Cuatro ejemplos de factorización $PA = LU$

Ejemplo 1: Una sola permutación de filas al comienzo

Encontrar una factorización de la forma $PA = LU$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix},$$

utilizando pivoteo parcial.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\,+} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Es entonces

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz L es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para matriz P, la matriz de permutación, observamos que cambiamos la fila 1 y 3, es decir

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Se comprueba entonces que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 7 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 2: Dos permutaciones de filas

Encontrar una factorización de la forma $PA = LU$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix},$$

utilizando pivoteo parcial.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\,+} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\,+} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Es entonces

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz L antes del segundo intercambio de filas era

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero al intercambiar las filas 2 y 3 la matriz L cambia a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Después de este intercambio queda por agregar la última operación entre filas, y L es finalmente

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Para P, la matriz de permutación, observamos que cambiamos primero la fila 1 y 3, y luego la fila 2 y 3, es decir

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se comprueba entonces que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3: Dos permutaciones de filas

Encontrar una factorización de la forma $PA = LU$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & 5 \\ 4 & -13 & 3 \end{bmatrix},$$

utilizando pivoteo parcial.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & 5 \\ 4 & -13 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -8 & 11 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -13 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}\,+,\ \frac{1}{2}\,+} \begin{bmatrix} -8 & 11 & 5 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow.$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 11 & 5 \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{10}\,+} \begin{bmatrix} -8 & 11 & 5 \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}.$$

Es entonces

$$U = \begin{bmatrix} -8 & 11 & 5 \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

La matriz L antes del segundo intercambio de filas era

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pero al intercambiar las filas 2 y 3 la matriz L cambia a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Después de este intercambio queda por agregar la última operación entre filas, y L es finalmente

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

Para P, la matriz de permutación, observamos que cambiamos primero la fila 1 y 2, y luego la fila 2 y 3, es decir

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se comprueba entonces que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -8 & 11 & 5 \\ 4 & -13 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 11 & 5 \\ 0 & -\frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & \frac{14}{5} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 4: Tres permutaciones de filas

Encontrar una factorización de la forma $PA = LU$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix},$$

utilizando pivoteo parcial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & -4 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \quad -\frac{1}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{19}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{23}{5} & \frac{33}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{23}{5} & \frac{33}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{8}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{19}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{19}{5} \end{bmatrix}
\xrightarrow{-\frac{2}{23},\ -\frac{19}{23}}
\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{23}{5} & \frac{33}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{50}{23} & -\frac{35}{23} \\ 0 & 0 & -\frac{130}{23} & -\frac{114}{23} \end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{23}{5} & \frac{33}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{130}{23} & -\frac{114}{23} \\ 0 & 0 & -\frac{50}{23} & -\frac{35}{23} \end{bmatrix}
\xrightarrow{-\frac{5}{13}}
$$

$$
\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{23}{5} & \frac{33}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{130}{23} & -\frac{114}{23} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{13} \end{bmatrix}.
$$

Es entonces

$$
U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{23}{5} & \frac{33}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{130}{23} & -\frac{114}{23} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{13} \end{bmatrix}
$$

La matriz L antes del segundo intercambio de filas era

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Al cambiar las filas 2 y 3, resulta

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Con las nuevas operaciones elementales, antes del nuevo cambio de filas resulta

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{23} & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{19}{23} & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

La matriz vuelve a cambiar por la permutación de las filas 3 y 4

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{19}{23} & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{23} & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Finalmente, L resulta

$$
L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{19}{23} & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{23} & \frac{5}{23} & 1 \end{bmatrix}
$$

Para la matriz P, observamos

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Se comprueba entonces que

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&0&-4\\5&1&1&-1\\3&1&-1&-2\\-3&4&6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-\frac{3}{5}&1&0&0\\\frac{1}{5}&\frac{19}{23}&1&0\\\frac{3}{5}&\frac{2}{23}&\frac{5}{23}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1&1&-1\\0&\frac{23}{5}&\frac{33}{5}&\frac{7}{5}\\0&0&-\frac{130}{23}&-\frac{114}{23}\\0&0&0&\frac{5}{13}\end{bmatrix}.$$