^2(x^2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x^2}\left((x^1)^2 \cos^3(x^2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x^2}(2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ -x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \sin^2(x^2) \\ (x^1)^2 \cos^3(x^2) \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,2} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1 \sin(x^2)\cos(x^2) \\ -3(x^1)^2 \cos^2(x^2)\sin(x^2) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{x^1} & 0 \\ -x^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \sin^2(x^2) \\ (x^1)^2 \cos^3(x^2) \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,2} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1 \sin(x^2)\cos(x^2) \\ -3(x^1)^2\cos^2(x^2)\sin(x^2) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x^1\cos^3(x^2) \\ -(x^1)^2\sin^2(x^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,2} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1 \sin(x^2)\cos(x^2) - x^1\cos^3(x^2) \\ -3(x^1)^2\cos^2(x^2)\sin(x^2) + (x^1)^2\sin^2(x^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,2} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \\ A_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r\sin(\theta)\cos(\theta) - r\cos^3(\theta) \\ -3r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2\sin^2(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,3} = \frac{\partial A_p}{\partial x^3} - \Gamma^1_{p3}A_1 - \Gamma^2_{p3}A_2 - \Gamma^3_{p3}A_3$$

$$A_{1,3} = \frac{\partial A_1}{\partial x^3} - \Gamma^1_{13}A_1 - \Gamma^2_{13}A_2 - \Gamma^3_{13}A_3$$

$$A_{2,3} = \frac{\partial A_2}{\partial x^3} - \Gamma^1_{23}A_1 - \Gamma^2_{23}A_2 - \Gamma^3_{23}A_3$$

$$A_{3,3} = \frac{\partial A_3}{\partial x^3} - \Gamma^1_{33}A_1 - \Gamma^2_{33}A_2 - \Gamma^3_{33}A_3$$

$$A_{p,3} = \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \\ A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial A_3}{\partial x^3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma^1_{13} & \Gamma^2_{13} & \Gamma^3_{13} \\ \Gamma^1_{23} & \Gamma^2_{23} & \Gamma^3_{23} \\ \Gamma^1_{33} & \Gamma^2_{33} & \Gamma^3_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,3} = \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \\ A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3}\left(x^1 \sin^2(x^2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x^3}\left((x^1)^2 \cos^3(x^2)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x^3}(2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \sin^2(x^2) \\ (x^1)^2 \cos^3(x^2) \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,3} = \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \\ A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{p,3} = \begin{bmatrix} A_{1,3} \\ A_{2,3} \\ A_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Métrica de Schwarzschild

Hallar los símbolos de Christoffel para la métrica de Schwarzschild en el espacio tiempo de cuatro dimensiones (t, r, θ, φ)

$$(ds)^2 = c^2\left(1 - \frac{k}{r}\right)(dt)^2 - \left(1 - \frac{k}{r}\right)^{-1}(dr)^2 - r^2(d\theta)^2 - r^2\sin^2(\theta)(d\varphi)^2$$

donde c es la velocidad de la luz y $k = \frac{2GM}{c^2}$ donde G es la constante de gravitación universal y M se interpreta como la masa aparente del objeto, planeta o estrella que crea el campo gravitatorio.

El tensor métrico para esta métrica se halla de la siguiente manera:

$$(t, r, \theta, \varphi) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$$

$$(ds)^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + g_{44}(dx^4)^2$$

donde:

$$g_{11} = c^2\left(1 - \frac{k}{r}\right) = c^2\left(1 - \frac{k}{x^2}\right)$$

$$g_{22} = -\left(1 - \frac{k}{r}\right)^{-1} = -\left(1 - \frac{k}{x^2}\right)^{-1}$$

$$g_{33} = -r^2 = -(x^2)^2$$

$$g_{44} = -r^2\sin^2(\theta) = -(x^2)^2\sin^2(x^3)$$

$$G = (g_{pq}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}$$

$$G = (g_{pq}) = \begin{bmatrix} c^2\left(1-\frac{k}{x^2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{k}{x^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(x^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(x^2)^2\sin^2(x^3) \end{bmatrix}$$

$$G = (g_{pq}) = \begin{bmatrix} c^2\left(1-\frac{k}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{k}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

note que si $p \neq q$ entonces $g_{pq} = 0$, es decir el sistema de coordenado $(t, r, \theta, \varphi) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ es un sistema ortogonal

Símbolos de Christoffel de primera especie para un sistema de coordenadas ortogonales

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

- Si p, q y r ($p \neq q$, $q \neq r$ y $p \neq r$)son distintos entonces :

$$\Gamma_{pqr} = 0$$

Para los símbolos de Christoffel de primera especie son:

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

si $p = 1$

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0$$

si $p = 2$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = \left(1 - \frac{k}{x^2}\right)^{-2}\frac{k}{2(x^2)^2}$$

si $p = 3$

$$\Gamma_{333} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 0$$

si $p = 4$

$$\Gamma_{444} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^4} = 0$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

Si $p = 1$

$$\Gamma_{1q1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^q}$$

Si $p = 2$

$$\Gamma_{2q2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^q}$$

Si $p = 3$

$$\Gamma_{3q3} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^q}$$

Si $p = 4$

$$\Gamma_{4q4} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^q}$$

Solo consideramos los símbolos no nulos:

$$\Gamma_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{kc^2}{2(x^2)^2}$$
$$\Gamma_{323} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -x^2$$
$$\Gamma_{424} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} = -x^2\sin^2(x^3)$$
$$\Gamma_{434} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3} = -(x^2)^2\sin(x^3)\cos(x^3)$$

de donde

$$\Gamma_{121} = \Gamma_{211} = \frac{kc^2}{2(x^2)^2}$$
$$\Gamma_{323} = \Gamma_{233} = -x^2$$
$$\Gamma_{424} = \Gamma_{244} = -x^2\sin^2(x^3)$$
$$\Gamma_{434} = \Gamma_{344} = -(x^2)^2\sin(x^3)\cos(x^3)$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

Si $p = 1$

$$\Gamma_{11r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^r}$$

Si $p = 2$

$$\Gamma_{22r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^r}$$

Si $p = 3$

$$\Gamma_{33r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^r}$$

Si $p = 4$

$$\Gamma_{44r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^r}$$

solo consideramos los símbolos no nulos:

$$\Gamma_{112} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -\frac{kc^2}{2(x^2)^2}$$

$$\Gamma_{332} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = x^2$$

$$\Gamma_{442} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^2} = x^2 \sin^2(x^3)$$

$$\Gamma_{443} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^3} = (x^2)^2 \sin(x^3) \cos(x^3)$$

Los demás símbolos de Christoffel son nulos.

Por lo tanto los 64 símbolos de Christoffel de primera clase son...

$$\Gamma_{pq1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{kc^2}{2(x^2)^2} & 0 & 0 \\ \frac{kc^2}{2(x^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{pq2} = \begin{bmatrix} -\frac{kc^2}{2(x^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{k}{x^2}\right)^{-2} \frac{k}{2(x^2)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \sin^2(x^3) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{pq3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x^2)^2 \sin^2(x^3) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{pq4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x^2 \sin^2(x^3) \\ 0 & 0 & 0 & -(x^2)^2 \sin(x^3)\cos(x^3) \\ 0 & -x^2 \sin^2(x^3) & -(x^2)^2 \sin(x^3)\cos(x^3) & 0 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones para las geodésicas en este caso son:

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

se nos pide la geodésica para la variable $t = x^1$, entonces $r = 1$...

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

necesitamos hallar Γ^1_{pq} pero

$$\Gamma^s_{pq} = g^{sr}\Gamma_{pqr}$$

si $s = 1$

$$\Gamma^1_{pq} = g^{1r}\Gamma_{pqr} = g^{11}\Gamma_{pq1} + g^{12}\Gamma_{pq2} + g^{13}\Gamma_{pq3} + g^{14}\Gamma_{pq4}$$

$$\Gamma^1_{pq} = g^{1r}\Gamma_{pqr} = g^{11}\Gamma_{pq1} + (0)\Gamma_{pq2} + (0)\Gamma_{pq3} + (0)\Gamma_{pq4}$$

$$\Gamma^1_{pq} = g^{1r}\Gamma_{pqr} = g^{11}\Gamma_{pq1}$$

donde

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = \frac{1}{c^2\left(1 - \frac{k}{x^2}\right)} = \frac{x^2}{c^2(x^2 - k)}$$

$$\Gamma^1_{pq} = g^{1r}\Gamma_{pqr} = g^{11}\Gamma_{pq1}$$

$$\Gamma^1_{pq} = g^{1r}\Gamma_{pqr} = \frac{x^2}{c^2(x^2-k)}\begin{bmatrix} 0 & \frac{kc^2}{2(x^2)^2} & 0 & 0 \\ \frac{kc^2}{2(x^2)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k}{2x^2(x^2-k)} & 0 & 0 \\ \frac{k}{2x^2(x^2-k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{k}{2x^2(x^2-k)}$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{12}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^1_{21}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \left(\frac{k}{2x^2(x^2-k)}\right)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \left(\frac{k}{2x^2(x^2-k)}\right)\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \left(\frac{k}{x^2(x^2-k)}\right)\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0$$

o equivalentemente:

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \left(\frac{k}{r(r-k)}\right)\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds} = 0$$

Problema

Dado un sistema de coordenadas curvilíneas, cuyas coordenadas (r, θ), están relacionadas con las de un sistema cartesiano ortogonal, mediante las relaciones:

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$z = r^2$$

Y dado el tensor expresado en coordenadas (r, θ), $A_p = (r + 2r^3)\overrightarrow{e}^1$, hallar $A_{p,1}$

$$\overrightarrow{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$
$$\overrightarrow{r} = r\cos(\theta)\hat{\imath} + r\sin(\theta)\hat{\jmath} + r^2\hat{k}$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial r} = \cos(\theta)\hat{\imath} + \sin(\theta)\hat{\jmath} + 2r\hat{k}$$
$$\alpha_2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\hat{\imath} + r\cos(\theta)\hat{\jmath}$$
$$g_{11} = \alpha_1 \circ \alpha_1 = 1 + 4r^2$$
$$g_{12} = \alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$$
$$g_{21} = \alpha_2 \circ \alpha_1 = 0$$
$$g_{22} = \alpha_2 \circ \alpha_2 = r^2$$

$$g_{pq} = \begin{bmatrix} 1+4r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

$$g^{pq} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+4r^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{bmatrix}$$

además

$$x^1 = r$$

y

$$x^2 = \theta$$

Símbolos de Christoffel de primera especie para un sistema de coordenadas ortogonales

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

- Si p, q y r ($p \neq q$, $q \neq r$ y $p \neq r$)son distintos entonces :

$$\Gamma_{pqr} = 0$$

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 4r$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = 0$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

$$\Gamma_{1q1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^q}$$

$$\Gamma_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0$$

$$\Gamma_{121} = \Gamma_{211} = 0$$

$$\Gamma_{2q2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^q}$$

$$\Gamma_{212} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = r$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{122} = r$$

Tomar en cuenta

$$x^1 = r$$

y

$$x^2 = \theta$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

$$\Gamma_{11r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^r}$$

$$\Gamma_{112} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = 0$$

$$\Gamma_{112} = 0$$

$$\Gamma_{221} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -r$$

$$\Gamma_{221} = -r$$

$$\Gamma_{pq1} = \begin{bmatrix} 4r & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{111} & \Gamma_{121} \\ \Gamma_{211} & \Gamma_{221} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{pq2} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{112} & \Gamma_{122} \\ \Gamma_{212} & \Gamma_{222} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^{1}_{pq} = g^{11}\Gamma_{pq1} = \frac{1}{g_{11}}\Gamma_{pq1}$$

$$\Gamma^{1}_{pq} = \frac{1}{1+4r^2}\left[\begin{array}{cc} 4r & 0 \\ 0 & -r \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{4r}{1+4r^2} & 0 \\ 0 & \frac{-r}{1+4r^2} \end{array}\right]$$

$$\Gamma^{1}_{pq} = \left[\begin{array}{cc} \frac{4r}{1+4r^2} & 0 \\ 0 & \frac{-r}{1+4r^2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \Gamma^{1}_{11} & \Gamma^{1}_{12} \\ \Gamma^{1}_{21} & \Gamma^{1}_{22} \end{array}\right]$$

$$\Gamma^2_{pq} = g^{22}\Gamma_{pq2} = \frac{1}{g_{22}}\Gamma_{pq2}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \frac{1}{r^2}\begin{bmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^s_{pq} A_s$$

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^1_{pq} A_1 - \Gamma^2_{pq} A_2$$

ya que

$$A_p = (r + 2r^3)\overrightarrow{e}^1 + 0\overrightarrow{e}^2 = A_1\overrightarrow{e}^1 + A_2\overrightarrow{e}^2$$

entonces

$$A_1 = r + 2r^3$$

$$A_2 = 0$$

y además

$$\frac{\partial A_p}{\partial x^q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial x^1} & \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial A_2}{\partial x^1} & \frac{\partial A_2}{\partial x^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial A_p}{\partial x^q} = \begin{bmatrix} 1 + 6r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde $r = x^1$, $\theta = x^2$

Reemplazando en

$$A_{p,q} = \frac{\partial A_p}{\partial x^q} - \Gamma^1_{pq} A_1 - \Gamma^2_{pq} A_2$$

obtenemos

$$A_{p,q} = \begin{bmatrix} 1+6r^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4r}{1+4r^2} & 0 \\ 0 & \frac{-r}{1+4r^2} \end{bmatrix} (r+2r^3) - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} (0)$$

$$A_{p,q} = \begin{bmatrix} \frac{1+6r^2+16r^4}{1+4r^2} & 0 \\ 0 & \frac{r^2+2r^4}{1+4r^2} \end{bmatrix}$$

$$A_{p,q} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+6r^2+16r^4}{1+4r^2} & 0 \\ 0 & \frac{r^2+2r^4}{1+4r^2} \end{bmatrix}$$

$$A_{p,1} = \begin{bmatrix} A_{1,1} \\ A_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+6r^2+16r^4}{1+4r^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Problema

Para la métrica

$$x = uv\cos(\theta)$$

$$y = uv\sin(\theta)$$

$$z = \frac{u^2 - v^2}{2}$$

Si: $A^p = u^2\overrightarrow{e}_u + v^2\overrightarrow{e}_v + uv\overrightarrow{e}_\theta$, hallar

- $A^p_{,q}$ $(q = 1, 2, 3)$.
- $\left(A^3_{,2}\right)_{,2}$

Sea $\overrightarrow{r}$ el vector de posición

$$\overrightarrow{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

reemplazando las ecuaciones de transformación

$$\overrightarrow{r} = uv\cos(\theta)\hat{\imath} + uv\sin(\theta)\hat{\jmath} + \frac{u^2 - v^2}{2}\hat{k}$$

hallemos los vectores de la base contravariante

$$\alpha_1 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = v\cos(\theta)\hat{\imath} + v\sin(\theta)\hat{\jmath} + u\hat{k}$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = u\cos(\theta)\hat{\imath} + u\sin(\theta)\hat{\jmath} - v\hat{k}$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta} = -uv\sin(\theta)\hat{\imath} + uv\cos(\theta)\hat{\jmath}$$

esta base es ortogonal ya que

$$\alpha_1 \circ \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_2 \circ \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 \circ \alpha_3 = 0$$

además

$$g_{11} = \alpha_1 \circ \alpha_1 = v^2 + u^2$$

$$g_{22} = \alpha_2 \circ \alpha_2 = u^2 + v^2$$

$$g_{33} = \alpha_3 \circ \alpha_3 = u^2 v^2$$

$$g_{pq} = \begin{bmatrix} u^2 + v^2 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & u^2 v^2 \end{bmatrix}$$

Símbolos de Christoffel de primera especie para un sistema de coordenadas ortogonales

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

- Si p, q y r ($p \neq q$, $q \neq r$ y $p \neq r$)son distintos entonces :

$$\Gamma_{pqr} = 0$$

$$x^1 = u; x^2 = v; x^3 = \theta$$

$$g_{11} = u^2 + v^2; g_{22} = u^2 + v^2; g_{33} = u^2 v^2$$

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = u$$

$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = v$$

$$\Gamma_{333} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^3} = 0$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

$$\Gamma_{1q1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^q} \Rightarrow \Gamma_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = v$$

$$\Gamma_{121} = \Gamma_{211} = v$$

$$\Gamma_{2q2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^q} \Rightarrow \Gamma_{212} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = u$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{122} = u$$

$$\Gamma_{3q3} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^q} \Rightarrow \Gamma_{313} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = uv^2; \Gamma_{323} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = u^2 v$$

$$\Gamma_{313} = \Gamma_{133} = uv^2$$

$$\Gamma_{323} = \Gamma_{233} = u^2 v$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

$$\Gamma_{11r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^r} \Rightarrow \Gamma_{112} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -v$$

$$\Gamma_{112} = -v$$

$$\Gamma_{113} = 0$$

$$\Gamma_{22r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^r}$$

$$\Gamma_{221} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -u$$

$$\Gamma_{221} = -u$$

$$\Gamma_{223} = 0$$

$$\Gamma_{33r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^r} \Rightarrow \Gamma_{331} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -uv^2; \Gamma_{332} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} = -u^2 v$$

$$\Gamma_{331} = -uv^2$$

$$\Gamma_{332} = -u^2 v$$

Entonces los símbolos de Christoffel de primera clase son:

$$\Gamma_{pq1} = \begin{bmatrix} u & v & 0 \\ v & -u & 0 \\ 0 & 0 & -uv^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{111} & \Gamma_{121} & \Gamma_{131} \\ \Gamma_{211} & \Gamma_{221} & \Gamma_{231} \\ \Gamma_{311} & \Gamma_{321} & \Gamma_{331} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{pq2} = \begin{bmatrix} -v & u & 0 \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & -u^2 v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{112} & \Gamma_{122} & \Gamma_{132} \\ \Gamma_{212} & \Gamma_{222} & \Gamma_{232} \\ \Gamma_{312} & \Gamma_{322} & \Gamma_{332} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{pq3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & uv^2 \\ 0 & 0 & u^2 v \\ uv^2 & u^2 v & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{113} & \Gamma_{123} & \Gamma_{133} \\ \Gamma_{213} & \Gamma_{223} & \Gamma_{233} \\ \Gamma_{313} & \Gamma_{323} & \Gamma_{333} \end{bmatrix}$$

Para los símbolos de Christoffel de segunda clase se tienen las siguientes relaciones (tomar en cuenta que el sistema de coordenadas es ortogonal)

$$\Gamma^1_{pq} = g^{11}\Gamma_{pq1} = \frac{1}{g_{11}}\Gamma_{pq1}$$

$$\Gamma^1_{pq} = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{bmatrix} u & v & 0 \\ v & -u & 0 \\ 0 & 0 & -uv^2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{pq} = \begin{bmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} & 0 \\ \frac{v}{u^2+v^2} & \frac{-u}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-uv^2}{u^2+v^2} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = g^{22}\Gamma_{pq2} = \frac{1}{g_{22}}\Gamma_{pq2}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \frac{1}{u^2+v^2}\begin{bmatrix} -v & u & 0 \\ u & v & 0 \\ 0 & 0 & -u^2v \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \begin{bmatrix} \frac{-v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} & 0 \\ \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-u^2v}{u^2+v^2} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{pq} = g^{33}\Gamma_{pq3} = \frac{1}{g_{33}}\Gamma_{pq3}$$

$$\Gamma^3_{pq} = \frac{1}{u^2v^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & uv^2 \\ 0 & 0 & u^2v \\ uv^2 & u^2v & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^3_{pq} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & \frac{1}{v} & 0 \end{bmatrix}$$

La derivada covariante de un tensor contravariante es:

$$A^p_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{qs}A^s$$

pero

$$A^p = A^1\overrightarrow{e}_1 + A^2\overrightarrow{e}_2 + uv\overrightarrow{e}_3$$
$$A^p = u^2\overrightarrow{e}_1 + v^2\overrightarrow{e}_2 + A^3\overrightarrow{e}_3$$

donde $\overrightarrow{e}_1 = \overrightarrow{e}_u, \overrightarrow{e}_2 = \overrightarrow{e}_v, \overrightarrow{e}_3 = \overrightarrow{e}_w$. entonces

$$A^1 = u^2$$

$$A^2 = v^2$$

$$A^3 = uv$$

$$A^1_{,q} = \frac{\partial A^1}{\partial x^q} + \Gamma^1_{qs} A^s$$

$$A^1_{,q} = \begin{bmatrix} A^1_{,1} \\ A^1_{,2} \\ A^1_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A^1}{\partial x^1} \\ \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial A^1}{\partial x^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{13} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^1_{23} \\ \Gamma^1_{31} & \Gamma^1_{32} & \Gamma^1_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$$

$$A^1_{,q} = \begin{bmatrix} A^1_{,1} \\ A^1_{,2} \\ A^1_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A^1}{\partial u} \\ \frac{\partial A^1}{\partial v} \\ \frac{\partial A^1}{\partial \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} & 0 \\ \frac{v}{u^2+v^2} & \frac{-u}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-uv^2}{u^2+v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \end{bmatrix}$$

$$A^1_{,q} = \begin{bmatrix} A^1_{,1} \\ A^1_{,2} \\ A^1_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} & 0 \\ \frac{v}{u^2+v^2} & \frac{-u}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-uv^2}{u^2+v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \end{bmatrix}$$

$$A^1_{,q} = \begin{bmatrix} A^1_{,1} \\ A^1_{,2} \\ A^1_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u + \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2} \\ \frac{u^2v-uv^2}{u^2+v^2} \\ -\frac{u^2v^3}{u^2+v^2} \end{bmatrix}$$

$$A^2_{,q} = \frac{\partial A^2}{\partial x^q} + \Gamma^2_{qs} A^s$$

$$A^2_{,q} = \begin{bmatrix} A^2_{,1} \\ A^2_{,2} \\ A^2_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A^2}{\partial x^1} \\ \frac{\partial A^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial A^2}{\partial x^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{13} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} & \Gamma^2_{23} \\ \Gamma^2_{31} & \Gamma^2_{32} & \Gamma^2_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$$

$$A^2_{,q} = \begin{bmatrix} A^2_{,1} \\ A^2_{,2} \\ A^2_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A^2}{\partial u} \\ \frac{\partial A^2}{\partial v} \\ \frac{\partial A^2}{\partial \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} & 0 \\ \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-u^2 v}{u^2+v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \end{bmatrix}$$

$$A^2_{,q} = \begin{bmatrix} A^2_{,1} \\ A^2_{,2} \\ A^2_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2v \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-v}{u^2+v^2} & \frac{u}{u^2+v^2} & 0 \\ \frac{u}{u^2+v^2} & \frac{v}{u^2+v^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-u^2 v}{u^2+v^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \end{bmatrix}$$

$$A^2_{,q} = \begin{bmatrix} A^2_{,1} \\ A^2_{,2} \\ A^2_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-u^2v+uv^2}{u^2+v^2} \\ 2v + \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2} \\ \frac{-u^3v^2}{u^2+v^2} \end{bmatrix}$$

$$A^3_{,q} = \frac{\partial A^3}{\partial x^q} + \Gamma^3_{qs} A^s$$

$$A^3_{,q} = \begin{bmatrix} A^3_{,1} \\ A^3_{,2} \\ A^3_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A^3}{\partial x^1} \\ \frac{\partial A^3}{\partial x^2} \\ \frac{\partial A^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{13} \\ \Gamma^3_{21} & \Gamma^3_{22} & \Gamma^3_{23} \\ \Gamma^3_{31} & \Gamma^3_{32} & \Gamma^3_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix}$$

$$A^3_{,q} = \begin{bmatrix} A^3_{,1} \\ A^3_{,2} \\ A^3_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A^3}{\partial u} \\ \frac{\partial A^3}{\partial v} \\ \frac{\partial A^3}{\partial \theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & \frac{1}{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \end{bmatrix}$$

$$A^3_{,q} = \begin{bmatrix} A^3_{,1} \\ A^3_{,2} \\ A^3_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & \frac{1}{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \end{bmatrix}$$

$$A^3_{,q} = \begin{bmatrix} A^3_{,1} \\ A^3_{,2} \\ A^3_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{u} \\ 0 & 0 & \frac{1}{v} \\ \frac{1}{u} & \frac{1}{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \\ uv \end{bmatrix}$$

$$A^3_{,q} = \begin{bmatrix} A^3_{,1} \\ A^3_{,2} \\ A^3_{,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v+u \\ 2u \\ u+v \end{bmatrix}$$

En resumen la derivada covariante de A^p es:

$$A^p_{,q} = \begin{bmatrix} A^1_{,1} & A^2_{,1} & A^3_{,1} \\ A^1_{,2} & A^2_{,2} & A^3_{,2} \\ A^1_{,3} & A^2_{,3} & A^3_{,3} \end{bmatrix}$$

$$A^p_{,q} = \begin{bmatrix} 2u + \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2} & \frac{-u^2v+uv^2}{u^2+v^2} & v+u \\ \frac{u^2v-uv^2}{u^2+v^2} & 2v + \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2} & 2u \\ -\frac{u^2v^3}{u^2+v^2} & \frac{-u^3v^2}{u^2+v^2} & u+v \end{bmatrix}$$

El cual es un tensor mixto de orden 1 covariante y 1 contravariante.

Consideremos

$$\phi = A^3_{,2} = 2u$$

como un campo escalar, es decir como un tensor de orden 0. **La derivada covariante de un tensor de orden** 0 es igual a:

$$\phi_{,p} = \frac{\partial \phi}{\partial x^p}$$

$$\phi_{,p} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}\overrightarrow{e}^1 + \frac{\partial \phi}{\partial x^2}\overrightarrow{e}^2 + \frac{\partial \phi}{\partial x^3}\overrightarrow{e}^3$$

donde

$$\phi_{,1} = \frac{\partial \phi}{\partial x^1}$$

$$\phi_{,2} = \frac{\partial \phi}{\partial x^2}$$

$$\phi_{,3} = \frac{\partial \phi}{\partial x^3}$$

Es decir $\phi_{,p}$ es la coordenada covariante $p-$ésima del gradiente de ϕ

en nuestro caso

$$\phi = A^3_{,2} = 2u$$

$$\left(A^3_{,2}\right)_{,p} = \frac{\partial\left(A^3_{,2}\right)}{\partial u}\overrightarrow{e}^1 + \frac{\partial\left(A^3_{,2}\right)}{\partial v}\overrightarrow{e}^2 + \frac{\partial\left(A^3_{,2}\right)}{\partial \theta}\overrightarrow{e}^3$$

$$\left(A^3_{,2}\right)_{,p} = (2)\overrightarrow{e}^1 + (0)\overrightarrow{e}^2 + (0)\overrightarrow{e}^3$$

$$\left(A^3_{,2}\right)_{,p} = \left(A^3_{,2}\right)_{,1}\overrightarrow{e}^1 + \left(A^3_{,2}\right)_{,2}\overrightarrow{e}^2 + \left(A^3_{,2}\right)_{,3}\overrightarrow{e}^3$$

$$\left(A^3_{,2}\right)_{,p} = 2\overrightarrow{e}^1$$

$$\left(A^3_{,2}\right)_{,2} = 0$$

Ejemplo

Calcular los símbolos de Christoffel y las geodésicas de $\mathbb{R}^2$ con la métrica

$$(ds)^2 = (du)^2 + 4vdudv + 8v^2(dv)^2$$

Sugerencia $u = x^1$ y $v = x^2$:

$$(ds)^2 = (du)^2 + 4vdudv + 8(dv)^2 = (dx^1)^2 + 4x^2dx^1dx^2 + 8(x^2)^2(dx^2)^2$$

$$(ds)^2 = (1)dx^1dx^1 + (2x^2)dx^1dx^2 + (2x^2)dx^2dx^1 + (8(x^2)^2)dx^2dx^2$$

$$(ds)^2 = g_{11}dx^1dx^1 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}dx^2dx^2$$

Entonces el tensor métrico es

$$G = (g_{pq}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x^2 \\ 2x^2 & 8(x^2)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2v \\ 2v & 8v^2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de tensores cartesianos

Considere dos sistemas de coordenadas cartesianas, de bases $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ (Base canónica de $\mathbb{R}^3$) , $\bar{S} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, donde:

$$\bar{e}_1 = e_1; \ \bar{e}_2 = \frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}}; \ \bar{e}_3 = \frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}}$$

Si $A_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ dado en el sistema S transformarlo la nuevo sistema $\bar{S}$

Primero hallemos las ecuaciones de transformación, para un vector v cualquiera de $\mathbb{R}^3$ tenemos:

$$v = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = \bar{x}^1 \bar{e}_1 + \bar{x}^2 \bar{e}_2 + \bar{x}^3 \bar{e}_3$$

Reemplazando las relaciones del problema

$$x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = \bar{x}^1 (e_1) + \bar{x}^2 \left(\frac{e_2 - e_3}{\sqrt{2}} \right) + \bar{x}^3 \left(\frac{e_2 + e_3}{\sqrt{2}} \right)$$

simplificando el lado derecho:

$$x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 = \left(\bar{x}^1 \right) e_1 + \left(\frac{\bar{x^2} + \bar{x}^3}{\sqrt{2}} \right) e_2 + \left(\frac{-\bar{x}^2 + \bar{x}^3}{\sqrt{2}} \right) e_3$$

como S y $\bar{S}$ son bases entonces las ecuaciones de transformación:

$$x^1 = \bar{x}^1$$

$$x^2 = \frac{\bar{x^2} + \bar{x}^3}{\sqrt{2}}$$

$$x^3 = \frac{-\bar{x}^2 + \bar{x}^3}{\sqrt{2}}$$

A_{pq} es un tensor convariante de orden 2 , por lo tanto se transforma de S a $\bar{S}$ mediante la siguiente ley de transformación:

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} A_{pq}$$

Desarrollando esta ecuación (comprobar) se tiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{bmatrix}$$

En términos de la notación que hemos manejado previamente:

$$\bar{A} = \bar{J}^T A \bar{J}$$

Propiedades que relacionan los símbolos de Christoffel con el tensor métrico

Demostrar:

- $$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} = \Gamma_{pmq} + \Gamma_{qmp}$$

- $$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -g^{pn}\Gamma^q_{mn} - g^{qn}\Gamma^p_{mn}$$

- $$\Gamma^p_{pq} = \frac{\partial}{\partial x^q}\left(ln\sqrt{g}\right)$$

  donde $g = |G|$

- $$\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} = \Gamma_{pmq} + \Gamma_{qmp}$$

Los símbolos de Chirstoffel de primera clase están dados por:

$$\Gamma_{pqr} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^r}\right\}$$

Coloquemos los indices que corresponden para demostrar la identidad

$$\Gamma_{pmq} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right\}$$

$$\Gamma_{qmp} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{qm}}{\partial x^p}\right\}$$

pero el tensor métrico es simétrico, es decir

$$g_{ij} = g_{ji}$$

entonces

$$g_{mp} = g_{pm}$$

$$g_{qm} = g_{mq}$$

luego...

$$\Gamma_{pmq} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right\}$$

$$\Gamma_{qmp} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}\right\}$$

sumando estas dos últimas ecuaciones:

$$\Gamma_{pmq}+\Gamma_{qmp} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p} - \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q}\right\}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^m} + \frac{\partial g_{pm}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{mq}}{\partial x^p}\right\}$$

Por lo tanto:

$$\Gamma_{pmq} + \Gamma_{qmp} = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^m}$$

- $$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -g^{pn}\Gamma^q_{mn} - g^{qn}\Gamma^p_{mn}$$

recordemos que

$$g_{ik}g^{kj} = \delta^j_i$$

claramente

$$\frac{\partial \delta^j_i}{\partial x^r} = 0$$

$$\frac{\partial \left(g_{ik}g^{kj}\right)}{\partial x^r} = 0$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}g^{kj} + g_{ik}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^r} = 0$$

$$g_{ik}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^r} = -\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}g^{kj}$$

$$g_{ik}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^r} = -g^{kj}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}$$

por el anterior punto tenemos...

$$g_{ik}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^r} = -g^{kj}\left(\Gamma_{irk} + \Gamma_{kri}\right)$$

$$g^{si}g_{ik}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^r} = -g^{si}g^{kj}\left(\Gamma_{irk} + \Gamma_{kri}\right)$$

$$\delta^s_k\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^r} = -g^{si}g^{kj}\Gamma_{irk} - g^{si}g^{kj}\Gamma_{kri}$$

$$\delta^s_k\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^r} = -g^{si}\left(g^{jk}\Gamma_{irk}\right) - g^{kj}\left(g^{si}\Gamma_{kri}\right)$$

ya que el tensor recíproco g^{pq} es simétrico

$$\delta_k^s \frac{\partial g^{kj}}{\partial x^r} = -g^{si}\Gamma_{ir}^j - g^{kj}\Gamma_{kr}^s$$

$$\frac{\partial g^{sj}}{\partial x^r} = -g^{si}\Gamma_{ir}^j - g^{kj}\Gamma_{kr}^s$$

luego si:

$$s = p; j = q; r = m; i = k = n$$
$$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -g^{pn}\Gamma_{nm}^q - g^{nq}\Gamma_{nm}^p$$

$$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x^m} = -g^{pn}\Gamma_{mn}^q - g^{qn}\Gamma_{mn}^p$$

- $$\Gamma^{p}_{pq} = \frac{\partial}{\partial x^{q}}\left(ln\sqrt{g}\right)$$

donde $g = |G| = det(G)$
Partamos de

$$\frac{\partial g}{\partial x^{m}} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^{m}}$$

por la teoría de los determinantes tenemos:

$$g = det(G) = \sum_{r=1}^{n} g_{rj}G_{rj}$$

que es la fórmula de Laplace para el desarrollo de un determinante por la $r-$ésima fila. aclarando que G_{ij} es el cofactor del elemento g_{rj}, por lo tanto:

$$\frac{\partial g}{\partial x^{m}} = G_{rj}$$

pero

$$(g^{pq}) = \frac{1}{g}\left(cofact(g_{pq})\right)^{T}$$

entonces

$$\frac{\partial g}{\partial x^{m}} = G_{rj} = gg^{rj}$$

Reemplazando, se tiene:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g g^{rj} \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^m}$$

por el primer punto se tiene:

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g g^{rj} \left(\Gamma_{jmr} + \Gamma_{rmj}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g \left(g^{jr} \Gamma_{jmr} + g^{rj} \Gamma_{rmj}\right)$$

ya que el tensor recíproco g^{pq} es simétrico

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g \left(\Gamma^j_{jm} + \Gamma^r_{rm}\right)$$

como r es un índice mudo, se lo reemplaza por j

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g \left(\Gamma^j_{jm} + \Gamma^j_{jm}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = g\left(\Gamma^j_{jm} + \Gamma^j_{jm}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x^m} = 2g\Gamma^j_{jm}$$

$$\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m} = \Gamma^j_{jm}$$

ya que j es un indice mudo lo reemplazamos por el indice p

$$\Gamma^p_{pm} = \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x^m}$$

$$\Gamma^p_{pm} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(ln\sqrt{g}\right)$$

por último m es un indice libre, asi lo podemos reemplazar por el indice q.

$$\Gamma^p_{pq} = \frac{\partial}{\partial x^q}\left(ln\sqrt{g}\right)$$

El gradiente en coordenadas generalizadas

Sea $\phi = \phi(x^1, x^2, ...x^n)$ un campo escalar o tensor de orden 0, el laplaciano de ϕ es

$$\nabla^2\phi = \nabla \circ \nabla\phi$$

hallemos las coordenadas contravariantes del gradiente de ϕ, las coordenadas covariantes del gradiente están dadas por la siguiente ecuación

$$\phi_{,p} = \frac{\partial\phi}{\partial x^p}$$

$$A_p = \phi_{,p} = \frac{\partial\phi}{\partial x^p}$$

además el gradiente de ϕ en coordenadas covariantes esta dado por:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^p}\overrightarrow{e}^p$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}\overrightarrow{e}^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\overrightarrow{e}^2 + ... + \frac{\partial\phi}{\partial x^n}\overrightarrow{e}^n$$

$$\nabla\phi = A_1\overrightarrow{e}^1 + A_2\overrightarrow{e}^2 + ... + A_n\overrightarrow{e}^n$$

$$A_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}$$

$$A_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x^2}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{\partial\phi}{\partial x^n}$$

Transformemos las coordenadas covariantes del gradiente de ϕ dadas por

$$A_p = \phi_{,p} = \frac{\partial \phi}{\partial x^p}$$

a sus coordenadas contravariantes, las cuales se obtienen mediante la siguiente relación:

$$A^p = g^{pq} A_q$$

reemplazando

$$A^p = g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q}$$

entonces el gradiente de ϕ en coordenadas contravariantes son:

$$\nabla \phi = A^p \overrightarrow{e}_p$$

$$\nabla \phi = g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q} \overrightarrow{e}_p$$

Ejemplo

Hallar el gradiente en coordenadas esféricas de

$$\phi(r,\theta,\varphi) = r^2\cos(\theta)$$

las ecuaciones de transformación para trabajar con coordenadas esféricas son:

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$
$$z = r\cos(\theta)$$

calculemos los vectores básicos contravariantes

$$\alpha_1 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial r} = (\sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi), \cos(\theta))$$
$$\alpha_2 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \theta} = (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\cos(\theta)\sin(\varphi), -r\sin\theta)$$
$$\alpha_3 = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial \varphi} = (-r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), 0)$$

calculemos el tensor métrico $g_{pq} = \alpha_p \circ \alpha_q$

$$g_{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = 1,\ g_{22} = r^2,\ g_{33}$$

El gradiente en coordenadas contravariantes esta dado por:

$$\nabla\phi = g^{pq} \frac{\partial\phi}{\partial x^q} \overrightarrow{e}_p$$

$$\nabla\phi = g^{1q} \frac{\partial\phi}{\partial x^q} \overrightarrow{e}_1 + g^{2q} \frac{\partial\phi}{\partial x^q} \overrightarrow{e}_2 + g^{3q} \frac{\partial\phi}{\partial x^q} \overrightarrow{e}_3$$

notar que el sistema de coordenadas esférico es ortogonal por lo tanto:

$$\nabla\phi = g^{11} \frac{\partial\phi}{\partial x^1} \overrightarrow{e}_1 + g^{22} \frac{\partial\phi}{\partial x^2} \overrightarrow{e}_2 + g^{33} \frac{\partial\phi}{\partial x^3} \overrightarrow{e}_3$$

donde

$$(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \varphi)$$

y además

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = 1$$

$$g^{22} = \frac{1}{g_{22}} = \frac{1}{r^2}$$

$$g^{33} = \frac{1}{g_{33}} = \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)}$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\overrightarrow{e}_1 + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\overrightarrow{e}_2 + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\overrightarrow{e}_3$$

El gradiente en coordenadas físicas se obtiene, normalizando los vectores: $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$, que son la base contravariante y por lo tanto son:

$$\overrightarrow{e}_1 = \alpha_1$$

$$\overrightarrow{e}_2 = \alpha_2$$

$$\overrightarrow{e}_3 = \alpha_3$$

entonces la base física esta dada por:

$$\hat{\imath}_1 = \frac{1}{\|e_1\|}\overrightarrow{e}_1 \rightarrow \overrightarrow{e_1} = \|e_1\|\hat{\imath}_1 \rightarrow \|\alpha_1\|\hat{\imath}_1 \rightarrow \overrightarrow{e}_1 = \sqrt{g_{11}}\hat{\imath}_1$$

$$\hat{\imath}_2 = \frac{1}{\|e_2\|}\overrightarrow{e}_1 2 \rightarrow \overrightarrow{e_2} = \|e_2\|\hat{\imath}_2 \rightarrow \|\alpha_2\|\hat{\imath}_2 \rightarrow \overrightarrow{e}_2 = \sqrt{g_{22}}\hat{\imath}_2$$

$$\hat{\imath}_3 = \frac{1}{\|e_3\|}\overrightarrow{e}_3 \rightarrow \overrightarrow{e_3} = \|e_3\|\hat{\imath}_3 \rightarrow \|\alpha_3\|\hat{\imath}_3 \rightarrow \overrightarrow{e}_3 = \sqrt{g_{33}}\hat{\imath}_3$$

Por lo tanto la relación entre la base contravariante y la base física esta dada por

$$\overrightarrow{e}_1 = \sqrt{g_{11}}\hat{\imath}_1$$

$$\overrightarrow{e}_2 = \sqrt{g_{22}}\hat{\imath}_2$$

$$\overrightarrow{e}_3 = \sqrt{g_{33}}\hat{\imath}_3$$

Reemplazando en la expresión del gradiente tenemos:

$$\nabla\phi = g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\overrightarrow{e}_1 + g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\overrightarrow{e}_2 + g^{33}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\overrightarrow{e}_3$$

$$\nabla\phi = \frac{1}{g_{11}}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\sqrt{g_{11}}\hat{\imath}_1 + g\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\sqrt{g_{22}}\hat{\imath}_2 + \frac{1}{g_{33}}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\sqrt{g_{33}}\hat{\imath}_3$$

resultando

$$\nabla\phi = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\hat{\imath}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\hat{\imath}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\hat{\imath}_3$$

por lo tanto, el gradiente en coordenadas físicas es:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\imath}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\imath}_2 + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\imath}_3$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 2r\cos(\theta)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -r^2\sin(\theta)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0$$

$$\nabla\phi = 2r\cos(\theta)\hat{\imath}_1 - r\sin(\theta)\hat{\imath}_2$$

La divergencia en coordenadas generalizadas

La divergencia de A^p es la contracción de su derivada covariante con respecto de x^q, esto es la contracción del tensor de orden 2, $A^p_{,q}$, es decir:
Derivada covariante de un tensor covariante de un tensor contravariante A^p con respecto de x^q, denotado por $A^p_{,q}$ se define por:

$$div\ A^p = A^p_{,q} = \frac{\partial A^p}{\partial x^q} + \Gamma^p_{qs} A^s$$

contraer un tensor es igualar un par de indice y realizar la suma con respecto a este par indices igualados:

$$A^p_{,p} = \frac{\partial A^p}{\partial x^p} + \Gamma^p_{ps} A^s$$

Por el tercer punto del anterior problema

$$\Gamma^p_{ps} = \frac{\partial}{\partial x^s}\left(ln\sqrt{g}\right)$$

reemplazando se tiene

$$A^p_{,p} = \frac{\partial A^p}{\partial x^p} + \left(\frac{\partial}{\partial x^s}\left(ln\sqrt{g}\right)\right)A^s$$

$$A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{g}\frac{\partial A^p}{\partial x^p}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^s}\right)A^s$$

$$A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\frac{\partial A^p}{\partial x^p} + \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^s}A^s\right]$$

s es un índice mudo, por lo tanto lo podemos reemplazar con el indice p

resultando en

$$div\ A^p = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\frac{\partial A^p}{\partial x^p} + \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^p}A^p\right]$$

entonces...

$$div\ A^p = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^p}\left(\sqrt{g}A^p\right)\right]$$

En conclusión la divergencia de un tensor contravariante de orden 1 en un sistema de coordenadas $(x^1, x^2, ..., x^n)$ esta dado por:

$$div\ A^p = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^p}\left(\sqrt{g}A^p\right)$$

Nota Sea un campo vectorial $\overrightarrow{A} = A^p\overrightarrow{e}_p$ entonces su divergencia es

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^p}\left(\sqrt{g}A^p\right)$$

Ejemplo

Hallar la divergencia en coordenadas esféricas

Nieto Coronel Joel Gastón

apliquemos:

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = A^{p}_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{p}} \left(\sqrt{g} A^{p}\right)$$

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{1}} \left(\sqrt{g} A^{1}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{2}} \left(\sqrt{g} A^{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{3}} \left(\sqrt{g} A^{3}\right)$$

pero el campo vectorial $\overrightarrow{A}$ en coordenadas contravariantes es

$$\overrightarrow{A} = A^{1} \overrightarrow{e_1} + A^{2} \overrightarrow{e_2} + A^{3} \overrightarrow{e_3}$$

y $\overrightarrow{A}$ en coordenadas físicas es

$$\overrightarrow{A} = A_{r} \hat{\imath}_1 + A_{\theta} \hat{\imath}_2 + A_{\varphi} \hat{\imath}_3$$

por el anterior problema:

$$\overrightarrow{A} = A_r \hat{\imath}_1 + A_\theta \hat{\imath}_2 + A_\varphi \hat{\imath}_3$$

$$\overrightarrow{e}_1 = \sqrt{g_{11}} \hat{\imath}_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \overrightarrow{e}_1 = \hat{\imath}_1$$

$$\overrightarrow{e}_2 = \sqrt{g_{22}} \hat{\imath}_2 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \overrightarrow{e}_2 = \hat{\imath}_2$$

$$\overrightarrow{e}_3 = \sqrt{g_{33}} \hat{\imath}_3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \overrightarrow{e}_3 = \hat{\imath}_3$$

reemplazando:

$$\overrightarrow{A} = A_r \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \overrightarrow{e}_1 \right) + A_\theta \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \overrightarrow{e}_2 \right) + A_\varphi \left(\frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \overrightarrow{e}_3 \right)$$

$$\overrightarrow{A} = \frac{A_r}{\sqrt{g_{11}}} \overrightarrow{e}_1 + \frac{A_\theta}{\sqrt{g_{22}}} \overrightarrow{e}_2 + \frac{A_\varphi}{\sqrt{g_{33}}} \overrightarrow{e}_3$$

de donde la relación entre las coordenadas físicas y las coordenadas contravariantes de $\overrightarrow{A}$ es:

$$A^1 = \frac{A_r}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$A^2 = \frac{A_\theta}{\sqrt{g_{22}}}$$

$$A^3 = \frac{A_\varphi}{\sqrt{g_{33}}}$$

reemplazando en:

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{g} A^1 \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sqrt{g} A^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\sqrt{g} A^3 \right)$$

se tiene:

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{g} \frac{A_r}{\sqrt{g_{11}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{g} \frac{A_\theta}{\sqrt{g_{22}}} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sqrt{g} \frac{A_\varphi}{\sqrt{g_{33}}} \right)$$

pero

$$det(g_{pq}) = g$$

$$g = r^4 \sin^2(\theta)$$

$$\sqrt{g} = r^2 \sin(\theta)$$

entonces

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin(\theta) A_r \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin(\theta) A_\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r A_\varphi \right) \right]$$

Laplaciano en coordenadas generalizadas

Sea $\phi = \phi(x^1, x^2, ...x^n)$ un campo escalar o tensor de orden 0, el laplaciano de ϕ es

$$\nabla^2\phi = \nabla \circ \nabla\phi$$

hallemos las coordenadas contravariantes del gradiente de ϕ, las coordenadas covariantes del gradiente están dadas por la siguiente ecuación

$$\phi_{,p} = \frac{\partial\phi}{\partial x^p}$$

$$A_p = \phi_{,p} = \frac{\partial\phi}{\partial x^p}$$

además el gradiente de ϕ en coordenadas covariantes esta dado por:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^p}\overrightarrow{e}^p$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}\overrightarrow{e}^1 + \frac{\partial\phi}{\partial x^2}\overrightarrow{e}^2 + ... + \frac{\partial\phi}{\partial x^n}\overrightarrow{e}^n$$

$$\nabla\phi = A_1\overrightarrow{e}^1 + A_2\overrightarrow{e}^2 + ... + A_n\overrightarrow{e}^n$$

$$A_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}$$

$$A_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x^2}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{\partial\phi}{\partial x^n}$$

Transformemos las coordenadas covariantes del gradiente de ϕ dadas por

$$A_p = \phi_{,p} = \frac{\partial \phi}{\partial x^p}$$

a sus coordenadas contravariantes, las cuales se obtienen mediante la siguiente relación:

$$A^p = g^{pq} A_q$$

reemplazando

$$A^p = g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q}$$

entonces el gradiente de ϕ en coordenadas contravariantes son:

$$\nabla \phi = A^p \overrightarrow{e}_p$$

$$\nabla \phi = g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q} \overrightarrow{e}_p$$

Hallemos la divergencia del tensor contravariante $A^p = g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q}$, anteriormente probamos:

$$div\ A^p = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\sqrt{g} A^p \right)$$

reemplazando:

$$div\ A^p = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\sqrt{g} g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q} \right)$$

Sea un campo vectorial $\overrightarrow{A} = A^p \overrightarrow{e}_p$ entonces su divergencia es:

$$\nabla \circ \overrightarrow{A} = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\sqrt{g} A^p\right)$$

en este caso

$$\overrightarrow{A} = \nabla \phi$$

$$\nabla \circ \nabla \phi = A^p_{,p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\sqrt{g} g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q}\right)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\sqrt{g} g^{pq} \frac{\partial \phi}{\partial x^q}\right)$$

Ejemplo

Hallar el Laplaciano en coordenadas esféricas de un campo escalar ϕ

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^p}\left(\sqrt{g}g^{pq}\frac{\partial\phi}{\partial x^q}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g}g^{1q}\frac{\partial\phi}{\partial x^q}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}g^{2q}\frac{\partial\phi}{\partial x^q}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g}g^{3q}\frac{\partial\phi}{\partial x^q}\right)$$

ya que el sistema de coordenadas es esférico es ortogonal se tiene

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g}g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g}g^{33}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{g}g^{11}\frac{\partial\phi}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{g}g^{22}\frac{\partial\phi}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{g}g^{33}\frac{\partial\phi}{\partial x^3}\right)\right]$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right)\right]$$

Rotacional en coordenadas generalizadas

El rotacional de un tensor covariante de orden 1, A_p. esta dado por:

$$rot\ A_p = -\epsilon^{pqr} A_{p,q}$$

si

$$\overrightarrow{A} = A_p \overrightarrow{e}^p$$

$$\nabla \times \overrightarrow{A} = -\epsilon^{pqr} A_{p,q} \overrightarrow{e}_r$$

Principio de Covariancia

Las leyes generales de la naturaleza deben expresarse por ecuaciones que sean validas para todos los sistemas de coordenadas.
Albert Einstein-El principio de la relatividad

Es decir las ecuaciones que representan las leyes físicas tienen que permanecer inalteradas o invariantes ante cualquier cambio de coordenadas, En otras palabras las ecuaciones deben ser covariantes en sentido un general.

Las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético

Las ecuaciones de Maxwell expresadas en forma diferencial establecen la relación entre el campo eléctrico $\overrightarrow{E}$, campo magnético $\overrightarrow{B}$, densidad de corriente $\overrightarrow{J}$ y densidad de carga ρ, en cada punto del espacio.

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \circ \overrightarrow{B} = 0$$

$$\nabla \circ \overrightarrow{D} = \rho$$

donde $\overrightarrow{D} = \epsilon \overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H}$

Forma covariante de las ecuaciones de Maxwell

Expresar las ecuaciones de Maxwell en notación tensorial.
Consideremos como tensores contravariantes de orden 1 a:

$$\overrightarrow{B} = B^p \overrightarrow{e}_p$$

$$\overrightarrow{D} = D^p \overrightarrow{e}_p$$

$$\overrightarrow{J} = J^p \overrightarrow{e}_p$$

y a como tensores covariantes de orden 1:

$$\overrightarrow{E} = E_p \overrightarrow{e}^p$$

$$\overrightarrow{H} = H_p \overrightarrow{e}^p$$

$$\nabla \circ \overrightarrow{B} = 0$$

pero

$$\nabla \circ \overrightarrow{B} = div\ B^p = B^p_{,p} = 0$$

por lo tanto:

$$B^p_{,p} = 0$$

$$\nabla \circ \overrightarrow{D} = div\ D^p = D^p_{,p} = \rho$$

entonces:

$$D^p_{,p} = \rho$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{E} = -\epsilon^{pqr} E_{p,q} \overrightarrow{e}_r$$

pero

$$\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{\partial B^r}{\partial t} \overrightarrow{e}_r$$

reemplazando se tiene:

$$-\epsilon^{pqr} E_{p,q} = -\frac{\partial B^r}{\partial t}$$

$$\epsilon^{pqr} E_{p,q} = \frac{\partial B^r}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = \overrightarrow{J} + \frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = -\epsilon^{pqr} H_{p,r} \overrightarrow{e}_r$$

$$\overrightarrow{J} = J^r \overrightarrow{e}_r$$

$$\frac{\partial \overrightarrow{D}}{\partial t} = \frac{\partial D^r}{\partial t} \overrightarrow{e}_r$$

reemplazando, entonces:

$$-\epsilon^{pqr} H_{p,r} = J^r + \frac{\partial D^r}{\partial t}$$

En resumen la forma covariante de las ecuaciones de Maxwell, están dados por:

$$B^p_{,p} = 0$$

$$D^p_{,p} = \rho$$

$$\epsilon^{pqr} E_{p,q} = \frac{\partial B^r}{\partial t}$$

$$-\epsilon^{pqr} H_{p,r} = J^r + \frac{\partial D^r}{\partial t}$$

Estas ecuaciones son invariantes bajo transformaciones de coordenadas, condición fundamental para considerarse leyes físicas.

Geodésicas en el plano con la métrica usual

Sea $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ con la siguiente métrica

$$g_{11} = g_{22} = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

- Hallar la geodésicas en el plano con esta métrica

Con esta métrica es claro que tanto los símbolos de Christoffel tanto los de primera clase como los de segunda clase son nulos es decir:

$$\Gamma_{pqr} = 0$$

$$\Gamma^{r}_{pq} = 0$$

Ya que:

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

las geodésicas son

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

como todos los símbolos de Christoffel de segunda clase son nulos, y $x^1 = x$, $x^2 = y$, se tiene:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0 \to x = as + b$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = 0 \to y = cs + d$$

donde a, b, c, d son constantes de integración, eliminado el parámetro s se tiene:

$$\frac{x-b}{a} = \frac{y-d}{c}$$

$$c(x-b)=(y-d)a$$
$$cx-ay-cb+da=0$$

la solución del sistemas de ecuaciones diferenciales es una recta cuya ecuación es

$$cx-ay-cb+da=0$$

es decir las geodésicas en plano con la métricas usual son rectas.

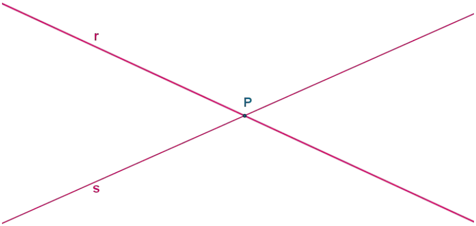


Figure: Las geodésicas en el plano con la métrica usual son rectas

Un modelo para geometría hiperbólica: Semiplano superior $\mathbb{H}$ de Poincaré

Sea $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ con la siguiente métrica

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

- Hallar la geodésicas en el semiplano superior con esta métrica

Símbolos de Christoffel de primera especie para un sistema de coordenadas ortogonales

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

- Si p, q y r ($p \neq q$, $q \neq r$ y $p \neq r$)son distintos entonces :

$$\Gamma_{pqr} = 0$$

$$x^1 = x$$
$$x^2 = y$$

- Si $p = q = r$ entonces

$$\Gamma_{ppp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^p}$$
$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} = 0$$
$$\Gamma_{222} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^2} = -\frac{1}{y^3}$$

- Si $p \neq q$ y $p = r$ entonces

$$\Gamma_{pqp} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^q}$$
$$\Gamma_{1q1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^q}$$
$$\Gamma_{121} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = -\frac{1}{y^3}$$
$$\Gamma_{121} = \Gamma_{211} = -\frac{1}{y^3}$$

$$\Gamma_{2q2} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^q}$$

$$\Gamma_{212} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 0$$

$$\Gamma_{212} = \Gamma_{122} = 0$$

Tomar en cuenta

$$x^1 = x$$

y

$$x^2 = y$$

- Si $p = q$ y $p \neq r$ entonces:

$$\Gamma_{ppr} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{pp}}{\partial x^r}$$

$$\Gamma_{11r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^r}$$

$$\Gamma_{112} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} = \frac{1}{y^3}$$

$$\Gamma_{112} = \frac{1}{y^3}$$

$$\Gamma_{22r} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^r}$$

$$\Gamma_{221} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = 0$$

$$\Gamma_{221} = 0$$

$$\Gamma_{pq1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{y^3} \\ -\frac{1}{y^3} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{111} & \Gamma_{121} \\ \Gamma_{211} & \Gamma_{221} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{pq2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{y^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{112} & \Gamma_{122} \\ \Gamma_{212} & \Gamma_{222} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^1_{pq} = g^{11}\Gamma_{pq1} = \frac{1}{g_{11}}\Gamma_{pq1}$$

$$\Gamma^1_{pq} = y^2 \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{y^3} \\ -\frac{1}{y^3} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{y} & 0 \end{array} \right]$$

$$\Gamma^1_{pq} = \left[\begin{array}{cc} 0 & -\frac{1}{y} \\ -\frac{1}{y} & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{array} \right]$$

$$\Gamma^2_{pq} = g^{22}\Gamma_{pq2} = \frac{1}{g_{22}}\Gamma_{pq2}$$

$$\Gamma^2_{pq} = y^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{y^3} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{y^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{y} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma^2_{pq} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{bmatrix}$$

La ecuación de las geodésicas son:

$$\frac{d^2x^r}{ds^2} + \Gamma^r_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

desarrollando

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} + \Gamma^1_{12}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} + \Gamma^1_{21}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^1}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{pq}\frac{dx^p}{ds}\frac{dx^q}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \Gamma^2_{11}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds} + \Gamma^2_{22}\frac{dx^2}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{y}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] = 0$$

Entonces las ecuaciones de las geodésicas son:

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{2}{y}\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1}{y}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right] = 0$$

eliminando el parámetro s de las anteriores dos ecuaciones se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{y} = 0$$

cuyas soluciones son las ecuaciones geodésicas en el semiplano superior con la métrica dada en el problema.

La solución de:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{y} = 0$$

es

$$x^2 + y^2 - ax + b = 0$$

donde a y b son constantes que están determinadas por las condiciones iniciales.
Esta solución equivale a:

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = b + \frac{a^2}{4}$$

es sencillo probar que cuando la curva geodésica pasa por dos puntos (x_0, y_0) y x_1, y_1 con $x_0 \neq x_1$, la geodésica es una semicircunferencia centradas $(\frac{a}{2}, 0)$ (centro en el eje x)y con radio igual a $r = \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$.
Por otro lado si la geodésica pasa por dos puntos (x_0, y_0) y x_1, y_1 con $x_0 = x_1$ entonces la geodésica es una recta perpendicular al eje x cuya ecuación es:

$$x = x_0$$

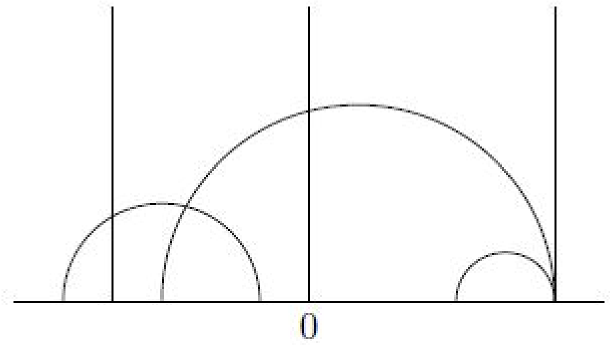


Figure: Las geodésicas en el semiplano superior

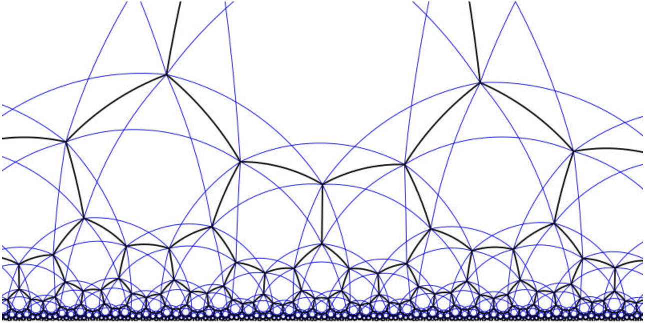


Figure: Mosaico de geodésicas (rectas en el semiplano hiperbólico)

El postulado de las paralelas

En la geometría euclidiana en el plano, se cumple el siguiente axioma:

Dada la recta r en el plano y un punto p exterior a esta recta, entonces existe una y solo una recta paralela a la recta r que pasa por p .

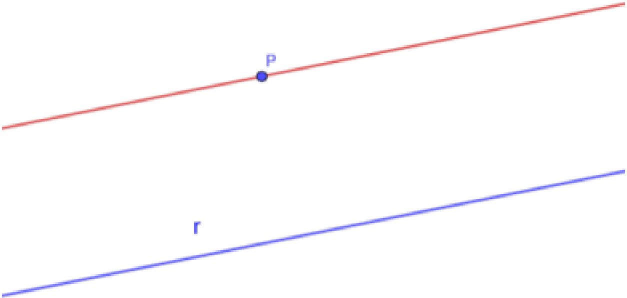


Figure: Paralelas en el plano con la métrica usual

Notar que la noción de geodésica se puede considerar como una generalización de la recta pero en espacios "curvos", considerando en el semiplano $\mathbb{H}$ de Poincaré se cumple el siguiente axioma:

Dada una recta r y un punto p exterior a esta recta, entonces por el punto p pasan al menos dos paralelas.

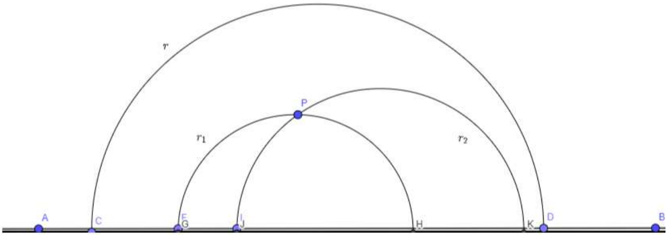


Figure: En el semiplano superior r_1 y r_2 son paralelas r que pasan por p

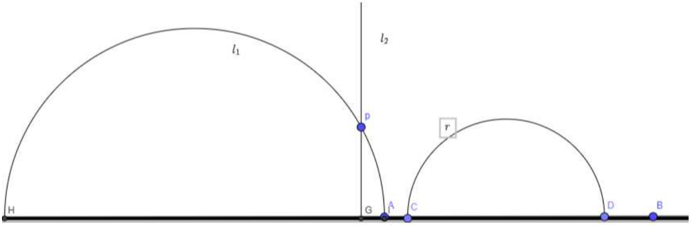


Figure: En el semiplano superior l_1 y l_2 son paralelas r que pasan por p

Derivada Absoluta o intrínseca

Dado A_p su derivada absoluta según la curva $x^q = x^q(t)$, que escribiremos $\frac{\delta A_p}{\delta t}$, es el producto interno de la derivada covariante de A_p por $\frac{dx^q}{dt}$, es decir:

$$A_{p,q}\frac{dx^q}{dt}$$

. Por lo tanto la derivada absoluta o intrínseca viene dada por:

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} = \frac{dA_p}{dt} - \Gamma^r_{pq} A_r \frac{dx^q}{dt}$$

análogamente

$$\frac{\delta A^p}{\delta t} = \frac{dA^p}{dt} + \Gamma^p_{qr} A^r \frac{dx^q}{dt}$$

Forma covariante de la segunda Ley de Newton

Supongamos que la masa M de una partícula es un escalar que no depende del tiempo t, entonces:

$$\overrightarrow{F} = M\overrightarrow{a}$$

pero

$$\overrightarrow{F} = F^k \overrightarrow{e}_k$$

$$\overrightarrow{a} = a^k \overrightarrow{e}_k$$

$$F^k \overrightarrow{e}_k = Ma^k \overrightarrow{e}_k$$

de donde

$$F^k = Ma^k$$

el cual es un tensor contravariante de orden 1, que se llama fuerza aplicada sobre la particula. Así la segunda ley de Newton admite la representación tensorial:

$$F^k = Ma^k = M\frac{\delta v^k}{\delta t}$$

pero

$$a^k = \frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{dv^k}{dt} + \Gamma^k_{qs} v^s \frac{dx^q}{dt}$$

donde k-ésima coordenada de la velocidad es

$$v^k = \frac{dx^k}{dt}$$

pero

$$a^k = \frac{\delta v^k}{\delta t} = \frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{qp} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt}$$

por lo tanto la forma covariante de la segunda ley de Newton es

$$F^k = M \left[\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{qp} \frac{dx^p}{dt} \frac{dx^q}{dt} \right]$$

esta ecuación es invariante bajo transformaciones de coordenadas.

"Lo importante no es llegar lo importante es el camino".
Fito Paez