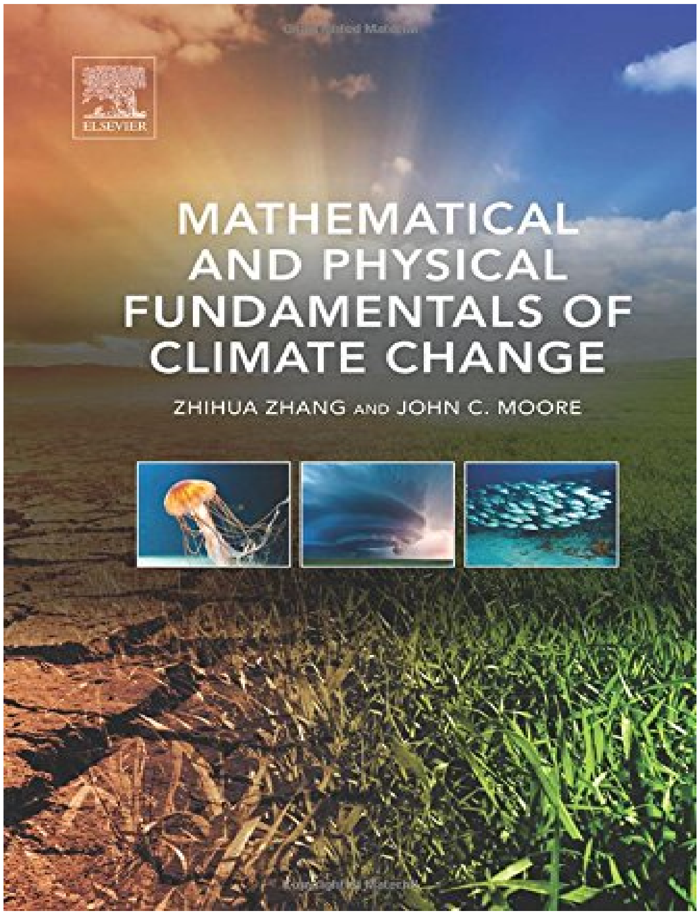
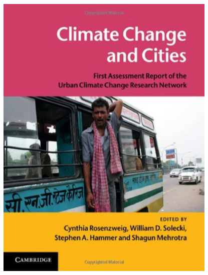
Mathematical and Physical Fundamentals of Climate Change 1st Edition Zhihua Zhang



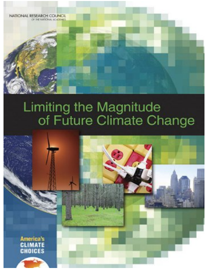
Climate Change and Cities First Assessment Report of the Urban Climate Change Research Network 1st Edition Cynthia Rosenzweig

https://ebookultra.com/download/climate-change-and-cities-first-assessment-report-of-the-urban-climate-change-research-network-1st-edition-cynthia-rosenzweig/



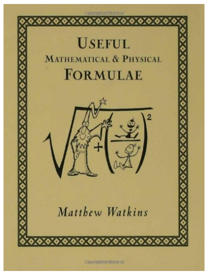
Limiting the Magnitude of Future Climate Change America s Climate Choices 1st Edition America'S Climate Choices: Panel On Limiting The Magnitude Of Future Climate Change

https://ebookultra.com/download/limiting-the-magnitude-of-future-climate-change-america-s-climate-choices-1st-edition-americas-climate-choices-panel-on-limiting-the-magnitude-of-future-climate-change/



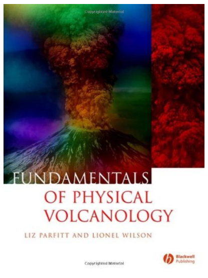
Useful mathematical and physical formulae Matthew Watkins

https://ebookultra.com/download/useful-mathematical-and-physical-formulae-matthew-watkins/



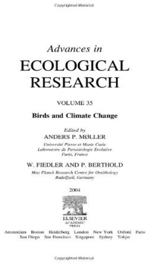
Fundamentals of Physical Volcanology 1st Edition Liz Parfitt

https://ebookultra.com/download/fundamentals-of-physical-volcanology-1st-edition-liz-parfitt/



Birds and Climate Change 1st Edition A Moller

https://ebookultra.com/download/birds-and-climate-change-1st-edition-a-moller/



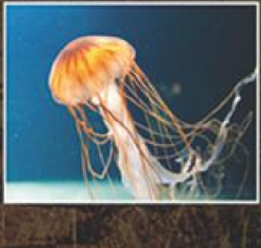
Mathematical and Physical Fundamentals of Climate Change 1st Edition Zhihua Zhang Digital Instant Download

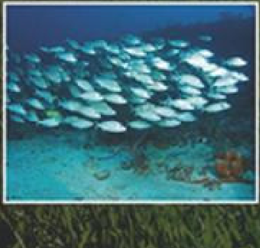
Author(s): Zhihua Zhang, John C. Moore
ISBN(s): 9780128000663, 012800066X
Edition: 1
File Details: PDF, 3.71 MB
Year: 2014
Language: english

ELSEVIER

MATHEMATICAL AND PHYSICAL FUNDAMENTALS OF CLIMATE CHANGE

ZHIHUA ZHANG AND JOHN C. MOORE





Mathematical and Physical Fundamentals of Climate Change

Mathematical and Physical Fundamentals of Climate Change

Zhihua Zhang
Beijing Normal University, China

John C. Moore
University of Lapland, Finland & Beijing Normal University, China

ELSEVIER
AMSTERDAM • BOSTON • HEIDELBERG • LONDON • NEW YORK • OXFORD
PARIS • SAN DIEGO • SAN FRANCISCO • SINGAPORE • SYDNEY • TOKYO

Elsevier
Radarweg 29, PO Box 211, 1000 AE Amsterdam, Netherlands
The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK
225 Wyman Street, Waltham, MA 02451, USA

ISBN: 978-0-12-800066-3

British Library Cataloguing-in-Publication Data
A catalogue record for this book is available from the British Library

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data
A catalog record for this book is available from the Library of Congress

For information on all Elsevier publications
visit our web site at http://store.elsevier.com/

Contents

Chapter 1

Fourier Analysis

Motivated by the study of heat diffusion, Joseph Fourier claimed that any periodic signals can be represented as a series of harmonically related sinusoids. Fourier's idea has a profound impact in geoscience. It took one and a half centuries to complete the theory of Fourier analysis. The richness of the theory makes it suitable for a wide range of applications such as climatic time series analysis, numerical atmospheric and ocean modeling, and climatic data mining.

1.1 FOURIER SERIES AND FOURIER TRANSFORM

Assume that a system of functions $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ in a closed interval $[a,b]$ satisfies $\int_a^b |\varphi_n(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$. If

$$\int_a^b \varphi_n(t)\overline{\varphi}_m(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & (n \neq m), \\ 1 & (n = m), \end{cases}$$

and there does not exist a nonzero function f such that

$$\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty, \qquad \int_a^b f(t)\overline{\varphi}_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

then this system is said to be an *orthonormal basis* in the interval $[a,b]$.

For example, the trigonometric system $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nt)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ and the exponential system $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ are both orthonormal bases in $[-\pi,\pi]$.

Let $f(t)$ be a periodic signal with period 2π and be integrable over $[-\pi,\pi]$, write $f \in L_{2\pi}$. In terms of the above orthogonal basis, let $a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ and

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}_+). \end{aligned}$$

Then $a_0(f), a_n(f), b_n(f) (n \in \mathbb{Z}_+)$ are said to be *Fourier coefficients* of f. The series

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Mathematical and Physical Fundamentals of Climate Change

is said to be the *Fourier series* of f. The sum

$$S_n(f;t) := \frac{a_0(f)}{2} + \sum_1^n (a_k(f)\cos(kt) + b_k(f)\sin(kt))$$

is said to be the *partial sum* of the Fourier series of f. It can be rewritten in the form

$$S_n(f;t) = \sum_{-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt},$$

where

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t \quad (k \in \mathbb{Z})$$

are also called the Fourier coefficients of f.

It is clear that these Fourier coefficients satisfy

$$a_0(f) = 2c_0(f), \quad a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f), \quad b_n(f) = i(c_{-n}(f) - c_n(f)).$$

Let $f \in L_{2\pi}$. If f is a real signal, then its Fourier coefficients $a_n(f)$ and $b_n(f)$ must be real. The identity

$$a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt) = A_n(f)\sin(nt + \theta_n(f))$$

shows that the general term in the Fourier series of f is a sine wave with circle frequency n, amplitude A_n, and initial phase θ_n. Therefore, the Fourier series of a real periodic signal is composed of sine waves with different frequencies and different phases.

Fourier coefficients have the following well-known properties.

Property. Let $f, g \in L_{2\pi}$ and α, β be complex numbers.

- **(i)** (Linearity). $c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g)$.
- **(ii)** (Translation). Let $F(t) = f(t+\alpha)$. Then $c_n(F) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\alpha} c_n(f)$.
- **(iii)** (Integration). Let $F(t) = \int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$. If $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, then $c_n(F) = \frac{c_n(f)}{\mathrm{i}n}\,(n \neq 0)$.
- **(iv)** (Derivative). If $f(t)$ is continuously differentiable, then $c_n(f') = \mathrm{i}nc_n(f)$ $(n \neq 0)$.
- **(v)** (Convolution). Let the convolution $(f * g)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Then $c_n(f * g) = 2\pi c_n(f)c_n(g)$.

Proof. Here we prove only (v). It is clear that $f * g \in L_{2\pi}$ and

$$c_n(f * g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

Interchanging the order of integrals, we get

$$c_n(f * g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t\right) g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Let $v = t - u$. Since $f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nv}$ is a periodic function with period 2π, the integral in brackets is

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\int_{-\pi-u}^{\pi-u} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nv}\,\mathrm{d}v \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\int_{-\pi}^{\pi} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nv}\,\mathrm{d}v = 2\pi c_n(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}.\end{aligned}$$

Therefore,

$$c_n(f*g) = c_n(f)\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\,\mathrm{d}u = 2\pi c_n(f)c_n(g).$$

Throughout this book, the notation $f \in L(\mathbb{R})$ means that f is integrable over $\mathbb{R}$ and the notation $f \in L[a,b]$ means that $f(t)$ is integrable over a closed interval $[a,b]$, and the integral $\int_{\mathbb{R}} = \int_{-\infty}^{\infty}$. □

Riemann-Lebesgue Lemma. *If $f \in L(\mathbb{R})$, then $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \to 0$ as $|\omega| \to \infty$. Especially,*

(i) *if $f \in L[a,b]$, then $\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \to 0(|\omega| \to \infty)$;*
(ii) *if $f \in L_{2\pi}$, then $c_n(f) \to 0(|n| \to \infty)$ and $a_n(f) \to 0$, $b_n(f) \to 0(n \to \infty)$.*

The Riemann-Lebesgue lemma (ii) states that Fourier coefficients of $f \in L_{2\pi}$ tend to zero as $n \to \infty$.

Proof. If f is a simple step function and

$$f(t) = \begin{cases} c, & a \le t \le b, \\ 0, & \text{otherwise,}\end{cases}$$

where c is a constant, then

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{c}{\mathrm{i}\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\omega} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega})\right| \le 2\left|\frac{c}{\omega}\right| \quad (\omega \ne 0),$$

and so $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \to 0(|\omega| \to \infty)$. Similarly, it is easy to prove that for any step function $s(t)$,

$$\int_{\mathbb{R}} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \to 0 \quad (|\omega| \to \infty).$$

If f is integrable over $\mathbb{R}$, then, for $\epsilon > 0$, there exists a step function $s(t)$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - s(t)|\,\mathrm{d}t < \epsilon.$$

Since $s(t)$ is a step function, for the above ϵ, there exists an N such that

$$\left|\int_{\mathbb{R}} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right| < \epsilon \quad (|\omega| > N).$$

From this and $|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}| \le 1$, it follows that

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)-s(t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_{\mathbb{R}} s(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right| < 2\epsilon \quad (|\omega| > N),$$

i.e., $\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \to 0(|\omega| \to \infty)$.

Especially, if $f \in L[a,b]$, take

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & a \le t \le b, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $F \in L(\mathbb{R})$, and so $\int_{\mathbb{R}} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \to 0(|\omega| \to \infty)$. From

$$\int_{\mathbb{R}} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

it follows that $\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \to 0(|\omega| \to \infty)$.

Take $a = -\pi$, $b = \pi$, and $\omega = n$. Then $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \to 0$ as $|n| \to \infty$, i.e.,

$$c_n(f) \to 0 \quad (|n| \to \infty).$$

Combining this with $a_n(f) = c_{-n}(f) + c_n(f)$ and $b_n(f) = \mathrm{i}(c_{-n}(f) - c_n(f))$, we get

$$a_n(f) \to 0, \quad b_n(f) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

□

The partial sums of Fourier series can be written in an integral form as follows.

By the definition of Fourier coefficients,

$$\begin{aligned} S_n(f;t) &= \sum_{-n}^{n} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} = \sum_{-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(t-u)}\right)\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Let $v = t - u$. Then

$$S_n(f;t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-v)D_n(v)\,\mathrm{d}v, \tag{1.1}$$

where $D_n(v) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kv}$ and is called the *Dirichlet kernel*.

The Dirichlet kernel possesses the following properties:

(i) $D_n(-v) = D_n(v)$, i.e., the Dirichlet kernel is an even function.
(ii) $D_n(v + 2\pi) = D_n(v)$, i.e., the Dirichlet kernel is a periodic function with period 2π.

(iii) $D_n(v) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\pi \sin \frac{v}{2}}$. This is because

$$D_n(v) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kv} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nv} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)v}}{2\pi(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}v})} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\pi \sin \frac{v}{2}}.$$

(iv) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(v)\,\mathrm{d}v = 1$. This is because

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kv}\right)\mathrm{d}v = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kv}\,\mathrm{d}v\right) = 1.$$

We will give the Jordan criterion for Fourier series. Its proof needs the following proposition.

Proposition 1.1. *For any real numbers a and b, the following inequality holds:*

$$\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right| \le 6.$$

Proof. When $1 \le a \le b$, by the second mean-value theorem for integrals, there exists a $\xi (a \le \xi \le b)$ such that

$$\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right| = \frac{1}{a}\left|\int_a^{\xi} \sin u\,\mathrm{d}u\right| \le 2.$$

When $0 \le a \le b \le 1$, with use of the inequality $|\sin u| \le |u|$, it follows that

$$\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right| \le \int_a^b \left|\frac{\sin u}{u}\right|\mathrm{d}u \le 1.$$

When $0 \le a \le 1 \le b$,

$$\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right| \le \left|\int_a^1 \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right| + \left|\int_1^b \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right| \le 3.$$

Noticing that $\frac{\sin u}{u}$ is a even function, it can easily prove that for all cases of real numbers a and b,

$$\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\right| \le 6.$$

□

If a signal is the difference of two monotone increasing signals in an interval, then this signal is called a signal of *bounded variation* in this interval. Almost all geophysical signals are signals of bounded variation.

Jordan Criterion. *Suppose that a signal $f \in L_{2\pi}$ is of bounded variation in $(t-\eta, t+\eta), \eta > 0$. Then the partial sums of the Fourier series of f*

$$S_n(f;t) \to \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) \quad (n\to\infty) \quad \text{at} t.$$

Proof. The assumption that $f(t)$ is of bounded variation in $(t-\eta, t+\eta)$ shows that $f(t+0)$ and $f(t-0)$ exist. By (1.1) and the properties of Dirichlet kernel, it follows that

$$\begin{aligned} S_n(f;t) - \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f(t-v) - \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) \right\} \\ D_n(v)\,\mathrm{d}v &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi_t(v) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}}\,\mathrm{d}v, \end{aligned}$$

where $\psi_t(v) = f(t+v)+f(t-v)-f(t+0)-f(t-0)$. It is clear that

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}} = \frac{1}{v}\sin(nv) + \left(\frac{1}{2}\coth\frac{v}{2} - \frac{1}{v}\right)\sin(nv) + \frac{1}{2}\cos(nv).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} S_n(f;t) - \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi_t(v)\frac{1}{v}\sin(nv)\,\mathrm{d}v \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi_t(v)\left(\frac{1}{2}\coth\frac{v}{2} - \frac{1}{v}\right)\sin(nv)\,\mathrm{d}v \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi_t(v)\frac{1}{2}\cos(nv)\,\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Note that $\frac{\psi_t(v)}{v} \in L[\delta,\pi]$. Here δ will be determined, $\psi_t(v)\left(\frac{1}{2}\coth\frac{v}{2} - \frac{1}{v}\right) \in L[0,\pi]$, and $\psi_t(v) \in L[0,\pi]$. By Riemann-Lebesgue Lemma, it follows that

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{\psi_t(v)}{v}\sin(nv)\,\mathrm{d}v \to 0 \quad (n\to\infty),$$

$$\int_0^{\pi} \psi_t(v)\left(\frac{1}{2}\coth\frac{v}{2} - \frac{1}{v}\right)\sin(nv)\,\mathrm{d}v \to 0 \quad (n\to\infty),$$

$$\int_0^{\pi} \psi_t(v)\cos(nv)\,\mathrm{d}v \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Combining this with (1.2), we get

$$S_n(f;t) - \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \psi_t(v)\frac{1}{v}\sin(nv)\,\mathrm{d}v \to 0 \quad (n\to\infty), \tag{1.3}$$

where $\psi_t(v) = f(t+v)+f(t-v)-f(t+0)-f(t-0)$.

Since $\psi_t(v)$ is of bounded variation in $(-\eta,\eta)$ and $\psi_t(0+0)=0$, there exist two monotone increasing functions $h_1(v)$ and $h_2(v)$ satisfying $h_1(0+0) = h_2(0+0) = 0$ such that

$$\psi_t(v) = h_1(v) - h_2(v).$$

Since $h_1(0+0) = h_2(0+0) = 0$, for any given $\epsilon > 0$, there is a $\delta(0 < \delta < \pi)$ such that

$$0 \le h_1(v) \le \epsilon, \quad 0 \le h_2(v) \le \epsilon \quad (0 < v \le \delta).$$

For the fixed δ, by (1.3), there exists an N such that

$$\left| S_n(f;t) - \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} h_1(v)\frac{\sin(nv)}{v}\mathrm{d}v \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} h_2(v)\frac{\sin(nv)}{v}\,\mathrm{d}v \right| < \epsilon \quad (n \ge N),$$

and so

$$\left| S_n(f;t) - \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) \right| \le \left| \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} h_1(v)\frac{\sin(nv)}{v}\,\mathrm{d}v \right|$$
$$+ \left| \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} h_2(v)\frac{\sin(nv)}{v}\,\mathrm{d}v \right| + \epsilon \quad (n \ge N).$$

However, using the second mean-value theorem, there exist $\zeta_i(0 < \zeta_i < \delta)$ such that

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} h_i(v)\frac{\sin(nv)}{v}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\pi}h_i(\delta)\int_{\zeta_i}^{\delta}\frac{\sin(nv)}{v}\,\mathrm{d}v \quad (i = 1, 2),$$

and by Proposition 1.1,

$$\left| \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} h_i(v)\frac{\sin(nv)}{v}\,\mathrm{d}v \right| = \left| \frac{1}{\pi}h_i(\delta)\int_{\zeta_i}^{\delta}\frac{\sin(nv)}{v}\mathrm{d}v \right|$$
$$\le \frac{\epsilon}{\pi}\left| \int_{n\zeta_i}^{n\delta}\frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v \right| \le \frac{6\epsilon}{\pi} \quad (i = 1, 2).$$

Therefore,

$$\left| S_n(f;t) - \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) \right| \le \left(\frac{12}{\pi} + 1 \right)\epsilon \quad (n \ge N),$$

i.e., $S_n(f;t) \to \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))(n \to \infty)$ at t. □

In general, let $f(t) \in L[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ be a periodic function with period T. Then its Fourier series is

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_1^{\infty}\left(a_n(f)\cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n(f)\sin\frac{2n\pi t}{T} \right),$$

where the Fourier coefficients are

$$a_0(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}_+),$$

and

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2n\pi t}{T}\,\mathrm{d}t \quad (n \in \mathbb{Z}_+).$$

An orthogonal basis and an orthogonal series on $[-1, 1]$ used often are stated as follows.

Denote Legendre polynomials by $X_n(t)(n = 0, 1, \ldots)$:

$$X_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n(t^2-1)^n}{\mathrm{d}t^n} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Especially, $X_0(t) = 1$, $X_1(t) = t$, and $X_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$.

By use of Leibnitz's formula, the Legendre polynomials are

$$\begin{aligned} X_n(t) &= \frac{1}{2^n n!}\left\{(t-1)^n\frac{\mathrm{d}^n(t+1)^n}{\mathrm{d}t^n} + C_n^1 n(t-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}(t+1)^n}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right. \\ &\quad \left. + \cdots + C_n^n n!(t+1)^n\right\}, \end{aligned}$$

where $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Let $t = 1$ and $t = -1$. Then

$$X_n(1) = 1, \quad X_n(-1) = (-1)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Legendre polynomials possess the property:

$$\int_{-1}^{1} X_n(t)X_m(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases}$$

So Legendre polynomials conform to an orthogonal basis on the interval $[-1, 1]$. In terms of this orthogonal basis, any signal f of finite energy on $[-1, 1]$ can be expanded into a Legendre series $\sum_0^\infty l_n X_n(t)$, where

$$l_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)X_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

The coefficients l_n are called *Legendre coefficients*.

Now we turn to introduce the concept of the Fourier transform.

Suppose that $f \in L(\mathbb{R})$. The integral

$$\widehat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\mathrm{d}t \quad (\omega \in \mathbb{R})$$

is called the *Fourier transform* of f. Suppose that $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$. The integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\,\mathrm{d}\omega \quad (t \in \mathbb{R})$$

is called the *inverse Fourier transform*. Suppose that $f \in L(\mathbb{R})$ and $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$. It can be proved easily that

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = f(t).$$

Theorem 1.1. *Let $f \in L(\mathbb{R})$. Then*

(i) $\lim_{|\omega|\to\infty} \widehat{f}(\omega) = 0$,
(ii) $|\widehat{f}(\omega)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t =: \| f \|_1$,
(iii) $\widehat{f}(\omega)$ *is continuous uniformly on* $\mathbb{R}$.

Proof. The first conclusion is just the Riemann-Lebesgue lemma. It follows from the definition that

$$|\widehat{f}(\omega)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t = \| f \|_1 .$$

Since

$$|\widehat{f}(\omega+h) - \widehat{f}(\omega)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)||\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht} - 1|\,\mathrm{d}t,$$

with use of the dominated convergence theorem, it follows that for any $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h\to 0} |\widehat{f}(\omega+h) - \widehat{f}(\omega)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \left(\lim_{h\to 0} |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ht} - 1|\right) \mathrm{d}t = 0,$$

i.e., $\widehat{f}(\omega)$ is continuous uniformly on $\mathbb{R}$. □

Fourier transforms have the following properties.
Property. Let $f, g \in L(\mathbb{R})$. Then

(i) (Linearity). $(\alpha f + \beta g)^\wedge(\omega) = \alpha\widehat{f}(\omega) + \beta\widehat{g}(\omega)$, where α, β be constants.
(ii) (Dilation). $(D_a f)^\wedge(\omega) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ $(a \ne 0)$, where $D_a f = f(a\,t)$ is the *dilation operator*.
(iii) (Translation). $(T_\alpha f)^\wedge(\omega) = \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\alpha}$, where $T_\alpha f = f(t-\alpha)$ is the *translation operator*.
(iv) (Modulation and conjugate). $\left(f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t}\right)^\wedge(\omega) = \widehat{f}(\omega - \alpha), \widehat{\bar{f}}(\omega) = \overline{\widehat{f}}(-\omega)$.
(v) (Symmetry). If $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$, then $\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi f(-t)$.
(vi) (Time derivative). If $f^{(j)} \in L(\mathbb{R})(j = 1, \ldots, n)$, then $\widehat{f^{(n)}}(\omega) = (\mathrm{i}\omega)^n\widehat{f}(\omega)$.
(vii) (Convolution in time). Let the convolution $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u$. Then

$$(f * g)^\wedge(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega),$$

i.e., the Fourier transform of the convolution of two signals equals the product of their Fourier transforms.

Proof. These seven properties are derived easily by the definition. We prove only (ii), (iii), and (vii).

The Fourier transform of $D_a(f)$ is

$$(D_a f)^\wedge(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

If $a > 0$, then $|a| = a$ and

$$\int_{\mathbb{R}} f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\omega}{a})u}\frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

If $a < 0$, then $|a| = -a$ and

$$\int_{\mathbb{R}} f(at)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = -\int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\omega}{a})u}\frac{\mathrm{d}u}{a} = -\frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

We get (ii).

The Fourier transform of $T_\alpha f$ is

$$(T_\alpha f)^\wedge(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t-\alpha)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Let $u = t - \alpha$. Then

$$(T_\alpha f)^\wedge(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(u+\alpha)}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\alpha}\int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega u}\,\mathrm{d}u = \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\alpha}.$$

We get (iii).

By the definition of the Fourier transform,

$$(f * g)^\wedge(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (f*g)(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} F(t-u)g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\mathrm{d}t.$$

Interchanging the order of integrals, and then letting $v = t - u$, we get

$$\begin{aligned}(f * g)^\wedge(\omega) &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\,\mathrm{d}t\right)g(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(v+u)\omega}\,\mathrm{d}v\right)g(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(v)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}v\omega}\,\mathrm{d}v \cdot \int_{\mathbb{R}} g(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u\omega}\,\mathrm{d}u = \widehat{f}(\omega)\cdot\widehat{g}(\omega).\end{aligned}$$

So we get (vii). $\square$

The notation $f \in L^2(\mathbb{R})$ means that f is a signal of finite energy on $\mathbb{R}$, i.e., $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t < \infty$. The definition of the Fourier transform of $f \in L^2(\mathbb{R})$ is based on the Schwartz space.

A space consists of the signals f satisfying the following two conditions:

(i) f is infinite-time differentiable on $\mathbb{R}$;
(ii) for any non-negative integers p, q,

$$t^p f^{(q)}(t) \to 0 \quad (|t| \to \infty).$$

This space is called the *Schwartz space*. Denote it by $f \in S$.

From the definition of the Schwartz space, it follows that if $f \in S$, then $f \in L(\mathbb{R})$ and $f \in L^2(\mathbb{R})$. It can be proved easily that if $f \in S$, then $\widehat{f} \in S$.

On the basis of the Schwartz space, the Fourier transform of $f \in L^2(\mathbb{R})$ is defined as follows.

Definition 1.1. Let $f \in L^2(\mathbb{R})$. Take arbitrarily $f_n(t) \in S$ such that $f_n(t) \to f(t)(L^2)$. The limit of $\{\widehat{f_n}(\omega)\}$ in $L^2(\mathbb{R})$ is said to be the Fourier transform of $f(t)$, denoted by $\widehat{f}(\omega)$, i.e., $\widehat{f_n}(\omega) \to \widehat{f}(\omega)(L^2)$.

Remark. $f_n(t) \to f(t)(L^2)$ means that $\int_{\mathbb{R}} (f_n(t) - f(t))^2\,\mathrm{d}t \to 0(n \to \infty)$.

Similarly, on the basis of Definition 1.1, Fourier transforms for $L^2(\mathbb{R})$ have the following properties.

Property. Let $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ and α, β be constants. Then

(i) (Linearity). $(\alpha f + \beta g)^\wedge(\omega) = \alpha\widehat{f}(\omega) + \beta\widehat{g}(\omega)$.
(ii) (Dilation). $(D_a f)^\wedge(\omega) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$, where $D_a f = f(at)$ and $a \neq 0$ is a constant.
(iii) (Translation). $(T_\alpha f)^\wedge(\omega) = \widehat{f}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\alpha}$, where $T_\alpha f = f(t - \alpha)$.
(iv) (Modulation). $(f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t})^\wedge(\omega) = \widehat{f}(\omega - \alpha)$.
(v) $\widehat{f'}(\omega) = (\mathrm{i}\omega)\widehat{f}(\omega)$, $\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi f(-t)$, and $\widehat{\overline{f}}(\omega) = \overline{\widehat{f}}(-\omega)$.

A linear continuous functional F, which is defined as a linear map from the Schwartz space to the real axis, is called a *generalized distribution* on the Schwartz space. Denote it by $F \in S'$. For any $g \in S$, denote $F(\mathrm{g})$ by $\langle F, g\rangle$. For each $f \in L^2(\mathbb{R})$, we can define a linear continuous functional on the Schwartz space as follows:

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\mathrm{d}t \quad \text{for any } g \in S,$$

which implies that $L^2(\mathbb{R}) \subset S'$.

The operation rules for generalized distributions on the Schwartz space are as follows:

(i) (Limit). Let $F_n \in S'(n = 1, 2, \ldots)$ and $F \in S'$. For any $g \in S$, define $F_n \to F(S')(n \to \infty)$ as

$$\langle F_n, g\rangle \to \langle F, g\rangle.$$

(ii) (Multiplier). Let $F \in S'$ and α be a constant. For any $g \in S$, define αF as

$$\langle \alpha F, g\rangle = \langle F, \alpha g\rangle.$$

(iii) (Derivative). Let $F \in S'$. For any $g \in S$, define the derivative $F' \in S'$ as

$$\langle F', g \rangle = -\langle F, g' \rangle.$$

(iv) (Dilation). Let $F \in S'$. For any $g \in S$, define $D_a F = F(at)$ as

$$\langle D_a F, g \rangle = \left\langle F, \frac{1}{|a|} g\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle,$$

where $a \neq 0$ is a constant.

(v) (Translation). Let $F \in S'$. For any $g \in S$, define $T_a F = F(t-a)$ as

$$\langle T_a F, g \rangle = \langle F, g(t+a) \rangle,$$

where a is a constant.

(vi) (Antiderivative). Let $F \in S'$. For any $g \in S$, define the antiderivative F^{-1} as

$$\langle F^{-1}, g \rangle = -\left\langle F, \int_{-\infty}^{t} \Phi_g(u)\,\mathrm{d}u \right\rangle,$$

where $\Phi_g(u) = g(u) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2} \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Definition 1.2. Let $F \in S'$.

(i) The Fourier series of F is defined as $\sum_n C_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, where the Fourier coefficients are

$$C_n = -\frac{1}{2\pi} \left\{ T_{2\pi} (F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt})^{-1} - (F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt})^{-1} \right\},$$

where $T_{2\pi}$ is the translation operator and $(F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt})^{-1}$ is the antiderivative of $F\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}$.

(ii) The Fourier transform of F is defined as $\langle \widehat{F}, g \rangle = \langle F, \widehat{g} \rangle$ for any $g \in S$.

Fourier transforms of generalized distributions on the Schwartz space have the following properties.

Property. Let $F \in S'$. Then

(i) (Derivative). $\widehat{F'}(\omega) = \mathrm{i}\omega \widehat{F}(\omega)$.

(ii) (Translation). $(T_a F)^\wedge(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega} \widehat{F}(\omega)$, where a is a constant and $T_a F = F(t-a)$.

(iii) (Delation). $(D_a F)^\wedge(\omega) = \frac{1}{|a|} \widehat{F}(\frac{\omega}{a})$, where $a \neq 0$ and $D_a F = F(at)$.

The Dirac function and the Dirac comb are both important tools in geophysical signal processing. Define the Dirac function δ as a generalized distribution on the Schwartz space which satisfies for any $g \in S$,

$$\langle \delta, g \rangle = g(0).$$

In general, define δ_{t_0} as a generalized distribution on the Schwartz space which satisfies for any $g \in S$,

$$\langle \delta_{t_0}, g\rangle = g(t_0) \quad (t_0 \in \mathbb{R}).$$

Clearly, $\delta_0 = \delta$. Therefore, δ_{t_0} is the generalization of the Dirac function δ.

By operation rule (iv) of generalized distributions on a Schwartz space, it is easy to prove that for any $g \in S$, the first-order generalized derivative of the Dirac function is

$$\langle \delta', g\rangle = -\langle \delta, g'\rangle = -g'(0);$$

and the second-order generalized derivative of the Dirac function is

$$\langle \delta'', g\rangle = -\langle \delta', g'\rangle = \langle \delta, g''\rangle = g''(0).$$

In general, the n-order generalized derivative of the Dirac function is

$$\langle \delta^{(n)}, g\rangle = (-1)^n g^{(n)}(0).$$

Denote the Fourier transform of δ_{t_0} by $\widehat{\delta}_{t_0}$. By Definition 1.2(ii), the Fourier transform of δ_{t_0} satisfies

$$\langle \widehat{\delta}_{t_0}, g\rangle = \langle \delta_{t_0}, \widehat{g}\rangle = \widehat{g}(t_0) \quad \text{for any } g \in S.$$

Since $g \in S \subset L(\mathbb{R})$, by the definition of the Fourier transform, we have

$$\widehat{g}(t_0) = \int_{\mathbb{R}} g(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}\,\mathrm{d}\omega = \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}, g\rangle.$$

Therefore, $\langle \widehat{\delta}_{t_0}, g\rangle = \langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}, g\rangle$. This means $\widehat{\delta}_{t_0} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}$. Especially, noticing that $\delta_0 = \delta$, we find that the Fourier transform of the Dirac function is equal to 1.

On the other hand, by Definition 1.2(ii), for any $g \in S$,

$$\left\langle \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}\right)^{\wedge}, g\right\rangle = \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}, \widehat{g}\right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

Since $g \in L(\mathbb{R})$ and $\widehat{g} \in L(\mathbb{R})$, the identity $\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}\,\mathrm{d}\omega = g(-t_0)$ holds. So

$$\left\langle \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}\right)^{\wedge}, g\right\rangle = 2\pi g(-t_0).$$

From this and the definition $\langle \delta_{-t_0}, g\rangle = g(-t_0)$, it follows that

$$\left\langle \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}\right)^{\wedge}, g\right\rangle = 2\pi \left\langle \delta_{-t_0}, g\right\rangle.$$

This means that $\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}\right)^{\wedge} = 2\pi\delta_{-t_0}$. Noticing that $\delta_0 = \delta$, we obtain that the Fourier transform of 1 is equal to $2\pi\delta$.

Summarizing all the results, we have the following.

Formula 1.1.

(i) $\widehat{\delta}_{t_0} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}$ and $\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_0\omega}\right)^{\wedge} = 2\pi\delta_{-t_0}$,

(ii) $\widehat{\delta} = 1$ and $\widehat{1} = 2\pi\delta$.

Remark. In engineering and geoscience, instead of the rigid definition, one often uses the following alternative definition for the Dirac function δ:

(i) $\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$
(ii) $\int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, dt = 1,$
(iii) $\int_{\mathbb{R}} \delta(t) g(t)\, dt = g(0)$ for any $g(t)$.

The series $\sum_n \delta_{2n\pi}$ is called the *Dirac comb* which is closely related to sampling theory. In order to show that it is well defined, we need to prove that the series $\sum_n \delta_{2n\pi}$ is convergent.

Let S_n be its partial sums and $S_n = \sum_{-n}^{n} \delta_{2k\pi}$. Clearly, S_n are generalized distributions on the Schwartz space, i.e., $S_n \in S'$ and for any $g \in S$,

$$\langle S_n, g \rangle = \left\langle \sum_{-n}^{n} \delta_{2k\pi}, g \right\rangle = \sum_{-n}^{n} \langle \delta_{2k\pi}, g \rangle.$$

Combining this with the definition $\langle \delta_{2k\pi}, g \rangle = g(2k\pi)$, we get

$$\langle S_n, g \rangle = \sum_{-n}^{n} g(2k\pi).$$

Since $g \in S$, the series $\sum_n g(2n\pi)$ converges. So there exists a $\delta^* \in S'$ such that

$$\langle S_n, g \rangle \to \langle \delta^*, g \rangle \quad \text{or} \quad S_n \to \delta^*(S') \quad (n \to \infty),$$

i.e., the series $\sum_n \delta_{2n\pi}$ converges to δ^*, and $\langle \delta^*, g \rangle = \sum_n g(2n\pi)$ for any $g \in S$.

Secondly, we prove that δ^* is a 2π-periodic generalized distribution.

By operation rule (v) of generalized distributions on a Schwartz space, for any $g \in S$,

$$\langle T_{2\pi}\delta^*, g \rangle = \langle \delta^*, g(t + 2\pi) \rangle = \sum_n g(2(n+1)\pi) = \sum_n g(2n\pi) = \langle \delta^*, g \rangle.$$

This means that δ^* is a periodic generalized distribution with period 2π.

Third, by Definition 1.2(i), we will find the Fourier series of δ^*. We only need to find its Fourier coefficients.

Denote the Fourier coefficients of δ^* by C_n. Since $\delta^* \in S'$, by Definition 1.2(i), for any $g \in S$,

$$\langle C_n, g \rangle = -\frac{1}{2\pi} \langle T_{2\pi}(\delta^* \mathrm{e}^{-int})^{-1} - (\delta^* \mathrm{e}^{-int})^{-1}, g \rangle.$$

Using operation rule (v) of generalized distributions on a Schwartz space, we get

$$\langle T_{2\pi}(\delta^* \mathrm{e}^{-int})^{-1} - (\delta^* \mathrm{e}^{-int})^{-1}, g \rangle = \langle (\delta^* \mathrm{e}^{-int})^{-1}, \widetilde{g}(t) \rangle,$$

where $\widetilde{g}(t) = g(t + 2\pi) - g(t)$. Therefore

$$\langle C_n, g \rangle = -\frac{1}{2\pi} \langle (\delta^* \mathrm{e}^{-int})^{-1}, \widetilde{g}(t) \rangle.$$

Using operation rule (vi) of generalized distributions on a Schwartz space, we get

$$\langle C_n, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \delta^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}, \int_{-\infty}^{t} \Phi_{\widetilde{g}}(u)\,\mathrm{d}u\right\rangle,$$

where

$$\Phi_{\widetilde{g}}(u) = \widetilde{g}(u) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{g}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Since $\int_{\mathbb{R}} \widetilde{g}(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(t+2\pi)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, we get

$$\int_{-\infty}^{t} \Phi_{\widetilde{g}}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{t} \widetilde{g}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{t} (g(u+2\pi) - g(u))\,\mathrm{d}u = \int_{t}^{t+2\pi} g(u)\,\mathrm{d}u,$$

and so

$$\langle C_n, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \delta^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}, \int_{t}^{t+2\pi} g(u)\,\mathrm{d}u\right\rangle.$$

Using operation rule (ii) of generalized distributions on a Schwartz space, we get

$$\left\langle \delta^* \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}, \int_{t}^{t+2\pi} g(u)\,\mathrm{d}u\right\rangle = \left\langle \delta^*, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\int_{t}^{t+2\pi} g(u)\,\mathrm{d}u\right\rangle,$$

and so

$$\langle C_n, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\left\langle \delta^*, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\int_{t}^{t+2\pi} g(u)\,\mathrm{d}u\right\rangle.$$

We have proved $\langle \delta^*, g\rangle = \sum_k g(2k\pi)$ for any $g \in S$. Noticing that $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n2k\pi} = 1$, we find the right-hand side is

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\left\langle \delta^*, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\int_{t}^{t+2\pi} g(u)\,\mathrm{d}u\right\rangle &= \frac{1}{2\pi}\sum_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n2k\pi}\int_{2k\pi}^{2k\pi+2\pi} g(u)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_k \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} g(u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

and so

$$\langle C_n, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\sum_k \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} g(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(u)\,\mathrm{d}u = \left\langle \frac{1}{2\pi}, g\right\rangle,$$

i.e., $C_n = \frac{1}{2\pi} (n \in \mathbb{Z})$. By Definition 1.2(i), the Fourier series of δ^* is $\frac{1}{2\pi}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.

Finally, we prove the Fourier series $\frac{1}{2\pi}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ converges to δ^*, i.e., $\frac{1}{2\pi}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \delta^*(t)(S')$.

Its partial sum is $S_n(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$. This is the Dirichlet kernel $D_n(t)$. Using property (ii) of the Dirichlet kernel, we get

$$\begin{aligned}\langle S_n, g\rangle = \langle D_n, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} D_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_k \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} D_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_k \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)g(t+2k\pi)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\sum_k g(t+2k\pi)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

By the Jordan criterion for Fourier series, we have

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\sum_k g(t+2k\pi)\,\mathrm{d}t \to \sum_k g(2k\pi) \quad (n \to \infty),$$

and so $\langle S_n, g\rangle \to \sum_k g(2k\pi)(n \to \infty)$. From this and $\langle \delta^*, g\rangle = \sum_k g(2k\pi)$, it follows that

$$\langle S_n, g\rangle \to \langle \delta^*, g\rangle \quad (n \to \infty).$$

This means that $S_n \to \delta^*(S')(n \to \infty)$. From this and $\delta^* = \sum_n \delta_{2n\pi}$, we get

$$\sum_n \delta_{2n\pi} = \frac{1}{2\pi}\sum_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad (S').$$

Taking the Fourier transform on both sides and using Formula 1.1, we get

$$\left(\sum_n \delta_{2n\pi}\right)^{\wedge} = \frac{1}{2\pi}\sum_n \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right)^{\wedge} = \frac{1}{2\pi}\sum_n \delta_n.$$

Formula 1.2. The Fourier transform of a Dirac comb is still a Dirac comb, i.e.,

$$\left(\sum_n \delta_{2n\pi}\right)^{\wedge} = \frac{1}{2\pi}\sum_n \delta_n.$$

The Laplace transform is a generalization of the Fourier transform. Since it can convert differential or integral equations into algebraic equations, the Laplace transform can be used to solve differential/integral equations with initial conditions.

Let $f \in L[0,\infty]$. The *Laplace transform* of a signal $f(t)$ is defined as

$$L[f(t)] := \int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \quad (\mathrm{Re}\,s \geq 0).$$

It is sometimes called the *one-sided Laplace transform.*

Laplace transforms possess the following properties:

(i) Let $f, g \in L[0,\infty]$ and c, d be constants. Then $L[cf(t) + dg(t)] = cL[f(t)] + dL[g(t)]$.

(ii) Let $f^{(j)} \in L[0,\infty](j=1,\ldots,N)$. Then

$$\begin{aligned} L[f^{(N)}(t)] &= -f^{(N-1)}(0) - \cdots - s^{N-3}f''(0) - s^{N-2}f'(0) \\ &\quad -s^{N-1}f(0) + s^N L[f(t)]. \end{aligned}$$

(iii) Let $f \in L[0,\infty]$. Then $L\left[\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u\right] = \frac{1}{s}L[f(t)]$.

By the definition and properties of Laplace transforms, it follows further that

$$L[1] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s},$$

$$L[\mathrm{e}^{-at}] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(a+s)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s+a},$$

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{a-b}\right] &= \frac{1}{a-b}\{L\{\mathrm{e}^{-at}\} - L\{\mathrm{e}^{-bt}\}\} \\ &= \frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right\} = -\frac{1}{(s+a)(s+b)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\left[\frac{a\mathrm{e}^{-at} - b\mathrm{e}^{-bt}}{a-b}\right] &= \frac{1}{a-b}\{aL\{\mathrm{e}^{-at}\} - bL\{\mathrm{e}^{-bt}\}\} \\ &= \frac{1}{a-b}\left\{\frac{a}{s+a} - \frac{b}{s+b}\right\} = \frac{s}{(s+a)(s+b)}, \\ L[t^N] &= \int_0^\infty t^N \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{N!}{s^{N+1}}. \end{aligned}$$

Finally, we consider the two-dimensional case. If $f(t_1,t_2) \in L(\mathbb{R}^2)$, the *two-dimensional Fourier transform* is defined as

$$\widehat{f}(\omega_1,\omega_2) := \int\int_{\mathbb{R}^2} f(t_1\, t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2.$$

The *two-dimensional inverse Fourier transform* is defined as

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}\,\mathrm{d}\omega_1\,\mathrm{d}\omega_2.$$

It can be proved that if $f \in L(\mathbb{R}^2)$ and $\widehat{f} \in L(\mathbb{R}^2)$, then

$$f(t_1,t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\omega_1,\omega_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}\,\mathrm{d}\omega_1\,\mathrm{d}\omega_2.$$

Two-dimensional Fourier transforms have the following similar properties:

(i) (Translation). Let $f \in L(\mathbb{R}^2)$ and $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Then

$$(f(t_1 + a_1, t_2 + a_2))^{\wedge}(\omega_1, \omega_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2)} \widehat{f}(\omega_1, \omega_2).$$

(ii) (Delation). Let $f \in L(\mathbb{R}^2)$ and λ be a real constant. Then

$$(f(\lambda t_1, \lambda t_2))^{\wedge}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{|\lambda|^2} \widehat{f}\left(\frac{\omega_1}{\lambda}, \frac{\omega_2}{\lambda}\right).$$

(iii) (Convolution). Let $f, g \in L(\mathbb{R}^2)$ and the convolution

$$(f * g)(t_1, t_2) = \int\int_{\mathbb{R}^2} f(t_1 - u_1, t_2 - u_2) g(u_1, u_2)\, \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2.$$

Then

$$(f * g)^{\wedge}(\omega_1, \omega_2) = \widehat{f}(\omega_1, \omega_2) \widehat{g}(\omega_1, \omega_2).$$

1.2 BESSEL'S INEQUALITY AND PARSEVAL'S IDENTITY

Bessel's inequality and Parseval's identity are fundamental results of Fourier series and Fourier transform. Bessel's inequality is a stepping stone to the more powerful Parseval's identity.

Bessel's Inequality for Fourier Series. *Let $f \in L_{2\pi}$ and a_n, b_n, c_n be its Fourier coefficients. Then*

$$\left(\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k^2 + b_k^2)\right) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, \mathrm{d}t$$

or

$$\sum_{-n}^{n} |c_k|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, \mathrm{d}t.$$

Proof. Denote partial sums of the Fourier series of f by $S_n(f; t)$. Since

$$(S_n(f; t) - f(t))^2 = S_n^2(f; t) - 2f(t) S_n(f; t) + f^2(t),$$

integrating over the interval $[-\pi, \pi]$, we get

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(f; t) - f(t))^2\, \mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f; t)\, \mathrm{d}t - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_n(f; t)\, \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, \mathrm{d}t \\ &= I_1 - I_2 + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

We compute I_1. The partial sums of the Fourier series of f are

$$S_n(f; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

So

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f;\, t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4}\, \mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} a_0 \left(\sum_1^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_1^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right)^2 \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

By the orthogonality of trigonometric system $\{1, \cos(nt),\ \sin(nt)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, we obtain that

$$I_1 = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

We compute I_2. Since

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_n(f;t)\, \mathrm{d}t = 2\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_1^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \mathrm{d}t \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{d}t + 2\sum_1^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \mathrm{d}t + b_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, \mathrm{d}t \right), \end{aligned}$$

by the definition of the Fourier coefficients, we get

$$I_2 = 2\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Therefore,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(f;t) - f(t))^2\, \mathrm{d}t = -\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_k^2 + b_k^2) \right) + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, \mathrm{d}t. \quad (1.4)$$

Noticing that $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$, and

$$\begin{aligned} a_k^2 + b_k^2 &= |c_{-k} + c_k|^2 + |i\,(c_{-k} - c_k)|^2 \\ &= (c_{-k} + c_k)\,(\overline{c}_{-k} + \overline{c}_k) + (c_{-k} - c_k)\,(\overline{c}_{-k} - \overline{c}_k) \\ &= 2\,(c_{-k}\overline{c}_{-k} + c_k\overline{c}_k) = 2\left(|c_{-k}|^2 + |c_k|^2\right), \end{aligned}$$

the first term on the right-hand side of (1.4):

$$\begin{aligned} -\pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_1^n (a_k^2 + b_k^2) \right) &= -\pi \left(2|c_0|^2 + \sum_1^n 2(|c_{-k}|^2 + |c_k|^2) \right) \\ &= -2\pi \sum_{-n}^n |c_k|^2. \end{aligned}$$

From this and (1.4), it follows that

$$\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(f;t) - f(t))^2 \,\mathrm{d}t = -2\pi \sum_{-n}^{n} |c_k|^2 + \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \,\mathrm{d}t. \tag{1.5}$$

Noticing that $\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(f;t) - f(t))^2 \,\mathrm{d}t \geq 0$, we find from (1.4) and (1.5) that

$$\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \,\mathrm{d}t$$

and

$$\sum_{-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \,\mathrm{d}t.$$

□

Parseval's Identity for Fourier Series. *Let $f \in L_{2\pi}$ and a_n, b_n, c_n be its Fourier coefficients. If the partial sums of its Fourier series $S_n(f;t)$ tend to $f(t)$ as $n \to \infty$, then*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \,\mathrm{d}t = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\right)$$

and

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{n} |c_n|^2.$$

Parseval's identity is sometimes called the law of conservation of energy.

Proof. In the proof of Bessel's inequality, we have obtained (1.4) and (1.5).

Letting $n \to \infty$ in (1.4) and (1.5), and using the assumption $S_n(f;t) \to f(t)$ $(n \to \infty)$, we obtain immediately the desired results:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \,\mathrm{d}t = \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)\right)$$

and

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) \,\mathrm{d}t = 2\pi \sum_{k} |c_k|^2.$$

□

For a Schwartz space, the original signals and their Fourier transforms have the following relation.

Theorem 1.2. *If $f, g \in S$, then*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}(\omega) \,\mathrm{d}\omega.$$

Proof. It follows from $g \in S$ that $g \in L(\mathbb{R})$ and $\widehat{g} \in L(\mathbb{R})$. Thus,

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega.$$

Taking the conjugate on both sides, we get

$$\overline{g}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g}}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega,$$

and so

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g}}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}t.$$

Interchanging the order of integrals and using the definition of the Fourier transform, the right-hand side is

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g}}(\omega) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}t \right) \overline{\widehat{g}}(\omega) \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{g}}(\omega)\, \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Therefore,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\, \overline{\widehat{g}}(\omega)\, \mathrm{d}\omega.$$

□

Let $f(t) = g(t)$ in Theorem 1.2. Then the following identity holds.

Parseval's Identity for a Schwartz Space. *If $f \in S$, then*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2\, \mathrm{d}\omega.$$

Theorem 1.2 can be extended from S to $L^2(\mathbb{R})$ as follows.

Theorem 1.3. *If $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, then*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}(\omega)\, \mathrm{d}\omega.$$

Proof. Take arbitrarily $f_n \in S$, $g_n \in S$ such that $f_n \to f(L^2)$, $g_n \to g(L^2)$ as $n \to \infty$. By Definition 1.1,

$$\widehat{f_n}(\omega) \to \widehat{f}(\omega)(L^2),$$

$$\widehat{g}_n(\omega) \to \widehat{g}(\omega)(L^2),$$

and so

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_n}(\omega)\overline{\widehat{g}}_n(\omega)\, \mathrm{d}\omega \to \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}(\omega)\, \mathrm{d}\omega.$$

On the other hand, since $f_n \in S$ and $g_n \in S$, Theorem 1.2 shows that

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_n(\omega)\overline{\widehat{g}}_n(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\overline{g}_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Since $f_n \to f$ and $g_n \to g$, the integral on the right-hand side has a limit, i.e., as $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(t)\overline{g}_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)\,\mathrm{d}t,$$

and so

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}_n(\omega)\overline{\widehat{g}}_n(\omega)\,\mathrm{d}\omega \to \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Since the limit is unique, we get

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}}(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

□

Let $g(t) = f(t)$ in Theorem 1.3. Then the following identity holds.

Parseval's Identity of the Fourier Transform. *If $f \in L^2(\mathbb{R})$, then*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

In a similar way, for the two-dimensional signal, the following theorem can be derived.

Theorem 1.4. *If $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$, then*

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f(t_1,t_2)\overline{g}(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(\omega_1,\omega_2)\overline{\widehat{g}}(\omega_1,\omega_2)\,\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.$$

Let $f = g$ in Theorem 1.4. Then the following identity holds.

Parseval's Identity. *Let $f(t_1,t_2) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Then*

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} |f(t_1,t_2)|^2\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\omega_1,\omega_2)|^2\,\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2.$$

1.3 GIBBS PHENOMENON

If a function $f(t)$ is defined in a neighborhood of t_0 and $f(t_0+0), f(t_0-0)$ exist but $f(t_0+0) \neq f(t_0-0)$, then t_0 is called the *first kind of discontinuity* of $f(t)$.

Suppose that functions $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ and $f(t)$ are defined in a neighborhood of t_0 and $f_n(t) \to f(t)$ as $n \to \infty$ in the neighborhood, and t_0 is the first kind of discontinuity of $f(t)$. Without loss of generality, we may assume $f(t_0-0) < f(t_0+0)$. If $\{f_n(t)\}$ has a double sublimit lying outside the closed interval $[f(t_0-0), f(t_0+0)]$ as $t \to t_0, n \to \infty$, then we say that for the sequence of functions $\{f_n(t)\}$ the *Gibbs phenomenon* occurs at t_0.

Example 1.1. Consider a function

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{\pi - t}{2}, & 0 < t < 2\pi, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \qquad \text{and} \quad \varphi(t + 2\pi) = \varphi(t), \quad \text{and} \quad t_0 = 0.$$

Clearly, $\varphi(t)$ is continuous in $0 < |t| < \pi$ and $\varphi(0+0) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(0-0) = -\frac{\pi}{2}$, and the point $t_0 = 0$ is the first kind of discontinuity of $\varphi(t)$. It is well known that the Fourier series of $\varphi(t)$ is

$$\sum_1^\infty \frac{\sin(kt)}{k} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Consider the sequence of partial sums of the Fourier series of $\varphi(t)$:

$$S_n(\varphi; t) = \sum_1^n \frac{\sin(kt)}{k} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Since $\varphi(t) \in L_{2\pi}$ and is of bounded variation in $0 < |t| < \pi$, the Jordan criterion shows that the sequence of partial sums of its Fourier series converges at $t_0 = 0$ and

$$S_n(\varphi; 0) \to \frac{1}{2}(\varphi(0+0) + \varphi(0-0)) \quad (n \to \infty).$$

Since $\varphi(0+0) = \frac{\pi}{2}$ and $\varphi(0-0) = -\frac{\pi}{2}$, we get $S_n(\varphi; 0) \to 0 (n \to \infty)$.

Now we prove $S_n(\varphi; t)$ has a double sublimit lying outside the closed interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ as $n \to \infty, t \to 0$.

Note that

$$\sum_1^n \cos(kv) = \sum_1^n \frac{e^{-ikv} + e^{ikv}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{-n}^n e^{ikv} - 1\right) = \pi D_n(v) - \frac{1}{2},$$

where $D_n(v)$ is the Dirichlet kernel. Using property (iii) of the Dirichlet kernel, the partial sums of the Fourier series of $\varphi(t)$ can be rewritten as follows:

$$\begin{aligned} S_n(\varphi; t) &= \sum_1^n \frac{\sin(kt)}{k} = \sum_1^n \int_0^t \cos(kv)\,dv = \int_0^t \sum_1^n \cos(kv)\,dv \\ &= \int_0^t \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}}\,dv - \frac{t}{2} \\ &= \int_0^t \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)v}{v}\,dv + \int_0^t \left(\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}} - \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)v}{v}\right) \\ &\quad dv - \frac{t}{2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Let $u = (n + \frac{1}{2})v$. Then the first integral on the right-hand side of (1.6) is

$$\int_0^t \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,\mathrm{d}v = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)t} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Take $t = t_n = \frac{a}{n}$, where a is any real number. Then, as $n \to \infty$ and $t \to 0$,

$$\int_0^{t_n} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\,\mathrm{d}v = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{a}{n}} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \to \int_0^a \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

By inequalities $|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v| \le 1$ and $|v - 2\sin\frac{v}{2}| \le \left|\frac{v^3}{24}\right|$, and $\sin v \ge \frac{2}{\pi}v \left(0 < v \le \frac{\pi}{2}\right)$, it follows that

$$\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v\left(\frac{1}{2\sin\frac{v}{2}} - \frac{1}{v}\right)\right| = \left|\sin(n+\tfrac{1}{2})v\frac{v-2\sin\frac{v}{2}}{2v\sin\frac{v}{2}}\right|$$
$$\le \left|\frac{\frac{v^3}{24}}{\frac{2}{\pi}v^2}\right| = \frac{\pi}{12}|v|,$$

and so the second integral on the right-hand side of (1.6) is

$$\left|\int_0^t \left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}} - \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\right)\mathrm{d}v\right| \le \frac{\pi}{24}t^2.$$

Take $t = t_n = \frac{a}{n}$. Then

$$\left|\int_0^{t_n} \left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}} - \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\right)\mathrm{d}v\right| \le \frac{\pi a^2}{24n^2}.$$

As $n \to \infty$ and $t \to 0$,

$$\int_0^{t_n} \left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{v}{2}} - \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{v}\right)\mathrm{d}v \to 0$$

It is clear that the last term on the right-hand side of (1.6) $\frac{t_n}{2} \to 0$ as $n \to \infty$ and $t \to 0$.

Therefore, take $t = t_n = \frac{a}{n}$, where a is any real number. By (1.6), we have

$$S_n(\varphi; t_n) \to \int_0^a \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u =: I(a) \quad (n \to \infty, \quad t \to 0),$$

i.e., $S_n(\varphi; t)$ has double sublimits $I(a)$ as $n \to \infty, t \to 0$. Since a is any real number, all values of $I(a)$ consist of a closed interval $[I(-\pi), I(\pi)]$, and

$$I(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u > \frac{\pi}{2}, \quad I(-\pi) = \int_0^{-\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u < -\frac{\pi}{2},$$

and so $[I(-\pi), I(\pi)] \supset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Therefore, for the sequence of partial sums $\{S_n(\varphi; t)\}$ the Gibbs phenomenon occurs at $t_0 = 0$.

Theorem 1.5. *Suppose that $f(t)$ is a 2π-periodic function of bounded variation and continuous in a neighborhood of t_0, and t_0 is the first kind of discontinuity of $f(t)$. Then for the sequence of partial sums of the Fourier series of $f(t)$ the Gibbs phenomenon occurs at t_0.*

Proof. Without loss of generality, assume that $f(t)$ is continuous in $0 < |t - t_0| < \delta$ and $f(t_0 + 0) > f(t_0 - 0)$. Let $\varphi(t)$ be stated as in Example 1.1, and let

$$g(t) = f(t) - \frac{d}{\pi}\varphi(t - t_0), \tag{1.7}$$

where $d = f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0) > 0$. By the assumption, we see that $g(t)$ is a 2π-periodic function of bounded variation and continuous in $0 < |t - t_0| < \delta$. According to the Jordan criterion, the partial sums of the Fourier series of $g(t)$ converge and

$$S_n(g; t) \to \frac{1}{2}(g(t_0 + 0) + g(t_0 - 0)) \quad (n \to \infty, 0 < |t - t_0| < \delta).$$

Since $\varphi(0 + 0) = \frac{\pi}{2}$ and $\varphi(0 - 0) = -\frac{\pi}{2}$ (see Example 1.1), it follows from (1.7) that

$$\begin{aligned} g(t_0 + 0) &= f(t_0 + 0) - \frac{d}{2}, \\ g(t_0 - 0) &= f(t_0 - 0) + \frac{d}{2}, \end{aligned}$$

and so

$$S_n(g; t) \to \frac{1}{2}(f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0)), \quad 0 < |t - t_0| < \delta \quad (n \to \infty). \tag{1.8}$$

Now we prove that $S_n(f; t)$ has a double sublimit lying outside the closed interval $[f(t_0 - 0), f(t_0 + 0)]$ as $n \to \infty, t \to t_0$.

Denote the partial sums of the Fourier series of $\varphi(t)$ by $S_n(\varphi; t)$. By (1.7), it follows that

$$S_n(f; t) = S_n(g; t) + \frac{d}{\pi} S_n(\varphi; t - t_0).$$

Take $t - t_0 = t_n = \frac{a}{n}$, where a is any real number. Then

$$S_n(f; t_0 + t_n) = S_n(g; t_0 + t_n) + \frac{d}{\pi} S_n(\varphi; t_n).$$

By Example 1.1,

$$S_n(\varphi; t_n) \to I(a) \quad (n \to \infty, t \to t_0),$$

where $I(a) = \int_0^a \frac{\sin u}{u}\,du$. Denote $f(t_0) = \frac{1}{2}(f(t_0 + 0) + f(t_0 - 0))$. By (1.8),

$$S_n(g; t_0 + t_n) \to f(t_0) \quad (n \to \infty, t \to t_0).$$

Therefore,

$$S_n(f; t_0 + t_n) \to f(t_0) + \frac{d}{\pi} I(a) \quad (n \to \infty, t \to t_0),$$

i.e., $S_n(f;t)$ has double sublimits $f(t_0)+\frac{d}{\pi}I(a)$ as $n\to\infty, t\to t_0$. Since a can be any real number, all values of $f(t_0)+\frac{a}{\pi}I(a)$ consist of the closed interval $\left[f(t_0)+\frac{d}{\pi}I(-\pi), f(t_0)+\frac{d}{\pi}I(\pi)\right]$. Noticing that $I(\pi)>\frac{\pi}{2}$ and $I(-\pi)<-\frac{\pi}{2}$, we have

$$\left[f(t_0)+\frac{d}{\pi}I(-\pi), f(t_0)+\frac{d}{\pi}I(\pi)\right]\supset\left[f(t_0)-\frac{d}{2}, f(t_0)+\frac{d}{2}\right].$$

From $f(t_0)=\frac{1}{2}(f(t_0+0)+f(t_0-0))$ and $d=f(t_0+0)-f(t_0-0)$, it follows that

$$\left[f(t_0)+\frac{d}{\pi}I(-\pi), f(t_0)+\frac{d}{\pi}I(\pi)\right]\supset[f(t_0-0), f(t_0+0)].$$

Therefore, for the sequence of partial sums of the Fourier series of $f(t)$ the Gibbs phenomenon occurs at t_0. □

1.4 POISSON SUMMATION FORMULAS AND SHANNON SAMPLING THEOREM

We will introduce three important theorems: the Poisson summation formula in $L(\mathbb{R})$, the Poisson summation formula in $L^2(\mathbb{R})$, and the Shannon sampling theorem. In signal processing, the Poisson summation formula leads to the Shannon sampling theorem and the discrete-time Fourier transform.

To prove the Poisson summation formula in $L(\mathbb{R})$, we first give a relation between Fourier transforms in $L(\mathbb{R})$ and Fourier coefficients in $L_{2\pi}$.

Lemma 1.1. *Let $f\in L(\mathbb{R})$. Then*

- **(i)** *the series $\sum_n f(t+2n\pi)$ is absolutely convergent almost everywhere. Denote its sum by $F(t)$;*
- **(ii)** *$F(t)\in L_{2\pi}$;*
- **(iii)** *for any integer n,*

$$c_n(F)=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n),$$

where $c_n(F)$ is the Fourier coefficient of $F(t)$ and $\widehat{f}(\omega)$ is the Fourier transform of $f(t)$.

Proof. Consider the series $\sum_n f(t+2n\pi)$. By the assumption that $f\in L(\mathbb{R})$, we have

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\pi}\sum_n f(t+2n\pi)\,\mathrm{d}t\right| &\le \sum_n\int_0^{2\pi}|f(t+2n\pi)|\,\mathrm{d}x\\ &=\sum_n\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}|f(y)|\,\mathrm{d}y\\ &=\int_{\mathbb{R}}|f(y)|\,\mathrm{d}y<\infty.\end{aligned}$$

So the series is integrable over $[0, 2\pi]$. Since

$$\sum_n f((t+2\pi)+2n\pi) = \sum_n f(t+2(n+1)\pi) = \sum_n f(t+2n\pi),$$

the series is a 2π-periodic function. Therefore, the series is absolutely convergent almost everywhere. Denote its sum by $F(t)$, i.e.,

$$F(t) = \sum_n f(t+2n\pi) \quad \text{almost everywhere,}$$

and so $F(t)$ is integrable over $[0, 2\pi]$ and is a 2π-periodic function, i.e., $F \in L_{2\pi}$

By the definition of the Fourier coefficients and $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n(2k\pi)} = 1$, we have

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_k f(t+2k\pi)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_k \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n(u-2k\pi)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

However, since $f \in L(\mathbb{R})$, by the definition of the Fourier transform, we have

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nu}\,\mathrm{d}u = \widehat{f}(n).$$

Therefore, $c_n(F) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n)$. □

Poisson Summation Formula I. If $f \in L(\mathbb{R})$ and f satisfies one of the following two conditions:

(i) $f(t)$ is of bounded variation on $\mathbb{R}$ and $f(t) := \frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$;

(ii) $|f(t)| \le K_1(1+|t|)^{-\alpha}$ and $|\widehat{f}(\omega)| \le K_2(1+|\omega|)^{-\alpha}$, where $\alpha > 1$ and K_1, K_2 are constants,

then

$$\sum_n f(t+2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Specially,

$$\sum_n f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n).$$

Proof. Suppose that $f(t)$ satisfies the first condition. Lemma 1.1 has shown that the series $\sum_n f(t+2n\pi)$ is absolutely convergent almost everywhere. Now we prove that the series $\sum_n f(t+2n\pi)$ is absolutely, uniformly convergent everywhere on $[0, 2\pi]$.

Take $t_0 \in [0, 2\pi]$ such that $\sum_n f(t_0+2n\pi)$ converges. When $0 \le t \le 2\pi$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{|n|>N} f(t+2n\pi)\right| &= \left|\sum_{|n|>N} f(t_0+2n\pi)+f(t+2n\pi)-f(t_0+2n\pi)\right| \\ &\le \left|\sum_{|n|>N} f(t_0+2n\pi)\right| + \left|\sum_{|n|>N} (f(t+2n\pi)-f(t_0+2n\pi))\right| \\ &= I_N(t_0)+\widetilde{I}_N(t).\end{aligned}$$

Since the series $\sum_n f(t_0+2n\pi)$ is convergent and is independent of t,

$$I_N(t_0) \to 0 \quad (N \to \infty)$$

uniformly on $[0, 2\pi]$. Note that $f(t)$ is a function of bounded variation on $\mathbb{R}$. Denote its variation by

$$V_n = \bigvee_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} (f).$$

So the total variation is

$$\sum_n V_n = \sum_n \left(\bigvee_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} (f) \right) = \bigvee_{-\infty}^{\infty} (f) < \infty,$$

and so for $0 \le t \le 2\pi$,

$$\widetilde{I}_N(t) \le \sum_{|n|>N} |f(t+2n\pi)-f(t_0+2n\pi)| \le \sum_{|n|>N} V_n \to 0 \quad (N \to \infty),$$

i.e., $\widetilde{I}_N(t) \to 0 (N \to \infty)$ uniformly on $[0, 2\pi]$. Therefore,

$$\left|\sum_{|n|>N} f(t+2n\pi)\right| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

uniformly on $[0, 2\pi]$, i.e., the series $\sum_n f(t+2n\pi)$ is absolutely, uniformly convergent everywhere on $[0, 2\pi]$. Denote

$$F(t) = \sum_n f(t+2n\pi) \quad (t \in [0, 2\pi]),$$

where $F(t) := \frac{1}{2}(F(t+0)+F(t-0))$ since $f(t) := \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0))$. Then $F(t)$ is an integrable periodic function of bounded variation with period 2π and its total variation on $[0, 2\pi]$ is

$$\begin{aligned}\bigvee_0^{2\pi}(F) &= \bigvee_0^{2\pi}\left(\sum_n f(t+2n\pi)\right) \le \sum_n\left(\bigvee_0^{2\pi} f(t+2n\pi)\right)\\ &= \sum_n\left(\bigvee_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} f(t)\right) = \bigvee_{-\infty}^{\infty}(f) < \infty,\end{aligned}$$

According to the Jordan criterion, the Fourier series of $F(t)$ converges to $F(t)$, i.e.,

$$F(t) = \sum_n c_n(F)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

where $c_n(F)$ are the Fourier coefficients of F. By Lemma 1.1, we get $c_n(F) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n)$, and so

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Noticing that $F(t) = \sum_n f(t+2n\pi)$, we have

$$\sum_n f(t+2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Let $t=0$. Then

$$\sum_n f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n),$$

i.e., under condition (i), Poisson summation formula I holds.

Suppose that the function $f(t)$ satisfies condition (ii). Clearly, $f \in L(\mathbb{R})$ and $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$.

Consider the series $\sum_n f(t+2n\pi)$. Since $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$ and $2\pi f(-t) = \widehat{\widehat{f}}(t)$ (Property (v) of the Fourier transform), it follows from Theorem 1.1(iii) that $f(t)$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}$. Since $|f(t)| \le K_1(1+|t|)^{-\alpha}\,(\alpha > 1)$, the series $\sum_n f(t+2n\pi)$ converges uniformly on $\mathbb{R}$. Denote its sum by $F(t)$, i.e., $F(t) = \sum_n f(t+2n\pi)$ on $\mathbb{R}$ uniformly and $F(t)$ is a continuous 2π-periodic function.

Denote the Fourier coefficients of $F(t)$ by $c_n(F)$. Then the Fourier series of $F(t)$ is $\sum_n c_n(F)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$. Since $f \in L(\mathbb{R})$, by Lemma 1.1(iii), $c_n(F) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n)$. So the Fourier series of $F(t)$ is $\frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$.

By the condition (ii), $|\widehat{f}(n)| \le K_2(1+|n|)^{-\alpha}\,(\alpha > 1)$. So $\widehat{f}(n) \to 0$ monotonously as $n \to \infty$. By use of the Dirichlet criterion in calculus, it follows that $\frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = F(t)(t \in \mathbb{R})$, i.e.,

$$\sum_n f(t+2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Let $t = 0$. Then

$$\sum_n f(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_n \widehat{f}(n),$$

i.e., under condition (ii), Poisson summation formula I holds. □

The derivation of the Poisson summation formula in $L^2(\mathbb{R})$ needs the following lemma.

Lemma 1.2 (Convolution in Frequency)**.** *Suppose that* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. *Then*

$$2\pi\,(fg)^\wedge(\omega) = (\widehat{f} * \widehat{g})(\omega).$$

i.e., the convolution of Fourier transforms of two functions is equal to 2π *times the Fourier transform of the product of these two functions.*

Proof. By $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, it follows that $fg \in L(\mathbb{R})$. So the Fourier transform of fg is

$$(fg)^\wedge(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Let $h(t) = \overline{g}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, and then using Theorem 1.3, we get

$$(fg)^\wedge(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{h}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\overline{\widehat{h}}(u)\,\mathrm{d}u.$$

However, by the definition of the Fourier transform, the factor of the integrand on the right-side hand

$$\overline{\widehat{h}}(u) = \overline{\int_{\mathbb{R}} h(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\,\mathrm{d}t} = \overline{\int_{\mathbb{R}} \overline{g}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ut}\,\mathrm{d}t} = \int_{\mathbb{R}} g(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-u)t}\,\mathrm{d}t = \widehat{g}(\omega-u).$$

Therefore,

$$(fg)^\wedge(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(u)\widehat{g}(\omega-u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} * \widehat{g})(\omega).$$

We get the desired result. □

On the basis of Lemma 1.2 and Poisson summation formula I, we have

Poisson Summation Formula II. If $f \in L^2(\mathbb{R})$ and f satisfies one of the following two conditions:

(i) $\widehat{f}(\omega)$ is a function of bounded variation on $\mathbb{R}$;
(ii) $|f(t)| \le K_1|t|^{-\beta}(\beta > 1)$ and $|\widehat{f}(\omega)| \le K_2|\omega|^{-\alpha}(\alpha > \frac{1}{2})$, where K_1 and K_2 are constants, then

$$\sum_n |\widehat{f}(\omega + 2n\pi)|^2 = \sum_n \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f}(n+t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega} \quad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Proof. Let

$$\varphi(\omega) = |\widehat{f}(\omega)|^2 = \widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{f}}(\omega).$$

By the assumption $f \in L^2(\mathbb{R})$ and Definition 1.1, $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, and so $\varphi \in L(\mathbb{R})$.

Suppose that $f(t)$ satisfies the first condition. Then φ is a function of bounded variation on $\mathbb{R}$. Define $\varphi(\omega) = \frac{1}{2}(\varphi(\omega+0)+\varphi(\omega-0))$. So $\varphi(\omega)$ satisfies the first condition of Poisson summation formula I.

Suppose that $f(t)$ satisfies the second condition. By the assumption $|\widehat{f}(\omega)| \le K_2|\omega|^{-\alpha}(\alpha > \frac{1}{2})$, we get $|\varphi(\omega)| \le K_2^2|\omega|^{-2\alpha}(2\alpha > 1)$. By using Lemma 1.2, we get

$$\widehat{\varphi}(u) = \left(\widehat{f}\,\overline{\widehat{f}}\right)^{\wedge}(u) = \frac{1}{2\pi}\left(\widehat{\widehat{f}} * \widehat{\overline{\widehat{f}}}\right)(u).$$

By Properties (iv) and (v) of the Fourier transform, $\widehat{\widehat{f}}(u) = 2\pi f(-u)$ and $\widehat{\overline{\widehat{f}}}(u) = \overline{\widehat{\widehat{f}}}(-u) = 2\pi \overline{f}(u)$, and so

$$\widehat{\varphi}(u) = 2\pi f(-u) * \overline{f}(u) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f}(u+t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.9}$$

which can be rewritten in the form

$$\widehat{\varphi}(u) = 2\pi\left(\int_{|t|\le\frac{|u|}{2}} + \int_{|t|>\frac{|u|}{2}}\right) f(t)\overline{f}(u+t)\,\mathrm{d}t = I_1(u) + I_2(u).$$

When $|t| \le \frac{|u|}{2}$, we have $|u+t| \ge |u| - |t| \ge \frac{|u|}{2}$. From this and the assumption $|f(t)| \le K_1|t|^{-\beta}(\beta > 1)$, we get

$$\begin{aligned}
|I_1(u)| &\le 2\pi \int_{|t|\le\frac{|u|}{2}} |f(t)\overline{f}(u+t)|\,\mathrm{d}t \\
&\le 2\pi K_1^2 \int_{|t|\le\frac{|u|}{2}} \frac{1}{|t(u+t)|^{\beta}}\,\mathrm{d}t \\
&\le 2\pi \frac{2^{\beta}K_1^2}{|u|^{\beta}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t|^{\beta}}\,\mathrm{d}t \le K_3|u|^{-\beta} \quad (\beta > 1),
\end{aligned}$$

where K_3 is a constant.

When $|t| > \frac{|u|}{2}$, by the assumption $|f(t)| \le K_1|t|^{-\beta}(\beta > 1)$, we get

$$\begin{aligned}
|I_2(u)| &\le 2\pi \int_{|t|>\frac{|u|}{2}} |f(t)\overline{f}(u+t)|\,\mathrm{d}t \\
&\le 2\pi K_1^2 \int_{|t|>\frac{u}{2}} \frac{1}{|t(u+t)|^{\beta}}\,\mathrm{d}t \\
&\le 2\pi \frac{2^{\beta}K_1^2}{|u|^{\beta}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|u+t|^{\beta}}\,\mathrm{d}t \le K_4|u|^{-\beta}, \quad \beta > 1,
\end{aligned}$$

where K_4 is a constant.

Therefore, $\widehat{\varphi}(u) \le K|u|^{-\beta}(\beta > 1)$, where K is a constant. Therefore, φ satisfies the second condition of Poisson summation formula I.

Using Poisson summation formula I, we get

$$\sum_n \varphi(\omega + 2n\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_n \widehat{\varphi}(n)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega}.$$

By (1.9), $\widehat{\varphi}(n) = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f}(n+t)\,\mathrm{d}t$, noticing that $\varphi(\omega) = |\widehat{f}(\omega)|^2$, we can rewrite this equality in the form

$$\sum_n |\widehat{f}(\omega + 2n\pi)|^2 = \sum_n \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{f}(n+t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega}.$$

So Poisson summation formula II holds. □

The following lemma is used to prove the Shannon sampling theorem.

Lemma 1.3. *Let $X(\omega)$ be the characteristic function of $[-\pi, \pi]$, i.e.,*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \pi, \\ 0, & |\omega| > \pi. \end{cases}$$

Then the inverse Fourier transform of $X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}(n \in \mathbb{Z})$ is equal to $\frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$, i.e.,

$$(X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega})^{\vee}(t) = \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Proof. It is clear that $X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega} \in L(\mathbb{R})$, and its inverse Fourier transform is

$$\begin{aligned} (X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega})^{\vee}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-n)\omega}\,\mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Since $X(\omega) = 1(|\omega| \le \pi)$ and $X(\omega) = 0(|\omega| > \pi)$, we get

$$\begin{aligned} (X(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega})^{\vee}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-n)\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(t-n)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(t-n)}}{\mathrm{i}(t-n)} \\ &= \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}. \end{aligned}$$

□

Shannon Sampling Theorem. *Let $f \in L^2(\mathbb{R})$ and its Fourier transform $\widehat{f}(\omega) = 0(|\omega| \ge \pi)$. Then the interpolation formula*

$$f(t) = \sum_n f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \quad (L^2)$$

holds, and the series $\sum_n f(n)\frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$ converges uniformly to a continuous function $g(t)$ in every closed interval on $\mathbb{R}$ and $g(t) = f(t)$ almost everywhere.

Proof. From $\widehat{f}(\omega) = 0(|\omega| \geq \pi)$, it follows that $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ and $\widehat{f} \in L(\mathbb{R})$. Take a 2π-periodic function $f_{\mathrm{p}}(\omega)$ such that $f_{\mathrm{p}}(\omega) = \widehat{f}(\omega)(|\omega| \leq \pi)$. Then $f_{\mathrm{p}}(\omega) \in L_{2\pi}$ and $\widehat{f}(\omega) = f_{\mathrm{p}}(\omega)X(\omega)$, where $X(\omega)$ is the characteristic function of $[-\pi, \pi]$.

We expand $f_{\mathrm{p}}(\omega)$ into the Fourier series

$$f_{\mathrm{p}}(\omega) = \sum_n c_n(f_{\mathrm{p}}) \mathrm{e}^{in\omega} (L^2), \tag{1.10}$$

where $c_n(f_{\mathrm{p}})$ are Fourier coefficients and

$$c_n(f_{\mathrm{p}}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_{\mathrm{p}}(\omega) \mathrm{e}^{-in\omega} \, \mathrm{d}\omega \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

By $\widehat{f}(\omega) = f_{\mathrm{p}}(\omega)(|\omega| \leq \pi)$ and the assumption $\widehat{f}(\omega) = 0(|\omega| \geq \pi)$, and $\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi f(-t)$ (property of the Fourier transform), it follows that

$$\begin{aligned} c_n(f_{\mathrm{p}}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(\omega) \mathrm{e}^{-in\omega} \, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \mathrm{e}^{-in\omega} \mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f}}(n) = f(-n) \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Combining this with (1.9), we get

$$f_{\mathrm{p}}(\omega) = \sum_n f(-n) \mathrm{e}^{in\omega} \quad (L^2).$$

Noticing that $\widehat{f}(\omega) = f_{\mathrm{p}}(\omega)X(\omega)$, we get

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_n f(-n) X(\omega) \mathrm{e}^{in\omega} = \sum_n f(n) X(\omega) \mathrm{e}^{-in\omega}.$$

Taking the inverse Fourier transform on both sides, we get

$$f(t) = \sum_n f(n) (X(\omega) \mathrm{e}^{-in\omega})^{\vee}(t) \quad (L^2).$$

By Lemma 1.3, we get an interpolation formula:

$$f(t) = \sum_n f(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)} \quad (L^2). \tag{1.12}$$

From this, the Riesz theorem shows that the series $\sum_n f(n) \frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}$ converges to $f(t)$ almost everywhere.

On the other hand, for Fourier series (1.10), by using Bessel's inequality, we get

$$\sum_n |c_n(f_{\mathrm{p}})|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f_{\mathrm{p}}(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega.$$

By (1.11), $c_n(f_p) = f(-n)(n \in \mathbb{Z})$, the left-hand side is

$$\sum_n |c_n(f_p)|^2 = \sum_n |f(-n)|^2 = \sum_n |f(n)|^2.$$

By $f_p(\omega) = f(\omega)(|\omega| \le \pi)$ and $\widehat{f}(\omega) = 0(|\omega| \ge \pi)$, the right-hand side is

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_p(\omega)|^2 \,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(\omega)|^2 \,d\omega = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2 \,d\omega.$$

Therefore,

$$\sum_n |f(n)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)|^2 \,d\omega.$$

From $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, it follows that $\sum_n |f(n)|^2 < \infty$. So the series $\sum_n |f(n)|^2$ converges. Since $\left|\frac{\sin(\pi(t-n))}{\pi(t-n)}\right| \le \frac{1}{|t-n|}$, the series $\sum_n |\frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}|^2$ converges uniformly in every closed interval on $\mathbb{R}$.

According to Cauchy's principle of convergence in calculus, for $\epsilon > 0$, there is an $N > 0$ such that when $M \ge m > N$,

$$\sum_{m\le|k|\le M} |f(k)|^2 < \epsilon, \qquad \sum_{m\le|k|\le M} \left|\frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}\right|^2 < \epsilon$$

hold simultaneously in every closed interval on $\mathbb{R}$. By using Cauchy's inequality, we have

$$\left|\sum_{m\le|k|\le M} f(k)\frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}\right|^2 \le \left(\sum_{m\le|k|\le M} |f(k)|^2\right)\left(\sum_{m\le|k|\le M} \left|\frac{\sin(\pi(t-k))}{\pi(t-k)}\right|^2\right).$$

Therefore, for the above $\epsilon > 0$ and $N > 0$, when $M \ge m > N$,

$$\left|\sum_{m\le|k|\le M} f(k)\frac{\sin \pi(t-k)}{\pi(t-k)}\right| < \epsilon$$

in every closed interval on $\mathbb{R}$. According to Cauchy's principle of convergence, the series

$$\sum_n f(n)\frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

converges uniformly in every closed interval on $\mathbb{R}$ to a continuous function, denoted by $g(t)$. By (1.12), we get $g(t) = f(t)$ almost everywhere. $\square$

1.5 DISCRETE FOURIER TRANSFORM

Discrete Fourier transforms are used in discrete signal or discrete time series. The discrete Fourier transform is defined as follows.

Given an N-point time series $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$, the *discrete Fourier transform* of x is defined as

$$X_k = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi k}{N}} \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1).$$

In this definition, x_n is called the *sample*, N is called the *number of samples*, $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ is called the *sampling frequency interval*, $\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ is called the *discrete frequency*, X_k is called the *frequency coefficient*, and $\{|X_k|^2\}_{k=0,\ldots,N-1}$ is called the *Fourier power spectrum* of x. In detail, the discrete Fourier transform gives a system of equations as follows:

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} x_n = \frac{1}{N}(x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{N-1}),\\
X_1 &= \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{N}\left(x_0 + x_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}} + x_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{N}} + \cdots + x_{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2(N-1)\pi}{N}}\right),\\
&\ \vdots\\
X_{N-1} &= \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} x_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi(N-1)}{N}}\\
&= \frac{1}{N}\left(x_0 + x_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2(N-1)\pi}{N}} + x_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4(N-1)\pi}{N}} + \cdots + x_{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2(N-1)^2\pi}{N}}\right).
\end{aligned}$$

It can also be rewritten in the matrix form $\mathbf{X} = \frac{1}{N}\mathbf{F}\mathbf{x}$, where

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix}$$

and

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{N}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4\pi}{N}} & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2(N-1)\pi}{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2(N-1)\pi}{N}} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4(N-1)\pi}{N}} & \cdots & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2(N-1)^2\pi}{N}} \end{pmatrix} = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi k}{N}}\right)_{k,n=0,1,\ldots,N-1}.$$

Another Random Scribd Document with Unrelated Content

suoi maggiori, in casa e fuori, fino alla pazzia suntuosissimamente edificato corti, rôcche e palazzi.„[81] E non ricorda il valentuomo, che Giangaleazzo faceva edificare il Duomo di Milano e la Certosa di Pavia? — Altre accuse, e non lievi, gli vengono mosse dallo stesso Corio, il più discreto e il meno appassionato tra i cronisti de' suoi tempi.

Il criterio storico ne insegna prima di tutto, che alle enfatiche apologie dei panegiristi bisogna fare un vistoso diffalco. È antico destino, che i potenti non abbiano mai ad essere onorati dalla compagnia della verità. Se la lode accanto ad essi divien troppo frondosa, alle spalle il biasimo non è mai meno esagerato. Assai spesso la verità balba e timida al cospetto di un potente, l'insegue troppo ardita e ciarliera quand'egli è passato.

L'opinione del Corio e degli annalisti, che con lui e o dopo di lui accusarono questo principe, hanno una certa autorità; nondimeno la storia, imparziale raccoglitrice dei fatti e giudice competente dell'ordine e della natura di essi, non deve riputarsi inappellabile, fin quando non si saranno raffrontati e contemperati i giudizj emessi in epoche e da persone diverse. L'*ardua sentenza* intorno ad un uomo è meglio rimessa ai posteri, quanto più lontani tanto più autorevoli. Imperocchè la storia non chiude mai il suo libro; ed ogni uomo di buon senso, colla scorta dei fatti che da essa apprende, può a suo talento ripetere il giudizio intorno ad un personaggio o ad un fatto; e confermare od annullare una vecchia sentenza.

Riassumo brevissimamente alcune notizie.

Anche i più severi giudici del duca Giangaleazzo non attribuirono a lui un solo atto di crudeltà. Egli non applicò mai in veruna circostanza quelle leggi di sangue, che condannavano i colpevoli al martirio prima di subire l'estremo supplicio. In un solo caso publicò un editto, che risentiva la ferocia del secolo; ma vi fu indutto da forte ragione. Trattavasi di un delitto che, ad un grado speciale di perversità, accoppiava il pericolo di conseguenze irreparabili. — Un dispaccio apocrifo, munito della firma ducale falsificata, sfruttò la splendida vittoria di Jacopo dal Verme contro i Gonzaga.

Giangaleazzo, memoro altresì di ciò che aveva fatto Medicina in danno d'Agnese, aggravò la pena dei falsarj, e promulgò un bando che li condannava alle fiamme.

Per confessione degli stessi suoi nemici, molte furono le buone leggi con cui provide al civile ordinamento dello Stato. Taluna parve sì nuova ed avanzata pei tempi, che destò forse qualche scandalo per la sua strana precocità. Instituì i consigli di giustizia, e sottopose a norme inviolabili l'interpretazione e l'applicazione degli Statuti, togliendo l'arbitrio ai magistrati, onde spesso le più savie leggi erano fatte inefficaci ed inique. — Creò una magistratura per le entrate, incaricandola di regolare i tributi sulla norma dei bisogni; di porre un freno all'ingordigia degli esattori; d'impedire i balzelli e le concussioni. Ordinò la consegna degli ostaggi e la demolizione delle rôcche, nelle quali i feudatarj esercitavano atti di capricciosa tirannia. Rese produttive varie sorgenti di publica ricchezza, e vi attinse i mezzi a ristorare l'erario: quelle imposizioni, che allora forse recarono qualche scandalo, divennero più tardi una fonte naturale d'entrata per ogni governo. Pose, a cagion d'esempio, un'imposta sugli atti notarili; introdusse il bollo per la validità dei documenti; prescrisse che i viandanti si facessero conoscere per mezzo di carte rilasciate dall'autorità. Compì ed illustrò la raccolta degli Statuti patrii fino all'anno 1396. Frenò le violenze private, limitando il diritto di portare le armi. Ordinò in fine che negli atti publici si sopprimesse l'uso della parola *popolo*, e le venisse sostituita quella di *comune*.

La maggior parte degli storici si levano indignati contro questo decreto, e lo chiamano frutto di una politica codarda perfino al cospetto dei fantasmi. Si disse che Giangaleazzo odiò il governo popolare, che cercò di distruggere le franchigie tradizionali, che combattè la libertà, che ne odiò perfino la parola. — Ma ecco quanto osserva intorno a ciò un illustre nostro contemporaneo, che non sarà per certo preso in sospetto di troppa indulgenza coi tiranni. — "L'isolato racconto della soppressione della parola *popolo* ce lo fa, è vero, odioso, ma quando nei motivi della sua legge lo vediamo esortare la parola *comune* pel desiderio della concordia della nobiltà col popolo, noi vi applaudiamo.„[82] Difatto egli pensò di spegnere fino la voce e la memoria delle lotte sociali, che laceravano il paese: coll'abolizione di una parola volle abolito il fatale antagonismo fra la plebe e la nobiltà. Nella parola *comune*, egli raccomandava la solidarietà delle varie classi, la maggior possibile eguaglianza sociale. — I suoi antecessori avevano compresse le fazioni, e quelle tacevano rassegnate a malincuore. Sotto il suo governo elleno andarono mano mano scemando per mancanza di vitalità: ogni classe, ogni città, ogni borgo doveva fare sacrificio delle privilegiate franchigie a pro della patria, affinchè tacitamente si costituisse in nazione. I fatti precedevano il grande concetto.

Dopo la lega lombarda, l'Italia aveva fatto un gran passo verso la libertà; ma il principio di una dipendenza al trono imperiale, come si è già detto, veniva consacrato di bel nuovo nella stessa pace di Costanza. A scuotere completamente il giogo straniero, richiedevasi la presenza di un pericolo costante, che legasse in un fascio le armi delle piccole republiche, e le rendesse immemori delle glorie parziali ed effimere. Allontanato il pericolo, i comuni, i prìncipi ed i pontefici studiavano per lo contrario di guadagnare per sè quell'influenza che avevano tolta alla podestà straniera; anzi, acciecati dall'interesse e dopo breve tempo scordato il patto fraterno, ricorrevano alla tutela dello straniero per far prevalere le loro pretensioni. — Se ad ingentilire un popolo bastasse la vita di un uomo, l'educazione sarebbe stata il più efficace mezzo ad ottenere lo scopo vagheggiato; ma in quel secolo d'ignoranza e di pregiudizj, mentre i tirannelli e le republiche non vedevano altro nella patria che una preda disputata; la speranza di diffondere e di consacrare un concetto tanto nuovo e sublime diveniva follía. — Era necessario che l'idea s'incarnasse nel braccio e nel senno di un uomo; bisognava che il popolo subisse un mutamento dalla mano inesorabile di chi lo reggeva; bisognava che avvenisse di noi quello che avviene dell'infermo, liberato da un malanno ignoto per l'opera violenta del chirurgo.

Grave accusa vien fatta al governo di Giangaleazzo per la sua slealtà verso i principi italiani. — Vero è che le sue alleanze furono, o parvero sempre, dettate da momentanei interessi. Sovente le rappresaglie e la guerra ruppero le giurate amicizie, prima di un avviso, e senza nemmanco un'apparenza di ragioni. — Ma egli non sacrificò a queste fuggevoli associazioni il voto e l'interesse della nazione che risurgeva. Nelle guerre coi signori della Scala e coi Carraresi rispose alla tacita preghiera di due provincie maltrattate dalla più odiosa tirannide. Soltanto Firenze si levò tutta in armi contro lui; e fu infatti davanti alla unanimità di un popolo che le sue forze si mostrarono meno potenti.

Non gli facciamo torto s'egli non apparve un grande capitano. — La guerra per lui non fu il fine, ma il mezzo de' suoi disegni. Un principe, che in quel secolo attendeva tranquillo all'ordinamento civile dello Stato e ne affidava la difesa e l'onore ad abili condottieri, è a considerarsi come un unico esempio tra' suoi pari. Noi dovremo anzi considerarlo come il migliore dei prìncipi guerrieri, badando al fatto, che durante il suo regno le armi italiane furono sempre vittoriose. — Per mezzo di strenui e peritissimi condottieri, quali furono Alberico da Barbiano, Jacopo dal Verme, Ottobono Terzo e Facino Cane, egli procacciò al suo secolo ed al nostro paese la gloria ed i vantaggi di un'arte nuova che raddoppia l'impeto delle schiere colla tattica e la disciplina. D'allora in poi scemò in Italia la fatale influenza dei capitani di ventura d'oltralpe, che, coperti di un'assisa mercenaria, manomettevano crudelmente le povere provincie, contro cui o per cui combattevano.

Non si deve passare sotto silenzio, come durante un governo commosso da continue guerre, e preoccupato da un intento quasi temerario, il primo duca favorisse gli studii e le arti della pace. L'università di Pavia, fondata da suo padre, toccò l'apice dello splendore per opera di lui. Bandì dalla sua corte le frivole smancerie dei cavalieri e dei trovatori; e, privilegiando della sua amicizia i dotti, introdusse fra i suoi intimi una piacevolezza egualmente cortese, ma più franca e veritiera.

Suo padre e suo zio avevano munito le città soggette di rocche inespugnabili, profondendo immensi tesori per preservare la timida sovranità dagli assalti dei nemici e dall'ira delle popolazioni.

Giangaleazzo, mentre faceva guerra ai confini, e combatteva nell'interno le velleità municipali, potè meditare ed avviare l'erezione dei due più stupendi edificii religiosi del suo secolo: il duomo di Milano e la Certosa di Pavia. Nè il grandioso concetto eragli consigliato dalla vana ambizione dei tiranni, che con un tratto di penna ipotecano il genio e la ricchezza dei sudditi, per poi usurpar loro il diritto alla immortalità. È fama che lo stesso duca convocasse presso di sè gli architetti di varii paesi, e discutesse seco loro la scelta di un tipo e l'appropriata sua decorazione; anzi non è temerario il supporre con qualche cronista, che fra gli anonimi maestri, che tracciarono od ampliarono quei vasti progetti, debbasi registrare il nome dello stesso duca. — Arricchì di una pingue dotazione i due monumenti; e con una accortezza, che non accenna per certo alla coscienza timida che gli venne attribuita, seppe usufruttare per sè le pingui esazioni della corte romana, ottenendo da Bonifacio IX che partecipassero all'indulgenza del giubileo, l'anno 1390, quei fedeli che offrivano al nuovo tempio due terzi della somma necessaria pel pellegrinaggio a Roma. — Il ripiego fu sapiente; e il persuaderne la corte romana dev'essere stata opera più ardua, che a noi non pare a prima giunta.

A chiudere questi cenni convengono le parole del lodato scrittore. "Io non proporrò mai questo principe per modello, scrive P. Litta, ma per noi Italiani gli è di tutti il più importante. Prometteva all'Italia l'unità politica. Da Stefano IX in poi, molti vi si erano accinti, ma nessuno più di lui si avvicinò alla meta. Ebbe per oppositori in parte gli imperatori, ma più ancora gli stessi suoi connazionali. La profusione dell'oro e le scissure della Germania lo rendevano tranquillo da un lato, ma l'interna reazione non gli lasciava la possibilità di una riescita.„

"L'Italia, nei posteriori avvenimenti, ha veduta giustificata l'utilità della tentata impresa della nostra monarchia; per cui, concedendo tutto ciò che v'ha in Giangaleazzo di più odioso, non si potrà mai impugnare, come, essendo egli giunto a tanta potenza da far sperare la stabilità di una vicina grandezza, *fosse un dovere di consacrarci all'esaltamento di lui*, mentre nei trionfi del Visconti erano concentrati gli interessi e l'onore nazionale. Ma noi, incapaci di penetrare nelle tenebre del futuro, ci opponemmo agli sforzi di un uomo, che tentava di modellare la nostra penisola sulla situazione delle grandi monarchie, che si stavano preparando in Europa: onde, giunte queste a singolare grandezza, l'Italia indispensabilmente ne fu la vittima.[83]„

CONCLUSIONE

CLVII.

Io credo che, se le erbe selvatiche di uno scopeto fossero dotate della parola, non se ne varrebbero per lodare un albero frondoso e fruttifero, che per caso surgesse loro nel mezzo. V'ha un genere di miseria, che non riconosce sè stessa, e che si mostra quasi superba della propria nullità. Vi sono degli invidiosi che tentano di consolarsi, negando agli invidiati quel merito che da loro appresero a desiderare. — Questa è una delle ragioni per cui gli storici dei secoli passati, ed i potenti che gl'inspirarono, non riconobbero nel nostro eroe una fortunata eccezione dei tempi. — Le successive sventure guidarono i posteri a più equo giudizio; il male fece apprezzare il rimedio, quando l'opportunità di applicarlo era passata.

Ma la storia dei fatti, che ne mostra lo scopo a cui mirava quel principe, è ben diversa dalla storia dell'uomo e delle cause delle sue azioni. — La prima scende a cercare le conseguenze, l'altra risale a scoprire l'origine degli avvenimenti.

Non è sempre vero che le grandi imprese sieno il risultato di virtù egualmente grandi. Come v'ha talvolta il figlio degenere dal padre, così vi sono delle piccole cagioni che partoriscono grandiosi effetti. Questo avviene tanto più facilmente se il caso si compiace di accumulare varie piccole circostanze, e di farle concorrere ad uno scopo unico e determinato. — L'albero, che ombreggia il campo sterile, non è debitore della sua prosperità soltanto all'ottima natura del seme; è probabile che il concorso di molti incidenti, parzialmente inefficaci, abbiano contribuito a sollevarlo dalla miseria che lo circonda.

Vediamo brevemente se la vita di Giangaleazzo può dirsi determinata dalla fortuita associazione di circostanze atte a favorire in lui lo sviluppo di tendenze speciali: e, in caso affermativo, quali esse sieno state.

Per certo non gli poteva bastare l'aver sortito dalla natura un ingegno sagace, una volontà ferma, una costanza di proposito privilegiata. Altri prima di lui possedevano queste doti; nessuno vide meglio e vagheggiò più da vicino la meta. — Era egli forse guidato dall'ambizione? Questo sentimento, fonte ordinaria delle più ardite imprese, è per solito insofferente degli indugi ed indisciplinato nell'uso dei mezzi. Non è a credersi ch'egli avrebbe saputo sacrificare a questo idolo la sua gioventù, nè che avrebbe aspirato a meritarsi la gloria e l'immortalità, sopportando la dimenticanza e lo sprezzo pei migliori anni della sua vita. L'ambizioso non cede la certa gloria dell'oggi, per la incerta del dimani; non aspira alla potenza, battendo la via delle umiliazioni. Egli obedisce alla propria passione; non la domina, nè la contiene, molto meno la dirige a nobile scopo. — Colui che sa mettere d'accordo i suoi individuali interessi con quelli di un popolo, che fa della gloria del suo paese la gloria sua, fosse anche stimolato dal meno nobile amore di sè, non deve essere accusato di colpevole ambizione.

Tutti gli atti, che inspirarono il governo del primo duca, rivelano in lui una mitezza di carattere nuova pei tempi; egli fu dunque ambizioso d'apparire giusto, clemente, umano. Vide che i tirannelli moltiplicavano in Italia i punti di contatto tra le terre nostre e lo straniero; egli ebbe l'ambizione di sostituire al secolare despotismo dei feudatarj dell'impero una sovranità forte, assoluta, ma unica e nazionale. Divenuta la guerra un bisogno, egli ambì di avere a' suoi stipendii i migliori capitani, e rialzò la fatale necessità delle armi al grado di gloria italiana. Infine, mentre i suoi capitani vincevano per lui, egli ambiva di associare il suo nome allo splendore dei monumenti e alla saggezza delle civili instituzioni.

Una gran parte di tutto ciò, era merito del suo animo. Però, com'egli vinceva i nemici col braccio de' suoi soldati, così superava le interne lotte dell'animo ajutato dagli affetti delle persone care. — L'idea di Maffiolo Mantegazza era divenuta sua; l'amore di Agnese non era il premio, ma piuttosto il motore delle sue azioni.

Noi abbiamo lasciata l'infelice madre a Pavia, sfuggita per prodigio da una perfida insidia, tramata dalla gelosia della principessa Caterina. Costei scordò le sue vendette, quando lo sposo, lanciandosi nelle ardite imprese, le fece travedere lo splendore di una grandezza inaspettata. Cessò di volgere l'occhio sinistro alla supposta rivale, dacchè riconobbe che ella sola poteva spingere il duca sulla via della gloria. Tre anni dopo la cattura di Barnabò, Caterina divenne madre. Questo fatto, che distruggeva le supposizioni del malefico prestigio della rivale, cancellò ogni avanzo di rancore, e risvegliò in lei a pro d'Agnese tutta quella benevolenza, di che il suo cuore era capace.

Agnese, non più l'amante di Giangaleazzo, era il genio delle sue vittorie. — La severa presenza di questa donna aveva finalmente costretto al silenzio le malediche lingue degli scioperati. V'ha nella virtù un'impronta così solenne ed autorevole, che comanda rispetto perfino ai malvagi.

Il pensiero di Maffiolo, reso sacro dalla sua morte e riscaldato dall'amore ardentissimo per la figlia di lui, diveniva pel duca un destino, una necessità, un voto che non si poteva infrangere. — Agnese glielo ricordava col suo aspetto, colla pratica costante delle sue virtù, colle prove sviscerate del suo amore materno, la cui dolcezza, malgrado ogni riserbo, risaliva fino a lui. — Tra il duca ed Agnese esisteva il piccolo Gabriello. — Non era dunque necessario che l'uno rammentasse all'altro le gioje trascorse e le mutue promesse; queste e quelle erano quotidianamente resuscitate dalla presenza di un pegno d'amore, sul quale s'incontravano e s'abbracciavano in silenzio due esistenze allontanate, ma non divise.

Grande è la potenza di un affetto. A quei tempi, sotto la cotta d'armi, non di rado palpitavano cuori sì morbosamente sensibili che, tenendo in niun cale la vita, l'esponevano ad aspri cimenti per meritare il sorriso di una donna. Ma gli effetti di questi improvisi incendj erano passaggieri, come il premio a cui aspiravano. L'impero d'Agnese sull'animo del duca non fu mai nè artificioso, nè violento. Non aveva ella bisogno di porre in rilievo le sue doti; e molto meno di soggiogare colla forza delle armi feminili un animo già troppo a lei vincolato. — Il duca era stretto ad Agnese da un legame assai più nobile. L'affetto di costei era il tacito moderatore delle sue impazienze, il discreto consigliero delle sue incertezze, il fido alleato, sempre pronto a dividere con lui la buona come la mala fortuna.

Asserirono gli storici che Giangaleazzo, al principio del suo governo, fosse timido ed inetto a grandi cose. — Lo fu difatto: ma cessò di esserlo quel giorno in cui scoperse d'avere al fianco il genio della patria incarnato nella erede di Maffiolo. — Ecco l'unica e fortuita circostanza, che trasse dal nulla l'uomo, e lo avvicinò agli eroi. Senza l'amore di questa donna, senza il vivo ed efficace impulso delle sue sollecitudini, egli avrebbe lasciato languire il suo disegno, disperando forse di vederlo compiuto.

Un legame sì nuovo e sì straordinario non si allentò mai; perocchè Agnese, esperta del passato, lo aveva posto sotto la salvaguardia della virtù. — L'amante poteva essere tradita una seconda volta; l'amica diveniva inviolabile. — Perciò nei ritrovi privati ella ebbe cura d'aver sempre vicino a sè il piccolo Gabriello: la sua presenza era un ricordo ed un avviso. Temperante nella parola, non abusò mai del potere che ella aveva sul cuore del duca. Interrogata (e lo era spesso) traduceva nell'affettuoso linguaggio dell'amicizia la rigida sapienza di suo padre. Qualche volta ella si trovò discorde dall'opinione di chi l'interrogava; e quasi sempre la restía volontà del principe dovette piegarsi all'ingenuo buon senso di una debole creatura.

Mentre il duca con una fortuna prodigiosa abbatteva i piccoli tirannelli, Agnese, felicitandolo della vittoria, soleva ripetergli — "riàlzati quanto più puoi da costoro che hai prostrato nella polvere, solleva il tuo trono colle savie leggi„.

Quando il duca cadde infermo a Marignano, fu grande il dolore de' suoi famigliari. La stessa Caterina escì dalla sua naturale immobilità; si mostrò commossa, ed ebbe gli occhi pieni di lacrime. — Ma in mezzo a quelle molteplici espressioni di un dolore sincero, la più viva e la più solenne testimonianza d'affetto gli fu data da Agnese. Ella non piangeva, e non pregava colla parola; le sue membra erano immobili, ma le sue pupille, con un'ansietà febrile ed un'angoscia indescrivibile, cercavano il lume ormai spento negli sguardi del moribondo, come una donna vana cerca nella polvere lo smarrito giojello.

Quando il duca ebbe esalato l'ultimo respiro, Caterina inventò pianti, singhiozzi, stridi adeguati alla circostanza. Le dame si studiavano d'imitarla. Agnese soltanto taceva; ma il suo silenzio, la prostrazione delle forze, il pallore mortale delle sue gote, furono un elogio funebre assai più eloquente, che non le smanie venderecce dei cortigiani e le ampollose declamazioni degli oratori.

Agnese pensò che il voto solenne di suo padre non era sciolto. Ella previde, che Dio protraeva ad altro secolo la sacra impresa di far libera la patria.

Compiuto il rito funebre, Agnese stabilì di abbandonare Milano e di ritirarsi a Pisa che, per testamento del duca, era concessa in feudo a Gabriello Visconti. Partirono con lei il figlio già diciottenne e Canziana; la quale, benchè vecchia ed infermiccia, aveva colle lacrime agli occhi implorata la grazia di morire vicino a' suoi padroni.

In quella città credette Agnese di trovar rimedio al suo dolore. Si propose di vivere nel passato, di raccomandare l'avvenire di suo figlio all'amore del popolo, di spargere in mezzo ad esso il salutare esempio della virtù e della carità verso la patria. Sperò l'infelice di potere ivi promovere e coltivare i reconditi disegni di suo padre e del duca. E poichè non era suonata l'ora del riscatto d'Italia, ella aveva risoluto di affidare ad un popolo generoso e guerriero il sacro deposito della grande idea, certa che, ove fosse compresa, sarebbe in breve divenuta feconda dei più luminosi risultamenti. — Ella s'ingannò.

Morto il duca di Milano, i capitani, che guidavano le sue armi, non poterono accomodarsi ad una reggenza gretta, ingenerosa, sorda ad ogni consiglio. — Disfatto l'esercito italiano, Firenze riacquistò la sua libertà municipale. Il suo vessillo escì come in trionfo dalle mura sguernite, e portò nel territorio vicino, col rancore del subíto oltraggio, il desiderio della vendetta. Pisa fu la prima città, che udì l'invito, e si sollevò contro il biscione. Le gravezze, inseparabili da qualunque governo, sembrarono esorbitanti ai Pisani, i quali troppo a malincuore s'accomodavano all'obedienza verso una sovranità lontana, che essi chiamavano straniera ed intrusa. — Alcuni cittadini aprirono secrete pratiche con Firenze per liberarsi dal dominio dei Visconti. La congiura fu scoperta; e Gabriello, intimorito dalle minaccie del popolo e de' suoi vicini, credette spegnere la ribellione dannando a morte Francesco Agliato, capo e promotore di essa. Il castigo produsse l'effetto di una provocazione: i Pisani aggiunsero al malinteso dovere di liberare la patria il non ignobile proposito di vendicare la morte di un concittadino. Ruppero allora in aperta rivolta; ed, ajutati dalle milizie fiorentine, piombarono sulle schiere dei Visconti, e per poco non le dispersero.

I soldati di Gabriello, educati alla nobile scuola dei condottieri di suo padre, si difesero una prima volta, e respinsero gloriosamente l'assalto. Ma poco dopo il giovine Visconti, che non aveva fiducia nelle proprie forze, osò, inconsulta la madre, soscrivere con Bocicaldo Le Meingre, governatore di Genova in nome del re di Francia, un trattato di alleanza, in virtù del quale egli cedeva al re il porto di Livorno, a patto che le armi francesi lo proteggessero dalle insidie dei Fiorentini.

Gabriello accolse con giubilo i primi frutti di questa sciaguratissima alleanza. Agnese, che serbava scritte nel cuore le saggie parole di suo padre, vi si rassegnò, sospirando, e pregando Iddio che disperdesse i suoi funesti presentimenti.

I buoni officii del governatore francese ottennero a pro di Gabriello una tregua d'armi; intanto che i Fiorentini proponevano di riscattar Pisa a denaro. L'offerta, male accetta al Visconti, tornò opportuna al suo alleato, che in quel punto desiderava l'amicizia di Firenze, ed agognava a mettere mano sul prezzo, per sottrarre da esso una pingue senseria. — I Pisani, informati delle trattative avviate, lieti di far sorte comune con Firenze, non pensarono che il mediatore dell'intrigo era tal uomo, che non avrebbe mai posposti i suoi interessi a quelli di una povera città italiana. La speranza del promesso riscatto li fece sordi e ciechi ad ogni savia rimostranza. Il popolo pisano convalidò la proposta, ripigliando le armi contro il Visconti. — Il giorno 20 luglio 1405 Pisa era divenuta un campo di battaglia. Alla frantesa convinzione, che in quel dì si combattesse per la salute della patria, tutto il popolo si levò furibondo, ed attaccò con eroico coraggio le schiere del Visconti. Queste si difesero con pari valore; respinsero una, due volte l'attacco; ma alla fine dovettero cedere al numero e all'impeto dei rivoltosi. — Gabriello ed Agnese, seguiti dalla vecchia compagna, ebbero scampo nella rôcca, presidiata da soli duecento cavalieri e da pochi fanti.

CLVIII.

Intanto che la rôcca veniva apparecchiata all'estrema difesa, la madre chiamò a sè Gabriello; ed, abbracciatolo con una tenerezza ancora più viva del solito, ed invocata sul capo di lui la benedizione del cielo, potè rinovargli una salutare lezione. — Gli rammentò anzitutto il suo grave fallo; e gliene fece toccare con mano le terribili conseguenze. La prima e la più grave tra quelle era la necessità di volgere le armi contro i suoi cittadini; dacchè questi, insurgendo, prestavano involontario soccorso alle cupide pretensioni di un avventuriero. — L'unico rimedio al suo errore era la vittoria; l'unica emenda il ridonare a' suoi cittadini quella libertà che bramavano, affinchè per l'avvenire non la chiedessero ai nemici comuni. Vincitore, o vinto, doveva Gabriello rompere il funesto patto che lo faceva servo ad interessi estranei. Gli disse, essere mille volte meglio morire, che non ottenere in grazia la vita, e pagarla col sacrificio della propria dignità. — "Guai, conchiuse ella, a quell'uomo ed a quel popolò che spera di ottenere libertà dalla tirannide altrui. Non può essere lecita alleanza quella che ti costringe a combattere al fianco dei nemici della tua patria. Le promesse dell'avventuriero, anche quando fossero generose, tornerebbero sempre a danno di chi le sollecita e le accoglie. Figliuol mio, che tu sia o no signore di Pisa è troppo piccolo interesse, perchè tu scorda d'essere, ad ogni modo e a dispetto d'ogni fortuna, un Visconti e un duce italiano.„ Dopo ciò, scioltasi dagli amplessi del figlio, e rinvigorita dal coraggio che le inspiravano l'amore di madre e la carità ardentissima verso la patria, vestì armi e corazza. — Sorella primogenita di Caterina Riario, s'apprestava a combattere l'ultima battaglia al fianco di suo figlio, ed alla testa dei pochi che gli erano rimasti fedeli.[84]

La nostra eroina sotto quelle spoglie era ancora meravigliosamente bella. — Noi, che abbiamo spesa qualche parola nel dipingerne l'avvenenza florida e giovanile d'altri tempi, dovremo aggiungere che gli anni e le sventure avevano modificata, non deteriorata, la sua bellezza. La severità del volto ingentilita dagli affetti, la regolarità dei lineamenti ravvivata dalla espressione alterna ed incalzante della passione, la vigoría delle forme congiunta alla prontezza dei movimenti facevano di lei il tipo vivo delle sognate amazzoni. Ma, mentre il braccio era fermo e la fronte imperturbata, il cuore parlava dall'occhio un ben diverso linguaggio; era ancora e sempre il cuore della madre e della donna. — La poveretta indovinò che i suoi dolori avrebbero fine; ma presentì ad un tempo che altro a lei carissimo doveva sopravivere e soffrire. — Prima di vestire l'armatura e di confondersi coi soldati, s'inginocchiò; e, rivolta la mente a Dio, non gli chiese la vittoria, ma invocò la grazia di vivere con suo figlio, poichè ella prevedeva ch'egli dovrebbe provare le acerbità della fortuna.

I momenti erano preziosi. La folla dei nemici, ingrossata intorno alla rôcca, colpiva le mura colle pietre e i difensori colle balestre. Il cielo mesceva le sue ire a quelle dei combattenti. Un denso velo di nubi copriva tutto l'orizzonte, e s'avanzava a poco a poco spargendo di tenebre il campo: quell'eroismo fratricida era ingrato a Dio. Frequenti lampi vincevano il balenare delle armi; il tuono rumoreggiava prima cupo e lontano, poi interrotto da clamorosi scoppii, che facevano tremare la terra, e si prolungavano in un muggito assordante. Pareva che la natura volesse divenire sorda e cieca alle bestemmie ed alle violenze che si scambiavano gli assalitori e gli assaliti.

Le baliste e le petriere lanciavano enormi macigni. Ripetendo incessantemente le percosse nella parte più debole della rôcca, la coprivano di fessure, sfondavano i mattoni, spezzavano gli archi morti, facevano piovere nella fossa sottoposta lo sfasciume della ruina, riempiendo l'aria di scheggie e di polvere e spianando la via agli assalitori.

Il campo pisano era già seminato di cadaveri: alcuni colpiti dalle armi degli assediati, altri, in maggior numero, pesti ed uccisi dalla colluvie stipata che ingrossava ad ogni istante. I colpi degli assediati non miravano invano; e la vista degli oppressi e dei morti ravvivava sempre più il furore degli assedianti. Alcuni già toccavano le mura; altri tentavano di appoggiarvi le scale; i più arditi facevano degli sforzi per salire sul rivellino, ponendo il piede e la mano nel cavo delle screpolature, o sovra le pietre sporgenti dai ruderi.

Sugli spalti, dove ferveva maggiormente la battaglia, a fianco dei più coraggiosi, talora davanti a tutti, vedevasi un guerriero dalle armi forbite e colla visiera calata, che, tenendo in una mano il vessillo visconteo, nell'altra la spada, animava colla parola e coll'esempio i compagni. — Era Agnese che, dimentica di sè e del pericolo, teneva vivo ne' suoi fidi l'ardore della difesa.

Ma i valorosi, che pugnavano con lei, compresero, pur troppo, che la resistenza, fosse pur costante e disperata, non sarebbe mai vittoriosa. Lo scrosciare delle pietre annunciava il guasto crescente delle mura; le grida vicine e distinte attestavano che i nemici erano ad un passo dalla breccia. Nondimeno si pugnò con eroico coraggio anche dall'alto della rôcca. Gli audaci, che avevano osato appressarvisi, erano respinti colle aste e coi dardi; i primi, che avevano tentato di scalare la bastita, venivano ruzzolati di colpo nella fossa.

I Pisani, vedendo che l'assalto costava troppo gravi sacrificii, ripigliarono l'uso delle macchine da guerra per aprire la breccia all'angolo del rivellino, su cui era addensato il maggior numero di difensori. L'operazione procedeva alacremente con visibile danno del fortilizio. Già il terrapieno, straziato da mille fessure, era vicino a scoscendere. Il contramuro, che lo rinfiancava, assottigliato dalle percosse, sostenevasi a mala pena sur una pietra fortuitamente invulnerata. Bastava un colpo ben diretto ad abbattere quel sostegno, ed a travolgere, colla più gran parte del muro, gli incauti che vi stavano sopra.

Un più grosso macigno, lanciato con straordinario impeto, arrivò netto allo scopo; la muraglia fu d'improviso nascosta da un nuvolo di polvere; un rombo spaventevole e prolungato annunciò il crollo della bastita. I militi del Visconti, al sùbito traballare del suolo, ebbero tempo di porsi in salvo, retrocedendo precipitosamente; ma Agnese, o inconsapevole del pericolo o disperatamente audace, rimasta immobile al posto, cadde travolta nel terrapieno sfranato. Le scheggie, i frantumi ed il terriccio sollevato in aria dalla scossa, ripiombarono su lei, e la sepellirono nelle ruine.

Alle strida degli assediati rispose un grido selvaggio del popolo vittorioso. I Pisani si precipitarono contro la breccia, e s'apparecchiavano a salirla. Il cadavere dell'infelice Agnese avrebbe servito di scaglione ai furibondi popolani, che anelavano a lanciarsi nella rôcca, per passare a fil di spada quanti vi erano rimasti.

Bocicaldo Le Meingre, il quale aveva assecondato il procedere dei Pisani, affinchè il Visconti ridutto agli estremi s'arrendesse ai patti stipulati da lui, pensò allora di far prevalere un sentimento di umanità, e d'impedire il completo trionfo dei rivoltosi. — Perocchè se questi avessero occupata la rocca, ogni speranza di compromesso tra i Visconti ed i Fiorentini sarebbe svanita. In questo caso, egli perdeva l'opportunità d'acquistare una vantaggiosa influenza in Italia; ed era costretto a rinunciare al pingue lucro dell'arbitramento.

Gli araldi, che si trovavano al campo, per suo ordine fecero squillare le trombe; ed arrestati i vincitori, publicarono in nome del governatore una sospensione d'armi. I Pisani, che avevano disprezzato la voce di un principe italiano, ascoltarono docilmente il comando dell'intruso intermediario.

Memore delle ultime parole della madre, Gabriello avrebbe dovuto respingere ogni proposta. Non gli rimaneva più che a lanciarsi nella ruina ed a morire accanto a lei. Il ferro fratricida gli sarebbe stato meno fatale che non le lusinghe di un falso amico. Sventuratamente non ebbe il coraggio o la previdenza della scelta. Sgomentato dall'impeto dei vincitori, commosso dalla inevitabile sorte de' suoi compagni, colpito nel più profondo dell'anima dall'inaspettata morte di sua madre, accolse la proposta di Le Meingre, e gradì la tregua. Scelse di sopravivere alla sconfitta per rendere i dovuti onori alla spoglia materna. Forse sperò di potere più tardi vendicarla.

Gli araldi interposero fra le parti belligeranti un contratto già sottoscritto dai Fiorentini, in virtù del quale la città e la rocca di Pisa venivano da Gabriello Visconti cedute a Firenze dietro un indenizzo di 206 mila fiorini d'oro. La somma doveva esser sborsata in varie quote, ad epoche fisse; il governatore Le Meingre, ricevendo in deposito il valore convenuto, si faceva garante della esatta osservanza dei patti presso le due parti contraenti.

Gabriello fece diseppellire dai ruderi il cadavere di Agnese. — Se il dolore e la pietà figliale non l'avessero istintivamente condutto innanzi alla sua spoglia, invano avrebbe egli tentato di scoprire le angeliche sembianze di sua madre in quella salma pesta e deforme. Le vennero prestati gli estremi onori con splendidi funerali. Vuolsi che, appena cessato il furore della battaglia, gli stessi nemici le tributassero uno schietto e profondo rimpianto. Gabriello partì pochi giorni dopo, seguito da pochissimi suoi fidi, fra i quali non v'era più Canziana. — La buona donna non potè sopravivere alla disgrazia della sua padrona: infermò, e la seguì poco dopo nella tomba.

CLIX.

Gabriello Visconti si ritirò a Sarzana, unica terra del suo feudo, che gli fosse rimasta fedele. Ma Le Meingre non gli consentì di godervi quella calma, di cui egli aveva bisogno per ristorare le forze, e riaver il coraggio alla sognata riscossa.[85]

Circondato da mille lusinghe visibilmente menzognere, già travedeva sul volto de' suoi vassalli il contagio della seduzione straniera. Nel 1406 abbandonò Sarzana, lasciandovi un governatore, e si diresse alla corte di Gianmaria Visconti, nella speranza di trovare presso il fratello quell'appoggio, ch'egli era deciso di non più accettare dall'amico infido. — Appena fu lontano da Sarzana, i cittadini, istigati da chi governava in suo nome, e sedotti dalle libertà promesse dall'astuto Bocicaldo, si ribellarono contro la dominazione viscontea, e dichiararono di voler fare sorte comune coi genovesi.

Irritato dal procedere sleale de' suoi vassalli, e più ancora dagli scelerati intrighi del governatore di Genova, che mirava a privarlo di tutto, s'unì ai ghibellini nell'intento di porre un freno alle ambiziose mire dei francesi. Battuto una volta dai guelfi, capitanati da Jacopo dal Verme, presso Binasco l'anno 1407, trovò un ricovero ed una prigione nel castello di Porta Giovia in Milano. L'anno seguente cambiò il carcere nel bando; errò qualche tempo per le città del Piemonte; e alla fine risolvette di recarsi a Genova per chiedere al governatore la somma di ottanta mila fiorini d'oro, che gli erano ancora dovuti per la cessione di Pisa. — Ma Le Meingre, mallevadore del contratto e depositario della somma, trovò miglior partito di sbarazzarsi del creditore, accusandolo di essere venuto a Genova per congiurare a danno dei guelfi, e per rimettere la città in potere dei ghibellini. Gabriello fu quindi imprigionato; la stranissima accusa venne autenticata dalla tortura: e il reo, posto ai tormenti, confessò l'imaginaria conspirazione e la sua complicità; onde fu dannato a morte e decapitato, il 15 dicembre 1408. Dopo ciò, Le Meingre ritenne la somma come legale confisca dei beni di un fellone.

Dio era stato pietoso chiamando a sè la povera Agnese prima di quell'infaustissimo giorno.

FINE

NOTE:

1. E cotal *pianta di Republica* è fondata sopra i due *principj eterni di questo mondo di nazioni*, che sono la *mente e il corpo* degli uomini, che le compongono. Imperocchè constando gli uomini di queste due parti, delle quali *una è nobile*, che come tale dovrebbe *comandare*, e l'altra *vile*, la quale dovrebbe *servire*, e per la corrotta natura umana senza l'ajuto della filosofia, la quale non può soccorrere che a pochissimi, non potendo l'universale degli uomini far sì che privatamente la mente di ciascheduno comandasse e non servisse al suo corpo, la *divina Provvedenza* ordinò talmente le cose umane con quest'*ordine eterno* che nelle *Republiche* quelli che usano *la mente vi comandino*, e quelli che usano il *corpo* vi ubbidiscano. (G. B. Vico *Scienza nuova* pag. 25.)

2. Sopratutt'altro per le *fontane perenni* fu detto da' politici, che la comunanza dell'acqua fosse stata l'occasione, che da presso vi si unissero le famiglie. (Vico *Scienza nuova* lib. 2, pag. 199.)

3. Romagnosi.

4. Vico, *Scienza nuova* lib. I, pag. 62.

5. Secondo il Tiraboschi Carlo Magno, quasi compiutamente illetterato, approfittò del suo soggiorno in Italia per apprendere i rudimenti della lingua latina dal grammatico Pietro da Pisa. (Storia della lett. ital. voi. III. c. I.)

6. Il regno dei Longobardi era stato diviso fra 35 governatori che pigliavano il nome di duchi; ciascuno dei quali era tiranno assoluto della provincia a lui commessa.

7. Tacit Ann. lib. 1.

8. ... *ciascun nobile poteva occidere un plebeo con la pena de libre septe et soldo uno de terzolij per la qual cosa molti erano morti.* Corio Hist. di Mil.

9. C. Cattaneo. *Introd. alle notizie* ecc. pag. LVI.