

PROBLEMAS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

B.M. Budak
A.A. Samarski
A.N. Tíjonov

MIR



11

Б. М. Будак
А. А. Самарский
А. Н. Тихонов

**Сборник задач
по математической
физике**

Издательство «Наука»
Москва

B.M.Budak
A.A.Samarski
A.N.Tijonov

PROBLEMAS DE LA FÍSICA MATEMÁTICA

Tomo I

Editorial Mir
Moscú

Traducido del ruso por
José Ramil Alvarez,
candidato a doctor en
ciencias físico-matemáticas

На испанском языке

Impreso en la URSS

© Издательство «Наука», 1980

© Traducción al español. Editorial Mir. 1984.

ÍNDICE

Pág.*

Prólogo

Capítulo I. Clasificación y reducción a la forma canónica de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

| | | |
|------|---|--------|
| § 1. | Ecuación para la función de dos variables independientes $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y)$ | 9, 91 |
| | 1. Ecuación con coeficientes variables (9, 91). 2. Ecuación con coeficientes constantes (10, 96). | |
| § 2. | Ecuación con coeficientes constantes para una función de n variables independientes | 10, 96 |

Capítulo II. Ecuaciones de tipo hiperbólico

| | | |
|------|---|---------|
| § 1. | Problemas físicos que se reducen a ecuaciones de tipo hiperbólico; planteamiento de los problemas de contorno | 11, 99 |
| | 1. Vibraciones libres en un medio sin resistencia; ecuaciones con coeficientes constantes (12, 99). 2. Vibraciones forzadas y vibraciones en un medio con resistencia; ecuaciones con coeficientes constantes (15, 112). 3. Problemas sobre las vibraciones que se reducen a ecuaciones con coeficientes variables continuos (16, 114). 4. Problemas que se reducen a ecuaciones con coeficientes discontinuos y problemas afines (medios homogéneos a trozos, factores concentrados) (17, 116). 5. Semejanza de los problemas de contorno (21, 126). | |
| § 2. | Método de propagación de las ondas (método de d'Alembert) | 22, 132 |
| | 1. Problemas para una cuerda infinita (23, 132). 2. Problemas para una semirrecta (25, 140). 3. Problemas para una recta infinita compuesta de dos semirrectas homogéneas. Factores concentrados (29, 154). 4. Problemas para un segmento finito (30, 158). | |
| § 3. | Método de separación de las variables | 32, 170 |
| | 1. Vibraciones libres en un medio sin resistencia (32, 170). 2. Vibraciones libres en un medio con resistencia (35, 182). 3. Vibraciones forzadas bajo la acción de las fuerzas dis- | |

*) Los números que van detrás de la coma se refieren a las páginas de las soluciones y respuestas.

tribuidas y concentradas en un medio sin resistencia y en un medio con resistencia (35, 186). 4. Vibraciones en el caso de heterogeneidad del medio y otras condiciones que conducen a ecuaciones con coeficientes variables; consideración de las fuerzas y masas concentradas (39, 213).

- § 4. Método de representaciones en forma integral 41, 219
 1. Método de la integral de Fourier (41, 219). 1*. Paso al intervalo finito mediante el método de reflexión (45, 233). 2. Método de Riemann (46, 234).

Capítulo III. Ecuaciones de tipo parabólico

- § 1. Problemas físicos que llevan a ecuaciones de tipo parabólico; planteamiento de los problemas de contorno 48, 239
 1. Medios homogéneos; ecuaciones con los coeficientes constantes (49, 240). 2. Medios heterogéneos, factores concentrados; ecuaciones con coeficientes variables y condiciones de conjugación (50, 245). 3. Semejanza de problemas de contorno (52, 247).
- § 2. Método de separación de variables 52, 251
 1. Medios homogéneos isotrópicos. Ecuaciones con los coeficientes constantes (52, 251). a) Problemas de la conducción calorífica con condiciones de frontera y términos independientes constantes (53, 251). b) Problemas de conducción calorífica con condiciones de frontera variables y los términos independientes vinculados a x y t (55, 261). c) Problemas de difusión (56, 266). d) Problemas de electrodinámica (57, 267). 2. Medios heterogéneos y factores concentrados. Ecuaciones con coeficientes variables y condiciones de conjugación (57, 269).
- § 3. Método de representaciones integrales y funciones de manantial 58, 272
 1. Medios isotrópicos homogéneos. Aplicación de la transformación integral de Fourier a los problemas sobre la recta y la semirrecta (58, 272). 2. Medios isotrópicos homogéneos. Construcción de las funciones de influencia de manantiales concentrados (60, 276). a) Recta no acotada (60, 276), b) Semirrecta (61, 279). c) Segmento finito (66, 287). 3. Medios heterogéneos y factores concentrados; ecuaciones con coeficientes constantes a trozos y condiciones de conjugación (67, 295).

Capítulo IV. Ecuaciones de tipo elíptico

- § 1. Problemas físicos que se reducen a ecuaciones de tipo elíptico y planteamiento de los problemas de contorno 69, 300
 1. Problemas de contorno para las ecuaciones de Laplace y Poisson en un medio homogéneo (69, 300). 2. Problemas de contorno para la ecuación de Laplace en medios heterogéneos (70, 306).

| | | |
|------|--|---------|
| § 2. | Problemas simples para las ecuaciones de Laplace y Poisson 1. Problemas de contorno para la ecuación de Laplace (71, 310). 2. Problemas de contorno para la ecuación de Poisson (74, 316) | 71, 310 |
| § 3. | Función de manantial 1. Función de manantial para regiones con fronteras planas (75, 318). 2. Funciones de manantial para regiones con fronteras esféricicas (circulares) y planas (76, 329). 3. Función de manantial en medios heterogéneos (77, 337) | 74, 317 |
| § 4. | Método de separación de variables 1. Problemas de contorno para el círculo, el anillo y el sector (78, 343), 2. Problemas de contorno para la franja, el rectángulo, la capa plana y el paralelepípedo (82, 360). 3. Problemas que exigen la utilización de las funciones cilíndricas (83, 372). 4. Problemas que exigen la utilización de las funciones esféricas y cilíndricas (85, 387). | 78, 343 |
| § 5. | Potenciales y sus aplicaciones | 88, 401 |

PRÓLOGO

En la actualidad es muy importante el papel de los métodos matemáticos en las diferentes ciencias de la naturaleza y ante todo en la física. Este manual se basa en la experiencia de las clases prácticas sobre ecuaciones de la física matemática en la Universidad estatal «Lomonosov» de Moscú. Contiene más de 800 problemas de diferente grado de dificultad y puede ser de provecho no sólo a los estudiantes y postgraduados de la especialidad de la física matemática y las matemáticas aplicadas, sino que también a ingenieros e investigadores científicos que en sus tareas construyen y analizan los modelos matemáticos de ciertos procesos físicos.

Los enunciados de los problemas ocupan menos de la cuarta parte del libro, el resto se dedica a formular respuestas y comentarios, en forma detallada, o de indicaciones acerca de como obtener las respuestas. Los problemas análogos a los examinados anteriormente sólo se les da las respuestas. Se presta gran atención a los problemas acerca de la deducción de las ecuaciones y de las condiciones de frontera. La experiencia demuestra que estas cuestiones relacionadas con la construcción de los modelos matemáticos del fenómeno examinado ofrecen comúnmente las mayores dificultades. Los capítulos se han dividido en párrafos según los métodos de las soluciones. Todo esto permite a los lectores mediante el estudio del material por cuenta propia alcanzar hábitos técnicos en la resolución de los problemas de las principales ramas de la física matemática.

Este libro no pretende abarcar todos los métodos que se utilizan en la física matemática. En él, por ejemplo, no se examinan el método operacional, los métodos de variaciones y de diferencias, la aplicación de las ecuaciones integrales.

Entre la literatura citada frecuentemente hacemos mención al libro A. N. Tijonov y A. A. Samarski «Ecuaciones de la física matemática»* dado que las notaciones y la secuencia de presentación del material en el presente manual corresponden de un modo bastante aproximado a los de esa obra.

*) Existe traducción al español: Ed. «Mir», Moscú, Segunda edición, 1980.

PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS

Capítulo I

CLASIFICACIÓN Y REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

En este capítulo se plantean los problemas sobre la determinación del tipo y la reducción a la forma canónica para ecuaciones de dos y más variables independientes.

En el caso de dos variables independientes se estudian las ecuaciones con los coeficientes constantes y variables; en el caso de tres y más variables independientes, solo las ecuaciones con los coeficientes constantes ya que para tres y más variables independientes la ecuación con los coeficientes variables, hablando en general, no puede ser reducida a la forma canónica mediante la transformación general para todo el campo en que la ecuación pertenece al tipo dado. En el § 1 se dan los problemas para la ecuación respecto a la función de dos variables y en el § 2, para tres y más variables independientes.

§ 1. Ecuación para la función de dos variables independientes

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y)$$

1. Ecuaciones con coeficientes variables

1. Hallar los campos en que la ecuación

$$(l+x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$$

es hiperbólica, elíptica y parabólica y estudiar su dependencia con respecto a l , donde l es un parámetro numérico.

En los problemas 2—20 reducir la ecuación a la forma canónica en cada uno de los campos en que su tipo se conserva.

2. $u_{xx} + xu_{yy} = 0$.

3. $u_{xx} + yu_{yy} = 0$.

4. $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$.

5. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$.

6. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$.

7. $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

8. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$
9. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign} y) u_{yy} = 0.$
10. $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} \operatorname{sign} x = 0.$
11. $y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0.$
12. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0.$
13. $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} = 0.$
14. $y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0.$
15. $y^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} = 0.$
16. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0.$
17. $4y^2 u_{xx} - e^2 u_{yy} - 4y^2 u_x = 0.$
18. $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4 u = 0.$
19. $(1 + x^2) u_{xx} + (1 + y^2) u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$
20. $u_{xx} \operatorname{sen}^2 x - 2yu_{xy} \operatorname{sen} x + y^2 u_{yy} = 0.$

2. Ecuaciones con coeficientes constantes

Mediante la sustitución de la función buscada $u(x, y) = e^{ax+by}v(x, y)$ y la reducción a la forma canónica, simplificar las siguientes ecuaciones con coeficientes constantes.

21. $au_{xx} + 4au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0.$
22. $2au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + 2bu_x + 2cu_y + u = 0.$
23. $au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0.$

§ 2. Ecuación con coeficientes constantes para una función de n variables independientes

$$\sum_{i, h=1}^n a_{ih} u_{x_i x_h} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = f(x_1, \dots, x_n).$$

Reducir a la forma canónica las ecuaciones 24—28.

24. $u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y = 0.$
25. $u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{xz} + 4u_{yy} + u_{zz} = 0.$
26. $u_{xx} + u_{tt} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_{tx} + u_{xz} + u_{ty} - 2u_{yz} = 0.$
27. $u_{xy} + u_{xz} - u_{tx} - u_{yz} + u_{ty} + u_{tz} = 0.$

$$28. \text{ a) } \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + \sum_{i < h}^n u_{x_i x_h} = 0. \text{ b) } \sum_{i < h}^n u_{x_i x_h} = 0.$$

29. Eliminar los términos con las derivadas menores en la ecuación

$$\sum_{i=1}^n a_i u_{x_i x_i} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cv = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad a_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Capítulo II

ECUACIONES DE TIPO HIPERBÓLICO

Los problemas acerca de las vibraciones de medios continuos (cuerda, barra *), membrana, gas, etc.) y acerca de las vibraciones electromagnéticas conducen a ecuaciones de tipo hiperbólico.

En el presente capítulo se estudian el planteamiento y la resolución de los problemas de contorno para ecuaciones de tipo hiperbólico (véase la llamada) cuando los procesos físicos a investigar pueden caracterizarse por las funciones de los variables independientes: por una coordenada de espacio y otra de tiempo.

Las ecuaciones de tipo hiperbólico para las funciones con mayor número de variables independientes se exponen en el capítulo VI.

§ 1. Problemas físicos que se reducen a ecuaciones de tipo hiperbólico; planteamiento de los problemas de contorno

En el primer grupo de problemas de este párrafo se suponen la continuidad y homogeneidad de los medios, así como el carácter continuo de distribución de las fuerzas.

En el segundo grupo de problemas se admiten la heterogeneidad de los medios y la discontinuidad tanto de las características de los medios como de la densidad de distribución de las fuerzas.

El tercer grupo de los problemas está dedicado al establecimiento de semejanza entre distintos procesos de oscilación.

*) Las vibraciones transversales de una barra elástica conducen a una ecuación parabólica de cuarto orden mientras que las longitudinales conducen a una ecuación hiperbólica de segundo orden. Sin embargo, los problemas de contorno para las vibraciones transversales de una barra son muy similares a los problemas de contorno para las vibraciones y por eso se estudian en el presente capítulo.

Pueden mencionarse también varios problemas físicos importantes que se reducen a unas ecuaciones de tipo hiperbólico para funciones que no dependen del tiempo; por ejemplo, en el caso de un cuerpo contorneado estacionariamente por un flujo supersónico de gas, para el potencial de las velocidades se obtiene una ecuación de tipo hiperbólico.

Plantear un problema de contorno que corresponda a un problema físico significa ante todo elegir una función que caracteriza el proceso físico *) y después:

- 1) deducir la ecuación diferencial para dicha función;
- 2) deducir para ésta las condiciones de contorno;
- 3) enunciar las condiciones iniciales **).

1. Vibraciones libres en un medio sin resistencia; ecuaciones con coeficientes constantes

Al estudiar las vibraciones pequeñas en medios homogéneos ***), llegamos a ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

1. *Vibraciones longitudinales de una barra.* Una barra elástica rectilínea pierde el estado de reposo a causa de la comunicación de pequeños desplazamientos y velocidades longitudinales a sus secciones transversales en el momento $t = 0$. Suponiendo que durante todo el tiempo las secciones transversales de la barra permanecen planas, plantear el problema de contorno para determinar los desplazamientos de las secciones transversales de la barra cuando $t > 0$. Considerar los casos cuando los extremos de la barra:

- a) están fijos rígidamente,
- a') se mueven en dirección longitudinal según la ley dada,
- b) están libres,
- c) están fijos elásticamente, es decir, cada uno de los extremos experimenta por el lado del empotramiento una fuerza longitudinal proporcional al desplazamiento y orientada en dirección opuesta al desplazamiento.

2. *Vibraciones pequeñas de una cuerda ****).* Una cuerda está estirada con una fuerza T_0 y se encuentra en la posición rectilínea de equilibrio; sus extremos están fijos inmóvilmente. En el momento $t = 0$ a los puntos de la cuerda se les comunican desviaciones y velocidades iniciales.

Plantear el problema de contorno para determinar las pequeñas desviaciones de los puntos de la cuerda para $t > 0$.

3. *Vibraciones torsionales de un cilindro elástico.* Un cilindro elástico y homogéneo pierde el estado de reposo a causa de que en el

*) Como regla indicaremos esta función en las condiciones del problema.

**) La existencia de condiciones iniciales es característica para los principales problemas de contorno de tipos hiperbólico y parabólico. Respecto a las nociones y definiciones relacionadas con el planteamiento de problemas de contorno para las ecuaciones de tipo hiperbólico véase [7], págs. 47–58 y págs. 139–141. (La bibliografía viene en el segundo tomo.)

***) Por ejemplo, en las barras homogéneas y en las cuerdas de sección transversal constante.

****) La deducción de la ecuación de las pequeñas vibraciones transversales y longitudinales está detalladamente realizada en [7], págs. 30–36. En el problema propuesto se debe deducir la ecuación de vibraciones de una cuerda después del desplazamiento de sus puntos en direcciones arbitrarias.

momento de tiempo $t = 0$ a sus secciones transversales se les comunican pequeños giros en sus planos respecto al eje del cilindro.

Plantear el problema de contorno para determinar los ángulos de giro de las secciones transversales del cilindro para $t > 0$; estudiar los casos cuando sus extremos están libres, fijos rígidamente y fijos elásticamente.

4. *Vibraciones longitudinales del gas en un tubo.* Un gas ideal encerrado en un tubo cilíndrico realiza pequeñas vibraciones longitudinales; las secciones transversales planas, que se componen de partículas de gas, no se deforman y todas las partículas del gas se mueven paralelamente al eje del cilindro.

Plantear los problemas de contorno para determinar: 1) la densidad ρ , 2) la presión p , 3) el potencial φ de las velocidades de las partículas del gas, 4) la velocidad v y 5) el desplazamiento u de las partículas del gas en los casos, cuando los extremos del tubo están:

- a) cerrados con unas membranas impenetrables y rígidas,
- b) abiertos,

c) cerrados con unos pistones de una masa despreciablemente pequeña, colocados sobre unos muelles con coeficiente de rigidez v y que se deslizan dentro del tubo sin rozamiento.

5. *Problema de Zhukovski sobre el golpe hidráulico.* La sección de entrada de un tubo cilíndrico recto de longitud l está conectada con un tanque de líquido de capacidad infinita. A lo largo de todo el tubo fluye un líquido con velocidad constante v_0 . En el momento inicial de tiempo $t = 0$ la sección de salida del tubo $x = l$ se cierra instantáneamente.

Plantear el problema de contorno para determinar la velocidad de las partículas del líquido y la presión del líquido en el tubo.

6. En el extremo $x = l$ del tubo del problema anterior está una campana de aire moderativa (fig. 1) y un agregado A el cual regula el gasto del líquido $Q(t)$ que sale de la campana, de modo que $Q(t)$ es una función dada del tiempo.

Sean Ω_0 y P_0 el volumen medio y la presión media de aire en la campana; considerando que el líquido es incompresible y las paredes de la campana no se deforman, suponiendo también que el proceso de compresión y enrarecimiento del aire en la campana es isotérmico y que la variación del volumen del aire en la campana es pequeña en comparación con el volumen medio Ω_0 , deducir la condición de frontera para el extremo $x = l$.

7. *Ondas de un líquido pesado en un canal.* En el canal horizontal de poca profundidad, de longitud l con sección transversal rectangular

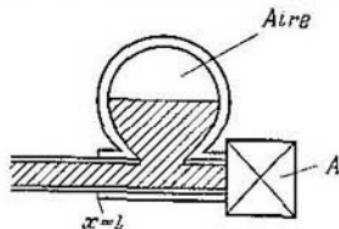


Fig. 1

hay agua, cuya profundidad, medida de la superficie libre en reposo, es igual a h . Los extremos del canal están cerrados con unas membranas rígidas planas, perpendiculares a sus generatrices.

Dirijamos el eje x a lo largo del canal. Como resultado de pequeñas perturbaciones de la superficie libre, en el canal puede surgir un

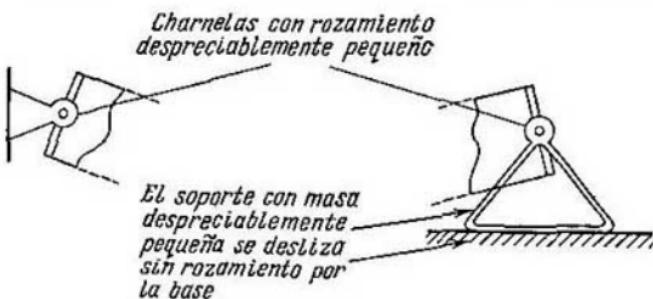


Fig. 2

movimiento ondulatorio del agua en el cual las secciones transversales, que se componen de partículas líquidas, como integras, recibirán un desplazamiento $\xi(x, t)$ a lo largo del eje x y su altura obtendrá

una desviación $\eta(x, t)$ respecto a la profundidad h de la superficie libre en reposo del agua.

Supongamos que están dados los valores iniciales de $\xi(x, t)$ y $\eta(x, t)$ en el momento $t = 0$.

Plantear el problema de contorno para determinar $\xi(x, t)$ y $\eta(x, t)$ para $t > 0$.

8. Vibraciones transversales de una barra. A los puntos de una barra rectangular homogénea y elástica con los extremos articuladamente fijos (fig. 2) en el momento inicial de tiempo $t = 0$ se les comunican pequeñas desviaciones transversales y velocidades paralelas a la superficie de simetría vertical longitudinal de la barra.

Plantear el problema de contorno para determinar las desviaciones transversales de los puntos de la barra para $t > 0$, suponiendo que la barra realiza unas oscilaciones transversales pequeñas.

9. Estudiar el problema 8 para el caso en que un extremo de la barra está fijo rígidamente y el otro, libre (fig. 3).

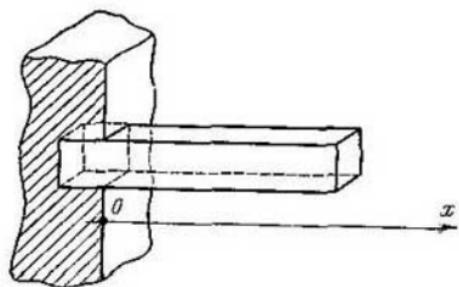


Fig. 3

10. Estudiar el problema 8, suponiendo que la barra está sobre una base elástica, cuya masa puede despreciarse al examinar las vibraciones transversales de la barra. El coeficiente la elasticidad de la base, en la cual está fijada la barra, es igual a k , es decir, la fuerza elástica (transversal para la barra) que actúa por parte de la base elástica en una unidad de longitud de la barra en su punto dado x , es igual a $-ku(x, t)$.

2. Vibraciones forzadas y vibraciones en un medio con resistencia; ecuaciones con coeficientes constantes

11. A una cuerda, cuyos extremos están fijos inmóvilmente, empezando desde el momento $t = 0$, está aplicada una fuerza transversal continuamente distribuida, cuya densidad lineal es igual a $F(x, t)$.

Plantear el problema de contorno para determinar las desviaciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda cuando $t > 0$.

12. Por una cuerda $0 \leq x \leq l$ con los extremos fijos inmóvilmente y con resistencia eléctrica despreciablemente pequeña, pasa una corriente alterna de intensidad $I = I(t)$ para $t > 0$, además, la cuerda está en un campo magnético continuo de intensidad H , perpendicular a la cuerda. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones transversales de la cuerda provocadas por las fuerzas ponderomotoras, aplicadas a la cuerda *).

13. Empezando desde el momento $t = 0$, un extremo de la barra homogénea elástica y rectilínea realiza vibraciones longitudinales según una ley dada y al otro extremo está aplicada una fuerza $\Phi = \Phi(t)$ dirigida a lo largo del eje de la barra. En el momento de tiempo $t = 0$ las secciones transversales estaban inmóviles y se hallaban en posición sin desviación. Plantear el problema de contorno para determinar las pequeñas desviaciones longitudinales $u(x, t)$ de los puntos de la barra para $t > 0$.

14. El extremo superior de una barra pesada, homogénea y elástica, colgada verticalmente, está fijado en forma rígida al techo de un ascensor que cae libremente, una vez alcanzada la velocidad v_0 , el ascensor se detiene instantáneamente. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones longitudinales de dicha barra.

15. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones transversales pequeñas de una cuerda en un medio con resistencia, proporcional a la velocidad, suponiendo que los extremos de cuerda están fijos inmóvilmente.

16. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones transversales pequeñas de una barra elástica homogénea y rectangular en un medio con resistencia, proporcional a la velocidad, cuando

*) Véase [17], pág. 204

existe una fuerza impulsante transversal continuamente distribuida; suponer que los extremos de la barra están fijos rígidamente.

17. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones transversales pequeñas de una barra elástica, homogénea y rectangular, uno de cuyos extremos está fijo rígidamente y al otro se le aplica una fuerza transversal («cortante») que varía con el tiempo según una ley dada.

18. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones longitudinales pequeñas de una barra elástica homogénea que se halla en un medio sin resistencia, si uno de sus extremos está fijo rígidamente y el otro experimenta una resistencia proporcional a la velocidad.

19. *Oscilaciones eléctricas en cables.* Plantear el problema de contorno para determinar la intensidad y la tensión de una corriente alterna que pasa a lo largo de un cable fino con resistencia óhmica R , capacidad C , autoinducción L y fuga G *) distribuidas continuamente en su longitud, poniendo uno de sus extremos a tierra y aplicando al otro una fuerza electromotriz $E(t)$, siendo la corriente inicial $i(x, 0) = f(x)$ y la tensión inicial $v(x, 0) = F(x)$.

3. Problemas sobre las vibraciones que se reducen a ecuaciones con coeficientes variables continuos

Si el medio vibrante es heterogéneo y, además, las funciones que caracterizan sus propiedades (densidad de masa, módulo de elasticidad, etc.) son funciones continuas del punto, entonces, como se sabe, la ecuación diferencial para la función que describe las vibraciones, tendrá coeficientes variables continuos. Pero pueden darse otros casos que se reducen a ecuaciones con coeficientes variables continuos.

20. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones longitudinales de una barra elástica $0 \leq x \leq l$ con sección transversal variable $S(x)$, si los extremos de la barra están fijos inmóvilmente, la densidad de masa es igual a $\rho(x)$, el módulo de elasticidad es igual a $E(x)$ y las vibraciones son el resultado de unos desplazamientos y velocidades longitudinales iniciales. Considerar la deformación de las secciones transversales despreciablemente pequeña.

21. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones longitudinales de una barra elástica que tiene forma de cono truncado, si los extremos de la barra fijos inmóvilmente y la barra pierde el estado de reposo al comunicar desviaciones y velocidades longitudinales iniciales a sus puntos en el momento $t = 0$. La longitud de la barra es igual a l ; el radio de la base, $R > r$, el material de la barra es homogéneo.

*) Los valores R , C , L , G están calculados para la unidad de longitud; la homogeneidad del cable significa que R , C , L , G no dependen del punto del cable en que los examinamos.

Prescindir de la deformación de las secciones transversales.

22. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones transversales pequeñas de una barra elástica y homogénea, en forma de una cuña de sección transversal rectangular si su tope mayor está fijo rígidamente y el menor, libre (fig. 4). El módulo de elasticidad de la barra es igual a E , la densidad de masa es igual a ρ .

Prescindir de la deformación de las secciones transversales.

23. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones transversales de una cuerda pesada respecto a la posición vertical de equilibrio, si su extremo superior está fijo rígidamente y el inferior, libre.

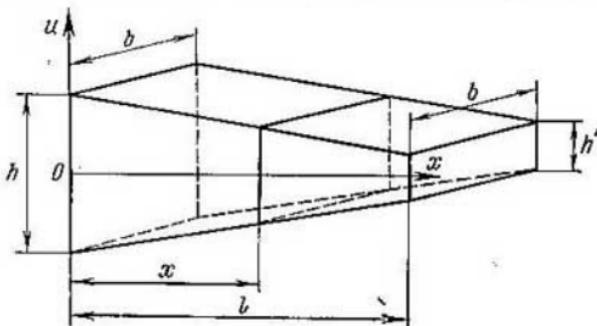


Fig. 4

24. Estudiar el problema 23 suponiendo que la cuerda gira alrededor de la posición vertical de equilibrio con una velocidad angular $\omega = \text{const.}$

25. Una cuerda imponderable, al girar alrededor del eje vertical con una velocidad angular constante, se halla en el plano horizontal, con la particularidad de que un extremo de la cuerda está sujeto a cierto punto del eje y el otro, libre. En el momento inicial de tiempo $t = 0$ a los puntos de la cuerda se les comunican unas desviaciones y velocidades pequeñas en dirección de las normales a dicho plano.

Plantear el problema de contorno para determinar las desviaciones de los puntos de la cuerda respecto al plano del movimiento equilibrado.

4. Problemas que se reducen a ecuaciones con coeficientes discontinuos y problemas afines (medios homogéneos a trozos, factores concentrados)

Si la densidad de distribución de la masa de un cuerpo elástico que vibra o la densidad de la distribución de las fuerzas aplicadas a él bruscamente varía en los entornos de ciertos puntos del espacio, frecuentemente resulta racional considerar que en estos puntos existe

discontinuidad de estas densidades y, en particular, pasar a las masas o fuerzas concentradas, si en los entornos de los puntos mencionados la densidad de la masa o la densidad de la fuerza es grande. En este caso el enunciar los problemas de contorno se obtienen unas ecuaciones diferenciales con coeficientes discontinuos y término impulsante discontinuo. Si entre los puntos de discontinuidad los coeficientes de la ecuación permanecen constantes, entonces el problema puede ser reducido a unas ecuaciones con coeficientes constantes y condiciones de conjugación en los puntos de discontinuidad. Con esto tenemos en cuenta los puntos interiores del medio; si las masas o las fuerzas concentradas se estudian en los puntos de frontera del medio que vibra, esto debe ser reflejado en las condiciones de frontera *).

26. Dos barras elásticas y homogéneas semiacotadas con iguales secciones transversales están unidas por los topes y forman una barra no acotada **). Supongamos que ρ_1, E_1 son la densidad de la masa y el módulo de elasticidad de una de las barras y ρ_2, E_2 , de la otra.

Plantear el problema de contorno para determinar las desviaciones longitudinales de las secciones transversales de la barra no acotada desde sus posiciones de equilibrio, si en el momento inicial de tiempo a las secciones transversales de la barra se les comunicaron ciertos desplazamientos y velocidades longitudinales.

27. Estudiar el problema 26 en el caso de vibraciones transversales de una barra no acotada compuesta.

28. Estudiar un problema análogo al problema 26, para las vibraciones longitudinales de un gas en un tubo cilíndrico no acotado, si por un lado de cierta sección transversal se encuentra un gas con unas características físicas y por el otro lado, con otras.

29. Plantear el problema de contorno sobre el movimiento ondulatorio del líquido en un canal ***) con la sección transversal rectangular, si las dimensiones de ésta en cierto lugar del canal varían bruscamente, es decir, si el canal está «compuesto» de dos canales semiacotados con diferentes secciones transversales.

30. Estudiar el problema 26, suponiendo que los topes de las barras componentes están unidos no directamente sino que entre ellos se encuentra una junta rígida de espesor despreciablemente pequeño y de masa M .

*) Los problemas con la fuerza concentrada en un extremo de la barra y con la fuerza electromotriz concentrada en un extremo del cable se estudiaron ya en el apartado anterior (véanse los problemas 13, 19).

**) Si uno de los extremos de la barra está alejado del campo de estudio de modo que se puede en éste y durante el período de tiempo de estudio despreciar las perturbaciones que se propagan desde dicho extremo, la barra puede considerarse semiacotada ($x_0 < x < +\infty$ ó $-\infty < x \leq x_0$). En el caso, en que ambos extremos de la barra se encuentran en esta situación, la barra puede considerarse no acotada ($-\infty < x < +\infty$). Eso se puede decir sobre una cuerda, sobre un tubo lleno de gas, etc.

***) Véase el problema 7.

31. Dos barras homogéneas semiacotadas con iguales secciones transversales rectangulares están unidas por los topes de manera que forman una barra no acotada con sección transversal constante y además los topes de las barras semiacotadas están unidos no directamente, sino que entre ellos se encuentra una junta rígida de espesor despreciablemente pequeño y de masa M .

Plantear el problema de contorno sobre vibraciones transversales de esta barra.

32. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones longitudinales de una barra vertical homogénea y elástica, despreciando la acción del campo de la fuerza de gravedad sobre las partículas de la barra, si el extremo superior de la barra está fijo rígidamente y al extremo inferior se le ha ajustado un peso Q y además por posición de equilibrio se toma el estado de la barra sin tensión (por ejemplo, en el momento inicial de tiempo de debajo del peso se quita el soporte y el peso empieza a estirar la barra).

33. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones transversales en el plano vertical de una barra rectangular, elástica y homogénea que se halla en el estado horizontal sin tensión, si uno de los extremos está fijo rígidamente y al otro se le ha ajustado el peso Q , el momento de inercia del cual respecto a la línea media horizontal de tope inmediato es despreciablemente pequeño; además por posición de equilibrio se toma el estado de la barra sin tensión.

34. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones longitudinales de una barra elástica horizontal con el peso Q en un extremo, si el otro extremo de la barra está ajustado rígidamente al eje vertical, el cual gira con la velocidad angular que varía en el transcurso del tiempo según una ley dada. Considerar que las vibraciones de flexión son eliminadas mediante unas directrices especiales entre las cuales resbala la barra durante las oscilaciones longitudinales.

35. Estudiar el problema 34, suponiendo que el eje de rotación está en posición horizontal.

36. Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones torsionales de un cilindro de longitud $2l$ que está compuesto de dos cilindros de longitud l , si en los extremos del cilindro compuesto y entre los topes de los cilindros componentes están las roldanas rígidas (fig. 5) con dados momentos axiales de inercia.

37. Suponer que la cuerda no acotada realiza pequeñas vibraciones transversales como resultado de una fuerza transversal aplicada a partir del momento $t = 0$ en cierto punto dado de la cuerda.

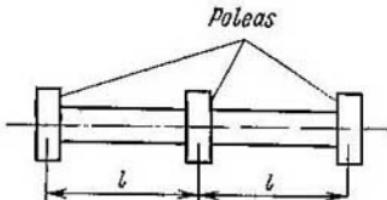


Fig. 5

Plantear el problema de contorno para determinar las desviaciones de los puntos de la cuerda desde su posición de equilibrio. Estudiar también el caso en que el punto de aplicación de la fuerza se desplaza en el transcurso de tiempo a lo largo de la cuerda según una ley dada.

38. Estudiar el problema 37 para vibraciones transversales de una barra.

39. El extremo de un tubo cilíndrico semiacotado, lleno de un gas ideal, está cerrado con un pistón de masa M , el cual resbala en el tubo, y la resistencia de rozamiento es proporcional a la velocidad del pistón con el coeficiente de proporcionalidad igual a k^* . Suponer que el pistón está sobre un muelle cuyo coeficiente de elasticidad es k^{**} y cuyo eje está dirigido según el eje del tubo.

Plantear el problema de contorno sobre las vibraciones longitudinales del gas en el tubo.

40. En cierto punto de una cuerda, no acotada, está ajustada una bola de masa M a la cual se halla sujeto el muelle con el coeficiente de elasticidad k y el eje perpendicular a la posición de equilibrio de la cuerda (véase la fig. 11).

Plantear el problema de contorno sobre vibraciones transversales de la cuerda. Estudiar también el caso en que la bola experimenta una resistencia proporcional a la velocidad con el coeficiente de proporcionalidad k^* .

41. Plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones eléctricas en un cable de resistencia y fuga despreciablemente pequeñas, si los extremos del cable están puestos a tierra: por la resistencia concentrada R_0 y el otro, por la capacidad concentrada C_0 .

42. Estudiar el problema 41, suponiendo que un extremo del cable está puesto a tierra por la autoinducción concentrada $L_0^{(1)}$ y al otro extremo está aplicada una fuerza electromotriz $E(t)$ por la autoinducción $L_0^{(2)}$.

43. Plantear el problema de contornos sobre las oscilaciones eléctricas en un cable, si sus extremos están puestos a tierra por resistencias concentradas.

44. Plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones eléctricas en un cable, si cada uno de sus extremos está puesto a tierra por una resistencia y una autoinducción concentradas y conectadas en serie.

Hallar las relaciones que deben satisfacer los valores de las autoinducciones y de las resistencias concentradas para que tengan lugar las condiciones homogéneas de frontera de tercer género para $v(x, t)$.

45. Plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones eléctricas en un cable no acotado, obtenido al unir dos cables semiacotados por una inducción concentrada C_0 .

Estudiar el problema de contorno para determinar la intensidad de la corriente en el caso cuando no hay fuga.

46. Estudiar el problema 45 para el caso en que los cables semiacotados estén unidos no por la capacidad concentrada sino por una resistencia concentrada R_0 .

47. Plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones eléctricas en un cable, un extremo del cual está puesto a tierra por resistencia R_0 y autoinducción $L^{(1)}$, ambas concentradas y conectadas en paralelo; el otro, por la inducción C_0 y autoinducción $L^{(2)}$, ambas concentradas y conectadas en paralelo.

48. Plantear el problema de contorno sobre las oscilaciones eléctricas en un cable cuyos extremos están cerrados por:

- autoinducción concentrada L_0 ,
- resistencia concentrada R_0 ,
- inducción concentrada C_0 .

5. Semejanza de los problemas de contorno

Sean dados dos problemas de contorno (I) y (II) correspondientes a los fenómenos físicos de igual o diferente naturaleza. Denotaremos por x' , t' , $u'(x', t')$ la coordenada espacial, el tiempo y la función incógnita en un problema y por x'' , t'' , $u''(x'', t'')$ denotaremos los valores correspondientes en el otro. Si la ecuación, las condiciones iniciales y de frontera de ambos problemas tienen una forma igual, respectivamente, entonces los problemas se llaman análogos.

Denotaremos por D_I el campo de los valores (x', t') en el problema (I) y por D_{II} al campo de los valores (x'', t'') en el problema (II). Si existen tales constantes k_x , k_t , k_u , los «coeficientes de semejanza», que

$$u'(x', t') = k_u u''(x'', t'') \quad \text{para } x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'', \quad (I)$$

y además (x', t') recorre D_I cuando (x'', t'') recorre D_{II} , entonces el problema (I) se llama semejante al problema (II) con coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u *).

No es difícil demostrar que si el problema (I) es semejante al problema (II), entonces se puede elegir las unidades de medida x'_0 , t'_0 , u'_0 , x''_0 , t''_0 , u''_0 en los problemas (I) y (II) de tal forma que el paso a las magnitudes adimensionales

$$\xi = \frac{x'}{x'_0}; \quad \tau = \frac{t'}{t'_0}; \quad U = \frac{u'}{u'_0} \quad \text{y} \quad \xi = \frac{x''}{x''_0}, \quad \tau = \frac{t''}{t''_0}, \quad U = \frac{u''}{u''_0}$$

lleva a la completa coincidencia de ambos problemas de contorno, es decir, el campo que recorre (ξ, τ) en ambos problemas resulta-

*) La transformación (I) es afín. (De esta manera, la solución del problema (I) se obtiene de la solución del problema (II) con ayuda de la transformación afín). Se puede considerar una clase más amplia de transformaciones afines que además de los alargamientos y contracciones incluya las traslaciones paralelas, es decir, los cambios de los puntos de referencia de los valores x , t , u .

igual, los coeficientes en las ecuaciones y en las condiciones de frontera se convierten en adimensionales y numéricamente iguales *), los términos independientes y los valores iniciales se hacen idénticamente iguales. Evidentemente es válida también la afirmación recíproca: si existe la transformación de las unidades de medida que transforman los problemas (I) y (II) en los problemas adimensionales idénticamente coincidentes, entonces los problemas (I) y (II) son semejantes.

49. Formular el problema sobre las oscilaciones eléctricas en un cable análogo al problema sobre las vibraciones longitudinales de una barra homogénea y elástica; un extremo está fijo rígidamente y el otro está libre.

Establecer las condiciones necesarias y suficientes para que el primer problema sea semejante al segundo con coeficientes de semejanza dados.

50. Formular el problema sobre las oscilaciones eléctricas en un cable análogo al problema sobre las vibraciones longitudinales de una barra homogénea y elástica en los siguientes casos:

a) un extremo de la barra está fijo rígidamente y el otro, elásticamente;

b) un extremo de la barra está libre y el otro experimenta una resistencia proporcional a la velocidad;

c) un extremo de la barra está fijo rígidamente y el otro se mueve según una ley dada.

Establecer las condiciones necesarias y suficientes para que el primer problema sea semejante el segundo.

51. Formular un problema sobre las vibraciones torsionales de un cilindro, semejante al problema 41 sobre las oscilaciones eléctricas en un cable, tomando como función que caracteriza las oscilaciones eléctricas, primero la tensión, y después, la intensidad de la corriente.

Establecer las condiciones necesarias y suficientes para que el primer problema sea semejante al segundo.

§ 2. Método de propagación de las ondas (método de d'Alembert)

La solución general $u = u(x, t)$ de la ecuación sobre las vibraciones de una cuerda

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (1)$$

*) Estos coeficientes adimensionales se llaman criterios de semejanza.

puede ser representada en forma *)

$$u(x, t) = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at), \quad (2)$$

donde $\varphi_1(z)$ y $\varphi_2(z)$ son funciones arbitrarias y donde $\varphi_1(x - at)$ es la onda directa que se propaga por el eje x hacia la derecha con la velocidad a , mientras que $\varphi_2(x + at)$ es la onda inversa que se propaga con la misma velocidad por el eje x hacia la izquierda **).

Resolver el problema de contorno para la ecuación (1) con el método de propagación de las ondas significa determinar las funciones $\varphi_1(z)$ y $\varphi_2(z)$ de las condiciones iniciales y de las de frontera.

En el primer punto de este párrafo están recogidos los problemas para la recta no acotada $-\infty < x < +\infty$; en el segundo, para la semirrecta con las condiciones de frontera homogéneas y no homogéneas; en el tercero, para la recta infinita compuesta de dos semirrectas que se difieren por las características físicas; en el cuarto, los problemas para el segmento finito con condiciones de frontera homogéneas o no homogéneas.

1. Problemas para una cuerda infinita

52. Una cuerda no acotada está excitada mediante una desviación inicial local, representada en la fig. 6. Construir (delinear) las posi-

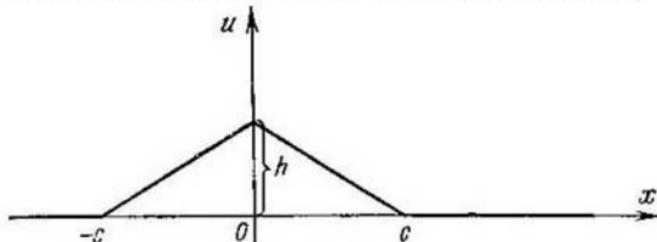


Fig. 6

ciones de la cuerda para los momentos de tiempo ***)

$$t_h = \frac{kc}{4a},$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, 5$.

*) A veces, es más cómodo usar otras formas equivalentes de representación de la solución, por ejemplo, en forma de las ondas de propagación

$$u(x, t) = \varphi_1(at - x) + \varphi_2(at + x)$$

6

$$u(x, t) = \varphi_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{x}{a}\right).$$

**) Véase [7], págs. 60—69 y 71—83. El empleo de la representación de la solución en la forma (2) para los problemas estacionarios, donde t es la coordenada geométrica, se dará en el cap. V.

***) Aquí y en los problemas posteriores por a se comprende el parámetro que entra en la ecuación (1) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

53. Una cuerda no acotada está excitada mediante una desviación inicial local que tiene la forma de parábola cuadrada (fig. 7). Hallar:
 a) las fórmulas que representan el perfil de la cuerda para $t > 0$
 y b) las fórmulas que representan la ley del movimiento de los puntos de la cuerda con diferentes abscisas para $t > 0$.

54. En el momento $t = 0$ una cuerda no acotada está excitada mediante una desviación inicial que tiene la forma representada en

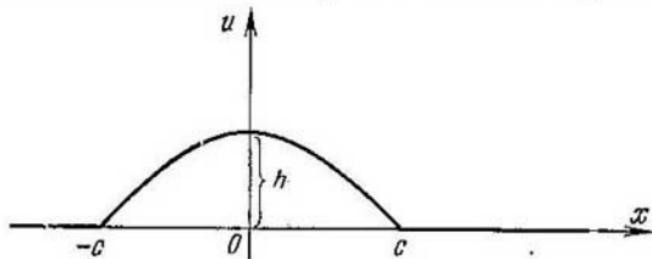


Fig. 7

la fig. 8. ¿En qué punto x y en qué momento de tiempo $t > 0$ la desviación de la cuerda será máxima? ¿Cuál será el valor de esta desviación?

55. A una cuerda no acotada se le comunicó en el segmento $-c \leq x \leq c$ una velocidad inicial transversal $v_0 = \text{const}$; fuera de este segmento la velocidad inicial es igual a cero. Hallar las fórmulas que

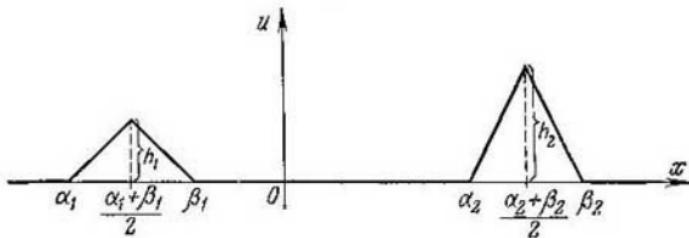


Fig. 8

representan la ley de movimiento de los puntos de la cuerda con diferentes abscisas para $t > 0$ y construir (delinear) las posiciones de la cuerda para los momentos de tiempo

$$t_h = \frac{kc}{4a},$$

donde $k = 0, 2, 4, 6$.

56. En el momento inicial de tiempo $t = 0$ una cuerda no acotada recibe en el punto $x = x_0$ un golpe transversal que le comunica a la cuerda el impulso I .

Hallar la desviación $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda desde la posición de equilibrio para $t > 0$, suponiendo que las desviaciones iniciales de los puntos de la cuerda y las velocidades iniciales son iguales a cero.

57. Por una cuerda no acotada corre la onda $\varphi(x - at)$. Considerando esta onda como la excitación inicial de la cuerda en el momento $t = 0$, hallar el estado de la cuerda para $t > 0$. Compararlo con el resultado obtenido al resolver el problema 52.

58. Resolver el problema sobre la propagación de las oscilaciones eléctricas en un cable no acotado con la condición

$$GL = CR \quad (1)$$

donde G , L , C , R son la fuga, la autoinducción, la capacidad y la resistencia de la unidad de longitud del cable *). La tensión y la intensidad de la corriente en el cable para el momento inicial son dadas.

2. Problemas para una semirrecta

Si sólo uno de los extremos de la cuerda **) se encuentra tan distante del trozo de ésta en estudio que la reflexión del extremo alejado no influya sobre las vibraciones en este trozo, por lo menos durante el intervalo de tiempo de estudio, entonces llegamos al problema sobre las vibraciones de una cuerda semiacotada $0 < x < +\infty$, donde el extremo $x = 0$ corresponde al extremo «cercano» de la cuerda. En este caso el problema de contorno contiene la ecuación, la condición de frontera y las condiciones iniciales ***);

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\alpha_1 u_{tt}(0, t) + \alpha_2 u_t(0, t) + \alpha_3 u_x(0, t) + \\ + \alpha_4 u(0, t) = \Phi(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

además por lo menos una de las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ que entran en la condición de frontera debe ser diferente de cero ****); si $\Phi(t) = 0$, entonces la condición de frontera se convierte en homogénea.

*) Esta condición garantiza la posibilidad del paso por el cable de las ondas sin deformación de su forma. (Para más detalles véase [7], págs. 86–88 y anteriores.) En el futuro si para un cable se cumple esta condición, entonces le llamaremos brevemente: cable de linea sin deformación.

**) O una barra, o un cable...

***) Es posible también la formulación de dos condiciones de frontera, si está dada sólo una condición inicial. (Para más detalles véase [7], pág. 92.)

****) Si la condición de frontera (2) toma la forma $u_t(0, t) + \alpha u(0, t) = \Phi(t)$ y además es conocido el valor $u(0, 0)$, entonces por lo tanto será conocido $u(0, t)$ y llegamos a la condición de frontera $u(0, t) = \Phi(t)$. La afirmación análoga es válida para la condición de frontera de forma

$$u_{tt}(0, t) + \alpha u_t(0, t) + \beta u(0, t) = \Phi(t).$$

59. Una cuerda semiacotada y fija en un extremo está excitada mediante una desviación inicial, representada en la fig. 9. Delinear las posiciones de la cuerda para los momentos de tiempo

$$t = \frac{c}{a}; \quad t = \frac{3c}{2a}; \quad t = \frac{2c}{a}; \quad t = \frac{7c}{2a}.$$

60. A una barra elástica semiacotada $0 \leq x < +\infty$ con el extremo $x = 0$ libre se le comunica una velocidad axial inicial que es igual a v_0 en el segmento $[c, 2c]$ e igual a cero fuera de este segmento.

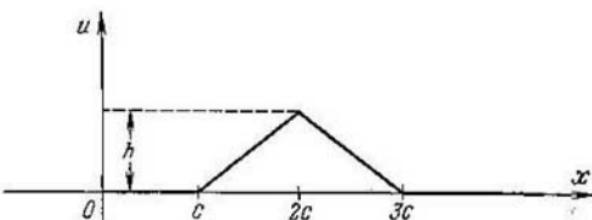


Fig. 9

La magnitud del desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de las secciones transversales de la barra se puede trazar, para mayor claridad, en dirección perpendicular al eje x , es decir, obrar del mismo modo que se hace en el caso de la cuerda. Usando este método de dibujo, trazar la gráfica $u = u(x, t)$ para los momentos de tiempo

$$t = 0; \quad \frac{c}{a}; \quad \frac{2c}{a}; \quad \frac{4c}{a}.$$

61. Una cuerda semiacotada $0 \leq x < +\infty$ con el extremo fijo $x = 0$ recibe en el momento $t = 0$ un golpe transversal que transmite a la cuerda el impulso I en el segmento $0 \leq x \leq 2l$, además el perfil de la distribución de la velocidad, recibida con el golpe, tiene en el momento $t = 0$ la forma de semionda de la sinusoides con la base $0 \leq x \leq 2l$. Hallar las fórmulas que representan la ley de movimiento de los puntos de la cuerda con diferentes abscisas para $t > 0$.

62. Una barra elástica semiacotada $0 \leq x < +\infty$ con el extremo libre $x = 0$ en el momento $t = 0$ está excitada mediante desplazamientos longitudinales, el perfil de los cuales *) está representado en la fig. 10. Hallar en qué puntos y cuándo para $t > 0$ el desplazamiento recibe el valor máximo. ¿Cuál es el valor de este desplazamiento maximal?

*) Véase el problema 60.

63. A una cuerda semiacotada con el extremo fijo en el momento inicial de tiempo $t = 0$, mediante un golpe transversal, se le comunica el impulso I en el punto $x = x_0$. Hallar los desplazamientos $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda desde la posición de equilibrio para $t > 0$, si los desplazamientos iniciales $u(x, 0) = 0$ y las velocidades iniciales en los puntos $x \neq x_0$ son iguales a cero.

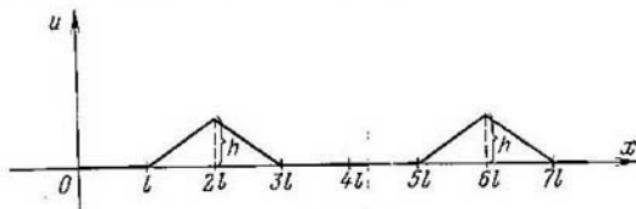


Fig. 10

64. Resolver el problema 63, suponiendo que el impulso inicial I se comunica a los puntos $x_n > x_{n-1} > \dots > x_2 > x_1 > 0$.

65. A una barra semiacotada con el extremo libre en el momento inicial de tiempo $t = 0$ mediante un golpe longitudinal en el extremo se le comunica el impulso axial I .

Hallar los desplazamientos $u(x, t)$ de los puntos de la barra de la posición de equilibrio para $t > 0$, si los desplazamientos iniciales $u(x, 0) = 0$ y las velocidades iniciales en los puntos $x > 0$ también son iguales a cero.

66. El peso $Q = Mg$ que se mueve paralelamente al eje x con la velocidad constante v_0 en el momento de tiempo $t = 0$ como resultado de un golpe se pega al extremo libre de una barra semiacotada $0 \leq x < +\infty$ y sigue moviéndose con ella. Hallar las desviaciones $u(x, t)$ de las secciones transversales de la barra desde la posición de equilibrio para $t > 0$, si las desviaciones iniciales $u(x, 0) = 0$ y las velocidades iniciales son iguales a cero en todas las partes, excluyendo la sección $x = 0$, donde es igual a v_0 .

67. A las secciones transversales de una barra elástica semiacotada con el extremo fijo elásticamente se les comunican las desviaciones longitudinales iniciales

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{l} & \text{para } 0 \leq x \leq l, \\ 0 & \text{para } l \leq x < +\infty, \end{cases}$$

pero las velocidades iniciales $u_t(x, 0) = 0$. Hallar las desviaciones longitudinales $u(x, t)$ de las secciones transversales de la barra para $t > 0$.

68. Un árbol redondo vertical semiacotado $0 \leq x < +\infty$ para $t < 0$ gira con la velocidad angular $\omega = \text{const}$. Desde el momento

$t = 0$ su tope $x = 0$ toca el plano horizontal de la base y experimenta la acción de torsión de las fuerzas de rozamiento, esta acción es proporcional a la velocidad angular del tope. Hallar los ángulos de giro $\theta(x, t)$ de las secciones transversales del árbol para $t > 0$, considerando que $\theta(x, 0) = 0$.

69. Por una cuerda semiacotada $0 \leq x < +\infty$ corre la onda $u(x, t) = f(x + at)$ para $t < 0$. Hallar las vibraciones de la cuerda para $0 < t < +\infty$ en los casos cuando el extremo de la cuerda:

- está fijo rígidamente,
- está libre,
- está fijo elásticamente,

d) experimenta la resistencia del rozamiento proporcional a la velocidad.

70. Por un tubo cilíndrico semiacotado $0 < x < +\infty$, lleno de gas ideal, corre una onda $u(x, t) = f(x + at)$ para $t < 0$, $f(0) = 0$. En el extremo del tubo se encuentra el pistón con masa M_0 , colocado sobre un muelle con el coeficiente de rigidez H_0 , y con la masa propia despreciablemente pequeña. El pistón obtura estrechamente el tubo y al moverse en el mismo experimenta una resistencia proporcional a la velocidad. Hallar $u(x, t)$ para $0 < t < +\infty$.

71. Hallar para $t > 0$ las oscilaciones eléctricas en un cable (de la línea sin deformación) semiacotado, si para $t < 0$ por él corría la onda

$$v(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} f(x + at),$$

$$i(x, t) = -e^{-\frac{R}{L}t} \sqrt{\frac{C}{L}} f(x + at).$$

Estudiar los casos cuando el extremo del cable está puesto a tierra

- por la resistencia concentrada R_0 ,
- por la capacidad concentrada C_0 ,
- por la autoinducción concentrada L_0 .

Establecer para el caso a) en qué condiciones no hay onda refleja (absorción total) y en qué condiciones la amplitud de la onda de reflexión es dos veces menor que la amplitud de la onda incidente.

72. Al extremo $x = 0$ de un cable semiacotado de la línea sin deformación fue aplicada una fuerza electromotriz constante E durante un intervalo de tiempo suficientemente largo, de modo que en el cable se estableció una distribución estacionaria de tensión y de intensidad de corriente. Después, en el momento de tiempo $t = 0$ el extremo del cable fue puesto a tierra por la resistencia concentrada R_0 .

Hallar la tensión y la intensidad de la corriente en el cable para $t > 0$.

73. El extremo de una cuerda semiacotada $0 < x < +\infty$, a partir del momento $t = 0$, se mueve según la ley

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Hallar las desviaciones $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda para $0 < t < +\infty$, si las velocidades y las desviaciones iniciales son iguales a cero.

74. Al extremo de una barra semiacotada desde el momento $t = 0$ es aplicada una fuerza longitudinal $F(t)$. Hallar las vibraciones longitudinales de la barra para $t > 0$, si las velocidades y las desviaciones iniciales de sus puntos son iguales a cero.

75. Una tubería horizontal semiacotada de sección transversal constante para $t < 0$ está llena de un líquido en reposo. A partir del momento $t = 0$ a su extremo se conecta una bomba impelente con una campana compensadora de aire *). Hallar la tensión y la velocidad del líquido en la tubería para $t > 0$.

76. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra semiacotada para las condiciones iniciales nulas, si en los momentos de tiempo

$$t_k = kT, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots,$$

a la barra se le comunican los impulsos longitudinales

$$I_k = I = \text{const}$$

y al extremo de la barra se fija una masa concentrada M .

77. Al extremo de un cable semiacotado $0 < x < +\infty$ de línea sin deformación se aplica una fuerza electromotriz

$$E(t) = E_0 \sin \omega t; \quad 0 < t < +\infty.$$

En el momento $t = 0$ la tensión y la corriente en el cable son iguales a cero. Hallar la tensión y la corriente en el cable para $t > 0$, separando el proceso estacionario de propagación de las vibraciones con una frecuencia ω y determinar el tiempo a partir del cual en el punto x del cable $0 < x < +\infty$, la amplitud de las vibraciones transitorias será no mayor que el 10% de la amplitud de las vibraciones establecidas.

3. Problemas para una recta infinita compuesta de dos semirrectas homogéneas. Factores concentrados

78. Una barra elástica no acotada es obtenida mediante la unión en el punto $x = 0$ de dos barras homogéneas semiacotadas. Para $x < 0$ la densidad de masa, el módulo de elasticidad de la barra y la velocidad de propagación de las perturbaciones longitudinales

*) Véase los problemas 5 y 6.

pequeñas son iguales a ρ_1 , E_1 , a_1 , y para $x > 0$ son iguales a ρ_2 , E_2 , a_2 . Sea que desde la región $x < 0$ por la barra corre una onda $u_1(x, t) = f(t - \frac{x}{a_1})$, $t \leq 0$. Hallar las ondas de reflexión y de refracción.

Investigar la solución para $E_2 \rightarrow 0$ y para $E_2 \rightarrow +\infty$.

79. En el punto $x = 0$ de una cuerda homogénea no acotada se fija una masa concentrada M sostenida por un muelle de rigidez k con masa propia despreciablemente pequeña (fig. 11). Hallar la

desviación de la cuerda $u(x, t)$ para $t > 0$, si la cuerda es perturbada en el momento $t = 0$ por un impulso transversal $I = Mv_0$, comunicado a la masa M y dirigido según el eje del muelle.

80. La masa M del problema anterior, al vibrar experimenta una resistencia del rozamiento proporcional a la velocidad.

Hallar las ondas refleja y refractada tomando como condición inicial la onda $u_1(x, t) = f(x - at)$ que corre de la región $x < 0$.

81. Una fuente plana de perturbaciones pequeñas se mueve uniformemente con velocidad infrasónica a lo largo de un tubo cilíndrico no acotado con un gas. Considerando que la perturbación de la presión en el lugar donde se encuentra en el momento $t > 0$ la fuente, es una función de tiempo dada, hallar las vibraciones del gas a la izquierda y a la derecha de la fuente, si en el momento inicial de tiempo el gas estaba en estado no perturbado y la fuente se encontraba en el punto $x = 0$.

82. Resolver el problema sobre las vibraciones de una cuerda no acotada bajo la acción de una fuerza transversal $F(t)$ para $t > 0$, si el punto de aplicación de la fuerza se desliza a lo largo de la cuerda con velocidad constante v_0 desde la posición $x = 0$, siendo $v_0 < a$ y las condiciones iniciales nulas.

4. Problemas para un segmento finito

83. Los extremos de una cuerda $x = 0$ y $x = l$ están fijos rígidamente, la desviación inicial está dada por la igualdad

$$u(x, 0) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \quad \text{para } 0 \leq x \leq l,$$

las velocidades iniciales son iguales a cero. Hallar las desviaciones $u(x, t)$ para $t > 0$.

84. Resolver el problema sobre las vibraciones longitudinales de una barra, uno de cuyos extremos ($x = 0$) está fijo rígidamente y el

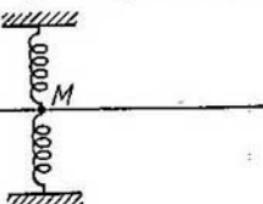


Fig. 11

otro ($x = l$) está libre, si la barra sufrió el estiramiento inicial $u(x, 0) = Ax$, $0 \leq x \leq l$ y las velocidades iniciales son $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq l$.

85. Resolver el problema 84, si el extremo $x = l$ de la barra está fijo elásticamente.

86. El extremo de una barra ($x = 0$) está fijo rígidamente y el otro ($x = l$) está libre. En el momento de tiempo inicial, al extremo libre se le comunica un impulso longitudinal de golpe I . Hallar las vibraciones de la barra.

87. Un extremo de una barra horizontal está fijo rígidamente y el otro está libre. En el momento de tiempo inicial $t = 0$ con el extremo libre de la barra choca el peso $Q = Mg$ con velocidad v_0 , dirigida según el eje de la barra, además, en el momento $t = 0$ el tope del peso roza con el tope de la barra. Hallar las vibraciones longitudinales de la barra para $t > 0$ durante el impacto.

88. Resolver el problema anterior para una barra cuando los dos extremos están libres.

89. Resolver el problema 87, suponiendo que la barra tiene la forma de cono truncado.

90. Resolver el problema 88 para una barra que tenga la forma de cono truncado.

91. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra, si las condiciones iniciales son nulas, uno de sus extremos está fijo o libre y el otro se mueve según una ley dada; estudiar los casos cuando

- el extremo derecho está fijo,
- el extremo izquierdo está fijo,
- el extremo derecho está libre.

92. Hallar las vibraciones de la perturbación de la presión en el extremo $x = 0$ de una tubería para $t > 0$, si en el extremo $x = l$

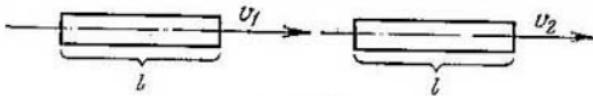


Fig. 12

la presión queda igual a cero y el gasto del líquido en el extremo $x = 0$ es una función dada del tiempo. La resistencia de la tubería es despreciablemente pequeña, la perturbación de la presión y la velocidad del líquido para $t = 0$ son iguales a cero.

93. Resolver el problema sobre un golpe longitudinal absolutamente elástico de dos barras iguales que se mueven en una dirección por una recta con las velocidades v_1 y v_2 ; $v_1 > v_2 > 0$ (fig. 12). Hallar la distribución de las velocidades y de las tensiones en las barras durante el impacto.

94. Al extremo $x = 0$ de un cable de línea sin deformación *), empezando desde el momento $t = 0$ es aplicada una fuerza electromotriz E ; el extremo $x = l$ está puesto a tierra. La tensión inicial y la corriente inicial en el cable son iguales a cero. Hallar las vibraciones eléctricas en el cable $t > 0$ y establecer a partir de qué momento de tiempo la corriente en el cable se diferencia de la del límite (cuando $t \rightarrow +\infty$) a ciencia cierta no más del 10%.

95. Resolver el problema anterior con la condición que el extremo $x = l$ está aislado.

96. A un extremo ($x = 0$) del cable con la resistencia y fuga despreciablemente pequeñas desde el momento $t = 0$ se conecta la fuerza electromotriz $E = \text{const}$ y el otro extremo ($x = l$) está puesto a tierra por

- la resistencia concentrada R_0 ,
- la capacidad concentrada C_0 ,
- la autoiducción concentrada L_0 .

Hallar la tensión $v(x, t)$ en el extremo $x = l$ cuando $t > 0$ para todos los casos.

§ 3. Método de separación de las variables

En el presente parágrafo se estudian problemas sobre las vibraciones de un segmento finito de una cuerda con diferentes condiciones de frontera y también problemas análogos sobre las vibraciones de otros campos de la física y la técnica **).

1. Vibraciones libres en un medio sin resistencia ***)

97. Hallar las vibraciones de una cuerda, con los extremos fijos rígidamente $x = 0$ y $x = l$, perturbada por la desviación inicial representada en la fig. 13 y calcular la energía de cada armónico. Las velocidades iniciales son iguales a cero.

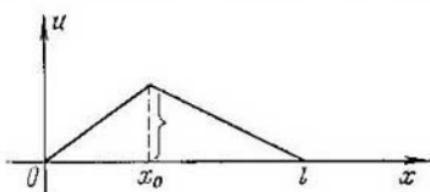


Fig. 13

= const, aplicada al punto x_0 de la cuerda perpendicularmente a la posición no perturbada de la cuerda. En el momento inicial de

*) Véase la llamada al problema 58.

**) El material sobre los valores propios y las normas de funciones propias de los capítulos II, III, IV, V, VI está expuesto en § 2 del cap. VII.

***) En este y en los dos apartados siguientes los medios se suponen homogéneos.

tiempo $t = 0$ la acción de la fuerza F_0 instantáneamente cesa. Hallar las vibraciones de la cuerda para $t > 0$.

99. Los extremos de una cuerda están fijos rígidamente y la desviación inicial tiene la forma de parábola cuadrada, simétrica con respecto a la perpendicular en el punto medio de la cuerda. Hallar las vibraciones de la cuerda, si las velocidades iniciales son iguales a cero.

100. Una cuerda *) con los extremos fijos rígidamente se perturba mediante el golpe de un martillo plano y rígido el cual le comunica la siguiente distribución inicial de velocidades:

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l. \end{cases}$$

Hallar las vibraciones de la cuerda, si la desviación inicial es igual a cero. Calcular la energía de cada armónico.

101. Una cuerda **) con los extremos fijos rígidamente se perturba mediante el golpe de un martillo agudo el cual le comunica un impulso I en el punto x_0 . Hallar las vibraciones de la cuerda, si la desviación inicial es igual a cero. Calcular la energía de cada armónico.

102. Una cuerda con los extremos fijos rígidamente se perturba mediante el golpe de un martillo convexo rígido ***) que le comunica la distribución inicial de velocidades

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta, \\ v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-x_0}{\delta}\right), & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l. \end{cases}$$

Hallar las vibraciones de la cuerda, si la desviación inicial es igual a cero. Calcular la energía de cada armónico.

103. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra, el extremo de la cual ($x = 0$) está fijo rígidamente y el otro ($x = l$) está libre, con las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = kx, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq l.$$

104. Una barra con un extremo fijo rígidamente $x = 0$ se halla en estado de equilibrio bajo la acción de la fuerza longitudinal $F_0 = \text{const}$, aplicada al extremo $x = l$. En el momento $t = 0$ la acción de la fuerza F_0 cesa instantáneamente. Hallar las vibraciones de la barra, si las velocidades iniciales son iguales a cero.

*) Véase [7], págs. 160—163.

**) Lo mismo.

***) Sobre la perturbación de la cuerda mediante un martillo convexo blando véase el problema 152.

105. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra elástica con los extremos libres, si las velocidades iniciales y las desviaciones iniciales en dirección longitudinal son arbitrarias. Tener en cuenta la posibilidad del movimiento rectilíneo uniforme de la barra.

106. Hallar las vibraciones de una barra elástica con los extremos libres, la cual recibió en el momento inicial de tiempo un impulso longitudinal I en uno de los extremos.

107. Resolver el problema anterior para el caso cuando el extremo al que no se le comunica el impulso está fijo rígidamente.

108. El extremo de una barra está fijo elásticamente y el otro está libre. Hallar las vibraciones longitudinales de la barra con las condiciones iniciales arbitrarias.

109. El extremo ($x = l$) de una barra está fijo elásticamente y al otro ($x = 0$) se le aplica una fuerza longitudinal $F_0 = \text{const}$, bajo la acción de la cual la barra se encuentra en el estado de equilibrio. Hallar las vibraciones de la barra después de que en el momento inicial de tiempo desaparezca instantáneamente la fuerza F_0 , si las velocidades iniciales son iguales a cero.

110. El extremo de una barra ($x = l$) está fijo elásticamente, el otro ($x = 0$) recibe en el momento inicial de tiempo el impulso longitudinal de golpe I . Hallar las vibraciones longitudinales de la barra, si la desviación inicial de la barra es igual a cero.

111. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra con los extremos fijos elásticamente y con iguales coeficientes de rigidez del empotramiento de los extremos, si las condiciones iniciales son arbitrarias.

112. Resolver el problema anterior, si los coeficientes de rigidez del empotramiento de los extremos son diferentes.

113. Hallar las vibraciones del nivel del líquido en un canal circular cuyos ancho y profundidad son pequeños en comparación con su radio, si la desviación inicial del nivel con relación al estado de equilibrio y la velocidad inicial de variación de este nivel son dadas.

114. Demostrar la aditividad de la energía de cada armónico en el proceso de las vibraciones libres de una cuerda en un medio sin resistencia con las condiciones de frontera homogéneas de primero, segundo y tercer género.

115. Hallar las vibraciones transversales de la barra $0 \leq x \leq l$ con las condiciones iniciales arbitrarias, si los extremos de la barra están:

- a) fijos articuladamente («libremente apoyados»),
- b) fijos rígidamente,
- c) libres.

116. Resolver el problema anterior, suponiendo que las vibraciones fueron provocadas por un golpe transversal en el punto $x = x_0$ que transmitió a la barra un impulso I .

2. Vibraciones libres en un medio con resistencia

En los problemas 97, 101, 103, 105, 108, 111 las vibraciones de las cuerdas y de las barras se estudiaron en un medio sin resistencia. Supondremos ahora que en estos problemas el medio ejerce una resistencia proporcional a la velocidad, entonces obtendremos los problemas 117, 118, 119, 120, 121 y 122 respectivamente. Resolver los problemas 117—122 sin calcular la energía de cada armónico.

123. Un cable eléctrico homogéneo aislado $0 \leq x \leq l$ está cargado hasta un cierto potencial $v_0 = \text{const}$. En el momento inicial de tiempo el extremo $x = 0$ se lleva a tierra y el extremo $x = l$ sigue estando aislado.

Hallar la distribución de la tensión en el cable, si la autoinducción, la resistencia y la capacidad de la unidad de longitud son conocidas *).

124. Hallar las oscilaciones eléctricas en un cable homogéneo $0 \leq x \leq l$, si el extremo $x = 0$ está puesto a tierra, el extremo $x = l$ está aislado, la corriente inicial es igual a cero y el potencial inicial es igual a

$$v(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \frac{Q}{C(b-a)}, & a < x < b, \\ 0, & b < x < l. \end{cases}$$

Limitándose al caso cuando $\frac{\pi}{l\sqrt{CL}} > \left| \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right|$, hallar la expresión para la tensión.

125. Hallar la tensión en un cable con corriente y tensión iniciales iguales a cero, si en el momento inicial en el punto $x = x_0$ de este cable se tiene la carga concentrada Q . Las restantes condiciones son las mismas que en el problema anterior.

3. Vibraciones forzadas bajo la acción de fuerzas distribuidas y concentradas en un medio sin resistencia y en un medio con resistencia

En este punto, primero, se estudian los problemas con las fuerzas impulsantes constantes, después los problemas con las fuerzas impulsantes que varían armónicamente en el tiempo y, al final, los problemas con las fuerzas impulsantes que varían en el tiempo según una ley arbitraria.

126. Resolver el problema 97 con la condición de que las vibraciones ocurren en el campo de la fuerza de gravedad en un medio con resistencia proporcional a la velocidad y los extremos de la cuerda están fijos a igual altura.

*) La fuga es $G = 0$, según el supuesto sobre el aislamiento del cable.

127. Una barra elástica $0 \leq x \leq l$ se halla en posición vertical con el extremo superior ($x = 0$) sujeto rígidamente al techo de un ascensor que cae libremente, el cual, una vez alcanzada la velocidad v_0 , se detiene súbitamente. Hallar las vibraciones longitudinales de la barra, si su extremo inferior ($x = l$) está libre.

128. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra $0 \leq x \leq l$, si uno de sus extremos está fijo rígidamente y al otro desde el momento $t = 0$ se aplica una fuerza $F_0 = \text{const}$.

129. En el extremo $x = l$ de la tubería $0 \leq x \leq l$ el consumo del líquido en el momento $t = 0$ varía de un salto hasta el valor $A = \text{const}$, el extremo $x = 0$ está conectado con un recipiente grande, donde la presión del líquido queda invariable.

Considerando que hasta el cambio del consumo en el extremo $x = l$ la presión y el consumo en la tubería eran constantes, hallar el cambio de consumo en la tubería para $t > 0$ y la variación de la presión en la sección $x = l$ para $t > 0$.

130. Hallar la tensión en un cable eléctrico homogéneo, cuya resistencia, autoinducción, fuga y capacidad de la unidad de longitud son, respectivamente, R , L , G y C , si la corriente y la tensión iniciales son iguales a cero, el extremo $x = 0$ está aislado y al extremo $x = l$ empezando desde el momento $t = 0$, se aplica la fuerza electromotriz constante E .

131. Resolver el problema anterior, suponiendo que el extremo del cable $x = l$ está puesto a tierra.

132. En el punto x_0 de una cuerda $0 \leq x \leq l$ desde el momento $t = 0$ se aplica una fuerza transversal F_0 constante. Hallar las vibraciones de la cuerda, si sus extremos están fijos rígidamente.

133. A una cuerda $0 \leq x \leq l$ con los extremos fijos rígidamente desde el momento de tiempo $t = 0$ está aplicada una fuerza continuamente distribuida con densidad lineal

$$\Phi(x, t) = \Phi(x) \operatorname{sen} \omega t.$$

Hallar las vibraciones de la cuerda en un medio sin resistencia; investigar la posibilidad de resonancia.

134. Resolver el problema anterior con la condición de que la densidad lineal de la fuerza es igual $\Phi(x, t) = \Phi_0 \operatorname{sen} \omega t$, $0 < x < l$, $0 < t < +\infty$, donde $\Phi_0 = \text{const}$.

135. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra $0 \leq x \leq l$, cuyo extremo $x = 0$ está fijo rígidamente, mientras que el extremo $x = l$ desde el momento $t = 0$ se mueve según la ley

$$u(l, t) = A \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

El medio no ejerce resistencia a las vibraciones.

136. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra $0 \leq x \leq l$ en un medio sin resistencia, si el extremo $x = 0$ de la barra está fijo rígidamente y al extremo $x = l$ desde el momento $t = 0$ se

le aplica la fuerza

$$F(t) = A \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

137. Resolver el problema 135, suponiendo que en el momento de tiempo inicial $t = 0$ la barra está en la posición horizontal y que $Q = 0$, $\omega = \text{const}$. Estudiar el caso sin resonancia.

138. Hallar las vibraciones de una cuerda $0 \leq x \leq l$ con los extremos fijos rígidamente, si en el punto $x = x_0$ de ésta desde el momento $t = 0$ está aplicada una fuerza transversal

$$F(t) = A \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

Limitarse al caso cuando la frecuencia de la fuerza impulsante no coincide con ninguna de las frecuencias propias.

139. Resolver el problema anterior, si

$$F(t) = A \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

140. Resolver el problema 138, si $F(t)$ es una fuerza periódica arbitraria con la frecuencia ω , es decir, que

$$F(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos n\omega t + \beta_n \operatorname{sen} n\omega t), \quad 0 < t < +\infty.$$

141. A una cuerda $0 \leq x \leq l$ con los extremos fijos rígidamente desde el momento $t = 0$ se le aplica una fuerza continuamente distribuida con la densidad lineal $\Phi(x, t) = \Phi_0(x) \operatorname{sen} \omega t$. Hallar las vibraciones de la cuerda con las condiciones iniciales nulas, suponiendo que el medio ejerce la resistencia proporcional a la velocidad. Hallar las vibraciones estables que representan en sí la parte principal de la solución cuando $t \rightarrow +\infty$. (Compárese con el problema 133).

Nota. Las vibraciones estables tienen la frecuencia de la fuerza impulsante; las vibraciones con otras frecuencias se amortiguan.

142. Resolver el problema 136, suponiendo que las vibraciones ocurren en un medio con resistencia proporcional a la velocidad. Hallar las vibraciones estables que representan en sí la parte principal de la solución cuando $t \rightarrow +\infty$.

143. Resolver el problema 130, suponiendo que al extremo $x = l$ del cable se aplica desde el momento $t = 0$ una fuerza electromotriz $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, $0 < t < +\infty$, $E_0 = \text{const}$ y el extremo $x = 0$ está aislado. Hallar las oscilaciones estables que representan la parte principal de la solución cuando $t \rightarrow +\infty$.

144. Resolver el problema 131, suponiendo que al extremo $x = l$ del cable desde el momento $t = 0$ está aplicada una fuerza electromotriz $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$, $0 < t < +\infty$, $E_0 = \text{const}$ y el extremo $x = 0$ está puesto a tierra. Hallar las oscilaciones estables que son la parte principal de la solución cuando $t \rightarrow +\infty$.

145. Hallar las vibraciones estables de la presión en el extremo $x = l$ de una tubería $0 \leq x \leq l$, si en este extremo se encuentra una campana amortiguadora y el consumo del líquido que viene de fuera varía armónicamente con el tiempo, mientras que en el otro extremo de la tubería la presión permanece constante.

146. Hallar las vibraciones de una cuerda $0 \leq x \leq l$, con los extremos fijos rígidamente, bajo la acción de la fuerza aplicada desde el momento $t = 0$ y que tiene la densidad

$$F(x, t) = \Phi(x) t, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < +\infty,$$

suponiendo que el medio no ejerce resistencia a las vibraciones.

147. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra $0 \leq x \leq l$, cuyo extremo izquierdo está fijo rígidamente y al derecho desde el momento $t = 0$ se aplica una fuerza

$$F(t) = At, \quad 0 < t < +\infty, \quad A = \text{const},$$

suponiendo que el medio no ejerce resistencia a las vibraciones.

148. Hallar las vibraciones de una cuerda $0 \leq x \leq l$, con los extremos fijos rígidamente, bajo la acción de una fuerza distribuida que está aplicada desde el momento $t = 0$ y que tiene una densidad

$$F(x, t) = \Phi(x) t^m, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < +\infty, \quad m > -1,$$

suponiendo que el medio no ejerce resistencia a las vibraciones.

149. Hallar las vibraciones longitudinales de una barra $0 \leq x \leq l$, en un medio sin resistencia, bajo la acción de la fuerza

$$F(t) = At^m, \quad 0 < t < +\infty, \quad A = \text{const}, \quad m > -1,$$

aplicada desde el momento $t = 0$ al extremo $x = l$, si el extremo $x = 0$ está fijo rígidamente.

150. Resolver el problema 133 mediante el método indicado para el problema 148.

151. Resolver el problema 141 mediante el método indicado para el problema 148.

152. Hallar las vibraciones de una cuerda *) $0 \leq x \leq l$ con los extremos fijos rígidamente, provocadas por un golpe de un martillo convexo blando, suponiendo que el medio no ejerce resistencia a las vibraciones. El martillo acciona sobre la cuerda con fuerza de densidad lineal igual a

$$F(x, t) = \begin{cases} A \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{x-x_0}{\delta} \right) \sin \frac{\pi t}{\tau}, & |x-x_0| < \delta, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & |x-x_0| < \delta, \quad t > \tau, \\ 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta, \quad x_0 + \delta \leq x \leq l, \quad 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

*) Véase [7], págs. 160—163.

153. Hallar las vibraciones de una cuerda $0 \leq x \leq l$, con los extremos fijos rígidamente, en un medio sin resistencia, excitadas por un golpe transversal en el punto x_0 , $0 < x_0 < l$, en el momento $t = 0$, que transmite a la cuerda el impulso I , tomando este golpe como el término independiente de la ecuación *).

154. Resolver el problema 146, suponiendo que el medio ejerce resistencia proporcional a la velocidad.

155. Resolver el problema 153, suponiendo que el medio ejerce resistencia proporcional a la velocidad.

156. Hallar las vibraciones transversales de una barra, con los extremos fijos articuladamente («libremente apoyados»), bajo la acción de una fuerza transversal constante P , el punto de aplicación de la cual se mueve por la barra desde el momento $t = 0$ del extremo $x = 0$ al extremo $x = l$ con velocidad constante v_0 , suponiendo que las vibraciones ocurren en un medio sin resistencia.

157. Resolver el problema anterior, si $P = P_0 \operatorname{sen} \omega t$, $P_0 = \text{const.}$

158. Hallar las vibraciones transversales de una barra bajo la acción de la fuerza transversal concentrada $P = P_0 \operatorname{sen} \omega t$, aplicada desde el momento $t = 0$ en el punto x_0 de la barra, si los extremos de la barra están fijos articuladamente («libremente apoyados») y el medio no ejerce resistencia a las vibraciones.

159. Resolver el problema anterior, suponiendo que las vibraciones ocurren en un medio con resistencia proporcional a la velocidad.

160. El extremo $x = 0$ de una barra está fijo rígidamente y al extremo libre $x = l$ desde el momento $t = 0$ es aplicada una fuerza transversal constante $F = F_0 = \text{const.}$ Hallar las vibraciones transversales de la barra, provocadas por la fuerza F_0 .

161. Resolver el problema anterior en el caso cuando la acción de la fuerza $F = F_0$ dura sólo hasta el momento $t = T > 0$.

162. Resolver el problema 160 en el caso cuando $F = F_0 \operatorname{sen} \omega t$.

163. El extremo $x = l$ de una barra está fijo rígidamente y el extremo $x = 0$ está fijo articuladamente («libremente apoyado»). Hallar las vibraciones transversales de la barra provocadas por una fuerza transversal continuamente distribuida con densidad lineal $f_0 \operatorname{sen} \omega t$, aplicada a la barra desde el momento $t = 0$.

4. Vibraciones en el caso de heterogeneidad del medio y otras condiciones que conducen a ecuaciones con coeficientes variables; consideración de las fuerzas y masas concentradas

164. Hallar las vibraciones de una barra no homogénea $0 \leq x \leq l$, con la sección transversal constante, obtenida por la unión en la sección $x = x_0$ de dos barras homogéneas, si

*) Compárese con la solución del problema 101.

a) la densidad de masa y el coeficiente de elasticidad son iguales respectivamente a

$$\rho(x) = \begin{cases} \bar{\rho}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{\rho}, & x_0 < x < l. \end{cases} \quad E(x) = \begin{cases} \bar{E}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{E}, & x_0 < x < l \end{cases}$$

donde $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}$, \bar{E} , \bar{E} son constantes;

b) los desplazamientos iniciales son iguales a

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{x_0} x, & 0 < x < x_0, \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 < x < l; \end{cases}$$

c) las velocidades iniciales son iguales a cero:

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0, \quad 0 < x < l;$$

d) los extremos de la barra están fijos rígidamente:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty.$$

165. Hallar las vibraciones longitudinales estables de una barra compuesta, descrita en el problema anterior, si su extremo $x = 0$ está fijo rígidamente y al extremo $x = l$ desde el momento $t = 0$ se le aplica la fuerza

$$F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$$

166. Hallar las vibraciones longitudinales de la barra descrita en el problema 164, si uno de sus extremos ($x = 0$) está fijo rígidamente, el otro ($x = l$) elásticamente y las condiciones iniciales son arbitrarias.

167. Hallar las vibraciones de una cuerda homogénea $0 \leq x \leq l$ con los extremos fijos inmóvilmente y la masa concentrada M , sujetada al punto $x = x_0$ de la cuerda, provocadas por las desviaciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} h \frac{x}{x_0}, & \text{para } 0 < x < x_0, \\ h \frac{l-x}{l-x_0}, & \text{para } x_0 < x < l. \end{cases}$$

168. La sección transversal de la barra compuesta, descrita en el problema 164, en el segmento $0 \leq x \leq x_0$ es igual a \bar{S} y en el segmento $x_0 \leq x \leq l$ es igual a \bar{S} ; en la sección x_0 se encuentra una capa intermedia rígida con masa M ; el extremo $x = 0$ está fijo rígidamente y el extremo $x = l$ está libre. Hallar las vibraciones longitudinales de la barra con las condiciones iniciales arbitrarias.

169. Un extremo de un árbol homogéneo y elástico está fijo rígidamente y el otro tiene una roldana con el momento axial de inercia M . Hallar las vibraciones torsionales del árbol para las condiciones iniciales arbitrarias, si el módulo de desplazamiento es igual a G , el momento polar de inercia de la sección transversal del árbol es igual a K y el momento axial de inercia de la unidad de longitud del árbol es igual a J .

170. Hallar las vibraciones longitudinales estables de una barra elástica cónica $0 \leq x \leq l$ provocadas por una fuerza longitudinal armónica $F = F_0 \sin \omega t$, aplicada al extremo $x = l$, si el extremo $x = 0$ es fijo (véanse los problemas 21 y 89).

171. Resolver el problema 23, suponiendo que las vibraciones de la cuerda son provocadas por las desviaciones iniciales, y las velocidades iniciales son iguales a cero.

172. Resolver el problema 24 con las condiciones iniciales arbitrarias.

173. Resolver el problema 25 con las condiciones iniciales arbitrarias, colocando el origen de las coordenadas en el extremo fijo de la cuerda.

§ 4. Método de presentaciones en forma integral

En el presente párrafo se estudian los problemas sobre las vibraciones de la cuerda finita, semiacotada y no acotada y también los problemas análogos de otros campos de la física, además para su solución se aplican los siguientes métodos: el método de la integral de Fourier, el paso al segmento finito mediante el método de reflexión, el método de Riemann.

1. Método de la integral de Fourier

174. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

175. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u^*, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

176. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

*) Recordemos que a esta forma se reduce la ecuación telegráfica mediante la sustitución de la función incógnita $v(x, t) = e^{-\mu t} u(x, t)$.

177. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

178. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

179. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad u(0, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

180. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u_x(0, t) = v(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

181. Resolver los problemas de contorno para la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

con las condiciones iniciales nulas y las condiciones de frontera

a) $u(0, t) = 0,$

b) $u_x(0, t) = 0.$

182. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u_x(0, t) = v(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

183. Resolver el problema de contorno

$$v_{tt} = v_{xx} + c^2 v, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$v(0, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

184. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u_x(0, t) - h u(0, t) = \kappa(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

185. Demostrar *) que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) \bar{g}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) f(x-s) ds,$$

donde $\bar{f}(\lambda)$ y $\bar{g}(\lambda)$ son las imágenes de Fourier de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respecto al núcleo $e^{ix\lambda}$.

186. Demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \bar{f}^{(c)}(\lambda) \bar{g}^{(c)}(\lambda) \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(s) [f(|x-s|) + f(x+s)] ds,$$

donde $\bar{f}^{(c)}(\lambda)$ y $\bar{g}^{(c)}(\lambda)$ son las imágenes-cosenos de Fourier de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

187. Demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \bar{f}^{(s)}(\lambda) \bar{g}^{(s)}(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(s) [g(|x-s|) - g(x+s)] ds,$$

donde $\bar{f}^{(s)}(\lambda)$ y $\bar{g}^{(s)}(\lambda)$ son, correspondientemente, la imagen-seno **) de Fourier y la imagen-coseno de Fourier de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

188. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = a\psi'(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Considerar también el caso particular cuando

$$\varphi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{4a^2}}, \quad \psi(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

189. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_{xx}(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

190. Demostrar que para presentar la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$\sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad x = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty$$

*) Esta relación frecuentemente se llama teorema de convolución.

**) Véase § 4 de las respuestas y indicaciones del presente capítulo y la parte de introducción del apartado 1.

en la forma de

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz$$

es suficiente continuar $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ al semieje negativo de tal manera que las funciones

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^N A_k \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \quad \text{y} \quad \Psi(x) = \sum_{k=0}^N A_k \frac{d^k \psi(x)}{dx^k}$$

sean impares *).

191. Demostrar que para presentar la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$\sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad x = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty$$

en forma de

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi$$

es suficiente la función $f(x, t)$ continuar al semieje negativo x de tal manera que la función

$$F(x, t) = \sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k}$$

sea impar con respecto a x .

192. Demostrar que para presentar la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$\sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad x = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

*) Aquí y más abajo no tocamos el problema de la continuidad y de la derivabilidad.

en forma de

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \\ + \frac{ct}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} \varphi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) \Psi(\xi) d\xi$$

es suficiente prolongar las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ en el semieje negativo de x de tal manera que las funciones

$$\Phi(x) = \sum_{h=0}^N A_h \frac{d^h \varphi(x)}{dx^h} \quad \text{y} \quad \Psi(x) = \sum_{h=0}^N A_h \frac{d^h \psi(x)}{dx^h}$$

sean impares.

193. Demostrar que para presentar la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + f(x, t), \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$\sum_{h=0}^N A_h \frac{\partial^h u}{\partial x^h} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad x = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty$$

en forma de

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) f(\xi, \tau) d\xi$$

es suficiente prolongar $f(x, t)$ al semieje negativo de x de tal manera que la función

$$F(x, t) = \sum_{h=0}^N A_h \frac{\partial^h f(x, t)}{\partial x^h}$$

sean impar con respecto a x .

1*. Paso al intervalo finito mediante el método de reflexión

194. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$$

195. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$$

196. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l.$$

197. Resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l.$$

2. Método de Riemann

198. Hallar la función de Riemann para el operador

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const},$$

y resolver con su ayuda el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

199. Hallar la función de Riemann para el operador

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm c^2 u, \quad a = \text{const},$$

y resolver con su ayuda el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm c^2 u + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

200. Resolver el problema de contorno

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 1 < y < +\infty,$$

$$u \Big|_{y=1} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=1} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

201. Resolver el problema de contorno

$$(l-x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\infty < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad l > 0,$$

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad -\infty < x < l.$$

202. Resolver el problema de contorno

$$(l^2 - x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{4} u = 0, \quad -l < x < l, \quad 0 < y < +\infty,$$

$$u \Big|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \psi(x), \quad -l < x < l.$$

Capítulo III

ECUACIONES DE TIPO PARABÓLICO

Las ecuaciones de tipo parabólico se obtienen al estudiar tales fenómenos físicos como la conducción calorífica, la difusión, la propagación de los campos electromagnéticos en los medios conductores, el movimiento del líquido viscoso.

En el presente capítulo se estudian el planteamiento y la solución de los problemas de contorno para las ecuaciones de tipo parabólico en el caso cuando los procesos físicos en estudio pueden ser descriptos por funciones de dos variables independientes: una coordenada superficial y el tiempo. En particular, en todas partes del presente capítulo se supone que las magnitudes de la función incógnita dependen sólo de una variable superficial.

A las ecuaciones de tipo parabólico para las funciones con mayor número de variables independientes está dedicado el capítulo V que es la continuación y el desarrollo del presente capítulo.

§ 1. Problemas físicos que llevan a ecuaciones de tipo parabólico; planteamiento de los problemas de contorno

En el primer grupo de los problemas de este capítulo se supone la homogeneidad de los medios y en el segundo, se admiten la alteración de la homogeneidad de los medios y la existencia de factores concentrados. El tercer grupo está dedicado al establecimiento de la semejanza entre diferentes fenómenos físicos que conducen a las ecuaciones de tipo parabólico.

Plantear el problema de contorno que corresponda al problema físico dado significa elegir la función que caracteriza el fenómeno físico, y después

- 1) deducir la ecuación diferencial para esta función,
- 2) determinar para ella las condiciones de frontera,
- 3) formular las condiciones iniciales.

Un resumen breve de las leyes principales de la conducción calorífica y de la difusión de las cuales se deducen las ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales se da en el cap. III, § 1, respuestas e indicaciones.

1. Medios homogéneos; ecuaciones con coeficientes constantes

En todos los problemas de este punto los medios se suponen homogéneos e isotrópicos; sus propiedades son independientes de la función incógnita y del tiempo. Las barras, cables, tubos, etc., aquí y en todas partes donde no se acuerde lo contrario se suponen con las secciones transversales constantes.

1. Plantear el problema de contorno para determinar la temperatura de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral de aislación térmica si su temperatura inicial es una función arbitraria de x ; estudiar los casos cuando:

- a) los extremos de la barra se mantienen a una temperatura dada;
- b) en los extremos de la barra se conectan flujos caloríficos, externos dados;
- c) en los extremos de la barra se realiza el intercambio de calor por convección, según la ley de Newton, con un medio de temperatura dada.

2. En la superficie lateral de una barra se realiza el intercambio de calor por convección, según la ley de Newton, con un medio cuya temperatura es una función dada del tiempo. Despreciando la deformación de las superficies isotérmicas, plantear el problema de contorno para determinar la temperatura dentro de la barra con las condiciones iniciales y de frontera del problema anterior.

3. Plantear el problema de contorno sobre el enfriamiento de un anillo fino en cuya superficie se realiza un intercambio de calor por convección, según la ley de Newton, con el medio ambiente a una temperatura dada. Despreciar la irregularidad de la distribución de la temperatura según el espesor del anillo.

4. Plantear el problema de contorno acerca el calentamiento de una barra semiacotada, si un extremo de la barra arde; además, el frente de combustión se propaga con una velocidad constante v_0 y tiene una temperatura conocida $\varphi(t)$.

5. Deducir la ecuación para la temperatura de un cable fino que se calienta por corriente eléctrica continua si en su superficie se realiza un intercambio de calor por convección, según la ley de Newton, con el aire circundante. Plantear el problema de contorno acerca la determinación de la temperatura en este cable si sus extremos están apretados por bornes masivos con una capacidad calorífica dada y conducción calorífica muy grande.

6. Deducir la ecuación de la difusión en un medio inmóvil, suponiendo que las superficies de igual concentración en cada momento de tiempo t son los planos perpendiculares al eje x . Escribir las condiciones de frontera, suponiendo que la difusión se realiza en una capa plana $0 \leq x \leq l$; estudiar los casos cuando:

- a) sobre los planos de frontera la concentración de la sustancia en difusión se mantiene igual a cero;

b) los planos de frontera son impermeables;

c) los planos de frontera son semiimpermeables, además la difusión a través de estos planos se realiza según una ley semejante a la de Newton para el intercambio de calor por convección.

7. Deducir la ecuación de la difusión en un medio que se mueve con la velocidad constante en el sentido según el eje x si las superficies de igual concentración en cada momento de tiempo t son planos perpendiculares al eje x .

8. Deducir la ecuación de la difusión de las partículas suspendidas tomando en consideración la precipitación y suponiendo que la velocidad de las partículas excitadas por la fuerza de gravedad es constante y que la concentración de las partículas depende sólo de una coordenada geométrica z (la altura) y el tiempo t . Escribir la condición de frontera que corresponda al tabique impermeable.

9. Deducir la ecuación de la difusión con las condiciones del problema 6 para una sustancia cuyas partículas:

a) se desintegran (por ejemplo, un gas inestable), además la velocidad de desintegración de la sustancia que se difunde en cada punto del espacio es proporcional a la concentración;

b) se multiplican (por ejemplo, la difusión de neutrones), además la velocidad de multiplicación de la sustancia que se difunde en cada punto del espacio es proporcional a la concentración.

10. Plantear el problema de contorno acerca el movimiento de una capa de líquido viscoso entre dos planos paralelos si uno de los planos en el momento de tiempo $t = 0$ empieza a moverse paralelamente al otro con una velocidad dada y dirección constante. Despreciar la acción de la fuerza de gravedad.

11. Deducir la ecuación para el proceso de propagación del campo electromagnético plano en un medio conductor. (El medio se llama conductor si se pueden despreciar las corrientes de desplazamiento en comparación con las corrientes de conducción).

2. Medios heterogéneos, factores concentrados; ecuaciones con coeficientes variables y condiciones de conjugación

En este punto primeramente se estudian los medios constantes a trozos y los factores concentrados lo que conduce a unas ecuaciones con los coeficientes constantes a trozos y a las condiciones de conjugación. Después se estudian los problemas que conducen a ecuaciones con los coeficientes continuamente variables.

12. Una barra no acotada con la sección transversal constante es obtenida mediante la unión de dos barras homogéneas semiacotadas con diferentes coeficientes de la conducción calorífica y de termodifusividad.

Plantear el problema de contorno para determinar la temperatura dentro de esta barra, estudiando los casos cuando:

a) los extremos de las barras componentes son unidos directamente (soldados tope a tope);

b) los extremos de las barras están unidos mediante el acoplamiento pesado con la capacidad calorífica C_0 , además el material del acoplamiento tiene una conductibilidad térmica muy grande.

Considerar termoaisladas las superficies de la barra y la exterior (no adyacente a la barra) del acoplamiento.

13. Un recipiente cilíndrico cerrado con paredes impermeables es obtenido mediante la unión, en un momento inicial de tiempo de dos recipientes cilíndricos, cada uno de los cuales está lleno de un medio homogéneo con la sustancia distribuida uniformemente, además la concentración de esta sustancia en ambos recipientes es diferente y las propiedades de los medios en uno y otro recipientes son distintas.

Plantear el problema de contorno acerca de la difusión de la sustancia indicada en el cilindro compuesto, estudiando los casos cuando:

a) los cilindros están unidos directamente;

b) los cilindros están unidos mediante un tabique semipermeable.

14. Plantear el problema de contorno acerca del calentamiento de una barra fina por la cual resbala con una velocidad constante un horno eléctrico de potencia constante que linda estrechamente con la barra, si la superficie exterior del horno no adyacente a la barra es térmicamente aislada y la capacidad calorífica del horno es despreciable.

15. Un metal fundido llena un recipiente cilíndrico vertical con paredes y fondo térmicamente aislados. Desde el momento $t = 0$ la superficie libre del metal se mantiene a la temperatura $u_1 = \text{const}$, más baja que la de fusión. Plantear el problema de contorno acerca del enfriamiento y el endurecimiento del metal si su temperatura inicial es igual a $u_0 = \text{const}$.

16. Plantear el problema de contorno acerca del movimiento bajo la acción de la fuerza de gravedad de una placa vertical fina infinitamente plana, en una capa del líquido viscoso entre dos placas inmóviles paralelas a la primera. Despreciar la acción del campo de la fuerza de gravedad sobre el líquido.

17. Plantear el problema de contorno acerca del enfriamiento de una barra calentada uniformemente que tiene la forma de un cono truncado, despreciando la torcedura de las superficies isotérmicas, si los extremos de la barra son de aislación térmica y sobre la superficie lateral se realiza el intercambio de calor con el medio de temperatura igual a cero.

3. Semejanza de problemas de contorno *)

18. Formular el problema acerca de la conducción calorífica análogo al problema 10 acerca del movimiento del líquido viscoso. Establecer las condiciones necesarias y suficientes para que el primer problema sea semejante al segundo con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u dados.

19. Formular el problema acerca de la conductibilidad térmica 2 (problema (I)) análogo al problema 9 (problema (II)) acerca de la difusión de un gas inestable. Establecer las condiciones necesarias y suficientes de semejanza del problema (I) y el problema (II) con los coeficientes de semejanza dados.

20. Formular el problema para determinar la tensión eléctrica en un cable, análogo al problema para establecer la temperatura dentro de la barra: «Hallar la temperatura de la barra si en un extremo de la misma y sobre su superficie lateral se realiza el intercambio de calor con un medio de temperatura igual a cero, y la temperatura del otro extremo varía según una ley dada; la temperatura inicial de la barra es igual a cero» (problema (II)). Establecer las condiciones necesarias y suficientes de semejanza del problema (I) y el problema (II) con los coeficientes de semejanza dados.

21. Formular un problema acerca de la conducción calorífica (problema (I)) análogo al problema acerca de la propagación del campo magnético plano en una capa conductora $0 \leq x \leq l''$ (problema (II)) con las condiciones iniciales nulas, suponiendo que en todas partes a la izquierda de la capa se estableció un campo magnético homogéneo paralelo a la capa, además el plano $x = l''$ es un conductor ideal.

§ 2. Método de separación de variables

En el primer punto**) del presente párrafo, se han reunido problemas para medios homogéneos e isotrópicos; ellos llevan a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. En el segundo punto se examinan los problemas para los medios heterogéneos y también algunos problemas con factores concentrados***).

*) Acerca del concepto de la semejanza de los problemas de contorno, véase el cap. II § 4, págs. 21 y 122.

**) Las barras, cables, cilindros que aparecen en este punto se consideran de sección transversal constante.

***) Véase la primera llamada en la página 32.

1. Medios homogéneos isotrópicos. Ecuaciones con coeficientes constantes

a) Problemas de conducción calorífica con condiciones de frontera y términos independientes constantes

22. a) Hallar la distribución de la temperatura dentro de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada, si la temperatura de sus extremos se mantiene igual a cero y la temperatura inicial es igual a una función arbitraria $f(x)$.

b) Examinar, en particular, el caso cuando $f(x) = U_0 = \text{const}$, y estimar el error que se comete con la sustitución de la suma de la serie que tiene solución en el punto $x = l/2$ por su suma parcial y establecer desde qué momento de tiempo la razón de la suma de todos sus términos, empezando desde el segundo, y el primer término será a ciencia cierta menor que un $\varepsilon > 0$ dado de antemano.

Observación. En este caso diremos que en el punto en examen comenzó el régimen regular*) con exactitud relativa ε .

23. La temperatura inicial de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada es igual a

$$U_0 = \text{const}, \quad (1)$$

y sobre sus extremos se mantiene la temperatura constante

$$u(0, t) = U_1 = \text{const}, \quad u(l, t) = U_2 = \text{const}, \\ 0 < t < +\infty. \quad (2)$$

Hallar la temperatura $u(x, t)$ de la barra para $t > 0$; hallar también la temperatura estacionaria

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t).$$

24. La temperatura inicial de la barra $0 < x < l$ es una función arbitraria $f(x)$. La temperatura de los extremos es constante

$$u(0, t) = U_1 = \text{const}, \quad u(l, t) = U_2 = \text{const}, \\ 0 < t < +\infty.$$

Sobre la superficie lateral se realiza el intercambio de calor según la ley de Newton, con un medio de temperatura $u_0 = \text{const}$. Hallar la temperatura de la barra. Examinar, en particular, el caso cuando $U_1 = U_2 = 0$, $f(x) = 0$.

25. Hallar la temperatura de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral y los extremos de aislación térmica, si su temperatura inicial es una función arbitraria de x . Pasar después al caso cuando sobre la superficie lateral se realiza el intercambio de calor por convección (según la ley de Newton) con un medio de temperatura igual a cero.

*) Para más detalles sobre el régimen regular véase [25].

26. Hallar la temperatura de la barra sobre la superficie lateral donde se realiza el intercambio de calor con un medio de temperatura nula, si a los extremos de la barra se suministran los flujos caloríficos externos constantes y la temperatura inicial es una función arbitraria.

27. Hallar la temperatura de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada si un extremo ($x = 0$) se mantiene a una temperatura fija dada y al otro ($x = l$) se le suministra un flujo calorífico externo constante dado, la temperatura inicial es arbitraria. Examinar, en particular, el caso cuando la temperatura inicial es igual a cero y el extremo $x = l$ está termoaislado; estimar el error que se comete al sustituir la suma de la serie que representa la solución en el punto $x = l$ por su suma parcial. Hallar el momento de tiempo desde que en el extremo $x = l$ a ciencia cierta comienza un régimen regular*) con exactitud relativa ε .

28. Hallar la temperatura de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada y el extremo $x = 0$ aislado térmicamente, si la temperatura inicial de la barra es igual a cero y a través del extremo $x = l$ a la barra se le suministra un flujo calorífico constante. Estimar el error que se comete al sustituir la suma de la serie que representa la solución en el punto $x = 0$ por su suma parcial.

29. Hallar la temperatura de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada, si su extremo ($x = 0$) está aislado y en el otro extremo ($x = l$) se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura $U_0 = \text{const}$. La temperatura inicial de la barra es igual a cero. Estimar el error que se comete al sustituir la suma de la serie, que representa la solución en el punto $x = 0$, por su suma parcial; hallar el momento desde que en el extremo $x = 0$ a ciencia cierta tendrá lugar el régimen regular**) con exactitud relativa ε .

30. a) Hallar la temperatura de una barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada, si en cada extremo suyo se realiza un intercambio de calor por convección con el medio exterior que tiene temperatura constante; la temperatura inicial es arbitraria.

b) Examinar, en particular, el caso cuando la temperatura del medio exterior en ambos extremos es idéntica y la temperatura inicial de la barra es igual a cero; establecer la relación con el problema 29.

* Sobre el régimen regular véase el planteamiento del problema 22 y la correspondiente observación. Aquí se debe examinar la razón de todos los términos que también dependen exponencialmente del tiempo, empezando desde el segundo, con respecto al primer término que también depende exponencialmente del tiempo; estos términos se suponen numerados en el orden de crecimiento de sus valores propios.

**) Véase el problema 22 y la llamada al problema 27.

31. Resolver el problema 30 a), suponiendo que sobre la superficie lateral de la barra se realiza un intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero.

32. Hallar la distribución de la temperatura dentro del anillo homogéneo fino de radio 1 sobre la superficie de que se realiza el intercambio de calor por convección con un medio ambiente de temperatura constante; la temperatura inicial del anillo es arbitraria*). Examinar, en particular, el caso cuando en el momento inicial de tiempo el anillo está calentado uniformemente.

b) *Problemas de la conducción calorífica con condiciones de frontera variables y términos independientes vinculados a x y t*

33. Hallar la distribución de la temperatura dentro de la barra $0 < x < l$ con la superficie lateral termoaislada si sobre su extremo $x = 0$ se mantiene una temperatura igual a cero, y en el extremo $x = l$ la temperatura varía según la ley

$$u(l, t) = At, \quad A = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty.$$

La temperatura inicial de la barra es igual a cero.

34. Hallar la temperatura de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada si sobre la barra se distribuyen continuamente manantiales de calor con densidad $\Phi(t) \sin \frac{\pi x}{l}$, la temperatura inicial de la barra es una función arbitraria $f(x)$ y la temperatura de los extremos se mantiene igual a cero.

35. a) Hallar la temperatura de la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada, si la temperatura de la barra es una función arbitraria $f(x)$, la temperatura de los extremos se mantiene igual a cero, sobre la barra están distribuidos continuamente manantiales de calor con densidad $F(x, t)$.

b) Examinar, en particular, el caso límite cuando sobre la barra actúa sólo un manantial concentrado con potencia constante Q , ubicado en el punto x_0 , $0 < x_0 < l$, y la temperatura inicial es igual a cero.

36. Sobre la barra $0 \leq x \leq l$, en cuya superficie lateral se realiza un intercambio de calor con un medio (la temperatura del medio es igual a cero), se mueve un horno a una velocidad constante v_0 . El flujo de calor desde el horno a la barra es igual a $q(t) = Ae^{-ht}$, donde h es el coeficiente de intercambio de calor que entra en la ecuación de la conducción calorífica $u_t = a^2 u_{xx} - hu$. Hallar la temperatura de la barra si su temperatura inicial es igual a cero y la de sus extremos se mantiene todo el tiempo igual a cero.

37. Resolver el problema 35 a) para la barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada si sobre sus extremos se realiza el

*) Véase el problema 3.

intercambio de calor con el medio de la temperatura que varía según una ley dada.

38. Hallar la temperatura de la barra $u(x, t)$, resolviendo el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - Hu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = hu(0, t) = \psi_1(t),$$

$$u_x(l, t) + hu(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l \quad (3)$$

mediante la reducción al problema homogéneo de contorno.

39. Hallar la expresión asintótica cuando $t \rightarrow +\infty$ para la temperatura $u(x, t)$ dentro de una barra con la superficie termoaislada, si sobre sus extremos se cumple una de las condiciones siguientes:

- a) $u(0, t) = 0, u(l, t) = A \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty,$
- b) $u(0, t) = 0, u_x(l, t) = A \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty,$
- c) $u(0, t) = 0, u_x(l, t) + hu(l, t) = A \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty.$

40. Sobre la superficie de un anillo fino de radio 1 se realiza el intercambio de calor con un medio de temperatura igual a cero; la temperatura inicial del anillo también es igual a cero*). En cierto punto fijo del anillo en el momento inicial de tiempo se desprenden Q unidades de calor. Hallar la temperatura del anillo. Estudiar el punto del anillo diametralmente opuesto al punto en que se desprendió el calor y estimar el error que se comete al sustituir la suma de la serie, que representa la solución en este punto, por su suma parcial.

c) Problemas de difusión

41. La presión y la temperatura del aire dentro del cilindro $0 \leqslant x \leqslant l$ son iguales a los de la atmósfera; un extremo del cilindro desde el momento $t = 0$ está abierto y el otro todo el tiempo queda cerrado. La concentración de cierto gas en el aire ambiente es igual a $U_0 = \text{const}$. Desde el momento $t = 0$ el gas se difunde en el cilindro a través del extremo abierto. Hallar la cantidad de gas que se difunde en el cilindro si su concentración inicial en el cilindro es nula.

42. Resolver el problema anterior, suponiendo que ambos extremos del cilindro están tapados por un tabique semipermeable a través del cual se realiza la difusión.

43. Resolver el problema 41, suponiendo que el gas en difusión se desintegra, además la velocidad de la desintegración en cada punto es proporcional a la concentración en el mismo punto.

*) Véanse los problemas 3 y 32.

44. El cilindro $0 \leq x \leq l$ está lleno de una sustancia que se difunde, con partículas que se multiplican, además la velocidad de la multiplicación en cada punto es proporcional a la concentración en el mismo punto. Hallar la longitud crítica del cilindro*) para los casos cuando:

- la concentración sobre ambos extremos se mantiene igual a cero;
- la concentración en uno de los extremos se mantiene igual a cero y el otro extremo está tapado herméticamente;
- ambos extremos del cilindro están tapados herméticamente.

d) *Problemas de electrodinámica*

45. Hallar la tensión eléctrica en un cable $0 \leq x \leq l$ que tiene un extremo aislado y al otro se le aplica una fuerza electromotriz constante. La autoinducción distribuida y la fuga del cable son despreciablemente pequeñas, el potencial inicial es igual a $v_0 = \text{const}$, la corriente inicial es igual a cero.

46. La autoinducción concentrada y la fuga del cable $0 \leq x \leq l$ son iguales a cero; el potencial y la intensidad iniciales también son iguales a cero. Hallar la tensión en el cable si uno de sus extremos ($x = l$) está puesto a tierra por la capacidad concentrada C_0 y al otro se le aplica una fuerza electromotriz constante E_0 .

47. Hallar la tensión eléctrica en el cable $0 \leq x \leq l$ con autoinducción y fuga despreciablemente pequeñas, si su extremo $x = l$ está puesto a tierra, la intensidad y el potencial iniciales son iguales a cero y al extremo $x = 0$ se le aplica por la resistencia concentrada R_0 una fuerza electromotriz E_0 .

48. Una capa conductora $0 \leq x \leq l$ estaba libre de los campos magnéticos. En el momento $t = 0$ en todas partes fuera de la capa surgió un campo magnético homogéneo constante H_0 paralelo a la capa. Hallar el campo magnético dentro de la capa para $t > 0$. Hallar el momento de tiempo a partir del cual en el punto medio de la capa a ciencia cierta tendrá lugar el régimen regular con la exactitud relativa ε .

2. Medios heterogéneos y factores concentrados.

Ecuaciones con coeficientes variables y condiciones de conjugación

49. Una barra $0 \leq x \leq l$ con la superficie lateral termoaislada y la sección transversal constante está compuesta de dos barras homogéneas $0 \leq x \leq x_0$, $x_0 \leq x \leq l$ con las propiedades físicas diferentes. Hallar la temperatura dentro de la barra si sus extremos se mantienen a una temperatura nula y la temperatura inicial es arbitraria.

*) Acerca de la noción de las dimensiones críticas véase [7], págs. 524—525.

50. Hallar la temperatura de la barra homogénea (con la superficie lateral termoaislada) en cuyo punto x_0 ($0 < x_0 < l$) se encuentra la capacidad calorífica concentrada C_0 . La temperatura inicial de la barra es arbitraria y los extremos se mantienen a una temperatura igual a cero.

51. Hallar la temperatura de la barra $0 \leq x \leq l$ (con la superficie lateral termoaislada) que tiene la forma de cono truncado (véase el problema 17) si la temperatura de los extremos de la barra se mantiene igual a cero y la temperatura inicial de la barra es arbitraria.

52. Resolver el problema anterior para una barra cuya superficie lateral se obtiene mediante la revolución de la curva $y = Ae^{-mx}$ alrededor del eje x .

53. Un plano vertical pesado se encuentra en una capa de líquido viscoso que está entre dos planos verticales inmóviles. En el momento $t = 0$ el plano empieza a caer. Hallar su velocidad y la velocidad del líquido viscoso si las velocidades iniciales son iguales a cero y el plano que cae es equidistante de los planos de frontera. Se puede despreciar la acción del campo de la fuerza de gravedad sobre el líquido.

§ 3. Método de representaciones integrales y funciones de manantial

En este párrafo se estudia la utilización de las representaciones integrales a la solución de los problemas de contorno para la ecuación $u_t = a^2 u_{xx} + bu + f(x, t)$ (donde b y f pueden ser idénticamente iguales a cero) en el caso de una recta no acotada, una semirrecta y un segmento. Primero se dan los problemas acerca de la utilización de la transformación integral de Fourier. Despues, los problemas acerca de la construcción de las funciones de manantiales (las funciones de Green) y el empleo de ellas en la resolución de los problemas de contorno.

1. Medios isotrópicos homogéneos.

Aplicación de la transformación integral de Fourier a los problemas sobre la recta y la semirrecta

Utilizando la transformación integral de Fourier*), resolver los problemas siguientes de contorno.

$$54. u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, 0 < t < +\infty, \\ u(x, 0) = f(x), -\infty < x < +\infty.$$

*) Véanse las respuestas y indicaciones, cap. II, § 4, pág. 219.

55. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$
 $u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$

56. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$

$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty.$

57. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$

$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty$

58. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$

$u(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

59. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$

$u_x(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty$

60. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$

$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

61. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$

$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

62. Utilizando la ecuación del problema 186 del cap. II, demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha \lambda^2} \cos \lambda x}{\lambda^2 + h^2} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{4h \sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-h\xi} (e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha}}) d\xi.$$

63. Utilizando la ecuación del problema 187 del cap. II, demostrar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha \lambda^2} \lambda \sin \lambda x}{\lambda^2 + h^2} d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{4 \sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-h\xi} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\alpha}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4\alpha}} \right) d\xi.$$

64. Utilizando la transformación de Fourier con respecto al núcleo $K(x, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x}{\lambda^2 + h^2}$, resolver el problema de contorno

$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$

$u_x(0, t) - hu(0, t) = -h\varphi(t), \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$

65. Utilizando la transformación de Fourier respecto al mismo núcleo que en el problema anterior, resolver el problema de contorno

$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$

$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$

$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty.$

2. Medios isotrópicos homogéneos.**Construcción de las funciones de influencia de manantiales concentrados**

En el presente punto se unen principalmente los problemas acerca de la construcción y la utilización de las funciones de influencia de manantiales puntiformes instantáneos de calor (las funciones de Green» para la ecuación de conducción calorífica). Primero van los problemas para una recta no acotada, después, para una semirecta, además se supone que el medio es isotrópico y homogéneo, después se estudian los problemas para una recta no homogénea compuesta de dos semirectas homogéneas y algunos otros problemas con las heterogéneas de los medios y los factores concentrados para una recta no acotada y para una semirecta; al final van los problemas para un segmento finito, además se estudian dos representaciones diferentes de la función de influencia de manantiales puntiformes instantáneos de calor: una se obtiene mediante el método de separación de variables (de Fourier), la otra, mediante el método de reflexión, y se realiza la comparación de ambas.

a) Recta no acotada

66. La superficie de una barra no acotada $-\infty < x < +\infty$ es termoaislada, la temperatura inicial es igual a cero. En el momento inicial de tiempo en el punto $x = \xi$ de la barra se desprendieron instantáneamente Q unidades de calor. Hallar la temperatura de la barra. (La construcción de la función de manantial para la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ sobre la recta $-\infty < x < +\infty$).

67. Resolver el problema anterior para la barra sobre la superficie en la que se realiza el intercambio de calor por convección con el medio de temperatura igual a cero. (La construcción de la función de manantial para la ecuación $u_t = a^2 u_{xx} - hu$ sobre la recta $-\infty < x < +\infty$).

68. Utilizando la función de manantial obtenida en la solución del problema 66, resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

69. Utilizando la función de manantial obtenida en la solución del problema 67, resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu + f(x, t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

70. Con las condiciones del problema 66 hallar aquel momento de tiempo en que la temperatura en el punto x alcanza un máximo y hallar este valor máximo de la temperatura (problema acerca de la propagación del impulso calorífico).

71. Sobre la superficie de la barra $-\infty < x < +\infty$ se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura nula; la temperatura inicial de la barra es igual a cero; en el punto $x = 0$ actúa continuamente un manantial de calor de potencia constante Q . Hallar la temperatura $u(x, t)$ de la barra. Obtener también la temperatura estacionaria

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t).$$

¿Cuál sería la temperatura estacionaria si la superficie de la barra fuese termoaislada?

72. Mediante la fórmula obtenida en la solución del problema 68 resolver el problema

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < x < -l, \\ U_0 = \text{const} \neq 0 & \text{para } -l < x < l, \\ 0 & \text{para } l < x < +\infty. \end{cases}$$

73. Mediante la fórmula obtenida en la solución del problema 68 resolver el problema

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < x < 0, \\ Ae^{-\alpha x} & \text{para } 0 < x < +\infty, \\ A = \text{const}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \end{cases}$$

74. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < x < -l, \\ U_0 = \text{const} & \text{para } -l < x < l, \\ 0 & \text{para } l < x < +\infty \end{cases}$$

(compárese con el problema 72).

75. Resolver el problema de contorno 14 acerca del calentamiento de la barra por un horno móvil con la condición inicial nula.

b) Semirrecta

76. Construir la función de manantial para la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ sobre la semirrecta $0 < x < +\infty$, sobre cuyo extremo se da una condición de frontera de primer género. Después pasar al caso de la ecuación $u_t = a^2 u_{xx} - hu$.

77. Resolver el problema anterior si en el extremo de la semirrecta $0 < x < +\infty$ se da una condición de frontera de segundo género.

78. Resolver el problema 76 si en el extremo de la semirrecta $0 < x < +\infty$ se da una condición de frontera de tercer género.

79. Utilizando la función de manantial, resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

80. Utilizando la función de manantial, resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u_x(0, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

81. Utilizando la función de manantial, resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = -h\varphi(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

82. Demostrar la validez de la afirmación siguiente. Para que la solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$\sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \quad x=0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

se pueda representar en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

es suficiente continuar la función $f(x)$ sobre el semieje negativo de x de tal modo que la función

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^N A_k f^{(k)}(x)$$

sea impar.

83. Demostrar la validez de la afirmación siguiente. Para que la solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$\sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad x=0, \quad u(x, 0)=0$$

se pueda representar en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^t \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau,$$

es suficiente continuar la función $f(x, t)$ sobre el semieje negativo x de tal modo que la función

$$F(x, t) = \sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k}$$

sea impar con respecto a x .

84. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = U_0, \quad 0 < x < +\infty.$$

Trazar los gráficos de la distribución de la temperatura en los momentos de tiempo $t = \frac{1}{8a^2}$, $t = \frac{1}{4a^2}$, $t = \frac{1}{2a^2}$ en el segmento $0 \leq x \leq 4$ y también la variación de la temperatura en los puntos $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq \frac{1}{a^2}$.

Hallar además la velocidad del movimiento del frente de temperatura αU_0 , donde $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \text{const}$.

85. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u(0, t) = U_0, \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

¿En qué momento de tiempo t la temperatura en el punto alcanza el valor αU_0 , $0 < \alpha < 1$?

86. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = \psi(x) = \begin{cases} U_0, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

87. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) \rightarrow hu(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = U_0 = \text{const}, \quad 0 < x < +\infty. \quad (3)$$

Obtener la representación asintótica de la temperatura del extremo de la barra para los valores grandes de tiempo

$$\begin{aligned} u(0, t) \approx \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 z^5} - \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^{n-1} z^{2n-1}} \right\}_{z=ah\sqrt{t}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Dar la expresión de la estimación del error que se comete al utilizar la fórmula (4) y hallar desde qué momento de tiempo el cálculo de $u(0, t)$ según la fórmula

$$u(0, t) \approx \frac{U_0}{ah\sqrt{\pi t}} \quad (5)$$

da un error que no sobrepasa a ciencia cierta en valor absoluto a un $\varepsilon > 0$ dado de antemano.

88. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - b^2 e^{-bx}, \quad k > 0, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$\begin{aligned} u(0, t) = U_0 = \text{const}, \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = 0, \\ 0 < x < +\infty. \end{aligned}$$

89. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$-u_x(0, t) = q, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty.$$

90. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - U_2), \quad U_2 = \text{const}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty,$$

$$u(0, t) = U_1, \quad 0 < t < +\infty, \quad U_1 = \text{const},$$

$$u(x, 0) = U_0, \quad 0 < x < +\infty, \quad U_0 = \text{const}.$$

91. La intensidad y la tensión iniciales en un cable homogéneo semiacotado $0 \leq x < +\infty$ son iguales a cero. La autoinducción de una unidad de longitud del cable es despreciablemente pequeña. Empezando desde el momento $t = 0$ al extremo del cable se le aplica una fuerza electromotriz constante E_0 . Hallar la tensión en el cable.

92. Resolver el problema de contorno

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) &= -Ah \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < +\infty. \end{aligned}$$

93. Hallar las ondas establecidas de la temperatura en un cable semiacotado $0 < x < +\infty$ con la superficie termoaislada si la temperatura del extremo de la barra varía según la ley

$$u(0, t) = A \cos \omega t.$$

Hallar la velocidad de propagación de la onda de la temperatura con la frecuencia dada ω (la dispersión de las ondas de la temperatura!).

94. La intensidad y la tensión iniciales en un cable homogéneo $0 \leq x < +\infty$ son iguales a cero. Empezando desde el momento $t = 0$ en el punto $x = 0$ se aplica una fuerza electromotriz $E(t) = E_0 \cos \omega t$. Hallar la tensión en el cable si la autoinducción y la fuga de una unidad de longitud del cable son despreciablemente pequeñas.

95. La temperatura inicial de una barra semiacotada con la superficie lateral termoaislada está dada

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty.$$

¿Qué flujo calorífico debe administrarse a la barra a través de su extremo para que la temperatura del extremo varíe según la ley dada

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad \mu(0) = f(0)?$$

Examinar el caso particular cuando $f(x) \equiv 0$.

96. La temperatura inicial de una barra semiacotada con la superficie lateral termoaislada está dada

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

en el extremo $x = 0$ se realiza el intercambio de calor por convección con el medio exterior. ¿Cómo debe variar la temperatura del medio exterior para que la temperatura del extremo de la barra varíe según la ley dada

$$u(0, t) = \mu(t), \quad \mu(0) = f(0), \quad 0 < t < +\infty?$$

Examinar el caso particular cuando $f(x) \equiv 0$.

97. Resolver el problema 95 con la condición de que sobre la superficie lateral de la barra se realice el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero.

98. Resolver el problema 96 con la condición de que sobre la superficie lateral de la barra se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero.

99. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad v_0 t < x < +\infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad u(v_0 t, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty.$$

100. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < t < +\infty, \quad v_0 t < x < +\infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

$$u(v_0 t, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty.$$

101. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < t < +\infty, \quad v_0 t < x < +\infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$

$$u(v_0 t, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty.$$

102. Resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad v_0 t < x < +\infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

$$u_x(v_0 t, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty.$$

c) Segmento finito

Los problemas 103—105 acerca de la construcción de las funciones de manantial que se dan en este apartado se deben resolver mediante dos métodos: el de reflexión y el de separación de variables; uno de ellos da una buena representación de la función de manantial para las magnitudes pequeñas del tiempo t y el otro, para las grandes.

103. Construir la función de influencia de un manantial puntiforme instantáneo para una barra finita con la superficie lateral termoaislada si sus extremos se mantienen a una temperatura igual a cero. Estimar los restos de las series que representan la solución.

104. Construir la función de influencia de un manantial puntiforme instantáneo de calor para una barra finita con la superficie lateral termoaislada si sus extremos también son termoaislados. Estimar los restos de las series que representan la solución.

105. Construir la función de influencia de un manantial puntiforme instantáneo de calor para una barra finita con la superficie lateral termoaislada si uno de sus extremos ($x = 0$) es termoaislado y el otro ($x = l$) se mantiene a una temperatura nula. Estimar los restos de las series que representan la solución.

106. a) Hallar N a partir del cual, para el resto de la serie (2) de la solución del problema 103 se cumple la desigualdad

$$|R_N(x, \xi, t)| < \varepsilon \quad (1)$$

para $0 \leq x, \xi \leq l, 0 \leq t \leq t^*$.

b) Hallar N a partir del cual, para el resto de la serie (12) de la solución del problema 103 se cumple la desigualdad (1) para $0 \leq x, \xi \leq l, 0 \leq t \leq t^*$.

107. Resolver el problema anterior para las series (1) y (6) de la respuesta al problema 104.

108. Resolver los problemas 103, 104, 105 en el caso cuando sobre la superficie lateral de la barra se realiza el intercambio de calor por convección con un medio de temperatura igual a cero.

109. Mediante la función de manantial hallada en la solución del problema 103 resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad 0 < x < l.$$

110. Mediante la función de manantial hallada en la solución del problema 104 resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (3)$$

111. La temperatura de un extremo de la barra ($x = 0$) se mantiene constante y distinta de cero, $u(0, t) = U_0 \neq 0$, y la temperatura del otro extremo ($x = l$) todo el tiempo es igual a cero, $u(l, t) = 0$. Hallar la temperatura de la barra si su superficie lateral es termoaislada y la temperatura inicial es igual a cero; expresar la temperatura de la barra mediante la integral de los errores.

112. Un extremo de la barra ($x = l$) está termoaislado y al otro extremo ($x = 0$) se suministra el flujo calorífico constante $[-\lambda u_x(0, t)] = -\lambda g_0$. Hallar la temperatura de la barra si su temperatura inicial es igual a cero y la superficie lateral es termoaislada; expresar la temperatura de la barra mediante la integral de los errores.

3. Medios heterogéneos y factores concentrados; ecuaciones con coeficientes constantes a trozos y condiciones de conjugación

113. Una barra no acotada $-\infty < x < +\infty$ con la superficie lateral termoaislada y la sección transversal constante se obtiene mediante la unión en el punto $x = 0$ de dos barras homogéneas semiacotadas $-\infty < x < 0$ y $0 < x < +\infty$; los topes de las barras están unidos estrechamente. La temperatura inicial, el coeficiente de termodifusividad y el coeficiente de la conductibilidad térmica

de las barras izquierda y derecha son iguales, respectivamente, a $U_1 = \text{const}$, a_1, k_1 ; $U_2 = \text{const}$, a_2, k_2 . Hallar la temperatura de la barra compuesta.

114. Resolver el problema anterior si la temperatura inicial es igual a

$$u(x, 0) = \begin{cases} f_1(x), & -\infty < x < 0, \\ f_2(x), & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

115. La barra no acotada es compuesta de dos barras semiacotadas de la forma indicada en el problema 113. Hallar la temperatura de la barra para $t > 0$ si en el momento de tiempo $t = 0$ en su punto $\xi = 0$ se desprendió instantáneamente $Q = c_2 \rho_2$ unidades de calor y la temperatura inicial de la barra era igual a cero.

116. Sobre el extremo de la barra semiacotada con la superficie lateral termoaislada se ha colocado una bola con capacidad calorífica C_0 y conductibilidad térmica muy grande, de modo que en cada momento de tiempo la bola puede considerarse calentada uniformemente y su temperatura igual a la del extremo de la barra. Sea la superficie de la bola también termoaislada.

Hallar la temperatura de la barra si su temperatura inicial es igual a

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty,$$

además $f(+0)$ y $f'(+0)$ existen.

117. Sea el semiespacio $x > 0$ lleno de un líquido con los coeficientes de termodifusividad y de conductibilidad térmica k_2, a_2 y la temperatura inicial $U_2 = \text{const}$, el plano $x = 0$ se mantiene a la temperatura constante $U_1 < U_2$, además U_1 es menor que la temperatura de la congelación del líquido.

Hallar la ley de la distribución del frente de congelación del líquido y también la temperatura del líquido y de la sustancia sólida en que se convierte el líquido al congelarse.

Capítulo IV

ECUACIONES DE TIPO ELÍPTICO

A ecuaciones de tipo elíptico conduce el estudio de los procesos estacionarios, es decir, que no varían durante el tiempo, de procesos de naturaleza física diferente. Aquí se relacionan los campos estacionarios eléctricos y magnéticos (electrostática, magnetostática, campos de corriente eléctrica continua), el movimiento potencial del líquido incompresible, los campos térmicos estacionarios, etc.

La ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ a que fundamentalmente está dedicado el capítulo presente, es la ecuación de tipo elíptico más sencilla. Más abajo, en el cap. VII, se plantean problemas para otras ecuaciones de tipo elíptico.

§ 1. Problemas físicos que se reducen a ecuaciones de tipo elíptico y planteamiento de los problemas de contorno

1. Problemas de contorno para las ecuaciones de Laplace y Poisson en un medio homogéneo

A diferencia de las ecuaciones de tipo hiperbólico y parabólico de problemas de contorno para las ecuaciones de tipo elíptico es característica la ausencia de las condiciones iniciales. Según los tipos de condiciones de frontera se distinguen para el problema de Laplace: el primer problema de contorno (problema de Dirichlet) si $u|_{\Sigma} = f_1$, el segundo problema de contorno (problema de Neumann) si $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = f_2$, el tercer problema de contorno si $(\frac{\partial u}{\partial n} + hu)|_{\Sigma} = f_3$, donde f_1, f_2, f_3 son ciertas funciones definidas sobre la frontera Σ del campo en que se busca la solución de la ecuación de Laplace.

1. *Campo estacionario de la temperatura.* Deducir la ecuación que satisface la temperatura del campo estacionario térmico en un medio homogéneo; al deducir la ecuación tener en cuenta la existencia de los manantiales de calor distribuidos y que no varían con el tiempo. Dar la interpretación física a las condiciones de frontera de primer, segundo y tercer género. Establecer la condición necesaria de la existencia de la temperatura estacionaria para el segundo problema de contorno.

2. *Ecuación de la difusión estacionaria.* Deducir la ecuación del proceso estacionario de la difusión: a) en un medio isotrópico homogéneo que está en reposo, b) en un medio isotrópico homogéneo que se mueve con una velocidad dada, por ejemplo, según el eje x .

3. *Ecuación de la electrostática.* Demostrar, basándose en las ecuaciones de Maxwell, que el potencial del campo electrostático satisface la ecuación de Poisson con el segundo miembro proporcional a la densidad volumétrica de la carga $\rho(x, y, z)$. Dar la interpretación física a las condiciones de frontera de primer y segundo género.

4. *Ecuación de la magnetostática.* Demostrar que el potencial del campo magnético estacionario en ausencia de las corrientes eléctricas satisface la ecuación de Laplace.

5. *Campo de la corriente eléctrica continua.* Convencerse de que el potencial del campo eléctrico de la corriente eléctrica continua satisface la ecuación de Laplace. Formular las condiciones de frontera 1) sobre la superficie de conducción ideal que está puesta a tierra, 2) sobre la frontera con el dieléctrico.

6. *Movimiento potencial del líquido incompresible.* Demostrar que el potencial de velocidades del flujo estacionario del líquido incompresible satisface la ecuación de Laplace. Escribir la condición de frontera sobre la superficie del cuerpo sólido que está en reposo o se mueve con una velocidad dada.

7. *Problemas fundamentales de la electrostática.* El campo electrostático creado por el conductor cargado de las dimensiones finitas puede determinarse: 1) definiendo el valor del potencial del conductor; 2) definiendo el valor de la carga del conductor. Estos son el primer y segundo problemas fundamentales de la electrostática. Formularlos matemáticamente.

2. Problemas de contorno para la ecuación de Laplace en medios heterogéneos

En un medio heterogéneo, pero isotrópico, la ecuación fundamental del campo estacionario es de la forma

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = 0$$

ó

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0,$$

donde la característica del medio $k = k(x, y, z)$ es una magnitud variable. Si el coeficiente k tiene una discontinuidad sobre cierta superficie, entonces sobre ella se cumplen las condiciones de conjugación

$$u_1 = u_2, \quad (1)$$

$$k_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 = k_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_2, \quad (2)$$

donde los dígitos 1 y 2 significan respectivamente los valores límites izquierdo y derecho sobre la superficie de la discontinuidad.

8. Resolver el problema 1, considerando que el coeficiente de la conductibilidad térmica es la variable $k = k(x, y, z)$. Plantear el problema de contorno sobre la conducción calorífica para el caso del medio homogéneo a trozos (para el caso de k constante a trozos), deduciendo previamente la condición de conjugación (1) y (2). Dar la interpretación física de estas condiciones.

9. Escribir la ecuación para el potencial del campo eléctrico en un dieléctrico no homogéneo con la constante dieléctrica

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z).$$

Suponiendo que $\varepsilon(x, y, z)$ es constante a trozos, deducir las condiciones de conjugación sobre la superficie de la discontinuidad de la función $\varepsilon(x, y, z)$ y formular el problema de contorno correspondiente.

10. Resolver el problema análogo a los problemas 8 y 9 para el campo magnético estacionario.

11. Resolver el problema análogo a los problemas 8 y 9 para el campo eléctrico de la corriente continua.

12. *Semejanza de diferentes campos estacionarios.* Establecer la semejanza entre el campo de la corriente eléctrica continua, por una parte, y los campos térmico, electrostático, magnetostático, el campo de las concentraciones del proceso estacionario de la difusión y el de las velocidades del flujo potencial del líquido incomprimible, por otra parte.

Comparar las condiciones de conjugación en la frontera de discontinuidad de las constantes físicas.

§ 2. Problemas simples para las ecuaciones de Laplace y Poisson

En este párrafo se dan los problemas de contorno para las ecuaciones de Laplace y Poisson cuyas soluciones pueden ser halladas directamente, mediante la selección simple, sin la utilización de los métodos generales.

1. Problemas de contorno para la ecuación de Laplace

13. Examinemos el círculo de radio a con centro en el origen de las coordenadas. Sean (ρ, φ) las coordenadas polares y (x, y) las rectangulares. Hallar la solución del primer problema de contorno interior para la ecuación de Laplace si están dadas las siguien-

tes condiciones de frontera:

- a) $u|_{\rho=a} = A;$
- b) $u|_{\rho=a} = A \cos \varphi;$
- c) $u|_{\rho=a} = A + By;$
- d) $u|_{\rho=a} = Axy;$
- e) $u|_{\rho=a} = A + B \sin \varphi;$
- f) $u|_{\rho=a} = A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi;$

donde A y B son constantes.

14. Resolver el segundo problema interior de contorno

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_C = f(\varphi)$$

para el círculo C de radio a con centro en el punto $\rho = 0$ para los siguientes casos particulares:

- a) $f = A;$
- b) $f = Ax;$
- c) $f = A(x^2 - y^2);$
- d) $f = A \cos \varphi + B;$
- e) $f = A \sin \varphi + B \sin^3 \varphi.$

Mencionar los problemas incorrectamente planteados.

15. Hallar las funciones $u(\rho, \varphi)$ armónicas fuera del círculo de radio $\rho = a$ y que satisfacen las condiciones de frontera a)—f) del problema 13 (primer problema exterior de contorno para el círculo).

16. Hallar las funciones $u = u(\rho, \varphi)$ armónicas fuera del círculo de radio $\rho = a$ y que satisfacen las condiciones de frontera del problema 14 (segundo problema exterior de contorno para el círculo).

17. Hallar la función $u = u(\rho, \varphi)$, armónica dentro del anillo $a < \rho < b$ y que satisface las condiciones de frontera

$$u|_{\rho=a} = u_1, \quad u|_{\rho=b} = u_2.$$

Utilizando la solución del problema, hallar la capacidad de un condensador cilíndrico, calculada por unidad de longitud.

18. Hallar la función armónica dentro del sector circular $0 < \rho < a$, $0 < \varphi < \alpha$ si

$$u|_{\rho=a} = \frac{u_0}{\alpha} \varphi, \quad u|_{\varphi=0} = 0, \quad u|_{\varphi=\alpha} = u_0.$$

19. Hallar la solución de la ecuación de Laplace sobre el semiplano $y > 0$ que toma para $y = 0$ los valores de frontera $u = \varphi_1$ para $x < 0$ y $u = \varphi_2$ para $x > 0$; compararla con la solución del problema 18.

20. Determinar la función u , armónica

- a) dentro de la esfera de radio $r = a$,

b) fuera de la esfera $r = a$
y que toma el valor u_0 sobre la esfera.

21. Determinar la distribución estacionaria de la temperatura dentro de la capa esférica $a < r < b$ si la esfera $r = a$ se mantiene a la temperatura u_1 y la esfera $r = b$, a la temperatura u_2 .

22. Utilizando la solución del problema 21, hallar la capacidad de un condensador esférico lleno de un dieléctrico con la constante dieléctrica $\epsilon = \text{const}$ y limitado por las esferas $r = a$ y $r = b$.

23. Hallar la capacidad de un condensador esférico lleno de un dieléctrico heterogéneo con la constante dieléctrica

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } a < r < c, \\ \epsilon_2 & \text{para } c < r < b. \end{cases}$$

24. Resolver el problema análogo al anterior para un condensador cilíndrico.

25. Hallar el potencial del campo electrostático de la esfera de radio a que está cargada hasta el potencial u_0 y colocada en un medio no acotado con la siguiente distribución de la constante dieléctrica

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } a < r < c, \\ \epsilon_2 & \text{para } r > c. \end{cases}$$

Examinar los casos particulares:

a) $c = \infty$, b) $\epsilon_2 = \infty$, c) $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$.

26. Hallar el campo electrostático del cilindro conductor infinito de radio $\rho = a$, cargado hasta el potencial u_0 , con la armadura dieléctrica limitada por la superficie cilíndrica de radio $\rho = b$ que se mantiene con un potencial nulo.

27. Hallar la función u , armónica dentro de la capa limitada por los planos $z = 0$ y $z = h$ si

$$u|_{z=0} = u_1, \quad u|_{z=h} = u_2.$$

28. Hallar la capacidad del condensador plano, calculada para una unidad del área de las armaduras si entre las armaduras del condensador se encuentra un dieléctrico con la constante dieléctrica ϵ . Examinar dos casos:

a) $\epsilon = \text{const}$ para $0 < z < h$,

b) $\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } 0 < z < h_1, \\ \epsilon_2 & \text{para } h_1 < z < h. \end{cases}$

29. Determinar la función $u = u(x, y)$, armónica dentro del rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ que satisface las condiciones

$$u(x, 0) = u_1, \quad u(x, b) = u_2, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a}} = 0.$$

2. Problemas de contorno para la ecuación de Poisson

30. Hallar la solución de la ecuación de Poisson $\Delta u = 1$ dentro del círculo de radio $\rho = a$ si $u|_{\rho=a} = 0$.

31. Resolver la ecuación $\Delta u = A$ dentro del círculo de radio $\rho = a$ para la condición de frontera $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a} = B$, eligiendo la constante B de modo que el problema tenga solución.

32. Se requiere determinar la solución de la ecuación $\Delta u = A$ dentro del anillo $a < \rho < b$ para las siguientes condiciones de frontera:

a) $u|_{\rho=a} = u_1, \quad u|_{\rho=b} = u_2;$

b) $u|_{\rho=a} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=b} = C;$

c) $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a} = B, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=b} = C.$

Determinar las constantes para las cuales los problemas tienen solución.

33. Hallar las soluciones

a) de la ecuación $\Delta u = 1$, b) de la ecuación $\Delta u = Ar + B$ dentro de la esfera $r < a$, si sobre ella se cumple la condición

$$u|_{r=a} = 0.$$

34. Hallar dentro de la capa esférica $a < r < b$ las soluciones de los problemas

a) $\Delta u = 1,$

b) $\Delta u = A + \frac{iB}{r}$

para las condiciones de frontera

$$u|_{r=a} = 0, \quad u|_{r=b} = 0.$$

§ 3. Función de manantial

La función de la influencia del manantial puntiforme (la función de Green) es un medio bastante poderoso para resolver los problemas de contorno para las ecuaciones de Laplace y de Poisson.

En este párrafo se dan los problemas acerca de la construcción de la función de manantial para una serie de campos que admiten la aplicación del método de imagen especular (el método de reflexión); aquí la función inicial es la función de manantial en un espacio infinito, igual a $\frac{e}{4\pi} \frac{1}{r}$, donde $\frac{e}{4\pi}$ es la potencia del manantial (la carga).

Son posibles diferentes interpretaciones físicas de la función de manantial (electrostática, térmica, etc.).

Al formular los problemas generalmente utilizaremos la interpretación electrostática de la función de manantial, suponiendo que las fronteras del campo son conductoras y puestas a tierra.

Los problemas acerca de la construcción de la función de manantial mediante el método de separación de variables se dan en el § 4.

1. Función de manantial para regiones con fronteras planas

35. Hallar el potencial del campo de una carga eléctrica puntiforme encima del plano $z = 0$, de conductibilidad ideal y puesto a tierra, y calcular la densidad de las cargas superficiales inducidas. Escribir la solución del primer problema de contorno para la ecuación de Laplace en el semiespacio $z \geq 0$.

36. Hallar el potencial de la carga puntiforme dentro de la capa acotada por dos planos de conductibilidad ideal $z = 0$ y $z = l$ que mantienen el potencial nulo. Examinar la convergencia de la serie construida mediante el método de reflexión y demostrar la posibilidad de la diferenciación doble, término a término, de esta serie.

37. Examinar el problema acerca del manantial puntiforme de la corriente eléctrica dentro de la capa conductora $0 < z < l$ acotada por los planos $z = 0$ y $z = l$.

Hallar las componentes del campo eléctrico y convercerse de que la utilización directa del método de reflexiones para buscar el potencial, lleva a una serie divergente.

38. Examinar el problema 37, considerando que una pared está aislada y sobre la segunda pared el potencial del campo es igual a cero. Investigar la convergencia de las series para el potencial.

39. Construir la función de manantial para la ecuación $\Delta u = 0$ en el semiespacio $z > 0$ con la condición de frontera de tercer género

$$\frac{\partial u}{\partial z} + hu = 0 \quad \text{para } z = 0.$$

40. Hallar el potencial de la carga puntiforme dentro de la «semicapa» $0 \leq z \leq l$, $x \geq 0$, acotada por los planos $z = 0$, $z = l$ y $x = 0$, considerando que las paredes son de conductibilidad ideal y tienen un potencial nulo.

41. Dentro del ángulo diedro de magnitud $\alpha = \frac{\pi}{n}$ (n es un número natural), acotado por las paredes de conductibilidad ideal con el potencial nulo, hay una carga eléctrica puntiforme. Hallar el campo eléctrico excitado por esta carga.

42. El ángulo diedro del problema 41 corta dos planos de conductibilidad ideal $z = 0$ y $z = l$, perpendiculares a la arista del ángulo diedro. Dentro de la región acotada por el ángulo diedro y estos planos se ha colocada una carga puntiforme.

El potencial de todos los planos es igual a cero.

Determinar el potencial del campo de esta carga. Examinar los casos particulares:

- $\alpha = \pi$ (compárase con el problema 36),
- $l \rightarrow \infty$ (compárase con el problema 35).

43. Dentro del ángulo diedro del problema 41 se ha colocado un manantial térmico de potencia Q .

Hallar la distribución estacionaria de la temperatura dentro de este ángulo si sus paredes son termoaisladas.

44. Resolver mediante la función de manantial el primer problema de contorno dentro del ángulo diedro de magnitud $\alpha = \frac{\pi}{n}$, donde n es un número natural, si sobre sus lados están dadas las condiciones de frontera

$$u|_{\varphi=a} = 0, \quad u|_{\varphi=0} = V.$$

45. Mediante la función de manantial resolver el primer problema de contorno para la ecuación de Laplace en el semiplano $y > 0$ si

$$u|_{y=0} = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0, \\ V & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

46. Hallar el potencial del campo electrostático excitado por la carga puntiforme dentro del hueco cilíndrico infinito, considerando que la frontera del campo es de conductibilidad ideal y tiene un potencial nulo, mientras que la sección perpendicular del hueco es rectangular de lados a y b .

47. Resolver el problema 46, suponiendo que la sección perpendicular tiene forma de triángulo rectángulo isósceles.

48. Resolver el problema 46 para el hueco cilíndrico semiacotado $z > 0$.

49. Hallar la expresión para el potencial de la carga puntiforme dentro del paralelepípedo rectangular con paredes de conductibilidad ideal que se mantienen con un potencial nulo.

2. Función de manantial para regiones con fronteras esféricas (circulares) y planas

50. Hallar el potencial del campo electrostático excitado por la carga puntiforme e , dentro de la esfera puesta a tierra.

51. Utilizando la solución del problema 50, hallar la densidad superficial de las cargas sobre la esfera y escribir la solución de primer problema interior de contorno para la ecuación de Laplace

dentro de la esfera; obtener de aquí la fórmula de Poisson que resuelve el primer problema de contorno para la ecuación de Laplace (véase [7], cap. IV, pág. 355).

52. Hallar el potencial del campo electrostático excitado por una carga puntiforme que se encuentra fuera de la esfera puesta a tierra.

53. Utilizando la solución del problema 52, calcular la densidad de las cargas superficiales sobre la esfera y escribir la solución del primer problema exterior de contorno para la esfera.

54. a) Dentro de un hueco cilíndrico infinito de sección circular se genera un campo electrostático por un hilo cargado, paralelo al eje del cilindro. Hallar el potencial de este campo.

b) Resolver el mismo problema si el hilo cargado se encuentra fuera del cilindro.

c) Utilizar las soluciones de los problemas a) y b) para resolver el problema de Dirichlet dentro y fuera del círculo.

55. Hallar la función de manantial para $\Delta u = 0$ dentro del hemisferio que está puesto a tierra y también para un cuarto de la esfera.

56. Construir la función de manantial para el problema de Dirichlet:

a) dentro del semicírculo,

b) dentro del cuarto del círculo,

c) dentro del sector con el ángulo de apertura $\alpha = \frac{\pi}{n}$.

57. Hallar el potencial del campo excitado por la carga puntiforme e , dentro de la capa esférica acotada por dos esferas conductoras concéntricas de radios a y b que están puestas a tierra. Investigar la convergencia de la serie construida y también de las series que se obtienen mediante la diferenciación doble, término a término, de la serie inicial.

Examinar los casos límites $a \rightarrow 0$ y $b \rightarrow \infty$ y compararlos con las soluciones de los problemas 50 y 52.

58. Construir dentro del anillo $a \leq \rho \leq b$ la función de manantial para el problema de Dirichlet.

Examinar los casos límites $a \rightarrow 0$ y $b \rightarrow \infty$ y compararlos con la solución del problema 54.

59. Hallar el campo de la carga puntiforme e , en un espacio no acotado y en presencia de una esfera conductora, en que está distribuida la carga de magnitud e_1 . Calcular la densidad de las cargas superficiales inducidas sobre la esfera.

3. Función de manantial en medios heterogéneos

60. Hallar el campo de la carga puntiforme en un espacio no acotado lleno de un dieléctrico heterogéneo con la constante dieléctrica

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } z > 0, \\ \epsilon_2 & \text{para } z < 0. \end{cases}$$

Calcular la densidad superficial y también la magnitud de la carga inducida sobre la frontera de separación $z = 0$.

61. El semiespacio $z > 0$ está lleno de un medio conductor heterogéneo de conductibilidad

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & \text{para } z > h, \\ \sigma_2 & \text{para } 0 < z < h. \end{cases}$$

En el punto $M(0, 0, \zeta)$ se ha colocado el manantial puntiforme de corriente eléctrica.

Determinar el campo eléctrico sobre la superficie del conductor (para $z = 0$). Examinar el caso $\zeta = 0$ (el manantial sobre la superficie).

62. La hoja conductora puesta a tierra que está en el plano y, z , tiene convexidad esférica de radio a con centro en el origen de las coordenadas; todo el semiespacio $y < 0$ que está debajo del plano x, z , está lleno de un dieléctrico con la constante dieléctrica ϵ_2 ; el medio que llena el semiespacio $y > 0$ por encima del plano $y = 0$ tiene la constante dieléctrica ϵ_1 . Hallar el potencial de la carga puntiforme puesta por encima del plano $y = 0$ en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, además

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} > a.$$

63. El semiespacio $z > 0$ está lleno por un medio conductor heterogéneo de conductibilidad

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1 & \text{para } y < 0, \\ \sigma_2 & \text{para } y > 0. \end{cases}$$

En el punto $M_0(0, -h, \zeta)$ se ha colocado un manantial puntiforme de corriente eléctrica de potencia I_0 . Hallar el potencial del campo eléctrico y también la densidad de la corriente para $y = 0, \zeta = 0$.

64. En el espacio infinito en los puntos $(0, \theta_0, \varphi_0)$ y (c, θ_0, φ_0) se encuentran dos esferas conductoras de radios a y b , que están puestas a tierra. En el punto $\rho = \rho_0$ sobre la línea que une los centros de las esferas se ha colocado una carga e . Hallar el potencial del campo fuera de las esferas.

§ 4. Método de separación de variables

En este párrafo se dan los problemas de contorno para la ecuación de Laplace que se resuelven mediante el método de separación de variables.

1. Problemas de contorno para el círculo, el anillo y el sector

65. Escribir la solución del primer problema de contorno para la ecuación de Laplace dentro de un círculo.

66. Escribir la solución del primer problema de contorno para la ecuación de Laplace fuera de un círculo.

67. Escribir la solución del segundo problema de contorno para la ecuación $\Delta u = 0$: a) dentro y b) fuera de un círculo.

68. a) Escribir la solución del tercer problema interior de contorno para la ecuación de Laplace dentro de un círculo, si la condición de frontera se escribe de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + h u = f \quad \text{para } \rho = a.$$

b) Hallar también la solución del tercer problema exterior de contorno para el círculo.

69. Un cilindro conductor infinito (conductor cilíndrico) está cargado hasta el potencial

$$V = \begin{cases} V_1 & \text{para } 0 < \varphi < \pi, \\ V_2 & \text{para } \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

donde V_1 y V_2 son constantes.

Hallar el campo dentro y fuera del hueco cilíndrico y también las cargas superficiales y la sumaria.

70. Hallar la solución de los problemas de contorno a) interior y b) exterior, para la ecuación de Laplace, si en la frontera del círculo están dadas las condiciones

$$1) \quad u|_{\rho=a} = A \operatorname{sen} \varphi,$$

$$2) \quad u|_{\rho=a} = A \operatorname{sen}^3 \varphi + B,$$

$$3) \quad u|_{\rho=a} = \begin{cases} A \operatorname{sen} \varphi & \text{para } 0 < \varphi < \pi, \\ \frac{1}{3} A \operatorname{sen}^3 \varphi & \text{para } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

71. Hallar la distribución de la temperatura en un cilindro circular infinitamente largo si sobre su superficie, en una unidad de longitud se ha dado un flujo calorífico $Q = q \cos \varphi$.

72. Resolver el problema 69, suponiendo que el cilindro está lleno de un dieléctrico con la constante dieléctrica

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } \rho < a, \\ \epsilon_2 & \text{para } a < \rho < b, \end{cases}$$

donde b es el radio del cilindro.

73. Un cilindro circular infinitamente largo de radio a se mueve con velocidad constante v_0 perpendicular a su eje en un líquido incompresible no acotado, que en el infinito se encuentra en reposo. Hallar el potencial de velocidades del líquido.

74. Resolver el problema acerca del contorneado del cilindro infinito inmóvil si la velocidad del líquido en el infinito es igual a v_0 .

75. a) La esfera sólida se mueve con una velocidad constante v_0 en un líquido infinitamente incompresible que está en reposo en el infinito.

Hallar el potencial de velocidades.

b) Resolver el problema acerca del contorneado de una esfera sólida inmóvil por un flujo de un líquido que en el infinito tiene una velocidad v_0 .

76. Una esfera dieléctrica con la constante dieléctrica ϵ_1 , puesta en un dieléctrico homogéneo infinito con la constante dieléctrica ϵ_2 ($\epsilon_2 \neq \epsilon_1$), se encuentra en un campo exterior paralelo homogéneo con intensidad E_0 . Hallar la magnitud de la polarización de la esfera y su momento dipolo.

77. Resolver el problema 76 para un cilindro dieléctrico infinito de sección circular ($a \leq r \leq b$), considerando que el campo exterior E_0 está dirigido perpendicularmente al eje del cilindro.

78. Una esfera conductora se encuentra en un campo electrostático exterior E_0 . Hallar la magnitud de la deformación del campo exterior.

79. Un cilindro conductor infinito se encuentra en el campo eléctrico homogéneo E_0 dirigido según el eje x ; la generatriz del cilindro es paralela al eje z . Hallar la densidad de la carga superficial sobre el cilindro.

80. Resolver el problema interior de Dirichlet para el anillo $a \leq r \leq b$.

81. Hallar la distribución de la temperatura en un cuerpo sólido acotado por las superficies cilíndricas infinitas de radios a y b ($a < b$), si sobre la superficie del cilindro $r = a$ se mantiene una temperatura constante u_0 , sobre la superficie $r = b$ para $0 < \varphi < \pi$ se mantiene la temperatura u_0 y para $\pi < \varphi < 2\pi$, una temperatura igual a cero.

82. Por un cable cilíndrico coaxial infinito $a < r < b$ fluye corriente eléctrica continua de intensidad I . Hallar la distribución de la temperatura dentro del cable si la superficie $r = a$ se mantiene a la temperatura igual a cero y sobre la frontera exterior se tiene un flujo calorífico igual a $A \cos^2 \varphi$ donde φ es el ángulo polar.

83. Sobre la frontera de una placa fina de forma de sector circular $r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$ está dada la temperatura

$$u = \begin{cases} f(\varphi) & \text{para } r = a, \\ 0 & \text{para } \varphi = 0 \text{ y } \varphi = \alpha. \end{cases}$$

Hallar el campo térmico estacionario dentro de la placa. Examinar el caso particular

$$f(\varphi) = \begin{cases} u_1 & \text{para } 0 < \varphi < \frac{\alpha}{2}, \\ u_2 & \text{para } \frac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha. \end{cases}$$

84. Hallar la distribución estacionaria de la temperatura dentro de una placa fina que tiene la forma de un sector circular, cuyos radios se mantienen a una temperatura u_1 y el arco de la circunferencia, a una temperatura u_2 .

85. Hallar el campo electrostático dentro de un cilindro infinito, cuya sección perpendicular tiene forma de semicírculo; la superficie del cilindro, que corresponde al diámetro del semicírculo, está cargada hasta el potencial V_1 y la superficie restante, hasta el potencial V_2 .

86. Resolver la ecuación de Laplace dentro del sector del anillo acotando por los arcos de las circunferencias $\rho = a$, $\rho = b$, y los radios $\varphi = 0$ y $\varphi = \alpha$, si en las fronteras están dadas las siguientes condiciones:

$$u = 0 \quad \text{para } \varphi = 0, \quad \varphi = \alpha,$$

$$u = \begin{cases} f(\varphi) & \text{para } \rho = a, \\ F(\varphi) & \text{para } \rho = b. \end{cases}$$

Examinar los casos límites $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow \infty$, $\alpha = \pi$.

87. Resolver el problema 86 para el caso particular

$$f(\varphi) = u_0, \quad F(\varphi) = 0.$$

88. Determinar el campo magnético de dos corrientes eléctricas, una de las cuales fluye por un cable recto largo en una dirección y la otra, en la dirección opuesta por un cable paralelo y a una distancia a del primero.

89. Sea que por una película cilíndrica circular infinita fluye la corriente eléctrica paralela al eje z con densidad i . Hallar el potencial vectorial del campo magnético generado por esta corriente.

90. Un cilindro o un cable de sección circular con la permeabilidad magnética μ_1 se ha colocado en un medio de permeabilidad magnética μ_2 . Por el cable fluye una corriente eléctrica I . El campo exterior magnético está dirigido perpendicularmente al eje del cable y en todas partes es paralelo y homogéneo. Determinar el campo magnético completo en los puntos dentro y fuera del cilindro, considerándolo infinitamente largo.

91. Calcular la magnitud de la inducción magnética fuera de una pantalla cilíndrica con los radios exterior a e interior b , la cual tiene una permeabilidad magnética μ_2 y rodea dos cables rectilíneos paralelos, situados simétricamente con respecto al eje del cilindro y que llevan las corrientes opuestamente dirigidas (el blindaje magnético de una línea bifilar); el cilindro se debe considerar infinitamente largo; las coordenadas de los cables son $\rho = c_0$, $\theta_0 = 0$ y $\theta_0 = \pi$.

92. Una esfera hueca $a < r < b$ se ha colocado dentro de un campo magnético paralelo y homogéneo. Sea μ la permeabilidad magnética de la esfera, al tiempo que la permeabilidad del medio exterior está tomada igual a 1.

Hallar en todo el espacio el campo magnético deformado. Comparar el campo dentro de la esfera con el campo exterior para el caso $\mu > 1$ y para el caso $\mu < 1$.

2. Problemas de contorno para la franja, el rectángulo, la capa plana y el paralelepípedo

93. Hallar la solución del primer problema general de contorno para la ecuación de Laplace dentro de un rectángulo.

94. Resolver el problema mixto de contorno para la ecuación de Laplace dentro de un rectángulo, si

a) sobre dos lados adyacentes están dadas las condiciones de primer género y sobre los dos restantes, las de segundo género;

b) sobre dos lados opuestos están dadas las condiciones de primer género y sobre los dos restantes, las de segundo género.

95. Hallar el campo electrostático dentro del campo acotado por unas placas conductoras $y = 0$, $y = b$ y $x = 0$, si la placa $x = 0$ está cargada hasta el potencial V , las placas $y = 0$, $y = b$ están puestas a tierra y las cargas dentro del campo en examen no existen.

96. Resolver el problema 95, suponiendo que en la frontera $y = b$ se mantiene al potencial V_0 . Examinar el caso límite $b \rightarrow \infty$.

97. Resolver la ecuación $\Delta u = 0$ dentro del rectángulo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, con las condiciones de frontera siguientes: $u = V$, para $x = 0$; $u = 0$, para $x = a$, e $y = 0$; $u = V_0$, para $y = b$.

Realizando el paso al límite $a \rightarrow \infty$, obtener la solución del problema 96.

98. La semicapa del problema 95 está llena por un dieléctrico heterogéneo con la constante dieléctrica

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } 0 < y < h, \\ \epsilon_2 & \text{para } h < y < b. \end{cases}$$

Hallar el campo electrostático dentro del dieléctrico.

99. Hallar el campo electrostático dentro de un tubo cilíndrico infinito de sección rectangular con los lados a y b , lleno de un dieléctrico heterogéneo con la constante dieléctrica

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } 0 < y < h, \\ \epsilon_2 & \text{para } h < y < b, \end{cases}$$

si la pared $x = 0$ está cargada hasta el potencial V y las restantes paredes están puestas a tierra. Examinar el caso cuando la pared $x = a$ se aleja al infinito.

100. Resolver el problema 99 con la condición de que la pared $y = b$ está cargada y las restantes paredes están puestas a tierra.

101. A través de la cara $y = 0$ del cilindro infinito con sección rectangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, afluye y, a través de la cara $x = 0$ emana la cantidad Q de calor.

Hallar la distribución de la temperatura dentro del cilindro, considerando que el flujo calorífico está distribuido uniformemente sobre la superficie de la cara $y = 0$ y, respectivamente, sobre la superficie de la cara $x = 0$, las dos caras restantes del cuerpo están aisladas térmicamente.

102. Hallar la distribución de la temperatura dentro de la placa fina rectangular si a uno de sus lados se suministra un flujo constante q_0 y los tres lados restantes se mantienen a la temperatura constante u_1 .

103. Hallar la solución del primer problema general de contorno para la ecuación de Laplace dentro de un paralelepípedo rectangular.

104. Hallar el campo electrostático dentro de un paralelepípedo rectangular con paredes conductoras si sus caras laterales y la base superior están puestas a tierra, la base inferior está cargada hasta el potencial V . Mediante el paso límite, obtener las soluciones de los problemas 95 y 96.

105. Resolver el problema 104 si las caras se han cargado hasta un potencial V y ambas bases están puestas a tierra.

3. Problemas que exigen la utilización de las funciones cilíndricas *

106. Resolver el primer problema de contorno para la ecuación de Laplace dentro del cilindro acotado $\rho \leq a$, $0 \leq z \leq l$, si $u|_{\rho=a} = 0$, $u|_{z=0} = f(\rho, \varphi)$, $u|_{z=l} = F(\rho, \varphi)$.

107. Resolver el problema 106 si

$$u|_{z=0} = f(\rho), \quad u|_{z=l} = F(\rho),$$

donde f y F son funciones que sólo dependen de ρ .

108. Hallar la función $u(\rho, \varphi, z)$ armónica dentro del cilindro acotado, que se anula en sus bases y toma las magnitudes dadas en la superficie $\rho = a$:

$$u|_{\rho=a} = f(z).$$

Examinar los casos particulares

a) $f(z) = f_0 = \text{const}$;

b) $f(z) = Az \left(1 - \frac{z}{l}\right)$.

*) En los puntos 3 y 4 se dan los problemas que se resuelven mediante el método de separación de variables pero que exigen la utilización de las funciones cilíndricas y esféricas. Una parte de estos problemas fue resuelta en el § 2 mediante el método de elección de las soluciones.

109. Hallar la solución del primer problema general de contorno para la ecuación de Laplace dentro de un cilindro acotado.

110. Hallar la expresión para el potencial del campo electrostático dentro de una caja cilíndrica de sección circular $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq z \leq l$, cuyas bases están puestas a tierra y su superficie lateral está cargada hasta el potencial V_0 .

Determinar la intensidad del campo sobre el eje.

Examinar el caso límite $l \rightarrow \infty$.

111. Resolver el problema 110 con la condición de que la superficie lateral y la base superior de la caja están puestas a tierra, la base inferior se mantiene al potencial constante V_0 .

Mediante el paso al límite obtener la solución del problema para el cilindro semiacotado.

112. Resolver los problemas 110 y 111 para el cilindro semiacotado, comparando con los resultados del correspondiente paso al límite en las soluciones de los problemas 110 y 111.

113. Determinar la distribución de la temperatura estacionaria dentro de un cuerpo sólido que tiene la forma del cilindro acotado, si a la base inferior $z = 0$ se le aplica un flujo calorífico constante q ; la superficie lateral $\rho = a$ y la base superior $z = l$, se mantienen a una temperatura igual a cero.

114. Resolver el problema anterior, suponiendo que sobre la superficie lateral se realiza el intercambio de calor con un medio de temperatura igual a cero.

115. Resolver los problemas 113 y 114 para el cilindro semiacotado ($l = \infty$) y comparar el resultado obtenido con el límite de las soluciones de los problemas 113 y 114 cuando $l \rightarrow \infty$.

116. Hallar el campo electrostático dentro del toroide $a < \rho < b$, $0 < z < l$ si su superficie lateral $\rho = b$ está cargada hasta el potencial V_0 y el resto de la frontera está puesto a tierra.

Examinar los casos límites: 1) $l \rightarrow \infty$,

2) $a \rightarrow 0$ (comparar con la solución del problema 110).

117. La base del toroide ($a < \rho < b$, $0 < z < l$) se mantiene a una temperatura constante u_0 y la superficie lateral, a la temperatura u_1 . Hallar la distribución estacionaria de la temperatura dentro del toroide.

118. Hallar la distribución estacionaria de la temperatura dentro de un toroide de sección rectangular ($a < \rho < b$, $0 < z < l$) si:

1) la superficie lateral está aislada y las bases se mantienen a la temperatura constante u_0 ;

2) la superficie lateral es termoaislada, la temperatura de la base inferior $z = 0$ es igual a cero y la base superior se mantiene a la temperatura u_1 .

119. Resolver el problema 117 si sobre la base inferior está dada la temperatura constante u_0 y el resto de la superficie del toroide se mantiene a una temperatura nula.

120. Mediante el método de separación de variables obtener la expresión para el potencial de la carga puntiforme puesta dentro del cilindro acotado $0 \leq r \leq a$, $0 < z < h$, con paredes conductoras.

Demostrar que desde la solución mediante los pasos al límite se obtienen las expresiones para el potencial de la carga puntiforme en la capa $0 \leq z \leq h$, en el semiespacio y en el espacio no acotado.

121. Resolver el problema anterior para el cilindro semiacotado $r > 0$; comparar el resultado obtenido con el correspondiente límite de la solución del problema 120.

122. Resolver el problema 120 para un cilindro infinito mediante el método de separación de variables; comparar con el límite de la solución del problema 120.

4. Problemas que exigen la utilización de las funciones esféricas y cilíndricas

123. Resolver el primer problema de contorno para la ecuación de Laplace dentro de una esfera de radio a .

124. Resolver el primer problema de contorno para la ecuación de Laplace fuera de una esfera de radio a .

125. Hallar la solución del segundo problema de contorno para la ecuación de Laplace

- a) dentro de la esfera,
- b) fuera de la esfera.

Examinar el caso de la condición más simple de frontera $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = -A \cos \theta$.

126. Hallar la intensidad del campo electrostático dentro y fuera de una esfera, cuya mitad superior está cargada hasta el potencial V_1 y la inferior, hasta el potencial V_2 .

127. Hallar el desarrollo respecto a las funciones esféricas de las cargas superficiales inducidas sobre una esfera de conductibilidad ideal que está puesta a tierra por una carga puntiforme que se encuentra:

- a) dentro de la esfera,
- b) fuera de la esfera.

128. Resolver el problema anterior para una esfera cargada aislada, que se encuentra en el campo de la carga puntiforme.

129. a) Una esfera sólida se mueve a velocidad constante en un líquido infinitamente incompresible que está en reposo en el infinito. Hallar el potencial de velocidades.

b) Resolver el problema acerca del contorneado de la esfera sólida inmóvil por el flujo del líquido que tiene una velocidad v_0 en el infinito.

130. Una esfera dieléctrica con constante dieléctrica ϵ_1 se encuentra en el campo homogéneo exterior E_0 , paralelo al cierto eje z .

Determinar la deformación del campo exterior excitada por la esfera, si el medio que la rodea es un dieléctrico homogéneo con $\epsilon = \epsilon_2$.

131. Resolver el problema acerca de la polarización de la esfera dieléctrica de radio a en el campo de una carga puntiforme, si la constante dieléctrica es

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } r < a, \\ \epsilon_2 & \text{para } r > a. \end{cases}$$

Examinar dos casos:

- a) la carga se encuentra fuera de la esfera,
- b) la carga está colocada dentro de la esfera.

132. La esfera conductora con conductibilidad σ_1 está en un medio con conductibilidad σ_2 .

Determinar las corrientes eléctricas excitadas por el manantial puntiforme de una corriente eléctrica de intensidad I colocado:

- a) dentro de la esfera,
- b) fuera de la esfera.

133. Resolver el problema anterior, considerando la esfera de conductibilidad ideal.

Comparar con el problema 132.

134. Un manantial puntiforme de calor Q se encuentra en la presencia de una esfera no conductora. Hallar la distribución estacionaria de la temperatura fuera de la esfera.

135. Dentro de una esfera, sobre cuya superficie se realiza el intercambio de calor con un medio de temperatura nula, se ha colocado un manantial puntiforme de potencia Q . Hallar la distribución estacionaria de la temperatura dentro de la esfera.

136. Hallar el potencial de una carga puntiforme colocada entre las esferas concéntricas, puestas a tierra, de radios $r = a$ y $r = b$. Determinar también la densidad de las cargas superficiales.

137. La esfera dieléctrica heterogénea de radio b con la constante dieléctrica

$$\epsilon = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{para } r < a, \\ \epsilon_2 & \text{para } a < r < b \end{cases}$$

está en un medio con constante dieléctrica ϵ_3 .

Determinar el campo de la carga puntiforme colocada:

- 1) fuera de la esfera $r > b$,
- 2) dentro de la esfera $r < a$,
- 3) en la región $a < r < b$.

Examinar los casos límites.

138. Hallar el campo dentro de la capa acotada por las esferas concéntricas de radios a y b ($a < b$) colocada en el campo electrostático paralelo homogéneo de intensidad E_0 ; la constante dieléctrica de la capa es ϵ_1 y la del medio, ϵ_2 .

139. Calcular aproximadamente la distribución de la carga sobre la armadura interior de un condensador esférico asimétrico, suponiendo que la distancia entre los centros de las guarniciones interior y exterior es pequeña.

140. Hallar el potencial de un anillo fino cuya carga completa es igual a e .

141. Las coordenadas esféricas de un anillo circular son $r_0 = a$, $\theta_0 = \alpha$. La esfera dieléctrica con la constante dieléctrica ϵ_1 de radio b está situada de tal modo que su centro se halla en el origen de las coordenadas. Encontrar la expresión para el potencial entre el anillo y la esfera si la densidad lineal de la carga del anillo es igual a αz . La constante dieléctrica del medio es igual a ϵ_2 .

142. Calcular el potencial del campo electrostático de un anillo fino cargado, colocado dentro de una esfera con paredes conductoras, si sobre la esfera se mantiene un potencial igual a cero. Los centros de la esfera y del anillo coinciden. Calcular la componente normal del campo eléctrico sobre la esfera $r = a$.

143. Calcular el potencial en todos los puntos de una esfera conductora con la conductibilidad σ , en el caso cuando la corriente eléctrica I entra por uno de sus polos $\theta = 0$ y sale por el polo $\theta = \pi$.

144. Hallar el potencial del campo excitado a una parte de la placa dieléctrica infinita de espesor l por la carga puntiforme e , situada de la parte opuesta de la placa.

145. A la superficie terrestre $z = 0$ se le suministra una corriente eléctrica I mediante un electrodo puntiforme. Determinar el potencial sobre la superficie terrestre, considerando que la conductibilidad específica de la Tierra hasta la profundidad $z = h$ es igual a σ_1 y en las profundidades mayores, σ_2 . Aplicar la solución obtenida al caso de dos electrodos situados en los puntos

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad x = -a, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

146. Un electrodo esférico de radio a , está hundido hasta la mitad en la tierra, cuya conductibilidad en la dirección horizontal σ_h es mayor que en la dirección vertical σ_v (anisotropía). Hallar la distribución del potencial sobre la superficie terrestre, suponiendo que sobre la superficie del electrodo el potencial es $V = V_0$.

Indicación. Se debe introducir en vez de la variable z la nueva variable

$$t = \alpha z, \quad \alpha^2 = \frac{\sigma_h}{\sigma_v}.$$

Con esto la ecuación $\sigma_h (V_{xx} + V_{yy}) + \sigma_v V_{zz} = 0$ se transforma en la ecuación $V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = 0$.

§ 5. Potenciales y sus aplicaciones

En este parágrafo se plantean problemas acerca del cálculo de los potenciales volumétricos y superficiales para ciertos casos más simples y también los problemas de contorno que pueden ser resueltos mediante los métodos de la teoría de potenciales.

147. Hallar el potencial volumétrico V para una esfera con densidad constante $\rho = \rho_0$, planteando el problema de contorno para V y resolviéndolo.

148. Resolver el problema 147 mediante el cálculo directo de la integral volumétrica.

149. Hallar el potencial volumétrico

a) de las masas distribuidas con densidad constante sobre la capa esférica $a \leq r \leq b$;

b) de las masas distribuidas dentro de la esfera de radio a con densidad constante ρ_1 y dentro de la capa esférica $a < b < r < c$ con densidad constante ρ_2 ;

c) de las masas distribuidas dentro de la esfera de radio $r = c$ con densidad variable $\rho = \rho(r)$.

Resolver aquí los problemas 149 a) y 149 b).

150. Hallar el potencial de la capa simple distribuida con la densidad constante $v = v_0$ sobre la esfera.

151. Hallar el campo electrostático de las cargas volumétricas uniformemente distribuidas dentro de la esfera situada encima del plano $z = 0$ de conductibilidad ideal.

152. Hallar el potencial logarítmico de un círculo con densidad constante de la carga.

153. Hallar el potencial logarítmico de la capa simple de un segmento con densidad constante de la carga.

154. Hallar el potencial logarítmico de la capa doble de un segmento con densidad constante de los momentos.

155. Determinar el potencial de una capa simple uniformemente distribuida sobre un disco circular.

156. Hallar el potencial vectorial de corriente circular.

157. Mediante el potencial de la capa doble resolver el problema de Dirichlet:

a) dentro de un círculo,

b) fuera de un círculo.

158. Hallar la solución del problema de Neumann para el círculo, utilizando un potencial de capa simple.

159. Resolver el primer y segundo problemas de contorno para la ecuación de Laplace en el semiespacio, utilizando potenciales superficiales.

160. Hallar la solución del problema de Dirichlet sobre el semiplano, utilizando un potencial de capa simple.

161. Examinemos la superficie Σ de segundo orden definida por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1,$$

donde $a > b > c$. Si $-c^2 < s < \infty$, entonces las superficies son elipsoides; para $-b^2 < s < -c^2$, hiperboloides de una hoja; para $-a^2 < s < -b^2$, hiperboloides de dos hojas. Para $s = \infty$ tenemos la esfera de radio infinito y para $s = -c^2$ el elipsoide se aplasta en un disco que descansa en el plano xy .

Demostrar que las superficies de la familia examinada pueden ser equipotenciales y el potencial de ellos se determina según la fórmula

$$V = A \int_{\Sigma} \frac{ds}{R(s)} + B, \quad R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

donde A y B son constantes que se determinan de las condiciones en el infinito y sobre la superficie Σ .

162. Utilizando la solución del problema anterior, hallar la expresión del potencial del elipsoide conductor cargado $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, sobre la que está distribuida la carga e . (La constante dieléctrica del medio es ϵ .)

Determinar la capacidad del elipsoide y también la densidad superficial de la carga sobre el elipsoide. Examinar el elipsoide de revolución.

163. Utilizando la solución del problema 162, calcular la densidad superficial de la carga para un disco elíptico. Determinar el potencial, la capacidad y la densidad de la carga para un disco circular.

164. Demostrar que el potencial gravitacional (newtoniano) del elipsoide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

se da por las integrales

$$V(x, y, z) = \rho_0 \int_0^{\infty} \frac{1 - f(x, y, z; s)}{R(s)} ds \text{ dentro del elipsoide,}$$

$$V(x, y, z) = \rho_0 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1 - f(x, y, z; s)}{R(s)} ds \text{ fuera del elipsoide,}$$

donde

$$f(x, y, z; s) = \frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s},$$

$$R(s) = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)},$$

ρ_0 es la densidad volumétrica del potencial; λ , la coordenada elipsoidal que es la raíz positiva $s = \lambda$ de la ecuación $f(x, y, z; s) = 0$.

165. Calcular el potencial gravitacional (newtoniano)

- del elipsoide alargado de revolución,
- del elipsoide aplastado de rotación

(véase el problema 162). Examinar el paso límite a la esfera homogénea.

166. Hallar el potencial logarítmico del campo elíptico con densidad constante mediante el cálculo directo de las integrales.

167. La ellipse conductora que se determina por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0),$$

está cargada hasta el potencial V_0 . Determinar el potencial fuera de la ellipse y también de la densidad de las cargas distribuidas en la ellipse.

168. Calcular la fuerza de la interacción de dos bucles de cables coaxiales C_a y C_b , con radios a y b , por las que fluyen las corrientes eléctricas I e I' . Los contornos están situados sobre los planos paralelos $z = 0$ y $z = d$, sus centros están en los puntos $x = y = z = 0$ y $x = y = 0, z = d$.

169. Calcular el coeficiente de la inducción mutua de los anillos 1 y 2 de cables coaxiales, utilizando la fórmula

$$M_{12} = \oint_1 A_2 ds_1 = \mu \oint_1 \oint_2 \frac{ds_1 ds_2}{r} = M_{21},$$

donde A_2 es el potencial vectorial del campo excitado por la corriente de intensidad unitaria que fluye por el contorno 2; μ , la permeabilidad magnética del medio.

170. Demostrar que la expresión para el potencial generado por el anillo cargado de radio a , es de la forma

$$V = \begin{cases} \frac{2e}{\pi a} \int_0^\infty K_0(\lambda a) J_0(\lambda \rho) \cos \lambda z d\lambda & \text{para } \rho < a, \\ \frac{2e}{\pi a} \int_0^\infty I_0(\lambda a) K_0(\lambda \rho) \cos \lambda z d\lambda & \text{para } \rho > a, \end{cases}$$

donde e es la carga del anillo.

171. Mostrar que el potencial generado en el espacio circundante por un disco de radio a , que tiene una carga e es igual a

$$V(\rho, z) = \frac{e}{\pi a} \int_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda \rho) \frac{\sin \lambda a}{\lambda} d\lambda.$$

RESPUESTAS, INDICACIONES Y RESOLUCIONES

Capítulo I

CLASIFICACIÓN Y REDUCCIÓN A LA FORMA CANÓNICA DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE SEGUNDO ORDEN

§ 1. Ecuación para la función de dos variables independientes

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f(x, y)$$

1. Ecuación con coeficientes variables

1. El discriminante de la ecuación $(l+x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$ es igual a $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y^2(x^2 + x + l) = y^2(x - x_1)(x - x_2)$, donde

$$x_1 = -\frac{1 - \sqrt{1 - 4l}}{2}, \quad x_2 = -\frac{1 + \sqrt{1 - 4l}}{2}.$$

Sea $l < \frac{1}{4}$, entonces x_1 y x_2 son reales y para $x < x_1$ y también para $x > x_2$ la ecuación es de tipo hiperbólico, para $x_1 < x < x_2$, de tipo elíptico, las rectas $x = x_1$, $x = x_2$ e $y = 0$ se componen de puntos de parabolicidad. Para $l = \frac{1}{4}$ la región de elipticidad desaparece dado que en este caso $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$; la recta $x = -\frac{1}{2}$ se compone de puntos de parabolicidad. Para $l > \frac{1}{4}$ la ecuación es de tipo hiperbólico en todas partes.

2. La ecuación $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ para $x < 0$ es de tipo hiperbólico y mediante la sustitución $\xi = \frac{3}{2}y + (\sqrt{-x})^3$, $\eta = \frac{3}{2}y - (\sqrt{-x})^3$ se reduce a la forma canónica

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0, \quad \xi > \eta.$$

Para $x > 0$ la ecuación $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ es de tipo elíptico y mediante la sustitución $\xi' = \frac{3}{2}y$, $\eta' = -\sqrt{x^3}$ se reduce a la forma canónica $u_{\xi'\xi'} + u_{\eta'\eta'} + \frac{1}{3\eta'}u_{\eta\eta} = 0$; $\eta' < 0$. Las paráolas semicúbicas (fig. 14)

$$y - c = \pm \frac{2}{3}(\sqrt{-x})^3$$

son las características de la ecuación, además las ramas dirigidas hacia abajo se representan por las ecuaciones $\xi = \text{const.}$ y las dirigidas hacia arriba, por las ecuaciones $\eta = \text{const.}$

3. La ecuación $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ para $y < 0$ es de tipo hiperbólico y mediante la sustitución $\xi = x + 2\sqrt{-y}$, $\eta = x - 2\sqrt{-y}$ se reduce a la forma canónica:

$$u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0, \quad \xi > \eta.$$

Para $y > 0$ la ecuación es de tipo elíptico y mediante la sustitución $\xi' = \sqrt{y}x$, $\eta' = 2\sqrt{y}$ se conduce a la forma canónica

$$u_{\xi'\xi'} + u_{\eta'\eta'} - \frac{1}{\eta'} u_{\eta'} = 0, \quad \eta' > 0.$$

Las parábolas (fig. 15)

$$y = -\frac{1}{4}(x-c)^2$$

son las características de la ecuación. Las ramas dirigidas hacia la izquierda del eje x se representan por las ecuaciones $\xi = \text{const}$ y las ramas dirigidas hacia la derecha, por las ecuaciones $\eta = \text{const}$.

4. La ecuación $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$ en todas partes tiene el mismo tipo que la ecuación $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ estudiada en el problema anterior. Con

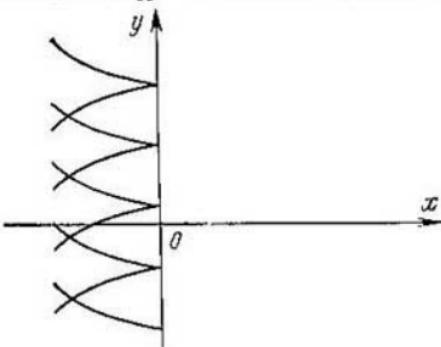


Fig. 14

las mismas sustituciones que para la ecuación $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ se reduce a la forma canónica $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ en la región de parabolicidad ($y < 0$) y a la forma canónica $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ en la región de elipticidad ($y > 0$). Las características de las ecuaciones $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$ y $u_{xx} + yu_{yy} = 0$ coinciden.

Observación. La comparación de las ecuaciones $u_{xx} + yu_{yy} = 0$, $u_{xx} + yu_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$ demuestra que la existencia de términos con derivadas de menor orden se hace sentir considerablemente en la ecuación, dado que en un caso los coeficientes de la ecuación después de su reducción a la forma canónica tiene singularidades y en el otro, no.

5. La ecuación $yu_{xx} + xy_{yy} = 0$ en el segundo y cuarto cuadrantes es de tipo hiperbólico y se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

mediante la sustitución $\xi = (-x)^{3/2}$, $\eta = y^{3/2}$ en el segundo y la sustitución $\xi = x^{3/2}$, $\eta = (-y)^{3/2}$ en el cuarto cuadrante. En el primero y tercero cuadrantes la ecuación es de tipo elíptico y se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{3\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{3\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

mediante la sustitución $\xi = x^{3/2}$, $\eta = y^{3/2}$ en el primer cuadrante y $\xi = (-x)^{3/2}$, $\eta = (-y)^{3/2}$, en el tercero. Los ejes x e y se componen de los puntos de parabolicidad.

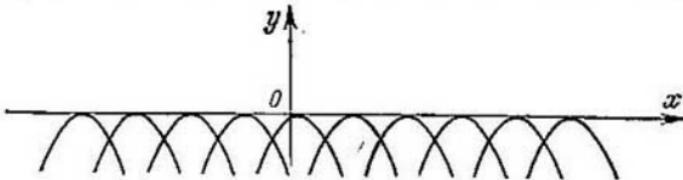


Fig. 15

cidad. Como es sabido *) el paso de una forma canónica de la ecuación hiperbólica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = f \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

a otra

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{f} \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

se realiza mediante la sustitución

$$\xi = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \eta = \frac{\xi - \eta}{2}.$$

6. La ecuación $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$ en el primer y tercer cuadrantes es de tipo elíptico y se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

mediante la sustitución $\xi = x^{1/2}$, $\eta = y^{1/2}$ en el primer cuadrante y $\xi = (-x)^{1/2}$, $\eta = (-y)^{1/2}$ en el tercero.

La ecuación es de tipo hiperbólico en el segundo y cuarto cuadrantes y se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

mediante la sustitución $\xi = (-x)^{1/2}$, $\eta = y^{1/2}$ en el segundo cuadrante y $\xi = (x)^{1/2}$, $\eta = (-y)^{1/2}$, en el cuarto. Los ejes x e y se componen de los puntos de parabolicidad.

*) Véase [7], pág. 22.

7. La ecuación $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$ en el primer y tercer cuadrantes es de tipo elíptico y se reduce a la forma canónica

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi} u_\xi - \frac{1}{\eta} u_\eta = 0$$

mediante la sustitución $\xi = \frac{2}{3} x^{3/2}$, $\eta = 2y^{1/2}$ en el primer cuadrante y $\xi = -\frac{2}{3} (-x)^{3/2}$, $\eta = 2(-y)^{1/2}$ en el tercero.

La ecuación es de tipo hiperbólico en el segundo y cuarto cuadrantes y se reduce a la forma canónica

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\xi} u_\xi + \frac{1}{\eta} u_\eta = 0$$

mediante la sustitución $\xi = \frac{2}{3} (-x)^{3/2}$, $\eta = 2y^{1/2}$ en el segundo cuadrante y $\xi = \frac{2}{3} x^{3/2}$, $\eta = 2(-y)^{1/2}$ en el cuarto. Los ejes x e y se componen de los puntos de parabolidad.

8. La ecuación $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ en el primer y segundo cuadrantes es de tipo parabólico y mediante la sustitución

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

En el tercer y cuarto cuadrantes la ecuación es de tipo hiperbólico y mediante la sustitución

$$\xi = (1 + \sqrt{2}) x + y, \quad \eta = (1 - \sqrt{2}) x + y$$

se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

9. La ecuación $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 - \operatorname{sign} y) u_{yy} = 0$ en el primer y segundo cuadrantes es de tipo hiperbólico y mediante la sustitución $\xi = y - 2x$, $\eta = y$ se reduce a la forma canónica $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, en los tercer y cuarto cuadrantes es de tipo elíptico y mediante la sustitución

$$\xi = x - y, \quad \eta = x$$

se reduce a la forma canónica $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$.

10. La ecuación $u_{xx} \operatorname{sign} y + 2u_{xy} + u_{yy} \operatorname{sign} x = 0$ en el primer y tercer cuadrantes es de tipo parabólico y mediante la sustitución $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ se reduce a la forma canónica $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$, en el primer cuadrante y $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$ en el tercero. La ecuación es de tipo hiperbólico en el segundo y cuarto cuadrantes y se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

mediante la sustitución $\xi = -(1 + \sqrt{2})x + y$, $\eta = -(1 - \sqrt{2})x + y$ en el segundo cuadrante y $\xi = (1 + \sqrt{2})x + y$, $\eta = (1 - \sqrt{2})x + y$ en el cuarto.

11. La ecuación $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$ es de tipo hiperbólico en todas partes excepto en los ejes de las coordenadas que se componen de los puntos de parabolicidad. Se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\eta}{2(\eta^2 - \xi^2)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{2(\eta^2 - \xi^2)} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

mediante la sustitución $\xi = y^2 - x^2$, $\eta = y^2 + x^2$.

12. La ecuación $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$ es de tipo hiperbólico en todas partes excepto en los ejes de las coordenadas que se componen de los puntos de parabolicidad. Ella se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

mediante la sustitución $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$.

13. La ecuación $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$ es de tipo elíptico en todas partes excepto en los ejes de las coordenadas que se componen de los puntos de parabolicidad. Se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

mediante la sustitución $\xi = \ln |x|$, $\eta = \ln |y|$.

14. La ecuación $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$ es de tipo elíptico en todas partes excepto en los ejes de las coordenadas que se componen de los puntos de parabolicidad. Se reduce mediante la sustitución

$$\xi = y^2, \quad \eta = x^2$$

a la forma canónica.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

15. La ecuación $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$ es de tipo parabólico en todas partes; mediante la sustitución $\xi = \frac{x^2 + y^2}{2}$, $\eta = \frac{x^2 - y^2}{2}$ la ecuación se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

16. La ecuación $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$ es de tipo parabólico en todas partes. Mediante la sustitución $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = y$ la ecuación se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

17. La ecuación $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0$ es de tipo hiperbólico, en todas partes, excepto en la recta $y = 0$, que se compone de los puntos de parabolicidad. Mediante la sustitución $\xi = e^x + y^2$, $\eta = -e^x + y^2$ la ecuación se reduce a la forma canónica

$$u_{\xi\eta} = \frac{-1}{4(\xi + \eta)} (u_\xi + u_\eta).$$

18. La ecuación $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} - 3y^2u_{yy} - 2xu_x + 4yu_y + 16x^4u = 0$ es de tipo hiperbólico en todas partes excepto en los ejes x e y que se componen de los puntos de parabolicidad. Mediante la sustitución $\xi = xy$, $\eta = \frac{x^3}{y}$ la ecuación se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4\eta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + u = 0.$$

19. La ecuación $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0$ es de tipo elíptico en todas partes. Mediante la sustitución $\xi = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $\eta = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$ la ecuación se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

20. La ecuación $u_{xx} \operatorname{sen}^2 x - 2yu_{xy} \operatorname{sen} x + y^2u_{yy} = 0$ es de tipo parabólico en todas partes. Mediante la sustitución $\xi = y \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $\eta = y$ la ecuación se reduce a la forma canónica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

2. Ecuación con coeficientes constantes

21. $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{4bc - b^2 - c^2 - 6a}{172a^2} v = 0,$

$$\xi = y + (\sqrt{3} - 2)x, \quad \eta = y - (\sqrt{3} + 2)x, \quad u(\xi, \eta) = e^{\alpha \xi + \beta \eta} v(\xi, \eta),$$

$$\alpha = \frac{c - (\sqrt{3} + 2)b}{12a}, \quad \beta = \frac{c + (\sqrt{3} - 2)b}{12a}.$$

22. $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{2}{a} \left(\frac{2bc - b^2 - 2c^2}{a} + 1 \right) v = 0,$

$$\xi = y - \frac{1}{2}x, \quad \eta = \frac{x}{2}, \quad u(\xi, \eta) = e^{\alpha \xi + \beta \eta} v(\xi, \eta), \quad \alpha = \frac{b - 2c}{a}, \quad \beta = -\frac{b}{a}.$$

23. $\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{c - b}{a} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0,$

$$\xi = y - x, \quad \eta = x, \quad u(\xi, \eta) = e^{\alpha \xi + \beta \eta} v(\xi, \eta), \quad \alpha = \frac{b^2 - 4a}{4a(c - b)}, \quad \beta = -\frac{b}{2a}.$$

§ 2. Ecuación con coeficientes constantes para una función de n variables independientes

$$\sum_{l, k=1}^n a_{lk} u_{x_l x_k} + \sum_{l=1}^n b_l u_{x_l} + cu = f(x_1, \dots, x_n).$$

A la ecuación

$$\sum_{l, k=1}^n a_{lk} u_{x_l x_k} + \sum_{l=1}^n b_l u_{x_l} + cu = f(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

se pone en correspondencia la matriz de los coeficientes de los términos mayores

$$\| a_{ik} \| \quad (2)$$

y la forma cuadrática

$$\sum_{i, k=1}^n a_{ik} z_i z_k. \quad (3)$$

Si en la ecuación (1) se pasa a unas variables independientes nuevas según las fórmulas

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ik} x_i, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

entonces la matriz $\| \bar{a}_{ik} \|$ de los términos mayores en la ecuación transformada

$$\sum_{i, k=1}^n \bar{a}_{ik} u_{\xi_i} \xi_k + \sum_{i=1}^n \bar{b}_i u_{\xi_i} + \bar{c} u = 0 \quad (5)$$

estará vinculada con la matriz $\| a_{ik} \|$ por la relación

$$\| \bar{a}_{ik} \| = \| \alpha_{ik} \| \cdot \| a_{ik} \| \cdot \| \alpha_{ik}^* \| \quad (6)$$

La matriz $\| a_{ik} \|$ se transforma del mismo modo que la matriz de la forma cuadrática (3) si es que en esta forma se pasa a las nuevas variables según las fórmulas

$$z_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}^* s_k, \quad (7)$$

donde $\alpha_{ik}^* = \alpha_{ki}$. La matriz del paso de las nuevas variables s_1, \dots, s_n a las viejas z_1, \dots, z_n en la forma cuadrática (3) se obtiene mediante la transposición de la matriz del paso de las viejas variables independientes x_1, \dots, x_n a las nuevas ξ_1, \dots, ξ_n en la ecuación (1). De esta manera para hallar la transformación (4) que reduce la ecuación (1) a la forma canónica se debe hallar la transformación (7) que reduce la forma cuadrática (3) a la forma canónica que contiene sólo los cuadrados de las variables s_1, \dots, s_n con los coeficientes $+1, -1, 0, 0$; la matriz de la transformación (4) se obtiene de la matriz de la transformación (7) mediante la transposición.

$$24. u_{\xi_1 \xi_1} + u_{\xi_1 \xi_2} + u_{\xi_2 \xi_1} + u_{\xi_2 \xi_2} = 0,$$

$$\xi_1 = x, \quad \xi_2 = -x + y, \quad \xi_3 = 2x - 2y + z,$$

$$25. u_{\xi_1 \xi_1} = u_{\xi_1 \xi_2} + u_{\xi_2 \xi_1},$$

$$\xi_1 = x + \frac{1}{2}y - z, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2}y, \quad \xi_3 = z.$$

$$26. u_{t' t'} = u_{x' x'} + u_{y' y'} + u_{z' z'},$$

$$t' = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, \quad x' = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z,$$

$$y' = -\frac{1}{2\sqrt{3}}t + \frac{1}{2\sqrt{3}}x + \frac{1}{2\sqrt{3}}y - \frac{1}{2\sqrt{3}}z,$$

$$z' = \frac{-1}{2\sqrt{5}} t + \frac{1}{2\sqrt{5}} x - \frac{1}{2\sqrt{5}} y + \frac{1}{2\sqrt{5}} z.$$

27. $u_{t't'} = u_{x'x'} + u_{y'y'} + u_{z'z'},$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}} z + \frac{1}{\sqrt{2}} t,$$

$$z' = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} z - \frac{1}{2} t, \quad t' = \frac{1}{2\sqrt{3}} x - \frac{1}{2\sqrt{3}} y - \frac{1}{2\sqrt{3}} z + \frac{1}{2\sqrt{3}} t.$$

28. a) $u_{x'_1x'_1} + \sum_{i=2}^n u_{x'_ix'_i} = 0,$

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} (x_1 + \dots + x_n), \quad \left. \begin{array}{l} x'_i = \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n, \\ i=2, 3, \dots, n, \end{array} \right\}$$

b) $u_{x'_1x'_1} - \sum_{i=2}^n u_{x'_ix'_i} = 0,$

$$x'_1 = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} (x_1 + \dots + x_n), \quad \left. \begin{array}{l} x'_i = \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n, \\ i=2, 3, \dots, n, \end{array} \right\}$$

donde $(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}), i = 1, 2, \dots, n$ es cualquier sistema ortogonal normalizado de soluciones de la ecuación

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0.$$

29. $\sum_{i=1}^n a_i v_{x_i x_i} + \left(c - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{a_i} \right) v = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} x_i} f(x_1, \dots, x_n),$

$$u(x_1, \dots, x_n) = e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} x_i} v(x_1, \dots, x_n).$$

Capítulo II

ECUACIONES DE TIPO HIPERBÓLICO

§ 1. Problemas físicos que se reducen a ecuaciones de tipo hiperbólico; planteamiento de los problemas de contorno

En la mayoría de los problemas del presente parágrafo (como, por ejemplo, en los problemas sobre las vibraciones de las cuerdas, barras, del gas) se estudian sólo las vibraciones pequeñas. Se llaman vibraciones pequeñas las vibraciones para las cuales se pueden despreciar los cuadrados, productos y potencias superiores de las funciones, que caracterizan el proceso de oscilaciones, y de sus derivadas.

1. Vibraciones libres en un medio sin resistencia; ecuaciones con coeficientes constantes

En los problemas de este grupo la influencia de la fuerza de gravedad sobre las vibraciones de las partículas se considera despreciablemente pequeña en comparación con la influencia de las fuerzas elásticas y por eso se pueden despreciar las acciones de la fuerza de gravedad*).

1. El eje Ox está dirigido según la barra; como la función que caracteriza las vibraciones se toma el desplazamiento $u(x, t)$ a lo largo del eje x de la sección transversal, la abscisa de la cual en el estado de equilibrio es igual a x ; con otras palabras, en el momento de tiempo t la abscisa de esta sección es igual a $x = x + u(x, t)$. Para la determinación de la función $u(x, t)$ tenemos los siguientes problemas de contorno:

a) cuando los extremos de la barra están fijos rígidamente

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

$$a^2 = \frac{E}{\rho_0}$$

donde E es el módulo de elasticidad y ρ_0 , la densidad de masa de la barra en el estado no perturbado;

a') cuando los extremos de la barra se mueven según la ley dada, las condiciones de frontera tienen la forma

$$u(0, t) = \psi(t), \quad u(l, t) = \varphi(t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

donde $\psi(t)$ y $\varphi(t)$ son las funciones dadas de t ;

b) cuando los extremos de la barra están libres, las condiciones de frontera tienen la forma

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty; \quad (4)$$

*) Observemos que en el caso más general la fuerza de gravedad puede no incluirse en la ecuación diferencial de las vibraciones elásticas, si por la posición de equilibrio se toma el estado estático tenso bajo la acción de la fuerza de gravedad (compárese con [7], pág. 120-122).

c) cuando los extremos de la barra están fijos elásticamente, las condiciones de frontera son de forma

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = u_x(l, t) + hu(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (5)$$

$$h = \frac{k}{ES},$$

donde k es el coeficiente de elasticidad del empotramiento (se supone que es igual para ambos extremos, en el caso contrario los valores de la constante h serán diferentes para los extremos derecho e izquierdo) y S es el área de la sección transversal.

*Indicación**). Diríjamos el eje Ox según la barra. Cada sección transversal de la barra puede caracterizarse por aquella abscisa x , la cual tenía la sección en la posición de equilibrio**). Entonces la sección, marcada por la abscisa x , en el momento t tendrá la abscisa $x = x + u(x, t)$. Aquí $u(x, t)$ significa la magnitud del desplazamiento longitudinal de aquella sección transversal de la barra que en posición de equilibrio tiene la abscisa x . De esta manera la función $u(x, t)$ está expresada en las coordenadas de Lagrange***).

La ecuación diferencial (1) puede ser obtenida, pasando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación de movimiento, que expresa la segunda ley de Newton para el elemento $(x, x + \Delta x)$ de la barra, es decir, para el elemento cuyos topes en posición de equilibrio tienen las abscisas x y $x + \Delta x$. Para la determinación de las fuerzas elásticas que actúan sobre este elemento se debe utilizar la ley de Hooke, la cual se expresa por la igualdad

$$X = ESu_x(x, t),$$

donde X es la proyección sobre el eje x de la fuerza F , con la cual la parte de la barra que está a la derecha de la sección en estudio actúa sobre la parte que está a la izquierda de esta sección; S , el área de esta sección transversal*****) y $u_x(x, t)$, el alargamiento relativo de la barra en la sección transversal la cual en la posición de equilibrio tenía la abscisa x *****).

Si los extremos de la barra están fijos inmóvilmente, entonces las condiciones de frontera son obvias. Si los extremos de la barra están libres o fijos elásticamente, entonces las condiciones de frontera pueden ser obtenidas de la relación que expresa la segunda ley de Newton para los elementos de frontera.

Estudiemos, por ejemplo, el caso cuando el extremo $x = l$ está fijo elásticamente. Desde la izquierda al elemento de frontera $(l - \Delta x, l)$, adjunto a este extremo actúa la restante parte de la barra con la fuerza

$$-ESu_x(l - \Delta x, t),$$

desde la derecha actúa el sostén elástico con la fuerza*****)

$$-ku(l, t).$$

Por eso la segunda ley de Newton para este elemento se expresa por la ecuación

$$S\rho_0\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -ESu_x(l - \Delta x, t) - ku(l, t)$$

*) Compárese con la deducción de la ecuación en [7], págs. 34-36.

**) La posición de equilibrio puede ser la posición estática tensa.

***) Véase [7], pág. 34.

****) La fuerza F es perpendicular a la sección transversal y en consecuencia su dirección coincide con la dirección del eje Ox ó es opuesta a la dirección del eje Ox .

*****) Véase [7], pág. 34.

******) Véase el punto c) en la condición del problema.

de donde, pasando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, tenemos la condición de frontera para el extremo $x = l$

$$ESu_x(l, t) + ku(l, t) = 0$$

6

$$u_x(l, t) + hu(l, t) = 0,$$

donde

$$h = \frac{k}{ES}.$$

Para el extremo $x = 0$ el signo de h en la condición de frontera será otro. En efecto, estudiemos el elemento $(0, \Delta x)$. A su extremo izquierdo está aplicada una fuerza

$$-ku(0, t),$$

y al extremo derecho, la fuerza

$$ESu_x(\Delta x, t),$$

por eso la ecuación que expresa la segunda ley de Newton para este elemento es

$$S\rho_0\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ESu_x(\Delta x, t) - ku(0, t).$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ tenemos:

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0,$$

donde h tiene el valor anterior, si la barra es homogénea y el coeficiente de elasticidad del empotramiento para ambos extremos es el mismo.

Nota. A veces para el planteamiento del problema de contorno sobre las vibraciones transversales de una barra es conveniente utilizar no una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, sino un sistema de dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de primer orden.

Designemos por $\hat{p}(x, t)$ la tensión en la sección transversal con la coordenada de Lagrange x , determinándola por la relación

$$\hat{p}(x, t) = \frac{X(x, t)}{S},$$

donde S es el área de la sección transversal de la barra y $X(x, t)$, la proyección sobre el eje x de la fuerza con que la parte de la barra, adyacente a la sección x por la derecha, actúa sobre la parte de esta barra, adyacente a la sección por la izquierda. Con $u(x, t)$, como siempre designemos el desplazamiento de la sección transversal con la coordenada de Lagrange x desde la posición de equilibrio. Como funciones que caracterizan el proceso de las oscilaciones tomamos

$$\hat{p}(x, t) \quad \text{y} \quad w(x, t) = u_t(x, t).$$

Estudiemos, por ejemplo, el caso cuando el extremo izquierdo de la barra está fijo inmóvilmente y el derecho está libre. Llegaremos al problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} w_x - \frac{1}{E} \hat{p}_t &= 0, \\ -\hat{p}_x + p_0 w_t &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \end{aligned} \quad (1)$$

$$w(0, t) = 0, \quad \hat{p}(l, t) = 0 \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad \hat{p}(x, 0) = \hat{\psi}(x), \quad 0 < x < l. \quad (3)$$

2. El eje Ox del sistema cartesiano de coordenadas está dirigido según la posición de equilibrio de la cuerda. Supongamos que el punto tiene las coordenadas $[x; 0; 0]$ en la posición de equilibrio y $[x + u_1(x, t); u_2(x, t); u_3(x, t)]$, en la posición desviada.

Para determinar las funciones $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ que caracterizan el proceso de las vibraciones de la cuerda, obtenemos los problemas de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_h}{\partial t^2} &= a_h^2 \frac{\partial^2 u_h}{\partial x^2} && \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \\ u_h(0, t) &= u_h(l, t) = 0 && \text{para } 0 \leq t < +\infty, \\ u_h(x, 0) &= f_h(x), \quad \frac{\partial u_h(x, 0)}{\partial t} = F_h(x) && \text{para } 0 \leq x \leq l, \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, 3,$$

dónde $a_h^2 = \frac{ES}{\rho}$, $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = \frac{T_0}{\rho}$; E es el módulo de elasticidad; S , el área de la sección transversal; ρ , la densidad lineal de masa.

Indicación. La fuerza completa de tensión de la cuerda se compone de la fuerza inicial de tensión T_0 y la fuerza de elasticidad que aparece como resultado del alargamiento relativo de los elementos de la cuerda. Durante las vibraciones pequeñas, la cuerda puede considerarse absolutamente elástica, es decir, que la fuerza de tensión en cada punto de la cuerda se puede considerar como la tangente a la cuerda. La ecuación diferencial para la función $u_h(x, t)$ se puede obtener mediante el paso al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en las ecuaciones del movimiento que expresan para el elemento $(x, x + \Delta x)$ la segunda ley de Newton en las proyecciones sobre los ejes de coordenadas. Sobre la determinación de las fuerzas que actúan sobre los extremos del elemento $(x, x + \Delta x)$ véase adicionalmente [7], págs. 30-32 y también la indicación al problema anterior.

3. El eje Ox está dirigido según el eje longitudinal de inercia del cilindro, por $\theta(x, t)$ designemos el ángulo de rotación de la sección transversal con la abscisa x , con eso los extremos del cilindro se determinan por las abscisas $x = 0$ y $x = l$. Para la función $\theta(x, t)$ tenemos los problemas de contorno:

a) en el caso cuando los extremos están fijos rígidamente

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (1)$$

$$\theta(0, t) = \theta(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\theta(x, 0) = f(x), \quad \theta_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

$a^2 = \frac{GJ}{K}$, donde G es el módulo del desplazamiento; J , el momento polar (geométrico) de inercia de la sección transversal del cilindro respecto al punto en que el eje del cilindro encuentra esta sección transversal; K , el momento axial de inercia de la unidad de longitud de la barra (respecto al mismo eje);

b) cuando los extremos del cilindro están libres, las condiciones de frontera tienen la forma

$$\theta_x(0, t) = \theta_x(l, t) = 0; \quad (4)$$

c) cuando los extremos del cilindro están fijos elásticamente, las condiciones de frontera tienen la forma

$$\theta_x(0, t) - h\theta(0, t) = 0, \quad \theta_x(l, t) + h\theta(l, t) = 0. \quad (5)$$

Indicación. Establecer que el momento M de las fuerzas de elasticidad, aplicadas a la sección transversal x del cilindro, puede ser hallado según la fórmula

$$M = GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (6)$$

Para eso estudiar (fig. 16) el desplazamiento de la fibra elemental AB , cuyo cilindro con las bases $d\sigma$ en las secciones es paralelo al eje. Este desplazamiento es el resultado del giro de la sección $x + \Delta x$ en un ángulo $\Delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x} \Delta x$, respecto a la sección x , alrededor del eje del cilindro. Despues determinar la relación entre el ángulo del desplazamiento φ y $\frac{\partial\theta}{\partial x}$. La tensión τ de dicho desplazamiento sobre la

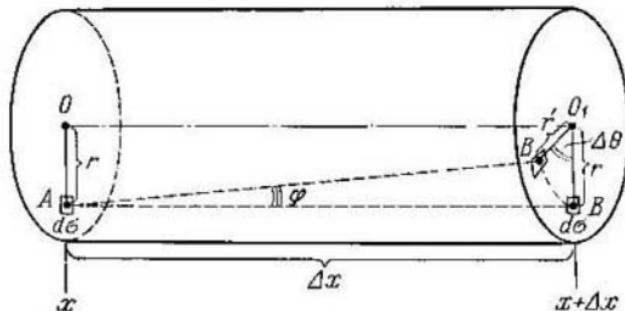


Fig. 16

base $d\sigma$ de esta fibra que se encuentra en la sección x puede ser hallada según la ley de Hooke para la deformación del desplazamiento

$$\tau = G\varphi. \quad (7)$$

La ecuación diferencial (1) puede ser obtenida, pasando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación de movimiento giratorio*) para el elemento $(x, x + \Delta x)$ del cilindro.

Las condiciones de frontera se obtienen análogamente al caso de las vibraciones longitudinales de la barra.

4. La densidad ρ , la presión p , el potencial de velocidad φ , la velocidad v de las partículas de gas y la desviación longitudinal u de las partículas de gas satisfacen una misma ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

con una misma constante

$$a^2 = k \frac{p_0}{\rho_0}$$

donde $k = \frac{c_p}{c_v}$ es el índice de la adiabática

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k,$$

*) Para el movimiento giratorio de un cuerpo sólido alrededor del eje inmóvil tenemos que el producto del momento de inercia y de la aceleración angular es igual a la suma de los momentos de las fuerzas, aplicadas al cuerpo, con relación a este eje.

igual a la razón entre la capacidad calorífica a presión constante y la capacidad calorífica a volumen constante, y p_0 y ρ_0 son la presión y la densidad en el gas no perturbado.

Si los extremos del tubo están cerrados, entonces las condiciones de frontera para cada una de las funciones u , v , φ , p , ρ tienen respectivamente el aspecto

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(l, t) = 0, \\ v(0, t) &= v(l, t) = 0, \\ \varphi_x(0, t) &= \varphi_x(l, t) = 0, \\ p_x(0, t) &= p_x(l, t) = 0, \\ \rho_x(0, t) &= \rho_x(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Si los extremos del tubo están abiertos, entonces

$$\begin{aligned} u_x(0, t) &= u_x(l, t) = 0, \\ v_x(0, t) &= v_x(l, t) = 0, \\ \varphi(0, t) &= \varphi(l, t) = 0, \\ \tilde{p}(0, t) &= \tilde{p}(l, t) = 0, \\ \tilde{\rho}(0, t) &= \tilde{\rho}(l, t) = 0, \end{aligned}$$

donde $\tilde{p}(x, t) = p(x, t) - p_0$ es la perturbación de la presión y $\tilde{\rho}(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0$ es la perturbación de la densidad.

Al existir en el extremo $x = l$ del tubo un pistón, impenetrable para el gas, con una masa despreciablemente pequeña, colocado sobre un muelle con el coeficiente de rigidez v^* y que se desliza dentro del tubo sin rozamiento, para $u(x, t)$ obtenemos la condición de frontera

$$u_x(l, t) + hu(l, t) = 0,$$

donde $h = \frac{v}{Skp_0}$ y k es el índice de la adiabática. Análogamente al existir un pistón igual en el extremo $x = 0$ del tubo tendremos

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0.$$

Para $v(x, t)$ en las mismas condiciones tenemos

$$v_x(0, t) - hv(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) + hv(l, t) = 0.$$

Para $\tilde{p}(x, t)$ y $\tilde{\rho}(x, t)$ tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{tt}(0, t) - h^* \tilde{p}_x(0, t) &= \tilde{p}_{tt}(l, t) + h^* \tilde{p}_x(l, t) = \\ &= \tilde{p}_{tt}(0, t) - h^* \tilde{p}_x(0, t) = \tilde{p}_{tt}(l, t) + h^* \tilde{p}_x(l, t) = 0, \end{aligned}$$

donde $h^* = \frac{v}{S\rho_0}$. Estas condiciones se cumplen también y para

$$\varphi(x, t), \quad \rho(x, t), \quad \varphi(x, t).$$

^{*}) El muelle actuará sobre el pistón con la fuerza adicional de elasticidad que es igual a $-vu(l, t)$ para la desviación del pistón igual a u . Hablamos de la fuerza adicional de elasticidad ya que en la posición de equilibrio sobre el pistón ya actúa la fuerza de elasticidad que equilibra la presión no perturbada p_0 .

Indicación. En las coordenadas de Lagrange* la ecuación de continuidad (1) y la ecuación de movimiento (2) (las principales ecuaciones de hidrodinámica) tienen la forma

$$\rho_0 = \rho(x, t) [1 + u_x(x, t)], \quad (1)$$

$$\rho_0 u_{tt}(x, t) = -p_x(x, t). \quad (2)$$

Junto con la ecuación de la adiabática

$$p = f(\rho), \quad \text{donde } f(\rho) = \frac{p_0}{\rho_0^k} \rho^k, \quad k = \frac{c_p}{c_v}, \quad (3)$$

ellas componen el sistema completo no lineal de ecuaciones para determinar las funciones $\rho(x, t)$; $u(x, t)$; $p(x, t)$.

La ecuación (1) expresa la ley de conservación de masa del elemento de gas, encerrado entre las dos secciones transversales que se componen de las partículas de gas, y la ecuación (2) expresa la segunda ley de Newton para este elemento de gas.

Despreciando los cuadrados, productos y las potencias superiores de las magnitudes

$$u(x, t), \tilde{p}(x, t) = p(x, t) - p_0, \tilde{\rho}(x, t) = \rho(x, t) - \rho_0$$

y de sus derivadas, es fácil obtener de las ecuaciones (1), (2), (3), respectivamente, las ecuaciones lineales

$$\tilde{\rho}(x, t) + \rho_0 u_x(x, t) = 0, \quad (1')$$

$$\rho_0 u_{tt}(x, t) = -\tilde{p}_x(x, t), \quad (2')$$

$$\tilde{p}(x, t) = a^2 \tilde{\rho}(x, t), \quad a^2 = k \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (3')$$

a es la velocidad de propagación de las perturbaciones pequeñas en el gas (la velocidad del sonido)**).

Este paso del sistema no lineal (1), (2), (3) al sistema lineal (1'), (2'), (3') se llama «linealización». Las ecuaciones $\tilde{\rho}_{tt} = a^2 \tilde{\rho}_{xx}$ y $\tilde{p}_{tt} = a^2 \tilde{p}_{xx}$ se obtienen de (1'), (2'), (3') efectuando la derivación y la eliminación de otras funciones. El potencial $\varphi(x, t)$ se determina por la relación $\varphi_x(x, t) = v(x, t)$ salvo un sumando que es una función arbitraria de tiempo; ya que $u_t(x, t) = v(x, t)$, entonces de la ecuación (2') tendremos

$$\rho_0 \varphi_{xt} + \tilde{p}_x = 0$$

es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 \varphi_t + \tilde{p}) = 0$$

por eso, en virtud de que el potencial de velocidades $\varphi(x, t)$ se determina salvo un sumando, que es una función arbitraria de tiempo, se puede escribir

$$\rho_0 \varphi_t + \tilde{p} = 0. \quad (4)$$

La relación (4) da la posibilidad de hallar la perturbación de la presión \tilde{p} , si es conocido el potencial de velocidades. De la ecuación (1'), efectuando la derivación respecto a t , tendremos

$$\tilde{\rho}_t + \rho_0 \varphi_{xx} = 0. \quad (5)$$

*) Véase [7], pág. 34.

**) Véase la introducción al § 2 (de las condiciones) del presente capítulo.

De (4) y (5) se obtiene la ecuación

$$\varphi_{tt} = a^2 \varphi_{xx},$$

la derivación de la cual respecto a x lleva a la ecuación

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}.$$

Análogamente se obtienen las ecuaciones para el potencial de los desplazamientos y para los desplazamientos.

Estudiando el movimiento del elemento de frontera de gas y utilizando las ecuaciones (1'), (2'), (3'), (4) y (5) no es difícil obtener las condiciones de frontera, dadas en la respuesta.

5. El eje Ox está dirigido según el tubo y el origen de las coordenadas O está en el plano de la sección de entrada, p_0 es la presión del agua en el tanque. Para determinar los valores medios (por la sección transversal interior del tubo) de la velocidad $v(x, t)$ y de la presión $p(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial t} + 2\alpha(\rho_0 v), \quad \left| \begin{array}{l} 0 < x < l; \quad 0 < t < +\infty, \\ \end{array} \right. \quad (1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial(\rho_0 v)}{\partial x}, \quad \left| \begin{array}{l} 0 < x < l; \quad 0 < t < +\infty, \\ \end{array} \right. \quad (2)$$

$$p(0, t) \cong p_0, \quad v(l, t) = 0; \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

$$p(x, 0) \cong p_0, \quad v(x, 0) = v_0; \quad 0 < x < l, \quad (4)$$

donde ρ_0 es la densidad del agua en el tanque,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho_0}{k} + \frac{2R_0\rho_0}{E\delta}}},$$

además k es módulo de elasticidad del agua, que entra en la ley de Hooke para el agua,

$$\tilde{p} = k \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} \quad (\tilde{p} = p - p_0, \quad \tilde{\rho} = \rho - \rho_0), \quad (6)$$

R_0 es el radio interior del tubo en el estado no perturbado; E , el módulo de elasticidad del material del tubo, δ , el espesor del tubo, α , el coeficiente de resistencia al rozamiento de la unidad de longitud del tubo que se determina experimentalmente*).

Al deducir la ecuación del movimiento, como demostró N. E. Zhukovski, para los tubos finos cuando las perturbaciones de la presión son no demasiado grandes se puede despreciar el movimiento radial de las partículas de los tubos**), mientras que al deducir la ecuación de continuidad es necesario tener en cuenta el alargamiento radialmente simétrico del tubo. La fuerza de resistencia al rozamiento, la cual actúa sobre el elemento del agua que se encuentra

*) Sea S la sección transversal interior del tubo, entonces la fuerza de resistencia, aplicada al elemento del líquido entre las secciones x y $x + \Delta x$, es igual a

$$2\alpha \int_x^{x+\Delta x} S \rho v \, dx.$$

Sobre el planteamiento más exacto del problema, donde se analiza más detalladamente la fuerza de resistencia, véase, por ejemplo, [44].

**) En este caso el producto de la masa del elemento anular del tubo a la aceleración radial es despreciablemente pequeño.

entre las secciones x y $x + \Delta x$, puede ser determinada según la fórmula dada en la llamada.

Al deducir las ecuaciones del problema de contorno vamos a considerar que las magnitudes p , ρ , v son pequeñas y la magnitud $\frac{p_0}{R_0 \cdot E \delta}$, considerablemente menor que la unidad.

Establecemos la relación entre el radio interior R del tubo y la presión p en el tubo. Para eso estudiamos el estado de la mitad del elemento que se

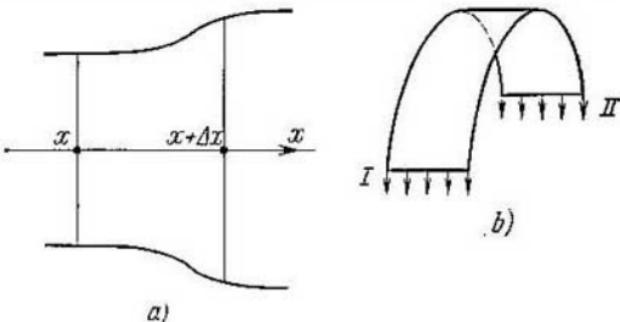


Fig. 17

corta del tubo por las secciones transversales cercanas x y $x + \Delta x$ que está dibujado en la fig. 17. Las fuerzas de elasticidad que se desarrollan en las secciones I y II de este semianillo son iguales a la suma de las proyecciones de las fuerzas de presión del líquido sobre el radio medio del semianillo, es decir,

$$2\delta\Delta x E \frac{R - R_0}{R_0} = 2R\Delta x (p - p_0)$$

6

$$\tilde{p} = \frac{E\delta}{R_0^2} \tilde{R}. \quad (7)$$

Por lo tanto, la magnitud $\tilde{R} = R - R_0$ será también pequeña, al igual que la magnitud

$$\tilde{S} = S - S_0 \approx 2\pi\tilde{R}\tilde{R}_0 = S_0 \frac{2R_0}{E\delta} \tilde{p}. \quad (8)$$

Deduciremos la ecuación de continuidad que expresa la ley de conservación de la masa de sustancia para el volumen, incluido entre los planos x y $x + \Delta x$ (fig. 17, b):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^{x+\Delta x} Sp \, dx = (Spv)_x - (Spv)_{x+\Delta x},$$

es decir,

$$\int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial t} (Sp) \, dx = (Spv)_x - (Spv)_{x+\Delta x},$$

de donde

$$\frac{\partial(S\rho)}{\partial t} = -\frac{\partial(S\rho v)}{\partial x}.$$

En virtud de que las magnitudes \tilde{S} , $\tilde{\rho}$, v son pequeñas esta ecuación se transforma en la ecuación (2).

Análogamente (fig. 17, a) deducimos la ecuación del movimiento que expresa la segunda ley de Newton para el elemento de agua, incluido en el momento de tiempo dado entre las secciones x y $x + \Delta x$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} (Spv) dx &= (Sp)|_x - (Sp)|_{x+\Delta x} - 2\alpha \int_x^{x+\Delta x} (Spv) dx, \quad \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0, \\ \int_x^{x+\Delta x} \left\{ \frac{d}{dt} (Spv) \right\} dx &= (Sp)|_x - (Sp)|_{x+\Delta x} - 2\alpha \int_x^{x+\Delta x} (Spv) dx, \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{d(S\rho v)}{dt} = -\frac{\partial(S\rho)}{\partial x} - 2\alpha S\rho v.$$

En virtud de que \tilde{S} , $\tilde{\rho}$, \tilde{v} son pequeños y que $\frac{2p_0 R_0}{E\delta}$ es pequeño en comparación con la unidad, esta ecuación (con ayuda de las relaciones (6) y (8)) se transforma en la ecuación (1). Las condiciones iniciales (4) y las condiciones de frontera (3), dadas en la respuesta, son obvias.

En vez del sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden puede obtenerse una ecuación hiperbólica de segundo orden tanto para la función $v(x, t)$ como para $p(x, t)$. Justamente, diferenciando (1) según x y (2) según t y eliminando v , tendremos

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2\alpha \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$p(0, t) = p_0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty.$$

La segunda condición de frontera para $p(x, t)$ la obtenemos de la condición de frontera $v(l, t) = 0$ cuando $0 < t < +\infty$ con ayuda de la ecuación (1):

$$p_x(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty.$$

Después

$$p(x, 0) = p_0 \quad \text{para } 0 < x < l.$$

La segunda condición inicial para $p(x, t)$ la obtenemos de $v(x, 0) = v_0$ cuando $0 < x < l$ y la ecuación (2):

$$p_t(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < x < l.$$

Análogamente puede ser obtenido el problema de contorno para la determinación de $v(x, t)$.

6. *Resolución.* Sea que ω significa el incremento del volumen del líquido en la campana; S , el área de la sección transversal interior del tubo en el extremo $x = l$. Tenemos

$$\frac{d\omega}{dt} = Sv|_{x=l} - Q(t), \quad (1)$$

$$p_0 \Omega_0 = P(\Omega_0 - \omega) \quad (2)$$

donde v es la velocidad del flujo del líquido y P , la presión del aire en la campana, de donde

$$P = \frac{P_0 \Omega_0}{\Omega_0 - \omega} \approx P_0 \left(1 + \frac{\omega}{\Omega_0} \right), \quad (3)$$

en consecuencia

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Omega_0}{P_0} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (4)$$

donde $p = P$ es la presión del líquido en la campana. En virtud de la ecuación (2) en la pág. 106

$$\frac{d\omega}{dt} = -\lambda^2 \rho_0 \cdot \frac{\Omega_0}{P_0} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (1), obtenemos la condición de frontera incógnita

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{P_0 S}{\Omega_0 \lambda^2 \rho_0} v = \frac{P_0}{\Omega_0 \lambda^2 \rho_0} Q(t) \Big|_{x=l}. \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} 7. \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi(0, t) &= \xi(l, t) = 0, \\ \eta_x(0, t) &= \eta_x(l, t) = 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi(x, 0) &= f(x), & \xi_t(x, 0) &= \varphi(x), \\ \eta(x, 0) &= -hf'(x), & \eta_t(x, 0) &= -h\varphi'(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta(x, 0) &= -hf'(x), & \eta_t(x, 0) &= -h\varphi'(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (6)$$

Indicación. Se puede considerar despreciablemente pequeña la perturbación de la presión en el agua durante los movimientos ondulatorios en estudio, es

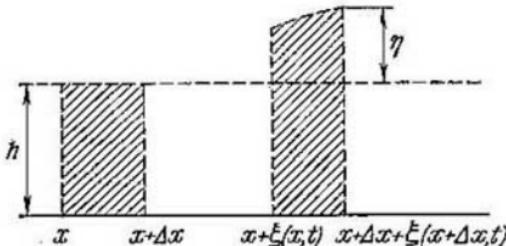


Fig. 18

dicho, a gran distancia del fondo del canal puede considerarse casi hidrostática*). La componente v de la velocidad de las partículas del agua según la dirección del eje x se puede considerar como pequeña, es decir, despreciar los cuadrados, productos y potencias superiores de esta función y de sus derivadas. El líquido puede considerarse como incompresible.

Resolución. La presión es igual a

$$p = p_0 + g\rho(h + \eta - y). \quad (7)$$

*). Pero no se puede despreciar su derivada según x .

De donde encontramos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g \rho \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (8)$$

Escribamos la ecuación del movimiento para el elemento $\Delta x \Delta y \Delta z$ de la capa ($x, x + \Delta x$) del agua en las proyecciones sobre el eje x (fig. 18):

$$\Delta x \Delta y \Delta z \rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x+\theta \Delta x},$$

donde $0 < \theta < 1$, de donde después de la simplificación por $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ cuando $\Delta x \rightarrow 0$ tendremos:

$$\rho \frac{\partial x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (9)$$

o, empleando (8),

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - g \rho \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (10)$$

Luego, empleando la incompresibilidad del líquido, obtenemos «la ecuación de no discontinuidad» (la ecuación de conservación de la masa)

$$\rho \eta m = - \frac{\partial (\rho m h \xi)}{\partial x}, \quad (11)$$

donde m es la anchura del canal, de donde

$$\eta = - h \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (12)$$

La ecuación (10) dará

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (13)$$

Pero $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, por lo tanto

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - g \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (14)$$

Por otra parte, de (12) obtenemos

$$- g \frac{\partial \eta}{\partial x} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (15)$$

Comparando (14) y (15), obtenemos la ecuación diferencial para la función $\xi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (16)$$

Ahora no es difícil obtener las restantes relaciones de la respuesta, dada arriba. Indiquemos sólo que las condiciones de frontera (4) se pueden obtener de las condiciones de frontera (3), efectuando la derivación según t y empleando la igualdad (14).

En conclusión es necesario remarcar que para determinar $\xi(x, t)$ y $\eta(x, t)$ es suficiente resolver el problema de contorno (1), (3), (5) y después, sabiendo $\xi(x, t)$, hallar $\eta(x, t)$, según la fórmula (12).

S. El eje Ox está dirigido según el eje longitudinal de simetría de la barra en su posición de equilibrio y como la función característica se toma la desviación transversal $u(x, t)$ de los puntos de la barra desde sus posiciones de equilibrio. Para la determinación de $u(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (*) \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho S}, \quad (4)$$

donde E es el módulo de elasticidad de la barra; ρ , la densidad de masa de la barra; S , el área de la sección transversal de la barra; J , el momento geométrico de inercia de la sección transversal respecto a su línea media perpendicular al plano de las oscilaciones.

Indicación. La deducción de la ecuación (1) está dada en [7], págs. 164-166.

Estudiando el movimiento de los elementos de frontera de la barra, se puede obtener las condiciones de frontera.

Deduciremos las condiciones de frontera en el caso de fijación articulada del extremo.

Estudiemos el elemento de frontera $(l - \Delta x, l)$ del extremo fijo articuladamente y deduciremos para él la ecuación del movimiento rotativo respecto al eje de articulación (fig. 19, véase también la fig. 2).

$$J \ddot{\varphi} \Delta x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = F \mid_{l-\Delta x} \Delta x + M \mid_{l-\Delta x}. \quad (5)$$

Pasando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en suposición de que no hay aceleraciones angulares infinitas $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ y fuerzas cortantes infinitas F , tendremos $M \mid_l = 0$, es decir,

$$u_{xx}(l, t) = 0. \quad (6)$$

Análogamente obtendremos la segunda condición de frontera para el extremo izquierdo $u_{xx}(0, t) = 0$. En la parte izquierda de la igualdad (5) se podría de una vez escribir cero según la suposición de que las vibraciones son pequeñas ($\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \approx 0$). Pero las condiciones de frontera (5) y (6) son válidas también cuando las aceleraciones angulares $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ de los elementos de la barra no se consideran despreciablemente pequeñas. La segunda condición de frontera para el extremo en estudio es obvia: $u(l, t) = 0$.

*) Esta ecuación es obtenida en suposición de que las aceleraciones angulares de las secciones transversales de la barra no existen, es decir, la barra debe ser suficientemente fina. La deducción de la ecuación más exacta véase [26].

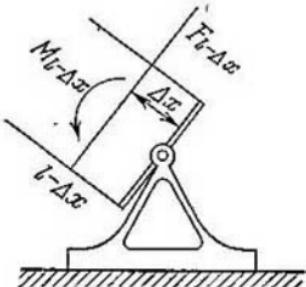


Fig. 19

9. El eje Ox está situado del mismo modo que en el problema anterior. Para determinar $u(x, t)$ obtendremos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

$$a^2 = \frac{EJ}{\rho S}.$$

Indicación. La inmovilidad del extremo y la horizontalidad de la tangente son las condiciones de frontera para el extremo fijo rigidamente $x = 0$. En el extremo libre, lo que se demuestra de modo habitual, el momento de flexión y la fuerza cortante deben ser iguales a cero.

10. El eje Ox está situado igualmente que en el problema 8. Para determinar la desviación $u(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{k}{\rho S} u = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

Indicación. La ecuación (1) se obtiene mediante el paso al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación que expresa en las proyecciones sobre el eje Ou la segunda ley de Newton para el elemento $(x, x + \Delta x)$ de la barra. Sobre las condiciones de frontera véase la solución del problema 8.

2. Vibraciones forzadas y vibraciones en un medio con resistencia; ecuaciones con coeficientes constantes

11.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$, donde ρ es la densidad lineal de la masa de la cuerda.

Indicación. La ecuación diferencial (1) se obtiene de la ecuación de movimiento para el elemento $(x, x + \Delta x)$ de la cuerda cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

12. Para las desviaciones $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda de la posición de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{H}{c\rho} I(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

donde $a^2 = \frac{T}{\rho}$; T es la tensión de la cuerda; ρ , la densidad lineal de masa; c la velocidad de la luz,

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3)$$

13.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u_x(l, t) = -\frac{\Phi(t)}{ES} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

Indicación. La condición de frontera para el extremo $x = l$ se obtiene mediante el paso al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación de movimiento que expresa la segunda ley de Newton para el elemento $(l - \Delta x, l)$ de la barra.

14. Para determinar los desplazamientos límites $u(x, t)$ de las secciones transversales de la barra obtenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = v_0 \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y v_0 , la velocidad alcanzada por el ascensor en el momento de la parada.

15. Para determinar las desviaciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda desde sus posiciones de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2v^2 u_t \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

donde $2v^2 = \frac{k}{\rho}$; ρ es la densidad lineal de masa de la cuerda; k , «el coeficiente de rozamiento», es decir, el coeficiente de proporcionalidad en la relación

$$\Phi = -ku_t,$$

que determina la fuerza de rozamiento que actúa sobre la unidad de longitud de la cuerda.

Indicación. La ecuación (1) se obtiene mediante el paso al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación de movimiento para el elemento $(x, x + \Delta x)$ de la cuerda.

16. Para determinar la desviación transversal de los puntos de la barra de sus posiciones de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + 2v^2 u_t = f(x, t) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = u(l, t) = u_x(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

aquí v tiene el mismo sentido que en el problema anterior.

17. Para determinar la desviación transversal $u(x, t)$ de los puntos de la barra de sus posiciones de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xxxx} = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0, \quad EJu_{xxx}(l, t) = -\Phi(t) \quad (2)$$

cuando $0 < t < +\infty$, donde $\Phi(t)$ es la fuerza transversal aplicada al extremo $x = l$ (su proyección sobre el eje Ou , que «coincide» con la fuerza, ya que la fuerza es paralela al eje Ou)

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

Indicación. La última de las condiciones de frontera (2) puede ser obtenida mediante el paso al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ en la ecuación que expresa en la proyección sobre el eje Ou la segunda ley de Newton para el elemento $(l - \Delta x, l)$ de la barra. Sobre la condición $u_{xx}(l, t) = 0$ véase la solución del problema 8.

18. Para determinar las desviaciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la barra desde sus posiciones de equilibrio obtenemos el problema de contorno*)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad ESu_x(l, t) = ku_t(l, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

donde k es el coeficiente de rozamiento para el extremo $x = l$ de la barra.

19.

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = E(t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = F(x), \quad v_t(x, 0) = \frac{-GF(x) - f'(x)}{C} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

donde $E(t)$ es la fuerza electromotriz dada, aplicada al extremo $x = l$ del cable y L, C, G, R son respectivamente el coeficiente de autoinducción, la capacidad, la fuga y la resistencia, calculados para la unidad de longitud del cable.

Indicación. Las condiciones iniciales se escriben en la forma (3), si se emplea la segunda ecuación del sistema de ecuaciones telegráficas

$$v_x + Lt_t + Ri = 0, \quad (4)$$

$$i_x + Cv_t + Gv = 0$$

cuando $t = 0$. El sistema (4) se deduce en [7] en las págs. 38-39.

3. Problemas sobre las vibraciones que se reducen a ecuaciones con coeficientes variables continuos

20.

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x)S(x)\frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

21. El eje Ox está dirigido según el eje del cono. Para determinar las desviaciones longitudinales $u(x, t)$ de los puntos de la barra desde sus posiciones de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

Aquí $a^2 = \frac{E}{\rho}$; E es el módulo de elasticidad; ρ , la densidad de masa;

$H = \frac{R}{R-z}l$, la altura del cono completo, la parte del cual es la barra.

*) Sobre la deducción de las condiciones de frontera véase la indicación al problema 1.

22. Para determinar las desviaciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la barra de la posición de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$\left(1 - \frac{x}{H}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[\left(1 - \frac{x}{H}\right)^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, \\ 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

donde $\alpha^2 = \frac{Eh^2}{12\rho}$, $H = \frac{h}{h-h}$ l es la altura de la cuña completa, la parte de la cual es la barra

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(l, t) = 0 \\ \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

Si para la sección transversal con la abscisa x el área y el momento de inercia (respecto a la línea media horizontal de la sección transversal) son iguales respectivamente a $S(x)$ y $J(x)$, entonces la ecuación de las vibraciones transversales de la barra será de la forma

$$S(x) \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (4)$$

Primeramente se debe obtener la ecuación (4) análogamente como esto se hace en la solución del problema 8 del presente parágrafo y después, sustituyendo los valores $S(x)$ y $J(x)$ para la barra en forma de cuña en estudio, obtener de la ecuación (4) la ecuación (1). Sobre la deducción de las condiciones de frontera (2) véase también la solución del problema 8.

23. El eje Ox está dirigido según la cuerda en la posición de equilibrio, además su origen coincide con el extremo libre de la cuerda. Para determinar las desviaciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda de sus posiciones de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) \text{ está acotado*}, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

24. En el sistema de coordenadas, elegido del mismo modo que en el problema anterior, para determinar las vibraciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda desde la posición de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \omega^2 u \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) \text{ está acotada}, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3)$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

*) La exigencia de acotación de $u(0, t)$ y de las desviaciones del extremo libre es obvia. Esta exigencia es suficiente también, desde el punto de vista matemático, lo que se determina por la estructura de la ecuación (1). Precisamente, calculando la energía de la cuerda vibrante, se puede como en el caso más simple de las vibraciones transversales de la cuerda demostrar la unicidad de la solución del problema de contorno (1), (2), (3).

25. Empleamos el sistema de coordenadas cartesianas xOu , el eje Ox de la cual está dirigido según la cuerda en su movimiento equilibrado y el eje Ou es perpendicular al plano del movimiento equilibrado, además el origen de coordenadas coincide con el extremo libre de la cuerda. Para determinar las desviaciones $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda desde el plano del movimiento equilibrado obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) \text{ está acotada}, \quad u(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

Sobre la condición de frontera para el extremo $x = 0$ véase la llamada a la respuesta al problema 23 del presente parágrafo.

4. Problemas que se reducen a ecuaciones con coeficientes discontinuos y problemas afines [medios homogéneos a trozos, factores concentrados]

26. El eje Ox está dirigido a lo largo de la barra. En el estado de equilibrio el plano de unión de los topes de las barras semiacotadas pasa por el origen de coordenadas. $u_1(x, t)$ son las desviaciones longitudinales de los puntos de la primera barra semiacotada, $u_2(x, t)$, de la segunda barra. Para determinar $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} && \text{para } -\infty < x < 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} && \text{para } 0 < x < \infty, \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad E_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = E_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty,$$

$$a_1^2 = \frac{E_1}{\rho_1}, \quad a_2^2 = \frac{E_2}{\rho_2}.$$

Indicación. La primera de las condiciones de conjugación (2) significa que los topes de las barras semiacotadas todo el tiempo quedan unidas, la segunda condición puede ser obtenida cuando $\Delta x \rightarrow 0$ de la ecuación de movimiento que expresa la segunda ley de Newton para el elemento $(-\Delta x, \Delta x)$ de la barra compuesta.

27. El eje Ox está dirigido de la misma manera que en el problema anterior. Para determinar las vibraciones transversales de los puntos de la barra obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a_1^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} &= 0 && \text{para } -\infty < x < 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + a_2^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} &= 0 && \text{para } 0 < x < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad u_{1x}(0, t) = u_{2x}(0, t), \\ E_1 u_{1xx}(0, t) = E_2 u_{2xx}(0, t), \quad E_1 u_{1xxx}(0, t) = \\ = E_2 u_{2xxx}(0, t), \end{array} \right\} \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{ll} u_1(x, 0) = f(x), & u_{1t}(x, 0) = E(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0, \\ u_2(x, 0) = j(x), & u_{2t}(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$a_1^2 = \frac{E_1 J}{\rho_1 S}, \quad a_2^2 = \frac{E_2 J}{\rho_2 S}. \quad (4)$$

28. El eje Ox y las funciones $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son elegidos de la misma forma que en el problema 26. Para determinar $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} & \text{para } -\infty < x < 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} & \text{para } 0 < x < +\infty, \end{array} \right\} \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad k_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{ll} u_1(x, 0) = f(x), & \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0, \\ u_2(x, 0) = j(x), & \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = F(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$a_1^2 = k_1 \frac{p_0^{(1)}}{\rho_0^{(1)}}, \quad a_2^2 = k_2 \frac{p_0^{(2)}}{\rho_0^{(2)}},$$

k_1 y k_2 son los índices de adiabata para el primero y segundo gases, $p_0^{(1)} = p_0^{(2)}$ y $\rho_0^{(1)}, \rho_0^{(2)}$ son la presión y la densidad del primero y segundo gases en el estado no perturbado.

Indicación. La segunda de las ecuaciones de frontera se obtiene empleando las relaciones (1') y (3') de la solución del problema 4, de la igualdad de las perturbaciones de la presión

$$\tilde{p}^{(1)}(0, t) = \tilde{p}^{(2)}(0, t),$$

la cual a su vez se obtiene mediante el paso al límite de la ecuación de movimiento, que expresa la segunda ley de Newton para el elemento $(-\Delta x, \Delta x)$ del gas, en virtud de la igualdad de las presiones no perturbadas $p_0^{(1)} = p_0^{(2)}$.

29. El eje Ox está dirigido a lo largo del canal, además el origen de coordenadas O está puesto en el plano donde la sección transversal varía de salto. Sean la anchura y la profundidad*) del canal semiacotado izquierdo m_1 y h_1 respectivamente y las del derecho, m_2 y h_2 . Entonces para determinar los desplazamientos longitudinales de las partículas del líquido y las desviaciones verticales de la superficie libre del líquido con respecto al estado de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z_1(x, t)}{\partial t^2} = g h_1 \frac{\partial^2 z_1(x, t)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta_1(x, t)}{\partial t^2} = g h_1 \frac{\partial^2 \eta_1(x, t)}{\partial x^2} \end{array} \right\} \text{para } -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

*) La profundidad medida desde la superficie no perturbada libre del líquido.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_2(x, t)}{\partial t^2} &= g h_2 \frac{\partial^2 \xi_2(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \eta_2(x, t)}{\partial t^2} &= g h_2 \frac{\partial^2 \eta_2(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\eta_1(0, t) = \eta_2(0, t), \quad m_1 h_1 \xi_{1t}(0, t) = m_2 h_2 \xi_{2t}(0, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\xi_1(x, 0) = f(x), \quad \xi_{1t}(x, 0) = F(x), \quad \left. \begin{aligned} \eta_1(x, 0) &= -h_1 f'(x), & \eta_{1t}(x, 0) &= -h_1 F'(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$\xi_2(x, 0) = f(x), \quad \xi_{2t}(x, 0) = F(x), \quad \left. \begin{aligned} \eta_2(x, 0) &= -h_2 f'(x), & \eta_{2t}(x, 0) &= -h_2 F'(x) \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < x < +\infty. \quad (3')$$

Indicación. La primera de las condiciones de conjugación (2) es consecuencia de la suposición sobre la continuidad de la presión en el líquido al paso por la sección transversal $x = 0$, la segunda, expresa la ley de conservación de masa. La primera de las condiciones (2) puede ser sustituida por la condición

$$h_1 \xi_{1x}(0, t) = h_2 \xi_{2x}(0, t) \quad (4)$$

mediante la relación

$$\eta_1(x, t) = -h_1 \xi_{1x}(x, t), \quad \eta_2(x, t) = -h_2 \xi_{2x}(x, t). \quad (5)$$

Entonces el problema de contorno para determinar $\xi_1(x, t)$ y $\xi_2(x, t)$ se convierte independiente del problema de contorno para determinar $\eta_1(x, t)$ y $\eta_2(x, t)$. Observemos, al fin, que las condiciones de conjugación (2) [o la segunda de las condiciones (2) y la condición (4)] sólo aproximadamente describen el fenómeno en el entorno de la sección transversal $x = 0$, ya que las ambas se basan en la suposición de que los niveles de las secciones transversales $-\Delta x$ y Δx para los pequeños Δx se diferencian poco.

30. Los ejes de coordenadas y las funciones caracterizantes son elegidos del mismo modo que en el problema 26. Para la determinación de $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\begin{aligned} u_1(0, t) &= u_2(0, t), & M \frac{\partial^2 u_1(0, t)}{\partial t^2} &= M \frac{\partial^2 u_2(0, t)}{\partial t^2} = \\ &= E_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} - E_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x, 0) = F(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad u_{2t}(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty. \quad (3')$$

Indicación. La segunda de las condiciones de conjugación (2) expresa la segunda ley de Newton para la junta rígida de masa M . Véase también la indicación al problema 26 y la solución del problema 32.

31. El eje x está dirigido según la posición rectilínea de equilibrio de la barra, además el origen de coordenadas está puesto en el plano de unión de los topes de las barras semiacotadas*). Para determinar las desviaciones transver-

*) Recordemos que según la condición del problema el espesor de la junta rígida entre los topes unidos es despreciablemente pequeño.

sales de los puntos de la barra de la posición de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a_1^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 0 & \quad -\infty < x < 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + a_2^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = 0 & \quad 0 < x < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad u_{1x}(0, t) = u_{2x}(0, t), \\ E_1 u_{1xx}(0, t) = E_2 u_{2xx}(0, t)^*, \\ M u_{1tt}(0, t) = M u_{2tt}(0, t) = \\ = E_1 J u_{1xxx}(0, t) - E_2 J u_{2xxx}(0, t), \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x, 0) = F(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad u_{2t}(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$a_1^2 = \frac{E_1 J}{\rho_1 S}, \quad a_2^2 = \frac{E_2 J}{\rho_2 S}. \quad (4)$$

32. El eje Ox está dirigido según la barra de tal manera que su extremo superior tiene la abscisa $x = 0$. Para determinar la desviación longitudinal $u(x, t)$ de los puntos de la barra obtenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{Q}{g} u_{tt}(l, t) = -ESu_x(l, t) + Q \quad \text{para } 0 < t < +\infty \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

Solución. Nos detenemos en la deducción de la segunda de las condiciones de frontera (2). Escribiremos la ecuación que expresa en las proyecciones sobre el eje Ox la segunda ley de Newton para el cuerpo que consta del peso Q y el elemento $(l - \Delta x, l)$ de la barra. Tendremos (fig. 20):

$$\left(\frac{Q}{g} + \rho S \Delta x \right) u_{tt}(x_c, t) = -ESu_x(l - \Delta x, t) + Q$$

donde x_c es la abscisa (de Lagrange) del centro de masa del cuerpo en estudio. Pásando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, obtendremos de esta ecuación la condición de frontera

$$\frac{Q}{g} u_{tt}(x_c, t) = -ESu_x(l, t) + Q.$$

Pero ya que el peso Q se considera rígido (no deformable), entonces todos sus puntos obtendrán iguales aceleraciones longitudinales durante las vibraciones longitudinales de la barra, por eso en la última relación se puede sustituir x_c por l , entonces obtendremos la segunda de las condiciones de frontera (2).

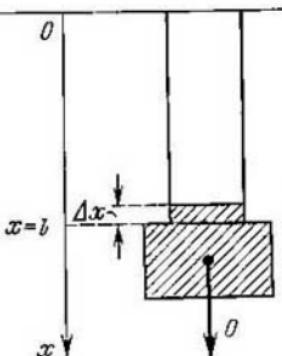


Fig. 20

*) Esta condición de conjugación expresa la igualdad de los momentos de flexión que se deduce de la suposición de que las secciones transversales no giran. Para más detalles sobre esto véase [26].

33. El eje Ox está dirigido horizontalmente y por lo tanto es paralelo a la posición no tensa de la barra, tomada por la posición de equilibrio. Para determinar las desviaciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la barra desde sus posiciones de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0;$$

$$\frac{Q}{g} u_{tt}(l, t) = E J u_{xxx}(l, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l.$$

Indicación. La igualdad $u_{xx}(l, t) = 0$ expresa la igualdad a cero del momento de flexión que es consecuencia de la suposición de que las secciones transversales de la barra no giran*) (véase la deducción de las condiciones de frontera en el problema 9). La última de las condiciones de frontera (2) expresa la segunda ley de Newton en las proyecciones sobre el eje Ou para el peso Q , fijado al extremo de la barra.

34. El eje Ox está dirigido según la barra, su origen se encuentra sobre el eje de rotación y coincide con el comienzo de la barra. Para determinar las desviaciones longitudinales $u(x, t)$ de los puntos de la barra obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega^2 (x + u) \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

donde $a^2 = \frac{E}{\rho}$, E es el módulo de elasticidad y ρ , la densidad de masa de la barra,

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{Q}{t} u_{tt}(l, t) = \frac{Q}{g} \omega^2 [l + u(l, t)] - ES u_x(l, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

35. El eje Ox está dirigido del mismo modo que en el problema anterior. Para determinar las desviaciones longitudinales de los puntos de la barra obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \omega^2 (x + u) + g \cos \left(\int_0^t \omega dt + \varphi_0 \right) \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

donde a^2 tiene el mismo sentido que en el problema anterior y φ_0 es el ángulo, en el momento de tiempo $t = 0$, entre la barra y la dirección vertical abajo,

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{Q}{g} u_{tt}(l, t) = \frac{Q}{g} \omega^2 [l + u(l, t)] + Q \cos \left(\int_0^t \omega dt + \varphi_0 \right) - ES u_x(l, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

*) Véase también la llamada al problema 8.

36. El eje Ox está dirigido según la barra; la roldana con el momento de inercia k_3 tiene la abscisa $x = 0$, la roldana con el momento de inercia k_4 , insertada entre los dos cilindros, tiene la abscisa $x = l$, al fin la roldana con el momento de inercia k_5 tiene la abscisa $x = 2l$. Para determinar los ángulos de giro de las secciones transversales de los cilindros obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial x^2} \quad \text{para } l < x < 2l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\left. \begin{aligned} k_3 \frac{\partial^2 \theta_1(0, t)}{\partial t^2} &= G_1 J_1 \frac{\partial \theta_1(0, t)}{\partial x}, \\ k_4 \frac{\partial^2 \theta_1(l, t)}{\partial t^2} &= k_4 \frac{\partial^2 \theta_2(l, t)}{\partial t^2} = \\ &= G_2 J_2 \frac{\partial \theta_2(l, t)}{\partial x} - G_1 J_1 \frac{\partial \theta_1(l, t)}{\partial x}, \\ k_5 \frac{\partial^2 \theta_2(2l, t)}{\partial t^2} &= G_2 J_2 \frac{\partial \theta_2(2l, t)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(x, 0) &= f(x), & \theta_{1t}(x, 0) &= F(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \\ \theta_2(x, 0) &= f(x), & \theta_{2t}(x, 0) &= F(x) \quad \text{para } l < x < 2l, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$a_1^2 = \frac{G_1 J_1}{k_1}, \quad a_2^2 = \frac{G_2 J_2}{k_2}, \quad (3')$$

dónde G_1, J_1, k_1 y G_2, J_2, k_2 son el módulo de desplazamiento, el momento polar «geométrico» de inercia de la sección transversal y el momento de inercia de la unidad de longitud para el primer cilindro y correspondientemente para el segundo cilindro *).

37. El eje Ox coincide con la posición de equilibrio de la cuerda. Para determinar las desviaciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad T_0 u_{2x}(0, t) - T_0 u_{1x}(0, t) + F(t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad u_{2t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty. \quad (3')$$

Si el punto de aplicación de la fuerza se desplaza a lo largo de la cuerda según la ley

$$x = \varphi(t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad \varphi(0) = 0, \quad (4)$$

entonces las condiciones de conjugación tomarán la forma

$$u_1[\varphi(t), t] = u_2[\varphi(t), t], \quad T_0 u_{2x}[\varphi(t), t] -$$

$$- T_0 u_{1x}[\varphi(t), t] + F(t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty.$$

*) Compárese con la respuesta al problema 3.

38. El eje Ox está situado igual que en el problema anterior:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} = 0 \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} = 0 \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) &= u_2(0, t), & u_{1x}(0, t) &= u_{2x}(0, t), & u_{1xx}(0, t) &= u_{2xx}(0, t), \\ EJ u_{1xxx}(0, t) &- EJ u_{2xxx}(0, t) + F(t) &= 0 & \text{para } 0 < t < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad u_{2t}(x, 0) = g(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty. \quad (3')$$

Si el punto de aplicación de la fuerza se desplaza a lo largo de la barra según la ley $x = \varphi(t)$ para $0 < t < +\infty$, $\varphi(0) = 0$, entonces las condiciones de conjugación (2) tomarán la forma

$$u_1[\varphi(t), t] = u_2[\varphi(t), t], \quad u_{1x}[\varphi(t), t] = u_{2x}[\varphi(t), t]$$

$$u_{1xx}[\varphi(t), t] = u_{2xx}[\varphi(t), t].$$

$$EJ u_{1xxx}[\varphi(t), t] - EJ u_{2xxx}[\varphi(t), t] + F(t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty.$$

39. El eje Ox está dirigido según el tubo, además el origen del eje está puesto en el comienzo del tubo, donde está colocado el pistón. Para determinar las desviaciones longitudinales $u(x, t)$ de las partículas de gas obtenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$Mu_{tt}(0, t) = -Skp_0 u_{xx}(0, t) - k^* u_t(0, t) - k^{**} u(0, t), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty. \quad (3)$$

Indicación. La condición de frontera (2) expresa la segunda ley de Newton para el pistón *).

40. El eje Ox coincide con la posición de equilibrio de la cuerda, la bola de masa M tiene la abscisa $x = 0$. Para determinar las vibraciones transversales $u(x, t)$ de los puntos de la cuerda desde la posición de equilibrio obtenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_{2tt} = a^2 u_{2xx} \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\begin{aligned} u_1(0, t) &= u_2(0, t), \quad Mu_{1tt}(0, t) = Mu_{2tt}(0, t) = \\ &= T_0 u_{2x}(0, t) - T_0 u_{1x}(0, t) - ku_1(0, t) = \\ &= T_0 u_{2x}(0, t) - T_0 u_{1x}(0, t) - ku_2(0, t), \end{aligned} \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x, 0) = F(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$u_2(x, 0) = f(x), \quad u_{2t}(x, 0) = F(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty. \quad (3')$$

Si la bola experimenta la resistencia proporcional a la velocidad, entonces en vez de la segunda de las condiciones de conjugación (2) se obtiene la condición de conjugación

$$\begin{aligned} Mu_{1tt}(0, t) &= Mu_{2tt}(0, t) = T_0 u_{2x}(0, t) - T_0 u_{1x}(0, t) - \\ &- ku_1(0, t) - k^* u_{1t}(0, t) = T_0 u_{2x}(0, t) - T_0 u_{1x}(0, t) - \\ &- ku_2(0, t) - k^* u_{2t}(0, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty. \end{aligned}$$

*) Compárese con los razonamientos al deducir la tercera condición de frontera en la solución del problema 4.

41. Como coordenada x del punto del cable se toma la distancia, según el cable, de este punto desde el extremo que está puesto a tierra por la resistencia concentrada. Para determinar la tensión $v(x, t)$ y la intensidad $i(x, t)$ de la corriente en el cable obtenemos el problema de contorno

$$v_x + L i_t = 0, \quad i_x + C v_t = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$-v(0, t) = R_0 i(0, t), \quad C_0 v_t(l, t) = i(l, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{para } 0 < x < l \quad (3)$$

6

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$R_0 v_x(0, t) = L v_t(0, t), \quad L C_0 v_{tt}(l, t) = -v_x(l, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad v_t(x, 0) = -\frac{1}{C} \varphi'(x) \quad \text{para } 0 < x < l \quad (3')$$

6

$$i_{tt} = a^2 i_{xx} \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1'')$$

$$i_x(0, t) = C R_0 i_t(0, t), \quad C_0 i_x(l, t) + C i(l, t) = 0 \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2'')$$

$$i(x, 0) = \varphi(x), \quad i_t(x, 0) = -\frac{1}{L} f'(x) \quad \text{para } 0 < x < l, \quad (3'')$$

$$a^2 = \frac{1}{CL}.$$

Indicación. Las ecuaciones diferenciales (1) se obtienen de las ecuaciones diferenciales (1) y (2) de la respuesta al problema 19 cuando $R = G = 0$. Las condiciones de frontera (2) se obtienen de la relación

$$\Delta v = \tilde{R}_0 i + \tilde{L}_0 \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tilde{C}_0} \int i dt, \quad (4)$$

mediante la cual se determina la caída de la tensión Δv al pasar por la resistencia \tilde{R}_0 , la autoinducción \tilde{L}_0 y la capacidad \tilde{C}_0 , todas concentradas y conectadas en serie. Así, por ejemplo, para el extremo $x = 0$ del cable tenemos

$$0 - v(0, t) = R_0 i(0, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (5)$$

donde $0 - v(0, t)$ significa la diferencia entre los potenciales de la tierra y del extremo del cable (el potencial de la tierra se toma igual a cero).

Las ecuaciones (1'') y (1'') se obtienen de las ecuaciones (1) mediante la eliminación correspondiente de las funciones $i(x, t)$ y $v(x, t)$. Las condiciones de frontera (2'') y (2'') se obtienen de las condiciones de frontera (2) mediante las ecuaciones (1). Las condiciones iniciales (3'') y (3'') se obtienen de las condiciones iniciales (3) mediante la ecuación (1).

42. Como coordenada x del punto del cable se toma la distancia, según el cable, de este punto desde el extremo que está puesto a tierra por la autoinducción concentrada $L_0^{(1)}$. Para determinar $v(x, t)$ y $i(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$v_x + L i_t = 0, \quad i_x + C v_t = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$-v(0, t) = L_0^{(1)} i_t(0, t), \quad v(l, t) - E(t) = L_0^{(2)} i_t(l, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{para } 0 < x < l \quad (3)$$

6

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$L(\frac{1}{a})v_x(0, t) - Lv(0, t) = 0, \quad L(\frac{1}{a})v_x(l, t) + \\ + Lv(l, t) = LE(t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad v_t(x, 0) = -\frac{1}{C}\varphi'(x) \quad \text{para } 0 < x < l \quad (3')$$

y

$$i_{tt} = a^2 i_{xx} \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1'')$$

$$CL(\frac{1}{a})i_{tt}(0, t) = i_x(0, t), \quad CL(\frac{1}{a})i_{tt}(l, t) + \\ + i_x(l, t) = -CE'(t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2'')$$

$$i(x, 0) = \varphi(x), \quad i_t(x, 0) = -\frac{1}{L}f'(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3'')$$

Indicación. Véase la indicación al problema 41.

43. Como coordenada x del punto del cable se toma la distancia, según el cable, desde uno de los extremos del cable hasta este punto. Para determinar $v(x, t)$ e $i(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$v_x + Li_t + Ri = 0, \quad i_x + Cv_t + Gv = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$-v(0, t) = R(\frac{1}{a})i(0, t), \quad v(l, t) = R(\frac{1}{a})i(l, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{para } 0 < x < l \quad (3)$$

6

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\left. \begin{aligned} v_x(0, t) - \frac{L}{R(\frac{1}{a})}v_t(0, t) - \frac{R}{R(\frac{1}{a})}v(0, t) = 0, \\ v_x(l, t) + \frac{L}{R(\frac{1}{a})}v_t(l, t) + \frac{R}{R(\frac{1}{a})}v(l, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0) = f(x), \\ v_t(x, 0) = \frac{-Gf(x) - \varphi'(x)}{C} \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < x < l \quad (3')$$

6

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1'')$$

$$\left. \begin{aligned} i_x(0, t) - CR(\frac{1}{a})i_t(0, t) - CR(\frac{1}{a})i(0, t) = 0, \\ i_x(l, t) + CR(\frac{1}{a})i_t(l, t) + CR(\frac{1}{a})i(l, t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2'')$$

$$\left. \begin{aligned} i(x, 0) = \varphi(x), \\ i_t(x, 0) = \frac{-R\varphi(x) - f'(x)}{L} \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3'')$$

44. El sistema de coordenadas es elegido del mismo modo que en el problema anterior. Para determinar $v(x, t)$ e $i(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$v_x + Li_t + Ri = 0, \quad i_x + Cv_t + Gv = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} -v(0, t) = L(\frac{1}{a})i_t(0, t) + R(\frac{1}{a})i(0, t), \\ v(l, t) = L(\frac{1}{a})i_t(l, t) + R(\frac{1}{a})i(l, t) \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

Para determinar $v(x, t)$, al cumplirse las condiciones $R_0^0 L - RL_0^0 = 0$ y $R_0^0 L - RL_0^0 = 0$, obtenemos el problema de contorno

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)v_t + GRv \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\left. \begin{array}{l} L_0^{(1)} v_x(0, t) - Lv(0, t) = 0, \\ L_0^{(2)} v_x(l, t) + Lv(l, t) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad v_t(x, 0) = \frac{-Gf(x) - \varphi'(x)}{C} \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3')$$

45. El origen de las coordenadas O está puesto en el lugar de unión de los cables semiacotados. Como coordenada x del punto del cable se toma la distancia, según el cable, desde el origen de las coordenadas O hasta este punto.

Para determinar $v(x, t)$ e $i(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$v_{1x} + L_1 i_{1t} + R_1 i_1 = 0, \quad i_{1x} + C_1 v_{1t} + G_1 v_1 = 0$$

para $-\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty$

$$v_{2x} + L_2 i_{2t} + R_2 i_2 = 0, \quad i_{2x} + C_2 v_{2t} + G_2 v_2 = 0$$

para $0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty$,

$$i_1(0, t) = i_2(0, t),$$

$$v_{2t}(0, t) - v_{1t}(0, t) = \frac{1}{C_0} i_1(0, t) = \frac{1}{C_0} i_2(0, t) \quad \left. \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty,$$

$$v_1(x, 0) = f(x), \quad i_1(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{para } -\infty < x < 0,$$

$$v_2(x, 0) = f(x), \quad i_2(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{para } 0 < x < +\infty.$$

Para determinar la intensidad de la corriente en la suposición de que $G_1 = G_2 = 0$ obtenemos el problema de contorno

$$i_{1xx} = C_1 L_1 i_{1tt} + C_1 R_1 i_{1t}, \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$i_{2xx} = C_2 L_2 i_{2tt} + C_2 R_2 i_{2t}, \quad \text{para } 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$i_1(0, t) = i_2(0, t), \quad \frac{1}{C_1} i_{1x}(0, t) - \frac{1}{C_2} i_{2x}(0, t) =$$

$$= \frac{1}{C_0} i_1(0, t) \quad \text{para } 0 < t < +\infty,$$

$$i_1(x, 0) = \varphi(x), \quad i_{1t}(x, 0) = \frac{-R_1 \varphi(x) - f'(x)}{L_1} \quad \text{para } -\infty < x < 0,$$

$$i_2(x, 0) = \varphi(x), \quad i_{2t}(x, 0) = \frac{-R_2 \varphi(x) - f'(x)}{L_2} \quad \text{para } 0 < x < +\infty.$$

46. El sistema de coordenadas y las ecuaciones diferenciales son los mismos que en el problema 45. Las condiciones de conjugación tienen la forma

$$i_1(0, t) = i_2(0, t), \quad v_2(0, t) - v_1(0, t) = R_0 i_1(0, t) = R_0 i_2(0, t)$$

para $0 < t < +\infty$

o si la fuga no existe

$$i_1(0, t) = i_2(0, t), \quad \frac{1}{C_1} i_{1x}(0, t) - \frac{1}{C_2} i_{2x}(0, t) = R_0 i_1(0, t).$$

47. El sistema de coordenadas es elegido como siempre. Para determinar $v(x, t)$ e $i(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$v_x + L i_t + R i = 0, \quad i_x + C v_t + G v = 0 \quad \text{para } 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_t(0, t)}{R_0} - \frac{v(0, t)}{L_0^{(1)}} &= i_t(0, t), \\ C_0 v_{tt}(l, t) + \frac{v(l, t)}{L_0^{(2)}} &= i_t(l, t) \end{aligned} \right\} \quad \text{para } 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{para } 0 < x < l. \quad (3)$$

48. Como coordenada x del punto en el cable tomaremos la distancia desde el punto medio O del cable hasta el punto en estudio que se mide según el cable en el cual están establecidas las direcciones positiva y negativa de movimiento. El sistema de ecuaciones telegráficas y las condiciones iniciales se escriben como siempre. Las condiciones de conjugación toman la forma

$$v(-l, t) - v(l, t) = L_0 i_l(-l, t) = L_0 i_t(l, t), \quad (1)$$

$$v(-l, t) - v(l, t) = R_0 i(-l, t) = R_0 i(l, t), \quad (2)$$

$$v_t(-l, t) - v_t(l, t) = \frac{1}{C_0} i(l, t) = \frac{1}{C_0} i(-l, t). \quad (3)$$

5. Semejanza de los problemas de contorno

En vez de introducción a las soluciones de los problemas de este punto se da la solución detallada del problema 49 con el cual comienza este punto.

49. Si por la función que caracteriza las oscilaciones longitudinales de la barra $0 < x'' < l''$ se toma $\bar{p}(x'', t'') = -p(x'', t'')$, donde $p(x'', t'')$ es la tensión en la sección transversal, marcada con la abscisa x'' (la sección se determina igual que en el problema 1 del presente parágrafo), entonces el problema (II) sobre las oscilaciones longitudinales de la barra, un extremo de la cual ($x'' = 0$) está libre y el otro ($x'' = l''$) está fijo inmóvilmente, se formula del siguiente modo

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{t'' t''} &= a''^2 \bar{p}_{x'' x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \quad a''^2 = \frac{E}{\rho}, \\ \bar{p}(0, t'') &= \bar{p}_{x''}^k(t'', t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \\ \bar{p}(x'', 0) &= \varphi_p(x''), \quad \bar{p}_{t''}(x'', 0) = \psi_p(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Si por la función que caracteriza las oscilaciones eléctricas en el cable $0 < x' \leq l'$, con la fuga y la resistencia despreciablemente pequeños, se toma la tensión eléctrica $v(x', t')$, entonces el problema (I) sobre las oscilaciones eléctricas en el cable, un extremo del cual ($x' = 0$) está puesto a tierra y el otro ($x' = l'$) está aislado, se formula del siguiente modo

$$\left. \begin{aligned} v_{t' t'} &= a'^2 v_{x' x'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ v(0, t') &= v_{x'}(l', t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \\ v(x', 0) &= \varphi_v(x'), \quad v_{t'}(x', 0) = \psi_v(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

El problema (I) es análogo al problema (II). Para que el problema (I) sea semejante al problema (II) con dados coeficientes de semejanza k_x, k_t, k_u es

necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$k_x = \frac{l'}{l''}, \quad (1)$$

$$a'^2 = \frac{k_x^2}{k_t^2} a''^2, \quad (2)$$

$$\Psi_p(x') = k_u \Psi_p(x''), \quad \Psi_p(x') = \frac{k_u}{k_t} \Psi_p(x'') \quad \text{para } x' = k_x x'', \quad 0 < x'' < l''. \quad (3)$$

Solución. Demostremos que las condiciones (1), (2) y (3) son necesarias y suficientes.

Primeramente demostraremos la *necesidad*. Sea

$$v(x', t') = k_u \bar{p}(x'', t'') \quad \text{para } x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'',$$

además (x', t') recorre $D_I [0 < x' < l', 0 < t' < +\infty]$, cuando (x'', t'') recorre $D_{II} [0 < x'' < l'', 0 < t'' < +\infty]$. Entonces en seguida obtenemos que $l' = k_x l''$, es decir, la condición (1) se cumple. De la igualdad $v(x', t') = k_u \bar{p}(x'', t'')$ efectuando la derivación respecto a t , obtenemos $v_{t'}(x', t') = \frac{k_u}{k_t} \bar{p}_{t''}(x'', t'')$, por eso para $t' = t'' = 0$ se cumplirán las igualdades

$$v(x', 0) = k_u \bar{p}(x'', 0), \quad v_{t'}(x', 0) = \frac{k_u}{k_t} \bar{p}_{t''}(x'', 0), \quad 0 < x'' < l'', \quad (4)$$

es decir, la condición (3) se cumplirá.

Derivando la igualdad

$$v(x', t') = k_u \bar{p}(x'', t'')$$

con respecto a x'' y t'' y empleando las igualdades $x' = k_x x''$, $t' = k_t t''$ obtenemos

$$k_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} = k_u \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t''^2}, \quad k_x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x''^2} = k_u \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x''^2}. \quad (5)$$

Dado que la función $\bar{p}(x'', t'')$ debe satisfacer la ecuación $\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t''^2} = a''^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x''^2}$, entonces, por consiguiente, debe cumplirse la igualdad

$$k_t^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} - k_x^2 a''^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x''^2} = k_u \left(\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial t''^2} - a''^2 \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial x''^2} \right) = 0.$$

Por consiguiente, $v(x', t')$ es no sólo la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} = a'^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x''^2}, \quad (5)$$

sino también la solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} = \frac{k_x^2}{k_t^2} a''^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x''^2}. \quad (6)$$

Sustrayendo (6) de (5), obtenemos

$$\left(a'^2 - \frac{k_x^2}{k_t^2} a''^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x''^2} = 0,$$

lo que es posible sólo cuando

$$a'^2 - \frac{k_x^2}{k_t^2} a''^2 = 0, \quad (7)$$

ya que cuando

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} = 0 \quad (8)$$

empleando la ecuación y las condiciones iniciales (1), obtenemos que $v = 0$, pero esto es imposible para $\varphi_v(x')$ y $\psi_v(x')$ diferentes del cero idéntico. Por consiguiente, (8) es imposible, entonces tiene lugar (7), es decir, la condición (2) se cumple.

Estudiaremos ahora la suficiencia. Pasaremos a las magnitudes adimensionales ξ , τ , U en los problemas de contorno (I) y (II), empleando las fórmulas $x' = l'\xi$, $t' = t_0\tau$, $v = v_0 U(\xi, \tau)$, $x'' = l''\xi$, $t'' = t_0''\tau$, $p = p_0 U(\xi, \tau)$, donde las constantes t'_0 y t_0'' tienen la dimensión de tiempo y v_0 y p_0 , correspondientemente la dimensión de v y p , además estas constantes están elegidas de modo que

$$\frac{t'_0}{t_0} = k_t, \quad \frac{v_0}{p_0} = k_u. \quad (9)$$

Recordaremos que además se cumple la relación

$$k_x = \frac{l'}{l''}. \quad (1)$$

Los problemas de contorno (I) y (II) tomarán correspondientemente la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} &= \frac{t_0'^2}{l'^2} a'^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ U(0, \tau) &= 0, \quad U_\xi(1, \tau) = 0, \quad 0 < \tau < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (I')$$

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, 0) &= \frac{1}{v_0} \varphi_v(l', \xi), \quad U_\tau(\xi, 0) = \frac{t'_0}{v_0} \psi_v(l'\xi), \quad 0 < \xi < 1, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} &= \frac{t_0'^2}{l'^2} a'^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (II')$$

$$\left. \begin{aligned} U(0, \tau) &= 0, \quad U_\xi(1, \tau) = 0, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ U(\xi, 0) &= \frac{1}{p_0} \psi_p(l''\xi), \quad U_\tau(\xi, 0) = \frac{t_0''}{p_0} \psi_p(l''\xi), \quad 0 < \xi < 1. \end{aligned} \right\} \quad (III')$$

De (1), (2) y (9) resulta que

$$\frac{t_0'^2}{l'^2} a'^2 = \frac{t_0''^2}{l''^2} a''^2.$$

De (1), (9) y (3) resulta que

$$\frac{1}{v_0} \varphi_v(l'\xi) = \frac{1}{p_0} \psi_p(l''\xi), \quad \frac{t'_0}{v_0} \psi_v(l'\xi) = \frac{t_0''}{p_0} \psi_p(l''\xi), \quad 0 < \xi < 1,$$

De esta forma en los problemas (I) y (II) las ecuaciones, condiciones iniciales y de frontera coinciden idénticamente, por consiguiente (en virtud del teorema de unicidad) coinciden también sus soluciones.

De esta manera

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{v_0} v(x', t') = \frac{1}{p_0} p(x'', t'') \quad \text{para} \quad x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'',$$

es decir,

$$v(x', t') = k_u p(x'', t'') \quad \text{para} \quad x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'',$$

que es lo que queríamos demostrar.

Nota. Se podía elegir de otro modo las funciones: 1) que caracteriza las vibraciones longitudinales de la barra elástica y 2) que caracteriza las oscilaciones eléctricas en el cable. Por ejemplo, se puede tomar el desplazamiento longitudinal de las secciones transversales y la intensidad de la corriente eléctrica en el cable o escoger de otro modo sólo una de estas funciones y dejar la otra sin cambio, es decir, se puede interpretar un proceso por el otro de diferentes modos, eligiendo las más apropiadas analogías.

50. Como función que caracteriza las vibraciones longitudinales de la barra $0 < x'' < l''$ se tomó el desplazamiento de las secciones transversales de la barra $u(x'', t'')$.

a) Si un extremo de la barra ($x'' = 0$) está fijo rígidamente y el otro ($x'' = l''$) está fijo elásticamente, entonces para determinar $u(x'', t'')$ obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} u_{t'' t''} &= a''^2 u_{x'' x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \quad a''^2 = \frac{E}{\rho}, \\ u(0, t'') &= 0, \quad Eu_{x''}(l'', t'') + ku(l'', t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \\ u(x'', 0) &= \varphi_u(x''), \quad u_{t''}(x'', 0) = \psi_u(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IIa})$$

Si como función que caracteriza las oscilaciones eléctricas en el cable $0 < x' < l'$ con la resistencia y la fuga despreciablemente pequeñas se toma la tensión eléctrica y si un extremo del cable ($x' = 0$) está puesto a tierra directamente y el otro ($x' = l'$), por la autoinducción concentrada, entonces para la determinación de la tensión $v(x', t')$ en el cable obtenemos el problema de contorno

$$v_{t' t'} = a'^2 v_{x' x'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \quad a'^2 = \frac{1}{CL},$$

donde C es la capacidad de la unidad de longitud del cable y L , la autoinducción de la unidad de longitud del cable

$$\left. \begin{aligned} v(0, t') &= 0, \quad v_{x'}(l', t') + \frac{L}{L_0} v(l', t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \\ v(x', 0) &= \varphi_v(x'), \quad v_{t'}(x', 0) = \psi_v(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{Ia})$$

El problema (Ia) es análogo al problema (IIa). Para que el problema (Ia) sea semejante al problema (IIa) con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$k_x = \frac{l'}{l''}, \quad (1a)$$

$$a'^2 = \frac{k_x^2}{k_t^2} a''^2, \quad (2a)$$

$$k_x \frac{L}{L_0} = \frac{k}{E}, \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_v(x') &= k_u \psi_u(x''), \\ \psi_v(x') &= \frac{k_u}{k_t} \psi_u(x''), \\ x' &= k_x x'', \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

b) Si un extremo de la barra ($x'' = 0$) está libre y el otro ($x'' = l''$) experimenta la resistencia proporcional a la velocidad, entonces el problema de contorno para determinar los desplazamientos longitudinales $u(x'', t'')$ de los puntos de la barra tiene la forma

$$\left. \begin{aligned} u_{t''l''} &= a''^2 u_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ u_{x''}(0, t'') &= 0, \quad Eu_{x''}(l'', t'') + ru_{t''}(l'', t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \\ u(x'', 0) &= \varphi_u(x''), \quad u_{t''}(x'', 0) = \psi_u(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

Aquí r significa el coeficiente de resistencia al rozamiento. Si un extremo del cable ($x' = 0$) está puesto a tierra directamente y el otro ($x' = l'$) está puesto a tierra por la resistencia concentrada R_0 , entonces, suponiendo que la resistencia del cable y la fuga del cable son iguales a cero, para determinar la intensidad de la corriente $i(x', t')$ obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} i_{t'l'} &= a'^2 i_{x'x'}, \quad a'^2 = \frac{1}{CL}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ i_{x'}(0, t') &= 0, \quad i_{x'}(l', t') + CR_0 i_{t'}(l', t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \\ i(x', 0) &= \varphi_i(x'), \quad i_{t'}(x', 0) = \psi_i(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

El problema (11b) es análogo al problema (11b). Para que el problema (11b) sea semejante al problema (11b) con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$k_x = \frac{l'}{l''}, \quad (11b)$$

$$a'^2 = \frac{k_x^2}{k_t^2} a''^2, \quad (2b)$$

$$CR_0 \frac{k_x}{k_t} = \frac{r}{E}, \quad (3b)$$

$$\varphi_i(x') = k_u \psi_u(x''), \quad \psi_i(x') = \frac{k_u}{k_t} \psi_u(x''), \quad x' = k_x x'', \quad 0 < x'' < l''. \quad (4b)$$

c) Si un extremo de la barra ($x'' = 0$) está fijo elásticamente y el otro ($x'' = l''$) se mueve según la ley dada, entonces tenemos

$$\left. \begin{aligned} u_{t''l''} &= a''^2 u_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ Eu_{x''}(0, t'') - ku(0, t'') &= 0, \quad u(l'', t'') = \omega_u(t''), \quad 0 < t'' < +\infty, \\ u(x'', 0) &= \varphi_u(x''), \quad u_{t''}(x'', 0) = \psi_u(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned} \right\} \quad (11c)$$

Si un extremo del cable ($x' = 0$) está puesto a tierra por la autoinducción concentrada L_0 y al otro ($x' = l'$) está aplicada la fuerza electromotriz $\omega_0(t')$, entonces para la determinación de la tensión eléctrica en el cable obtenemos el

problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} v_{t''t''} &= a''^2 v_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ L_0 v_{x''}(0, t'') - Lv(0, t'') &= 0, \quad v(l'', t'') = \omega_v(t''), \quad 0 < t'' < +\infty, \\ v(x'') &= \varphi_v(x''), \quad v_{t''}(x'', 0) = \psi_v(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned} \right\} \quad (Ic)$$

El problema (Ic) es análogo al problema (IIc). Para que el problema (Ic) sea semejante al problema (IIc) con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u , es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones (1a), (2a), (3a), (4a) (véase más arriba) y la relación

$$\omega_v(t'') = k_u \omega_u(t''), \quad t'' = k_t t'', \quad 0 < t'' < +\infty.$$

Indicación. El problema se resuelve análogamente que el anterior.

Si un extremo del cable ($x'' = 0$) está puesto a tierra por la resistencia concentrada R_0 y el otro extremo ($x'' = l''$) está puesto a tierra por la capacidad concentrada C_0 , entonces para determinar la tensión en el cable con la fuga despreciablemente pequeña obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} v_{t''t''} &= a''^2 v_{x''x''}, \quad a''^2 = \frac{1}{CL}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ R_0 v_{x''}(0, t'') - Lv_{t''}(0, t'') &= 0, \quad LC_0 v_{t''t''}(l'', t'') + v_{x''}(l'', t'') = 0, \\ v(x'', 0) &= \varphi_v(x''), \quad v_{t''}(x'', 0) = \psi_v(x''), \quad 0 < x'' < l'', \end{aligned} \right\} \quad (IIa)$$

y para determinar la intensidad de la corriente, el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} i_{t''t''} &= a''^2 i_{x''x''}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \\ i_{x''}(0, t'') - CR_0 i_{t''}(0, t'') &= 0, \quad C_0 i_{x''}(l'', t'') + Ci(l'', t'') = 0, \\ i(x'', 0) &= \varphi_i(x''), \quad i_{t''}(x'', 0) = \psi_i(x''), \quad 0 < x'' < l''. \end{aligned} \right\} \quad (IIb)$$

Si al extremo del cilindro elástico ($x' = 0$) que realiza las vibraciones torsionales se aplica un momento torsional frenante (debido a una fuerza de rozamiento) proporcional a la velocidad angular, y si otro ($x' = l'$) está puesta la roldana con el momento axial de inercia k_0 , entonces para determinar los ángulos de rotación $\theta(x', t')$ de las secciones transversales de la barra obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \theta_{t't'} &= a''^2 \theta_{x'x'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ GJ \theta_{x'}(0, t') - r_0 \theta_{t'}(0, t') &= 0, \quad k_0 \theta_{t't'}(l', t') + GJ \theta_{x'}(l', t') = 0, \\ \theta(x', 0) &= \varphi_\theta(x'), \quad \theta_{x'}(x', 0) = \psi_\theta(x'), \quad 0 < x' < l', \end{aligned} \right\} \quad (Ia)$$

donde $a''^2 = \frac{GJ}{k}$ y los valores G , J , k tienen el mismo sentido que en la respuesta al problema 3.

Si al extremo del cilindro $x' = 0$, el cual realiza las vibraciones torsionales, está aplicado el momento torsional frenante proporcional a la velocidad angular, y el otro extremo $x' = l'$ está fijo elásticamente, entonces para la determi-

nación de $\theta(x', t')$ obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \theta_{tt'} &= a'^2 \theta_{xx'}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \\ GJ\theta_{x'}(0, t') - r_0\theta_{t'}(0, t') &= 0, \quad GJ\theta_{x'}(l', t') + H_0\theta(l', t') = 0, \\ &\quad 0 < t' < +\infty, \\ \theta(x', 0) &= \varphi\theta(x'), \quad \theta_{t'}(x', 0) = \psi\theta(x'), \quad 0 < x' < l'. \end{aligned} \right\} \quad (1b)$$

El problema (Ia) es análogo al problema (IIa). El problema (Ib) es análogo al problema (IIb). Para que el problema (Ia) sea semejante al problema (IIa) con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$k_x = \frac{l'}{l''}, \quad (1)$$

$$a'^2 = \frac{k_x^2}{k_t^2} a^2, \quad (2)$$

$$\frac{R_0}{GJ} \cdot \frac{k_x}{k_t} = \frac{L}{r_0}, \quad (3)$$

$$\frac{GJ}{k_0} \cdot \frac{k_t^2}{k_x} = \frac{1}{LC_0}, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(x') &= k_u \varphi_0(x''), \\ \psi_0(x') &= \frac{k_u}{k_t} \psi_0(x''), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$x' = k_x x'', \quad 0 < x'' < l''.$$

Para que el problema (Ib) sea semejante al problema (IIb) con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u , es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones análogas a la (1), (2), (5) y las relaciones

$$\frac{r_0}{GJ} \cdot \frac{k_x}{k_t} = CR_0, \quad k_x \frac{H_0}{GJ} = \frac{C}{C_0}.$$

Indicación. Véase la solución 49.

§ 2. Método de propagación de las ondas (método de d'Alembert)

1. Problemas para una cuerda infinita

Las soluciones de los problemas de contorno de este punto que tienen la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

se hallan según la fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz. \quad (3)$$

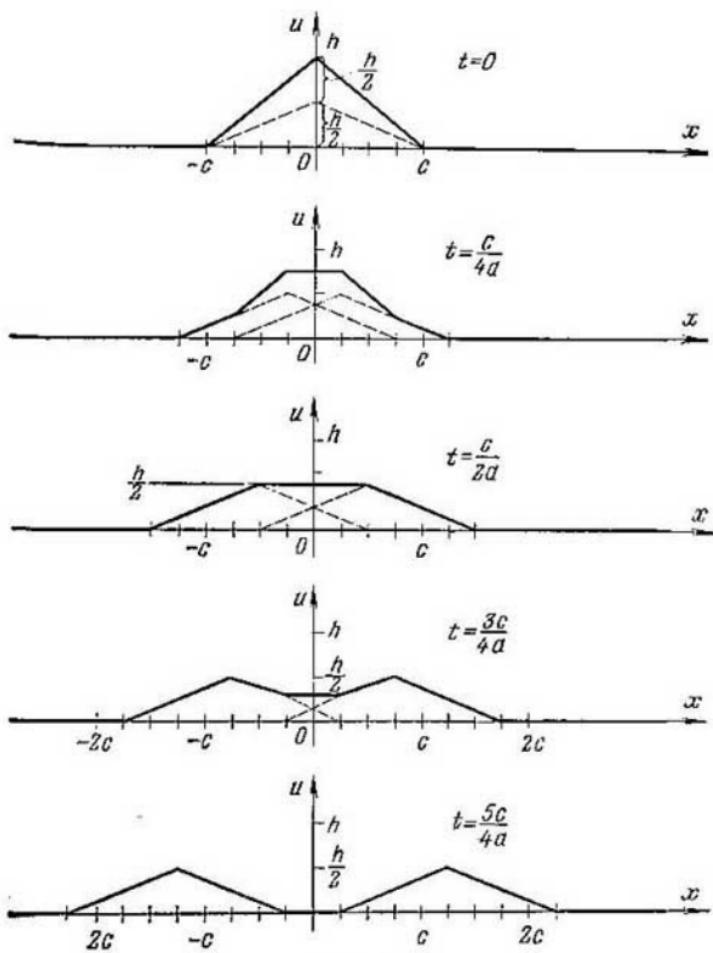


Fig. 21

52. En el problema que se estudia $\psi(x) \equiv 0$, por eso

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} = \frac{1}{2} \varphi(x-at) + \frac{1}{2} \varphi(x+at), \quad (1)$$

donde $\varphi(x)$ está dada gráficamente en el planteamiento del problema.

Las ondas directa y inversa $\frac{1}{2} \varphi(x-at)$ y $\frac{1}{2} \varphi(x+at)$ en el momento inicial $t = 0$ coinciden, teniendo el valor igual a $\frac{1}{2} \varphi(x)$.

Durante el tiempo t ($t > 0$) la gráfica de la onda directa se desplaza sin deformación a la derecha a la distancia at y la gráfica de la onda inversa se desplaza a la izquierda a $-at$. Sumando las gráficas de las ondas directa e inversa en los momentos de tiempo t_1, t_2, \dots , obtenemos el perfil de la cuerda en estos momentos de tiempo. Más arriba (fig. 21) se da el perfil de la cuerda para los momentos $t_h = \frac{kc}{4a}$, $k = 0, 1, 2, 3, 5$.

53. a)

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}, \quad (1)$$

donde

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -c, \\ h \left[1 - \frac{x^2}{c^2} \right], & -c < x < c, \\ 0, & c < x < +\infty. \end{cases} \quad (2)$$

Para obtener las fórmulas exigidas en la condición del problema estudiaremos la partición del plano de fases (x, t) por las características de la ecuación (1),

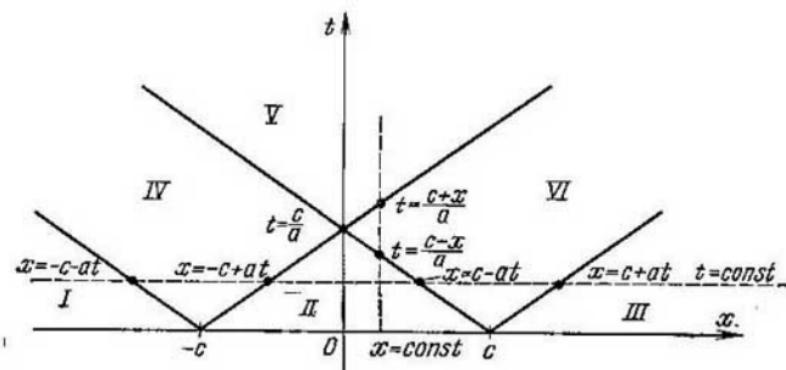


Fig. 22

trazadas de los extremos del intervalo $(-c, c)$ en que el desplazamiento inicial es diferente de cero (fig. 22).

¶ Daremos primoramente las fórmulas que determinan el perfil de la cuerda cuando $t = \text{const}$, limitándonos a dos casos característicos:

$$0 < t < \frac{c}{a} \quad \text{y} \quad \frac{c}{a} < t < +\infty.$$

Si $t = \text{const}$, $0 < t < \frac{c}{a}$, entonces para x , que varía monótonamente desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el punto (x, t) del plano de fases recorre sucesivamente las regiones I, IV, II, VI, III.

De esta manera cuando $0 < t < \frac{c}{a}$ el perfil de la cuerda se determina por las relaciones

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -c-at, \\ \frac{h}{2} \left[1 - \frac{(x+at)^2}{c^2} \right], & -c-at < x < -c+at, \\ h \left[1 - \frac{x^2 + a^2 t^2}{c^2} \right], & -c+at < x < c-at, \\ \frac{h}{2} \left[1 - \frac{(x-at)^2}{c^2} \right], & c-at < x < c+at, \\ 0, & c+at < x < +\infty, \end{cases}$$

Análogamente se obtiene el perfil de la cuerda cuando $\frac{c}{a} < t < +\infty$.

b) Ahora daremos las fórmulas que determinan $u(x, t)$ para $x = \text{const}$ y representan la ley de movimiento del punto de la cuerda con la abscisa fija. Escogeremos un valor fijo de x en cada uno de los intervalos $-\infty < x < -c$, $-c < x < 0$, $0 < x < c$, $c < x < +\infty$ y estudiaremos como varía la expresión de la solución cuando t varía desde 0 hasta $+\infty$. Obtenemos

$\alpha)$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq -\frac{c+x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left[1 - \frac{(x+at)^2}{c^2} \right], & -\frac{c+x}{a} \leq t \leq \frac{c-x}{a}, \\ 0, & \frac{c-x}{a} \leq t < +\infty, \end{cases} \quad -\infty < x < -c,$$

$\beta)$

$$u(x, t) = \begin{cases} h \left[1 - \frac{x^2 + a^2 t^2}{c^2} \right], & 0 \leq t \leq \frac{c+x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left[1 - \frac{(x+at)^2}{c^2} \right], & \frac{c+x}{a} \leq t \leq \frac{c-x}{a}, \\ 0, & \frac{c-x}{a} \leq t < +\infty, \end{cases} \quad -c < x < 0,$$

$\gamma)$

$$u(x, t) = \begin{cases} h \left[1 - \frac{x^2 + a^2 t^2}{c^2} \right], & 0 \leq t \leq \frac{c-x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left[1 - \frac{(x-at)^2}{c^2} \right], & \frac{c-x}{a} \leq t \leq \frac{c+x}{a}, \\ 0, & \frac{c+x}{a} \leq t < +\infty, \end{cases} \quad 0 < x < c,$$

$\delta)$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < -\frac{c+x}{a}, \\ \frac{h}{2} \left[1 - \frac{(x+at)^2}{c^2} \right], & -\frac{c+x}{a} \leq t \leq \frac{c+x}{a}, \\ 0, & \frac{c+x}{a} < t < +\infty, \end{cases} \quad c < x < +\infty.$$

Notas. 1. α y β se obtienen de δ y γ por la simple sustitución de x por $-x$, dado que $u(x, t)$ es una función par según x en virtud de la paridad de $\varphi(x)$.

2. El método geométrico de la obtención del perfil de la cuerda para diferentes momentos de tiempo está descrito en la solución del problema 52.

54. La desviación $u(x, t)$ alcanza el valor máximo en el punto con la abscisa

$$x = \frac{\alpha_2 + \beta_2 + \alpha_1 + \beta_1}{4}$$

en el momento de tiempo

$$t = \frac{\alpha_2 + \beta_2 - (\alpha_1 + \beta_1)}{4a};$$

este valor máximo es igual a $\frac{h_1 + h_2}{2}$.

Indicación. Estudiar la superficie integral que representa la solución $u = u(x, t)$ del problema de contorno.

55. La solución del problema de contorno tiene la forma

$$u(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at)$$

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2a} \int_{-c}^z \psi(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0, & -\infty < z < -c, \\ \frac{v_0(z+c)}{2a}, & -c \leq z \leq c, \\ \frac{v_0c}{a}, & c \leq z < +\infty, \end{cases}$$

por eso la ley de movimiento de los puntos de la cuerda con diferentes abscisas se representa por las fórmulas

a)

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq -\frac{c+x}{a}, \\ \frac{v_0(x+at)}{2a} + \frac{v_0c}{2a}, & -\frac{c+x}{a} \leq t \leq \frac{c-x}{a}, \\ \frac{v_0c}{a}, & \frac{c-x}{a} \leq t < +\infty, \end{cases} \quad -\infty < x < -c,$$

b)

$$u(x, t) = \begin{cases} v_0t, & 0 \leq t \leq \frac{c+x}{a}, \\ \frac{v_0(x-at)}{2a} + \frac{v_0c}{2a}, & \frac{c+x}{a} \leq t \leq \frac{c-x}{a}, \\ \frac{v_0c}{a}, & \frac{c-x}{a} \leq t < +\infty, \end{cases} \quad -c < x < 0,$$

c)

$$u(x, t) = \begin{cases} v_0t, & 0 \leq t \leq \frac{c-x}{a}, \\ \frac{v_0(x-at)}{2a} + \frac{v_0c}{2a}, & \frac{c-x}{a} \leq t \leq \frac{c+x}{a}, \\ \frac{v_0c}{a}, & \frac{c+x}{a} \leq t < +\infty, \end{cases} \quad 0 < x < c,$$

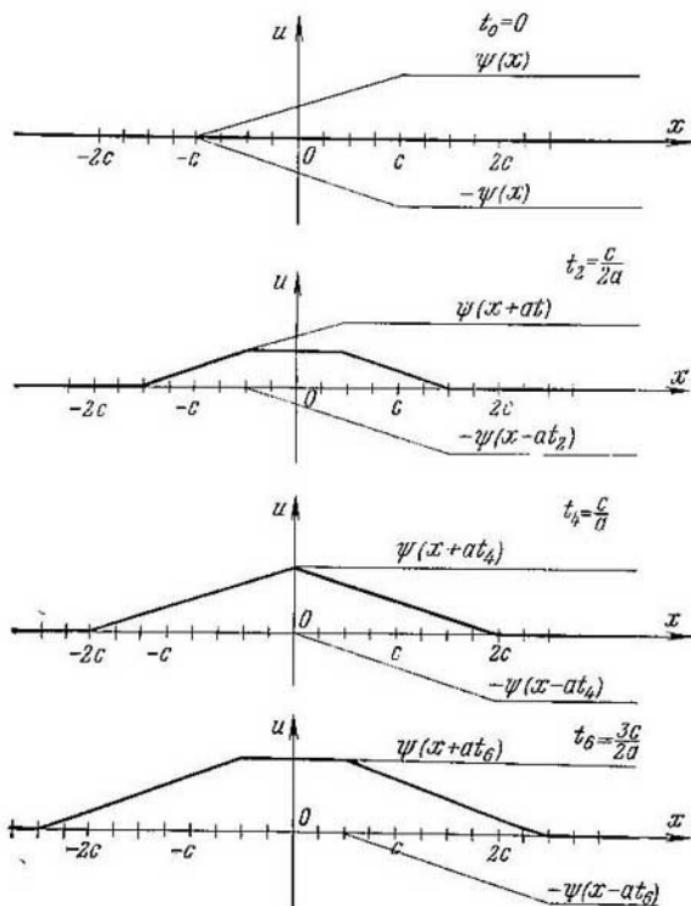


Fig. 23

d)

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{-c+x}{a}, \\ \frac{-v_0(x-at)}{2a} + \frac{v_0c}{2a}, & \frac{-c+x}{a} \leq t \leq \frac{c+x}{a}, \\ \frac{v_0c}{a}, & \frac{c+x}{a} < t < +\infty, \end{cases} \quad c < x < +\infty.$$

El perfil de la cuerda para los momentos de tiempo t_1, t_2, \dots puede ser obtenido, sustrayendo la gráfica de la onda directa $\Psi(x-at)$ de la gráfica de la onda inversa $\Psi(x+at)$. Para los momentos $t_k = \frac{kc}{4a}$, $k = 0, 2, 4, 6$ la gráfica tiene la forma representada en la fig. 23.

56. Daremos dos modos de solución del problema.

El primer modo. Consideremos al comienzo que el impulso está uniformemente distribuido en el segmento $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$. Entonces el problema de contorno se formula de siguiente forma:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x, 0) &= \varphi_\delta(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_0 - \delta, \\ \frac{I}{2\delta\rho}, & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta < x < +\infty, \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$U_\delta(x, t) = \Psi_\delta(x+at) - \Psi_\delta(x-at), \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_\delta(z) &= \frac{1}{2a} \int_{x_0-\delta}^z \varphi_\delta(\alpha) d\alpha = \\ &= \begin{cases} 0, & -\infty < z < x_0 - \delta, \\ \frac{I}{4a\delta\rho}(z - x_0 + \delta), & x_0 - \delta < z < x_0 + \delta, \\ \frac{I}{2a\delta}, & x_0 + \delta < z < +\infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Mediante el paso formal al límite cuando $\delta \rightarrow 0$ en la solución (3) obtenemos la solución del problema inicial.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} U_\delta(x, t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Psi_\delta(x+at) - \lim_{\delta \rightarrow 0} \Psi_\delta(x-at) = \\ &= \Psi(x+at) - \Psi(x-at), \end{aligned}$$

donde

$$\Psi(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Psi_\delta(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < z < x_0, \\ \frac{I}{2a\rho} & \text{para } x_0 < z < +\infty. \end{cases}$$

Si se introduce la función $\sigma_0(z)$ que se determina por las relaciones

$$\sigma_0(z) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < z < 0, \\ 1 & \text{para } 0 < z < +\infty, \end{cases}$$

entonces

$$\Psi(z) = \frac{I}{2a\rho} \sigma_0(z - x_0)$$

y

$$u(x, t) = \frac{I}{2a\rho} \{\sigma_0(x+at-x_0) - \sigma_0(x-at-x_0)\}.$$

El segundo modo. Empleando la función δ *), el problema de contorno se puede formular así

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$u_t(x, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0) ** \quad -\infty < x < +\infty.$$

Entonces mediante las fórmulas de d'Alembert obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a} \cdot \frac{I}{\rho} \int_{x-at}^{x+at} \delta(z - x_0) dz = \frac{I}{2a\rho} \int_{x-x_0-at}^{x-x_0+at} \delta(\xi) d\xi = \\ &= \frac{I}{2a\rho} [\sigma_0(x+at-x_0) - \sigma_0(x-at-x_0)], \end{aligned}$$

dado que

$$\int_{z_0}^z \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad \text{para } z_0 < 0,$$

$$\int_{z_0}^z \delta(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & z > 0, \\ -1, & z < 0 \end{cases} \quad \text{para } z_0 > 0.$$

57. El problema 52

$$u(x, 0) = \varphi(x) \neq 0, \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = 0,$$

pero en el problema que se estudia la onda móvil en el momento $t = 0$ se caracteriza por las desviaciones «iniciales» diferentes de cero y por las velocidades ***)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = -a\varphi'(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Para el problema 52 teníamos: $u(x, t) = \frac{1}{2} \varphi(x-at) + \frac{1}{2} \varphi(x+at)$.

En el problema que se estudia la fórmula de d'Alembert da:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [-a\varphi'(z)] dz = \varphi(x-at).$$

58. La solución del problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} v_x + Lt_t + Rt = 0, \\ i_x + Cv_t + Gv = 0 \end{array} \right\} \quad \text{para } -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad i(x, 0) = \sqrt{\frac{C}{L}} F(x) \quad \text{para } -\infty < x < +\infty \quad (2)$$

*) Véase [7], pág. 305-308.

**) El coeficiente de la función delta $\delta(x - x_0)$ se escoge de tal forma que el impulso sumario que se transmite a la cuerda en el momento $t = 0$, es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x, 0) \rho dx, \text{ sea igual a } I.$$

***) Se supone que la onda ya existe cuando $t < 0$.

cuando $CR = GL$ tiene la forma

$$\left. \begin{aligned} v(x, t) &= e^{-\frac{R}{L}t} (\varphi(x-at) + \psi(x+at)), \\ i(x, t) &= \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{L}t} (\varphi(x-at) - \psi(x+at)), \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} -\infty < x < +\infty, \\ 0 < t < +\infty, \end{array} \quad (3)$$

donde

$$\varphi(z) = \frac{f(z) + F(z)}{2} \quad \text{y} \quad \psi(z) = \frac{f(z) - F(z)}{2} \quad \text{para } -\infty < z < +\infty. \quad (4)$$

Indicación. Eliminar en las ecuaciones (1) la intensidad de la corriente; en la ecuación de segundo orden según $v(x, t)$, obtenida de esta manera, suprimir el término $v_t(x, t)$ (véase el cap. 1), entonces la ecuación tendrá la forma $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. La solución de ésta será $u(x, t) = \varphi(x-at) + \psi(x+at)$. Regresando a la función $v(x, t)$ y empleando la ecuación (1) y las condiciones iniciales (2), no es difícil obtener la respuesta.

2. Problemas para una semirrecta

Buscamos la solución del problema de contorno para una semirrecta

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\alpha_1 u_{tt}(0, t) + \alpha_2 u_t(0, t) + \alpha_3 u_x(0, t) + \alpha_4 u(0, t) = \Phi(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < +\infty \quad (3)$$

en la forma

$$u(x, t) = \varphi_1(x-at) + \varphi_2(x+at). \quad (4)$$

Se pueden determinar las funciones $\varphi_1(z)$ y $\varphi_2(z)$, partiendo de las condiciones iniciales (3), sólo cuando $0 < z < +\infty$. Para la determinación de $\varphi_2(z)$ esto es suficiente, dado que $x+at > 0$ cuando $0 < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$. Pero la función $\varphi_1(x)$ debe ser determinada también para $-\infty < z < 0$, lo que se alcanza mediante la condición inicial (2).

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) puede hallarse también empleando la fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz \quad (5)$$

pura la cuerda no acotada. Para eso es necesario prolongar ficticiamente la cuerda sobre el semieje negativo $-\infty < x < 0$ y después extender a este semieje las condiciones iniciales (3) de tal forma que para $u(x, t)$, calculada según la fórmula (5), se cumpla la condición de frontera (2) *). Además se tiene que en el caso del extremo fijo las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ deben ser continuadas al semieje $-\infty < x < 0$ de forma impar y en el caso del extremo libre, de forma par.

59. El perfil de la cuerda en los momentos de tiempo

$$t = \frac{c}{a}; \quad \frac{3c}{2a}; \quad \frac{2c}{a}; \quad \frac{7c}{2a}$$

está presentado en la fig. 24.

*) Véase [7], págs. 75-77.

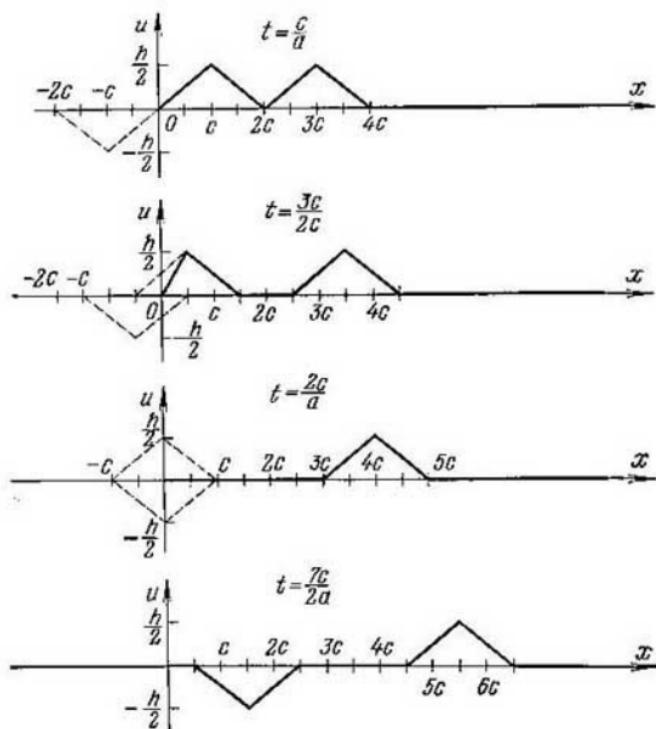


Fig. 24

60. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < c, \\ v_0, & c < x < 2c, \\ 0, & 2c < x < +\infty \end{cases} \quad (4)$$

puede ser hallada mediante la fórmula de d'Alembert con la continuación par*) de las condiciones iniciales

$$u(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at), \quad (5)$$

*) Véase [7], págs. 75-77.

donde

$$\Psi(z) = \frac{1}{2a} \int_{-2c}^z \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (6)$$

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & -\infty < z < -2c, \\ v_0, & -2c < z < -c \\ 0, & -c < z < c, \\ v_0, & c < z < 2c, \\ 0, & 2c < z < +\infty. \end{cases} \quad (7)$$

La gráfica de la función $\Psi(z)$ es de forma presentada en la fig. 25.

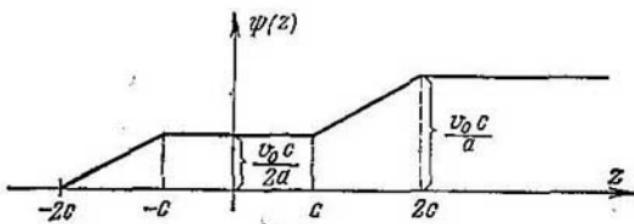


Fig. 25

El perfil de las desviaciones en cualquier momento de tiempo se obtiene sustrayendo la gráfica de la onda directa de la gráfica de la onda inversa.

Cuando $t=0$; $\frac{c}{a}$; $\frac{2c}{a}$; $\frac{3c}{a}$ el perfil de las desviaciones tiene la forma presentada en la fig. 26.

61.

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{2Al}{\pi a} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2l} \operatorname{sen} \frac{\pi at}{2l}, & 0 < t < \frac{2l-x}{a}, \\ \frac{2Al}{\pi a} \cos^2 \frac{\pi}{4l} (x-at), & \frac{2l-x}{a} < t < \frac{2l+x}{a}, \\ 0, & \frac{2l+x}{a} < t < +\infty, \end{cases} \quad 0 < x < 2l,$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{-2l+x}{a}, \\ \frac{2Al}{\pi a} \cos^2 \frac{\pi}{4l} (x-at), & \frac{-2l+x}{a} < t < \frac{2l+x}{a}, \\ 0, & \frac{2l+x}{a} < t < +\infty, \end{cases} \quad 2l < x < +\infty,$$

$$A = -\frac{\pi I}{4l\rho}.$$

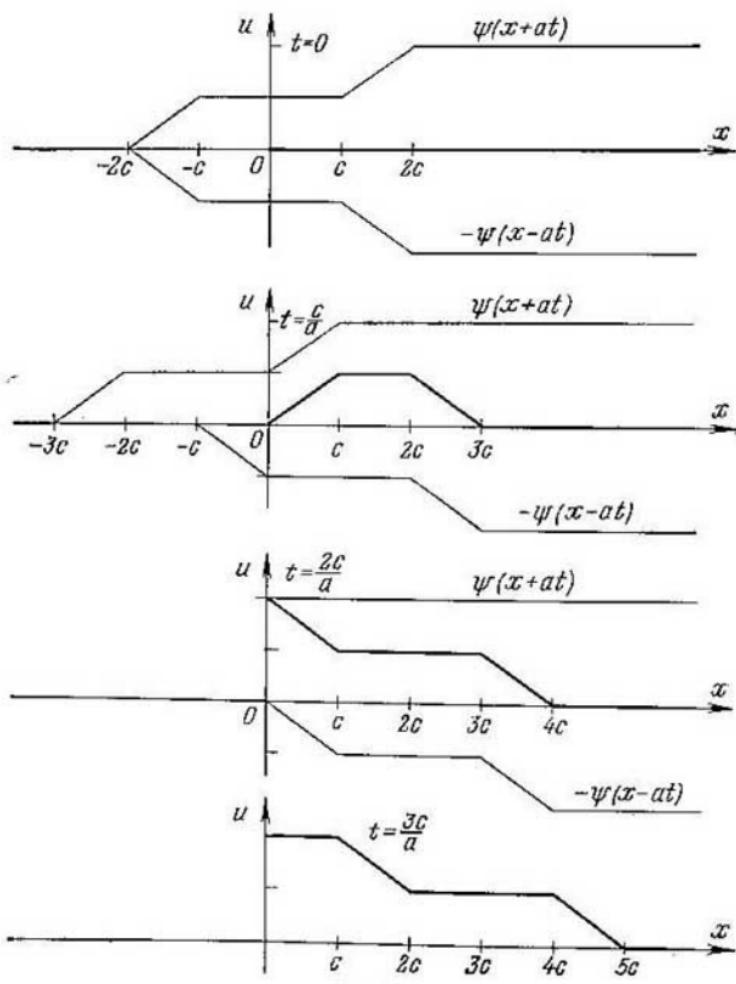


Fig. 26

62.

$$\max_{\substack{0 \leq x < +\infty \\ 0 < t < +\infty}} u(x, t) = h = u\left(0, \frac{2l}{a}\right) = u\left(0, \frac{6l}{a}\right) = u\left(2l, \frac{4l}{a}\right) = u\left(4l, \frac{2l}{a}\right).$$

Indicación. Estudiar la superficie integral que representa la solución $u = u(x, t)$ del problema de contorno.

63. *Resolución.* Analógicamente a lo que se hacía en el caso del problema 56 la solución del presente problema puede ser realizada de dos modos siguientes.

El primer modo. Consideremos que el impulso I está uniformemente distribuido en el segmento $x_0 \leq x \leq x_0 + \delta$. Entonces llegamos al problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_0, \\ \frac{I}{\delta p}, & x_0 < x < x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta < x < \infty. \end{cases} \quad (3)$$

La solución de éste la obtenemos según la fórmula de d'Alembert mediante la continuación impar de las condiciones iniciales. Pasando al límite cuando $\delta \rightarrow 0$ en la solución de este problema de contorno, obtenemos la solución del problema inicial

$$u(x, t) =$$

$$= \frac{I}{2ap} \{ \sigma_0(x - x_0 + at) - \sigma_0(x - x_0 - at) - \sigma_0(x + x_0 + at) + \sigma_0(x + x_0 - at) \}.$$

El segundo modo. Empleando la función δ , se puede formular el problema de contorno de siguiente forma:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \frac{I}{p} \delta(x - x_0), \quad 0 < x < \infty. \quad (3')$$

Su solución se obtiene mediante la continuación impar de las condiciones iniciales. La continuación impar de la condición inicial (3') da:

$$u_t(x, 0) = \frac{I}{p} \{ \delta(x - x_0) - \delta(x + x_0) \},$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I}{p} \{ \delta(\xi - x_0) - \delta(\xi + x_0) \} d\xi = \\ = \frac{I}{2ap} \{ \sigma_0(x - x_0 + at) - \sigma_0(x - x_0 - at) - \sigma_0(x + x_0 + at) + \sigma_0(x + x_0 - at) \}.$$

64. Empleando la función δ , el problema de contorno se formula de siguiente modo:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \frac{I}{p} \sum_{k=1}^n \delta(x - x_k). \quad (3')$$

Continuando de forma impar la condición inicial y empleando la fórmula de d'Alembert obtenemos:

$$u(x, t) = \frac{I}{\rho} \sum_{k=1}^n \{ \sigma_0(x - x_k + at) - \sigma_0(x - x_k - at) - \sigma_0(x + x_k + at) + \sigma_0(x + x_k - at) \}.$$

65. La solución del problema inicial puede ser obtenida mediante el paso al límite $x_0 \rightarrow 0+$ en la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0), \quad x_0 > 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3')$$

$$u(x, t) = \frac{I}{2\rho} \lim_{x_0 \rightarrow 0+} \{ \sigma(x - x_0 + at) - \sigma_0(x - x_0 - at) + \sigma_0(x + x_0 + at) - \sigma_0(x + x_0 - at) \} = \frac{I}{a\rho} \{ \sigma_0(x + at) - \sigma_0(x - at) \}.$$

Esta solución puede ser obtenida también mediante el paso al límite cuando $\delta \rightarrow 0$ en la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} \frac{I}{\delta\rho}, & 0 < x < \delta, \\ 0, & \delta < x < +\infty. \end{cases} \quad (3')$$

66. *Resolución.* Daremos dos modos de resolver el problema.
El primer modo. El problema de contorno se formula así:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty. \quad (1)$$

$$Mu_{tt}(0, t) = ESu_x(0, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad M = \frac{Q}{g}, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} v_0, & x = 0, \\ 0, & 0 < x < +\infty. \end{cases} \quad (3')$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3), (3') la buscamos en la forma

$$u(x, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{a}\right). \quad (4)$$

De las condiciones iniciales encontramos:

$$\varphi(-z) + \psi(z) = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \varphi'(-z) + \psi'(z) = 0, \end{array} \right\} 0 < z < +\infty. \quad (5)$$

$$(5')$$

Integrando (5'), obtenemos

$$-\varphi(-z) + \psi(z) = \text{const.}$$

La constante de integración puede ser igualada a cero. Entonces

$$-\varphi(-z) + \psi(z) = 0, \quad 0 < z < +\infty. \quad (5'')$$

De (5) y (5'') hallamos

$$\psi(z) = 0, \quad \varphi(-z) = 0, \quad 0 < z < +\infty. \quad (6)$$

Por consiguiente

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right), & t > \frac{x}{a}, \\ 0, & 0 < t < \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (7)$$

Sustituyendo en la condición de frontera (2) la expresión obtenida de $u(x, t)$, llegamos a la ecuación diferencial para la determinación de $\varphi(z)$ para $z > 0$

$$\varphi''(z) + \frac{ES}{aM} \varphi'(z) = 0, \quad 0 < z < +\infty. \quad (8)$$

De (6) hallamos la primera condición inicial para la ecuación (8)

$$\varphi(0) = 0. \quad (9)$$

De la condición inicial (3') $u_t(0, 0) = v_0$ y de la expresión (7) de $u(x, t)$ hallamos la segunda condición inicial para la ecuación (8)

$$\varphi'(0) = v_0. \quad (10)$$

La integración de la ecuación (8) con las condiciones iniciales (9) y (10) da:

$$\varphi(z) = \frac{aMv_0}{ES} \left[1 - e^{-\frac{ES}{aM}z^2} \right], \quad 0 < z < +\infty, \quad (11)$$

Por consiguiente

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{aMv_0}{ES} \left[1 - e^{-\frac{ES}{aM}(t-\frac{x}{a})^2} \right], & t > \frac{x}{a}, \\ 0, & 0 < t < \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (12)$$

El segundo modo. El problema de contorno se formula, empleando la función δ unilateral*, de siguiente forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$Mu_{tt}(0, t) = ESu_x(0, t) + I\delta(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad I = Mv_0, \quad (2')$$

*) La función δ unilateral $\delta(t)$ se determina para $-\infty < t < +\infty$ como el límite, en el sentido de la convergencia débil de la sucesión de funciones

$$j_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } -\infty < t < 0, \\ n & \text{para } 0 < t < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{para } \frac{1}{n} < t < +\infty. \end{cases}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty. \quad (3')$$

La solución del problema de contorno (1), (2'), (3), (3') la buscamos en la forma

$$u(x, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{a}\right). \quad (4)$$

Como antes de las condiciones iniciales hallamos

$$\varphi(-z) = \psi(z) = 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq z < +\infty. \quad (6)$$

Por consiguiente

$$u(x, t) = \begin{cases} \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right), & t > \frac{x}{a}, \\ 0, & 0 < t < \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (7)$$

Sustituyendo esta expresión de $u(x, t)$ en la condición de frontera (2') y en las condiciones iniciales (3) y (3'), obtenemos para la determinación de $\varphi(z)$ cuando $z > 0$ la ecuación diferencial

$$\varphi''(z) + \frac{ES}{aM} \varphi'(z) = v_0 \delta(z), \quad 0 \leq z < +\infty \quad (8)$$

y las condiciones iniciales

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \quad (14)$$

La integración de la ecuación (8) con las condiciones iniciales (14) da:

$$\varphi(z) = \frac{a M v_0}{E S} \left[t - e^{-\frac{ES}{aM} z} \right], \quad 0 < z < +\infty, \quad (11)$$

y llegamos de nuevo a la expresión (12) para $u(x, t)$.

67. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) - h u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}, & 0 < x < l, \\ 0, & l < x < +\infty, \end{cases} \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x < +\infty \quad (3')$$

es

$$u(x, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{a}\right), \quad (4)$$

donde

$$-\varphi(-z) = \psi(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi az}{l}, & 0 \leq z \leq \frac{l}{a}, \\ 0, & \frac{l}{a} \leq z < +\infty, \end{cases} \quad (5)$$

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2 + h^2 l^2} \left[\frac{\pi^2 - h^2 l^2}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi az}{l} + \pi h l \left(\cos \frac{\pi az}{l} - e^{-ahz} \right) \right], & 0 \leq z \leq \frac{l}{a}, \\ -\frac{\pi h l}{\pi^2 + h^2 l^2} (1 + e^{-hl}) e^{-ahl}, & \frac{l}{a} \leq z < +\infty. \end{cases}$$

68. La solución del problema de contorno

$$\theta_{tt} = a^2 \theta_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$\theta_x(0, t) + \alpha \theta_t(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$\theta_t(x, 0) = \omega, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3')$$

Tiene la forma

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \omega t, & 0 < at < x, \\ \frac{\omega t(t - ax)}{1 - a\alpha}, & x < at < +\infty, \end{cases} \quad (4)$$

69. Tenemos los problemas de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{a) } \partial_u u(0, t) = 0, \\ \text{b) } \partial_u u_x(0, t) = 0, \\ \text{c) } \partial_u u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \\ \text{d) } \partial_u u_x(0, t) + \alpha u_t(0, t) = 0, \end{array} \right\} 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x, 0) = f(x), \\ u_t(x, 0) = af'(x), \end{array} \right\} 0 < x < +\infty. \quad (3)$$

En el caso de la condición de frontera a)

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x + at), & 0 < at < x, \\ f(x + at) - f(at - x), & x \leq at < +\infty. \end{cases}$$

En el caso de la condición de frontera b)

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x + at), & 0 \leq at < x, \\ f(x + at) + f(at - x), & x \leq at < +\infty. \end{cases}$$

En el caso de la condición de frontera c)

$$u(x, t) = \begin{cases} f(at + x), & 0 < at < x, \\ f(x + at) + f(at - x) + 2he^{h(x-at)} \int_0^{x-at} e^{-hs} f(-s) ds, & x \leq at < +\infty. \end{cases}$$

En el caso de la condición de frontera d)

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x + at), & 0 < at < x, \\ f(x + at) + \frac{1 + a\alpha}{1 - a\alpha} f(at - x), & x \leq at < +\infty. \end{cases}$$

70. Tenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$M_0 u_{tt}(0, t) = -H_0 u(0, t) - R_0 u_t(0, t) - kp_0 S u_x(0, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = af'(x), \quad 0 < x < +\infty, \quad (3')$$

Su solución puede ser representada del siguiente modo:

$$u(x, t) = \begin{cases} f(x - at), & 0 < at < x, \\ f(x + at) + \Phi(x - at), & x < at < +\infty, \end{cases}$$

donde $\Phi(z)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} a^2 M_0 \varphi''(z) - (aR_0 - kp_0 S) \varphi'(z) + H_0 \varphi(z) = \\ = -[a^2 M_0 f''(-z) + (aR_0 + kp_0 S) f'(-z) + H_0 f(-z)] \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0.$$

Observación. En la condición de frontera (2) S denota el área del pistón y R_0 el coeficiente de rozamiento. Despreciamos el cambio de la presión en la parte exterior del pistón. La presión excesiva sobre el pistón (la perturbación de la presión) es igual a $p - p_0 = k \frac{p_0}{\rho_0} (\rho - p_0)$. Pero en virtud de la ecuación de no discontinuidad (véase la resolución del problema 4 del cap. II) tenemos $\rho - p_0 \approx -\rho_0 u_x$. Por eso $p - p_0 = -kp_0 u_x$.

71. Resolución*). Tenemos los problemas de contorno a), b), c) conforme mente a las condiciones de frontera (3), (3'), (3'') dadas más abajo,

$$\left. \begin{array}{l} v_x + L i_t + R i = 0, \\ i_x + C v_t + G v = 0, \end{array} \right\} 0 < x, \quad t < +\infty, \quad CR = GL, \quad (1)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad (2)$$

$$i(x, 0) = -\sqrt{\frac{C}{L}} f(x), \quad (2')$$

$$-v(0, t) = R_0 i(0, t), \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} -v_t(0, t) = \frac{1}{C_0} i(0, t), \\ -v(0, t) = L_0 i_t(0, t), \end{array} \right\} 0 < t < +\infty. \quad (3')$$

$$(3'')$$

Buscamos las soluciones de estos problemas de contorno de la forma**)

$$v(x, t) = e^{-\frac{R}{L} t} \{ \varphi(x - at) + \psi(x + at) \}, \quad (4)$$

$$i(x, t) = e^{-\frac{R}{L} t} \sqrt{\frac{C}{L}} \{ \varphi(x - at) - \psi(x + at) \}. \quad (4')$$

De las condiciones iniciales (2), (2') para los problemas de contorno con las condiciones de frontera (3), (3'), (3'') obtenemos:

$$\varphi(z) = 0, \quad \psi(z) = f(z), \quad 0 < z < +\infty. \quad (5)$$

En dependencia de las condiciones de frontera logramos diferentes presentaciones para $\varphi(z)$ cuando $-\infty < z < 0$.

En el caso de la condición de frontera (3)

$$\varphi(z) = \frac{R_0}{R_0} \frac{\sqrt{C} - \sqrt{L}}{\sqrt{C} + \sqrt{L}} f(-z), \quad -\infty < z < 0. \quad (6)$$

*) Véase la resolución del problema 58.

**) Véase [7], págs. 59-60.

En el caso de la condición de frontera (3')

$$\varphi(z) = e^{\left(\frac{C}{C_0} - aCR\right)z} \int_0^z e^{\left(aCR - \frac{C}{C_0}\right)\xi} \left[f'(-\xi) - \left(aCR + \frac{C}{C_0}\right) f(-\xi) \right] d\xi, \quad -\infty < z < 0. \quad (6')$$

En el caso de la condición de frontera (3'')

$$\varphi(z) = e^{-\frac{aL^2 - L_0R}{aL}z} \int_0^z e^{-\frac{L_0R - aL}{aL}\xi} \left[-f'(-\xi) + \frac{L_0R + aL^2}{a} f(-\xi) \right] d\xi, \quad -\infty < z < 0. \quad (6'')$$

Nota. En el caso de la condición de frontera (3), la onda reflejada de la tensión

$$\varphi(z) = \frac{R_0 \sqrt{C} - \sqrt{L}}{R_0 \sqrt{C} + \sqrt{L}} f(-z), \quad -\infty < z < 0$$

puede no existir completamente para $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ (caso de la absorción completa de la onda incidente). Si $R_0 > \sqrt{\frac{L}{C}}$, entonces la onda reflejada tiene el mismo signo que la onda incidente; si $R_0 < \frac{L}{C}$, entonces tiene el signo opuesto (conservación de la fase y el cambio de la fase a la opuesta). Si $R_0 = 0$ (el extremo directamente puesto a tierra), entonces la onda reflejada de la tensión cambia el signo, además su amplitud es igual (en el punto $x = 0$) a la amplitud de la onda incidente. Si $R_0 \rightarrow +\infty$ (extremo aislado), entonces la onda reflejada de la tensión tiene el signo y la amplitud de la onda incidente. La amplitud de la onda reflejada es dos veces menor que la amplitud de la onda incidente cuando se cumple la condición

$$\text{o la condición } \frac{R_0 \sqrt{C} - \sqrt{L}}{R_0 \sqrt{C} + \sqrt{L}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{R_0 \sqrt{C} - \sqrt{L}}{R_0 \sqrt{C} + \sqrt{L}} = -\frac{1}{2}$$

72. *Resolución.* Para la determinación del estado estacionario límite en el cable buscamos la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - 2CR \frac{\partial v}{\partial t} - GRv = 0, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad CR = GL \quad (1)$$

en forma de una función que depende sólo de x y es independiente de t ,

$$v = v_0(x), \quad 0 < x < +\infty \quad (2)$$

con la condición de frontera

$$v(0) = E. \quad (3)$$

La sustitución de $v_0(x)$ en (1) da:

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - GRv_0 = 0$$

de donde obtenemos

$$v_0(x) = C_1 e^{-\sqrt{GR}x} + C_2 e^{\sqrt{GR}x}$$

Dado que cuando $x \rightarrow +\infty$ la función $v_0(x)$ debe ser acotada, entonces $C_2 = 0$. De la condición de frontera (3) hallamos $C_1 = E$. Por consiguiente,

$$v_0(x) = E e^{-\sqrt{GR}x}. \quad (4)$$

La correspondiente distribución estacionaria de la corriente

$$i = i_0(x) \quad (5)$$

la obtenemos, introduciendo (4) y (5) en la ecuación diferencial

$$v_x + L i_t + R i = 0. \quad (6)$$

Hallamos

$$i_0(x) = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\sqrt{GR}x}. \quad (7)$$

Después de que el extremo del cable $x = 0$ está puesto a tierra (en el momento $t = 0$) por la resistencia concentrada, para la tensión y la corriente en el cable obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} v_x + L i_t + R i = 0, \\ i_x + C i_t + G v = 0. \end{array} \right\} 0 < x, \quad t < +\infty \quad (8)$$

$$i(0, t) = R_0 i(0, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} v(0, 0) = E e^{-\sqrt{GR}x}, \\ i(x, 0) = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\sqrt{GR}x}, \end{array} \right\} 0 < x < +\infty, \quad (10)$$

$$v(x, 0) = E e^{-\sqrt{GR}x}, \quad (11)$$

$$i(x, 0) = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\sqrt{GR}x}, \quad (12)$$

La solución del problema de contorno (8), (9), (10), (11), (12) la buscamos en la forma

$$v(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} [\varphi(x - at) + \psi(x + at)],$$

$$i(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x - at) - \psi(x + at)].$$

Para $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ de las condiciones iniciales (11), (12) encontramos las expresiones

$$\varphi(z) = E e^{-\sqrt{GR}z}, \quad 0 < z < +\infty, \quad (13)$$

$$\psi(z) = 0 \quad 0 < z < +\infty. \quad (14)$$

De la ecuación de frontera (10)

$$\frac{R_0}{R} \sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{L}{C}} \psi(z) = 0, \quad 0 < z < +\infty. \quad (15)$$

Por consiguiente

$$v(x, t) = E e^{-\sqrt{GR}x} \sigma_0(x - at), \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (16)$$

$$i(x, t) = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\sqrt{GR}x} \sigma_0(x - at), \quad 0 < x, \quad t < +\infty. \quad (17)$$

73. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \begin{cases} \mu\left(t - \frac{x}{a}\right), & \frac{x}{a} < t < +\infty, \\ 0, & 0 < t < \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (4)$$

Indicación. La solución del problema de contorno (1), (2), (3) puede buscarse en la forma

$$u(x, t) = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) + \psi\left(t + \frac{x}{a}\right).$$

74. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (1)$$

$$ESu_x(0, t) = -F(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{S\sqrt{E\rho}} \int_0^{t - \frac{x}{a}} F(\xi) d\xi, & \frac{x}{a} < t < +\infty. \end{cases} \quad (4)$$

75. La solución del problema de contorno

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1')$$

$$w_x(0, t) + \frac{p_0 S}{\lambda^2 \Omega_0 \rho_0} w(0, t) + \frac{p_0}{\lambda^2 \Omega_0 \rho_0} q(t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty \quad (3)$$

es

$$w(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 < \lambda t < x, \\ e^{h(x - \lambda t)} \int_0^{x - \lambda t} \Phi\left(-\frac{z}{\lambda}\right) e^{hz} dz, & x < \lambda t < +\infty, \end{cases} \quad (4)$$

donde

$$h = \frac{P_0 S}{\lambda^2 \Omega_0 \rho_0}, \quad \Phi(z) = -\frac{P_0}{\lambda^2 \Omega_0 \rho_0} q(z), \quad 0 < z < +\infty, \quad (5)$$

$p(x, t)$ se obtiene de $w(x, t)$ mediante la relación (1) o (1'), $w(x, t) = p \cdot v(x, t)$, donde p es la densidad y v , la velocidad del líquido.

76. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (2)$$

$$Mu_{tt}(0, t) = ESu_x(0, t) + I \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(t - nT), \quad (3)$$

donde $\delta(t)$ es la función δ unilateral, es de la forma

$$u(x, t) = \frac{aI}{ES} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[1 - e^{-\frac{ES}{aM} (t - \frac{x}{a} - nT)} \right] \sigma_0 \left(t - \frac{x}{a} - nT \right), \quad 0 < x, t < +\infty. \quad (4)$$

77. La solución del problema de contorno

$$\begin{cases} v_x + L i_t + R i = 0, \\ i_x + C v_t + G v = 0, \end{cases} \quad 0 < x, t < +\infty, \quad CR = GL, \quad (1)$$

$$v(0, t) = E \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = i(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty \quad (3)$$

es de la forma

$$v(x, t) = v_0(x, t) + v^*(x, t), \quad (4)$$

$$i(x, t) = i_0(x, t) + i^*(x, t), \quad (4')$$

donde

$$v_0(x, t) = E e^{-\alpha x} \operatorname{sen}(\omega t - \beta x) \quad (5)$$

es la tensión, de las vibraciones establecidas,

$$i_0(x, t) = E e^{-\alpha x} \frac{1}{R^2 + \omega^2 L^2} [(\alpha R + \beta \omega L) \operatorname{sen}(\omega t - \beta x) + (\beta R - \alpha \omega L) \cos(\omega t - \beta x)] \quad (6)$$

es la intensidad de la corriente de las oscilaciones establecidas,

$$\alpha = \sqrt{\frac{GR + \omega^2 CL + 2\omega CR}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{GR + \omega^2 CL - 2\omega CR}{2}}, \quad (7)$$

y

$$v^*(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} [\varphi(x - at) + \psi(x + at)] \quad (8)$$

es la tensión de las vibraciones amortiguadas,

$$i^*(x, t) = \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{R}{L}t} [\varphi(x - at) - \psi(x + at)] \quad (9)$$

es la intensidad de la corriente de las vibraciones amortiguadas.

$$\varphi(z) = -\frac{v_0(z, 0) + i_0(z, 0)}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \psi(z) = \frac{v_0(z, 0) - i_0(z, 0)}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (10)$$

$0 < z < \infty,$

$$\varphi(z) = -\psi(-z), \quad -\infty < z < 0. \quad (11)$$

Cuando

$$t > \frac{1}{R + \alpha a} \left\{ \ln 10 \left[1 + \frac{(|\beta - \alpha \omega| + \alpha R + \beta \omega L) \sqrt{L}}{(R^2 + \omega^2 L^2) \sqrt{C}} \right] \right\} \quad (12)$$

la amplitud de la tensión de las vibraciones amortiguadas será menor que 10% de la amplitud de la tensión de las vibraciones establecidas.

Indicación. Eliminar en (1) y (1') la intensidad de la corriente y hallar las vibraciones establecidas de la tensión, sustituyendo las mismas en (1'), hallar las vibraciones establecidas de la intensidad de la corriente. Las vibraciones establecidas de la tensión y de la intensidad es provechoso buscar primeramente en la forma compleja $\tilde{v}(x, t) = v(x) e^{j\omega t}$, $\tilde{i}(x, t) = i(x) e^{j\omega t}$, donde $j = \sqrt{-1}$, exigiendo su acotación cuando $x \rightarrow +\infty$, y después regresar a las variables reales y satisfacer la condición de frontera (2).

3. Problemas para una recta infinita compuesta de dos semirectas homogéneas.

Factores concentrados

Si la cuerda (barra) no acotada es obtenida mediante la conjugación de dos cuerdas (barras) homogéneas semiacotadas, entonces, tomando el punto de conjunción por $x = 0$, se pueden escribir las ecuaciones para las desviaciones de los puntos de la cuerda (barra)

$$u_{1tt} = a_1^2 u_{1xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_{2tt} = a_2^2 u_{2xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \quad (1')$$

las condiciones iniciales

$$u_1(x, 0) = f_1(x), \quad u_{1t}(x, 0) = F(x), \quad -\infty < x < 0, \quad (2)$$

$$u_2(x, 0) = f_2(x), \quad u_{2t}(x, 0) = F_2(x), \quad 0 < x < +\infty. \quad (2')$$

A estas ecuaciones y condiciones iniciales se debe añadir además la condición de conjunción en el punto $x = 0$.

Si, por ejemplo, las cuerdas están unidas directamente (sin alguna conexión concentrada), entonces las condiciones de conjugación son de la forma

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad (3)$$

$$E_1 u_{1x}(0, t) = E_2 u_{2x}(0, t). \quad (4)$$

La solución del problema de contorno (1), (1'), (2), (2'), (3), (4) puede buscarse en la forma

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x - a_1 t) + \psi_1(x + a_1 t), \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (5)$$

$$u_2(x, t) = \varphi_2(x - a_2 t) + \psi_2(x + a_2 t), \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty. \quad (6)$$

Las funciones $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $\psi_2(z)$ se determinan de las condiciones iniciales (2), (2') y las condiciones de conjugación (3) y (4).

78. La solución del problema de contorno*)

$$\left. \begin{array}{l} u_{1tt} = a_1^2 u_{1xx}, \quad -\infty < x < 0, \\ u_{2tt} = a_2^2 u_{2xx}, \quad 0 < x < +\infty \end{array} \right\} 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad E_1 \frac{\partial u_1(0, t)}{\partial x} = E_2 \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x}, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = f\left(-\frac{x}{a_1}\right), \quad \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = f_1\left(-\frac{x}{a_1}\right), \quad -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3')$$

$$\text{es } u_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right); \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < -\frac{x}{a_1};$$

$$u_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \frac{\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right); \quad (4)$$

$$-\infty < x < 0, \quad -\frac{x}{a_1} < t < +\infty;$$

$$u_2(x, t) = 0, \quad x > 0, \quad 0 < t < a_2^{-1}x, \quad u_2(x, t) =$$

$$= \frac{2\sqrt{E_1\rho_1}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right), \quad a_2^{-1}x < t < +\infty, \quad (5)$$

La onda reflejada $\frac{\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right)$ no existe cuando $\sqrt{E_1\rho_1} = \sqrt{E_2\rho_2}$.

Cuando $E_2\rho_2 \rightarrow 0$ la reflexión va a pasar como si fuese del extremo libre y cuando $E_2\rho_2 \rightarrow \infty$, como del extremo fijo.

La onda refractada. Cuando $E_2\rho_2 \rightarrow 0$ tiene una amplitud dos veces mayor que la de la onda incidente; cuando $E_2\rho_2 \rightarrow +\infty$ la onda refractada desaparece.

Se debe remarcar especialmente que cuando $E_2\rho_2 \rightarrow 0$ la reflexión pasa como si fuese del extremo libre, pero la onda refractada existe e incluso tiene una amplitud dos veces mayor que la de la onda incidente.

79. a) para $Mk > T_0\rho$ (y $0 < x < +\infty$)

$$\left. \begin{array}{l} u(x, t) = \frac{Mv_0}{\sqrt{Mk - T_0\rho}} e^{-\frac{\rho}{M}(at-x)} \operatorname{sh} \left[\left(t - \frac{x}{a} \right) \frac{\sqrt{Mk - T_0\rho}}{M} \right], \\ u(x, t) = 0, \quad \begin{array}{ll} \text{cuando} & x < at < +\infty, \\ \text{cuando} & 0 < at < x; \end{array} \end{array} \right\} \quad (1)$$

b) para $Mk = T_0\rho$ (y $0 < x < +\infty$)

$$u(x, t) = v_0 e^{-\frac{\rho}{M}(t - \frac{x}{a})} \left(t - \frac{x}{a} \right) \sigma_0 \left(t - \frac{x}{a} \right), \quad 0 < t < +\infty; \quad (2)$$

*) Véase el problema 26.

c) para $Mk < T_0 p$ (y $0 < x < +\infty$)

$$\left. \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{Mv_0}{\sqrt{T_0 p - Mk}} e^{-\frac{p}{M}(at-x)} \operatorname{sh} \left[\left(t - \frac{x}{a} \right) \frac{\sqrt{T_0 p - Mk}}{M} \right], \\ u(x, t) &= 0, \quad \text{cuando } 0 < at < x. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Para $-\infty < x < 0$ la solución $u(x, t)$ se obtiene de (1), (2), (3) mediante la sustitución de x por $-x$.

80. La solución del problema de contorno

$$u_{1tt} = a^2 u_{1xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad \} \quad (1)$$

$$u_{2tt} = a^2 u_{2xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad \} \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\left. \begin{aligned} T_0 [u_{2x}(0, t) - u_{1x}(0, t)] &= \\ &= ku_1(0, t) + Mu_{1tt}(0, t) + ru_1(0, t) = \\ &= ku_2(0, t) + Mu_{2tt}(0, t) + ru_2(0, t), \end{aligned} \right\} \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t),$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_{1t}(x, 0) = -af'(x), \quad -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_{2t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3')$$

puede ser representada en la forma

$$u_1(x, t) = f(x - at) + \varphi(x + at), \quad (4)$$

$$u_2(x, t) = \varphi(x - at), \quad (4')$$

donde $\varphi(z)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$a^2 M \varphi''(z) + [2T_0 - ar] \varphi'(z) + k \varphi(z) = 2T_0 f'(z) \quad \text{para } -\infty < z < 0 \quad (5)$$

con las condiciones iniciales nulas y

$$\varphi(z) = \varphi(-z) - f(z) \quad \text{para } 0 < z < +\infty. \quad (6)$$

81. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < v_0 t, \quad v_0 t < x < +\infty, \quad 0 < z < +\infty, \quad (1)$$

donde

$$u = u_1(x, t), \quad -\infty < x < v_0 t,$$

$$u = u_2(x, t), \quad v_0 t < x < +\infty,$$

$$u_{1x}(v_0 t, t) = u_{2x}(v_0 t, t) = -\frac{1}{kp_0} \tilde{p}(t), \quad (2)$$

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < +\infty \quad (3)$$

es de la forma

$$u_1(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{a+v_0}{kp_0} \int_0^{\frac{x+at}{a+v_0}} \tilde{p}(\xi) d\xi, & -at < x < v_0 t, \\ 0, & -\infty < x < -at, \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$u_2(x, t) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{a-v_0}{kp_0} \int_0^{\frac{at-x}{a-v_0}} \tilde{p}(\xi) d\xi, & v_0 t < x < at, \\ 0, & at < x < +\infty, \end{array} \right\} \quad (4')$$

Particularmente, si $\tilde{p}(t) = A \cos \omega t$,

$$u_1(x, t) = \begin{cases} -\frac{a+v_0}{kp_0\omega} A \operatorname{sen} \left[\frac{\omega}{a+v_0} (x+at) \right], & -at < x < v_0 t, \\ 0, & -\infty < x < -at, \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{a-v_0}{kp_0\omega} A \operatorname{sen} \left[\frac{\omega}{a-v_0} (x-at) \right], & v_0 t < x < at, \\ 0, & at < x < +\infty. \end{cases}$$

De esta manera, en el caso cuando $\tilde{p}(t) = A \cos \omega t$ en la dirección opuesta a la del movimiento de la fuente se propaga la onda con una frecuencia menor que la frecuencia de la fuente,

$$\omega_1 = \frac{a}{a+v_0} \omega$$

y en la dirección del movimiento de la fuente, la onda con una frecuencia mayor que la de la fuente,

$$\omega_2 = \frac{a}{a-v_0} \omega$$

(el efecto de Doppler).

82. La solución del problema de contorno

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & -\infty < x < v_0 t, & v_0 t < x < +\infty, & 0 < t < +\infty, \\ u &= u_1(x, t), & -\infty < x < v_0 t, & u = u_2(x, t), & v_0 t < x < +\infty, \end{aligned} \quad \} \quad (1)$$

$$u_1(v_0 t, t) = u_2(v_0 t, t), \quad T_0 \left[\frac{\partial u_2(v_0 t, t)}{\partial x} - \frac{\partial u_1(v_0 t, t)}{\partial x} \right] = -F(t), \quad (2)$$

$0 < t < +\infty,$

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_{1t}(x, 0) = 0, & -\infty < x < 0, \\ u_2(x, 0) &= u_{2t}(x, 0) = 0, & 0 < x < +\infty. \end{aligned} \quad \} \quad (3)$$

es

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{a^2 - v_0^2}{2aT_0} \int_0^{\frac{x+at}{a+v_0}} F(\xi) d\xi, & -at < x < v_0 t, \\ 0, & -\infty < x < -at, \end{cases} \quad (4)$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{a^2 - v_0^2}{2aT_0} \int_0^{\frac{at-x}{a-v_0}} F(\xi) d\xi, & v_0 t < x < at, \\ 0, & at < x < +\infty. \end{cases} \quad (4')$$

4. Problemas para un segmento finito

En el caso de un segmento finito homogéneo de longitud l la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 u_{tt} + \alpha_2 u_t + \alpha_3 u_x + \alpha_4 u = \mu(t), \\ \beta_1 u_{tt} + \beta_2 u_t + \beta_3 u_x + \beta_4 u = \mu^*(t), \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0, \\ x=l, \end{array} \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

puede buscarse en la forma

$$u(x, t) = \varphi_1(x - at) + \varphi_2(x + at), \quad (4)$$

además las funciones $\varphi_1(z)$ y $\varphi_2(z)$ cuando $0 < z < l$ se determinan de las condiciones iniciales (2) y para otros valores necesarios se continúan, empleando las condiciones de frontera (3).

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) se puede buscar también mediante la fórmula de d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{a} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi$$

para la recta no acotada, prolongando $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ por toda recta $-\infty < z < +\infty$ mediante las condiciones de frontera (3).

83.

$$u(x, t) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty.$$

Indicación. La solución se obtiene mediante la fórmula de d'Alembert para la continuación impar y periódica con el período $2l$ de las condiciones iniciales.

84.

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

donde

$$\varphi(z) = \begin{cases} Az, & -l < z < l, \\ A(2l - z), & l < z < 3l, \end{cases}$$

$$\varphi(z) = \varphi(z + 4l), \quad -\infty < z < +\infty.$$

85.

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

donde

$$\varphi(z) = \varphi_n(z), \quad -l + 2nl < z < l + 2nl, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

además

$$\varphi_{-n}(z) = -\varphi_n(-z),$$

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= Az, \quad \varphi_1(z) = Ale^{-h(z-t)} - e^{-hz} \int_{-l}^{z-2l} [\varphi'_0(-\xi) + h\varphi_0(-\xi)] e^{h(\xi+2l)} d\xi, \\ \varphi_2(z) &= Ale^{-h(z-t)} - e^{-hz} \left\{ \int_{-l}^l [\varphi'_0(-\xi) + h\varphi_0(-\xi)] e^{h(\xi+2l)} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-l}^{z-2l} [\varphi'_{-1}(-\xi) + h\varphi_{-1}(-\xi)] e^{h(\xi+2l)} d\xi \right\}, \\ \varphi_n(z) &= Ale^{-h(z-t)} - e^{-hz} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \int_{(2k-3)l}^{(2k-1)l} [\varphi'_{-k+1}(-\xi) + h\varphi_{-k+1}(-\xi)] e^{h(\xi+2l)} d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{(2n-3)l}^{z-2l} [\varphi'_{-n+1}(-\xi) + h\varphi_{-n+1}(-\xi)] e^{h(\xi+2l)} d\xi \right\}. \end{aligned}$$

86. *Resolución.* Resolvemos primeramente el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

donde $\delta(x)$ es la función δ unilateral*). Su solución es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I}{\rho} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (-1)^h (\delta(\xi - x_0 + 2kl) - \delta(\xi + x_0 + 2kl)) d\xi = \\ &= \frac{I}{2a\rho} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (-1)^h \{ \sigma_0(x + at - x_0 + 2kl) - \sigma_0(x + at + x_0 + 2kl) - \\ &\quad - \sigma_0(x - at - x_0 + 2kl) + \sigma_0(x - at + x_0 + 2kl) \}. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $x_0 \rightarrow l$ en la solución hallada, encontramos la solución del problema inicial

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{I}{2a\rho} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} (-1)^h \{ \sigma_0[x + at + (2k-1)l] - \sigma_0[x + at + (2k+1)l] - \\ &\quad - \sigma_0[x - at + (2k-1)l] + \sigma_0[x - at + (2k+1)l] \}. \end{aligned}$$

* Véase la llamada a la resolución del problema 66.

87. *Resolución.* Durante el impacto para los desplazamientos longitudinales $u(x,t)$ de los puntos de la barra tenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$Mu_{tt}(l, t) = -ESu_x(l, t), \quad 0 < t < t_0, \quad (2')$$

donde t_0 es el momento de terminación del impacto,

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l, \\ -v_0, & x = l. \end{cases} \quad (3')$$

El momento t_0 de terminación del impacto se caracteriza con que para $0 < t < t_0$ debe ser $u_x(l, t) < 0$ y para $t = t_0$, $u_x(l, t_0) = 0$, además, si suponemos que el peso M para los valores posteriores de tiempo t queda sujeto al extremo de la barra, entonces para los valores $t > t_0$, que se diferencian poco de t_0 , debe ser $u_x(l, t) > 0$.

La solución del problema de contorno (1), (2), (2'), (3), (3') es:

$$u(x, t) = \varphi(at - x) + \varphi(at + x), \quad (4)$$

donde la función $\varphi(z)$ se determina de siguiente modo:

$$\varphi'(z) = 0, \quad -l < z < l, \quad (5)$$

$$\varphi(z) = 0, \quad -l < z < l, \quad (6)$$

$$\varphi''(z) + \frac{1}{\alpha l} \varphi'(z) = \varphi''(z-2l) - \frac{1}{\alpha l} \varphi'(z-2l), \quad l < z < +\infty, \quad (7)$$

$\frac{\alpha}{\alpha l} = \frac{M}{\rho S l}$ es la relación de la masa del peso con respecto a la masa de la barra.

Empleando la ecuación diferencial (7) y la segunda condición inicial (3'), se determina la función $\varphi'(z)$ en el segmento $l < z < 3l$. Después, mediante esa misma ecuación diferencial se determina $\varphi'(z)$ consecutivamente en los segmentos $3l < z < 5l$, $5l < z < 7l$, ... etc., además la constante de integración se determina cada vez de la condición de continuidad del cambio de la velocidad del extremo $u_t(l, t)$ cuando $t > 0$ y, en particular, para $t = \frac{2l}{a}; \frac{4l}{a}; \frac{6l}{a}; \dots$

Así se obtienen las expresiones

$$\varphi'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-\frac{z-l}{\alpha l}}, \quad l < z < 3l, \quad (5')$$

$$\varphi'(z) = \frac{v_0}{a} e^{-\frac{z-l}{\alpha l}} + \frac{v_0}{a} \left[1 - \frac{2}{\alpha l} (z-3l) \right] e^{-\frac{z-3l}{\alpha l}}, \quad 3l < z < 5l, \quad (5'')$$

$$\begin{aligned} \varphi'(z) = & \frac{v_0}{a} e^{-\frac{z-l}{\alpha l}} + \frac{v_0}{a} \left[1 - \frac{2}{\alpha l} (z-3l) \right] e^{-\frac{z-3l}{\alpha l}} + \\ & + \frac{v_0}{a} \left[1 - \frac{4}{\alpha l} (z-3l) + \frac{2}{\alpha^2 l^2} (z-5l)^2 \right] e^{-\frac{z-5l}{\alpha l}}, \quad 5l < z < 7l, \quad (5''') \end{aligned}$$

La función $\varphi(z)$ se obtiene mediante la integración de $\varphi'(z)$ en los segmentos $l < z < 3l$, $3l < z < 5l$, $5l < z < 7l$, ... teniendo en cuenta la continuidad del cambio de $u(l, t)$ en el tiempo.

Así se obtienen las expresiones

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{\alpha v_0}{a} \left[1 - e^{-\frac{z-l}{\alpha t}} \right], \quad l < z < 3l, \\ \varphi(z) &= -\frac{\alpha v_0}{a} e^{-\frac{z-l}{\alpha t}} + \frac{\alpha v_0}{a} \left[1 + \frac{2}{\alpha l} (z-3l) \right] e^{-\frac{z-3l}{\alpha t}}, \quad 3l < z < 5l, \\ \varphi(z) &= \frac{\alpha v_0}{a} \left[e^{-\frac{z-l}{\alpha t}} - 1 \right] + \frac{\alpha v_0}{a} \left[1 + \frac{2}{\alpha l} (z-3l) \right] e^{-\frac{z-3l}{\alpha t}} - \\ &\quad - \frac{\alpha v_0}{a} \left[1 + \frac{2}{\alpha^2 l^2} (z-5l)^2 \right] e^{-\frac{z-5l}{\alpha t}}, \quad 5l < z < 7l. \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

Para $0 < t < \frac{l}{a}$ en virtud de (6) $\varphi(at-x)=0$, por eso conforme a (4)

$$u(x, t) = \varphi(at+x) \quad \text{para } 0 < t < \frac{l}{a}, \quad (8)$$

es decir, por la barra se propaga sólo la onda «inversa» $\varphi(at+x)$ que va del extremo $x=l$, que sufrió el golpe; cuando $t=\frac{l}{a}$ la onda alcanza el extremo fijo y cuando $\frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}$ a ella se añade la onda reflejada $\varphi(at-x)$, es decir, la solución tendrá la forma

$$u(x, t) = \varphi(at-x) + \varphi(at+x), \quad \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}. \quad (9)$$

Cuando $t=\frac{2l}{a}$ la onda $\varphi(at-x)$ se reflejará desde el extremo $x=l$ de forma que el sumando $\varphi(at+x)$ en la solución (4) en el intervalo $\frac{2l}{a} < t < \frac{3l}{a}$ ya tendrá otra expresión.

De esta manera $u(x, t)$ tiene diferentes expresiones en los intervalos

$$0 < t < \frac{l}{a}, \quad \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a}, \quad \dots, \quad n \frac{l}{a} < t < (n+1) \frac{l}{a}, \quad \dots, \quad (10)$$

$u_x(l, t)$ tendrá distintas expresiones en los intervalos

$$0 < t < \frac{2l}{a}, \quad \frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}, \quad \dots, \quad 2n \frac{l}{a} < t < (2n+2) \frac{l}{a}, \quad \dots \quad (11)$$

El proceso del impacto no puede terminarse para $0 < t < \frac{2l}{a}$, dado que para estos valores de t se tendrá $u_x(l, t) < 0$.

Para que el proceso del impacto se termine en el momento t que pertenece al segmento $\frac{2l}{a} < t < \frac{4l}{a}$ es necesario y suficiente que se cumpla la desigualdad

$$2 + e^{-\frac{2}{\alpha}} < \frac{4}{\alpha},$$

es decir,

g < 1.73,

Observación. Dado que las superficies reales pueden poseer escabrosidades, entonces para la aplicación de esta solución a los casos reales de golpe es necesario que el tiempo, durante el cual se obtiene el estrecho contacto del tope del peso con el extremo libre de la barra, sea despreciablemente pequeño en comparación con el tiempo del recorrido de la onda de perturbación por la barra. Las deformaciones, que surgen en el peso, deben ser despreciablemente pequeñas en comparación con las deformaciones de la barra.

88. Durante el proceso del impacto para los desplazamientos longitudinales $u(x, t)$ de los puntos de la barra tenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$Mu_{xt}(l, t) = -ESu_x(l, t), \quad 0 < t \leq t_0. \quad (2')$$

donde t_0 es el momento de terminación del proceso del impacto.

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l, \\ -v_0, & x = l. \end{cases} \quad (3')$$

El momento de terminación del impacto se determina de igual modo que en el problema anterior.

La solución del problema de contorno (1), (2), (2'), (3), (3') es de la forma

$$u(x, t) = \varphi(at - x) + \varphi(at + x), \quad (4)$$

donde $\varphi(z)$ se determina del siguiente modo:

$$\Psi'(z) = 0, \quad -l < z < l. \quad (5)$$

$$\Psi(z) = 0, \quad -l < z < l \quad (6)$$

$$\Psi''(z) + \frac{1}{\sigma l} \Psi'(z) = -\Psi''(z-2l) + \frac{1}{\sigma l} \Psi'(z-2l), \quad l < z < +\infty, \quad (7)$$

donde $\alpha = \frac{M}{\rho S l}$ es la relación de la masa del peso con respecto a la masa de la barra.

Primeramente, empleando la ecuación diferencial (7), se determina $\varphi'(z)$ sucesivamente en los segmentos $l < z < 3l$, $3l < z < 5l$ etc., teniendo en cuenta la condición inicial (3') y la continuidad de u , (l, t) para $0 < t < +\infty$:

$$\psi'(z) = -\frac{v_0}{a} e^{-\frac{z-l}{a t}}, \quad l < z < 3l, \quad (5')$$

$$\Psi'(z) = -\frac{v_0}{\alpha l} e^{-\frac{z-l}{\alpha l}} + \frac{v_0}{\alpha l} \left[1 - \frac{2}{\alpha l} (z-3l) \right] e^{-\frac{z-3l}{\alpha l}}, \quad 3l < z < 5l, \quad (5'')$$

Después mediante la integración de $\varphi'(z)$, teniendo en cuenta la continuidad para $t > 0$, obtenemos la expresión de $\varphi(z)$ en estos segmentos

$$\varphi(z) = -\frac{v_0 \alpha l}{a} \left[1 - e^{-\frac{z-l}{\alpha l}} \right], \quad l < z < 3l, \quad (6')$$

89. La solución del problema de contorno es*)

$$\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{H}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$Mu_{tt}(l, t) = -ESu_x(l, t), \quad 0 < t < t_0, \quad (2')$$

donde t_0 es el momento de terminación del proceso del impacto,

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < l, \\ -v_0, & x = l, \end{cases} \quad (3')$$

es de la forma

$$u(x, t) = \frac{\varphi(at-x) - \varphi(at+x)}{H-x}. \quad (4)$$

La función $\varphi(z)$ se determina del siguiente modo:

$$\varphi(z) = 0, \quad -l < z < l, \quad (5)$$

$$\alpha\varphi''(z) + \varphi'(z) + \frac{\varphi(z)}{H-l} = \alpha\varphi''(z-2l) - \varphi'(z-2l) + \frac{\varphi(z-2l)}{H-l},$$

$$l < z < +\infty, \quad (6)$$

donde $\alpha = \frac{Ma^2}{ES}$.

Empleando esta ecuación diferencial, la condición inicial (3') y las condiciones de continuidad de $u_t(l, t)$ para $0 < t < +\infty$ y de $u(l, t)$ para $0 \leq t < +\infty$, la función se determina sucesivamente en los intervalos $l < z < 3l$, $3l < z < 5l$, etc.

$$\varphi(z) = \frac{v_0}{a} (H-l) \frac{e^{\lambda_1(z-l)} - e^{\lambda_2(z-l)}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad l < z < 3l \quad (5')$$

etc., donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(H-l)} = 0.$$

90. La resolución del problema es análoga a la de los problemas 87, 88, 89.
 91. Las soluciones de los problemas de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$a) \quad u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

$$b) \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = \mu(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (3')$$

$$c) \quad u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (3'')$$

*) Véase el problema 21.

son correspondientemente de la forma*)

$$a) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{\mu} \left(t - \frac{x+2nl}{a} \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\mu} \left(t - \frac{2nl-x}{a} \right), \quad (4)$$

$$b) \quad u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\tilde{\mu} \left(t + \frac{x-(2n+1)l}{a} \right) - \tilde{\mu} \left(t - \frac{x+(2n+1)l}{a} \right) \right], \quad (4')$$

$$c) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\tilde{\mu} \left(t - \frac{x+2nl}{a} \right) - \tilde{\mu} \left(t + \frac{x-2nl}{a} \right) \right] (-1)^{n+1} + \\ + \tilde{\mu} \left(t - \frac{x}{a} \right), \quad (4'')$$

$$\text{donde } \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0 \\ \mu(t) & \text{para } t \geq 0 \end{cases}. \quad (5)$$

92. La solución del problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial t}, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} = \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \end{array} \right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty \quad **), \quad (1')$$

$$w(0, t) = \varphi(t), \quad p(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es de la forma ***)

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\tilde{\psi} \left(t - \frac{x+2nl}{\lambda} \right) - \tilde{\psi} \left(t + \frac{x-2nl}{\lambda} \right) \right] (-1)^n + \tilde{\psi} \left(t - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (4)$$

donde

$$\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ \psi(t) & 0 < t < +\infty, \end{cases} \quad (5)$$

y

$$p(x, t) = \lambda \tilde{\psi} \left(t - \frac{x}{\lambda} \right) + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left\{ \tilde{\psi} \left(t - \frac{x+2nl}{\lambda} \right) + \tilde{\psi} \left(t - \frac{x-2nl}{\lambda} \right) \right\}. \quad (6)$$

De esta manera

$$p(0, t) = \lambda \tilde{\psi}(t) + 2\lambda \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \tilde{\psi} \left(t - \frac{2nl}{\lambda} \right).$$

*) Véase [7], págs. 83-86.

**) Véase la respuesta al problema 5.

***) Véase la solución del problema anterior.

93. *Resolución.* El comienzo del proceso del impacto es el momento cuando la barra izquierda alcanza a la barra derecha; a este momento lo tomamos como $t = 0$ y el punto, en el cual se encuentran en este momento los topes, como $x = 0$. Se llama final del impacto el momento, a partir del cual la velocidad del topo que golpea pasa a ser menor que la velocidad del topo que recibe el impacto.

Designemos mediante $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ los desplazamientos de las secciones transversales de las barras que golpea y que recibe el golpe. Entonces $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ son las soluciones del problema de contorno (durante el impacto).

$$\left. \begin{array}{l} u_{1tt} = a^2 u_{1xx}, \\ u_{2tt} = a^2 u_{2xx}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} -l < x < 0, \\ 0 < x < l, \end{array} \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u_{1x}(-l, t) &= 0, & u_1(0, t) &= u_2(0, t), & u_{1x}(0, t) &= \\ &= u_{2x}(0, t), & u_{2x}(l, t) &= 0, & 0 < t < +\infty^*, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1(x, 0) = 0, \\ u_2(x, 0) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u_{1t}(x, 0) = v_1, \\ u_{2t}(x, 0) = v_2, \end{array} \quad \begin{array}{l} -l < x < 0, \\ 0 < x < l, \end{array} \quad (3)$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) la buscamos en la forma $u_1(x, t) = \varphi_1(x - at) + \psi_1(x + at)$, $u_2(x, t) = \varphi_2(x - at) + \psi_2(x + at)$.

Sustituyendo (4) en (2) y (3), obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'_1(-l - at) + \psi'_1(-l + at) = 0, \\ \varphi'_2(l - at) + \psi'_2(l + at) = 0, \\ \varphi'_1(-at) + \psi'_1(at) = \varphi'_2(-at) + \psi'_2(at), \end{array} \right\} 0 < t < +\infty, \quad (5)$$

$$\varphi_1(-at) + \psi_1(at) = \varphi_2(-at) + \psi_2(at), \quad 0 < t < +\infty, \quad (6)$$

$$\varphi_1(x) + \psi_1(x) = 0, \quad -l < x < 0, \quad (7)$$

$$-\varphi'_1(x) + \psi'_1(x) = \frac{v_1}{a}, \quad -l < x < 0, \quad (8)$$

$$\varphi_2(x) + \psi_2(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (9)$$

$$-\varphi'_2(x) + \psi'_2(x) = \frac{v_2}{a}, \quad 0 < x < l. \quad (10)$$

De las relaciones (7)–(10) hallamos

$$-\varphi'_1(z) = \psi'_1(z) = \frac{v_1}{2a}, \quad -l < z < 0, \quad (11)$$

$$-\varphi'_2(z) = \psi'_2(z) = \frac{v_2}{2a}, \quad 0 < z < l. \quad (12)$$

Las relaciones (5), (6) dan:

$$\varphi'_1(-l - z) = -\psi'_1(-l + z), \quad (13)$$

$$\psi'_2(l + z) = -\varphi'_2(l - z), \quad (14)$$

$$\varphi'_1(-z) = \varphi'_2(-z), \quad (15)$$

$$\psi'_1(z) = \psi'_2(z). \quad (16)$$

^{*}) Una parte de las condiciones de frontera (2) se cumplen sólo cuando $0 < t < t_0$, donde t_0 es el momento de terminación del impacto.

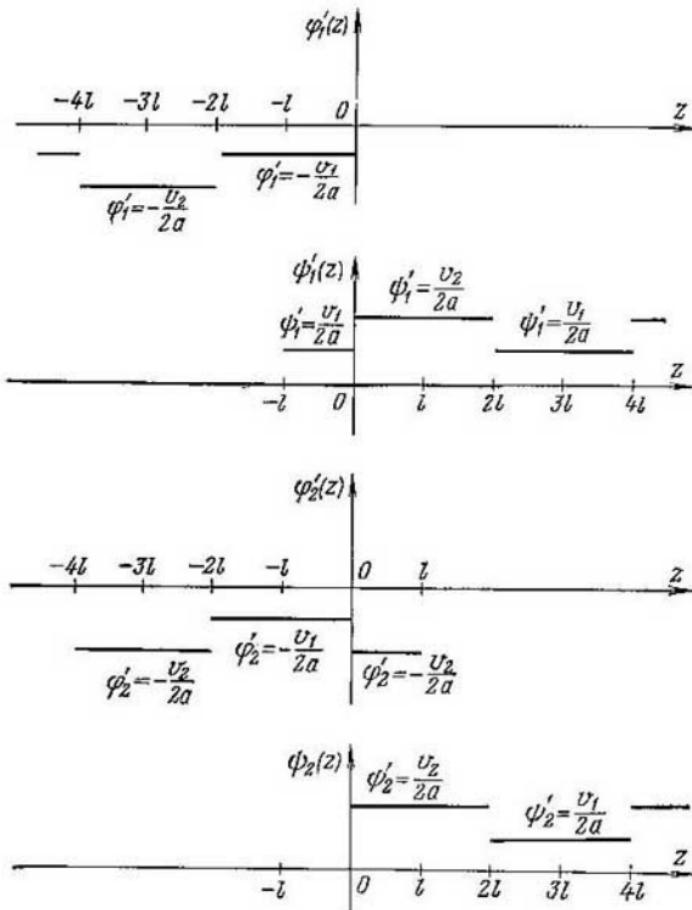


Fig. 27

De las relaciones (13) — (16) resulta que las funciones $\phi'_1(z)$, $\psi'_1(z)$, $\phi'_2(z)$, $\psi'_2(z)$ son periódicas con período $4l$; por eso es suficiente determinar cada una de las funciones en el intervalo $0 \leq z \leq 4l$; la construcción ulterior se realiza mediante la prolongación periódica. Esta determinación de las funciones $\phi'_1(z)$, $\psi'_1(z)$, $\phi'_2(z)$, $\psi'_2(z)$ mediante las relaciones (11) — (16) da para ellas los valores representados gráficamente en la fig. 27.

Utilizando las funciones halladas $\phi'_1(z)$, $\psi'_1(z)$, $\phi'_2(z)$, $\psi'_2(z)$, hallamos las expresiones para

$$u_{1t}(x, t), \quad u_{2t}(x, t), \quad u_{1x}(x, t), \quad u_{2x}(x, t).$$

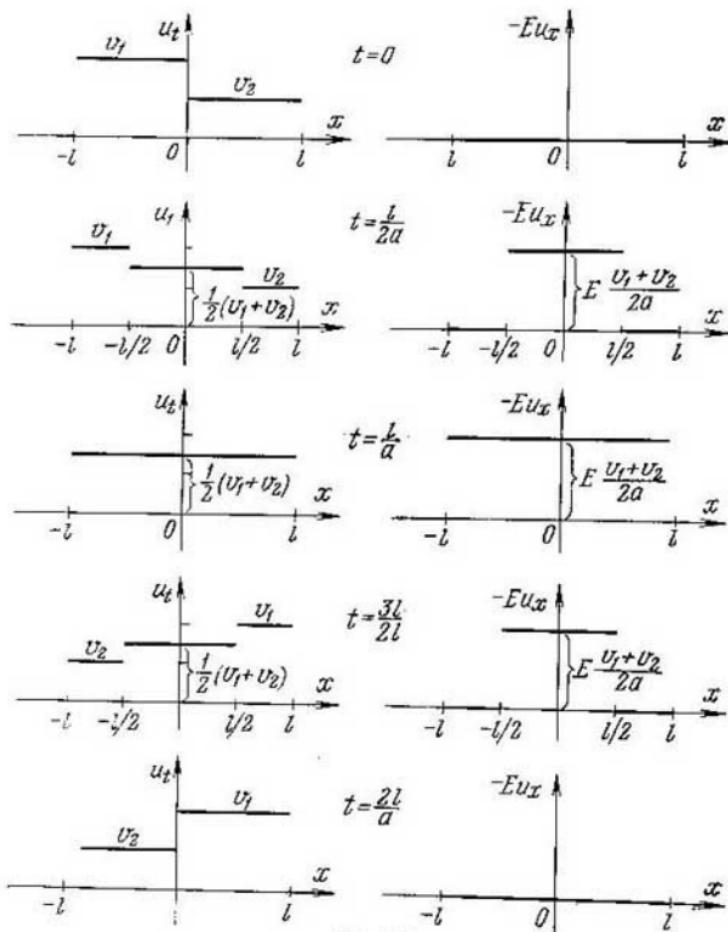


Fig. 28

En la fig. 28 está representada gráficamente la distribución de las velocidades y de las tensiones para los momentos de tiempo

$$t=0, \quad t=\frac{l}{2a}, \quad t=\frac{l}{a}, \quad t=\frac{3l}{2a}, \quad t=\frac{2l}{a}.$$

94. La solución del problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri &= 0, \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv &= 0, \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} v(0, t) &= E, \\ v(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad CR = GL, \quad (1')$$

$$v(0, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

la buscamos en la forma

$$v(x, t) = v_0(x) + v^*(x, t), \quad (4)$$

$$i(x, t) = i_0(x) + i^*(x, t), \quad (4')$$

donde $v_0(x)$ y $i_0(x)$ es la solución estacionaria del sistema (4), (4') que satisface las condiciones de frontera (2) y es el límite de la solución (4), (4') del problema de contorno (4), (4'), (2), (3) cuando $t \rightarrow +\infty$, mientras que $v^*(x, t)$ e $i^*(x, t)$, es la solución del sistema (4), (4') con las condiciones de frontera

$$v^*(0, t) = 0, \quad v^*(l, t) = 0 \quad (2')$$

y las condiciones iniciales

$$v^*(x, 0) = -v_0(x), \quad i^*(x, 0) = -i_0(x). \quad (3')$$

Obtenemos*)

$$v_0(x) = E \frac{\operatorname{sh} \sqrt{GR}(l-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{GR} l}, \quad (5)$$

$$i_0(x) = E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\operatorname{ch} \sqrt{GR}(l-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{GR} l}, \quad (5')$$

$$v^*(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} [\varphi(x-at) + \psi(x+at)], \quad (6)$$

$$i^*(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x-at) - \psi(x+at)], \quad (6')$$

donde

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + F(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - F(x)}{2}, \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

$$f(x) = -v_0(x), \quad F(x) = -\sqrt{\frac{L}{C}} i_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (8)$$

mediante las condiciones de frontera (2') las funciones $f(x)$ y $F(x)$ se prolongan, como funciones par e impar con período $2l$.

Cuando t satisface la desigualdad

$$t > \frac{L}{R} \ln \{10 [1 + \operatorname{th} \sqrt{GR}(l-x)]\}, \quad (9)$$

se cumplirá la relación

$$|i^*(x, t)| < 0.1 i_0(x), \quad (10)$$

es decir, la intensidad de la corriente en el punto x del cable se diferenciará de su valor límite cuando $t \rightarrow \infty$ a ciencia cierta no más del 10%.

95. La solución del problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \\ \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Cv = 0. \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} CR = GL. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

$$v(0, t) = E, \quad i(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad i(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

*) Véase la solución del problema 72.

es de la forma

$$v(x, t) = v_0(x) + v^*(x, t), \quad i(x, t) = i_0(x) + i^*(x, t), \quad (4)$$

donde $v_0(x)$ y $i_0(x)$ es la solución estacionaria del sistema (1), (1') que satisface las condiciones de frontera (2),

$$v_0(x) = E \frac{\operatorname{ch} \sqrt{GR}(l-x)}{\operatorname{ch} \sqrt{GR}l}, \quad i_0(x) = E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{GR}(l-x)}{\operatorname{ch} \sqrt{GR}l}, \quad (5)$$

y $v^*(x, t)$ y $i^*(x, t)$, la solución del sistema (1), (1') con las condiciones de frontera,

$$v^*(0, t) = 0, \quad i^*(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (6)$$

y las condiciones iniciales

$$v^*(x, 0) = -v_0(x), \quad i^*(x, 0) = -i_0(x), \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

$$v^*(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} [\varphi(x-at) + \psi(x+at)], \quad (8)$$

$$i^*(x, t) = e^{-\frac{R}{L}t} \sqrt{\frac{C}{L}} [\varphi(x-at) - \psi(x+at)], \quad (9)$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + F(x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - F(x)}{2}, \quad 0 < x < l, \quad (10)$$

$$f(x) = -v_0(x), \quad F(x) = -\sqrt{\frac{L}{C}} i_0(x), \quad 0 < x < l. \quad (11)$$

De las condiciones iniciales (6) se deduce que las funciones $f(x)$ y $F(x)$ se prolongan respectivamente, en forma impar y par con respecto a $x = 0$, de forma par o impar con respecto a $x = l$ y periódicamente con periodo $4l$.

Cuando t satisface la desigualdad

$$t > \frac{L}{R} \ln \{10 [1 + \operatorname{th} \sqrt{GR}(l-x)]\}, \quad (12)$$

la tensión en el punto x del cable se diferenciará de su valor límite para $t \rightarrow +\infty$ a ciencia cierta en no más del 10%.

96. a)

$$v(l, t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < T, \\ E \left\{ 1 - \left(\frac{Z-R_0}{Z+R_0} \right)^n \right\} & \text{para } (2n-1)T < t < (2n+1)T, n=1, 2, 3 \dots, \end{cases}$$

donde $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ es la resistencia ondulatoria, $T = \frac{l}{a}$, $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la velocidad de propagación por el cable de las perturbaciones electromagnéticas;

b)

$$v(l, t) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < T, \\ 2E \left\{ 1 - e^{-\kappa \left(\frac{t}{T} - 1 \right)} \right\} & \text{para } T < t < 3T, \\ -2Ee^{-\kappa \left(\frac{t}{T} - 1 \right)} + 2E \left\{ 1 - 2\kappa \left(\frac{t}{T} - 3 \right) \right\} e^{-\kappa \left(\frac{t}{T} - 3 \right)} & \text{para } 3T < t < 5T \end{cases}$$

etc., $\kappa = \frac{lC}{C_0}$.

c)

$$v(l, t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < T, \\ 2Ee^{-\epsilon(\frac{t}{T}-1)} & \text{para } T < t < 3T, \\ 2Ee^{-\epsilon(\frac{t}{T}-1)} - 2E \left\{ 1 - 2e^{\left(\frac{t}{T} - 3 \right)} \right\} e^{-\epsilon(\frac{t}{T}-3)} & \text{para } 3T < t < 5T, \end{cases}$$

etc., $\epsilon = \frac{L}{L_0}$.

Indicación. Acerca de las leyes de reflexión del extremo $x = l$ véuse la solución del problema 71.

§ 3. Método de separación de las variables

1. Vibraciones libres en un medio sin resistencia

97. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0} x, & 0 < x \leq x_0, \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l \quad (3')$$

es

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 (l-x_0)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a t}{l}. \quad (4)$$

En la expresión de $u(x, t)$ desaparecen los sumandos para los cuales $\sin \frac{n\pi x_0}{l} = 0$, es decir, ausentan los sobretones para los cuales el punto $x = x_0$ es un nudo. La energía del n -ésimo armónico es igual a

$$E_n = Mh^2 \frac{a^2 l^2}{\pi^2 n^2 x_0^2 (l-x_0)^2} \sin^2 \frac{n\pi x_0}{l}, \quad M = \rho l.$$

98. *Resolución.* Hallamos la desviación inicial de la cuerda (fig. 29); para eso es suficiente determinar el valor de h . De la condición de equilibrio (en proyecciones sobre el eje vertical) tenemos:

$$T (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) = F_0.$$

En virtud de que las desviaciones son pequeñas, $\operatorname{sen} \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{sen} \beta \approx \operatorname{tg} \beta^*$, pero

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x_0}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{h}{l-x_0}$$

*) En virtud de que las desviación es pequeña, T no depende de la desviación. Véase [7], pág. 31.

De esta manera

$$h = \frac{F_0 x_0 (l - x_0)}{l T} \quad *) , \quad (1)$$

$$u(x, t) = -\frac{2hl^2}{\pi^2 x_0 (l - x_0)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} ,$$

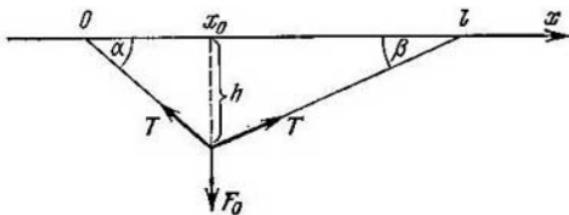


Fig. 29

donde h se determina por la fórmula (1).

$$99. \quad u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} ,$$

donde h es la desviación inicial máxima de la cuerda.

$$100. \quad u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi \delta}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} .$$

La energía del n -ésimo armónico es igual a

$$E_n = \frac{4Mv_0^2}{\pi^2 n^2} \sin^2 \frac{n\pi x_0}{l} \sin^2 \frac{n\pi \delta}{l} , \quad M = \rho l .$$

101. *Indicación.* Primeramente consideramos que el impulso I está uniformemente distribuido en el segmento $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$ de la cuerda. Entonces llegamos a la expresión de $u(x, t)$ dada en la respuesta al problema anterior, además,

$$v_0 = \frac{I}{2\delta\rho} ,$$

donde ρ es la densidad lineal de la masa de la cuerda. Pasando al límite cuando $\delta \rightarrow 0$, obtenemos la expresión para la solución del problema inicial

$$u(x, t) = \frac{2I}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l}$$

*) La desviación inicial se podía determinar, resolviendo el problema: $u''(x) = 0$, $T(u'(x_0 + 0) - u'(x_0 - 0)) = F_0$, $u(x_0 - 0) = u(x_0 + 0)$, $u(0) = u(l) = 0$.

La energía del n -ésimo armónico es igual a

$$E_n = \frac{I^2}{M} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi x_0}{l}, \quad M = \rho l.$$

La solución del problema se puede obtener también haciendo

$$u_t(x, 0) = \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0),$$

donde $\delta(x)$ es la función δ^* .

$$102. \quad u(x, t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{n\pi\delta}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{l}}{1 - \frac{(2\delta n)^2}{l^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi a t}{l}.$$

La energía del n -ésimo armónico es igual a

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{l\pi^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{(2\delta n)^2}{l^2}} \right]^2 \cos^2 \frac{n\pi\delta}{l} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi\delta}{l}.$$

$$103. \quad u(x, t) = \frac{8kl}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi a t}{2l}.$$

104. La respuesta se obtiene de la solución del problema anterior, si se hace

$$k = \frac{F_0}{ES}$$

donde E , es el módulo de elasticidad; S , el área de la sección transversal de la barra.

105. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{1}{l} \int_0^l [\varphi(z) + t\psi(z)] dz + \sum_{h=1}^{+\infty} \left(a_h \cos \frac{ak\pi t}{l} + b_h \operatorname{sen} \frac{ak\pi t}{l} \right) \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad (4)$$

donde

$$a_h = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(z) \cos \frac{k\pi z}{l} dz, \quad b_h = \frac{2}{ak} \int_0^l \psi(z) \operatorname{sen} \frac{k\pi z}{l} dz.$$

106. La solución del problema puede ser obtenida de la respuesta del problema anterior, haciendo $\varphi(x) = 0$,

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant l - \delta, \\ -\frac{1}{\delta p}, & l - \delta < x \leqslant l, \end{cases}$$

^{*}) Véase la llamada ^{**}) a la solución del problema 56.

y después pasar al límite cuando $\delta \rightarrow 0$ o hacer $\varphi(x) = 0$ y

$$\psi(x) = -\frac{I}{\rho} \delta(x - x_0)^*, \quad 0 < x_0 < l,$$

donde $\delta(x)$ es la función δ , y después pasar al límite cuando $x_0 \rightarrow l$

$$u(x, t) = -\frac{I}{\rho l} t - \frac{2I}{\pi a \rho} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \cos \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k \pi a t}{l}.$$

$$107. \quad u(x, t) = -\frac{4I}{\pi a \rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi a t}{2l}.$$

108. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l \quad (3)$$

es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \lambda_n a t + b_n \sin \lambda_n a t) \cos \lambda_n x, \quad (4)$$

donde λ_n son los valores propios del problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} X''(x) + \lambda_n^2 X(x) &= 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) &= 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

además λ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\lambda \operatorname{tg} \lambda l = h, \quad (6)$$

$X_n(x) = \cos \lambda_n x$ son las funciones propias del problema de contorno (5).

El cuadrado de la norma de la n -ésima función propia lo hallamos utilizando (6)

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{2} \left[1 + hl \left(\frac{\cos \lambda_n l}{\lambda_n l} \right)^2 \right] = \frac{l}{2} \left[1 + \frac{h}{l(\lambda_n^2 + h^2)} \right], \quad (7)$$

$$a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \varphi(z) \cos \lambda_n z dz, \quad b_n = \frac{1}{\|X_n\|^2 a \lambda_n} \int_0^l \psi(z) \cos \lambda_n z dz. \quad (8)$$

109. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \frac{F_0}{ES} x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

*) Acerca de la elección del coeficiente de $\delta(x - x_0)$ véase la llamada ** en la pág. 139.

se obtiene de la solución del problema de contorno anterior con

$$\varphi(x) = \frac{F_0}{ES} x, \quad \psi(x) = 0,$$

$$u(x, t) = \frac{2F_0}{EI\zeta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+hl) \cos \lambda_n l - 1}{\lambda_n^2 \left\{ 1 + hl \left(\frac{\cos \lambda_n l}{\lambda_n l} \right)^2 \right\}} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n at = \\ = \frac{2F_0}{EI\zeta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+hl) - \sqrt{1 + \frac{h^2}{\lambda_n^2}}}{\lambda_n^2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{\lambda_n^2} \left\{ 1 + \frac{h}{l(\lambda_n^2 + h^2)} \right\}}} \cos \lambda_n x \cos a\lambda_n t, \quad (4)$$

donde λ_n son las raíces positivas de la ecuación $\lambda \operatorname{tg} \lambda l = h$.

$$110. \quad u(x, t) = \frac{2I}{al\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \lambda_n x \sin a\lambda_n t}{\lambda_n \left\{ 1 + hl \left(\frac{\cos \lambda_n l}{\lambda_n l} \right)^2 \right\}} = \\ = \frac{2I}{al\rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \lambda_n x \sin \lambda_n at}{\lambda_n \left\{ 1 + \frac{h}{l(\lambda_n^2 + h^2)} \right\}}.$$

donde λ_n son las raíces positivas de la ecuación $\lambda \operatorname{tg} \lambda l = h$.

111. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos a\lambda_n t + b_n \sin a\lambda_n t) \sin (\lambda_n x + \varphi_n), \quad (4)$$

donde λ_n son los valores propios del problema de contorno

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (5)$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad (6)$$

$$X'(l) + hX(l) = 0, \quad (6')$$

y $X_n(x) = \sin(\lambda_n x + \varphi_n)$ son las funciones propias de este problema: λ_n son las raíces de la ecuación

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda} \right), \quad (7)$$

y

$$\varphi_n = \arctg \frac{\lambda_n}{h}. \quad (8)$$

El cuadrado de la norma de la función propia $X_n(x)$ es igual a

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2(\lambda_n x + \varphi_n) dx = \frac{(\lambda_n^2 + h^2) l + 2h}{2(h^2 + \lambda_n^2)}, \quad (9)$$

por eso

$$a_n = \frac{2(\lambda_n^2 + h^2)}{(\lambda_n^2 + h^2) l + 2h} \int_0^l \psi(z) \sin(\lambda_n z + \varphi_z) dz, \quad (10)$$

$$b_n = \frac{2(\lambda_n^2 + h^2)}{a\lambda_n(\lambda_n^2 + h^2) l + 2a\lambda_n h} \int_0^l \psi(z) \cos(\lambda_n z + \varphi_n) dz. \quad (11)$$

Indicación. 4) La ecuación (7) puede ser obtenida de siguiente modo. De la solución general de la ecuación (5)

$$X_n(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$$

satisfaciendo la condición de frontera (6), obtenemos:

$$X(x, \lambda) = C_2 \left\{ \frac{\lambda}{h} \cos \lambda x + \sin \lambda x \right\} = C_2 \bar{X}(x, \lambda). \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en la condición de frontera (6'), nos queda:

$$\left\{ \frac{\partial X(x, \lambda)}{\partial x} + hX(x, \lambda) \right\}_{x=l} = C_2 \left\{ \frac{\partial \bar{X}(x, \lambda)}{\partial x} + h\bar{X}(x, \lambda) \right\}_{x=l} = 0,$$

ya que $C_2 \neq 0$, de otra manera (12) sería una solución trivial, entonces

$$\left\{ \frac{\partial \bar{X}(x, \lambda)}{\partial x} + h\bar{X}(x, \lambda) \right\}_{x=l} = 0. \quad (13)$$

Después de la sustitución de la expresión explícita

$$\bar{X}(x, \lambda) = \frac{\lambda}{h} \cos \lambda x + \sin \lambda x \quad (13')$$

(13) se transforma en la ecuación (7)

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{h} - \frac{h}{\lambda} \right). \quad (7)$$

Esta ecuación se puede resolver aproximadamente en forma gráfica*).

Haciendo en (12) λ igual al valor propio λ_n , obtenemos la función propia correspondiente

$$X_n(x) = C_2 \bar{X}(x, \lambda_n).$$

De esta manera la función propia se determina con exactitud hasta el multiplicador constante C_2 . Este multiplicador se puede elegir de tal manera que la función $X_n(x)$ sea de la forma

$$X_n(x) = X(x, \lambda_n) = \sin(\lambda_n x + \varphi_n), \quad (14)$$

*) Acerca de la solución de la ecuación trascendente con cualquier orden de presición véase [1], pág. 204.

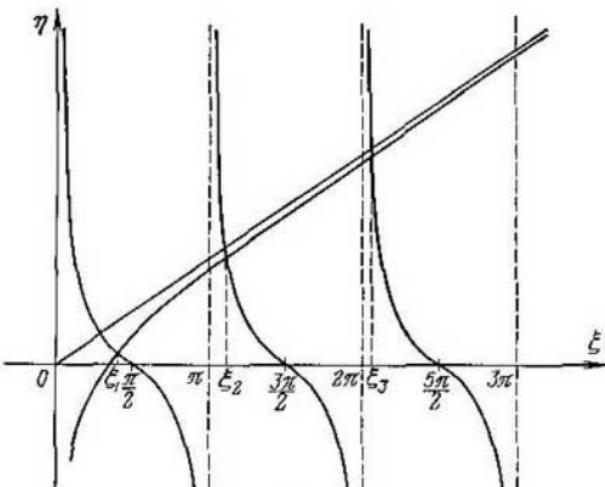


Fig. 30

donde

$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_n}{h}. \quad (14')$$

Haciendo $\lambda l = \xi$, obtenemos

$$\operatorname{ctg} \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{lh} - \frac{lh}{\xi} \right). \quad (15)$$

Designando mediante $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ las abscisas de los puntos de intersección del cotangentoide $\eta = \operatorname{ctg} \xi$ con la hipérbola $\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{lh} - \frac{lh}{\xi} \right)$, obtenemos $\lambda_n = \frac{\xi_n}{l}$ (fig. 30).

2) El cuadrado de la norma de la función propia (9) puede ser hallado mediante la integración directa

$$\| X_n \|^2 = \int_0^l \sin^2(\lambda_n x + \varphi_n) dx \quad (16)$$

o mediante el paso al límite cuando $\lambda \rightarrow \lambda_n$ en la igualdad

$$\int_0^l X(x, \lambda) X(x, \lambda_n) dx = \frac{X'_x(l, \lambda_n) X(l, \lambda) - X'_x(l, \lambda) X(l, \lambda_n)}{\lambda^2 - \lambda_n^2}. \quad (17)$$

Eliminando la indeterminación en la parte derecha de (17) cuando $\lambda \rightarrow \lambda_n$, obtenemos

$$\int_0^l X^2(x, \lambda_n) dx = \frac{X'_x(l, \lambda_n) X'_\lambda(l, \lambda_n) - X''_{x\lambda}(l, \lambda_n) X(l, \lambda_n)}{2\lambda_n}. \quad (18)$$

La igualdad (17) se obtiene de las igualdades

$$\begin{aligned} X''(x, \lambda) + \lambda^2 X(x, \lambda) &= 0, \\ X''(x, \lambda_n) + \lambda_n^2 X(x, \lambda_n) &= 0 \end{aligned}$$

mediante la multiplicación de la primera de ellas por $X(x, \lambda_n)$, la segunda, por $X(x, \lambda)$, la sustracción de los resultados y la integración posterior por partes.

Al calcular la integral (16) o el segundo miembro de la igualdad (18) es necesario utilizar la condición de frontera (6).

Nota. La ecuación (7) puede ser escrita en forma

$$\operatorname{tg} \lambda_n l = \frac{2\lambda_n h}{\lambda_n^2 - h^2}. \quad (19)$$

Cuando $h \rightarrow 0$ (los extremos libres) de (19) obtenemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{tg} \lambda_n l = 0.$$

De (14) y (14') hallamos $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_n = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{h \rightarrow 0} X_n(x) = \sin \left(\lambda_n x + \frac{\pi}{2} \right)$, por consiguiente,

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Este resultado fue obtenido directamente al resolver el problema 105. Cuando $h \rightarrow \infty$ (los extremos fijos) de (19) obtenemos

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \lambda_n l = 0.$$

De (14') y (14) hallamos

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_n = 0, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \sin(\lambda_n x + \varphi_n) = \sin \lambda_n x.$$

Por consiguiente,

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Este resultado también fue obtenido directamente al resolver el problema 97. 112. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + h_2 u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos a \lambda_n t + b_n \sin a \lambda_n t) \sin (\lambda_n x + \varphi_n), \quad (4)$$

dónde λ_n son los valores propios del problema de contorno

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (5)$$

$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(l) + h_2 X(l) = 0. \quad (6)$$

Los valores propios son las raíces de la ecuación

$$\operatorname{ctg} \lambda l = \frac{\lambda^2 - h_1 h_2}{\lambda (h_1 + h_2)}, \quad (7)$$

$X_n(x) = \sin(\lambda_n x + \varphi_n)$, las funciones propias respectivas, donde

$$\varphi_n = \arctg \frac{\lambda_n}{h_1}. \quad (8)$$

El cuadrado de la norma de la función propia es igual a

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{1}{2} \left\{ l + \frac{(\lambda_n^2 + h_1 h_2)(h_1 + h_2)}{(\lambda_n^2 + h_1^2)(\lambda_n^2 + h_2^2)} \right\}. \quad (9)$$

113. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad l = 2\pi R, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t), \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a'_n \cos \frac{2\pi n a t}{l} + b'_n \sin \frac{2\pi n a t}{l} \right) \cos \frac{2\pi n x}{l} + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a''_n \cos \frac{2\pi n a t}{l} + b''_n \sin \frac{2\pi n a t}{l} \right) \sin \frac{2\pi n x}{l},$$

$$a'_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) \cos \frac{2\pi n z}{l} dz, \quad a''_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) \sin \frac{2\pi n z}{l} dz,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$a'_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(z) dz,$$

$$b'_n = \frac{1}{n\pi a} \int_0^l \psi(z) \cos \frac{2\pi n z}{l} dz, \quad b''_n = \frac{1}{n\pi a} \int_0^l \psi(z) \sin \frac{2\pi n z}{l} dz,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b'_0 = \frac{1}{2n\pi a} \int_0^l \psi(z) dz.$$

Indicación. Sustituyendo la solución general $X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$ de la ecuación

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

en las condiciones de frontera

$$X(0) = X(l), \quad X'(0) = X'(l)$$

e igualando a cero el determinante del sistema obtenido de ecuaciones respecto a A y B , hallamos la ecuación trascendente para determinar los valores propios.

$\lambda_n = \frac{2\pi n}{l}$ resultan ser los valores propios, al mismo tiempo la sustitución del valor λ_n en las ecuaciones para determinar A y B convierte a estas en identidades para cualesquiera A y B . Por consiguiente, a cada valor propio λ_n le corresponden dos funciones propias, linealmente independientes $\cos \lambda_n x$ y $\sin \lambda_n x$; dado que $\lambda_n = \frac{2\pi n}{l}$, todas las funciones propias son ortogonales en el segmento $0 \leq x \leq l$.

En el caso cuando a un valor propio corresponden k funciones propias linealmente independientes este se llama de orden de multiplicidad k . De este modo todos los valores propios del problema en estudio son de orden de multiplicidad 2.

114. *Indicación.* La energía total de la cuerda $0 \leq x \leq l$ en el caso de las condiciones de frontera de tercer género $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, $u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$ se expresan de siguiente modo (comprobarlo):

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{T_0 u_x^2(z, t) + \rho u_t^2(z, t)\} dz + \frac{T_0 h}{2} \{u^2(l, t) + u^2(0, t)\}.$$

En el caso de las condiciones de primero y segundo género

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{T_0 u_x^2(z, t) + \rho u_t^2(z, t)\} dz$$

(véase [7], pág. 36).

Expresando la energía total de la cuerda

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t) X_n(x),$$

donde $X_n(x)$ son las funciones propias del problema de contorno correspondiente, utilizando la ortogonalidad de las funciones propias y también las condiciones de frontera, no es difícil demostrar que en el caso de las condiciones de primero, segundo y tercero género

$$E(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_n(t)$$

*) La ortogonalidad de las funciones propias, que corresponden a diferentes valores propios, se deduce de la teoría general, la ortogonalidad de $\cos \frac{2\pi n x}{l}$ y $\sin \frac{2\pi n x}{l}$ en el segmento $0 \leq x \leq l$ se verifica con el cálculo directo de la integral.

donde en el caso de las condiciones de primero y segundo género

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{ T_0 U_{n_x}^2(z, t) + \rho U_{n_t}^2(z, t) \} dz,$$

y en el caso de las condiciones de tercero género

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \{ T_0 U_{n_x}^2(z, t) + \rho U_{n_t}^2(z, t) \} dz + \frac{T_0 h}{2} (U_n^2(l, t) + U_n^2(0, t)).$$

115. Las soluciones de los problemas de contorno

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (3a)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (3b)$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = u_{xxx}(0, t) = u_{xxx}(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty \quad (3c)$$

son respectivamente:

$$a) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} + b_n \sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} \right) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) \sin \frac{n \pi z}{l} dz, \quad b_n = \frac{2l}{n^2 \pi^2 a} \int_0^l \psi(z) \sin \frac{n \pi z}{l} dz.$$

$$n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$b) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos a \lambda_n^2 t + b_n \sin a \lambda_n^2 t) X_n(x),$$

donde

$$X_n(x) = (\operatorname{sh} \lambda_n l - \operatorname{sen} \lambda_n l) (\operatorname{ch} \lambda_n x - \operatorname{cos} \lambda_n x) - \\ - (\operatorname{ch} \lambda_n l - \operatorname{cos} \lambda_n l) (\operatorname{sh} \lambda_n x - \operatorname{sen} \lambda_n x),$$

y λ_n son las raíces no negativas de la ecuación $\operatorname{ch} \lambda l \cos \lambda l = 1$;

$$c) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos a \lambda_n^2 t + b_n \sin a \lambda_n^2 t) X_n(x)$$

donde

$$X_n(x) = (\operatorname{sh} \lambda_n l - \operatorname{sen} \lambda_n l) (\operatorname{ch} \lambda_n x + \operatorname{cos} \lambda_n x) - \\ - (\operatorname{ch} \lambda_n l - \operatorname{cos} \lambda_n l) (\operatorname{sh} \lambda_n x + \operatorname{sen} \lambda_n x),$$

y λ_n son las raíces no negativas de la ecuación trascendente

$$\operatorname{ch} \lambda l \cos \lambda l = 1.$$

Notas. 1) La ortogonalidad de las funciones propias se establece del siguiente modo. Multiplicando la ecuación $X_n'''(x) - \lambda_n^4 X_n(x) = 0$ por $X_m(x)$ y la ecuación

$$X_m'''(x) - \lambda_m^4 X_m(x) = 0$$

por $X_n(x)$, sustrayendo los resultados e integrando por partes, obtenemos:

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = \frac{\{X_m'''(x) X_n(x) - X_n'''(x) X_m(x) - X_m''(x) X_n'(x) + X_n''(x) X_m'(x)\}|_{x=0}^{x=l}}{\lambda_m^4 - \lambda_n^4},$$

de donde directamente se deduce la igualdad

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n,$$

para las condiciones de frontera (3a), (3b), (3c) o para las que se obtienen mediante combinación (3a) en un extremo y (3b), en el otro, etc.

2) Para el cálculo del cuadrado de la norma de la función propia $X_n(x)$ se puede actuar análogamente a lo que se hace en la indicación al problema 111; entonces se obtiene la fórmula siguiente*), análoga a la fórmula (18) de la solución del problema 111,

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{4} \{X_n^2(l) - 2X_n'''(l) X_n'(l) + X_n''^2(l)\},$$

de donde en el caso (3b)

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{4} X_n^2(l)$$

y en el caso (3c)

$$\int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{l}{4} X_n^2(l).$$

116. Si las vibraciones de la barra son provocadas por el impulso I de golpe en el punto $x = x_0$, entonces en la respuesta al problema anterior tendremos:

$$a) \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2I \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{l}}{n^2 \pi^2 \omega_p};$$

$$b) \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{4IX_n(x_0)}{a\lambda_n^2 X_n''(l) l \rho};$$

$$c) \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{4IX_n(x_0)}{a\lambda_n^2 X_n^2(l) l \rho}.$$

*) Véase A. N. Krilov, Obras completas, t. III, parte 2, ed. de la Academia de Ciencias de la URSS, 1949, págs. 202-203 (en ruso).

2. Vibraciones libres en un medio con resistencia

Si las vibraciones de la cuerda o las vibraciones longitudinales de la barra se realizan en un medio con resistencia proporcional a la velocidad, la ecuación de las vibraciones son de la forma*)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2v u_t, \quad v > 0, \quad (1)$$

y las condiciones de frontera se escriben lo mismo que en el caso de las vibraciones en un medio sin resistencia. Escribiendo las condiciones de frontera en la forma

$$\alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\alpha_2 u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

tendremos en cuenta la posibilidad de las condiciones de primero, segundo y tercer género. Sean dadas también las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (3)$$

Separando las variables, llegamos al mismo problema de contorno

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (4)$$

$$\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \quad (5)$$

$$\alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0 \quad (5')$$

para determinar los valores propios, que en el caso cuando las oscilaciones se realizan en un medio sin resistencia. Sean λ_n y $X_n(x)$ los valores propios y las funciones propias del problema (4), (5), (5'). Para la determinación de $T_n(t)$ obtenemos la ecuación diferencial

$$T_n''(t) + 2v T_n'(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0, \quad (6)$$

que se diferencia por el término $2v T_n'(t)$ de la ecuación correspondiente al caso de las vibraciones en un medio sin resistencia. Su solución general es de la forma

$$T_n(t) = (a_n \operatorname{ch} \omega_n t + b_n \operatorname{sh} \omega_n t) e^{-vt}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \omega_n = \sqrt{v^2 - a^2 \lambda_n^2} \end{array} \right\} \quad v^2 > a^2 \lambda_n^2, \quad (7)$$

$$T_n(t) = (a_n \cos \omega_n t + b_n \operatorname{sen} \omega_n t) e^{-vt}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \omega_n = \sqrt{a^2 \lambda_n^2 - v^2} \end{array} \right\} \quad v^2 < a^2 \lambda_n^2. \quad (7')$$

$$T_n(t) = (a_n + b_n t) e^{-vt}, \quad v = a \lambda_n. \quad (7'')$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (2'), (3) es de la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t) X_n(x). \quad (8)$$

Es fácil ver que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T_n(t) = 0$$

en cada uno de los casos (7), (7'), (7'').

*) Véase el problema 15.

Los coeficientes a_n y b_n se determinan por las condiciones iniciales de siguiente modo:

$$a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \Psi(z) X_n(z) dz, \quad b_n \omega_n - v a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \Psi'(z) X_n(z) dz, \quad (9)$$

además

$$\omega_n = 1 \quad \text{cuando} \quad v = a \lambda_n.$$

$$117. \quad u(x, t) = \frac{2I^2 h e^{-vt}}{\pi^2 x_0 (l - x_0)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \Theta_n(t),$$

donde

$$\Theta_n(t) = \cosh \omega_n t + \frac{v}{\omega_n} \sinh \omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{v^2 - \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}}, \quad \frac{n\pi a}{l} < v,$$

$$\Theta_n(t) = 1 + vt, \quad \frac{n\pi a}{l} = v,$$

$$\Theta_n(t) = \cos \omega_n t + \frac{v}{\omega_n} \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} - v^2}, \quad \frac{n\pi a}{l} > v.$$

$$118. \quad u(x, t) = \frac{2I e^{-vt}}{l \rho} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \Theta_n(t),$$

donde

$$\Theta_n(t) = \sinh \omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{v^2 - \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2}} \quad \text{para} \quad \frac{n\pi a}{l} < v,$$

$$\Theta_n(t) = t \quad \text{para} \quad \frac{n\pi a}{l} = v,$$

$$\Theta_n(t) = \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} - v^2} \quad \text{para} \quad \frac{n\pi a}{l} > v.$$

$$119. \quad u(x, t) = \frac{8kl}{\pi^2} e^{-vt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \Theta_n(t),$$

donde $\Theta_n(t)$ tienen las mismas magnitudes que en la respuesta al problema 117

$$120. \quad u(x, t) = a_0 + b_0 e^{-2vt} + e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} \Theta_n(t) \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (1)$$

$$\Theta_n(t) = a_n + b_n t, \quad \frac{n\pi a}{l} = v,$$

$$\Theta_n(t) = a_n \cosh \omega_n t + b_n \sinh \omega_n t, \quad \frac{n\pi a}{l} < v,$$

$$\Theta_n(t) = a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t, \quad \frac{n\pi a}{l} > v,$$

$n = 1, 2, \dots, (2)$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) \cos \frac{n\pi z}{l} dz, \quad b_n \omega_n - v a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(z) \cos \frac{n\pi z}{l} dz,$$

$n = 1, 2, \dots$

$$b_n = -\frac{1}{2v l} \int_0^l \psi(\xi) d\xi, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) d\xi + \frac{1}{2v l} \int_0^l \psi(\xi) d\xi,$$

$$\omega_n = \sqrt{v^2 - \frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2}} \quad \text{para} \quad \frac{n\pi a}{l} < v, \quad \omega_n = 1 \quad \text{para} \dots \quad \frac{n\pi a}{l} = v,$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} - v^2} \quad \text{para} \quad \frac{n\pi a}{l} > v.$$

121. $u(x, t) = e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} \Theta_n(t) \cos \lambda_n x, \quad (1)$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_n(t) &= a_n \operatorname{ch} \omega_n t + b_n \operatorname{sh} \omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{v^2 - \lambda_n^2 a^2} \quad \text{para} \quad a \lambda_n < v, \\ \Theta_n(t) &= a_n + b_n t, \quad \omega_n(t) = 1 \quad \text{para} \quad a \lambda_n = v_0 \\ \Theta_n(t) &= a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t, \quad \omega_n = \sqrt{a^2 \lambda_n^2 - v^2} \quad \text{para} \quad a \lambda_n > v, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

λ_n son las raíces positivas de la ecuación $\operatorname{tg} \lambda l = h$,

$$a_n = \frac{2}{l \left\{ 1 + \frac{h}{l(\lambda_n^2 + h^2)} \right\}} \int_0^l \varphi(z) \cos \lambda_n z dz,$$

$$b_n \omega_n - v a_n = \frac{2}{l \left\{ 1 + \frac{h}{l(\lambda_n^2 + h^2)} \right\}} \int_0^l \psi(z) \cos \lambda_n z dz.$$

122 *). $u(x, t) = e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} \Theta_n(t) \sin (\lambda_n x + \varphi_n), \quad (1)$

dónde $\Theta_n(t)$ y ω_n se determinan según las fórmulas (2) de la respuesta al problema anterior y λ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ctg} \lambda l &= \frac{\lambda^2 - h_1 h_2}{\lambda(h_1 + h_2)}, \\ \varphi_n &= \arctg \frac{\lambda_n}{h_1}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{\left\{ l + \frac{(\lambda_n^2 + h_1 h_2)(h_1 + h_2)}{(\lambda_n^2 + h_1^2)(\lambda_n^2 + h_2^2)} \right\}} \int_0^l \varphi(z) \sin (\lambda_n z + \varphi_n) dz,$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

*) Véanse las respuestas a los problemas 111 y 112.

$$b_n \omega_n - v a_n = \frac{2}{\left\{ l + \frac{(\lambda_n^2 + h_1 h_2)(h_1 + h_2)}{(\lambda_n^2 + h_1^2)(\lambda_n^2 + h_2^2)} \right\}} \int_0^l \psi_n(z) \sin(\lambda_n z + \varphi_n) dz,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

123. La solución del problema de contorno

$$v_{xx} = CLv_{tt} + CRv_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$v(0, t) = v_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = v_0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l \quad (3)$$

es de la forma

$$v(x, t) = e^{-\frac{R}{2L}t} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin(\omega_n t + \varphi_n), \quad (4)$$

donde

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \sqrt{1 - \frac{CR^2l^2}{L\pi^2(2n+1)^2}},$$

$$a_n = \frac{4v_0}{\pi(2n+1)\sin\varphi_n}, \quad \operatorname{tg}\varphi_n = 2\omega_n \frac{L}{R}.$$

124.

$$v(x, t) = -\frac{2Q\pi}{LC^2l^2(b-a)} e^{-vt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)\cos(\omega_n t - \varphi_n)}{\omega_n \sqrt{\omega_n^2 + \sigma^2}} \times \\ \times \sin \frac{(2n+1)\pi(a+b)}{4l} \sin \frac{(2n+1)\pi(a-b)}{4l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \quad \text{para } 0 < x < a, \\ v = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right), \quad \sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2CL} - \sigma^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{\sigma}{\omega_n}.$$

125.

$$v(x, t) = -\frac{\pi^2 Q}{2LC^2l^3} e^{-vt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2}{\omega_n \sqrt{\omega_n^2 + \sigma^2}} \times \\ \times \sin \frac{(2n+1)\pi x_0}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos(\omega_n t - \varphi_n) \quad \text{para } 0 < x < x_0$$

donde los valores v , σ , ω_n , φ_n se determinan lo mismo que en la respuesta al problema anterior.

*) Se supone que $L > \frac{CR^2l^2}{\pi^2}$.

3. Vibraciones forzadas bajo la acción de fuerzas distribuidas y concentradas en un medio sin resistencia y en un medio con resistencia

La ecuación diferencial de las vibraciones forzadas de una cuerda bajo la acción de una fuerza continuamente distribuida en un medio con resistencia proporcional a la velocidad es de la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2v u_t + f(x, t),$$

además,

$$P(x, t) = \rho f(x, t)$$

es la fuerza impulsante que actúa sobre la unidad de longitud, ρ , la densidad lineal de la masa de la cuerda, $f(x, t)$, la aceleración que hubiese recibido el punto de la cuerda con la abscisa x en el momento t , si sobre ella no actuase ninguna fuerza excepto la impulsante. El término $-2v u_t$, que es la resistencia proporcional a la velocidad, desaparece si las vibraciones se realizan en un medio sin resistencia.

El problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2v u_t + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0, \quad \alpha_2 u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

puede ser reducida a problemas más simples*).

Si se consigue hallar cualquier solución particular $w(x, t)$ de la ecuación (1), que satisface las condiciones de frontera (2), la solución del problema de contorno puede ser escrita en la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad (4)$$

donde $v(x, t)$ es la solución del problema de contorno

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} - 2v v_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (5)$$

$$\alpha_1 v_x(0, t) + \beta_1 v(0, t) = 0, \quad \alpha_2 v_x(l, t) + \beta_2 v(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (6)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) - w(x, 0), \quad v_t(x, 0) = \psi(x) - w_t(x, 0), \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

que fue estudiado en los párrafos anteriores.

Análogamente son las cosas en el caso de las vibraciones forzadas bajo la acción de las fuerzas aplicadas a los extremos o a los puntos interiores de la cuerda.

126. *Solución.* Tenemos el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2v u_t + g, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0} x, & 0 < x < x_0, \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3')$$

Buscamos primeramente la solución estacionaria $w(x)$ de la ecuación (1) que satisface las condiciones de frontera (2).

*.) Véase [7], pág. 119-120; la reducción del problema en estudio a otros más simples puede realizarse análogamente.

Sustituyendo $w(x)$ en la ecuación (1), obtenemos:

$$0 = a^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + g, \quad 0 < x < l,$$

de donde

$$w(x) = -\frac{g}{2a^2} x^2 + C_1 x + C_2. \quad (4)$$

De las condiciones de frontera (2) hallamos:

$$C_2 = 0, \quad C_1 = +\frac{gl}{2a^2}. \quad (5)$$

Por consiguiente

$$w(x) = -\frac{g}{2a^2} x^2 + \frac{gl}{2a^2} x. \quad (6)$$

Ahora queda por resolver el problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 v_{xx} - 2vv_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (7)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (8)$$

$$v(x, 0) = \begin{cases} \frac{h}{x_0} x + \frac{g}{2a^2} (x^2 - lx), & 0 < x < x_0, \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0} + \frac{g}{2a^2} (x^2 - lx), & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (9)$$

$$v_{tt}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (10)$$

$u(x, t)$ se presenta en la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x). \quad (11)$$

La expresión de $v(x, t)$ se obtiene según las fórmulas (7), (7'), (7''), (8), (9) de la introducción al apartado anterior de las respuestas e indicaciones del presente párrafo.

Observemos que si no existiese en la ecuación (1) el término $-2vv_t$, la solución particular estacionaria del problema de contorno (1), (2) y, por consiguiente, las condiciones iniciales (9) y (10) para hallar la función $v(x, t)$ quedan como antes. En este caso la ecuación (7) no contiene el término $-2vv_t$ y $v(x, t)$ se halla sin dificultad.

Para la determinación de $v(x, t)$ se puede no utilizar la expresión explícita de $w(x)^*$. Sea $w(x)$ la solución estacionaria de la ecuación (1) que satisface las condiciones de frontera (2). Entonces la solución del problema de contorno (1), (2), (3) puede ser hallada de la forma (11), además $v(x, t)$ es la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 v_{xx} - 2vv_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (7')$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (8')$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) - w(x), \quad 0 < x < l, \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{x_0} x, & 0 < x < x_0, \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (9)$$

$$v_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (10)$$

*) Véase [7], págs. 120-122.

Sean $a\lambda_n > v$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces

$$v(x, t) = e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) X_n(x)$$

donde

$$\omega_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2} - v^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{v}{\omega_n} a_n, \quad a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l v(z, 0) X_n(z) dz = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l [\varphi(z) - w(z)] X_n(z) dz = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) X_n(z) dz - \frac{2}{l} \int_0^l w(z) X_n(z) dz. \end{aligned}$$

En la última diferencia la primera integral es igual a

$$\frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) X_n(z) dz = \frac{2l^2 h \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{l}}{n^2 \pi^2 v_0 (l - x_0)}.$$

La segunda integral puede ser calculada mediante la ecuación

$$X_n''(x) + \lambda_n^2 X_n(x) = 0$$

y la integración por partes

$$\begin{aligned} -\frac{2}{l} \int_0^l w(z) X_n(z) dz &= -\frac{2}{l \lambda_n^2} \int_0^l w(z) X_n''(z) dz = \\ &= -\frac{2}{l \lambda_n^2} \left[w(z) X_n'(z) \Big|_0^l - w'(z) X_n(z) \Big|_0^l + \int_0^l w'' X_n dz \right]. \end{aligned}$$

Dado que $X_n(0) = X_n(l) = 0$, $w(0) = w(l) = 0$, $a^2 w''(x) + g = 0$, entonces

$$-\frac{2}{l} \int_0^l w(z) X_n(z) dz = -\frac{2g}{\lambda_n^2 a^2 l} \int_0^l X_n(z) dz = -\frac{2g}{\pi n \lambda_n^2 a^2} [1 - (-1)^n].$$

De esta manera

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{2l^2}{\pi^2} e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{h \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{l}}{n^2 \pi^2 v_0 (l - x_0)} + \frac{g [1 - (-1)^n]}{\pi n^2 a^2} \right\} \times \\ &\quad \times \left(\cos \omega_n t + \frac{v}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}. \quad (12) \end{aligned}$$

Utilizando la expresión explícita (6) de $w(x)$, hallada anteriormente, podemos ahora escribir la expresión de la solución del problema (1), (2), (3), (3')

$$u(x, t) = -\frac{g}{2a^2} (x^2 - lx) + \frac{2l^2}{\pi^2} e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{h}{n^2 x_0 (l-x_0)} \sin \frac{n\pi x_0}{l} + \right. \\ \left. + \frac{g}{\pi n^2 a^2} [-1 + (-1)^n] \right\} \left(\cos \omega_n t + \frac{v}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (13)$$

Vemos que para $t \rightarrow +\infty$, $u(x, t) \rightarrow w(x)$, donde

$$w(x) = -\frac{g}{2a^2} (x^2 - lx),$$

es la posición de equilibrio bajo la acción de la fuerza de gravedad.

Cuando $v \rightarrow 0$ de (13) obtenemos la solución del problema para el caso en que las vibraciones se realizan en un medio sin resistencia.

127. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = v_0, \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{gx}{a^2} \left(l - \frac{x}{2} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{16gl^2}{(2n+1)^3 \pi^3} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + \right. \\ \left. + \frac{8v_0 l^2}{(2n+1)^2 \pi^2 a} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

128. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{F_0}{ES}, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{F_0}{ES} x - \frac{8F_0 l}{ES \pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l}.$$

129. Solución. Eliminando $p(x, t)$ en el problema de contorno*

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial t} + 2vw, \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} p(0, t) &= 0, \quad w(l, t) = A, \\ w(x, 0) &= 0, \quad p(x, 0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < l, \quad (4')$$

$$p(0, t) = 0, \quad w(l, t) = A, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

*) Véase el problema 5.

obtenemos el problema de contorno

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2v \frac{\partial w}{\partial t}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$w(x, 0) = 0, \quad w(l, t) = A, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3')$$

de donde hallamos

$$w(x, t) = A - \frac{4A}{\pi} e^{-vt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos \tilde{\omega}_n t + \frac{v}{\tilde{\omega}_n} \sin \tilde{\omega}_n t}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi(l-x)}{2l}, \quad (4)$$

donde

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\left[\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]^2 - v^2}.$$

La presión p en la sección $x = l$ la hallamos mediante (1)

$$\begin{aligned} p(l, t) &= p(0, t) - \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial t} - 2vw \right) dx = \\ &= - \left\{ 2vlA + \frac{4aA}{\pi} e^{-vt} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(\tilde{\omega}_n t - 2\varphi_n)}{(2n+1) \cos \varphi_n} \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

donde

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{v}{\tilde{\omega}_n}. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} 130. \quad v(x, t) &= E \frac{\operatorname{ch}(x-l)\sqrt{GR}}{\operatorname{ch} l\sqrt{GR}} - \\ &- \frac{\pi E}{LC^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)e^{-vt}}{\tilde{\omega}_n \sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + v^2}} \cos(\tilde{\omega}_n t - \varphi_n) \cos \frac{(2n+1)\pi(l-x)}{2l}, \\ v &= \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right), \quad \tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi_n &= \frac{v}{\tilde{\omega}_n}, \quad \text{además se supone que } \frac{\pi a}{l} > \left| \frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 131. \quad v(x, t) &= E \frac{\operatorname{sh}(l-x)\sqrt{GR}}{\operatorname{sh} l\sqrt{GR}} - \\ &- 2Ee^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 - RG/l^2} \left\{ \operatorname{ch} \tilde{\omega}_n t + \frac{v}{\tilde{\omega}_n} \operatorname{sh} \tilde{\omega}_n t \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}, \\ \tilde{\omega}_n &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 - \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}}, \quad v = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right), \end{aligned}$$

las $\tilde{\omega}_n$ pueden ser tanto reales como imaginarias.

132. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x_0, \quad x_0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, & u(x_0 - 0, t) &= u(x_0 + 0, t), \\ T_0 [u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t)] &= -F_0, \\ u(l, t) &= 0, & 0 < t < +\infty, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \varphi(x) - \frac{2lF_0}{\pi^2 T_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}, \quad (4)$$

donde

$$\varphi(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{F_0(l-x_0)}{T_0 l} x, & 0 < x \leq x_0, \\ \frac{F_0 x_0}{T_0 l} (l-x), & x_0 < x < l. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Indicación. La solución estacionaria de la ecuación (1) es de la forma
 $w(x) = C_1 x + C_2$

además las constantes C_1 y C_2 se determinan de modo diferente en los intervalos
 $0 < x < x_0$ y $x_0 < x < l$.

Las magnitudes C'_1 , C'_2 , C''_1 , C''_2 en el primero y segundo intervalos se hallan de las condiciones (2).

Notas a las soluciones de los problemas 133-143

1) Si la ecuación diferencial no homogénea es de la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + b \frac{\partial u}{\partial x} + \Phi(x) \sin \omega t$$

6

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + b \frac{\partial u}{\partial x} + \Phi(x) \cos \omega t,$$

entonces su solución particular se puede buscar en la forma*)

$$w(x, t) = X(x) \sin \omega t$$

o respectivamente en la forma

$$w(x, t) = X(x) \cos \omega t.$$

Cuando una de las frecuencias propias de la cuerda coincide con la frecuencia ω de la fuerza impulsante $\Phi(x) \sin \omega t$ o $\Phi(x) \cos \omega t$, entonces para $b = 0$ puede llegar el fenómeno de resonancia en el cual la amplitud de las vibraciones con la frecuencia de la fuerza impulsante crece indefinidamente en proporción al tiempo.

*) Véase también la solución del problema 133, donde esta tesis se precisa.

2) Si la ecuación diferencial no homogénea contiene el término $-2vu_t$, es decir, es de la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu - 2vu_t + \Phi(x) \operatorname{sen} \omega t \quad (6)$$

6

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \frac{\partial u}{\partial x} - 2vu_t + cu + \Phi(x) \cos \omega t, \quad (7)$$

es decir, las vibraciones se realizan en un medio con resistencia proporcional a la velocidad, entonces la solución particular de la forma indicada ya no existe. En este caso es conveniente pasar a la representación compleja del término impulsante; más exactamente, se puede buscar la solución particular de la ecuación

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + b U_x - 2vU_t + cU + \Phi(x) e^{i\omega t}$$

en la forma

$$U(x, t) = X(x) e^{i\omega t}. \quad (8)$$

La parte real de (8) será la solución particular de la ecuación (7) y la imaginaria, la solución particular de la ecuación (6).

Si la solución particular (8) satisface las condiciones de frontera del problema, entonces representa las vibraciones impulsadas que son la parte principal de la solución del problema de contorno para $t \rightarrow +\infty$, dado que las vibraciones impulsadas con otras frecuencias y las vibraciones propias, surgidas como resultado de las desviaciones y velocidades iniciales, se amortiguarán.

133. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{\Phi(x)}{\rho} \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

se reduce a la solución del problema sobre las vibraciones libres de una cuerda con los extremos fijos con condiciones iniciales dadas, si es conocida cualquier solución particular de la ecuación no homogénea (1) que satisface las condiciones de frontera (2) (véase la introducción al presente apartado).

Por eso nos detendremos en la búsqueda de la solución particular de la ecuación (1), que satisface las condiciones de frontera (2).

a) Sea $\omega \neq \frac{n\pi a}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Buscaremos la solución particular en la forma

$$U(x, t) = X(x) \operatorname{sen} \omega t. \quad (4)$$

La sustitución de (4) en (1) y (2) da

$$X'' + \frac{\omega^2}{a^2} X = -\frac{\Phi(x)}{T_0}, \quad 0 < x < l, \quad (5)$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (6)$$

de donde hallamos

$$X(x) = \left\{ \frac{a}{\omega T_0} \int_0^l \Phi(\xi) \sin \frac{\omega}{a} (l - \xi) d\xi \right\} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} - \\ - \frac{a}{\omega T_0} \int_0^x \Phi(\xi) \sin \frac{\omega}{a} (x - \xi) d\xi, \quad (7)$$

donde T_0 es la tensión de la cuerda.

b) Sea $\omega = \frac{n_0 \pi a}{l}$.

En este caso la solución particular del problema de contorno (1) y (2) se puede buscar en la forma (4) solo cuando $\Phi(x)$ y $\sin \frac{n_0 \pi a}{l} z$ son ortogonales en el segmento $0 < x < l$. Efectivamente, multiplicando ambas partes de la ecuación (5) por $\sin \frac{n_0 \pi a}{l} z$ y integrando por partes con la utilización de las condiciones de frontera (6), obtenemos

$$-\frac{1}{T_0} \int_0^l \Phi(z) \sin \frac{n_0 \pi z}{l} dz = 0.$$

b₁) Supondremos primeramente que $\Phi(x)$ y $\sin \frac{n_0 \pi x}{l}$ son ortogonales en el segmento $0 < x < l$. Entonces la solución general de la ecuación (5) es de la forma

$$X(x) = -\frac{a}{\omega T_0} \int_0^x \Phi(z) \sin \frac{\omega}{a} (x - z) dz + C_1 \sin \frac{\omega}{a} x + C_2 \cos \frac{\omega}{a} x.$$

De la condición de frontera $X(0) = 0$ hallamos que $C_2 = 0$. Dado que $\frac{\omega}{a} = \frac{n_0 \pi}{l}$, entonces $\sin \frac{\omega}{a} x$ es nulo en los extremos del segmento $0 \leq x \leq l$, por eso la constante C_1 se puede escoger arbitrariamente. Es fácil ver que en este caso la expresión

$$X(x) = -\frac{a}{\omega T_0} \int_0^x \Phi(z) \sin \frac{\omega}{a} (x - z) dz \quad (8)$$

es la solución de la ecuación (5), que satisface las condiciones de frontera (6).

b₂) Nos detendremos ahora en el caso cuando $\omega = \frac{n_0 \pi a}{l}$ pero $\Phi(x)$ y $\sin \frac{n_0 \pi x}{l}$ no son ortogonales en el segmento $0 < x < l$. En este caso la solución particular del problema de contorno (1), (2) ya no se puede buscar en la forma (4).

Supondremos que

$$\psi(x) = -\frac{\Phi(x)}{T_0} + A_{n_0} \sin \frac{n_0 \pi x}{l}, \quad (9)$$

dónde

$$A_{n_0} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\Phi(\xi)}{T_0} \sin \frac{n_0 \pi \xi}{l} d\xi. \quad (10)$$

La función $\psi(x)$ ya es ortogonal a $\sin \frac{n_0 \pi x}{l}$ en el segmento $0 < x < l$. Ahora la ecuación (1) puede ser escrita en la forma

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \frac{T_0}{\rho} \psi(x) \sin \omega t + \frac{T_0}{\rho} A_{n_0} \sin \frac{n_0 \pi x}{l} \sin \omega t. \quad (1')$$

La suma de las soluciones particulares $v(x, t)$ y $w(x, t)$ de las ecuaciones

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \frac{T_0}{\rho} A_{n_0} \sin \frac{n_0 \pi x}{l} \sin \omega t, \quad (1'')$$

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} - \frac{T_0}{\rho} \psi(x) \sin \omega t, \quad (1''')$$

que satisfacen las condiciones de frontera (2), será la solución particular de la ecuación (1) que satisface las condiciones de frontera (2).

Dado que $\sin \frac{n_0 \pi x}{l}$ y $-\frac{T_0}{\rho} \psi(x)$ son ortogonales en el segmento $0 \leq x \leq l$, entonces según (8)

$$w(x, t) = \left\{ \frac{a}{\omega} \int_0^x \psi(z) \sin \frac{\omega}{a}(x-z) dz \right\} \sin \omega t \quad (11)$$

será la solución particular de la ecuación (1'') que satisface las condiciones de frontera (2).

Si ahora se busca la solución particular de la ecuación (1'') en la forma

$$v(x, t) = T(t) \sin \frac{n_0 \pi x}{l}, \quad (12)$$

entonces las condiciones de frontera (2) se cumplirán para cualquier $T(t)$. Sustituyendo (12) en (1'') y tomando en consideración la igualdad $\omega = \frac{n_0 \pi a}{l}$, obtenemos la ecuación

$$T''(t) - \omega^2 T(t) = \frac{T_0}{\rho} A_{n_0} \sin \omega t. \quad (13)$$

Su solución particular, según se sabe de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, es de la forma

$$T(t) = t(A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (14)$$

La sustitución de (14) en (13) da

$$A = -\frac{T_0 A_{n_0}}{2\omega\rho}, \quad B = 0 \quad (15)$$

Por eso

$$T(t) = -\frac{T_0 A_{n_0}}{2\omega\rho} t \cos \omega t \quad (16)$$

y

$$w(x, t) = -\frac{T_0 A_{n_0}}{2\omega\rho} t \cos \omega t \sin \frac{n_0 \pi x}{l}. \quad (17)$$

Así pues, si $\omega = \frac{n_0 \pi a}{l}$ y las funciones $\Phi(x)$ y $\sin \frac{n_0 \pi x}{l}$ no son ortogonales en el segmento $0 < x < l$, entonces la solución particular de la ecuación (1) que satisface las condiciones de frontera (2) es de la forma

$$U(x, t) = \left\{ \frac{a}{\omega} \int_0^x \psi(z) \sin \frac{\omega}{a}(x-z) dz \right\} \sin \omega t - \frac{T_0 A_{n_0}}{2\omega\rho} t \cos \omega t \sin \frac{n_0 \pi x}{l}. \quad (18)$$

En este caso empieza el fenómeno de resonancia, la amplitud de las vibraciones con la frecuencia de la fuerza impulsante crece indefinidamente proporcional con el tiempo.

134. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{\Phi_0}{\rho} \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

68

a) para $\omega \neq \frac{n\pi a}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$u(x, t) = \frac{2\Phi_0}{\omega^2 \rho} \left\{ \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \left[\sin^2 \frac{\omega l}{2a} - \sin^2 \frac{\omega}{2a} x \right] \right\} \sin \omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi a t}{l},$$

donde

$$b_n = -\frac{4\Phi_0}{n\pi a \omega \rho} \int_0^l \left\{ \frac{\sin \frac{\omega}{a} z}{\sin \frac{\omega}{a} l} \left[\sin^2 \frac{\omega l}{2a} - \sin^2 \frac{\omega}{2a} z \right] \right\} \sin \frac{n\pi z}{l} dz;$$

b₁) para $\omega = \frac{n_0 \pi a}{l}$, donde n_0 es par,

$$u(x, t) = -\frac{2\Phi_0}{\omega^2 \rho} \sin^2 \frac{\omega}{2a} x \sin \omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi a t}{l},$$

donde

$$b_n = \frac{4\Phi_0}{n\pi a\rho\omega} \int_0^l \sin^2 \frac{\omega}{2a} z \cdot \sin \frac{n\pi z}{l} dz;$$

b₂) para $\omega = \frac{n_0\pi a}{l}$, n_0 es impar,

$$u(x, t) = \left\{ -\frac{\Phi_0}{\omega^2 \rho} \sin^2 \frac{\omega}{2a} x + \frac{4a\Phi_0}{n_0\pi\omega T_0} \int_0^x \sin \frac{n_0\pi z}{l} \sin \frac{n_0\pi(x-z)}{l} dz \right\} \times \\ \times \sin \omega t + \frac{2\Phi_0 \sin \frac{n_0\pi x}{l}}{n_0\pi\omega\rho} t \cos \omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi t}{l},$$

donde

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \left\{ -\frac{2\Phi}{\omega\rho} \sin^2 \frac{\omega}{2a} z + \frac{4a\Phi_0}{n_0\pi T_0} \int_0^z \sin \frac{n_0\pi z}{l} \times \right. \\ \times \sin \frac{n_0\pi(x-z)}{l} dz + \left. \frac{2\Phi_0}{n_0\pi\omega\rho} \sin \frac{n_0\pi z}{l} \right\} \sin \frac{n\pi z}{l} dz,$$

y T_0 es la tensión de la cuerda.

En este caso empieza el fenómeno de resonancia, la amplitud de las vibraciones con la frecuencia de la fuerza impulsante crece indefinidamente proporcional a t .

135. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$a) \text{ para } \omega \neq \frac{n\pi a}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4)$$

$$u(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi at}{l}, \quad (5)$$

donde

$$b_n = -\frac{2A\omega}{n\pi a} \int_0^l \frac{\sin \frac{\omega}{a} z}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{n\pi z}{l} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

b) para $\omega = \frac{n_0 \pi a}{l}$ (7)

$$u(x, t) = \left\{ \frac{A_{n_0}}{al} \int_0^x \left(s - A_{n_0}^* \sin \frac{n_0 \pi z}{l} \right) \sin \frac{n_0 \pi (x-z)}{l} dz \right\} \sin \omega t - \\ - \frac{AA_{n_0}^*}{2l} t \cos \omega t \sin \frac{n_0 \pi x}{l} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin \frac{n_0 \pi x}{l} \sin \frac{n_0 \pi at}{l}, \quad (8)$$

donde

$$b_n = -\frac{2}{n_0 \pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \sin \frac{n_0 \pi z}{l} dz, \quad A_{n_0}^* = \int_0^l z \sin \frac{n_0 \pi z}{l} dz,$$

$U(z, t)$ es la suma de los dos primeros términos del segundo miembro de la igualdad (8).

Indicación. 1) Para $\omega \neq \frac{n_0 \pi a}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, a la solución particular del problema de contorno (1), (2) la buscamos en la forma $U(x, t) = X(x) \sin \omega t$ y a la solución del problema (1), (2), (3) la representamos en la forma $u(x, t) = v(x, t) + U(x, t)$.

2) Para $\omega = \frac{n_0 \pi a}{l}$ es conveniente eliminar la heterogeneidad en la condición de frontera, pasándola a ecuación. Para eso hallamos la solución estacionaria $\varphi(x)$ de la ecuación (1), que satisface las condiciones de frontera $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = A$, después a la solución del problema de contorno (1), (2), (3) la buscamos en forma de

$$u(x, t) = v(x, t) + \varphi(x) \sin \omega t.$$

136. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{A}{ES} \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0$$

es

a) para $\omega \neq \frac{(2n+1)\pi a}{2l}$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, (4)

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l}, \quad (5)$$

donde

$$U(x, t) = \frac{aA}{ES\omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\cos \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t,$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz; \quad (6)$$

b) para $\omega = \frac{(2n_0+1)\pi a}{2l}$ (7)

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^{+\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l}, \quad (8)$$

donde

$$\begin{aligned} U(x, t) = & - \left\{ \frac{Aa}{ES\omega} \int_0^x \left(z - A_{n_0}^* \sin \frac{(2n_0+1)\pi z}{2l} \right) \times \right. \\ & \left. \times \sin \frac{(2n_0+1)\pi(x-z)}{2l} dz \right\} \sin \omega t - \\ & - \frac{AA_{n_0}^*}{2ES} t \cos \omega t \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$b_n = - \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz,$$

$$A_{n_0}^* = \int_0^l z \sin \frac{(2n_0+1)\pi z}{2l} dz.$$

Indicación. Véase la indicación al problema anterior.
137. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \omega^2 (x + u) + g \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t) + U(x, t),$$

donde

$$v(x) = \frac{k \sin kx}{\cos kl} \int_0^l \xi \cos k(l-\xi) d\xi - k \int_0^x \xi \sin k(x-\xi) d\xi,$$

$$w(x, t) = X(x) \sin \omega t = \frac{\mu}{2\omega^2} \left\{ \frac{\cos \left[\frac{\omega}{a} (l-x) \sqrt{\frac{2}{2}} \right]}{\cos \left(\frac{\omega}{a} l \sqrt{\frac{2}{2}} \right)} - 1 \right\} \sin \omega t,$$

$$\begin{aligned} U(x, t) = & \sum_{n=0}^{+\infty} \left[A_n \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2}} \right) t + \right. \\ & \left. + B_n \sin \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2}} \right) t \right] \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \end{aligned}$$

$$A_n = -\frac{2}{l} \int_0^l v(\xi) \sin \frac{(2n+1)\pi\xi}{2l} d\xi,$$

$$B_n = -\frac{2}{l \sqrt{\omega^2 - \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2}}} \int_0^l X(\xi) \sin \frac{(2n+1)\pi\xi}{2l} d\xi.$$

Indicación. Primeramente hallar la solución estacionaria, después, las vibraciones armónicas impulsadas con la frecuencia de la fuerza impulsante, luego, las vibraciones libres.

138. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x_0, \quad x_0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x_0 - 0, t) = u(x_0 + 0, t),$$

$$T_0 [u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t)] = A \operatorname{sen} \omega t, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es*)

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi a t}{l}, \quad (4)$$

donde

$$b_n = -\frac{2}{n\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz, \quad (5)$$

$$U(x, t) = \begin{cases} \frac{Aa}{T_0 \omega} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega(l-x_0)}{a}}{\operatorname{sen} \frac{\omega l}{a}} \operatorname{sen} \frac{\omega x}{a} \operatorname{sen} \omega t, & 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ \frac{Aa}{T_0 \omega} \frac{\operatorname{sen} \frac{\omega x_0}{a}}{\operatorname{sen} \frac{\omega l}{a}} \operatorname{sen} \frac{\omega(l-x)}{a} \operatorname{sen} \omega t, & x_0 \leqslant x \leqslant l \end{cases} \quad (6)$$

139. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < x_0, \quad x_0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(x_0 - 0, t) = u(x_0 + 0, t),$$

$$T_0 [u_x(x_0 + 0, t) - u_x(x_0 - 0, t)] = A \cos \omega t, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi a t}{l}, \quad (4)$$

*) Compárese con [7], pág. 120-130.

donde

$$a_n = -\frac{2}{l} \int_0^l U(z, 0) \sin \frac{n\pi z}{l} dz \quad (5)$$

y

$$U(x, t) = \begin{cases} \frac{Aa}{T_0 \omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a}(l-x_0)}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega x}{a} \cos \omega t, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{Aa}{T_0 \omega} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x_0}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} (l-x) \cos \omega t, & x_0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (6)$$

140. La solución del problema de contorno es

$$u(x, t) = U(x, t) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin \frac{n\pi a t}{l} \right) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{l} \int_0^l U(z, 0) \sin \frac{n\pi z}{l} dz, \\ b_n &= -\frac{2}{n\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \sin \frac{n\pi z}{l} dz \end{aligned} \quad (2)$$

y para $m\omega \neq \frac{n\pi a}{l}$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \left\{ \frac{1}{T_0} \left\{ \frac{\alpha_0 x}{2} \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \sin \frac{n\omega}{a} (l-x_0)}{n\omega \sin \frac{n\omega}{a} l} \sin \frac{n\omega x}{a} (\alpha_n \cos n\omega t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \beta_n \sin n\omega t) \right\}, \quad 0 \leq x \leq x_0 \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{1}{T_0} \left\{ \frac{\alpha_0 x_0}{2} \left(1 - \frac{x}{l} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a \sin \frac{n\omega}{a} x_0}{n\omega \sin \frac{n\omega}{a} l} \sin \frac{n\omega (l-x)}{a} (\alpha_n \cos n\omega t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_n \sin n\omega t) \right\}, \quad x_0 \leq x \leq l. \right. \end{aligned} \quad (3)$$

(3')

*) Pasando al límite para $\omega \rightarrow 0$, obtenemos para $A = F_0$ la desviación estacionaria hallada en la solución del problema 132.

Nota. Los primeros sumandos de las sumas (3), (3') corresponden a la flexión estacionaria bajo la acción de una fuerza igual a $\frac{\alpha_0}{2}$ y aplicada en el punto x_0 ; precisamente esta fuerza causa la flexión

$$U(x) = \begin{cases} \frac{1}{T_0} \frac{\alpha_0}{2} x \left(1 - \frac{x_0}{l}\right), & 0 \leq x \leq x_0, \\ \frac{1}{T_0} \frac{\alpha_0}{2} x_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right), & x_0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

141. La solución del problema de contorno*)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2vu_t + \frac{\Phi_0(x)}{\rho} \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = U(x, t) + e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi at}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi at}{l} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2}{l} \int_0^l U(z, 0) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz, \\ b_n &= \frac{vl}{n\pi a} a_n - \frac{2}{n\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \operatorname{Im} \left[\frac{a - \beta i}{(\alpha^2 + \beta^2) \alpha^2} \left\{ \left(\int_0^l \frac{\Phi_0(\xi)}{\rho} \overset{\circ}{X}(l - \xi) d\xi \right) \frac{\overset{\circ}{X}(x)}{\overset{\circ}{X}(l)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{i\omega t} \int_0^x \frac{\Phi_0(\xi)}{\rho} \overset{\circ}{X}(x - \xi) d\xi \right\} \right] ^*. \end{aligned} \quad (6)$$

$U(x, t)$ son las vibraciones establecidas,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{X}(x) &= e^{(\alpha + \beta i)x} - e^{-(\alpha + \beta i)x}, \quad \alpha + \beta i = \frac{\sqrt{\omega^2 - 2\alpha v i}}{a} = \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4 + 4v^2\omega^2} + \omega^2}{2}} - \frac{i}{a} \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4 + 4v^2\omega^2} - \omega^2}{2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

*) Véase la introducción a las respuestas del presente apartado.

**) El símbolo Im significa la parte imaginaria de un número complejo.

Nota. Sea $\tilde{Y}(x)$ la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + Ay' + By = 0, \quad A = \text{const}, \quad B = \text{const},$$

que satisface las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

entonces

$$y = \int_0^x f(\xi) \tilde{Y}(x - \xi) d\xi$$

es la solución de la ecuación

$$y'' + Ay' + By = f(x),$$

que satisface a las condiciones iniciales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

142. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2vu_t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{A}{ES} \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = U(x, t) + \\ -e^{-vt} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (4)$$

$$a_n = -\frac{2}{l} \int_0^l U(z, 0) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz;$$

$$b_n = -\frac{4vl}{(2n+1)\pi a} \int_0^l U_t(z, 0) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz. \quad (5)$$

Las vibraciones establecidas se determinan por la fórmula

$$U(x, t) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{A(\alpha - \beta t)}{ES(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{e^{(\alpha + \beta i)x} - e^{-(\alpha + \beta i)x}}{e^{(\alpha + \beta i)t} - e^{-(\alpha + \beta i)t}} e^{i\omega t} \right\}, \quad (6)$$

donde α y β tienen las mismas magnitudes que en el problema anterior.

143. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} - GRv = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad v(l, t) = E_0 \sin \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$v(x, t) = V(x, t) + e^{-vt} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} + b_n \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \right) \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (4)$$

$$a_n = -\frac{2}{l} \int_0^l V(z, 0) \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz,$$

$$b_n = \frac{2vl}{(2n+1)\pi a} a_n - \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l V_t(z, 0) \cos \frac{(2n+1)\pi a}{2l} dz, \quad (5)$$

$$V(x, t) = \operatorname{Im} \left\{ E_0 \frac{e^{(\alpha+\beta i)x} + e^{-(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha+\beta i)t} + e^{-(\alpha+\beta i)t}} e^{i\omega t} \right\}, \quad (6)$$

$$\alpha + \beta i = \pm \sqrt{p\omega^2 - r - 2q\omega i}, \quad p = LC, \quad 2q = RC + GL, \quad r = GR, \quad v = \frac{GL + CR}{2CL}.$$

144. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (CR + GL) \frac{\partial v}{\partial t} - GRv = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = E \operatorname{sen} \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$v(x, t) = V(x, t) + e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \mu_n t + b_n \operatorname{sen} \mu_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \mu_n &= \sqrt{\frac{p(r + \lambda_n^2) - q^2}{p^2}}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \\ a_n &= -\frac{2}{l} \int_0^l V(z, 0) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz, \\ b_n &= \frac{vl}{n\pi a} a_n - \frac{2}{n\pi a} \int_0^l V_t(z, 0) \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$V(x, t) = \operatorname{Im} \left\{ E \frac{e^{(\alpha+\beta i)x} - e^{-(\alpha+\beta i)x}}{e^{(\alpha+\beta i)t} - e^{-(\alpha+\beta i)t}} e^{i\omega t} \right\}, \quad (6)$$

$$\pm (\alpha + \beta i) \Rightarrow \sqrt{p\omega^2 - r - 2q\omega i}, \quad p = CL, \quad 2q = CR + GL, \quad r = GR, \quad (7)$$

$$v = \frac{CR + GL}{2CL}$$

145. Del problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \left(\frac{\partial w}{\partial t} + 2\alpha w \right), \\ -\frac{\partial p}{\partial t} &= \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$p(0, t) = 0, \quad w(l, t) + h \frac{\partial w(l, t)}{\partial x} = A e^{i\omega t}, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

hallamos las vibraciones estables de la presión con frecuencia ω en la sección $x=l$.

$$p(l, t) = A \lambda r(\omega) R(\omega) e^{i(\omega t + \delta)}, \quad (3)$$

$$r(\omega) = \sqrt[4]{1 + 4 \frac{\alpha^2}{\omega^2}}, \quad (4)$$

$$R(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sin 2\varphi}{\operatorname{ch} 2\psi - \cos 2\psi} - \beta\varphi \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sh} 2\psi}{\operatorname{ch} 2\psi - \cos 2\psi} + \beta\psi \right)^2}}, \quad (5)$$

$$\varphi = \frac{l}{\lambda} \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4 + 2\alpha^2\omega^2} - \omega^2}{2}}, \quad \psi = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\sqrt{\omega^4 + 2\alpha^2\omega^2} - \omega^2}{2}},$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \theta_2, \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\psi}{\varphi}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{\operatorname{sh} 2\psi}{\operatorname{ch} 2\psi - \cos 2\psi} + \beta\psi, \quad \beta = \frac{h}{\lambda}.$$

146. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{1}{\rho} \Phi(x) t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{1}{T_0 l} \left\{ l \int_0^x d\xi \int_0^l \Phi(z) dz - x \int_0^l d\xi \int_0^x \Phi(z) dz \right\} t + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi a t}{l}, \quad (4)$$

donde

$$b_n = -\frac{2}{n\pi a T_0 l} \int_0^l \left\{ l \int_0^x d\xi \int_0^l \Phi(z) dz - x \int_0^l d\xi \int_0^x \Phi(z) dz \right\} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (5)$$

147. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{A}{ES} t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{A}{ES} xt + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{2l}, \quad (4)$$

$$b_n = -\frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l \frac{Az}{ES} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz. \quad (5)$$

148. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{1}{\rho} \Phi(x) t^m, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad m > -1. \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es*)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n} \int_0^t \tau^m \sin \omega_n(t-\tau) d\tau, \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l},$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\Phi(z)}{\rho} \sin \frac{n\pi z}{l} dz. \quad (5)$$

149. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{A}{ES} t^m, \quad 0 < t < +\infty, \quad m > -1, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{Axt^m}{ES} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (4)$$

*) Véase la indicación al problema siguiente.

donde

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n} \int_0^t \tau^{m-2} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau, \quad \omega_n = \frac{(2n+1)\pi a}{2l}, \quad (5)$$

$$\alpha_n = -\frac{2Am(m-1)}{ESl} \int_0^l z \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz. \quad (6)$$

Indicación. Para eliminar la no homogeneidad en la condición de frontera buscamos la solución del problema de contorno (1), (2), (3) en la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{Axt^m}{ES}, \quad (7)$$

lo que lleva al problema de contorno

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} - \frac{Axt^{m-2}m(m-1)}{ES}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (8)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (9)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (10)$$

La solución particular del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$\alpha_1 u_x(0, t) + \beta_1 u(0, t) = 0,$$

$$\alpha_2 u_x(l, t) + \beta_2 u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

se puede buscar en la forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) X_n(x), \quad (3')$$

donde $u_n(t)$ son las funciones que deben ser determinadas y $X_n(x)$, las funciones propias del problema de contorno

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda^2 X(x) &= 0, \quad 0 < x < l, \\ \alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) &= 0, \quad \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (11)$$

Para eso el término impulsante $f(x, t)$ también debe ser desarrollado en serie por las funciones propias de este problema, es decir, representado en la forma

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) X_n(x), \quad (12)$$

donde

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l f(z, t) X_n(z) dz. \quad (13)$$

$$150. \text{ a) Para } \omega \neq \omega_n = \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{(\omega_n^2 - \omega^2) \omega_n} (\omega_n \sin \omega_n t - \omega \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}; \quad (1)$$

b) para $\omega = \omega_{n_0} = \frac{n_0 \pi a}{l}$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{(\omega_n^2 - v^2) \omega_n} (\psi_n \operatorname{sen} \omega_n t - \omega \operatorname{sen} \omega_n t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{\alpha_{n_0}}{2\omega_{n_0}} (\operatorname{sen} \omega_{n_0} t - \omega_{n_0} t \cos \omega_{n_0} t) \operatorname{sen} \frac{n_0 \pi x}{l}, \quad (2)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\Phi(z)}{\rho} \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} dz. \quad (3)$$

Nota. Aquí, a diferencia de la solución del problema 433 las vibraciones con la frecuencia de la fuerza impulsante ya no están dadas en forma cerrada sino de serie.

151.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

donde

$$u_n(t) = \frac{\alpha n}{\tilde{\omega}_n} \int_0^t e^{-v(t-\tau)} \operatorname{sen} \omega \tau \operatorname{sen} \tilde{\omega}_n(t-\tau) d\tau, \quad (2)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\Phi(x)}{\rho} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} dx,$$

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 - v^2}. \quad (3)$$

Aquí se supone que $\omega_n > v$. La búsqueda de la expresión de $u_n(t)$ para $\omega_n \leq v$ no presenta dificultad.

152.

$$u(x, t) = \frac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{n\pi\delta}{l} \cos \frac{\omega_n\tau}{2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{l}}{\left[1 - \left(\frac{2n\delta}{l}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n\omega\tau}{l}\right)^2\right]} \times \\ \times \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \omega_n \left(t - \frac{\tau}{2}\right),$$

donde

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}.$$

153. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0) \delta(t)^*, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{2I}{\rho l} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l}. \quad (4)$$

154. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2v u_t + \frac{1}{\rho} \Phi(x) t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

donde

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\omega_n} \int_0^t \tau e^{-v(t-\tau)} \sin \tilde{\omega}_n(t-\tau) d\tau, \quad \tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 - v^2}, \quad (5)$$

$$\alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\Phi(z)}{\rho} \sin \frac{n\pi z}{l} dz, \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l} \quad (6)$$

155. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2v u_t + \frac{I}{\rho} \delta(x - x_0) \delta(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

*) $\delta(t)$ es la función δ unilateral

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow 0} \varphi_n(t), \quad \varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0, \\ n, & 0 < t < 1/n, \\ 0 & \frac{1}{n} < t < +\infty; \end{cases}$$

Para más detalles sobre la función δ véase [7], pág. 300-305.*) Se supone que $\omega_n > v$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Si para los valores suficientemente pequeños n $\omega_n \ll v$, entonces la solución incluirá los términos con los multiplicadores $\sin \tilde{\omega}_n t$ y el término con el multiplicador t .

es

$$u(x, t) = \frac{2I}{\rho l} e^{-vt} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\omega}_n} \operatorname{sen} \tilde{\omega}_n t \operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

donde

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\omega_n^2 - v^2}, \quad \omega_n = \frac{n\pi a}{l}. \quad (5)$$

156. Para $v_0 \neq \frac{n\pi a}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -\frac{2Pl^4v_0}{\rho S a \pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{a^2 \pi^2 n^2 - v_0^2 l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} + \\ & + \frac{2Pl^3}{\rho S \pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{a^2 \pi^2 n^2 - v_0^2 l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi v_0 t}{l}, \quad 0 < t < \frac{l}{v_0}, \\ u(x, t) = & -\frac{2Pl^4v_0}{\rho S a \pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{a^2 \pi^2 n^2 - v_0^2 l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \times \\ & \times \left[\left(1 - (-1)^n \pi \cos \frac{n^2 \pi^2 a}{lv_0} \right) \operatorname{sen} \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} + \right. \\ & \left. + (-1)^n \pi \operatorname{sen} \frac{n^2 \pi^2 a}{lv_0} \cos \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} \right], \quad \frac{l}{v_0} < t < +\infty. \end{aligned}$$

Para $v_0 = \frac{n\pi a}{l}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} u(x, t) = & -\frac{2Pl^4v_0}{\rho S a \pi^4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \frac{v_0 l}{\pi a}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{a^2 \pi^2 n^2 - v_0^2 l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} + \\ & + \frac{2Pl^3}{\rho S \pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \frac{v_0 l}{\pi a}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{a^2 \pi^2 n^2 - v_0^2 l^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \operatorname{sen} \frac{n\pi v_0 t}{l} + \\ & + \frac{Pa}{\rho S l v_0^2} \left(\frac{a}{v_0^2} \operatorname{sen} \frac{v_0^2 t}{a} - t \cos \frac{v_0^2 t}{a} \right), \quad 0 < t < \frac{l}{v_0}, \end{aligned}$$

$$u(x, t) = -\frac{2Pl^4v_0}{\rho Sa\pi^4} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq \frac{v_0 l}{\pi a}}}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{a^2\pi^2n^2 - v_0^2l^2} \sin \frac{n\pi x}{l} \times$$

$$\times \left[\left(1 - (-1)^n \pi \cos \frac{n^2\pi^2 a}{lv_0} \right) \sin \frac{n^2\pi^2 a t}{l^2} + (-1)^n \sin \frac{n^2\pi^2 a}{lv_0} \cos \frac{n^2\pi^2 a t}{l^2} \right] +$$

$$+ \frac{Pa}{\rho Slv_0^2} \left[\left(\frac{a \left(1 - \cos \frac{2v_0 l}{a} \right)}{2v_0} \right) - \frac{l \sin \frac{2v_0 l}{a}}{2v_0} \sin \frac{v_0^2 t}{a} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{a \sin \frac{2v_0 l}{a}}{2v_0^2} - \frac{l}{v_0} \right) \cos \frac{v_0^2 t}{a} \right], \quad \frac{l}{v_0} < t < +\infty.$$

Indicación: utilizar la función δ de impulso.

157. Para $\omega_n = \frac{n^2\pi^2 a}{l^2} \neq \left| \omega \left(1 \pm \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right) \right|$,

$$u(x, t) = \frac{P_0}{\rho Sl\omega^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{\cos \frac{n^2\pi^2 a}{l^2} t - \cos \left(1 + \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right) \omega t}{\left(\frac{n^2\pi^2 a}{\omega l^2} \right)^2 - \left(1 + \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos \frac{n^2\pi^2 a}{l^2} t - \cos \left(1 - \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right) \omega t}{\left(\frac{n^2\pi^2 a}{\omega l^2} \right)^2 - \left(1 - \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right)^2} \right\} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < t < \frac{l}{v_0},$$

$$u(x, t) = \frac{P_0}{\rho Sl\omega^2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{l}{v_0} < t < +\infty,$$

donde

$$A_n = u_n \left(\frac{l}{v_0} \right) \sin \frac{\omega_n l}{v_0} - u_n \left(\frac{l}{v_0} \right) \omega_n \cos \frac{\omega_n l}{v_0},$$

$$B_n = u_n \left(\frac{l}{v_0} \right) \frac{\cos \frac{\omega_n l}{v_0}}{\omega_n} + u_n \left(\frac{l}{v_0} \right) \sin \frac{\omega_n l}{v_0}$$

y

$$u_n \left(\frac{l}{v_0} \right) = \frac{(-1)^n \omega \left(1 + \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right) \sin \frac{\omega l}{v_0} - \omega_n \sin \frac{\omega_n l}{v_0}}{\left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 - \left(1 + \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right)^2} -$$

$$- \frac{(-1)^n \omega \left(1 - \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right) \sin \frac{\omega l}{v_0} - \omega_n \sin \frac{\omega_n l}{v_0}}{\left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 - \left(1 - \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right)^2},$$

$$u_n \left(\frac{l}{v_0} \right) = \left(\cos \frac{\omega_n l}{v_0} - (-1)^n \cos \frac{\omega l}{v_0} \right) \times \\ \times \left[\frac{1}{\left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 - \left(1 + \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{\omega_n}{\omega} \right)^2 - \left(1 - \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right)^2} \right].$$

Para $\omega_n = \omega \left| 1 \pm \frac{n\pi v_0}{\omega l} \right|$ los valores de los sumandos correspondientes en la suma se deben calcular según la regla de L'Hospital.

158. a) Para $\omega \neq \frac{n^2 \pi^2 a}{l^2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$u(x, t) = -\frac{2\omega P_0 l^5}{\alpha \pi^2 \rho S} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{l}}{n^2 (n^4 \pi^4 a^2 - \omega^2 l^4)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} + \\ + \frac{2P_0 l^3}{\rho S} \sin \omega t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{l}}{n^2 \pi^4 a^2 - \omega^2 l^4} \sin \frac{n\pi x}{l};$$

b) para $\omega = \frac{n_0^2 \pi^2 a}{l^2}$

$$u(x, t) = -\frac{2\omega P_0 l^5}{\alpha \pi^2 \rho S} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{l}}{n^2 (n^4 \pi^4 a^2 - \omega^2 l^4)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2} + \\ + \frac{2P_0 l^3}{\rho S} \sin \omega t \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x_0}{l}}{n^2 \pi^4 a^2 - \omega^2 l^4} \sin \frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{P_0}{\rho S \omega^2} \sin \frac{n_0 \pi x_0}{l} \sin \omega t \sin \frac{n_0 \pi x}{l} - \frac{P_0}{\rho S t \omega} t \cos \omega t \sin \frac{n_0 \pi x_0}{l} \sin \frac{n_0 \pi x}{l}.$$

El crecimiento no acotado de la amplitud de las vibraciones con frecuencia $\omega = \frac{n_0^2 \pi^2 a}{l^2}$ tendrá lugar sólo en el caso cuando $\sin \frac{n_0 \pi x_0}{l} \neq 0$, es decir, el punto de aplicación de la fuerza no coincide con ninguno de los nudos del armónico correspondiente al número $\lambda_{n_0} = \frac{n_0 \pi}{l}$.

Indicación. Véase la indicación al problema 149.

Nota. Las vibraciones forzantes con la frecuencia ω pueden ser halladas en la forma explícida análogamente a lo hecho en las soluciones de los problemas 134 y 139.

De este modo para $\omega \neq \frac{n^2\pi^2 a}{l}$, $n = 1, 2, \dots$, para las vibraciones con la frecuencia ω se obtiene la siguiente expresión

$$U(x, t) = \frac{2Pl^3}{a^2\pi^4\rho S} \times \begin{cases} -\frac{\pi^4}{2\beta^3 l^3} \frac{\operatorname{sh} \beta(l-x_0)}{\operatorname{sh} \beta l} \operatorname{sh} \beta x + \frac{\pi^4}{2\beta^3 l^3} \frac{\operatorname{sen} \beta(l-x_0)}{\operatorname{sen} \beta l} \operatorname{sen} \beta x, & 0 < x \leqslant x_0, \\ -\frac{\pi^4}{2\beta^3 l^3} \frac{\operatorname{sh} \beta x_0}{\operatorname{sh} \beta l} \operatorname{sh} \beta(l-x) + \frac{\pi^4}{2\beta^3 l^3} \frac{\operatorname{sen} \beta x_0}{\operatorname{sen} \beta l} \operatorname{sen} \beta(l-x), & x_0 < x < l, \quad \beta^2 = \frac{\omega}{a}. \end{cases}$$

$$159. \quad u(x, t) = \frac{2Pl^3}{\rho S} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi x_0}{l} \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_n)}{\sqrt{(n^2\pi^4 a^2 - \omega^2 l^4)^2 + 4\nu^2 \omega^2 l^8}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l},$$

donde $\operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{2\nu\omega}{a^2\pi^4 n^4 - \omega^2 l^4}$ y ν es el "coeficiente de rozamiento" de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\nu \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

$$160. \quad u(x, t) = \frac{2F_0 l^3}{EJ} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos \frac{\mu_n^2 a^2}{l^2} t}{\mu_n^4 (\operatorname{sh} \mu_n + \operatorname{sen} \mu_n)} X_n(x), \quad (1)$$

donde

$$X_n(x) = (\operatorname{ch} \mu_n + \cos \mu_n) \left(\operatorname{sh} \mu_n \frac{x}{l} - \operatorname{sen} \mu_n \frac{x}{l} \right) - (\operatorname{sh} \mu_n + \operatorname{sen} \mu_n) \left(\operatorname{ch} \mu_n \frac{x}{l} - \cos \mu_n \frac{x}{l} \right), \quad (2)$$

μ_n son las raíces positivas de la ecuación

$$\operatorname{ch} \mu \cos \mu = -1. \quad (3)$$

161. Para $t < T$ la respuesta coincide con la respuesta al problema anterior. Para $t > T$

$$u(x, t) = \frac{2F_0 l^3}{EJ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\mu_n^2 a^2}{l^2} (t-T) - \cos \frac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2}}{\mu_n^4 (\operatorname{sh} \mu_n + \operatorname{sen} \mu_n)} X_n(x),$$

donde μ_n y $X_n(x)$ tienen el mismo sentido que en el problema anterior.

$$162. \quad u(x, t) = \frac{2F_0 l a^2}{\omega E J} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X_n(x)}{\mu_n^4 (\operatorname{sh} \mu_n + \operatorname{sen} \mu_n)} \frac{\operatorname{sen} \frac{\mu_n^2 a^2}{l^2} t - \frac{\mu_n^2 a^2}{\omega l^2} \operatorname{sen} \omega t}{1 - \left(\frac{\mu_n^2 a^2}{\omega l^2} \right)^2},$$

donde μ_n y $X_n(x)$ tienen el mismo sentido que en el problema 160.

163.

$$u(x, t) =$$

$$= \frac{f_0 l^2 a^2}{\omega E J} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \mu_n - 2 \operatorname{ch} \mu_n \operatorname{sen} \mu_n + \operatorname{sen} \mu_n}{\mu_n^3 \operatorname{sh}^2 \mu_n \operatorname{sen}^2 \mu_n} \frac{\operatorname{sen} \frac{\mu_n^2 a^2}{l^2} t - \frac{\mu_n^2 a^2}{\omega l^2} \operatorname{sen} \omega t}{1 - \left(\frac{\mu_n^2 a^2}{\omega l^2} \right)^2} X_n(x)$$

donde

$$X_n(x) = \operatorname{sh} \mu_n \operatorname{sen} \frac{\mu_n x}{l} - \operatorname{sen} \mu_n \operatorname{sh} \frac{\mu_n x}{l},$$

μ_n son las raíces positivas de la ecuación $\operatorname{tg} \mu = \operatorname{th} \mu$ ($\mu_1 < \mu_2 < \dots$).

4. Vibraciones en el caso de heterogeneidad del medio y otras condiciones que conducen a ecuaciones con coeficientes variables; consideración de las fuerzas y masas concentradas

164. *Solución.* El desplazamiento longitudinal $u(x, t)$ de los puntos de la barra es la solución del problema de contorno

$$\rho(x) u_{tt} = (E(x) u_x)_x, \quad 0 < x < x_0, \quad x_0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x_0 - 0, t) = u(x_0 + 0, t), \quad E(x_0 - 0) u_x(x_0 - 0, t) = E(x_0 + 0) u_x(x_0 + 0, t), \quad (2')$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{h_0} x, & 0 < x < x_0, \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) \equiv 0, \quad 0 < x < l, \quad (3')$$

$$E(x) = \begin{cases} \bar{E}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{\bar{E}}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} \bar{\rho}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{\bar{\rho}}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (4)$$

$\bar{\rho}, \bar{\bar{\rho}}, \bar{E}, \bar{\bar{E}}$ son constantes.

Las soluciones particulares del problema de contorno (1), (2), (4) las buscamos en la forma

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (1), (2) después de la separación de variables, obtenemos

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (6)$$

$$(E(x) X'(x))' + \omega^2 \rho(x) X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (7)$$

$$X(0) = X(l) = 0, \quad X(x_0 - 0) = X(x_0 + 0), \quad (7')$$

$$\bar{E} X'(x_0 - 0) = \bar{\bar{E}} X'(x_0 + 0). \quad (7'')$$

De la teoría general se sabe*) que el problema de contorno (7'), (7'') tiene una sucesión infinita de frecuencias propias

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \dots$$

y de funciones propias correspondientes a estas

$$X_1(x), \quad X_2(x), \dots, \quad X_n(x), \dots,$$

ortogonales respecto al peso $\rho(x)$ en el segmento $0 \leq x \leq l$. La solución de la ecuación (7) que satisface las condiciones (7') es de la forma

$$X(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\omega}{\bar{a}} x}{\sin \frac{\omega}{\bar{a}} x_0} & \text{para } 0 < x < x_0, \quad \bar{a} = \sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{\rho}}}, \\ \frac{\sin \frac{\omega}{\bar{a}} (l-x)}{\sin \frac{\omega}{\bar{a}} (l-x_0)} & \text{para } x_0 < x < l, \quad \bar{a} = \sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{\rho}}}. \end{cases} \quad (8)$$

Satisfaciendo la condición (7''), obtenemos la ecuación trascendente

$$\frac{1}{V \bar{E} \bar{\rho}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{\bar{a}} x_0 = \frac{1}{V \bar{E} \bar{\rho}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{\bar{a}} (x_0 - l) \quad (9)$$

para la determinación de las frecuencias propias ω_n .

Haciendo en (8) $\omega = \omega_n$, obtenemos las funciones propias de nuestro problema de contorno

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\omega_n}{\bar{a}} x}{\sin \frac{\omega_n}{\bar{a}} x_0} & \text{para } 0 < x < x_0 \\ \frac{\sin \frac{\omega_n}{\bar{a}} (l-x)}{\sin \frac{\omega_n}{\bar{a}} (l-x_0)} & \text{para } x_0 < x < l. \end{cases} \quad (10)$$

El cuadrado de la norma de la función propia es

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx = \rho \int_0^{x_0} \frac{\sin^2 \frac{\omega_n}{\bar{a}} x}{\sin^2 \frac{\omega_n}{\bar{a}} x_0} dx + \rho \int_{x_0}^l \frac{\sin^2 \frac{\omega_n}{\bar{a}} (l-x)}{\sin^2 \frac{\omega_n}{\bar{a}} (l-x_0)} dx = \\ = \frac{\rho x_0}{2 \sin^2 \frac{\omega_n}{\bar{a}} x_0} + \frac{\rho (l-x_0)}{2 \sin^2 \frac{\omega_n}{\bar{a}} (x_0-l)}, \quad (11)$$

*) Véase [7], págs. 473-474.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n X_n(x) \cos \omega_n t, \quad (12)$$

$$a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) \varphi(x) X_n(x) dx = \frac{h}{\omega_n^2 \|X_n\|^2} \left(\frac{\bar{E}}{x_0} + \frac{\bar{E}}{l-x_0} \right). \quad (13)$$

165. $u(x, t) = X(x) \sin \omega t$, $X_n(x) =$

$$= \begin{cases} \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} x_0} & \text{para } 0 < x < x_0, \\ \frac{\frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l-x) + F_0 \sin \frac{\omega}{a} (x-x_0)}{\frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} (l-x_0)} & \text{para } x_0 < x < l. \end{cases}$$

166. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) X_n(x)$,

$$a_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) \varphi(x) X_n(x) dx, \quad b_n = \frac{1}{\omega_n \|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) \psi(x) X_n(x) dx,$$

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\omega_n}{a} x}{\sin \frac{\omega_n}{a} x_0} & \text{para } 0 < x < x_0, \\ \frac{\frac{\omega_n}{a} \cos \frac{\omega_n}{a} (l-x) + h \sin \frac{\omega_n}{a} (l-x)}{\frac{\omega_n}{a} \cos \frac{\omega_n}{a} (l-x_0) + h \sin \frac{\omega_n}{a} (l-x_0)} & \text{para } x_0 < x < l, \end{cases}$$

ω_n son las raíces positivas de la ecuación trascendente

$$p\omega = -\operatorname{tg} q\omega,$$

donde

$$p = \frac{1}{ha}, \quad q = \frac{l-x_0}{a} + \frac{x_0}{a}.$$

$$167. u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n X_n(x) \cos a\lambda_n t, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\alpha^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad (2)$$

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n x_0}, & 0 < x < x_0, \\ \frac{\sin \lambda_n (l-x)}{\sin \lambda_n (l-x_0)}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (3)$$

λ_n son los valores propios del problema de contorno y son las raíces de la ecuación

$$\operatorname{ctg} \lambda_n x_0 - \operatorname{ctg} \lambda_n (l-x_0) = \frac{M}{\rho} \lambda_n. \quad (4)$$

Las funciones propias $X_n(x)$ son ortogonales en el segmento $0 < x < l$ con peso $\rho(x) = \rho + M\delta(x - x_0)$, donde ρ es la densidad lineal de la masa de la cuerda y $\delta(x - x_0)$, la función δ de impulso; de esta manera

$$\int_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = \rho \int_0^l X_m(x) X_n(x) dx + \\ + M X_m(x_0) X_n(x_0) = 0 \quad \text{para } m \neq n \quad (5)$$

el cuadrado de la norma de la función propia es

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l \rho(x) X_n^2(x) dx = \frac{\rho x_0}{2 \sin^2 \lambda_n x_0} + \frac{\rho(l-x_0)}{2 \sin^2 \lambda_n (l-x_0)} + \frac{M}{2}, \quad (6)$$

$$a_n = \frac{\int_0^l \rho(x) \varphi(x) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2} = \frac{\rho \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx + M \varphi(x_0) X_n(x_0)}{\|X_n\|^2} \quad (7)$$

de donde obtenemos

$$a_n = \frac{\frac{\rho h}{\lambda_n^2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{l-x_0} \right)}{\|X_n\|^2}. \quad (8)$$

Indicación. Para el cálculo de (6) y (8) se debe utilizar (4). Las fórmulas (6) y (7) pueden ser obtenidas sin la utilización de la función δ , como se indica en [7], págs. 169-172.

$$168. \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \{a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t\} X_n(x),$$

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\omega_n}{a} x}{\sin \frac{\omega_n}{a} x_0}, & 0 \leq x \leq x_0, \\ \frac{\cos \frac{\omega_n}{a} l - x}{\cos \frac{\omega_n}{a} (l - x_0)}, & x_0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

ω_n son las raíces de la ecuación

$$\bar{S} \sqrt{\bar{E}\rho} \operatorname{ctg} \frac{\omega_n}{a} x_0 - \bar{S} \sqrt{\bar{E}\rho} \operatorname{tg} \frac{\omega_n}{a} (l - x_0) = M \omega_n,$$

$$a_n = \frac{\int_{x_0}^l \varphi(x) \sin^2 \frac{\omega_n}{a} x dx + \int_{x_0}^l \psi(x) \cos^2 \frac{\omega_n}{a} (l-x) dx}{\|X_n\|^2},$$

$$b_n = \frac{\int_{x_0}^l \psi(x) \sin^2 \frac{\omega_n}{a} x dx + \int_{x_0}^l \psi(x) \cos^2 \frac{\omega_n}{a} (l-x) dx}{\omega_n \|X_n\|^2},$$

$$\|X_n\|^2 = \frac{\bar{S}\rho}{2 \sin^2 \frac{\omega_n}{a} x_0} + \frac{\bar{S}\rho}{2 \cos^2 \frac{\omega_n}{a} (l-x_0)} + \frac{M}{2}.$$

169. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_{tt}(l, t) = -c^2 u_x(l, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

donde

$$c^2 = \frac{KG}{M}, \quad a^2 = \frac{KG}{J}$$

es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos a \lambda_n t + b_n \sin a \lambda_n t) \sin \lambda_n x; \quad (4)$$

los valores propios λ_n del problema de contorno son las raíces de la ecuación

$$\operatorname{ctg} \lambda_n l = \frac{M}{J} \lambda_n, \quad (5)$$

y las funciones propias $X_n(x) = \sin \lambda_n x$ satisfacen la condición de ortogonalidad*)

$$MX_m(l) X_n(l) + \int_0^l JX_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (6)$$

$$a_n = \frac{\int_0^l M\varphi(x) X_n(x) dx}{\int_0^l MX_n^2(x) dx}, \quad (7)$$

$$b_n = \frac{\int_0^l M\psi(x) X_n(x) dx}{[MX_n^2(l) + \int_0^l JX_n^2(x) dx] a \lambda_n}, \quad (8)$$

*) Véase la indicación al problema 167.

$$170. u(x, t) = \frac{H-l}{H-x} \frac{A}{\frac{\omega}{a} \cos \frac{\omega}{a} l + \frac{1}{H-l} \sin \frac{\omega}{a} l} \sin \frac{\omega}{a} x \sin \omega t.$$

$$171. u(x, t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}})}{J_1^2(\mu_n)} \cos \frac{a \mu_n t}{2 \sqrt{l}} \int_0^l \varphi(\xi) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{\xi}{l}}\right) d\xi,$$

$\varphi(x) = u(x, 0)$, $J_0(x)$, $J_1(x)$ son las funciones de Bessel de orden nulo y de primer orden de primer género; μ_n , las raíces positivas de la ecuación $J_0(\mu) = 0$.

$$172. u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos a \lambda_n t + b_n \sin a \lambda_n t) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

$$a_n = \frac{1}{l J_1^2(\mu_n)} \int_0^l \varphi(\xi) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{\xi}{l}}\right) d\xi, \quad b_n = \\ = \frac{1}{a l \lambda_n J_1^2(\mu_n)} \int_0^l \psi(\xi) J_0\left(\mu_n \sqrt{\frac{\xi}{l}}\right) d\xi,$$

$$\varphi(x) = u(x, 0), \quad \psi(x) = u_t(x, 0), \quad \lambda_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{4l} - \frac{\omega^2}{a^2}},$$

las μ_n tienen las mismas magnitudes que en la respuesta al problema anterior.

173.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos \sqrt{2n(2n-1)} at + b_n \sin \sqrt{2n(2n-1)} at] P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

donde

$$a_n = \frac{4n-1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) P_{2n-1}\left(\frac{\xi}{l}\right) d\xi, \quad b_n = \\ = \frac{4n-1}{\sqrt{2n(2n-1)} al} \int_0^l \psi(\xi) P_{2n-1}\left(\frac{\xi}{l}\right) d\xi,$$

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ son los polinomios de Legendre,

$$\varphi(x) = u(x, 0), \quad \psi(x) = u_t(x, 0).$$

§ 4. Método de presentaciones en forma integral

1. Método de la Integral de Fourier

Recordemos que en caso de determinadas restricciones sobre $f(x)$ es válida la fórmula integral de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi, \quad (1)$$

además

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi, \quad (2)$$

es decir, es posible la diferenciación de la integral con respecto al parámetro bajo el signo integral, y

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi, \quad (3)$$

donde $F(x)$ es la función primitiva de $f(x)$.

La solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \quad (4)$$

puede buscarse en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, t) u^{i\lambda(x-\xi)} d\xi, \quad (5)$$

La sustitución de (5) en (4) da

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2 \lambda^2 U \right\} e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi = 0. \quad (6)$$

Para el cumplimiento de la igualdad (6) es suficiente que se cumpla la igualdad

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + a^2 \lambda^2 U = 0, \quad (7)$$

de donde hallamos

$$U(\xi, t) = A(\xi) e^{i\lambda at} + B(\xi) e^{-i\lambda at}, \quad (8)$$

donde $A(\xi)$ y $B(\xi)$ son unas funciones arbitrarias del parámetro ξ .

La sustitución de la expresión obtenida en (5) según (1) da la conocida solución en forma de una suma de las ondas de propagación

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \{A(\xi) e^{i\lambda(x+at-\xi)} + B(\xi) e^{i\lambda(x-at-\xi)}\} d\xi = A(x+at) + B(x-at). \quad (9)$$

*) Aquí la integral se entiende en el sentido del valor principal.

Análogamente la integral de Fourier puede utilizarse para resolver otros problemas relacionados con la ecuación de oscilaciones.

Una extensión más amplia tiene el siguiente esquema de aplicación de la integral de Fourier a la resolución de los problemas de contorno en la recta $-\infty < x < +\infty$ y semirecta $0 < x < +\infty$.

Se denomina imagen de Fourier de la función $f(x)$ en la recta $-\infty < x < +\infty$ respecto al núcleo $e^{-i\lambda x}$, la función

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \quad (10)$$

En virtud de la fórmula (10) «el original», es decir, la función $f(x)$, puede reconstruirse a partir de su imagen mediante la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (10')$$

El paso de $f(x)$ a $\tilde{f}(\lambda)$ según la fórmula (10) se llama transformación de Fourier; evidentemente, las transformaciones (10) y (10') son recíprocamente inversas.

En la semirecta $0 < x < +\infty$ se puede estudiar la imagen coseno de Fourier*) para la función $f(x)$:

$$\tilde{f}^{(c)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad (11)$$

el paso del cual al original se realiza según la fórmula

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^{(c)}(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad (11')$$

y la imagen-seno**) para

$$\tilde{f}^{(s)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \lambda \xi d\xi, \quad (12)$$

el paso de la cual al original se realiza según la fórmula

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^{(s)}(\lambda) \operatorname{sen} \lambda x d\lambda. \quad (12')$$

Se puede estudiar la transformación de Fourier con otros núcleos. Para más detalles remitimos al lector a la literatura especial.

Para resolver el problema de contorno para $u(x, t)$ mediante la transformación integral de Fourier, se pasa según la variable x al problema para la imagen de Fourier de esta función, hallándose esta imagen. Después de eso, mediante la transformación inversa de Fourier «reconstruyen el original», es decir, hallan la función $u(x, t)$ a partir de su imagen de Fourier. En calidad de núcleo de la transformación integral de Fourier para los problemas en semirecta

*) La transformación integral de Fourier con núcleo $\cos \lambda \xi$.

**) La transformación integral de Fourier con núcleo $\operatorname{sen} \lambda \xi$.

se debe tomar tal solución particular $X(x, t)$ de la ecuación, obtenida mediante la separación de las variables de la ecuación principal del problema dado de contorno, la cual satisface la condición de frontera del problema, si esta condición es homogénea, o a la correspondiente condición homogénea de frontera, si la condición de frontera del problema es no homogénea.

$$174. \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (1)$$

Indicación. Sustituyendo en la ecuación (1) las condiciones del problema

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, t) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi,$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, t) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi,$$

llegamos a la ecuación

$$\frac{d^2U}{dt^2} + a^2\lambda^2 U = f(\xi, t).$$

Resolviéndola para las condiciones iniciales

$$U(\xi, 0) = 0, \quad \frac{dU(\xi, 0)}{dt} = 0,$$

obtenemos

$$U(\xi, t) = \frac{1}{a\lambda} \int_0^t f(\xi, \tau) \sin a(t-\tau) d\tau.$$

Sustituyendo $\sin a(t-\tau)$ en la forma compleja*) y sustituyendo la expresión obtenida de $U(\xi, t)$ en la integral

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, t) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi$$

en virtud de (3) de la introducción al presente punto, obtenemos la fórmula (1).

$$175. \quad u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} +$$

$$+ \frac{ct}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) \psi(\xi) d\xi, \quad (1)$$

*) $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$.

donde $I_0(z)$ y $I_1(z)$ son las funciones «modificadas» de Bessel de orden nulo y de primer orden; estas pueden ser representadas por las series

$$I_0(z) = J_0(iz) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}, \quad (2)$$

$$I_1(z) = -iJ_1(iz) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!(k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1} \quad (3)$$

además

$$I_0'(z) = I_1(z).$$

La función modificada de Bessel de v -ésimo orden

$$I_v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} \quad (5)$$

es solución de la ecuación diferencial acotada cuando $x \rightarrow 0$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{v^2}{x^2}\right) x = 0 \quad (*). \quad (6)$$

Resolución. La solución del problema de contorno

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (8)$$

la buscamos en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, t) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi. \quad (9)$$

Sustituyendo (9) en (7), obtenemos la ecuación

$$\frac{d^2 U(\xi, t)}{dt^2} + (a^2 \lambda^2 - c^2) U(\xi, t) = 0. \quad (10)$$

Su solución que satisface en virtud de (8) y (9) las condiciones iniciales

$$U(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad U_t(\xi, 0) = \psi(\xi), \quad (11)$$

tiene la forma

$$U(\xi, t) = \varphi(\xi) \cos t \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} + \psi(\xi) \frac{\sin t \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2}}. \quad (12)$$

Sustituyendo (12) en (9), obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos t \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\sin t \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2}} e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi = u_1(x, t) + u_2(x, t). \quad (13)$$

*) Para más detalles véase [7], pág. 730-732.

De la teoría de las funciones cilíndricas se sabe que

$$\frac{\sin r}{r} = \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(r \sin \varphi \cos \theta) e^{ir \cos \varphi \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (14)$$

Efectuamos en esta igualdad la sustitución

$$r \cos \varphi = -a\lambda t, \quad r \sin \varphi = it, \quad r^2 = t^2(a^2\lambda^2 - c^2). \quad (15)$$

Entonces obtenemos la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{\sin t \sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}}{t \sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}} &= \frac{1}{2} \int_{-at}^{+at} J_0 \left(it \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{a^2 t^2}} \right) e^{-i\lambda\beta} \frac{d\beta}{dt} = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-at}^{+at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) e^{-i\lambda\beta} \frac{d\beta}{dt}. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$u_2 = \frac{1}{4\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \psi(\xi) \int_{-at}^{+at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) e^{i\lambda(x-\xi-\beta)} d\beta \right\} d\xi. \quad (15')$$

Hacemos

$$\Phi(\beta) = \begin{cases} 0 & \text{para } \left| \frac{\beta}{a} \right| > |t|, \\ I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) & \text{para } \left| \frac{\beta}{a} \right| < |t|. \end{cases} \quad (16)$$

Entonces

$$\int_{-at}^{+at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) e^{i\lambda(x-\beta)} d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\beta) e^{i\lambda(x-\beta)} d\beta. \quad (17)$$

Realizando en la parte derecha de la igualdad (15') primero la integración según λ y β . En virtud de la fórmula integral de Fourier* obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\beta) e^{i\lambda(z-\beta)} d\beta = \varphi(z)$$

en los puntos de continuidad $\varphi(z)$. En nuestro caso $z = x - \xi$.

En virtud de (17)

$$\varphi(x-\xi) = \begin{cases} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) & \text{para } x-at < \xi < x+at, \\ 0 & \text{para } -\infty < \xi < x-at, \\ & x+at < \xi < +\infty. \end{cases}$$

*) Véase la introducción a los problemas del presente punto.

Por eso

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \Phi(x - \xi) d\xi = \\ = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi. \quad (18)$$

Recordemos las expresiones iniciales de

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \frac{\sin t \sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}} e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi, \quad (19)$$

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos t \sqrt{a^2\lambda^2 - c^2} e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi. \quad (20)$$

Comparando las expresiones (19) y (18) de $u_2(x, t)$, obtenemos, integrando (20) con respecto a t ,

$$\int_0^t u_1(x, \tau) d\tau = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{\sin t \sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}}{\sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}} e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi = \\ = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi.$$

La diferenciación de la última igualdad con respecto a t da

$$u_1(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) \frac{\partial}{\partial t} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi = \\ = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \\ + \frac{ct}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} d\xi. \quad (21)$$

Sumando (18) y (21), obtenemos la fórmula (1) de la respuesta.

$$176. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) I_0 \times \\ \times \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) d\xi. \quad (1)$$

Indicación. Para obtener la fórmula (1) de la respuesta se puede utilizar el método de la solución del problema 175.

$$177. \quad u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(|x-at|) \operatorname{sign}(x-at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{|x-at|}^{x+at} \psi(z) dz.$$

Solución. Multiplicamos la ecuación $u_{tt} = a^2 u_{\xi\xi}$ por $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \lambda \xi$, integramos con respecto a ξ entre los límites 0 y $+\infty$, realizamos lo mismo con las condiciones iniciales; esto nos llevará a la ecuación

$$\frac{d^2 \bar{u}^{(s)}(\lambda, t)}{dt^2} + a^2 \lambda^2 \bar{u}^{(s)}(\lambda, t) = 0 \quad (1)$$

con las condiciones iniciales

$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, 0) = \bar{f}^{(s)}(\lambda), \quad \bar{u}_t^{(s)}(\lambda, 0) = \bar{\psi}^{(s)}(\lambda), \quad (2)$$

donde

$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \operatorname{sen} \lambda \xi d\xi,$$

$$\bar{f}^{(s)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \operatorname{sen} \lambda \xi d\xi, \quad \bar{\psi}^{(s)}(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \operatorname{sen} \lambda \xi d\xi.$$

Resolviendo la ecuación (1) con las condiciones iniciales (2), obtenemos

$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, t) = \bar{f}^{(s)}(\lambda) \cos a\lambda t + \bar{\psi}^{(s)}(\lambda) \frac{\operatorname{sen} a\lambda t}{a\lambda}. \quad (3)$$

Multiplicando ambos miembros de (3) por $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} \lambda x$ e integrando con respecto a λ entre 0 y $+\infty$, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{u}^{(s)}(\lambda, t) \operatorname{sen} \lambda x d\lambda = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}^{(s)}(\lambda) \cos(a\lambda t) \operatorname{sen} \lambda x d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{\psi}^{(s)}(\lambda) \frac{\operatorname{sen}(a\lambda t) \operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}^{(s)}(\lambda) [\operatorname{sen} \lambda(x+at) + \operatorname{sen} \lambda(x-at)] d\lambda + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{\psi}^{(s)}(\lambda) \frac{[\cos \lambda(x-at) - \cos \lambda(x+at)]}{\lambda} d\lambda, \end{aligned}$$

si $x > at$.

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{\psi}^{(s)}(\lambda) d\lambda \int_{x-at}^{x+at} \operatorname{sen} \lambda s ds = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{\psi}^{(s)}(\lambda) \frac{\cos \lambda(x-at) - \cos \lambda(x+at)}{\lambda} d\lambda, \end{aligned}$$

obtenemos

$$u(x, t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \quad \text{para } x > at. \quad (4)$$

Si $x < at$, entonces bajo el signo de seno y coseno se debe reemplazar $x - at$ por $at - x$, lo que llevará al cambio del signo del seno y para $u(x, t)$ se obtiene la expresión

$$u(x, t) = \frac{f(at+x) - f(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{at+x} \psi(s) ds \quad \text{para } x < at. \quad (5)$$

Uniendo (4) y (5) en una fórmula, obtenemos la respuesta dada más arriba.

$$178. \quad u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(|x-at|)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \left\{ \int_0^{x+at} \psi(z) dz + \operatorname{sign}(x-at) \int_0^{|x-at|} \psi(z) dz \right\}.$$

Indicación. Emplear la transformación coseno de Fourier.

$$179. \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < t < \frac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{para } t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Indicación. Emplear la transformación seno de Fourier.

Resolución. Multiplicamos ambos miembros de la ecuación $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ (*) por $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda \xi$ e integremos respecto a ξ entre 0 y $+\infty$, empleando la integración por partes**) y utilizando la condición de frontera $u(0, t) = \mu(t)$; esto da

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}^{(s)}(\lambda, t)}{dt^2} &= a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \sin \lambda \xi d\xi = \\ &= a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda (\cos \lambda \xi) u \Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \\ &\quad - a^2 \lambda^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u \sin \lambda \xi d\xi = -a^2 \lambda^2 \bar{u}^{(s)}(\lambda, t) + a^2 \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu(t). \end{aligned}$$

Además, aprovechamos la circunstancia de que $u(\xi, t)$ y $\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi, t)$ tienden a cero cuando $\xi \rightarrow +\infty$. Así llegamos a la ecuación

$$\frac{d^2 \bar{u}^{(s)}(\lambda, t)}{dt^2} + a^2 \lambda^2 \bar{u}^{(s)}(\lambda, t) = a^2 \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mu(t). \quad (1)$$

Dado que la solución buscada

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{u}^{(s)}(\lambda, t) \sin \lambda x d\lambda$$

debo satisfacer las condiciones iniciales nulas

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$

entonces, resolviendo la ecuación (1), para $\bar{u}^{(s)}(\lambda, t)$ se deben tomar las condiciones iniciales nulas

$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, 0) = \frac{d\bar{u}^{(s)}(\lambda, 0)}{dt} = 0. \quad (2)$$

*) En $u(x, t)$ sustituimos x por ξ .

**) Compárese con la solución por el método de las ondas de propagación, problema 73.

La solución de la ecuación (1) con las condiciones iniciales (2) se escriben en la forma

$$\tilde{u}^{(s)}(\lambda, t) = a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \mu(\tau) \sin a\lambda(t-\tau) d\tau,$$

por consiguiente

$$u(x, t) = a \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_0^t \mu(\tau) \sin \lambda x \sin a\lambda(t-\tau) d\tau$$

Cambiando el orden de la integración, calculamos primeramente la integral

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x \sin a\lambda(t-\tau) d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda [x - a(t-\tau)] a\lambda d\lambda =$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda [x + a(t-\tau)] d\lambda = \delta(x - a[t - \tau]) - \delta(x + a[t - \tau]).$$

Dado que $0 \leq \tau < t$, entonces $\delta(x + a[t - \tau]) = 0$ para $x > 0$; por consiguiente

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x \cos a\lambda(t-\tau) d\lambda = \delta(x - a[t - \tau])$$

para $0 < \tau < t, 0 < x < +\infty$.

Por eso

$$u(x, t) = a \int_0^t \mu(\tau) \delta(x - a[t - \tau]) d\tau =$$

$$= \int_0^{at} \mu\left(t - \frac{s}{a}\right) \delta(x - s) ds = \begin{cases} 0 & \text{para } t < \frac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) & \text{para } t > \frac{x}{a}. \end{cases}$$

180. $u(x, t) = -a \int_0^{t - \frac{x}{a}} v(s) ds.$

Indicación. Emplear la transformación coseno de Fourier; véase la solución exacta del problema anterior (compárese con la solución del problema 74).

$$181. \quad \text{a) } u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds;$$

$$\text{b) } u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \left\{ \int_0^{x+a(t-\tau)} f(s, \tau) ds - \right. \\ \left. - \operatorname{sign}[x-a(t-\tau)] \int_0^{|x-a(t-\tau)|} f(s, \tau) ds \right\}.$$

Indicación. En el caso a) emplear la transformación seno de Fourier y en el caso b), la transformación coseno de Fourier. En el caso a) utilizar también la igualdad

$$\frac{2 \operatorname{sen} a\lambda(t-\tau) \operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} = \frac{\cos(\lambda[x-a(t-\tau)]) - \cos(\lambda[x+a(t-\tau)])}{\lambda} = \\ = \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \operatorname{sen} \lambda s ds = \frac{\cos(\lambda[a(t-\tau)-x]) - \cos(\lambda[a(t-\tau)+x])}{\lambda} = \\ = \int_{a(t-\tau)-x}^{a(t-\tau)+x} \operatorname{sen} \lambda s ds$$

y en el caso b), las relaciones análogas.

$$182. \quad u(x, t) = - \int_0^{t-x} v(\tau) I_0(c \sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}) d\tau. \quad (1)$$

Indicación. Se puede buscar la solución del problema de contorno en la forma

$$u(x, t) = \int_0^{t-x} \varphi(\tau) I_0(c \sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}) d\tau, \quad (2)$$

donde $\varphi(\tau)$ es la función que debe ser determinada a partir de la condición de frontera.

$$183. \quad u(x, t) = \mu(t-x) - cx \int_0^{t-x} \mu(\tau) \frac{I_1(c \sqrt{(t-\tau)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}} d\tau.$$

Indicación. Utilizar la solución del problema anterior.

184. La solución $u(x, t)$ del problema de contorno satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{du(x, t)}{dx} - hu(x, t) = \kappa(t-x) - cx \int_0^{t-x} \kappa(\tau) \frac{I_1(c \sqrt{(t-\tau)^2 - x^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - x^2}} d\tau.$$

$$\begin{aligned} 185. \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) \bar{g}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) e^{i\lambda s} ds = \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) ds \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) e^{-i\lambda(x-s)} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s) f(x-s) ds. \end{aligned}$$

186.

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \bar{f}^{(c)}(\lambda) \bar{g}^{(c)}(\lambda) \cos \lambda x d\lambda = \\ & = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}^{(c)}(\lambda) \cos \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} g(s) \cos \lambda s ds = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(s) ds \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{f}^{(c)}(\lambda) [\cos \lambda(x-s) + \cos \lambda(x+s)] d\lambda = \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(s) [f(|x-s|) + f(x+s)] ds. \end{aligned}$$

187. *Indicación.* Véase la solución del problema 186.

$$\begin{aligned} 188. \quad u(x, t) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-2\lambda \sqrt{at}) (\sin \lambda^2 + \cos \lambda^2) d\lambda - \\ & - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-2\lambda \sqrt{at}) (\sin \lambda^2 - \cos \lambda^2) d\lambda. \quad (1) \end{aligned}$$

Para $\varphi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{4h^2}}$, $\psi(x) \equiv 0$ obtenemos

$$u(x, t) = \frac{Ak}{\sqrt{R}} e^{-\frac{x^2 \cos \theta}{4R}} \cos \left(\frac{x^2 \sin \theta}{4R} - \frac{1}{2} \theta \right), \quad (2)$$

donde

$$R \cos \theta = k^2, \quad R \sin \theta = at.$$

Indicación. Emplear la transformación de Fourier con el núcleo e^{ikt} en la recta $-\infty < x < +\infty$. Utilizar las relaciones

$$\frac{1}{V2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha \xi)^2 e^{-ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left(\cos \frac{x^2}{4\alpha} + \sin \frac{x^2}{4\alpha} \right), \quad (I)$$

$$\frac{1}{V2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\alpha \xi)^2 e^{-ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \left(\cos \frac{x^2}{4\alpha} - \sin \frac{x^2}{4\alpha} \right), \quad (II)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(at\xi)^2 \bar{\psi}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(x-s) \left(\cos \frac{s^2}{4at} + \sin \frac{s^2}{4at} \right) ds, \quad (III)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(at\xi)^2 \bar{\psi}(\xi) e^{-ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\sqrt{at}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\psi}(x-s) \left(\cos \frac{s^2}{4at} - \sin \frac{s^2}{4at} \right) ds. \quad (IV)$$

Las relaciones (III) y (IV) se obtienen mediante las relaciones (I) y (II) y el teorema sobre la convolución que se demuestra en la solución del problema 185. Las relaciones (I) y (II) pueden ser obtenidas de las integrales conocidas (véase (1))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3)$$

Precisamente la sustitución $x = y - l$ da

$$\begin{aligned} \cos x^2 &= \cos(y^2 + l^2) \cos 2ly + \sin(y^2 + l^2) \sin 2ly, \\ \sin x^2 &= \sin(y^2 + l^2) \cos 2ly - \cos(y^2 + l^2) \sin 2ly. \end{aligned}$$

Representando $\cos y$ y $\sin y$ de $y^2 + l^2$ mediante $\cos y$ y $\sin y$ de y^2 y l^2 , obtenemos dos ecuaciones (de (3)) para la búsqueda de las integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 \cos 2ly dy \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y^2 \cos 2ly dy. \quad (4)$$

Dado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 \sin 2ly dy = 0 \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y^2 \sin 2ly dy = 0, \quad (5)$$

entonces la parte imaginaria de las integrales buscadas (I) y (II) es igual a cero.

Para la búsqueda de la fórmula (2) con las condiciones iniciales

$$\varphi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{4h^2}}, \quad \varphi(x) = 0$$

no vale la pena utilizar la fórmula general (1); es mejor emplear la fórmula de inversión

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\lambda, t) e^{-i\lambda x} d\lambda,$$

sustituyendo en ella los valores

$$\bar{u}(\lambda, t) = \bar{\varphi}(\lambda) \cos a\lambda^2 t = \bar{\varphi}(\lambda) \frac{e^{ia\lambda^2 t} + e^{-ia\lambda^2 t}}{2}$$

donde

$$\bar{\varphi}(\lambda) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{4k^2} + i\lambda\xi} d\xi = Ak\sqrt{2} e^{-k^2\lambda^2}.$$

Se debe señalar que la última igualdad es válida tanto cuando k es real como si es complejo.

$$189. \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \mu\left(t - \frac{x^2}{2a\lambda^2}\right) \left[\sin \frac{\lambda^2}{2} + \cos \frac{\lambda^2}{2}\right] d\lambda.$$

Indicación. Véase la solución del problema anterior. Se debe señalar también que la integral $\int_0^{+\infty} \xi \sin(a\xi)^2 \sin(\xi x) d\xi$ se obtiene diferenciando con respecto a x la integral

$$\int_0^{+\infty} \sin(a\xi)^2 \cos(\xi x) d\xi.$$

190. *Indicación.* Aprovechar que

1) si $\Phi(x)$ y $\Psi(x)$ son unas funciones impares, entonces

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x-at) + \Phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(z) dz$$

es nula para $x = 0$;

2) si $u(x, t)$ es solución de la ecuación $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, entonces

$$U(x, t) = \sum_{h=0}^N A_h \frac{\partial^h u(x, t)}{\partial x^h}$$

también es la solución de esta ecuación.

191. *Indicación.* Aprovechar el hecho de que

1) si $F(x, t)$ es una función impar de x , entonces la función

$$U(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi$$

es nula para $x = 0$;

2) si $u(x, t)$ es una solución de la ecuación $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$, entonces

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^N \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}$$

es la solución de la ecuación

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k}.$$

192. *Indicación.* La demostración se efectúa en forma análoga a como se hizo en la resolución del problema 190.

193. *Indicación.* La demostración es análoga a la de la resolución del problema 191.

1.* Paso al intervalo finito mediante el método de reflexión

$$\begin{aligned} 194. \quad u(x, t) &= \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \\ &+ \frac{ct}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} \varphi(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) \psi(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (1)$$

dónde $\varphi(\xi)$ y $\psi(\xi)$ se obtienen mediante la continuación impar respecto a cero y luego con una continuación periódica con período $2l$.

195. La solución se obtiene empleando la fórmula (1) de la respuesta al problema anterior, pero $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ se continúan en forma impar con respecto a $x = 0$ y par con respecto a $x = l$; después periódicamente con período $4l$.

196. La solución se obtiene mediante la fórmula (1) de la respuesta al problema 194; $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ se continúan de forma impar con respecto a $x = 0$ y $x = l$ y después con período $2l$.

197. Buscaremos la solución del problema de contorno

$$u_{tt} = u_{xx} + c^2 u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

en la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-x} \varphi(\tau) I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - x^2} \right) d\tau + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{t-(l-x)} \psi(\tau) I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - (l-x)^2} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

donde las funciones $\varphi(\tau)$ y $\psi(\tau)$ deben ser determinadas de las condiciones de frontera (2). Es fácil convencerse que $u(x, t)$ determinada según la fórmula (4) es la solución de (1) para cualesquieras $\varphi(\tau)$ y $\psi(\tau)$. Consideraremos que $\varphi(\tau) = \psi(\tau) = 0$ para $\tau < 0$. Diferenciando en (4) y utilizando las condiciones de frontera (2), obtenemos

$$-\varphi(t) + \psi(t-l) + \int_0^{t-l} \psi(\tau) \frac{cI_1(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau = \mu_1(t), \quad (5)$$

$$-\varphi(t-l) + \psi(t) - \int_0^{t-l} \varphi(\tau) \frac{cI_1(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau = \mu_2(t). \quad (6)$$

Pongamos

$$\varphi_1(t) = \psi(t) - \varphi(t), \quad \psi_1(t) = \psi(t) + \varphi(t). \quad (7)$$

De (5) y (6) hallamos

$$\varphi_1(t) + \varphi_1(t-l) + cl \int_0^{t-l} \varphi_1(\tau) \frac{I_1(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau = \mu_1(t) + \mu_2(t), \quad (8)$$

$$-\psi_1(t) + \psi_1(t-l) + cl \int_0^{t-l} \psi_1(\tau) \frac{I_1(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau = \mu_1(t) - \mu_2(t). \quad (9)$$

De (8) y (9) en virtud de la igualdad $\varphi(\tau) = \psi(\tau) = 0$ para $\tau < 0$ hallamos

$$\varphi_1(t) + \mu_1(t) = \mu_2(t), \quad \psi_1(t) = \mu_2(t) - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq l, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &= \mu_1(t) + \mu_2(t) - \varphi_1(t-l) - cl \int_0^{t-l} \varphi_1(\tau) \frac{I_1(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau, \\ \psi_1(t) &= \mu_1(t) - \mu_2(t) + \psi_1(t-l) + cl \int_0^{t-l} \psi_1(\tau) \frac{I_1(c\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2})}{\sqrt{(t-\tau)^2 - l^2}} d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (10')$$

2. Método de Riemann

Se desea hallar la solución de la ecuación

$$L(u) = u_{xx} - u_{yy} + a_1(x, y) u_x + b_1(x, y) u_y + c_1(x, y) u = f(x, y), \quad (1)$$

que satisface las condiciones iniciales

$$u|_c = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_c = \psi(x) \quad (2)$$

en la curva c , donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada según la dirección de la normal a esta curva. Se supone que la curva c está dada por la ecuación $y = f(x)$, donde $f(x)$ es una función diferenciable ademáis $|f'(x)| < 1$.

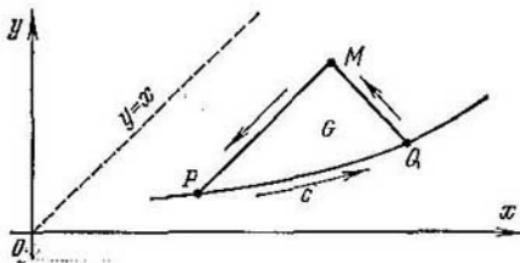


Fig. 31

Entonces el valor de u en el punto M (fig. 31) se halla mediante la fórmula

$$\begin{aligned} u(M) = & \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q [v(u_{\xi} d\eta + u_{\eta} d\xi) - \\ & - u(v_{\xi} d\eta + v_{\eta} d\xi) + uv(a_1 d\eta - b_1 d\xi)] + \\ & + \int_M \int_{PQ} v(M, M') f(M') d\sigma_{M'}, \quad d\sigma_{M'} = d\xi d\eta, \quad (3) \end{aligned}$$

además

$$u|_c = \varphi(x),$$

$$u_{\xi}|_c = \frac{\partial u}{\partial s} \cos(x, s) + \frac{\partial u}{\partial n} \cos(x, n) = \frac{\varphi'(x) + \psi(x) f'(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}},$$

$$u_n|_c = \frac{\partial u}{\partial s} \cos(y, s) + \frac{\partial u}{\partial n} \cos(y, n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}},$$

y la función $v(M, M') = v(x, y, \xi, \eta)$ es la función de Riemann para el operador $L(u)$ la que se determina de las relaciones

$$N(v) \equiv v_{xx} - v_{yy} - (a_1 v)_x - (b_1 v)_y + c_1 v = 0 \quad \text{en el campo } PQM, \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b_1 - a_1}{2\sqrt{2}} v \quad \text{en la característica } MP, \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{b_1 + a_1}{2\sqrt{2}} v \quad \text{en la característica } MQ, \quad (6)$$

$$v(M, M') = 1. \quad (7)$$

Los operadores $L(u)$ y $N(v)$ se llaman conjugados.

Si se parte de otra forma canónica de la ecuación hiperbólica

$$L^*(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + c_2 u = f(x, y), \quad (8)$$

entonces la solución de la ecuación (8) que satisface las condiciones iniciales

$$u|_c = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_c = \psi(x) \quad (9)$$

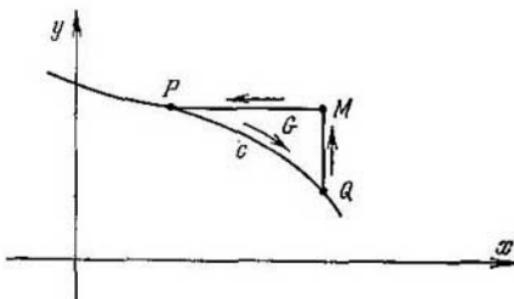


Fig. 32

en la curva

$$y = f(x), \quad f'(x) < 0, \quad (10)$$

se halla mediante la fórmula (fig. 32)

$$u(M) = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int\limits_P^Q \left\{ \left[\frac{1}{2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right) - b_2 uv \right] dx - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{2} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - a_2 uv \right] dy \right\} + \int\int_{PQM} v(M, M') f(M') d\sigma_{M'}, \quad (11)$$

donde v es la función de Riemann para el operador $L^*(u)$ y se determina de las relaciones

$$N^*(v) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(a_2 v)}{\partial x} - \frac{\partial(b_2 v)}{\partial y} + c_2 v = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b_2 v \quad \text{en la característica } PM, \quad (13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a_2 v \quad \text{en la característica } QM, \quad (14)$$

$$v(M, M) = 1. \quad (15)$$

De esta manera, si la función de Riemann para el operador hiperbólico L o $L^*(u)$ está hallada, entonces se puede en seguida escribir en la forma integral la solución de amplia clase de problemas de contorno ligados con este operador hiperbólico.

198. La función de Riemann es $v = 1$.

La solución del problema de contorno es de la forma

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(z, \tau) dz d\tau$$

199. La función de Riemann
a) para el operador

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c^2 u$$

es

$$v = J_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 + \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right);$$

b) para el operador

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 u$$

es

$$v = I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right),$$

donde $I_0(z) = J_0(iz)$ es la función modificada de Bessel de orden nulo.

La solución del problema de contorno conformemente será de la forma

a) $u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} -$

$$- \frac{ct}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} J_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) f(\xi, \tau) d\xi;$$

b) $u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} +$

$$+ \frac{ct}{2} \int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right)}{\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}} \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}} \right) f(\xi, \tau) d\xi.$$

200. $u(x, y) = \frac{1}{2} \varphi(xy) + \frac{y}{2} \varphi \left(\frac{x}{y} \right) +$

$$+ \frac{\sqrt{xy}}{4} \int_{xy}^{\infty} \frac{\varphi(z)}{z^{3/2}} dz - \frac{\sqrt{xy}}{2} \int_{xy}^{\infty} \frac{\psi(z)}{z^{3/2}} dz.$$

$$\begin{aligned}
 201. \quad u(x, t) = & \frac{\sqrt{\sqrt{1-x-\frac{at}{2}} \varphi\left(x+\sqrt{l-x} at-\frac{a^2 t^2}{4}\right)}}{2 \sqrt[4]{l-x}} + \\
 & + \frac{\sqrt{\sqrt{l-x+\frac{at}{2}} \varphi\left(x-\sqrt{l-x} at-\frac{a^2 t^2}{4}\right)}}{2 \sqrt[4]{l-x}} + \\
 & + \frac{1}{\sqrt[4]{l-x}} \int_{\sqrt{l-x}-\frac{at}{2}}^{\sqrt{l-x}+\frac{at}{2}} \Phi(x, t, z) dz, \\
 \Phi(x, t, z) = & \frac{Vz}{a} \psi(l-z^2) F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{\frac{a^2 t^2}{4}-(z-\sqrt{l-x})^2}{4z \sqrt{l-x}}\right) + \\
 & + \frac{at}{8 \sqrt{(l-x) z}} \varphi(l-z^2) F'\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{\frac{a^2 t^2}{4}-(z-\sqrt{l-x})^2}{4z \sqrt{l-x}}\right),
 \end{aligned}$$

donde

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

es la serie hipergeométrica*).

Indicación. Utilizar para el operador hiperbólico la forma canónica con la derivada mixta. En las coordenadas características la función de Riemann es de la forma

$$G(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{(\bar{x}-\bar{x}_0)(\bar{y}-\bar{y}_0)}{(\bar{x}_0-\bar{y}_0)(\bar{x}-\bar{y})}\right).$$

$$\begin{aligned}
 202. \quad u(x, y) = & \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(\omega-y)} \varphi[l \cos(\omega-y)] + \sqrt{\operatorname{sen}(\omega+y)} \varphi[l \cos(\omega+y)]}{2 \sqrt{\operatorname{sen} \omega}} + \\
 & + \frac{1}{2 \sqrt{\operatorname{sen} \omega}} \int_{\omega-y}^{\omega+y} \Phi(\omega, y, z) dz,
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y, z) = & \psi(l \cos z) \sqrt{\operatorname{sen} z} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos(\omega-z)-\cos y}{2 \operatorname{sen} \omega \cdot \operatorname{sen} z}\right) + \\
 & + \frac{1}{2} \varphi(l \cos z) \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \omega \sqrt{\operatorname{sen} z}} F'\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\cos(\omega-z)-\cos y}{2 \operatorname{sen} \omega \cdot \operatorname{sen} z}\right) \\
 \omega = & \arccos \frac{x}{l}.
 \end{aligned}$$

Indicación. Utilizar para el operador hiperbólico la forma canónica con la derivada mixta. La función de Riemann en las coordenadas características es de la forma

$$v(\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_0, \bar{y}_0) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{\operatorname{sen}(\bar{x}-\bar{x}_0) \operatorname{sen}(\bar{y}-\bar{y}_0)}{\operatorname{sen}(\bar{x}_0-\bar{y}_0) \operatorname{sen}(\bar{x}-\bar{y})}\right).$$

*) Véase las tablas de información al final del libro.

Capítulo III

ECUACIONES DE TIPO PARABÓLICO

§ 1. Problemas físicas que llevan a ecuaciones de tipo parabólico; planteamiento de los problemas de contorno

Las ecuaciones y las condiciones de frontera de los problemas de contorno de la teoría de conducción calorífica que se estudian aquí son consecuencias de: a) el principio de conservación de la energía, b) la ley de la conductibilidad térmica interior en los cuerpos sólidos (ley de Fourier) y c) la ley del intercambio de calor por convección entre la superficie del cuerpo sólido y el medio ambiente líquido o gaseoso (ley de Newton).

La ley de Fourier en el caso unidimensional se expresa por la fórmula

$$q = -\sigma \lambda \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

donde q es la cantidad de calor que fluye durante la unidad de tiempo en la dirección del eje x a través del área σ perpendicular al eje x ; u , la temperatura en el lugar de estudio del cuerpo; λ , el coeficiente de conductibilidad térmica*).

La ley de Newton se expresa por la fórmula

$$q = \sigma \alpha (u - u_0), \quad (2)$$

donde q es la cantidad de calor que fluye durante una unidad de tiempo a través del área σ de la superficie del cuerpo al medio ambiente; u , la temperatura de la superficie del cuerpo, u_0 , la temperatura del medio ambiente, α , el coeficiente del intercambio de calor**).

En los problemas de contorno acerca de la difusión la cantidad de la materia difundida y su concentración juegan el mismo papel que la cantidad de calor y la temperatura en los problemas de contorno de la teoría de la conducción calorífica.

En particular, si u es la concentración; λ , el coeficiente de difusión, y q , la cantidad de materia difundida durante una unidad de tiempo en la dirección del eje x a través del área σ perpendicular al eje x , entonces, la ley de la difusión (la ley de Nernst), se expresa por la fórmula (1), mientras que la fórmula (2) indica la ley de la difusión a través de un tabique semipermeable.

En los problemas de parabólicos de contorno sobre el movimiento de un líquido viscoso y la electrodinámica, se efectuarán las correspondientes observaciones directamente al estudiarlos.

*) λ depende de las propiedades físicas del cuerpo y de la temperatura, pero dentro de límites suficientemente amplios se puede despreciar la dependencia de λ con respecto a la temperatura, tomando λ para la magnitud media de la temperatura.

**) Todo lo dicho en la llamada anterior sobre la dependencia de λ con respecto a la temperatura dentro de determinados límites, se extiende a α ; para más detalles véase [41], pág. 21.

1. Medios homogéneos; ecuaciones con coeficientes constantes

1. La temperatura de los puntos de la barra es la solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(l, t) = \varphi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

$$-\lambda \sigma u_x(0, t) = q_1(t), \quad \lambda \sigma u_x(l, t) = q_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (3')$$

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \varphi_1(t)], \quad u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \varphi_2(t)], \\ 0 < t < +\infty \quad (3'')$$

donde a^2 es el coeficiente de termodifusividad; $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$; λ , el coeficiente de conductibilidad térmica de la materia; c , el calor específico; ρ , la densidad de masa; σ , el área de la sección transversal; $h = \frac{\alpha}{\lambda}$, donde α es el coeficiente del intercambio de calor; $f(x)$, las magnitudes iniciales de la temperatura; $\varphi_1(t)$ y $\varphi_2(t)$ en el caso (3), las temperaturas de los extremos de la barra y, en el caso (3''), las magnitudes de la temperatura del medio ambiente junto a los extremos de la barra; $q_1(t)$ y $q_2(t)$, los flujos caloríficos que conducen a la barra por sus extremos (es decir, la cantidad de calor que se conduce durante una unidad de tiempo).

Indicación. Si la superficie lateral de la barra cilíndrica isotrópica homogénea está aislada térmicamente y las superficies isotérmicas en el momento inicial de tiempo coinciden con sus secciones transversales, además los topes de la barra durante todo el tiempo quedan como superficies isotérmicas, entonces las superficies isotérmicas dentro de la barra coinciden durante todo el tiempo con las secciones transversales, es decir, la temperatura dentro de la barra todo el tiempo dependerá sólo de una coordenada espacial x .

La ecuación (1) se puede obtener, igualando el incremento de la cantidad de calor durante una unidad de tiempo en el elemento $(x, x + \Delta x)$ de la barra que es igual a

$$c\rho\sigma\Delta x \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (4)$$

a la suma de la cantidad de calor que entra en este elemento durante una unidad de tiempo a través de las secciones x y $x + \Delta x$,

$$-\sigma\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x + \sigma\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x}, \quad (5)$$

después, dividiendo la igualdad obtenida por Δx y pasando al límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$. Nos detendremos más detalladamente sobre la elección del signo de los términos de la suma (5). Consideraremos que $x + \Delta x > x$ lo que evidentemente no quebranta la generalidad de los razonamientos. Si en el tope x del elemento $(x, x + \Delta x)$ será $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$, entonces en los puntos que están a la derecha del tope (es decir, dentro del elemento) la temperatura será mayor que en los puntos que están a la izquierda del tope (es decir, fuera del elemento), esto significa que el calor fluye del elemento y por consiguiente el primer término de la suma (5) se debe tomar con el signo menos. Si $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$, entonces la temperatura a la izquierda del tope es mayor que la temperatura a la derecha del tope, por eso el calor fluye al elemento, el primer término de la suma (5) debe ser positivo

y, por consiguiente, de nuevo se debe tomar con el signo menos. Análogamente se verifica la elección del signo del segundo término.

Para obtener las condiciones de frontera (3') y (3'') se deben realizar los mismos razones para los elementos $(0, \Delta x)$ y $(l - \Delta x, l)$, utilizando en el caso (3'') la ley Newton sobre el intercambio de calor por convección.

Observación. Si el coeficiente del intercambio de calor es significativamente mayor que el coeficiente de conductividad térmica interior λ ($\alpha \rightarrow \infty$), entonces las condiciones de frontera (3'') se transforman en las condiciones de frontera (3). Si, por el contrario, α es despreciablemente pequeño ($\alpha \rightarrow 0$), entonces las condiciones de frontera (3'') se transforman en las condiciones de frontera (3'), donde $q_1(t) = q_2(t) = 0$, es decir, llegamos al caso de la aislación térmica de los extremos de la barra.

2. La ecuación de conducción calorífica en el caso dado es de la forma

$$u_t = \frac{\lambda}{cp} u_{xx} - \frac{\alpha p}{cp\sigma} (u - u_0),$$

donde p es el perímetro de la sección transversal de la barra, α , el coeficiente del intercambio de calor entre la superficie de la barra y el medio ambiente con temperatura igual a u_0 ; las magnitudes restantes tienen el mismo significado y las condiciones iniciales y de frontera se escriben del mismo modo que en el problema anterior.

Indicación. Al examinar el elemento $(x, x + \Delta x)$ de la barra, hay que tener en cuenta en el balance calorífico no sólo los flujos de calor a través de los topes del elemento, sino también los flujos de calor que atraviesan su superficie lateral.

3. Para determinar la temperatura dentro del anillo obtenemos el problema de contorno

$$u_t = \frac{\lambda}{cp} u_{xx} - \frac{\alpha p}{cp\sigma} (u - u_0), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t), \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l. \quad (3)$$

Aquí $\lambda, c, \rho, \sigma, \alpha, p$ tienen el mismo sentido que en el problema anterior. La coordenada x es la longitud del arco medida a lo largo del anillo. Si el radio del anillo es R , entonces $x = R\theta$, donde θ es la coordenada angular; por consiguiente, $l = 2\pi R$, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta}$ y pasando a las variables independientes θ, t , el problema de contorno (1), (2), (3) se puede llevar a la forma

$$u_t = \frac{\lambda}{cpR^2} u_{\theta\theta} - \frac{\alpha p}{cp\sigma} (u - u_0), \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$u(0, t) = u(2\pi, t), \quad u_\theta(0, t) = u_\theta(2\pi, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$u(\theta, 0) = F(\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (3')$$

$$4. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v_0 t < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(v_0 t, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < +\infty. \quad (3)$$

5. Para determinar la temperatura $u(x, t)$ dentro del cable obtenemos el problema de contorno

$$u_t = \frac{\lambda}{c\rho} u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho\sigma} (u - u_0) + \frac{\beta I^2 R}{c\rho\sigma}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$c_1 u_t(0, t) = -\lambda \sigma u_x(0, t), \quad c_2 u_t(l, t) = \lambda \sigma u_x(l, t), \\ 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l \quad (3)$$

donde c_1 y c_2 son las capacidades caloríficas de los hornos; I , la intensidad de la corriente; R , la resistencia de una unidad de longitud del cable; β , el coeficiente de proporcionalidad en la fórmula

$$q = \beta I^2 R \Delta x, \quad (4)$$

que expresa la cantidad de calor desprendida por la corriente I durante una unidad de tiempo en el elemento $(x, x + \Delta x)$ del cable. Los coeficientes λ , c , ρ , p , α tienen el mismo sentido que en el problema 2.

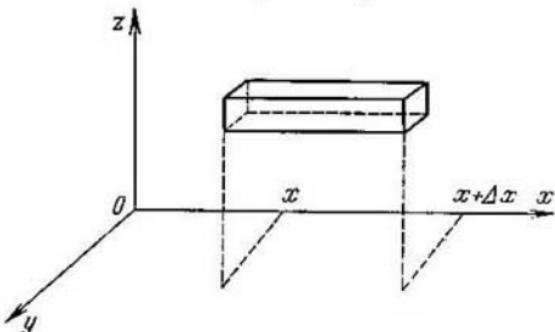


Fig. 33

Indicación. Al deducir la ecuación (1) se debe utilizar la relación (4).

6. Para determinar la concentración $u(x, t)$ obtenemos la misma ecuación y las mismas condiciones de frontera que en el problema (1) para calcular la temperatura con la diferencia que en el caso de la difusión

$$a^2 = \lambda = D,$$

donde D es el coeficiente de difusión y α , el coeficiente de permeabilidad de cada uno de los planos de frontera.

7. Para determinar la concentración u de la sustancia que se difunde obtenemos la ecuación

$$u_t = Du_{xx} - vu_x, \quad (1)$$

donde D es el coeficiente de difusión y v , la velocidad del movimiento del medio.

Indicación. Para obtener la ecuación (1) se debe escoger un elemento con el área constante de la sección transversal, paralelo al eje x (fig. 33) y estudiar la cantidad de sustancia que pasa a través de las secciones x y $x + \Delta x$ como resultados de la difusión y de la transferencia del medio móvil.

8. Para determinar la concentración de las partículas suspendidas obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - v \frac{\partial u}{\partial z},$$

donde D es el coeficiente de difusión y v , la velocidad de la precipitación de las partículas, además el eje z está dirigido hacia abajo. La condición de impermeabilidad del plano $z = z_0$ tiene la forma

$$D \frac{\partial u}{\partial z} - vu = 0 \quad \text{para} \quad z = z_0.$$

Indicación. Véase la indicación al problema anterior. En vez del flujo de la sustancia que se difunde como resultado del movimiento del medio se debe considerar el flujo de la sustancia como resultado de la precipitación de las partículas.

9. a) $u_t = Du_{xx} - \beta_1 u, \quad \beta_1 > 0;$
 b) $u_t = Du_{xx} + \beta_2 u, \quad \beta_2 > 0,$

donde D es el coeficiente de difusión, β_1 , el coeficiente de la desintegración y β_2 , el coeficiente de la multiplicación.

Indicación. En el caso a) en una unidad de volumen durante una unidad de tiempo se destruye una cantidad de sustancia difundida igual a $\beta_1 u$ y en el caso b) surge una cantidad de sustancia difundida igual a $\beta_2 u$.

10. Si la velocidad del plano móvil conserva una dirección constante, entonces las velocidades de las partículas del líquido serán, obviamente, paralelas a esta dirección. Dirigiendo el eje según el espesor de la capa y colocando el origen de las coordenadas sobre un plano inmóvil, para determinar la velocidad de las partículas del líquido obtenemos el problema de contorno

$$v_t = vv_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = v_0(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

donde l es el espesor de la capa, $v_0(t)$, la velocidad de movimiento del plano de frontera; $v = \frac{\mu}{\rho}$, el coeficiente cinético de viscosidad; ρ , la densidad de la masa; μ , el coeficiente dinámico de viscosidad que entra en la ley de Newton para determinar la tensión de rozamiento entre las capas del líquido viscoso

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Indicación. Para deducir la ecuación (1) se debe despreciar el gradiente de la presión en comparación con el gradiente de la fuerza de rozamiento, lo que se puede hacer si el líquido es de gran viscosidad.

$$11. \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}. \quad (2)$$

Solución. Escribimos el sistema de ecuaciones de Maxwell*) bajo la condición que en la región de estudio no existen las cargas volumétricas y las fuer-

*) Véase [7], pág. 493.

zas electromotrices exteriores:

$$\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad (I)$$

$$\operatorname{rot} H - \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} J, \quad (II)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (III)$$

$$\operatorname{div} D = 0, \quad (IV)$$

$$J = \sigma E, \quad (V)$$

$$D = \epsilon E, \quad (VI)$$

$$B = \mu H. \quad (VII)$$

Despreciando las corrientes del desplazamiento $\frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}$ en la ecuación (II) (el medio conductor) y utilizando (V) y (VII), escribimos las ecuaciones (I) y (II) de la forma

$$\operatorname{rot} E + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad (I')$$

$$\operatorname{rot} H = -\frac{4\pi\sigma}{c} E. \quad (II')$$

Tomamos rot de las ambas partes de la igualdad (I'), diferenciamos la igualdad (II') con respecto a t , eliminamos H de los resultados obtenidos y utilizamos las relaciones (IV) y (VI) y la igualdad conocida del análisis vectorial $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \alpha = \operatorname{grad} \operatorname{div} \alpha - \operatorname{div} \operatorname{grad} \alpha^*$; esto lleva a la ecuación

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \operatorname{div} \operatorname{grad} E. \quad (3)$$

Análogamente se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \operatorname{div} \operatorname{grad} H. \quad (4)$$

Según el planteamiento $E = E(\xi, t)$, $H = H(\xi, t)$, donde ξ es la distancia que se mide desde cierto plano fijo. En el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares (ξ, η, ζ) el operador de Laplace se escribe en la forma

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

por consiguiente

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} E = \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2}, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} H = \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}.$$

Por eso las ecuaciones (3) y (4) se transforman en (1) y (2).

*) Esta igualdad es válida para cualquier vector α que sea dos veces continuamente derivable.

2. Medios heterogéneos, factores concentrados; ecuaciones con coeficientes variables y condiciones de conjugación

12. Si dirigimos al eje x según la barra, colocando el origen de las coordenadas en el lugar de unión de las barras, entonces el problema de contorno para determinar la temperatura dentro de la barra compuesta puede ser escrito de la forma

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \end{array} \right\} \quad 0 < t < +\infty,$$

- a) $u_1(0, t) = u_2(0, t)$, $\lambda_1 u_{1x}(0, t) = \lambda_2 u_{2x}(0, t)$, $0 < t < +\infty$,
 b) $u_1(0, t) = u_2(0, t)$, $\lambda_2 u_{2x}(0, t) - \lambda_1 u_{1x}(0, t) = C_0 u_{1t}(0, t) = C_0 u_{2t}(0, t)$, $0 < t < +\infty$,
 $u_1(x, 0) = f(x)$, $-\infty < x < 0$, $u_2(x, 0) = f(x)$, $0 < x < +\infty$.

13. Dirigiendo el eje x según el eje de los cilindros y coloceanndo el origen de las coordenadas en el lugar de unión de éstos, obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -l_1 < x < 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l_2, \end{array} \right\} \quad 0 < t < +\infty,$$

- $u_{1x}(-l_1, t) = 0$, $u_{2x}(l_2, t) = 0$, $0 < t < +\infty$,
 a) $u_1(0, t) = u_2(0, t)$, $D_1 u_{1x}(0, t) = D_2 u_{2x}(0, t)$, $0 < t < +\infty$,
 b) $-D_1 u_{1x}(0, t) = \alpha [u_1(0, t) - u_2(0, t)]$, $-D_2 u_{2x}(0, t) = \alpha [u_1(0, t) - u_2(0, t)]$, $0 < t < +\infty$,
 $u_1(x, 0) = f(x)$, $-l_1 < x < 0$, $u_2(x, 0) = f(x)$, $0 < x < l_2$.

14. Si en el momento $t = 0$ el horno se encontraba en el punto $x = 0$ de la barra, entonces el problema de contorno para determinar la temperatura dentro de la barra puede ser escrito de la forma

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < v_0 t, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad v_0 t < x < +\infty,$$

- $u_1(v_0 t, t) = u_2(v_0 t, t)$, $\lambda \sigma [u_{1x}(v_0 t, t) - u_{2x}(v_0 t, t)] = Q$, $0 < t < +\infty$,
 $u_1(x, 0) = f(x)$, $-\infty < x < 0$, $u_2(x, 0) = f(x)$, $0 < x < +\infty$,

donde Q es la cantidad de calor que desprende el horno eléctrico durante una unidad de tiempo; λ , el coeficiente de la conductibilidad térmica; σ , el área de la sección transversal de la barra.

Mediante la función δ impulsiva, el problema de contorno puede ser formulado en la forma más compacta

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q}{c\rho} \delta(x - v_0 t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

15. Colocando el origen de las coordenadas sobre la superficie del metal y denotando por $\xi(t)$ la profundidad a que se propagó el endurecimiento hasta el momento t , obtenemos el problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & 0 < x < \xi(t), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \xi(t) < x < l, \end{aligned} \right\} \quad 0 < t < t_l,$$

$$u_1(0, t) = U_1 = \text{const}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} - \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} = \nu \rho_2 \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad 0 < t < t_l,$$

$$u_1(\xi(t), t) = u_2(\xi(t), t) = 0, \quad 0 < t < t_l,$$

$$u_{2x}(l, t) = 0, \quad 0 < t < t_l, \quad u_2(x, 0) = U_0, \quad 0 < x < l$$

Aquí por el cero de la temperatura se tomó la defusión (temperatura de solidificación) del metal. λ_1 y λ_2 son los coeficientes de la conductibilidad térmica del metal sólido y líquido; a_1^2 y a_2^2 , sus coeficientes de termodifusividad; ν , el calor oculto de fusión, ρ_2 , la densidad de la masa del metal fundido; t_l , el tiempo con el que $\xi(t_l) = l$.

Si la temperatura varía dentro de límites muy amplios y no se puede despreciar la dependencia con respecto a t de los coeficientes de la conductibilidad térmica, de los calores específicos y de las densidades de masa, entonces las ecuaciones (1) deben ser sustituidas por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} c_1 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right), & 0 < x < \xi(t), \\ c_2 \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right), & \xi(t) < x < l, \end{aligned} \right\} \quad 0 < t < t_l. \quad (1')$$

16. Colocando el origen de las coordenadas sobre el plano de la placa, dirigiendo el eje x perpendicularmente a la capa y e jo, para determinar las velocidades de las part
problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} u_t &= \nu u_{xx}, & -l_1 < x < 0, \\ u_t &= \nu u_{xx}, & 0 < x < l_2, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} u(-l_1, t) &= 0, & u(l_2, t) = 0, \\ u(0-0, t) &= u(0+0, t) = w, \end{aligned} \right\} \quad 0 < t < +\infty,$$

donde w es la velocidad del movimiento de la placa,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\rho v}{\gamma} [u_x(0+0, t) - u_x(0-0, t)] + g, \quad 0 < t < +\infty, \quad w(0) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -l_1 < x < 0, \quad 0 < x < l_2.$$

Aquí v es la masa de una unidad del área de la placa; ρ , la densidad de la masa del líquido.

17. Para determinar la temperatura dentro de la barra obtenemos el problema de contorno

$$\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{2\alpha \left(1 - \frac{x}{L}\right)}{c\rho r_0 \cos \gamma} u,$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad u(x, 0) = U_0, \quad 0 < x < l,$$

$$a^2 = \frac{\lambda}{cp}. \quad (1)$$

Aquí L es la altura del cono completo que se obtiene prolongando la barra dada; γ , la mitad del ángulo de abertura del cono; r_0 , el radio de la base mayor del cono truncado; l , su altura; λ , c , ρ , el coeficiente de la conductibilidad térmica, el calor específico y la densidad de la masa de la sustancia del cono, respectivamente; α , el coeficiente del intercambio de calor por convección entre la superficie del cono y el medio ambiente.

3. Semejanza de problemas de contorno

18. El problema de contorno sobre el calentamiento de la barra con la superficie lateral de aislación térmica, el problema (I),

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{cp}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \quad (1)$$

$$u'(0, t') = \varphi'(t') \neq 0, \quad u'(l', t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \quad (2)$$

$$u'(x', 0) = 0, \quad 0 < x' < l', \quad (3)$$

es análogo al problema de contorno 10, el problema (II), sobre el movimiento de la capa del líquido viscoso

$$\frac{\partial u''}{\partial t''} = \nu \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \quad (1')$$

$$u''(0, t'') = \varphi''(t'') \neq 0, \quad u''(l'', t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \quad (2')$$

$$u''(x'', 0) = 0, \quad 0 < x'' < l''. \quad (3')$$

Para que el problema (I) sea semejante al problema (II) con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u , es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$\varphi'(t') = k_u \varphi''(t'') \quad \text{para } 0 < t' < +\infty, \quad (4)$$

donde $t' = k_t t''$ y

$$a^2 = \frac{k_x^2}{k_t} \nu, \quad k_x = \frac{l'}{l''}. \quad (5)$$

Solución. El establecimiento de la analogía es obvio. Demostraremos la necesidad y la suficiencia de las condiciones (4) y (5).

Necesidad. Sea

$$u'(x', t') = k_u u''(x'', t'') \quad \text{para } x' = k_x x'', \quad t' = k_t t'',$$

además (x', t') recorre $D_I \{0 < x' < l', 0 < t' < +\infty\}$, cuando (x'', t'') recorre

$$D_{II} \{0 < x'' < l'', 0 < t'' < +\infty\}. \quad (6)$$

Entonces se debe cumplirse la igualdad $u'(0, t') = k_u u''(0, t'')$ para $0 < t'' < +\infty$, es decir, en virtud de (2) y (2') debe cumplirse la igualdad (4). Diferenciando la igualdad $u'(x', t') = k_u u''(x'', t'')$ respecto a x'' y t'' y utilizando las igualdades $x' = k_x x''$, $t' = k_t t''$, obtenemos

$$k_t \frac{\partial u'}{\partial t'} = k_u \frac{\partial u''}{\partial t''}, \quad k_x^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = k_u \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2}.$$

Dado que $u''(x'', t'')$ debe satisfacer la ecuación (1'), entonces en consecuencia debe cumplirse la igualdad

$$k_u \left(\frac{\partial u''}{\partial t''} - v \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2} \right) = k_t \frac{\partial u'}{\partial t'} - v k_x^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = 0,$$

es decir, para $u'(x', t')$ debe cumplirse la ecuación

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = v \frac{k_x^2}{k_t} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty.$$

De este modo $u'(x', t')$ debe ser no sólo la solución del problema de contorno (1), (2), (3), sino también la solución del problema de contorno

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = v \frac{k_x^2}{k_t} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \quad (1'')$$

$$u'(0, t') = \varphi'(t'), \quad 0 < t' < +\infty, \quad (2'')$$

$$u'(x', t') = 0, \quad 0 < x' < l'. \quad (3'')$$

De aquí deducimos que se cumple la relación

$$a^2 = v \frac{k_x^2}{k_t}.$$

En efecto, restando (1'') de (1), obtenemos

$$0 \equiv \left(a^2 - v \frac{k_x^2}{k_t} \right) \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}.$$

Si hemos supuesto que $\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \equiv 0$, entonces en virtud de la ecuación (1'') (ó (1)) sería $\frac{\partial u'}{\partial t'} \equiv 0$ pero esto es imposible, dado que $u(0, t') = \varphi'(t')$, además $\varphi'(t') \not\equiv 0$. Por consiguiente,

$$a^2 - v \frac{k_x^2}{k_t} = 0,$$

lo es que se quería demostrar.

Suficiencia. Pasamos a las magnitudes adimensionales ξ , τ , U en los problemas (I) y (II) mediante las fórmulas

$$x' = l' \xi, \quad t' = t'_0 \tau, \quad u' = u'_0 U(\xi, \tau), \quad x'' = l'' \xi, \quad t'' = t''_0 \tau, \quad u'' = u''_0 U(\xi, \tau),$$

donde las constantes t'_0 y t''_0 tienen la dimensión del tiempo, u'_0 y u''_0 tienen respectivamente las dimensiones de u' y u'' , además estas constantes son elegidas de tal modo que

$$\frac{t'_0}{t''_0} = k_t, \quad \frac{u'_0}{u''_0} = k_u.$$

Recordemos que además se cumple la relación

$$k_x = \frac{l'}{l''}.$$

Los problemas de contorno (I) y (II) tomarán la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{t'_0}{l'^2} a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, & 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ U(0, \tau) &= \frac{1}{u'_0} \varphi'(t'_0 \tau), & 0 < \tau < +\infty, \\ U(\xi, 0) &= 0, & 0 < \xi < 1, \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{t''_0}{l''^2} v \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}, & 0 < \xi < 1, \quad 0 < \tau < +\infty, \\ U(0, \tau) &= \frac{1}{u''_0} \varphi''(t''_0 \tau), & 0 < \tau < +\infty, \\ U(\xi, 0) &= 0, & 0 < \xi < 1. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (\text{I}') \\ (\text{II}') \end{array}$$

De (4) resulta que

$$\frac{1}{u'_0} \varphi'(t'_0 \tau) = \frac{1}{u''_0} \varphi''(t''_0 \tau), \quad 0 < \tau < +\infty.$$

De (5) resulta que

$$\frac{t'_0}{l'^2} a^2 = \frac{t''_0}{l''^2} v,$$

es decir, en los problemas (I') y (II') coinciden idénticamente las ecuaciones, las condiciones iniciales y de frontera; por consiguiente (en virtud del teorema de unicidad), coinciden sus soluciones.

De esta manera

$$U(\xi, \tau) = \frac{1}{u'_0} u'(x', t') = \frac{1}{u''_0} u''(x'', t''),$$

es decir,

$$u'(x', t') = k_u u''(x'', t''),$$

lo que se exigía a demostrar.

19. El problema de contorno para determinar la temperatura dentro de la barra sobre la superficie lateral de que se realiza el intercambio de calor por convección con un medio la temperatura del cual es igual a cero

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{\alpha p}{c \rho \sigma} u', \quad a^2 = \frac{\lambda}{c \rho}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \quad (1)$$

$$u'(0, t') = \varphi'(t'), \quad 0 < t' < +\infty, \quad \left. \frac{\partial u'}{\partial x'} \right|_{x'=l'} = 0, \quad (2)$$

$$u'(x', 0) = 0, \quad 0 < x' < l' \quad (3)$$

es análogo al problema de contorno para determinar la concentración de la sustancia en difusión la velocidad de la desintegración de que es proporcional

a la concentración

$$\frac{\partial u''}{\partial t''} = D \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2} - \beta u'', \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \quad (1')$$

$$u''(0, t'') = \varphi''(t''), \quad 0 < t'' < +\infty, \quad \left. \frac{\partial u''}{\partial x''} \right|_{x''=l''} = 0, \quad (2')$$

$$u''(x'', 0) = 0, \quad 0 < x'' < l''. \quad (3')$$

Para que el primer problema sea semejante al segundo con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u dados, es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$\psi'(t') = k_u \varphi''(t'') \quad \text{para } 0 < t'' < +\infty, \quad \text{donde } t' = k_t t'', \quad (4)$$

$$a^2 = \frac{k_x^2}{k_t} D, \quad k_x = \frac{l'}{l''}, \quad (5)$$

$$\frac{\alpha p}{c \rho \sigma} = \frac{1}{k_t} \beta. \quad (6)$$

Indicación. La demostración de la necesidad y de la suficiencia de las condiciones (4), (5), (6) se realiza análogamente como esto se hacía para las condiciones (4) y (5) en la solución del problema anterior.

20. El problema (I) «Hallar la tensión de la corriente eléctrica en un cable de longitud finita con autoinducción despreciablemente pequeña, si a uno de sus extremos está aplicada la fuerza electromotriz que varía según una ley dada y el otro extremo está puesto a tierra por la resistencia concentrada R_0 » es análogo al problema (II) formulado más arriba (véase el planteamiento del problema) para determinar la temperatura dentro de la barra, dado que el problema (I) puede ser escrito en la forma*)

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = \frac{1}{RC} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{G}{C} u', \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \quad (1)$$

$$u'(0, t') = \psi'(t'), \quad \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{R}{R_0} u' \right]_{x'=l'} = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \quad (2)$$

$$u'(x', 0) = 0, \quad 0 < x' < l', \quad (3)$$

y el problema (II), en la forma

$$\frac{\partial u''}{\partial t''} = a^2 \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2} - \frac{\alpha p}{c \rho \sigma} u'', \quad a^2 = \frac{\lambda}{c \rho}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \quad (1')$$

$$u''(0, t'') = \varphi''(t''), \quad \left[\frac{\partial u''}{\partial x''} + \frac{\alpha}{\lambda} u'' \right]_{x''=l''} = 0, \quad 0 < t'' < +\infty \quad (2')$$

$$u''(x'', 0) = 0, \quad 0 < x'' < l''. \quad (3')$$

*) Acerca de las notaciones véase el problema 2 del cap. III y el problema 19 del cap. II.

Para que el problema (I) sea semejante al (II) con los coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u , es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$\varphi'(t') = k_u \varphi''(t''), \quad 0 < t'' < +\infty, \quad \text{donde} \quad t' = k_t t'', \quad (4)$$

$$\frac{1}{RC} = \frac{k_x^2}{k_t} a^2, \quad k_x = \frac{l'}{l''}, \quad (5)$$

$$\frac{G}{C} = \frac{1}{k_t} \frac{\alpha p}{c \rho \sigma}, \quad (6)$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{1}{k_x} \frac{\alpha}{\lambda}. \quad (7)$$

21. El problema de contorno sobre el calentamiento de la barra $0 \leq x \leq l'$ con la superficie lateral termoaislada (el problema I)

$$\frac{\partial u'}{\partial t'} = a^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c \rho}, \quad 0 < x' < l', \quad 0 < t' < +\infty, \quad (1)$$

$$u'(0, t') = U_0, \quad u'_{x'}(l', t') = 0, \quad 0 < t' < +\infty, \quad (2)$$

$$u'(x', 0) = 0, \quad 0 < x' < l' \quad (3)$$

es análogo al problema de contorno, formulado en el planteamiento, sobre la propagación del campo electromagnético plano dentro de la capa conductora $0 \leq x'' \leq l''$ (el problema II)

$$\frac{\partial u''}{\partial t''} = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu} \frac{\partial^2 u''}{\partial x''^2}, \quad 0 < x'' < l'', \quad 0 < t'' < +\infty, \quad (1')$$

$$u''(0, t'') = H_0, \quad u''_{x''}(l'', t'') = 0, \quad 0 < t'' < +\infty, \quad (2')$$

$$u''(x'', 0) = 0, \quad 0 < x'' < l''. \quad (3')$$

Para que el primer problema sea semejante al segundo con dados coeficientes de semejanza k_x , k_t , k_u es necesario y suficiente que se cumplan las relaciones

$$U_0 = k_u H_0, \quad (4)$$

$$a^2 = \frac{k_x^2}{k_t} \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}, \quad (5)$$

$$k_x = \frac{l'}{l''}. \quad (6)$$

§ 2. Método de separación de variables

1. Medios homogéneos Isotrópicos. Ecuaciones con coeficientes constantes

a) Problemas de conducción calorífica con condiciones de frontera y términos independientes constantes

22. a) La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c \rho}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n \pi \xi}{l} d\xi.$$

b) Si $f(x) \equiv U_0 = \text{const}$, entonces

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\frac{(2h+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}, \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

En el punto $x = \frac{l}{2}$ tenemos

$$u\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2k+1} e^{-\frac{(2h+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}. \quad (5)$$

Dado que la serie del segundo miembro de la última igualdad satisface las condiciones del teorema Leibniz sobre las series de términos de signo variable, entonces el resto de la serie (5) no sobrepasa por su valor absoluto al primero de los términos omitidos, es decir,

$$\left| R_n\left(\frac{l}{2}, t\right) \right| = \left| \frac{4U_0}{\pi} \sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2k+1} e^{-\frac{(2h+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \right| \leq \frac{4U_0}{\pi} \frac{e^{-\frac{(2n+3)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}}{2n+3}. \quad (6)$$

Estimamos, finalmente, la razón de la suma de todos los términos de la serie (5), empezando desde el segundo, con respecto al primer término de esta serie. En virtud de (6) tenemos

$$\left| \frac{R_0\left(\frac{l}{2}, t\right)}{\frac{4U_0}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{l^2}}} \right| \leq \frac{1}{3} e^{-\frac{8\pi^2 a^2}{l^2} t} \leq \varepsilon \quad \text{para} \quad t \geq t^* = -\frac{l^2}{8\pi^2 a^2} \ln 3\varepsilon, \quad (7)$$

donde $\varepsilon > 0$ es un número positivo arbitrario dado de antemano.

Observación. Para estimar el error que se comete al sustituir la suma de la serie (4) por su suma parcial en otros puntos $x \neq \frac{l}{2}$ se puede utilizar el criterio de Abel. Pero la estimación del resto de la serie según el criterio de Abel cuando se acerca a los extremos del intervalo $0 < x < l$ resulta mala. Se puede indicar

el método que da la estimación uniforme para el resto de la serie en todo el intervalo $0 \leq x \leq l$:

$$\begin{aligned} |R_n(x, t)| &= \left| \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{(2k+1) \pi x}{l} \right| \leq \\ &\leq \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} < \frac{4U_0}{\pi} \int_n^{+\infty} \frac{1}{2z+1} e^{-\frac{(2z+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} dz = \\ &= \frac{2U_0}{\pi} \int_{A_n}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} d\zeta, \end{aligned}$$

donde $A_n = \frac{(2n+1) \pi a \sqrt{t}}{l}$.

Integrando por partes, obtenemos

$$\int_{A_n}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2A_n^2} e^{-A_n^2} + \int_{A_n}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta^3} d\zeta.$$

Pero

$$\int_{A_n}^{+\infty} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta^3} d\zeta < e^{-A_n^2} \int_{A_n}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\zeta^3} = \frac{e^{-A_n^2}}{2A_n^2}.$$

Pero eso

$$|R_n(x, t)| < \frac{2U_0}{\pi} \frac{e^{-A_n^2}}{A_n^2}, \quad \text{donde } A_n = \frac{(2n+1) \pi a \sqrt{t}}{l}.$$

23. La solución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty \quad (3)$$

con la condición (1) y las condiciones de frontera (2) (véase el planteamiento del problema) es

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{l} + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \{(U_0 - U_1)[1 - (-1)^n] + (-1)^{n+1}(U_1 - U_2)\} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l}. \quad (4) \end{aligned}$$

La temperatura establecida dentro de la barra es igual a

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{l}. \quad (5)$$

Indicación. La solución de la ecuación (3) con la condición inicial (1) y las condiciones de frontera (2) se puede buscar de la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + \bar{u}(x), \quad (6)$$

donde la función $\bar{u}(x)$ se determina como la solución estacionaria de la ecuación (3) que satisface las condiciones de frontera (2), es decir,

$$\frac{d^2\bar{u}(x)}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad \bar{u}(0) = U_1, \quad \bar{u}(l) = U_2,$$

de donde

$$\bar{u}(x) = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{x}{l},$$

es decir, $\bar{u}(x)$ es el límite a que tiende la temperatura dentro de la barra cuando $t \rightarrow +\infty$.

La función $v(x, t)$ satisfacerá la ecuación (3) y las condiciones

$$v(x, 0) = U_0 - \bar{u}(x), \quad (7)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0, \quad (8)$$

es decir, $v(x, t)$ es la solución del primer problema de contorno con las condiciones de frontera nulas. Tal problema ya fue examinado (véase el problema 22).

24. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0), \quad a^2 = \frac{\lambda}{cp}, \quad h = \frac{dp}{cp\sigma}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = U_1, \quad u(l, t) = U_2, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = u_0 + w(x) + v(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (4)$$

donde

$$w(x) = \frac{(U_1 - u_0) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} (l - x) + (U_2 - u_0) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} x}{\operatorname{sh} \frac{l\sqrt{h}}{a}}, \quad 0 < x < l, \quad (5)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} + h\right)t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (6)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l [f(\xi) - w(\xi) - u_0] \operatorname{sen} \frac{n\pi\xi}{l} d\xi. \quad (7)$$

En particular, si $U_1 = U_2 = 0$ y $f(x) \equiv 0$, entonces

$$w(x) = -u_0 \frac{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a}(l-x) + \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a}x}{\operatorname{sh} \frac{l\sqrt{h}}{a}}, \quad 0 < x < l, \quad (5')$$

$$v(x, t) = -\frac{4hl^2u_0}{\pi a^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{l}}{(2k-1)\{(2k-1)^2\pi^2a^2+hl^2\}} \times \\ \times e^{-\left[\frac{(2k-1)^2\pi^2a^2}{l^2}+h\right]t}. \quad (6')$$

25. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \cos \frac{n\pi z}{l} dz, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Para obtener la temperatura en el caso del intercambio de calor sobre la superficie lateral se debe multiplicar el segundo miembro de (4) por e^{-ht} , donde h tiene el mismo significado que en el problema anterior.

26. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$-\lambda \sigma u_x(0, t) = q_1, \quad \lambda \sigma u_x(l, t) = q_2, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = w(x) + v(x, t), \quad (4)$$

donde

$$w(x) = \frac{a}{\sqrt{h}} Q_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} x + \frac{Q_2 - Q_1 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{h}}{a} l}{\frac{\sqrt{h}}{a} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} l} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{h}}{a} x, \quad 0 < x < l, \quad (5)$$

$$Q_1 = -\frac{q_1}{\lambda \sigma}, \quad Q_2 = \frac{q_2}{\lambda \sigma}, \quad (6)$$

$$v(x, t) = \frac{a_0}{2} e^{-ht} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}+h\right)t} \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (7)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l [f(z) - w(z)] \cos \frac{n\pi z}{l} dz, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Indicación. Véase la resolución del problema 23.

27. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = U_0, \quad \lambda \sigma u_x(l, t) = q_0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = Q_0 x + U_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ a_n - \frac{4}{\pi^2} \frac{(2n+1)\pi U_0 + (-1)^n 2l Q_0}{(2n+1)^2} \right\} \times \\ \times e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad (4)$$

donde

$$Q_0 = \frac{q_0}{\lambda \sigma}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin \frac{(2n+1)\pi z}{2l} dz \quad (5)$$

y σ es el área de la sección transversal de la barra.

Si $Q_0 = 0$, $f(x) \equiv 0$, entonces

$$u(x, t) = U_0 - \frac{4U_0}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{1}{2h+1} e^{-\frac{(2h+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} \sin \frac{(2h+1)\pi x}{2l}, \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (6)$$

En el punto $x = l$ tenemos

$$u(l, t) = U_0 - \frac{4U_0}{\pi} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} e^{-\frac{(2h+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}}, \quad 0 < t < +\infty. \quad (7)$$

Según el teorema de Leibniz sobre las series de término de signo variable obtenemos la estimación para el resto de la serie (7)

$$|R_n(l, t)| = \left| \frac{4U_0}{\pi} \sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^h}{2h+1} e^{-\frac{(2h+1)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}} \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{4U_0}{\pi(2n+3)} e^{-\frac{(2n+3)^2 \pi^2 a^2 t}{4l^2}}, \quad 0 < t < +\infty. \quad (8)$$

Estimamos, finalmente, la razón de $R_n(l, t)$ y $\frac{4U_0}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{4l^2}}$. En virtud de (8)

$$\frac{|R_n(l, t)|}{\frac{4U_0}{\pi} e^{-\frac{\pi^2 a^2 t}{4l^2}}} \leqslant \frac{1}{3} e^{-\frac{2\pi^2 a^2 t}{l^2}} \leqslant \varepsilon \quad \text{para} \quad t \geqslant t^* = -\frac{l^2}{2\pi^2 a^2} \ln 3\varepsilon. \quad (9)$$

Observación. No es difícil obtener la estimación uniforme para el resto $R_n(x, t)$ de la serie sobre el segmento $0 \leq x \leq l$ mediante el método indicado en la observación a la respuesta del problema 22 del presente parágrafo.

28. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = \frac{q}{\lambda \sigma} = Q, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

donde λ es el coeficiente de la conductibilidad térmica, σ , el área de la sección transversal,

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

68

$$\begin{aligned} u(x, t) = Q \left[\frac{a^2 t}{l} + \frac{3x^2 - l^2}{6l} + \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \times \right. \\ \left. \times \frac{e^{-\frac{h^2 \pi^2 a^2 k^2}{l^2} t}}{k^2} \cos \frac{k \pi x}{l} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

En el punto $x = 0$ tenemos

$$u(0, t) = Q \left[\frac{a^2 t}{l} - \frac{l}{6} + \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} e^{-\frac{h^2 \pi^2 a^2 k^2}{l^2} t} \right], \quad 0 < t < +\infty. \quad (5)$$

Según el principio de Leibniz para el resto de la serie logramos la estimación

$$\begin{aligned} |R_n(0, t)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{2Ql}{\pi^2} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} e^{-\frac{h^2 \pi^2 a^2 k^2}{l^2} t} \right| \leqslant \\ \leqslant \frac{2Ql}{\pi^2 (n+1)^2} e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \quad 0 < t < +\infty. \quad (6) \end{aligned}$$

Indicación. Para obtener (4) se puede reducir el problema de contorno (1), (2), (3) al primer problema de contorno mediante la sustitución $v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, resolver el problema de contorno para v y después integrar v con respecto a x ; con esto aparecerá como sumando una función arbitraria del tiempo. Calculando la cantidad de calor dentro de la barra mediante dos métodos (véase la indicación a la respuesta del problema 41 del presente capítulo) se puede determinar esta función.

Observación. Sobre la estimación uniforme del resto $R_n(x, t)$ sobre el segmento $0 \leq x \leq l$ véase la observación a la respuesta del problema anterior.

$$\begin{aligned} 29. \quad u(x, t) = U_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2hl \sqrt{(hl)^2 + \mu_n^2}}{\mu_n [(hl)^2 + (hl) + \mu_n^2]} \times \right. \\ \left. \times e^{-\frac{\mu_n^2 a^2 t}{l^2}} \cos \frac{\mu_n x}{l} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

donde h es el coeficiente del intercambio de calor que entra en la condición de frontera $u_x(l, t) + h[u(l, t) - U_0] = 0$, y μ_n , las raíces positivas de la ecuación trascendente

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{hl} \mu, \quad (2)$$

que forman una superficie que tiende monótonamente a $+\infty$.

En el punto $x = 0$ tenemos

$$u(0, t) = U_0 \left[1 + \sum_{h=1}^{+\infty} (-1)^h \frac{2hl \sqrt{(hl)^2 + \mu_h^2}}{\mu_h [(hl)^2 + (hl) + \mu_h^2]} e^{-\frac{\mu_h^2 a^2}{l^2} t} \right]. \quad (3)$$

No es difícil verificar que la serie (3) satisface las condiciones del teorema de Leibniz sobre las series de términos de signo variable; por eso para el resto de la serie (3) obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} |R_n(0, t)| &= \left| U_0 \sum_{h=n+1}^{+\infty} (-1)^h \frac{2hl \sqrt{(hl)^2 + \mu_h^2}}{\mu_h [(hl)^2 + (hl) + \mu_h^2]} e^{-\frac{\mu_h^2 a^2}{l^2} t} \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{2U_0 hl \sqrt{(hl)^2 + \mu_{n+1}^2}}{\mu_{n+1} [(hl)^2 + (hl) + \mu_{n+1}^2]} e^{-\frac{\mu_{n+1}^2 a^2}{l^2} t}. \end{aligned} \quad (4)$$

En virtud de (4) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{|R_n(0, t)|}{\frac{2U_0 hl \sqrt{(hl)^2 + \mu_1^2}}{\mu_1 [(hl)^2 + (hl) + \mu_1^2]} e^{-\frac{\mu_1^2 a^2}{l^2} t}} &\leqslant \\ &\leqslant \frac{(hl)^2 + hl + \mu_1^2}{(hl)^2 + hl + \mu_2^2} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{hl}{\mu_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{hl}{\mu_1}\right)^2} e^{-\frac{(\mu_2^2 - \mu_1^2) a^2}{l^2} t}} \leqslant \varepsilon \end{aligned} \quad (5)$$

para

$$t \geq t^* = -\frac{l^2}{(\mu_2^2 - \mu_1^2) a^2} \ln \left[\varepsilon \frac{(hl)^2 + hl + \mu_2^2}{(hl)^2 + hl + \mu_1^2} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{hl}{\mu_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{hl}{\mu_2}\right)^2}} \right].$$

Observación. La estimación uniforme para el resto $R_n(x, t)$ de la serie sobre el segmento $0 \leq x \leq l$ puede ser realizada análogamente a la observación en la página 252.

Tomando en consideración que para las raíces $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \mu_{n+1} < \dots$ de la ecuación trascendente (2) tiene lugar la desigualdad

$$\frac{\pi}{2} < \mu_{n+1} - \mu_n < \pi,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 |R_n(x, t)| &\leqslant 2U_0hl \sum_{h=n+1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(hl)^2 + \mu_h^2} e^{-\frac{\mu_h^2 a^2 t}{l^2}}}{\mu_h [(hl)^2 + (hl) + \mu_h^2]} < \\
 &< \frac{4U_0hl}{\pi} \int_{\mu_n}^{+\infty} \left[\left(\frac{hl}{\mu} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \frac{e^{-\frac{\mu^2 a^2 t}{l^2}}}{(hl)^2 + hl + \mu^2} d\mu < \\
 &< \frac{4U_0hl}{\pi} \left[\left(\frac{hl}{\mu_n} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \int_{\mu_n}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\mu^2 a^2 t}{l^2}}}{\mu^2} d\mu < \\
 &< \frac{2U_0ah\sqrt{t}}{\pi} \left[\left(\frac{hl}{\mu_n} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \frac{e^{-A_n^2}}{A_n^3},
 \end{aligned}$$

donde

$$A_n = \frac{\mu_n a \sqrt{t}}{l}.$$

30. a) La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) - H[u(0, t) - U_1] = 0, \quad u_x(l, t) + H[u(l, t) - U_2] = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = w(x) + v(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

donde

$$w(x) = H \frac{U_2 - U_1}{2 + lH} x + \frac{U_2 + (1 + lH) U_1}{2 + lH}, \quad 0 < x < l. \quad (5)$$

y

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 h t} \left(\cos \lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right), \\
 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,
 \end{aligned} \quad (6)$$

$\lambda_n = \frac{z_n}{l}$, z_n son las raíces positivas de la ecuación trascendente

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{lH} - \frac{lH}{z} \right). \quad (7)$$

Las funciones propias *)

$$X_n(x) = \cos \lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n} \sin \lambda_n x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

son ortogonales sobre el segmento $0 \leq x \leq l$; el cuadrado de la norma de las funciones propias $X_n(x)$ es igual a

$$\| X_n \| ^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{(\lambda_n^2 + H^2)l + 2H}{2\lambda_n^2}, \quad (9)$$

$$a_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + H^2)l + 2H} \int_0^l [f(z) - w(z)] \left(\cos \lambda_n z + \frac{H}{\lambda_n} \sin \lambda_n z \right) dz. \quad (10)$$

b) Si la temperatura del medio en ambos extremos es idéntica y la temperatura inicial de la barra es igual a cero, entonces, tomando el medio de la barra por el origen de las coordenadas, obtenemos que la temperatura dentro de la barra es una función par de x , es decir, para $x = 0$ será $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. De esta manera en vez de examinar toda la barra se puede considerar sólo su mitad, además, para determinar la temperatura obtenemos el problema de contorno 29 (para eso l debe ser sustituida por $\frac{l}{2}$).

31. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) - H[u(0, t) - U_1] = 0, \quad u_x(l, t) + H[u(l, t) - U_2] = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = v(x) + v'(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

donde

$$v(x) = H \frac{\left[U_2 \frac{\sqrt{h}}{a} - U_1 \left(H \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} l - \frac{\sqrt{h}}{a} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{h}}{a} l \right) \right] \operatorname{ch} \frac{\sqrt{h}}{a} x}{\left(H^2 + \frac{h}{a^2} \right) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} l} + \\ + H \frac{\left[U_1 \left(H \operatorname{ch} \frac{\sqrt{h}}{a} l + \frac{\sqrt{h}}{a} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} l \right) + U_2 H \right] \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} x}{\left(H^2 + \frac{h}{a^2} \right) \operatorname{sh} \frac{\sqrt{h}}{a} l}, \quad (5)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-(a^2 \lambda_n^2 + h)t} \left(\cos \lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right), \quad (6)$$

*) Para más detalles véase la solución del problema 111 del cap. II; las funciones propias que se examinan allí se obtienen multiplicando las funciones propias (8) por $\frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n^2 + h^2}}$ por eso, conociendo el cuadrado de la norma de las funciones que se examinan en el problema 111 del cap. II, no es difícil obtener el cuadrado de la norma de las funciones propias (8).

λ_n , $X_n(x) = \cos \lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n} \operatorname{sen} \lambda_n x$ y a_n se determinan del mismo modo que en la respuesta al problema anterior.

32. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - h [u - u_0], \quad -\pi < x < \pi, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\pi < x < \pi, \quad (2)$$

$$u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

es:

$$u(x, t) = u_0 + e^{-ht} v(x, t), \quad (4)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) e^{-n^2 a^2 t}, \quad (5)$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - u_0] dx, \quad (6)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - u_0] \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - u_0] \operatorname{sen} nx dx. \quad (7)$$

Si la temperatura inicial del anillo $f(x) = u_1$, = const, entonces

$$u(x, t) = u_0 + e^{-ht} [u_1 - u_0].$$

b) Problemas de conducción calorífica con condiciones de frontera variables y términos t -dependientes vinculados a x y t

33. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = At, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{A}{l} xt + \frac{Ax}{3a^2 l^2} (x^2 - l^2) + v(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{l}, \quad (5)$$

donde

$$a_n = -\frac{A}{3a^2 l^2} \int_0^l z (z^2 - l^2) \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} dz. \quad (6)$$

$$34. u(x, t) = \left\{ \int_0^l \Phi(\tau) e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} (t-\tau)} d\tau \right\} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{l} + \\ + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz. \quad (2)$$

Indicación. La solución parcial que satisface las condiciones de frontera (véase el planteamiento del problema) se puede buscar en la forma

$$w(x, t) = \varphi(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (3)$$

donde $\varphi(t)$ es la función que debe ser determinada.

35. a) La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

dónde $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{cp}$, es

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^l \varphi(\xi) \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \right\} d\xi + \\ & + \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi, \tau) \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} (t-\tau)} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \right\} d\xi. \end{aligned}$$

b) La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q}{cp} \delta(x - x_0), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es:

$$u(x, t) = \frac{2Ql}{cp\pi^2 a^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(-e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2} t} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x_0}{l}. \quad (4)$$

36. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} - hu + \frac{A}{cp\sigma l} e^{-ht} \delta(x - v_0 t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \frac{l}{v_0}, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < \frac{l}{v_0}, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l,$$

es

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2A}{cp\sigma l} e^{-ht} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{v_0^2 + \frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}} \times \\ & \times \left(\sin \frac{n\pi v_0 t}{l} - \frac{v_0 l}{n\pi} \cos \frac{n\pi v_0 t}{l} + \frac{v_0 l}{n\pi} \right). \end{aligned}$$

37. Se debe resolver el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = \psi_1(t), \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \quad (3)$$

Si se exige que la función

$$\psi(x, t) = (\alpha_1 x + \beta_1) \psi_1(t) + (\alpha_2 x + \beta_2) \psi_2(t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty \quad (4)$$

satisfaga las condiciones de frontera (2) del problema de contorno (1), (2), (3) entonces los coeficientes se determinan únicamente:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2+hl}, \quad \beta_1 = \frac{1+hl}{(2+hl)h}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2+hl}, \quad \beta_2 = \frac{1}{h(2+hl)}. \quad (5)$$

La solución del problema de contorno (1), (2), (3) se puede buscar de la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (6)$$

donde $v(x, t)$ es una función incógnita nueva y $\psi(x, t)$ ya está determinada. Para la función $v(x, t)$ obtenemos el problema de contorno

$$v_t = a^2 v_{xx} + f^*(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (7)$$

$$v_x(0, t) - hv(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) + hv(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (8)$$

$$v(x, 0) = \varphi^*(x), \quad 0 < x < l, \quad (9)$$

donde

$$f^*(x, t) = f(x, t) - (\alpha_1 x + \beta_1) \psi'_1(t) - (\alpha_2 x + \beta_2) \psi'_2(t), \quad (10)$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - (\alpha_1 x + \beta_1) \psi_1(0) - (\alpha_2 x + \beta_2) \psi_2(0). \quad (11)$$

La solución del problema de contorno (7), (8), (9) la buscamos de la forma

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t) X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (12)$$

donde $X_n(x)$ son las funciones propias del problema de contorno

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < l \quad (13)$$

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0*. \quad (14)$$

Las funciones $v_n(x)$ deben ser determinadas. La función $v(x, t)$ ya satisface las condiciones de frontera (8). Si se exige que $v(x, t)$ satisfaga también la ecuación (7) y la condición inicial (9), entonces de aquí se determinan las funciones $v_n(t)$. Para eso desarollamos en serie respecto a las funciones propias $X_n(x)$ el segundo miembro de la ecuación (7) y $\varphi^*(x)$

$$f^*(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Theta_n(t) X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (15)$$

^{*}) Acerca de la determinación de los valores propios λ_n y la norma de las funciones propias X_n véase la respuesta al problema 30.

donde

$$\Theta_n(t) = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \int_0^l f^*(z, t) X_n(z) dz, \quad (16)$$

y

$$\varphi^*(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad (17)$$

donde

$$a_n = \frac{2\lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + h^2)l + 2h} \int_0^l \varphi^*(z) X_n(z) dz. \quad (18)$$

Sustituyendo (12) y (15) en la ecuación (7) y suponiendo la convergencia uniforme de las derivadas obtenidas de las series, tenemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [v'_n(t) + a^2 \lambda_n^2 v_n(t) - \Theta_n(t)] X_n(x) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (19)$$

Para que se cumpla la igualdad (19) es suficiente el cumplimiento de la igualdad

$$v'_n(t) + a^2 \lambda_n^2 v_n(t) = \Theta_n(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

Así hemos obtenido las ecuaciones diferenciales para determinar las funciones $v_n(t)$.

Haciendo en (12) $t = 0$ y comparando con (17), obtenemos en virtud de (9)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [v_n(0) - a_n] X_n(x) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (21)$$

Para el cumplimiento de la igualdad (21) es suficiente el cumplimiento de la igualdad

$$v_n(0) = a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (20) con las condiciones iniciales (22), obtenemos

$$v_n(t) = \int_0^t e^{-a^2 \lambda_n^2 (t-\tau)} \Theta_n(\tau) d\tau + a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t}. \quad (23)$$

Con esto la resolución del problema finaliza.

38. La solución del problema de contorno (1), (2), (3) (véase al planteo) es

$$u(x, t) = v(x, t) + \psi(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

donde $\psi(x, t)$ tiene el mismo sentido que en la respuesta al problema anterior y

$$v(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l f^*(z, \tau) G(x, z, t-\tau) dz + \int_0^\infty \varphi^*(z) G(x, z, t) dz, \quad (5)$$

$$G(x, z, t-\tau) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-(c^2 \lambda_n^2 + h)(t-\tau)} \frac{X_n(x) X_n(z)}{\|X_n\|^2} \quad (6)$$

$\|X_n\|^2$ y λ_n tienen el mismo significado que en la respuesta al problema 30.

$$f^*(x, t) = f(x, t) - H\psi(x, t) - \psi_t(x, t), \quad (7)$$

$$\varphi^*(x) = \varphi(x) - \psi(x, 0). \quad (8)$$

$$39. \text{ a) } u(x, t) \approx \frac{A}{2} \left\{ \frac{e^{h(x+l)} \cos[k(x-l)+\omega t] + e^{-h(x+l)} \cos[k(x-l)-\omega t]}{\operatorname{ch} 2kl - \cos 2kl} - \right. \\ \left. \frac{e^{h(l-x)} \cos[k(x+l)+\omega t] + e^{-h(x+l)} \cos[k(x+l)-\omega t]}{\operatorname{ch} 2kl - \cos 2kl} \right\};$$

$$\text{b) } u(x, t) \approx \frac{A}{4k} \operatorname{Re} \left\{ (1-t) \frac{e^{h(1+i)x+i\omega t} - e^{-h(1+i)x+i\omega t}}{e^{h(1+i)t} + e^{-h(1+i)t}} + \right. \\ \left. + (1+i) \frac{e^{h(1-i)x-i\omega t} - e^{-h(1-i)x-i\omega t}}{e^{h(1-i)t} + e^{-h(1-i)t}} \right\};$$

$$\text{c) } u(x, t) \approx \frac{A}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{h(1+i)x+i\omega t} - e^{-h(1+i)x+i\omega t}}{[k(1+t)-h] e^{h(1+i)t} + [k(1+t)+h] e^{-h(1+i)t}} + \right. \\ \left. + \frac{e^{h(1-i)x-i\omega t} - e^{-h(1-i)x-i\omega t}}{[k(1-t)-h] e^{h(1-i)t} + [k(1-t)+h] e^{-h(1-i)t}} \right\},$$

$$\text{donde } k = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Indicación. La solución del problema de contorno en el caso de las condiciones de frontera a) para una condición inicial arbitraria, es decir, la solución del problema

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = A \cos \omega t, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

se puede buscar de la forma

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

donde $v(x, t)$ es la solución particular de la ecuación (1) que satisface las condiciones de frontera (2) y $w(x, t)$, la solución del problema de contorno

$$w_t = a^2 w_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1')$$

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

$$w(x, 0) = \varphi(x) - v(x, 0), \quad 0 < x < l. \quad (3')$$

La función $v(x, t)$ puede ser hallada como la parte real de la solución particular del problema de contorno

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad (5)$$

$$U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = A e^{i\omega t}, \quad (6)$$

la cual sin dificultad puede ser hallada en la forma

$$U(x, t) = X(x) e^{i\omega t}. \quad (7)$$

De esta manera

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \{X(x) e^{i\omega t} + \bar{X}(x) e^{-i\omega t}\}, \quad (8)$$

donde la raya sobre $X(x)$ es el signo de la conjugación compleja.

Según (8) $v(x, t)$ no contiene los términos que tienden a cero o a infinito cuando $t \rightarrow +\infty$ y dado que $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(x, t) = 0$, entonces $v(x, t)$ representa el valor asintótico de la temperatura cuando $t \rightarrow \infty$.

En el caso de las condiciones de frontera b) o c) el problema se resuelve análogamente.

$$40. u(x, t) = \frac{Q}{\pi c \rho \sigma} e^{-ht} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 a^2 t} \cos nx \right].$$

En el punto diametralmente opuesto al manantial *)

$$u(\pi, t) = \frac{Q}{\pi c \rho \sigma} e^{-ht} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 a^2 t} (-1)^n \right].$$

La serie que hay en el segundo miembro de la última igualdad satisface las condiciones del teorema de Leibniz sobre las series de términos de signo variable, por eso el error que se comete al sustituir la suma de la serie por la suma parcial no sobrepasa en valor absoluto al primero de los términos omitidos.

c) Problemas de difusión

$$41. Q(t) = l \sigma U_0 \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t}}{(2n+1)^2} \right\}.$$

Indicación.

$$Q(t) = \sigma \int_0^l u(x, t) dx,$$

donde $u(x, t)$ es la concentración de la sustancia que se difunde en el cilindro en el momento t .

Observemos que $Q(t)$ puede ser determinada también mediante el flujo de la sustancia que se difunde a través del extremo abierto

$$Q(t) = -a^2 \sigma \int_0^t \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial x} d\tau.$$

*) Acerca de las notaciones véanse los problemas 3 y 32.

La equivalencia de estas dos expresiones es fácil de verificar mediante la integración de las ambas partes de la ecuación principal

$$\int_0^l d\xi \int_0^t u_t(\xi, \tau) d\tau = a^2 \int_0^t d\tau \int_0^l u_{xx}(\xi, \tau) d\xi$$

con la utilización de las condiciones de frontera.

La expresión para $u(x, t)$ puede obtenerse como el caso particular de la solución del problema 27.

$$42. \quad Q(t) = U_0 \sigma \left\{ l - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[\int_0^l \left(\cos \lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right) dx \right]^2}{\int_0^l \left(\cos \lambda_n x + \frac{H}{\lambda_n} \sin \lambda_n x \right)^2 dx} e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \right\}$$

donde λ_n son las raíces de la ecuación trascendente

$$\operatorname{ctg} \lambda_n l = \frac{\lambda_n}{H},$$

y H , el coeficiente que entra en la condición de frontera

$$u_x = H(u - U_0) \quad \text{para } x = 0.$$

Indicación. Véase la indicación al problema anterior. La expresión para $u(x, t)$ puede obtenerse de la solución del problema 30.

$$43. \quad Q(t) =$$

$$= U_0 \sigma \left\{ \frac{\frac{a}{\sqrt{\beta}} \operatorname{sh} \frac{l \sqrt{\beta}}{a}}{\operatorname{ch} \frac{l \sqrt{\beta}}{a}} - \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\left(\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} + \beta\right)t}}{(2n+1)^2 \left(1 + \frac{4l^2 \beta}{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}\right)} \right\}.$$

Indicación. Véase la indicación al problema 41.

$$44. \quad \text{a) } l_{\text{cr.}} = \frac{\pi a}{\sqrt{\beta}}, \quad \text{b) } l_{\text{cr.}} = \frac{\pi a}{2\sqrt{\beta}},$$

c) para cualquier longitud del cilindro el proceso del aumento de la concentración tiene el carácter de avalancha; aquí β es el coeficiente de la multiplicación que entra en la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u, \quad \beta > 0.$$

d) *Problemas de electrodinámica*

$$45. \quad v(x, t) = E_0 + \frac{4(E_0 - v_0)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4l^2 R C} t} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

donde E_0 es la fuerza electromotriz constante aplicada al extremo $x = l$; R y C , la resistencia y la capacidad de una unidad de longitud del cable, respectivamente.

$$46. v(x, t) =$$

$$= E_0 + 2lE_0C \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2 t}{l^2 RC}} \frac{C_0 \alpha_n \operatorname{sen} \alpha_n \left(1 - \frac{x}{l}\right) - Cl \cos \alpha_n \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{(lCC_0 + l^2 C^2 + C_0^2 \alpha_n^2) \alpha_n \operatorname{sen} \alpha_n},$$

donde α_n son las raíces de la ecuación

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha = \frac{Cl}{C_0},$$

y E_0 , la fuerza electromotriz constante aplicada al extremo $x = 0$ del cable.

$$47. v(x, t) =$$

$$= \frac{E_0 R (l - x)}{R_0 + Rl} + 2E_0 R^2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha_n^2 t}{RC}} \frac{\operatorname{sen} \alpha_n (l - x)}{\alpha_n [R(R_0 + Rl) + lR_0^2 \alpha_n^2] \cos \alpha_n},$$

donde R y C son, respectivamente, la resistencia y la capacidad de una unidad de longitud del cable, y α_n , las raíces positivas de la ecuación

$$R \operatorname{tg} \alpha l + \alpha R_0 = 0.$$

48. La solución del problema de contorno

$$H_t = a^2 H_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad a^2 = -\frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}, \quad (1)$$

$$H(0, t) = H(l, t) = H_0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$H(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

es

$$H(x, t) = H_0 - \frac{4H_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}}{2k+1} \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

$$0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (4)$$

En el punto $x = \frac{l}{2}$ tenemos

$$H\left(\frac{l}{2}, t\right) = H_0 - \frac{4H_0}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}, \quad 0 < t < +\infty. \quad (5)$$

El resto de la serie (5) se puede estimar según el principio de Leibniz

$$\begin{aligned} \left| R_n \left(\frac{l}{2}, t \right) \right| &= \left| \frac{4H_0}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{4H_0}{\pi(2n+3)} e^{-\frac{(2n+3)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}, \quad 0 < t < +\infty. \end{aligned} \quad (6)$$

En virtud de (6) tenemos

$$\left| R_0 \left(\frac{l}{2}, t \right) \right| \leq \frac{1}{3} e^{-\frac{8\pi^2 a^2}{l^2} t} \leq \varepsilon \quad \text{para } t \geq t^* = -\frac{l^2}{8\pi^2 a^2} \ln 3\varepsilon. \quad (7)$$

2. Medios heterogéneos y factores concentrados.

Ecuaciones con coeficientes variables y condiciones de conjugación

49. La temperatura dentro de la barra es la solución del problema de contorno

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right], \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \quad (3)$$

donde

$$c(x) = \begin{cases} \bar{c}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{\bar{c}}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad \rho(x) = \begin{cases} \bar{\rho}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{\bar{\rho}}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad \lambda(x) = \begin{cases} \bar{\lambda}, & 0 < x < x_0, \\ \bar{\bar{\lambda}}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (4)$$

\bar{c} , $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\bar{\rho}}$, $\bar{\lambda}$, $\bar{\bar{\lambda}}$, son constantes que caracterizan las propiedades de las barras,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\omega_n^2 t} X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (5)$$

donde

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\omega_n}{a} x}{\sin \frac{\omega_n}{a} x_0}, & 0 < x < x_0, \\ \frac{\sin \frac{\omega_n}{a} (l-x)}{\sin \frac{\omega_n}{a} (l-x_0)}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad (6)$$

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}}{c\rho}}, \quad \bar{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\bar{\bar{\lambda}}}{\bar{\bar{c}}\bar{\bar{\rho}}}} \quad (7)$$

ω_n son las raíces de la ecuación

$$\frac{\bar{\lambda}}{a} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{a} x_0 = \frac{\bar{\lambda}}{a} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{a} (x_0 - l), \quad (8)$$

$$a_n = \frac{\int_0^l c(x) \rho(x) \varphi(x) X_n(x) dx}{\|X_n\|^2}, \quad (9)$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l c(x) \rho(x) X_n^2(x) dx = \frac{\bar{c} \bar{\rho} x_0}{2 \sin^2 \frac{\omega_n}{a} x_0} + \frac{\bar{c} \bar{\rho} (l - x_0)}{2 \sin^2 \frac{\omega_n}{a} (l - x_0)}. \quad (10)$$

Indicación. Véase la solución del problema 164, § 3, cap. II.

$$50. \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} X_n(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$a^2 = \frac{\lambda}{\bar{c} \bar{\rho}}$, donde λ es el coeficiente de la conductibilidad térmica, c , la capacidad calorífica y ρ , la densidad de la masa de la sustancia de la barra;

$$X_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin \lambda_n x}{\sin \lambda_n x_0}, & 0 < x < x_0, \\ \frac{\sin \lambda_n (l-x)}{\sin \lambda_n (l-x_0)}, & x_0 < x < l, \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

los λ_n , valores propios del problema de contorno, son las raíces de la ecuación

$$\operatorname{ctg} \lambda_n x_0 - \operatorname{ctg} \lambda_n (l - x_0) = \frac{C_0}{\bar{c} \bar{\rho}} \lambda_n, \quad (3)$$

$$a_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx + C_0 \varphi(x_0) X_n(x_0)}{\frac{\bar{c} \bar{\rho} x_0}{2 \sin^2 \lambda_n x_0} + \frac{\bar{c} \bar{\rho} (l - x_0)}{2 \sin^2 \lambda_n (l - x_0)} + \frac{C_0}{2}}, \quad (4)$$

donde $u(x, 0) = \varphi(x)$ son las magnitudes iniciales de la temperatura.

Indicación. Véase la solución del problema 167 del § 3, cap. II.

$$51. \quad u(x, t) = \frac{1}{L-x} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} t} \sin \frac{n \pi x}{L}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l (L-z) \varphi(z) \sin \frac{n \pi z}{L} dz, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2)$$

donde por L está designada la longitud del cono completo, que al truncarlo da la barra de longitud l en estudio.

$$52. \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + m^2\right) a^2 t} + mx \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{l}, \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty,$$

donde

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(z) e^{-mz} \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} dz.$$

53. Para la velocidad de las partículas del líquido $u(x, t)$ y la velocidad del movimiento de la placa $v(t)$ obtenemos las expresiones

$$u(x, t) = \frac{g l \sigma}{2 \rho v} \cdot \frac{l - x}{l} - \frac{4 g \rho l^3}{\sigma v} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_n^2 v t}{l^2}}}{\lambda_n^2 \left(\lambda_n^2 + 2 \frac{\rho l}{\sigma} + \frac{4 \rho^2 l^2}{\sigma^2} \right)} \frac{\operatorname{sen} \lambda_n \frac{l - x}{l}}{\operatorname{sen} \lambda_n}, \quad (1)$$

$$0 < x < l,$$

$$v(t) = \frac{g l \sigma}{2 \rho v} - \frac{4 g \rho l^3}{\sigma v} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda_n^2 v t}{l^2}}}{\lambda_n^2 \left(\lambda_n^2 + 2 \frac{\rho l}{\sigma} + 4 \frac{\rho^2 l^2}{\sigma^2} \right)}, \quad (2)$$

donde l es la mitad de la distancia entre las placas de frontera; ρ , la densidad del líquido; v , el coeficiente cinético de viscosidad; σ , la densidad superficial de la placa; g , la aceleración de la fuerza de gravedad; λ_n , las raíces positivas de la ecuación

$$\lambda \operatorname{tg} \lambda = \frac{2 \rho l}{\sigma} \quad (3)$$

(λ son los valores propios del problema de contorno multiplicados por l).

Indicación. Para $u(x, t)$ tenemos el problema de contorno

$$u_t = v u_{xx}, \quad -l < x < 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (4)$$

$$u(-l, t) = u(l, t) = 0, \quad u(0, t) = v(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < l. \quad (6)$$

Para la velocidad del movimiento de la placa tenemos

$$\frac{dv}{dt} = g + \frac{2 \rho v}{\sigma} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0}, \quad (7)$$

$$v(0) = 0. \quad (8)$$

Dado que la distribución de las velocidades de las partículas del líquido es simétrica respecto a la placa móvil, entonces es suficiente determinar $u(x, t)$ sobre el intervalo $0 < x < l$. Las funciones

$$X_n(x) = \sin \lambda_n \frac{l-x}{l}$$

son ortogonales generalizadamente sobre el intervalo $0 < x < l$ (véase la solución del problema 167, § 3, cap. II).

§ 3. Método de representaciones integrales y funciones de manantiales

1. Medios isotrópicos homogéneos. Aplicación de la transformación integral de Fourier a los problemas en la recta y semirrecta

La definición de la transformación integral de Fourier y la esquema general de la aplicación a la solución de los problemas de contorno son dadas en el cap. II (págs. 219–221).

54. *Solución.* Multiplicamos ambos miembros de la ecuación

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} \quad \text{por} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda \xi}$$

e integremos respecto a ξ entre $-\infty$ y $+\infty$, suponiendo, por ejemplo, que la función u y su derivada tiende a cero suficientemente rápido para $\xi \rightarrow \pm\infty$. Utilizando la integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\lambda \xi} d\xi &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\lambda \xi} d\xi = \frac{d\bar{u}(\lambda, t)}{dt} = \\ &= a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} e^{-i\lambda \xi} d\xi = a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial u}{\partial \xi} e^{-i\lambda \xi} \Big|_{\xi=-\infty}^{+\infty} + \\ &+ a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\lambda u e^{-i\lambda \xi} \Big|_{\xi=-\infty}^{+\infty} - a^2 \lambda^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\lambda \xi} d\xi = a^2 \lambda^2 \bar{u}(\lambda, t), \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + a^2 \lambda^2 \bar{u} = 0. \quad (1)$$

De la igualdad

$$\bar{u}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t) e^{-i\lambda \xi} d\xi$$

para $t=0$ obtenemos

$$\bar{u}(\lambda, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, 0) e^{-i\lambda \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi = \tilde{f}(\lambda). \quad (2)$$

La solución de la ecuación (1) con la condición inicial (2) es de la forma

$$\bar{u}(\lambda, t) = \bar{f}(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

La utilización de la antitransformación de Fourier da

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} e^{i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(x-\xi) d\lambda = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi, \quad (3) \end{aligned}$$

dado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2} \cos \beta \lambda d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{\beta^2}{4a^2}}. \quad (4)$$

La última integral se calcula, fácilmente, diferenciando con respecto al parámetro.

$$55. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\xi. \quad (1)$$

56. *Solución.* Multiplicando las ambas partes de la ecuación

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} \quad \text{por} \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \lambda \xi$$

e integrando con respecto a ξ entre 0 y $+\infty$, obtenemos para la imagen seno de Fourier de la función $u(x, t)$

$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \sin \lambda \xi d\xi, \quad (1)$$

la ecuación

$$\frac{d\bar{u}^{(s)}(\lambda, t)}{dt} + a^2 \lambda^2 \bar{u}^{(s)}(\lambda, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty. \quad (2)$$

De (1) hallamos la condición inicial

$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, 0) = \bar{f}^{(s)}(\lambda). \quad (3)$$

La solución de la ecuación (2) con la condición inicial (3) es de la forma

$$\bar{u}^{(s)}(\lambda, t) = \bar{f}^{(s)}(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Aplicando a ella la antitransformación seno de Fourier, en virtud de la igualdad conocida (4) citada en la solución del problema anterior, hallamos

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{u}^{(c)}(\lambda, t) \operatorname{sen} \lambda x d\lambda = \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda \xi \operatorname{sen} \lambda x d\lambda = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} [\cos(x - \xi) - \cos \lambda(x + \xi)] d\lambda = \\
 &= \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.
 \end{aligned}$$

$$57. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$$

Indicación. Utilizar la transformación coseno de Fourier.

$$58. \quad u(x, t) = \frac{x}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} \varphi(\tau) d\tau.$$

Indicación. Utilizar la transformación seno de Fourier; véase también la solución del problema siguiente.

59. Aplicando la transformación coseno de Fourier *) y utilizando la condición de frontera $u_x(0, t) = \varphi(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{u}^{(c)}(\lambda, t)}{dt} &= a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cos \lambda \xi d\xi = a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\partial u}{\partial \xi} \cos \lambda \xi \Big|_{\xi=0}^{+\infty} + \\
 &\quad - a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial \xi} \operatorname{sen} \lambda \xi d\xi = \\
 &= -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t) + a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} u \lambda \operatorname{sen} \lambda \xi \Big|_{\xi=0}^{+\infty} - \\
 &\quad - a^2 \lambda^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \cos \lambda \xi d\xi = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t) - a^2 \lambda^2 \bar{u}^{(c)}(\lambda, t),
 \end{aligned}$$

*) Con esto se supone que u y sus derivadas respecto a ξ tienden a cero suficientemente rápido cuando $\xi \rightarrow +\infty$.

es decir,

$$\frac{d\bar{u}^{(c)}(\lambda, t)}{dt} + a^2 \lambda^2 \bar{u}^{(c)}(\lambda, t) = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \varphi(t), \quad (1)$$

donde

$$\bar{u}^{(c)}(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \cos \lambda \xi d\xi. \quad (2)$$

De (2) hallamos

$$\bar{u}^{(c)}(\lambda, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, 0) \cos \lambda \xi d\xi. \quad (3)$$

La solución de la ecuación (1) con la condición inicial (3) es de la forma

$$\bar{u}^{(c)}(\lambda, t) = -a^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau.$$

Utilizando la antittransformación coseno de Fourier (en virtud de la igualdad (4) de la solución del problema 54) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{u}^{(c)}(\lambda, t) \cos \lambda x d\lambda = \\ &= -\frac{2a^2}{\pi} \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 (t-\tau)} \cos \lambda x d\lambda = \\ &= -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \end{aligned}$$

$$60. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi, \tau) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\xi.$$

$$61. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi, \tau) \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\xi.$$

62. *Indicación.* Establecer primero que para los cosenos imágenes de Fourier $\bar{f}^{(c)}(\lambda) = e^{-a^2 \lambda^2}$, $\bar{g}^{(c)}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2 + h^2}$ los originales son

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad g(x) = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-hx}.$$

63. *Indicación.* Establecer primero que para los cosenos imágenes de Fourier $\bar{f}^{(c)}(\lambda) = e^{-\alpha\lambda^2}$, $\bar{g}^{(c)}(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda^2 + h^2}$ los originales son

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-hx}.$$

$$\begin{aligned} 64. \quad u(x, t) &= \frac{ah}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} - h \int_0^{+\infty} e^{-h\xi - \frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi \right] d\tau = \\ &= \frac{ah}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(t-\tau)}{\sqrt{\xi}} \left[e^{-\frac{x^2}{4a^2\xi}} - h \int_0^{+\infty} e^{-h\xi - \frac{(x+\xi)^2}{4a^2\xi}} d\xi \right] d\xi. \end{aligned}$$

Indicación. Utilizar los resultados de los problemas 62 y 63.

$$65. \quad u(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} - 2h \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} - h\eta} d\eta \right] d\xi.$$

Indicación. Utilizar los resultados de los problemas 62 y 63.

2. Medios isotrópicos homogéneos. Construcción de las funciones de influencia de los manantiales concentrados

a) *Recta no acotada*

$$66. \quad u(x, t) = \frac{Q}{c\rho\sigma} G(x, \xi, t), \quad -\infty < x, \quad \xi < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \quad x \neq \xi,$$

donde

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

es así llamada función de manantial para la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ en el caso de la recta no acotada o «la función de influencia del manantial puntiforme instantáneo de calor para la barra no acotada con la superficie lateral termostilada».

Indicación. Se puede suponer que la cantidad de calor Q que se desprendió instantáneamente en el punto ξ en el momento $t = 0$ en el mismo momento se distribuye uniformemente sobre el intervalo pequeño $(\xi - \delta, \xi + \delta)$, entonces la temperatura inicial de la barra será igual a

$$u(x, 0) = f_\delta(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < \xi - \delta, \\ \frac{Q}{2\delta c\rho\sigma}, & \xi - \delta < x < \xi + \delta, \\ 0, & \xi + \delta < x < +\infty. \end{cases}$$

Resolviendo en problema

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f_\delta(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

mediante la fórmula (3) de la solución del problema 54 y pasando al límite cuando $\delta \rightarrow 0$, obtenemos la respuesta.

Para la búsqueda de la temperatura dentro de la barra se puede utilizar también la función δ^*), resolviendo el problema

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \frac{Q}{cp\sigma} \delta(x - \xi), \quad -\infty < x, \quad \xi < +\infty, \quad (4)$$

mediante la fórmula citada (3) del problema 54 o resolviendo el problema

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q}{cp\sigma} \delta(x - \xi) \delta(t), \quad -\infty < x, \quad \xi < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (6)$$

mediante la fórmula (1) dada en la respuesta a problema 55.

Para resolver los problemas de contorno (3), (4) y (5), (6) se puede no recurrir a las fórmulas (3) y (4), sino utilizar la representación integral de la función δ (véase [7], págs. 309-311).

La función de manantial para la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ sobre la recta $-\infty < x < +\infty$ puede ser obtenida también a base de los razonamientos de semejanza (véase [7], págs. 286-289) o mediante el paso al límite en la expresión de la función de manantial para el segmento $0 < x < l$ cuando $l \rightarrow +\infty$ (véase [7], págs. 248-252).

Nota. Si el desprendimiento instantáneo de calor en el punto $x = \xi$ no tuvo lugar en el momento $t = 0$, sino en el momento $t = \tau$, entonces

$$u(x, t) = \frac{Q}{cp\sigma} G(x, \xi, t - \tau), \quad -\infty < x, \quad \xi < +\infty, \quad x \neq \xi, \quad \tau < t < +\infty.$$

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi(t - \tau)}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - \tau)}}.$$

$$67. \quad u(x, t) = \frac{Q}{cp\sigma} G(x, \xi, t), \quad -\infty < x, \quad \xi < +\infty, \quad x \neq \xi, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

donde

$$G(x, \xi, t) = \frac{e^{-ht}}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}} \quad (2)$$

es la función de manantial para la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$ en el caso de la recta no acotada.

Nota. Si el desprendimiento instantáneo de calor Q no tuvo lugar en el momento de tiempo $t = 0$, sino en el momento de tiempo $t = \tau$, entonces

$$u(x, t) = \frac{Q}{cp\sigma} G(x, \xi, t - \tau), \quad -\infty < x, \quad \xi < +\infty, \quad x \neq \xi, \quad \tau < t < +\infty, \quad (3)$$

donde

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{e^{-h(t - \tau)}}{2a \sqrt{\pi(t - \tau)}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2(t - \tau)}}. \quad (4)$$

*) Véanse las respuestas y las indicaciones a los problemas 56 ó 63 del § 2, cap. II y al problema 453 del § 3, cap. II.

68. *Solución.* Sustituimos en la solución $u(x, t)$ de la ecación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

x y t por ξ y τ ; sustituimos en la función de manantial

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad \text{por } t-\tau, \quad 0 < \tau < t.$$

Las funciones $u(\xi, \tau)$ y $G(x, \xi, t-\tau)$ satisfacen las ecuaciones

$$u_\tau = a^2 u_{\xi\xi} + f(\xi, \tau), \quad G_\tau = -a^2 G_{\xi\xi},$$

por eso

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (Gu) = a^2 \left[G \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - u \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} \right] + Gf. \quad (1)$$

Integrando la ultima igualdad con respecto a ξ entre $-\infty$ y $+\infty$ y con respecto a τ entre 0 y $t-\alpha$, $0 < \alpha < t$, obtenemos (si se supone que u y sus derivadas con respecto a ξ están acotadas cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$ o tienden a ∞ , pero no demasiado rápidamente):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (Gu)_{\tau=t-\alpha} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (Gu)_{\tau=0} d\xi + \int_0^{t-\alpha} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} Gf. \quad (2)$$

Pasando al límite en la igualdad cuando $\alpha \rightarrow 0$, obtenemos *);

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) G(x, \xi, t-\tau) d\xi. \quad (3)$$

69. La respuesta se da en la fórmula (3) de la solución del problema anterior en que por $G(x, \xi, t)$ se debe comprender la función de manantial hallada en la solución del problema 67.

Indicación. El problema 69 se puede resolver directamente o reduciendo al problema 68 mediante la sustitución de la función incógnita $u(x, t) = e^{-ht} v(x, t)$

$$70. \quad t = \frac{(x-\xi)^2}{2a^2}, \quad u_{\max}(x) = \frac{Q}{c\rho \sqrt{2\pi e} |x-\xi|} e^{-1/2}.$$

$$71. \quad u(x, t) = \frac{Q}{c\rho} \frac{1}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-ht-\frac{x^2}{4a^2 \tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}},$$

$$\bar{u}(x) = \frac{Q}{2c\rho ah} e^{-\frac{h}{a}|x|}.$$

Si la superficie de la barra es termoaislada, entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \infty$.

$$72. \quad u(x, t) = U_0 \left[\Phi \left(\frac{x+l}{2a \sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{x-l}{2a \sqrt{t}} \right) \right],$$

*}) El paso al límite en el primer miembro de la igualdad (2) cuando $\alpha \rightarrow 0$ se realiza análogamente a como se hizo en [7], en las págs. 258-262.

donde $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ es la llamada integral de errores cuyos valores se pueden hallar en la tabla 1 del apéndice de este libro.

$$73. \quad u(x, t) = \frac{A}{2} e^{-\alpha x + a^2 x^2 t} \left[1 - \Phi \left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \alpha a \sqrt{t} \right) \right].$$

$$74. \quad u(x, t) = U_0 e^{-ht} \left[\Phi \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \Phi \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right],$$

Indicación: utilizar la solución del problema 69 o mediante la sustitución de la función incógnita $u(x, t) = e^{-ht} v(x, t)$ reducirlo al problema 72.

$$75. \quad u(x, t) = \frac{Q}{2ac\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-v_0\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{Q}{2ac\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{(x-v_0t+v_0\tau)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{\tau}} d\tau,$$

en particular, la temperatura de la barra debajo del horno es igual a

$$u(v_0 t, t) = \frac{Q}{c\rho v_0} \Phi \left(\frac{v_0\sqrt{t}}{2a} \right).$$

Observación. La expresión para $u(x, t)$ es obtenida bajo la condición de que el intercambio de calor sobre la superficie de la barra que no tiene contacto con el horno es despreciablemente pequeño.

b) *Semirrecta*

$$76. \quad G(x, \xi, t-\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} [e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}],$$

$$0 < x, \quad \xi < +\infty, \quad x \neq \xi, \quad 0 < t < +\infty. \quad (1)$$

En el caso cuando sobre la superficie de la barra se realiza el intercambio de calor por convección con el medio, cuya temperatura es igual a cero, la expresión para la función de manantial se obtiene multiplicando (1) por

$$e^{-H(t-\tau)}, \quad (2)$$

donde H es el coeficiente del intercambio de calor que entra en la ecuación $u_t = a^2 u_{xx} - Hu$.

Indicación. La expresión para la temperatura $u(x, t)$ y para $G(x, \xi, t-\tau)$ puede obtenerse, examinando la barra no acotada $-\infty < x < +\infty$ y suponiendo que en el momento $t = \tau$ en el punto $x = \xi$ se desprendieron instantáneamente Q unidades de calor y en el punto $x = -\xi$, $-Q$ unidades de calor, es decir, como a veces se dice, colocando en el punto $x = \xi$ el manantial instantáneo positivo de potencia Q y en el punto $x = -\xi$, el manantial instantáneo negativo de potencia $-Q$ *).

$$77. \quad G(x, \xi, t-\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right],$$

$$0 < x, \quad \xi < +\infty, \quad \tau < t < +\infty, \quad x \neq \xi.$$

*) La función de manantial para la semirrecta se define análogamente a la función de manantial para la recta; véase la introducción a las soluciones de los problemas del apartado c) del presente punto.

Al existir sobre la superficie de la barra el intercambio de calor por convección, la función de manantial se obtiene de la recién hallada mediante la multiplicación por $e^{-H(t-\tau)}$.

Indicación. Véase la indicación al problema anterior; este problema se resuelve análogamente.

$$78. \quad G(x, \xi, t-\tau) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi(t-\tau)}} \left\{ \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] - \right. \\ \left. - 2h \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)} - h\eta} d\eta \right\}, \quad 0 < x, \quad \xi < +\infty, \quad x \neq \xi, \quad \tau < t < +\infty,$$

donde h es el coeficiente que entra en la condición de frontera

$$u_x(0, t) = hu(0, t) = 0.$$

Al existir el intercambio de calor por convección sobre la superficie de la barra, la función de manantial se obtiene de la recién hallada mediante la multiplicación por $e^{-H(t-\tau)}$, donde H es el coeficiente del intercambio de calor que entra en la ecuación $u_t = a^2 u_{xx} - Hu$.

Indicación. Utilizar la afirmación formulada en la problema 82.

$$79. \quad u(x, t) = \frac{1}{2d \sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi + \\ + \frac{x}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\Psi(\tau) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau + \frac{1}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi.$$

Indicación. Sea $u(\xi, \tau)$ la solución de la ecuación $u_\tau = a^2 u_{\xi\xi} + f(\xi, \tau)$ y $G(x, \xi, t-\tau)$, la función de manantial hallada en la solución del problema 76.

Integrando la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(Gu) = G \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial G}{\partial \tau} = a^2 \left[G \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - u \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} \right] + Gf *$$

Con respecto a ξ entre 0 y $+\infty$ y con respecto a τ entre 0 y $t-\alpha$, donde $0 < \alpha < t$, obtenemos

$$\int_0^{+\infty} (Gu)_{\tau=t-\alpha} d\xi - \int_0^{+\infty} (Gu)_{\tau=0} d\xi = a^2 \int_0^{t-\alpha} d\tau \int_0^{+\infty} \left[G \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - u \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} \right] d\xi + \\ + \int_0^{t-\alpha} d\tau \int_0^{+\infty} Gf d\xi = a^2 \int_0^{t-\alpha} \left\{ \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}^{+\infty} - \left(u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}^{+\infty} \right\} d\tau - \\ - \int_0^{+\infty} \left[\frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial G}{\partial \xi} \right] d\xi + \int_0^{t-\alpha} d\tau \int_0^{+\infty} Gf d\xi.$$

*) Esta igualdad se obtiene del mismo modo que la (1) en la solución del problema 68.

Efectuando las restricciones necesarias sobre el orden de crecimiento de u y de $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ cuando $\xi \rightarrow +\infty$, nos queda

$$\int_0^{+\infty} (Gu)_{\tau=t-\alpha} d\xi = \int_0^{-\infty} (Gu)_{\tau=0} d\xi - a^2 \int_0^{t-\alpha} \left(u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} d\tau + \int_0^{t-\alpha} d\tau \int_0^{+\infty} G f d\xi.$$

Pasando al límite cuando $\alpha \rightarrow 0$, obtenemos *)

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (Gu)_{\tau=t-\alpha} d\xi = u(x, t),$$

$$80. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi - \\ - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau + \\ + \frac{1}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi.$$

Indicación. El problema puede resolverse análogamente al anterior (véase la indicación al problema anterior).

81. $u(x, t) =$

$$= \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \psi(\xi) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} - 2h \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t}-h\eta} d\eta \right] d\xi + \\ + \frac{ha}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}-h} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}-h\eta} d\eta \right] d\tau + \\ + \frac{1}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^{+\infty} f(\xi, \tau) \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - \right. \\ \left. - 2h \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2(t-\eta)}-h\eta} d\eta \right] d\xi.$$

Indicación. Véase la indicación al problema 79. El problema 81 puede resolverse análogamente.

*) El paso al límite se realiza análogamente a como se hizo en [7], en págs. 258-262.

82. *Indicación.* Aprovechar el hecho que

1) si $F(x)$ es una función impar, entonces la función

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

es igual a cero para $x = 0$;

2) si $u(x, t)$ es la solución de la ecuación $u_t = a^2 u_{xx}$, entonces

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}$$

también es la solución de esta ecuación.

83. *Indicación.* Aprovechar el hecho de que:

1) si $F(x, t)$ es una función impar de x , entonces la función

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi$$

es igual a cero para $x = 0$;

2) si $u(x, t)$ es la solución de la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$

entonces

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}$$

es la solución de la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_{k=0}^N A_k \frac{\partial^k f(x, t)}{\partial x^k}.$$

$$84. \quad u(x, t) = U_0 \Phi \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} \right).$$

La velocidad del movimiento del frente de la temperatura es αU_0 , $\alpha = \text{const}$, $0 < \alpha < 1$, es igual a $\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha k}{\sqrt{t}}$, donde k es la raíz de la ecuación $\Phi(z) = \alpha$. Los gráficos están dados respectivamente en las figs. 34 y 35.

$$85. \quad u(x, t) = U_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} \right) \right],$$

$$T = \frac{x_0^2}{4a^2 k^2},$$

donde k es la raíz de la ecuación $\Phi(z) = 1 - \alpha$.

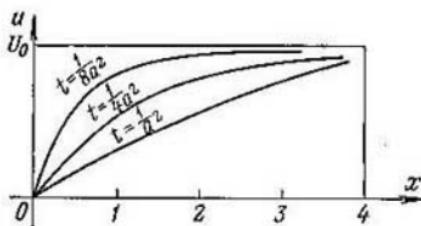


Fig. 34

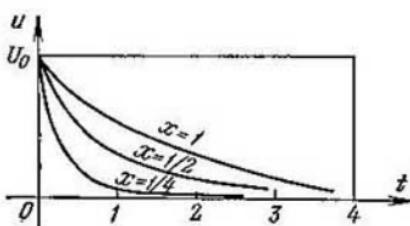


Fig. 35

Indicación. Mediante la sustitución $u(x, t) = v(x, t) + U_0$ el problema se reduce al anterior.

$$86. \quad u(x, t) = \frac{U_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz = \frac{U_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}\right) \right].$$

$$87. \quad u(x, t) = U_0 \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + e^{hx+h^2a^2t} U_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right) \right]. \quad (1)$$

El error que se comete al utilizar la fórmula (4) del planteamiento no sobrepasa

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2^n} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}}. \quad (2)$$

Para que el error al utilizar la fórmula (5) del planteamiento no sobrepase a $\varepsilon > 0$ es suficiente que se cumpla la desigualdad

$$t^3 > \frac{U_0^2}{4\pi a^6 h^6 g^2}. \quad (3)$$

Indicación. Integrando consecutivamente por partes, se puede obtener la igualdad

$$\begin{aligned} \int_z^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi &= \frac{e^{-z^2}}{2} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 z^5} - \dots + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3)}{2^{n-1} z^{2n-1}} \right\} + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^{2n}} d\xi, \end{aligned} \quad (4)$$

además, evidentemente,

$$\int_z^{+\infty} e^{-\xi^2} \frac{d\xi}{\xi^{2n}} < e^{-z^2} \int_z^{+\infty} \frac{d\xi}{\xi^{2n}}. \quad (5)$$

Observación. Si la suma parcial que está entre las llaves en la fórmula (4) sustituir por la serie infinita, entonces se obtiene la serie oscilante que se llama asintótica. La estimación (5) demuestra que el error que se comete al omitir en la fórmula (4) el término residual

$$(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \int_z^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{\xi^{2n}} d\xi,$$

tiende a cero para cada n dado y $z \rightarrow +\infty$.

$$\begin{aligned} 88. \quad u(x, t) = & \left(U_0 - \frac{b^2}{a^2 k^2} \right) \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} \right) \right] + \\ & + \frac{b^2}{a^2 k^2} e^{-hx} - \frac{b^2}{2a^2 k^2} \left\{ e^{axk^2 t - hx} \left[1 - \Phi \left(\frac{-x}{2a \sqrt{t}} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + ak \sqrt{t} \right) \right] - e^{axk^2 t + hx} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} + ak \sqrt{t} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$89. \quad u(x, t) = 2aq \sqrt{\frac{t}{n}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} - qx \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} 90. \quad u(x, t) = & U_2 + (U_0 - U_2) e^{-ht} \Phi \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} \right) + \\ & + \frac{U_1 - U_2}{2} \left\{ e^{-\frac{x \sqrt{h}}{a}} \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} - \sqrt{ht} \right) \right] + e^{\frac{x \sqrt{t}}{a}} \times \right. \\ & \left. \times \left[1 - \Phi \left(\frac{x}{2a \sqrt{t}} + \sqrt{t} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 91. \quad v(x, t) = & \frac{E_0}{2} e^{-x \sqrt{RG}} \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} - \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) \right\} + \\ & + \frac{E_0}{2} e^{x \sqrt{RG}} \left\{ 1 - \Phi \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

dónde R , C , G son, respectivamente, la resistencia, capacidad y fuga de una unidad de longitud del cable.

$$92. \quad u(x, t) =$$

$$\begin{aligned} & = \frac{Ah}{\sqrt{\left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\omega}{2}} + h\right)^2}} e^{-\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2}}} \cos \left(\frac{x}{a} \sqrt{\frac{\omega}{2}} - \omega t - \gamma \right) + \\ & + \frac{2Ah}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-h\eta} d\eta \int_0^{\frac{x+\eta}{2a \sqrt{\frac{\omega}{2}}}} e^{-z^2} \cos \omega \left[t - \frac{(x+\eta)^2}{4a^2 z^2} \right] dz, \quad (1) \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\omega}{2}}}{\frac{1}{a} \sqrt{\frac{\omega}{2}} + h}. \quad (2)$$

El primer sumando del segundo miembro de la igualdad (4) representa en sí la onda de la temperatura que se amortigua con el crecimiento de x , periódica con respecto a t . El segundo sumando es despreciablemente pequeño cuando $t \rightarrow +\infty$.

$$93. \quad u(x, t) = Ae^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \cos \left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\omega}{2}} - \omega t \right).$$

La velocidad de propagación de la onda de la temperatura con la frecuencia ω es

$$\frac{dx}{dt} = a\sqrt{2\omega}.$$

Indicación *). Se pueden hallar las ondas establecidas de la temperatura como la parte real de la solución compleja del problema

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad U(0, t) = Ae^{i\omega t},$$

la cual tiende a cero cuando $x \rightarrow +\infty$. Esta solución compleja es de forma

$$U(x, t) = X(x) e^{i\omega t}$$

$$94. \quad v(x, t) =$$

$$E_0 e^{-x\sqrt{\frac{1}{2}RC\omega}} \cos \left(\omega t - x\sqrt{\frac{1}{2}RC\omega} \right) - \frac{E_0}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\xi t} \sin \sqrt{RC\xi} \frac{\xi d\xi}{\xi^2 + \omega^2},$$

donde R y C son la resistencia y la capacidad de una unidad del cable.

Indicación. Véase la indicación al problema anterior.

$$95. \quad -\lambda u_x(0, t) = q(t) = \frac{\lambda}{\pi a} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\mu(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Indicación. El problema se reduce a la ecuación integral de Abel *).

$$96. \quad \varphi(t) = \frac{1}{2ah\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\mu(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

donde h es el coeficiente del intercambio de calor que entra en la condición de frontera

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \varphi(t)].$$

$$97. \quad \varphi(t) = \frac{\lambda}{\pi a} \frac{d}{dt} \int_0^t \mu(\tau) \frac{e^{-h^*(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

donde h^* es el coeficiente del intercambio de calor que entra en la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} - h^* u.$$

*) Para más detalles acerca de la solución de los problemas sin las condiciones iniciales véase [7], págs. 270-274.

*) Acerca de la ecuación integral de Abel véase [2], t. II, § 79 y también la indicación al problema 114.

$$98. \quad \varphi(t) = \frac{1}{2ah\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \mu(\tau) \frac{e^{-h^*(t-\tau)}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau,$$

dónde los coeficientes h y h^* tienen el mismo sentido que en los problemas 96 y 97.

$$99. \quad u(x, t) = \frac{e^{-\frac{v_0}{2a^2}(x-v_0t)-\frac{v_0^2}{4a^2}t}}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} f(\xi+v_0\tau, \tau) e^{-\frac{v_0}{2a^2}\xi+\frac{v_0^2}{4a^2}\tau} \times \\ \times \left[e^{-\frac{(x-v_0t-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x-v_0t+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi, \quad v_0t < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty.$$

Indicación. Pasar a las nuevas variables independientes $\xi = x - v_0t$, $t = t$ (esto corresponde al paso al sistema móvil de coordenadas con origen en el punto $x_0 = v_0 t$) y la nueva función incógnita según la fórmula $u(x, t) = e^{\alpha\xi+\beta t} v(\xi, t)$.

$$100. \quad u(x, t) = \frac{e^{-\frac{v_0}{2a^2}(x-v_0t)-\frac{v_0^2}{4a^2}t}}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{v_0}{2a^2}\xi} f(\xi) \left[e^{-\frac{(x-v_0t-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x-v_0t+\xi)^2}{4a^2t}} \right] d\xi.$$

Indicación. Véase la indicación al problema anterior.

$$101. \quad u(x, t) = \frac{e^{-\frac{v_0}{2a^2}(x-v_0t)-\frac{v_0^2}{4a^2}t}}{2a\sqrt{\pi}} (x-v_0t) \int_0^t e^{-\frac{v_0^2}{4a^2}\tau} \mu(\tau) e^{-\frac{(x-v_0t)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Indicación. Véase la indicación al problema 99.

$$102. \quad u(x, t) = e^{-\frac{v_0}{2a^2}(x-v_0t)-\frac{v_0^2}{4a^2}t} \left\{ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{v_0}{2a^2}\xi} f(\xi) \times \right. \\ \times \left[e^{-\frac{(x-v_0t-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x-v_0t+\xi)^2}{4a^2t}} - \frac{v_0}{2a^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-v_0t+\xi+\eta)^2}{4a^2t}-\frac{v_0^2}{2a^2}\eta} d\eta \right] \times \\ \times d\xi - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\frac{v_0^2}{4a^2}\tau}{\sqrt{t-\tau}} \mu(\tau) \left[e^{-\frac{(x-v_0t)^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{v_0^2}{2a^2}} - \frac{v_0}{2a^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-v_0t)^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{v_0^2}{2a^2}\eta} d\eta \right] \times \\ \times d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \frac{f(\xi+v_0\tau, \tau) e^{\frac{v_0}{2a^2}\xi+\frac{v_0^2}{4a^2}\tau}}{\sqrt{t-\tau}} \left[e^{-\frac{(x-v_0t-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} + \right. \\ \left. + e^{-\frac{(x-v_0t+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - \frac{v_0}{2a^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-v_0t+\xi+\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{v_0^2}{2a^2}\eta} d\eta \right] d\xi \right\}.$$

Indicación. Véase la indicación al problema 99.

c) Segmento finito

Se llama función de influencia del manantial puntiforme uniforme de calor («la función de manantial») para el segmento finito $0 < x < l$, que corresponde a las condiciones de frontera dadas, a la temperatura $G(x, \xi, t)$ en el punto arbitrario x , $0 < x < l$, en el momento arbitrario de tiempo $t > 0$ generada por el desprendimiento de $Q = cp^*$ unidades de calor en el punto ξ , $0 < \xi < l$, $\xi \neq x$ de este segmento en el momento de tiempo $t = 0$, si los extremos del segmento se mantienen en las condiciones de frontera homogéneas correspondientes.

De este manera la función de manantial $G(x, \xi, t)$ debe: 1) ser la solución de la ecuación de la conducción calorífica; 2) satisfacer las condiciones de frontera homogéneas correspondientes; 3) anularse cuando $t \rightarrow 0$ y $x \neq \xi$, y 4) satisfacer la relación límite

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_{\xi - \lambda}^{\xi + \lambda} G(x, \xi, t) cp dx = Q,$$

o, que es lo mismo,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \int_{\xi - \lambda}^{\xi + \lambda} G(x, \xi, t) dx = t$$

para cualquier $\lambda > 0$ **).

La función de manantial

$$\frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \quad (1)$$

para la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2)$$

sobre la recta no acotada satisface las exigencias 1), 3), 4).

Si a (1) se suma una solución continua $g(x, \xi, t)$ tal, de la ecuación (2), que se anula cuando $t = 0$, para que la suma

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + g(x, \xi, t) \quad (3)$$

satisfazca las condiciones de frontera (2), entonces (3) satisfará todas las exigencias 1), 2), 3), 4), es decir, será la función de manantial para la ecuación (2) sobre un segmento finito, la cual corresponde a las condiciones de frontera 2).

El sumando $g(x, \xi, t)$ puede ser construido para ciertos tipos de condiciones de frontera mediante el método de reflexión; mediante este método se resuelven los problemas 103-106.

*) Aquí c es el calor específico, ρ , la densidad lineal de masa.

**) Se supone que $0 < \xi - \lambda < \xi + \lambda < l$.

103. *Resolución.* Prolongamos la barra $0 < x < l$ hacia ambos lados infinitamente y consideramos que la superficie de ellos en todas partes es termo-

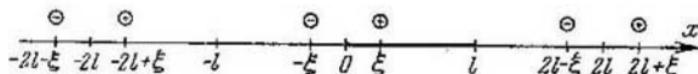


Fig. 36

aislada. Sea que en el punto ξ , $0 < \xi < l$, en el momento $t = 0$ se desprendió $Q = cp$ unidades de calor. El aumento de la temperatura

$$\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}, \quad (1)$$

experimentado en la barra no acotada $-\infty < x < +\infty$ por la acción de este manantial instantáneo, es distinto de cero para $x = 0$ y $x = l$. Si, además de esto, en los puntos $-\xi, \pm\xi \pm 2nl$, $n = 1, 2, 3, \dots$) en el momento $t = 0$ actuaron los manantiales instantáneos de calor de potencia $\pm Q$ distribuidos tal como está indicado en la fig. 36, entonces la temperatura

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2t}} \right), \quad (2)$$

exitada en la barra no acotada $-\infty < x < +\infty$ por la acción de todos estos manantiales, será igual a cero todo el tiempo tanto en el punto $x = 0$ como en el punto $x = l$. Realmente, a cada manantial de potencia $+Q$ según la fig. 36 corresponde el manantial de potencia $-Q$ simétrico respecto a $x = 0$ y, a la inversa, a cada manantial de potencia $-Q$ le corresponde un manantial de potencia $+Q$ simétrico respecto a $x = 0$, de manera que sus acciones en el punto $x = 0$ se anulan mutuamente. Lo mismo se puede decir acerca del punto $x = l$.

Representamos $G(x, \xi, t)$ de la forma

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + g(x, \xi, t), \quad (3)$$

donde

$$g(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2t}} \right). \quad (4)$$

Por $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\cdot)$ está denotada la serie (2) sin el término (1). Los términos (4) tienen las derivadas de todos los órdenes con respecto a x y t , en todas partes, para $0 < x < l$, $0 < t < +\infty$. La serie (4) converge absoluta y uniformemente para $0 < x < l$, $0 < t < t^*$, donde t^* es un valor positivo arbitrario; del mismo modo se comportan las series que se obtienen de la serie (4) derivando término a término. Para $t \rightarrow 0$, $t > 0$ cada término de la serie (4) tiende a cero.

*) Los puntos $-\xi, \pm\xi \pm 2nl$, $n = 1, 2, 3, \dots$, se obtienen del punto ξ mediante las reflexiones simétricas sucesivas respecto a $x = 0$ y $x = l$.

De esta manera $G(x, \xi, t)$ satisface todas las exigencias 1), 2), 3), 4) de la definición de función de manantial.

Estimaremos el error que se comete al sustituir la suma de la serie (4) por su suma parcial $\sum_{n=-N}^N$ para $0 < x < l$, $0 < t < t^*$. Consideramos primero la serie de los términos con n positivos. Si suprimos los paréntesis, entonces la serie se convertirá en una de términos de signo variable que satisface las condiciones del teorema de Leibniz. Por eso, para el resto de la serie obtenemos la estimación

$$\begin{aligned} |R_N^+(x, \xi, t)| &= \left| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=N}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4a^2t}} \right) \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi+2N)^2}{4a^2t}} \leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(N-1)^2 l^2}{a^2 t}} \quad \text{para } 0 < x < l, 0 < \xi < l. \end{aligned} \quad (5)$$

Análogamente, para el resto de la serie de los términos con n negativos obtenemos la estimación

$$|R_N^-(x, \xi, t)| \leqslant \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(N-1)^2 l^2}{a^2 t}}. \quad (5')$$

De esta manera, para el resto de la serie (4) tiene lugar la estimación

$$|R_N(x, \xi, t)| \leqslant \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(N-1)^2 l^2}{a^2 t}}, \quad 0 < x, \quad \xi < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (6)$$

Es fácil establecer que para

$$N \geqslant \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t^*}{2}} + 1 \quad (7)$$

se cumplirá la desigualdad *)

$$\frac{1}{a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(N-1)^2 l^2}{a^2 t}} \leqslant \frac{1}{a\sqrt{\pi t^*}} e^{-\frac{(N-1)^2 l^2}{a^2 t^*}} \quad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant t^*. \quad (8)$$

*) Para eso en la función $\varphi(t) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(N-1)^2 l^2}{a^2 t}}$ pasamos a la nueva variable independiente $\tau = \frac{(N-1)l}{a\sqrt{t}}$. Obtenemos

$$\varphi(t) = \frac{1}{(N-1)l\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\tau}{e^{\tau^2}} = \frac{1}{(N-1)l\sqrt{\pi}} \psi(\tau),$$

donde

$$\psi(\tau) = \frac{\tau}{e^{\tau^2}}.$$

Por consiguiente, para un N que satisface la desigualdad (7) se satisfacerá la desigualdad

$$|R_N(x, \xi, t)| \leq \frac{1}{a \sqrt{\pi t^*}} e^{-\frac{(N-1)^2 l^2}{a^2 t^*}} \quad \text{para } 0 \leq t \leq t^*, \quad 0 \leq x, \xi \leq l. \quad (6')$$

Resolviendo mediante el método de separación de variables el problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \quad (9)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (10)$$

$$u(x, 0) = \delta(x), \quad 0 < x < l, \quad (11)$$

obtenemos para la función de manantial la expresión

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi \xi}{l}. \quad (12)$$

Aunque las series (12) y (4) formalmente se transforman una en otra *), sin embargo sus papeles en la representación de la función de manantial son diferentes, si la serie (4) converge tanto más rápidamente cuanto menor sea t , la serie (12), al revés, converge tanto más rápidamente como es mayor t .

No se difícil obtener la estimación del error que se comete al sustituir la suma de la serie (12) por su suma parcial.

Tenemos

$$\begin{aligned} |R_N(x, \xi, t)| &= \left| \frac{2}{l} \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi x}{l} \sin \frac{n \pi \xi}{l} \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{l} \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} < \frac{2}{l} \int_N^{+\infty} e^{-z^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} dz = \\ &= \frac{2}{\pi a \sqrt{t}} \int_{\frac{N \pi a \sqrt{t}}{l}}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{a \sqrt{\pi t}} \left[1 - \Phi \left(\frac{N \pi a \sqrt{t}}{l} \right) \right] \quad (13) \end{aligned}$$

para $0 \leq x, \xi \leq l, \quad 0 < t < +\infty.$

Dado que

$$\psi'(\tau) = \frac{1-2\tau^2}{\tau^3} < 0 \quad \text{para } \tau > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

entonces $\psi(\tau)$ es monótona decreciente en el segmento $\frac{1}{\sqrt{2}} < \tau < +\infty$; por consiguiente, $\varphi(t)$ es monótona creciente para $0 < t < \frac{2(N-1)^2 l^2}{a^2}$. Esto significa que para todos los N que satisfacen la desigualdad $\frac{2(N-1)^2 l^2}{a^2} \geq t^*$ (es decir, la desigualdad (7)) se cumplirá la desigualdad (8).

*) Véase [7], págs. 532-535.

Es más conveniente, sin embargo, realizar la estimación no del resto de la serie que representa la función de influencia, sino la estimación del resto de la serie que representa la solución del problema de contorno que se obtiene mediante esta función, dado que la integración, hablando en general, mejora la convergencia de la serie *).

104. Mediante el método de reflexión obtenemos

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi+2n\ell)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi-2n\ell)^2}{4a^2 t}} \right\}, \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 < t < +\infty.$$

El esquema correspondiente de la disposición de los manantiales de calor instantáneos de potencia $Q = cp$ está dado en la fig. 37.

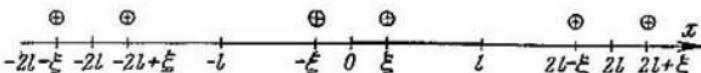


Fig. 37

En virtud de las relaciones (7) y (8) de la solución del problema anterior para los términos de la serie (1) tenemos

$$\frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x \pm \xi \pm 2n\ell)^2}{4a^2 t}} \leq \frac{1}{2a \sqrt{\pi t^*}} e^{-\frac{(n-1)^2 l^2}{a^2 t^*}} \quad (2)$$

$$\text{para } 0 \leq x, \quad \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad n \geq \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t^*}{2}} + 1. \quad (3)$$

De esta manera, para el resto de la serie (1) tenemos la estimación

$$|R_N(x, \xi, t)| \leq \frac{2}{a \sqrt{\pi t^*}} \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-\frac{(n-1)^2 l^2}{a^2 t^*}} < \\ < \frac{2}{a \sqrt{\pi t^*}} \int_{N+1}^{+\infty} e^{-\frac{l^2 z^2}{a^2 t^*}} dz = \frac{1}{l} \left[1 - \Phi \left(\frac{l N}{a \sqrt{t^*}} \right) \right] \quad (4)$$

$$\text{para } 0 \leq x, \quad \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad N \geq \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t^*}{2}} + 1. \quad (5)$$

Mediante el método de separación de variables para esta misma función de manantial obtenemos la expresión

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \cos \frac{n \pi x}{l} \cos \frac{n \pi \xi}{l}. \quad (6)$$

*) Véase las estimaciones realizadas al resolver los problemas 22, 27, 28, 29, 48 del presente capítulo.

Para el resto de la serie (6) se logra la estimación

$$|R_N(x, \xi, t)| \leq \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{N\pi a \sqrt{t}}{l} \right] \right\} \quad (7)$$

$$\text{para } 0 < x, \quad \xi < l, \quad 0 < t < +\infty. \quad (8)$$

105. Mediante el método de reflexión obtenemos

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left(e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2t}} \right). \quad (1)$$

La distribución correspondiente de los manantiales puntiformes instantáneos de potencia $Q = cp$ y $-Q$ está dada en la fig. 38.

El método de separación de variables da

$$G(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t} \cos \frac{(2n+1)\pi\xi}{2l} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2l}. \quad (2)$$

La estimación del error que se comete al sustituir la suma de la serie (1) por su suma parcial, se realiza mediante las desigualdades análogas a las (4) y (5) de

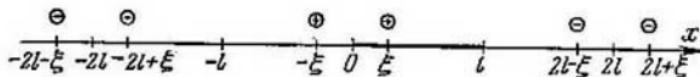


Fig. 38

la solución del problema anterior (estimación aproximada), o análogamente a como se hizo en la solución del problema 103 (estimación más exacta). Para el resto de la serie (2) obtenemos la estimación

$$|R_N(x, \xi, t)| \leq \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \left\{ 1 - \Phi \left[\frac{[(2N+1)\pi a \sqrt{t}]}{2l} \right] \right\}.$$

106. a) Si N satisface las desigualdades

$$N \geq \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t^*}{2}} + 1, \quad (1)$$

$$N > \frac{a}{l} \sqrt{t^* \ln [2ea\sqrt{\pi t^*}]} + 1, \quad (2)$$

entonces para el resto de la serie (2) de la solución del problema 103 es cumplirá la desigualdad

$$|R_N(x, \xi, t)| \leq s \quad \text{para } 0 < x, \quad \xi < l, \quad 0 < t \leq t^*. \quad (3)$$

b) Si N satisface la desigualdad

$$\Phi \left(\frac{N\pi a \sqrt{t^*}}{l} \right) \geq 1 - ea\sqrt{\pi t^*}, \quad (4)$$

entonces, para el resto de la serie (12) de la solución del problema 103, se cumplirá la desigualdad

$$|R_N(x, \xi, t)| \leq \varepsilon \quad \text{para } 0 \leq x, \quad \xi \leq l, \quad t^* \leq t < +\infty. \quad (5)$$

Observación. Las desigualdades (1), (2), (4) permiten, para un N dado, hallar tal t^* , que se cumplan las relaciones (3) y (5).

107. a) Si N satisface las desigualdades

$$N \geq \frac{a}{l} \sqrt{\frac{t^*}{2}} + 1, \quad (1)$$

$$\Phi \left(\frac{lN}{a \sqrt{t^*}} \right) \geq 1 - \varepsilon l, \quad (2)$$

entonces para el resto de la serie (4) de la solución del problema 104 se cumple la desigualdad

$$|R_N(x, \xi, t)| \leq \varepsilon \quad \text{para } 0 \leq x, \quad \xi \leq l, \quad 0 \leq t \leq t^*.$$

b) Si N satisface la desigualdad

$$\Phi \left(\frac{N \pi a \sqrt{t^*}}{l} \right) \geq 1 - \varepsilon \pi a \sqrt{t^*},$$

entonces, para el resto de la serie (6) de la solución del problema 104 se cumple la desigualdad

$$|R_N(x, \xi, t)| \leq \varepsilon \quad \text{para } 0 \leq x, \quad \xi \leq l, \quad t^* \leq t < +\infty.$$

108. Las expresiones de las funciones de manantial se obtienen de las representaciones halladas en las soluciones de los problemas 103, 104, 105 mediante la multiplicación por e^{-ht} , donde h es el coeficiente del intercambio de calor que entra en la ecuación $u_t = a^2 u_{xx} - hu$.

109. *Resolución.* Sustituimos en la solución $u(x, t)$ de la ecuación

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty \quad (1)$$

x y t por ξ y τ ; sustituimos después en la función de manantial $G(x, \xi, t)$ t por $t - \tau$, $0 < \tau < t$.

Integrando la igualdad $\frac{\partial}{\partial \tau} (Gu) = G \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial G}{\partial \tau} = a^2 \left[G \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - u \frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} \right] + Gf^*(\tau)$ con respecto a ξ entre 0 y l , con respecto a τ entre 0 y $t - \alpha$, $0 < \alpha < t$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^l (Gu)_{\tau=t-\alpha} d\xi &= \int_0^l (Gu)_{\tau=0} d\xi + a^2 \int_0^{t-\alpha} \left\{ \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} - \right. \\ &\quad \left. - \left(u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \right\} d\tau + \int_0^{t-\alpha} d\tau \int_0^l Gf(\tau) d\xi. \end{aligned} \quad (2)$$

*) Esta igualdad se obtiene del mismo modo que la (1) de la resolución del problema 68.

Pasando al límite en la igualdad (2) cuando $\alpha \rightarrow 0$ *) obtenemos la fórmula integral

$$u(x, t) = \int_0^t (Gu)_{\tau=0} d\xi + a^2 \int_0^t \left\{ \left(G \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}^{t=\tau} - \left(u \frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{\xi=0}^{t=\tau} \right\} d\tau + \\ + \int_0^t d\tau \int_0^l Gf(\xi, \tau) d\xi. \quad (3)$$

Esta fórmula integral tiene un valor común para las funciones de manantial que satisfacen diferentes condiciones de frontera. Si ahora se aplican las condiciones iniciales y de frontera para u :

$$u(0, \tau) = \varphi(\tau), \quad u(l, \tau) = 0, \quad 0 < \tau < +\infty, \quad (4)$$

$$u(\xi, 0) = f_0(\xi), \quad 0 < \xi < l, \quad (5)$$

y las condiciones de frontera para $G(x, \xi, t - \tau)$

$$G(x, 0, t - \tau) = 0, \quad G(x, l, t - \tau) = 0, \quad 0 < x < l, \quad 0 < \tau < t, \quad (6)$$

entonces de la fórmula integral (6) obtenemos la representación siguiente de la solución de problema del contorno mediante la función de manantial

$$u(x, t) = \int_0^l f_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi + a^2 \int_0^t \varphi(\tau) \frac{\partial G(x, 0, t - \tau)}{\partial \xi} d\tau + \\ + \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi, \tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi.$$

Utilizando dos representaciones diferentes de la función de manantial $G(x, \xi, t - \tau)$ (véase la solución del problema 103), logramos dos representaciones distintas de la solución de nuestro problema de contorno

$$\text{a) } u(x, t) = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^l f_0(\xi) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2 t}} \right) \right\} d\xi + \\ + \frac{1}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ (x+2nl) e^{-\frac{(x+2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} d\tau + \\ + \frac{1}{2a \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^l f(\xi, \tau) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{(x-\xi+2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi+2nl)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right) \right\} d\xi;$$

$$\text{b) } u(x, t) = \frac{2}{l} \int_0^l f_0(\xi) \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{n \pi \xi}{l} \sin \frac{n \pi x}{l} \right\} d\xi +$$

*) El paso al límite en la parte izquierda de la igualdad (2) puede realizarse mediante razonamientos análogos a los dados en [7], en las págs. 258-262.

$$+ \frac{2\pi a^2}{l^2} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left\{ \int_0^t \Phi(\tau) e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}(t-\tau)} d\tau \right\} \sin \frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{2}{l} \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi, \tau) \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}(t-\tau)} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right\} d\xi.$$

La representación a), hablando en general, es más conveniente para t pequeñas, la b), para t grandes.

$$110. u(x, t) = \int_0^l f_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi - a^2 \int_0^t \Phi(\tau) G(x, 0, t-\tau) d\tau + \\ + \int_0^t d\tau \int_0^l f(\xi, \tau) G(x, \xi, t-\tau) d\xi \quad (1)$$

donde $G(x, \xi, t-\tau)$ es la función de manantial obtenida en la solución del problema 104. Si en la igualdad (1) sustituimos dos representaciones diferentes de la función de manantial, entonces se obtienen dos expresiones distintas de la solución de nuestro problema de contorno.

$$111. u(x, t) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left[1 - \Phi \left(\frac{|x+2nl|}{2a\sqrt{t}} \right) \right] \operatorname{sign}(x+2nl) \right\}.$$

$$112. u(x, t) = q_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ 2a \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{(x+2nl)^2}{4a^2 t}} - \right. \\ \left. - |x+2nl| \cdot \left[1 - \Phi \left(\frac{|x+2nl|}{2a\sqrt{t}} \right) \right] \right\}.$$

3. Medios heterogéneos y factores concentrados; ecuaciones con coeficientes constantes a trozos y condiciones de conjugación

$$113. u(x, t) = \begin{cases} U_0 + (U_0 - U_1) \Phi \left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right), & -\infty < x \leq 0, \\ U_0 + (U_0 - U_2) \Phi \left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \right), & 0 \leq x < +\infty, \end{cases} \quad 0 < t < +\infty,$$

$$U_0 = \frac{U_1 \frac{k_1}{a_1} + U_2 \frac{k_2}{a_2}}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2}}.$$

Indicación. El problema se puede resolver mediante el siguiente artificio. Se debe prolongar la barra izquierda indefinidamente hacia la derecha de tal modo que se obtenga una barra homogénea no acotada de la misma sustancia

que la barra semiacotada izquierda. Despues se debe hallar la temperatura de la barra no acotada con la condicin de que su temperatura inicial sea igual a U_1 para $-\infty < x < 0$ y U_1^* para $0 < x < +\infty$, donde U_1^* es una constante, aun no determinada. Anlogamente se debe proceder con la barra semiacotada derecha. Las constantes U_1^* y U_2^* se hallan de las condiciones de frontera (las condiciones de conjugaciin) en el punto $x = 0$.

$$\begin{aligned}
 114. \quad u(x, t) &= \begin{cases} u_1(x, t), & -\infty < x < 0, \\ u_2(x, t), & 0 < x < +\infty, \end{cases} \quad 0 < t < +\infty, \\
 u_1(x, t) &= \frac{1}{2a_1 \sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 f_1(\xi) \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_1^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1^2 t}} \right\} d\xi + \\
 &\quad + \frac{a_1}{k_1 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a_1^2(t-\tau)}} d\tau, \\
 u_2(x, t) &= \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f_2(\xi) \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2^2 t}} \right\} d\xi - \\
 &\quad - \frac{a_2}{k_2 \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{x^2}{4a_2^2(t-\tau)}} d\tau, \\
 \varphi(\tau) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{\Phi(z)}{\sqrt{\tau-z}} dz, \\
 \Phi(z) &= \left[\frac{1}{a_2 \sqrt{z}} \int_0^{+\infty} f_2(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a_2^2 z}} d\xi - \frac{1}{a_1 \sqrt{z}} \int_{-\infty}^0 f_1(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4a_1^2 z}} d\xi \right] \frac{1}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2}}.
 \end{aligned}$$

Indicacin. Las funciones $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ deben ser respectivamente las soluciones de las ecuaciones de la conducciin calorfica $u_{1t} = a_1^2 u_{1xx}$ y $u_{2t} = a_2^2 u_{2xx}$ y satisfacer las condiciones de conjugaciin

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \quad k_1 u_{1x}(0, t) = k_2 u_{2x}(0, t).$$

Suponiendo

$$\varphi(t) = k_1 u_{1x}(0, t) = k_2 u_{2x}(0, t)$$

y resolviendo el problema de la conducciin calorfica con la condicin dada de frontera de segundo gnero para la barra semiacotada $-\infty < x < 0$ y para la barra semiacotada $0 < x < +\infty$, expresamos $u_1(x, t)$ y $u_2(x, t)$ mediante las condiciones iniciales y la funcin $\varphi(t)$ aun desconocida. Utilizando la primera condicin de conjugaciin $u_1(0, t) = u_2(0, t)$, obtenemos la ecuaciin integral de Abel para determinar la funcin $\varphi(t)$:

$$\int_0^z \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \Phi(z).$$

La solución de esta ecuación es*)

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{\Phi(z)}{\sqrt{\tau-z}} dz.$$

Si $\Phi'(z)$ existe y es continua **) para $0 < z < +\infty$, entonces, realizando en el segundo miembro de la última igualdad la integración por partes y luego la diferenciación, obtenemos

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\tau \frac{\Phi'(z)}{\sqrt{\tau-z}} dz + \frac{\Phi(+0)}{\pi \sqrt{\tau}}.$$

Esta fórmula puede aplicarse, en particular, si

$$\Phi(z) = \text{const.}$$

En este caso $\Phi'(z) = 0$ y

$$\varphi(\tau) = \frac{\Phi(+0)}{\pi \sqrt{\tau}}.$$

115. La solución del problema de contorno

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty \quad (1')$$

$$G_1 = G_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial x} \quad \text{para } x=0, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_1 = 0, \quad -\infty < x < 0, \quad (3)$$

$\lim_{t \rightarrow 0} G_2 = 0$, $0 < x < +\infty$, $x \neq \xi$; en el punto $x = \xi$ para $t \rightarrow 0$ G_2 tiene la particularidad

$$\frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2 t}}, \quad (3')$$

es

$$G_1(x, \xi, t) = \frac{2 \frac{\lambda_2}{a_2}}{\frac{\lambda_1}{a_1} + \frac{\lambda_2}{a_2}} \cdot \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\frac{a_1}{a_2} \xi)^2}{4a_2^2 t}} \quad \text{para } -\infty < x < 0, \quad (4)$$

$$G_2(x, \xi, t) = \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a_2^2 t}} + \frac{\frac{\lambda_2}{a_2} - \frac{\lambda_1}{a_1}}{\frac{\lambda_2}{a_2} + \frac{\lambda_1}{a_1}} \cdot \frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a_2^2 t}}}{2a_2 \sqrt{\pi t}} \quad \text{para } 0 < x < +\infty. \quad (4')$$

*) Véase, por ejemplo, [2], t. II, 79.

**) Con restricciones apropiadas sobre f_1 y f_2 esto será cumplido.

Solución. Pasamos a las magnitudes adimensionales (véase la solución del problema 18 del presente capítulo), además de tal modo que la ecuación de la conducción calorífica para las barras derecha e izquierda sea de la forma $u_t = a^2 u_{\xi\xi}$. Tenemos $x = l'\xi$, $-\infty < \xi < 0$,

$$x = l''\xi, \quad 0 < \xi < +\infty, \quad t = \tau, \quad l' = a_1, \quad l'' = a_2 *$$

Las condiciones de frontera (2) serán de la forma

$$u_1(0, \tau) = u_2(0, \tau), \quad (5)$$

$$\frac{\lambda_1}{a_1} \frac{\partial u_1(0, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\lambda_2}{a_2} \frac{\partial u_2(0, \tau)}{\partial \xi}. \quad (6)$$

Buscamos la solución para $-\infty < \xi < 0$ como "refractada" sobre la frontera de la partición $\xi=0$, es decir, como la función $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}}$ que tiene la forma

$$\alpha_1 \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}}, \quad (7)$$

y la solución para $0 < \xi < +\infty$, como la suma de $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}}$ y el sumando que representa en sí el resultado de "reflexión" sobre la frontera de la partición $\xi=0$ de la función $\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}}$, es decir, de la forma

$$u_2(\xi, \tau) = \alpha_2 \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi-\xi_0)^2}{4\tau}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\xi+\xi_0)^2}{4\tau}}. \quad (8)$$

Sustituyendo (7) y (8) en (5) y (6), hallamos α_1 y α_2 , lo que llevará a la respuesta (si volvemos a las unidades anteriores de medida).

116. La solución del problema de contorno

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad t < +\infty, \quad (1)$$

$$c_0 u_t(0, t) = \lambda S u_x(0, t) \quad 0 < t < +\infty, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

es

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi,$$

donde

$$F(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{para } -\infty < x < 0, \\ f(x) & \text{para } 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \frac{e^{\alpha^2 x} - 1}{\alpha^2} f'(+0) + f(+0) + \int_0^x dz \int_0^z \{f''(-\xi) + \alpha^2 f'(-\xi)\} e^{-\alpha^2 (\xi-z)} d\xi,$$

$$\alpha^2 = \frac{\lambda S}{a^2 C_0},$$

*) Se trata de la igualdad numérica y no de la coincidencia de medidas.

λ es el coeficiente de la conductibilidad térmica de la barra; S , el área de la sección transversal; a^2 , el coeficiente de la termoconductibilidad de la barra.

Indicación. Utilizar la afirmación formulada en el problema 82.

117. La solución del problema de contorno

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, & 0 < x < \xi(t), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, & \xi(t) < x < +\infty \end{aligned} \right\} 0 < t < +\infty, \quad (1)$$

$$u_1(\xi(t), t) = u_2(\xi(t), t), \quad u_1(0, t) = U_1, \quad u_2(+\infty, t) = U_2, \quad (2)$$

donde por la temperatura de congelación se tomó igual a cero; $x = \xi(t)$ es la coordenada del frente de congelación

$$\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)_{x=\xi(t)} = Q\rho \frac{d\xi}{dt}, \quad 0 < t < +\infty, \quad (2')$$

Q es el calor oculto de fusión; ρ , la densidad de la masa del líquido

$$u_2(x, 0) = U_2, \quad 0 < x < +\infty, \quad (3)$$

es

$$u_1(x, t) = A_1 + B_1 \Phi \left(\frac{x}{2a_1 \sqrt{t}} \right), \quad (4)$$

$$u_2(x, t) = A_2 + B_2 \Phi \left(\frac{x}{2a_2 \sqrt{t}} \right), \quad (4')$$

donde

$$A_1 = U_1, \quad B_1 = -\frac{U_1}{\Phi \left(\frac{\alpha}{2a_1} \right)}, \quad A_2 = \frac{U_2 \Phi \left(\frac{\alpha}{2a_2} \right)}{1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{2a_2} \right)}, \quad B_2 = \frac{U_2}{1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{2a_2} \right)}, \quad (5)$$

α es la raíz de la ecuación trascendente

$$\frac{k_1 U_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi \left(\frac{\alpha}{2a_1} \right)} + \frac{k_2 U_2 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2 \left[1 - \Phi \left(\frac{\alpha}{2a_2} \right) \right]} = -Q\rho \frac{\sqrt{\pi}}{2} \alpha. \quad (6)$$

Capítulo IV

ECUACIONES DE TIPO ELÍPTICO

§ 1. Problemas físicos que se reducen a ecuaciones de tipo elíptico y planteamiento de los problemas de contorno

1. Problemas de contorno para las ecuaciones de Laplace y Poisson en un medio homogéneo

1. La ecuación para la temperatura del campo calorífico estacionario en un medio homogéneo es de la forma

$$\Delta u = -f(x, y, z), \quad (1)$$

donde $f = \frac{F}{k}$; F es la densidad de los manantiales de calor, es decir, la cantidad de calor que se desprende en una unidad de volumen durante una unidad de tiempo; k , el coeficiente de la conductibilidad térmica.

La condición de contorno de primer género

$$u|_{\Sigma} = f_1$$

significa que sobre la superficie Σ está dada la temperatura \bar{f}_1 ; la condición de segundo género

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = f_2, \quad \text{o} \quad -k \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = f_2, \quad (\bar{f}_2 = -f_2 k),$$

que sobre Σ está dado el flujo calorífico de magnitud \bar{f}_2 ; la condición de tercero género

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu|_{\Sigma} = f_3, \quad \text{o} \quad -k \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{h}(u - \bar{f}_3), \quad \bar{h} = kh, \quad \bar{f}_3 = \frac{f_3}{h},$$

que sobre Σ se realiza el intercambio de calor según la ley de Newton con un medio de temperatura \bar{f}_3 .

La condición necesaria de la existencia de la temperatura estacionaria para el segundo problema de contorno es el cumplimiento de la igualdad $\int_{\Sigma} f_2 d\sigma = 0$,

es decir, el flujo sumario de calor a través de la superficie Σ debe ser igual a cero. La distribución no uniforme de la temperatura produce un flujo de calor cuya magnitud, según la ley de Fourier es igual a $Q = -k \operatorname{grad} u$. Su proyección sobre la dirección n , obviamente, es igual a $Q_n = -k \frac{\partial u}{\partial n}$.

Solución. Al deducir la ecuación (1) se debe escribir la condición del balance calorífico para un volumen arbitrario y después utilizar la fórmula de Ostrogradski.

La ecuación del balance calorífico para el volumen T con frontera Σ , obviamente, es de la forma

$$\int_{\Sigma} \left(-k \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \int_T F d\tau; \quad (2)$$

en el primer miembro se tiene el flujo sumario por medio de Σ , en el segundo, la cantidad de calor que se desprende en el volumen T .

La fórmula de Ostrogradski da

$$\int_T \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) d\tau = - \int_T F d\tau, \quad (3)$$

de donde, en virtud de la arbitrariedad del volumen T y de que k es constante, obtenemos la ecuación (1).

2. a) La ecuación de la difusión en un medio en reposo es

$$\Delta u = 0, \quad (1)$$

dónde $u(x, y, z)$ es la concentración.

b) Si el medio se mueve con la velocidad $v = (v_x, v_y, v_z)$, además $\operatorname{div} v = 0$, entonces la ecuación de la difusión es de la forma

$$D \Delta u - v_x \frac{\partial u}{\partial x} - v_y \frac{\partial u}{\partial y} - v_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

dónde D es el coeficiente de la difusión; v_x, v_y, v_z , las proyecciones de la velocidad v sobre los ejes de las coordenadas.

Si $v_x = v, v_y = v_z = 0$, entonces la ecuación (2) es de la forma

$$\Delta u - \frac{v}{D} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

ó

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \frac{v}{D} u_x = 0$$

(ecuación del ataque de gases).

Indicación. El flujo difuso de la sustancia para la distribución no uniforme de la concentración es igual a

$$Q = -D \operatorname{grad} u. \quad (4)$$

Además del flujo difuso se debe considerar el flujo de desplazamiento (el flujo transmitivo) que es igual a

$$uv,$$

así que el flujo sumario es igual a

$$-D \operatorname{grad} u + uv.$$

Para deducir las ecuaciones (1) y (2) se debe utilizar el principio de conservación de la materia para el volumen arbitrario y después aplicar la fórmula de Ostrogradski (véase la resolución del problema 1).

El principio de conservación de la materia para la superficie inmóvil Σ se escribe así

$$\int_{\Sigma} \left(-D \frac{\partial u}{\partial n} + v_n u \right) d\sigma = 0$$

$$\int_T [\operatorname{div}(D \operatorname{grad} u) - \operatorname{div}(vu)] d\tau = 0,$$

de donde, en virtud de la arbitrariedad del volumen T y también de la condición $\operatorname{div} v = 0$, se deduce la ecuación (2).

3. La ecuación del potencial u del campo eléctrico en el vacío es de la forma

$$\Delta u = -4\pi\rho,$$

donde ρ es la densidad volumétrica de las cargas.

El sentido físico de las condiciones de frontera de primer y segundo géneros es: $u|_{\Sigma} = f$, es el potencial dado sobre la superficie Σ , $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = f$, es la densidad superficial dada de las cargas.

Solución. El campo de las cargas estacionarias distribuidas satisface las ecuaciones obtenidas de las de Maxwell, si todas las, derivadas respecto al tiempo se hacen iguales a cero. Para el campo electrostático en un medio no conductor obtenemos:

$$\operatorname{rot} E = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D &= 4\pi\rho, \\ D &= \epsilon E, \end{aligned} \quad (2)$$

donde ϵ es la constante dieléctrica del medio; $\rho = \rho(M)$, la densidad volumétrica de las cargas en el punto M .

De la ecuación $\operatorname{rot} E = 0$ se deduce que E es el vector del potencial que se puede representar de la forma

$$E = -\operatorname{grad} u,$$

donde $u = u(M)$ es el potencial del campo.

La ecuación (2) da

$$\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho.$$

Si $\epsilon = \text{const}$, entonces para u obtenemos la ecuación

$$\Delta u = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon};$$

en el vacío $\epsilon = 1$ y tendremos

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Si existen unas superficies conductoras, entonces sobre ellas la componente tangencial del campo eléctrico debe ser igual a cero:

$$E_s = -\frac{\partial u}{\partial s} = 0,$$

donde $\frac{\partial}{\partial s}$ significa la derivación según la dirección tangencial sobre la superficie. De aquí se deduce que sobre la superficie del conductor el potencial es constante:

$$u = \text{const};$$

dentro del conductor $u = \text{const}$ y $E = 0$.

Si el conductor está puesto a tierra, entonces el potencial

$$u = 0.$$

La densidad de las cargas superficiales se calcula según la fórmula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} D_n = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n}, \quad (3)$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ significa la derivación según la dirección de la normal a la superficie. Dando la distribución de las cargas superficiales sobre el conductor, obtenemos la condición

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = f, \quad f = -\frac{4\pi\sigma}{\epsilon}.$$

Sin embargo tal planteamiento del problema no es natural para la electrostática; comúnmente se sabe la carga completa e sobre la superficie. Por eso se busca la solución de la ecuación $\Delta u = -4\pi\rho$ con la condición de frontera $u|_{\Sigma} = u_0$, donde u_0 se determina de la condición de la normación de la solución con respecto a la carga

$$-\int_{\Sigma} e \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 4\pi e, \quad \text{donde } e = \int_{\Sigma} \rho d\tau \quad (\text{véase el problema 7}).$$

4. El vector de la intensidad del campo magnético es igual $H = -\operatorname{grad} \varphi$. El potencial φ satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta \varphi = 0.$$

Resolución. Si el campo magnético no varía durante el tiempo y las corrientes están ausentes, entonces el campo debe determinarse por las ecuaciones

$$\operatorname{rot} H = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} B = 0. \quad (2)$$

De la ecuación (1) se deduce:

$$H = -\operatorname{grad} \varphi;$$

sustituyendo esta expresión en la fórmula (2) y tomando en consideración la homogeneidad y la isotropía del medio ($\mu = \text{const}$), obtenemos la ecuación de Laplace.

5. Dado que el vector del campo eléctrico E es potencial, entonces

$$\Delta u = 0$$

y sobre la superficie de conductibilidad ideal puesta a tierra

$$u|_{\Sigma} = 0,$$

sobre la frontera con el dieléctrico

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0.$$

Resolución. Nos basaremos en las ecuaciones de Maxwell en un medio conductor para el caso estacionario

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c} j, \\ \operatorname{rot} E = 0, \\ \operatorname{div} E = 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \mu H = 0. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Aplicando la operación div a la primera ecuación, obtenemos para la densidad de la corriente la ecuación

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (2)$$

De la ecuación $\operatorname{rot} E = 0$ se deduce la potencialidad del vector E ,

$$E = -\operatorname{grad} u,$$

donde $u = u(M)$ es el potencial escalar.

Dado que en virtud de la ley diferencial de Ohm

$$j = \sigma E \quad (\sigma \text{ es la conductibilidad}) \quad (3)$$

6

$$j = -\sigma \operatorname{grad} u,$$

entonces para el medio isotrópico homogéneo ($\sigma = \text{const}$) la condición (2) da

$$\Delta u = 0.$$

De las ecuaciones (1) y (3) se deduce que $\rho = 0$ dentro del conductor.

1) Sobre la superficie de conductibilidad ideal puesta a tierra el potencial $u = 0$ (condición de frontera de primer género).

2) Si el conductor confina con el dielectrónico, entonces sobre la superficie de separación la componente normal de la densidad de la corriente debe ser igual a cero:

$$j_n = -\sigma \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

(condición de frontera de segundo género).

6. Si φ es el potencial de velocidades del flujo estacionario del líquido incompresible de modo que

$$v = \operatorname{grad} \varphi,$$

entonces el potencial φ satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta \varphi = 0.$$

Sobre la superficie del cuerpo sólido que se mueve con cierta velocidad v_0 se debe cumplir la condición

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Sigma} = v_{0n}$$

Si el cuerpo se encuentra en reposo, entonces

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0.$$

Si el medio es no acotado, entonces en el infinito cuando $r \rightarrow \infty$ el potencial debe satisfacer la condición común de regularidad.

Resolución. Si el líquido es incompresible, entonces $\rho = \text{const}$. De la ecuación de continuidad (la conservación de la materia)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

obtenemos la condición de incompresibilidad

$$\operatorname{div} v = 0.$$

Dado que según el planteamiento, la velocidad del líquido tiene un potencial

$$v = \operatorname{grad} \varphi$$

entonces $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$ ó $\Delta \varphi = 0$.

7. El primer problema fundamental de electrostática se plantea como el primer problema exterior de contorno.

Se exige hallar la función φ que satisface la ecuación de Laplace $\Delta \varphi = 0$ en todas partes fuera del sistema dado de conductores, que se anula en el infinito y que toma las magnitudes φ_i dadas sobre las superficies de los conductores:

$$\varphi|_{\Sigma_i} = \varphi_i.$$

El segundo problema principal de electrostática se plantea así:

Se exige hallar la función φ que satisface la ecuación de Laplace $\Delta \varphi = 0$ en todas partes fuera del sistema dado de conductores, la función que se anula en el infinito, toma sobre las superficies de los conductores ciertas magnitudes constantes

$$\varphi|_{\Sigma_i} = \varphi_i$$

y que satisface las relaciones integrales sobre las superficies de los conductores

$$\oint_{\Sigma_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -4\pi e_i,$$

donde e_i es la carga completa del i -ésimo conductor.

Si está dado sólo un conductor T_0 con la superficie Σ_0 , entonces la solución del segundo problema de electrostática puede representarse de la forma

$$\varphi = \varphi_0 V(x, y, z),$$

donde $V(x, y, z)$ es la solución del primer problema exterior de contorno para el campo exterior al conductor T_0 con la condición $V = 1$ sobre Σ_0 ; el multiplicador φ_0 se determina de la condición de normación

$$\oint_{\Sigma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = -4\pi e_0$$

y es igual a

$$\varphi_0 = -\frac{e_0}{\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_0} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma} = \frac{e_0}{C}$$

donde $C = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\Sigma_0} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$ es la capacidad del conductor.

2. Problemas de contorno para la ecuación de Laplace en medios heterogéneos

8. La distribución estacionaria de la temperatura satisface la ecuación $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = -F(M)$,

donde $k = k(M)$ es el coeficiente de la conductibilidad térmica y $F(M)$, la densidad de los manantiales de calor en el punto M .

Sea T cierto volumen con la frontera Σ sobre la que está dada, por ejemplo, la temperatura

$$u|_{\Sigma} = f.$$

Si el coeficiente $k(x, y, z)$ es constante a trozos y tiene las discontinuidades sobre cierta superficie Σ_1 de modo que

$$k = k_1 = \text{const en } T_1, \quad k = k_2 = \text{const en } T_2 (T = T_1 + T_2),$$

entonces sobre Σ_1 deben cumplirse las condiciones de conjugación

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_2, \\ k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}, \end{array} \right\} \quad (1)$$

la primera de las cuales significa la continuidad de la temperatura, y la segunda, la continuidad del flujo de calor sobre la superficie de la discontinuidad.

El problema en este caso se plantea así:

$$\Delta u_1 = -\frac{F}{k_1} \text{ en } T_1, \quad \Delta u_2 = -\frac{F}{k_2} \text{ en } T_2, \quad u|_{\Sigma} = f$$

y sobre Σ_1 tienen lugar las condiciones de conjugación para u_1 y u_2 .

Resolución. La ecuación se deduce del mismo modo que en el problema 1.

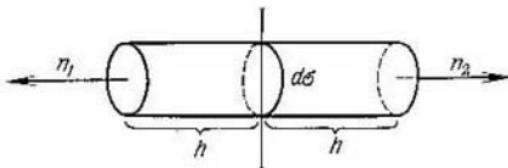


Fig. 39

La primera condición de conjugación $u_1 = u_2$ es evidente; la segunda condición $k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}$ puede obtenerse, aplicando la ecuación de balance al cilindro infinitésimo T_e de altura $2h$, construido sobre el elemento $d\sigma$ de la superficie Σ_1 a ambas partes de ésta, y pasando después al límite cuando $h \rightarrow 0$.

Como ya se observó en la resolución del problema 1, la ecuación del balance térmico es de la forma

$$\int_{\Sigma} \left(-k \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \int_T F d\tau, \quad (2)$$

de donde, en virtud de la arbitrariedad del volumen T y se deduce la ecuación $\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) = F$. Aplicando (2) al cilindro T_e obtenemos (fig. 39)

$$-\left(-k \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{S_1} d\sigma + \left(-k \frac{\partial u}{\partial n} \right)_{S_2} d\sigma + \int_{S_3} \left(-k \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = \int_T F d\tau,$$

donde S_1 es la base izquierda del cilindro; S_2 , la derecha; S_3 , su superficie lateral. Al pasar al límite cuando $h \rightarrow 0$ las integrales desaparecen, dado que $\frac{\partial u}{\partial n}$ y F son acotados en todas partes. Suponiendo la existencia de los valores límites izquierdo y derecho de $\frac{\partial u}{\partial n}$ sobre Σ_1 , obtenemos

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0;$$

eliendo una dirección de la normal $n_2 = -n_1 = n$, se puede escribir

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \text{ sobre } \Sigma_1.$$

9. Dentro del dielectrónico no homogéneo para el potencial del campo electrostático tenemos

$$\operatorname{div} (\epsilon \operatorname{grad} u) = -4\pi\rho. \quad (1)$$

Si sobre la superficie de la discontinuidad ϵ (x, y, z) no hay cargas superficiales, entonces se puede escribir

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_2, \\ \epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \end{array} \right\} \text{sobre la superficie de la discontinuidad } \epsilon,$$

donde los dígitos 1 y 2 corresponden a las magnitudes de los valores sobre diferentes lados de la superficie de la discontinuidad.

Si

$$\epsilon_1 = \text{const en } T_1, \quad \epsilon_2 = \text{const en } T_2,$$

donde T_1 y T_2 son las regiones separadas por la superficie Σ_1 , entonces para el potencial

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{en } T_1, \\ u_2 & \text{en } T_2, \end{cases}$$

tendremos

$$\Delta u_1 = -4\pi\rho \text{ en } T_1, \quad \Delta u_2 = -4\pi\rho \text{ en } T_2,$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_2, \\ \epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \epsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \end{array} \right\} \text{sobre } \Sigma_1.$$

La segunda condición de conjugación significa la continuidad de la componente normal del vector de la inducción eléctrica

$$\mathbf{D} = -\epsilon \operatorname{grad} u, \quad D_n = -\epsilon \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Indicación. Para deducir la ecuación se debe partir de las ecuaciones de Maxwell (véase la resolución del problema 3), considerando allí ϵ como una función de variables volumétricas. Acerca de la deducción de la condición de conjugación véase el problema (8).

Al resolver el problema 3 tenemos

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u, \quad \operatorname{div} \epsilon \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

De aquí se deduce la ecuación (1).

Las condiciones de conjugación se deducen lo mismo que en el problema 8. Observemos sólo que al existir las cargas superficiales sobre Σ_1

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma, \quad \text{ó} \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} = 4\pi\sigma,$$

donde σ es la densidad de las cargas superficiales sobre Σ_1 .

10. Si $H = -\operatorname{grad} \varphi$, entonces en el caso estacionario

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \varphi) = 0,$$

donde $\varphi = \varphi(P)$ es el potencial escalar; $\mu = \mu(P)$, la permeabilidad magnética del medio en el punto P .

Las condiciones de conjugación sobre la superficie de discontinuidad del coeficiente de la permeabilidad magnética son de la forma

$$u_1 = u_2, \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{sobre } \Sigma_1,$$

donde los dígitos 1 y 2 corresponden a las magnitudes de los valores sobre los lados diferentes de la superficie de discontinuidad Σ_1 .

La segunda condición significa la continuidad de la componente normal del vector de la inducción magnética sobre Σ_1 :

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

El problema de contorno para μ constante a trozos

$$\mu = \begin{cases} \mu_1 & \text{en } T_1, \\ \mu_2 & \text{en } T_2 \end{cases}$$

se plantea por analogía a los problemas 8 y 9

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{en } T_1, \quad \Delta u_2 = 0 \quad \text{en } T_2,$$

y las condiciones de conjugación sobre Σ_1 .

Indicación. Véase el problema 9.

11. En el medio con la conductibilidad variable $\sigma = \sigma(x, y, z)$ para el potencial del campo eléctrico de la corriente constante tiene lugar la ecuación

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0.$$

Si Σ es la superficie de discontinuidad de σ , entonces

$$u_1 = u_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{sobre } \Sigma;$$

la segunda condición significa la continuidad de la componente normal de la densidad de la corriente sobre la superficie Σ : $j_{1n} = j_{2n}$ dado que

$$j = -\sigma \operatorname{grad} u.$$

Indicación. Véanse los problemas 5, 8, 9, 10.

Tomando en consideración las relaciones

$$E = -\operatorname{grad} u, \quad j = \sigma E, \quad \operatorname{div} j = 0,$$

obtenemos

$$\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) = 0.$$

Las condiciones de conjugación se deducen análogamente al del problema 9.

12. La tabla siguiente establece la semejanza de los campos enunciados en el planteamiento

| | | | |
|--|--------------------------------------|--|--|
| Campo eléctrico de la corriente constante | Potencial u | Coeficiente de electroconductibilidad σ | Densidad de la corriente $j = -\sigma \operatorname{grad} u$ |
| Conductibilidad térmica | Temperatura u | Coeficiente de conductibilidad térmica k | Flujo de calor $Q = -k \operatorname{grad} u$ |
| Difusión | Concentración u | Coeficiente de difusión D | Flujo de la sustancia $Q = -D \operatorname{grad} u$ |
| Electrostática | El potencial del campo eléctrico u | Constante dieléctrica ϵ | Vector de la inducción eléctrica $D = \epsilon E = -\operatorname{grad} u$ |
| Magnetostática | El potencial del campo magnético u | Permeabilidad magnética μ | Vector de la inducción magnética $B = -\mu \operatorname{grad} u$ |
| El flujo potencial del líquido incompresible | El potencial de velocidades u | 1 | $v = \operatorname{grad} u$ |

En todos casos la función u satisface la ecuación de Laplace.

Indicación. Véanse los problemas anteriores de este párrafo y también el § 1, cap. II, problema 49.

Observación. Si en cierta superficie Σ_1 las constantes σ , k , D , ϵ , o μ tienen una discontinuidad, entonces sobre Σ_1 se cumplen las condiciones de conjugación que se pueden representar en la forma

$$u_1 = u_2, \quad p_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = p_2 \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{sobre } \Sigma_1,$$

donde u es la función incógnita; p , uno de los parámetros σ , k , D , ϵ , μ ; las cifras 1 y 2 corresponden a las magnitudes límites de los valores en examen sobre los diferentes lados de la superficie Σ_1 ; además $\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = 0$.

§ 2. Problemas simples para las ecuaciones de Laplace y Poisson

La parte considerable de las soluciones de los problemas de este párrafo poseen simetría circular o esférica o dependen de una forma simple de las coordenadas angulares.

Recordemos las expresiones del operador de Laplace:

1) en el sistema polar de coordenadas

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2};$$

2) en el sistema esférico de coordenadas

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2};$$

3) en el sistema cilíndrico de coordenadas

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta_2 u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Al resolver ciertos problemas se debe tener en cuenta que el polinomio $u = A(x^2 - y^2) + Bxy + Cx + Dy$,

donde A, B, C, D son constantes arbitrarias, satisface la ecuación de Laplace $\Delta_2 u = 0$.

1. Problemas de contorno para la ecuación de Laplace

13. a) $u = A$;

b) $u = \frac{A}{a} x$ o $u = \frac{A}{a} \rho \cos \varphi$;

c) $u = A + By$ o $u = A + B \rho \sin \varphi$;

d) $u = Axy$ o $u = \frac{A}{2} \rho^2 \sin 2\varphi$;

e) $u = A + \frac{B}{a} y$ o $u = A + \frac{B}{a} \rho \sin \varphi$;

f) $u = \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2a^2} (x^2 - y^2)$ o

$$u = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2} \cos 2\varphi \right) + \frac{B}{2} \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2} \cos 2\varphi \right).$$

Indicación. Al construir la solución se debe tener en cuenta que $x, y, xy, x^2 - y^2$ y sus combinaciones lineales son funciones armónicas. De la justezza de la solución puede verificarse mediante la sustitución directa de la expresión hallada de u en la ecuación

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

y en la condición de frontera.

Demostremos los métodos de búsqueda de la solución en el ejemplo de 13 b). Pasando de las variables (ρ, φ) a las variables (x, y) , escribiremos la condición de frontera de la forma

$$u = \frac{A}{a} x.$$

De aquí se ve que la función armónica

$$u(x, y) = \frac{A}{a} x \quad \text{o} \quad u(\rho, \varphi) = \frac{A}{a} \rho \cos \varphi$$

es la solución buscada.

14. Los problemas 14 a) y 14 d) están planteados incorrectamente dado que en el caso del segundo problema de contorno

$$\Delta u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_C = f$$

debe cumplirse la condición

$$\int_C f ds = 0.$$

b) $u(x, y) = Aax + C$ o $u(\rho, \varphi) = Aa \rho \cos \varphi + C$,

c) $u = \frac{A}{2} a(x^2 - y^2) + C$ o $u(\rho, \varphi) = \frac{A}{2} a \rho^2 \cos 2\varphi + C$,

e) $u = (A + 0,75B)y - \frac{0,25B}{3a^2}[3(x^2 + y^2)y - 4y^3] + C$,

6

$$u(\rho, \varphi) = (A + 0,75B)\rho \sin \varphi - \frac{B}{12a^2}\rho^3 \sin 3\varphi + C.$$

La solución del segundo problema de contorno, como es sabido, se determina con exactitud hasta la constante arbitraria C .

Indicación. Nos detendremos sólo en la resolución de un problema, por ejemplo, 14 b) en que está dado

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = Ax.$$

La función $u = Dx$ o $u = D\rho \cos \varphi$ es armónica. La diferenciación con respecto a la normal coincide con la diferenciación con respecto a ρ . Exigiendo que la función satisfaga la condición de frontera para $\rho = a$, hallamos $D = Aa$ de modo que $u(x, y) = Aax$ o $u(\rho, \varphi) = Aa \rho \cos \varphi$.

En el problema 14 e) se debe partir f en dos sumandos: $f = f_1(\varphi) + f_2(\varphi)$, $f_1 = \alpha \sin \varphi$, $f_2 = \beta \sin 3\varphi$, y buscar la solución de la forma

$$u = R_1(\rho)f_1(\varphi) + R_2(\rho)f_2(\varphi).$$

15. a) $u(\rho, \varphi) = A$,

b) $u(\rho, \varphi) = \frac{Aa}{\rho} \cos \varphi$,

c) $u(\rho, \varphi) = A + \frac{Ba^2}{\rho} \sin \varphi$,

d) $u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} A \frac{a^4}{\rho^2} \sin 2\varphi$,

e) $u(\rho, \varphi) = A + B \frac{a}{\rho} \sin \varphi,$

j) $u(\rho, \varphi) = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cdot \frac{a^2}{\rho^2} \cos 2\varphi.$

Indicación. Pasar en todos casos a las coordenadas polares. Si la condición de frontera para $\rho = a$ es de la forma

$$u|_{\rho=a} = A_k \cos k\varphi,$$

entonces, se debe buscar la solución de la forma

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho) \cos k\varphi$$

donde $R(\rho)$ es una función que satisface la ecuación

$$\rho^2 R'' + \rho R' - k^2 R = 0$$

y las siguientes condiciones de frontera

$$R(a) = A_k, \quad |R(\infty)| < \infty.$$

16. Los problemas 16 a) y 16 d) no tienen solución dado que no se cumple la condición

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

b) $u(\rho, \varphi) = -\frac{Aa^3}{\rho} \cos \varphi + \text{const}$

c) $u(\rho, \varphi) = -\frac{Aa^5}{2\rho^3} \cos 2\varphi + \text{const},$

e) $u(\rho, \varphi) = -(A+0,75B) \frac{a^2}{\rho} \sin \varphi + 0,25B \frac{a^4}{3\rho^3} \sin 3\varphi + C.$

17. $u = u(\rho) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{\ln \frac{\rho}{a}}{\ln \frac{b}{a}}.$

La capacidad de una unidad de longitud del condensador cilíndrico es igual a

$$C = \frac{1}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Indicación. Dado que las condiciones de frontera no dependen de φ , entonces también la solución debe poseer la simetría cilíndrica, $u = u(\rho)$.

La capacidad C del conductor limitado por la superficie Σ se determina por la expresión

$$C = -\frac{1}{4\pi u_0} \int_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma \text{ para tres dimensiones}$$

y

$$C = -\frac{1}{2\pi u_0} \oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds \text{ para dos dimensiones,}$$

donde u_0 es el potencial del conductor; L , el contorno,

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = E_n,$$

la componente normal del vector del campo eléctrico.

$$18. \quad u(\rho, \varphi) = \frac{u_0}{\alpha} \varphi$$

6

$$u(x, y) = \frac{u_0}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (1)$$

Indicación. Escribiendo la ecuación de Laplace en las coordenadas polares

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

vemos que la función lineal con respecto a φ es armónica.

$$19. \quad u(x, y) = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (1)$$

La comparación de (1) con la solución del problema 18 demuestra que (1) corresponde al caso particular $\alpha = \pi$ de la fórmula (1) en el problema 18.

$$20. \quad a) \quad u = u_0, \quad b) \quad u = u(r) = \frac{a}{r} u_0.$$

$$21. \quad u = u(r) = u_2 + \frac{u_1 - u_2}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right).$$

Indicación. La solución de la ecuación $\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = 0$ es de la forma $u = u(r) = \alpha + \frac{\beta}{r}$, donde α y β se determinan de las condiciones $u(a) = u_1$, $u(b) = u_2$.

$$22. \quad C = \frac{\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}.$$

Indicación. Tener en cuenta que en la presencia del dieléctrico la densidad de las cargas superficiales es igual a

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} D_n = -\frac{1}{4\pi} \epsilon \frac{\partial u}{\partial n}.$$

23. La capacidad del condensador esférico es igual a

$$C = \frac{\epsilon_1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)}.$$

Solución. Se exige resolver el problema de contorno

$$\Delta u_1 = 0, \quad \text{para } a < r < c, \quad \Delta u_2 = 0, \quad \text{para } c < r < b,$$

donde u_1 y u_2 satisfacen para $r = a$ y $r = b$ las condiciones de frontera
 $u_1|_{r=a} = 1, \quad u_2|_{r=b} = 0,$
y para $r = c$, las condiciones de conjugación

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r}.$$

La solución general es de la forma

$$u(r) = \begin{cases} u_1 = \frac{A_1}{r} + A_2 & \text{para } a < r < c, \\ u_2 = \frac{B_1}{r} + B_2 & \text{para } c < r < b. \end{cases}$$

Los cuatro coeficientes A_1, A_2, B_1, B_2 se determinan de las dos condiciones de frontera para $r = a$ y $r = b$ y de las dos condiciones de conjugación para $r = c$. Como resultado obtenemos

$$u_1 = 1 + A_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad u_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} A_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right),$$

donde

$$A_1 = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right)}.$$

La capacidad se calcula según la fórmula

$$C = -\frac{\varepsilon_1}{4\pi} \int \int \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{r=a} a^2 d\Omega = -\varepsilon_1 a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} = A_1 \varepsilon_1.$$

24. Se exige hallar la resolución del problema de contorno

$$\Delta_2 u_1 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du_1}{d\rho} \right) = 0 \quad \text{para } a < \rho < c,$$

$$\Delta_2 u_2 = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du_2}{d\rho} \right) = 0 \quad \text{para } c < \rho < b,$$

$$u_1 = 1 \quad \text{para } \rho = a, \quad u_2 = 0 \quad \text{para } \rho = b,$$

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \quad \text{para } \rho = c.$$

Para la capacidad obtenemos la expresión

$$C = \frac{\varepsilon_1}{\ln \frac{c}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{b}{c}}.$$

Para $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ tenemos

$$C = \frac{\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Indicación. Se busca la solución de la forma

$$u_1 = A \ln \rho + E; \quad u_2 = B \ln \rho + D.$$

25. El potencial del campo es igual a

$$u = u_0 \frac{\frac{1}{r} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \frac{1}{c}} \quad \text{para } a < r < c, \quad u = u_0 \frac{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{1}{r}}{\frac{1}{a} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \frac{1}{c}} \quad \text{para } r > c.$$

Casos particulares:

1) para $c \rightarrow \infty$ obtenemos $u = u_0 \frac{a}{r}$ para $r > a$ es el potencial del campo de la esfera de radio a cargada hasta el potencial u_0 y que se halla en un medio homogéneo infinito;

2) para $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ (el medio 2 es de conductibilidad ideal)

$$u = \begin{cases} u_0 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{c}}, & \text{si } a < r < c, \\ 0, & \text{si } r > c; \end{cases}$$

3) si $\epsilon_1 = \epsilon_2$, entonces

$$u = u_0 \frac{a}{r} \quad (r > a) \quad (\text{compárese con el caso 1}).$$

Indicación. Véase el problema 22. Tener en cuenta que en el infinito la función u debe anularse.

26. El campo electrostático

$$E = -\operatorname{grad} u,$$

donde u es el potencial que es igual a

$$u = u(\rho) = u_0 \frac{\ln \frac{b}{\rho}}{\ln \frac{b}{a}}.$$

27. La solución depende sólo de la variable z y se da por la fórmula

$$u = u(z) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{z}{h}.$$

28. Para la capacidad de una unidad del área del condensador plano obtenemos la expresión

a) $C = \frac{e}{4\pi h},$

b) $C = \frac{\epsilon_1}{4\pi \left[h_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (h - h_1) \right]}.$

29. La función armónica buscada depende sólo de la variable y :

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{y}{b}.$$

Indicación. Buscar la solución en forma de un polinomio armónico.

2. Problemas de contorno para la ecuación de Poisson

30. $u = \frac{1}{4} (\rho^2 - a^2)$.

Indicación. La función incógnita $u = u(\rho)$ posee simetría circular y se determina a partir de la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{du}{d\rho} \right) = 1$$

con la condición $u(a) = 0$.

31. La solución existe si elegimos

$$B = \frac{aA}{2},$$

y está determinada con exactitud hasta la constante arbitraria

$$u = u(\rho) = \frac{A\rho^2}{4} + \text{const.}$$

32. a) $u(\rho) = u_2 + \frac{A}{4} (\rho^2 - b^2) + \frac{u_1 - u_2 + \frac{A}{4} (b^2 - a^2)}{\ln \frac{b}{a}} \ln \frac{\rho}{a}$,

b) $u(\rho) = u_1 + \frac{A}{4} (\rho^2 - a^2) + b \left(C - \frac{Ab}{2} \right) \ln \frac{\rho}{a}$,

c) $u(\rho) = \frac{A\rho^2}{4} - a \left(\frac{aA}{2} - B \right) \ln \rho + \text{const.}$

El problema c) tiene solución sólo para

$$C = \frac{A(b^2 - a^2) + 2aB}{2b},$$

además, la solución del problema c) está determinada con exactitud hasta la constante aditiva.

33. a) Si $\Delta u = 1$, $u(a) = 0$, entonces

$$u = u(r) = \frac{1}{6} (r^2 - a^2);$$

b) si $\Delta u = Ar + B$, $u(a) = 0$, entonces

$$u(r) = \frac{A}{12} (r^3 - a^3) + \frac{B}{6} (r^2 - a^2).$$

Indicación. La función incógnita posee simetría esférica, $u = u(r)$ y satisface la ecuación diferencial ordinaria con el segundo miembro

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (ru) = f(r).$$

$$33. \quad a) \quad u = u(r) = \frac{1}{6} (r^2 - a^2) - \frac{1}{6} ab (a+b) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right),$$

$$b) \quad u = u(r) = \frac{A}{6} (r^2 - a^2) + \frac{B}{2} (r - a) -$$

$$- ab \left[\frac{A}{6} (b+a) + \frac{B}{2} \right] \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right).$$

Para $A = 1, B = 0$ obtenemos la primera expresión.

Indicación. La solución posee la simetría esférica $u = u(r)$.

§ 3. Función de manantial

La función de influencia del manantial puntiforme o simplemente la función de manantial $G(M, P)$ del primer problema de contorno para la ecuación $\Delta u = -4\pi\rho$ se determina en el caso tridimensional *) por las condiciones siguientes:

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MP}} + v(M, P), \quad (1)$$

donde $r_{MP} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ es la distancia entre el punto de observación $M(x, y, z)$ y el manantial en el punto $P(\xi, \eta, \zeta)$, $v(M, P)$, la función regular y armónica en todas partes de la región en examen T con la frontera Σ . Sobre la frontera Σ la función G satisface la condición

$$G|_{\Sigma} = 0. \quad (2)$$

De esta manera la construcción de la función de manantial G en cierta región T se reduce a la resolución del primer problema de contorno para la ecuación de Laplace

$$\Delta v = 0 \text{ en } T$$

con la condición específica de frontera

$$v|_{\Sigma} = \frac{1}{4\pi r_{MP}}, \quad (3)$$

La interpretación electrostática de la función de manantial $G(M, P)$ es evidente; es el potencial en el punto M del campo electrostático generado dentro del volumen T por la carga de magnitud $e = \frac{1}{4\pi}$ concentrada en el punto P si la superficie de frontera Σ de la región T es de conductibilidad ideal y se mantiene al potencial nulo, es decir, está puesta a tierra; aquí $\frac{1}{4\pi r}$ es el potencial de la carga en el espacio no acotado y v , el potencial del campo inducido por las cargas sobre Σ .

Para una serie de regiones simples (semiespacio, capa, esfera, etc.) el campo inducido puede hallarse mediante el llamado método de reflexión, cuya esencia consiste en que fuera de la región de examen se colocan las cargas según una ley determinada. Estas cargas se llaman reflejos, o «imágenes», de la carga inicial con respecto a la frontera dada. En el caso de la frontera plana «las imágenes» son los reflejos especulares del original en el plano o en los planos, si la región está acotada por varios. En el caso de las fronteras esféricas para la construcción de los reflejos se aplica la transformación de los radios inversos (inversión)**).

*) Véase [7], cap. IV, § 4.

**) Véase [7], cap. IV, § 4.

Este párrafo contiene sólo problemas semejantes que pueden ser resueltos mediante el método de imágenes.

Si la función de manantial $G(M, P)$ es conocida, entonces la solución del primer problema de contorno para la ecuación

$$\Delta u = -F \text{ en } T \quad (4)$$

con la condición de frontera

$$u|_{\Sigma} = f \quad (5)$$

puede hallarse de la forma integral

$$u(M) = - \int_{\Sigma} f(P) \frac{\partial G}{\partial n_P} d\sigma_P + \int_T G(M, P) F(P) d\tau_P, \quad (6)$$

donde $\frac{\partial G}{\partial n}$ es la derivada de la función G sobre la frontera Σ tomada en dirección de la normal exterior a Σ .

La mayoría de los problemas de este párrafo están tomados de la electrostática. Comúnmente, además del potencial del campo, se interesan de la densidad superficial de las cargas inducidas sobre los conductores y también las capacidades de los conductores. Introducimos las nociones necesarias.

La densidad superficial de las cargas sobre el conductor de superficie S , colocadas en un medio con constante dielectrónica ϵ , es igual a

$$\sigma = -\frac{\epsilon}{4\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_S,$$

donde n es la normal exterior a la superficie S .

La carga completa distribuida sobre S se da por la integral

$$e' = \iint_S \sigma dS.$$

La capacidad del conductor S se determina según la fórmula

$$C = \frac{e'}{V'},$$

donde V' es el potencial del conductor S .

Para la región bidimensional D con frontera L , la función de manantial $G(M, P)$ se determina análogamente

$$G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MP}} + v(M, P), \quad (7)$$

$$G|_L = 0, \quad (8)$$

donde $v(M, P)$ es una función armónica regular en D , es decir, en este caso la función G tiene singularidad logarítmica en el manantial.

1. Función de manantial para regiones con fronteras planas

35. El potencial de la carga puntiforme e es igual a

$$u = e \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (1)$$

donde

$$r_0 = MP = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$r_1 = MP_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

$M(x, y, z)$ es el punto de observación, $P(\xi, \eta, \zeta)$, el punto en que se encuentra la carga y $P_1(\xi, \eta, -\zeta)$, su imagen en el plano $z=0$.

La densidad de las cargas superficiales

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{e}{2\pi} \frac{\zeta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2]^{3/2}}.$$

La carga completa distribuida sobre el plano $z=0$ es igual a

$$e' = \iint_{-\infty}^{\infty} \sigma dx dy = -e.$$

La función de manantial del primer problema de contorno para la ecuación de Laplace en el semiespacio, evidentemente, es igual a

$$G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right), \quad (2)$$

y la solución del primer problema de contorno en el semiespacio $z > 0$ se da por la fórmula

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2z}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3)$$

Solución. Reflejando especularmente en el plano $z=0$ la carga e situada en el punto $P(\xi, \eta, \zeta)$, obtenemos en el punto $P_1(\xi, \eta, -\zeta)$ la carga de magnitud $-e$; su potencial en el espacio no acotado es igual a $-\frac{e}{r_1}$. No es difícil observar que

$$\left. \frac{1}{r_0} \right|_{z=0} = \left. \frac{1}{r_1} \right|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2}}$$

y

$$\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right)_{z=0} = 0,$$

es decir, las cargas $e(P)$ y $-e(P_1)$ se compensan entre sí sobre el plano $z=0$. Por eso, utilizando el principio de superposición, para el potencial buscado tendremos

$$u = e \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right).$$

La función de manantial $G(M, P)$ corresponde a $e = \frac{1}{4\pi}$. Después calculando la derivada respecto a la normal

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=0} = \frac{2z}{4\pi [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}}$$

y utilizando la fórmula (6) de la pág. 318, obtenemos la solución del primer problema de contorno

$$\Delta u = 0 (z > 0), \quad u|_{z=0} = f(x, y).$$

36. El potencial de la carga e (P_0) es igual a

$$u = 4\pi e G, \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} \right), \quad (1)$$

donde

$$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl+\zeta)]^2},$$

$$r'_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl-\zeta)]^2},$$

la carga está en el punto $P_0(\xi, \eta, \zeta)$, $M(x, y, z)$ es el punto de observación.

La serie (1) y también las series que se obtienen mediante la diferenciación término a término de la serie (1) convergen uniforme y absolutamente en la región $0 < z < l$.

Solución. Para construir la serie (1) se deben realizar las reflexiones sucesivas en los planos $z = 0$ y $z = l$ (fig. 40) y hallar la posición de las imágenes: «anantiales» y «desagües». Realizando la reflexión en el plano $z = 0$, obtenemos la función

$$u_0 = e \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0} \right),$$

que satisface la condición de frontera $u = 0$ para $z = 0$ y no satisface la condición $u = 0$ para $z = l$; realizando después la reflexión en el plano $z = l$, obtenemos

$$u_1 = e \left[\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'_0} \right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r'_1} \right) \right],$$

de modo que $u_1 = 0$ para $z = l$ y $u_1 \neq 0$ para $z = 0$. Continuando este proceso de reflexión alternativa en los planos $z = 0$ y $z = l$, llegamos a la serie (1).

Teniendo en cuenta que con cada reflexión la carga e pasa a la carga $-e$ e, inversamente, no es difícil establecer que las coordenadas de las imágenes se expresan por la fórmula

$$+e \xi_n = 2nl + \zeta,$$

$$-e \xi'_n = 2nl - \zeta$$

donde n son los números enteros que toman los valores enteros entre $-\infty$ y $+\infty$. Utilizando el principio de superposición y sumando las acciones de todas las imágenes $e(P_n)$ y $-e(P'_n)$ y la carga real $e(P)$, obtenemos la serie (1).

Demostremos que esta serie converge uniformemente. Para eso examinamos su n -ésimo término

$$a_n = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n}.$$

Utilizando el teorema del valor medio, tendremos

$$a_n = 2\xi_n \left[\frac{\partial}{\partial \xi_n} \left(\frac{1}{r_n} \right) \right]_{\xi=\xi^*} = \frac{2\xi_n [z - (2nl + \xi^*)]}{(r_n^*)^3} \quad (0 < \xi^* < l),$$

de donde se deduce

$$|a_n| < \frac{2l}{(r_n^*)^2} < \frac{2}{(2n-1)^2 l} = b_n,$$

dado que $\xi^* < l$ $|z - \xi^*| < l$ y por consiguiente

$$r_n^* = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (2nl + \xi^*)]^2} > (2n-1) l.$$

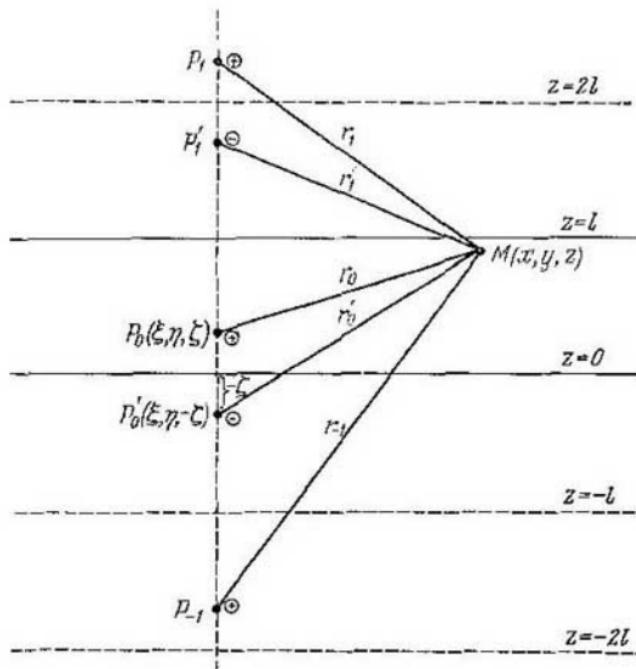


Fig. 40

La estimación obtenida demuestra que la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n$ converge uniformemente y absolutamente dado que la serie mayorante $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n$ converge.

Demostremos ahora la convergencia uniforme en la capa $0 < z < l$ de las series que se obtienen mediante la diferenciación simple y doble término a término de la serie (1).

Estimamos las derivadas

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_n} \right) \right| \leq \left| -\frac{1}{r_n^2} \frac{z - (2nl + \zeta)}{r_n} \right| < \frac{1}{r_n^2} \text{ dado que } \left| \frac{z - (2nl + \zeta)}{r_n} \right| < 1,$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r'_n} \right) \right| \leq \left| -\frac{1}{r_n'^2} \frac{z - (2nl - \zeta)}{r'_n} \right| < \frac{1}{r_n'^2} \text{ dado que } \left| \frac{z - (2nl - \zeta)}{r'_n} \right| < 1.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r_n} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\frac{1}{r_n^2} \frac{z - (2nl + \zeta)}{r_n} \right\} = \frac{3(z - (2nl + \zeta))^2}{r_n^3} - \frac{1}{r_n^3},$$

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r_n} \right) \right| < \frac{3}{r_n^3} + \frac{1}{r_n^3} = \frac{4}{r_n^3}.$$

Teniendo en cuenta después las desigualdades $r_n > |n| l$, $r'_n > |n| l$, obtenemos

$$\left| \frac{\partial a_n}{\partial z} \right| < \frac{2}{n^2 l^2} = b_n^{(1)}, \quad \left| \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} \right| < \frac{8}{n^3 l^3} = b_n^{(2)},$$

de donde se deduce la convergencia absoluta y uniforme de las series $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial z}$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2}$, dado que las series $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(1)}$ y $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{(2)}$ convergen. Análogamente se demuestra la convergencia uniforme de las series

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial x}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial a_n}{\partial y}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 a_n}{\partial x^2}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 a_n}{\partial y^2}.$$

De esta manera, la serie (1) se puede diferenciar dos veces.

Por eso la serie (1) sin el término $\frac{1}{r_0}$ en todas partes de la capa $0 < z < l$ satisface la ecuación de Laplace, dado que sus sumandos satisfacen esta ecuación. El primer término $\frac{1}{r_0}$ da la singularidad necesaria en el manantial.

37. Las componentes rectangulares del campo eléctrico son iguales a

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n} \right), \\ E_y &= -\frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n} \right), \\ E_z &= -\frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde σ es la conductibilidad del medio; I , la potencia del manantial de la corriente,

$$\left. \begin{aligned} r_n &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl+\zeta)]^2}, \\ r'_n &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z-(2nl-\zeta)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Las series para los componentes del campo E_x , E_y , E_z convergen uniforme y absolutamente y representan las funciones doblemente diferenciables, por consiguiente, que satisfacen la ecuación $\Delta u = 0$ excepto el punto $r_0 = 0$ ($x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$), en que tiene la singularidad necesaria

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r_0} \right) + \dots, \quad E_y = -\frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r_0} \right) + \dots, \\ E_z &= -\frac{I}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_0} \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Indicación. Cada componente del campo E_x , E_y , E_z satisface la ecuación de Laplace, de modo que $\Delta E = 0$, y tiene la singularidad exigida (3) en el manantial.

Para $z = 0$ debe cumplirse la condición

$$E_z = 0. \quad (4)$$

Colocando los manantiales de potencia I en los puntos $\zeta_n = 2nl - \xi$ y $\zeta'_n = 2nl + \xi$, sumamos los campos de estos manantiales

$$E = -\frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n} \right). \quad (5)$$

La condición de frontera (4) se cumplirá dado que

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_n} \right) \right|_{z=0} = -\left. \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r'_n} \right) \right|_{z=0} = \frac{-(2nl+\xi)}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(2nl+\xi)^2\}^{3/2}}.$$

La convergencia uniforme y absoluta de la serie (5) no ofrece duda, debido a que

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_n} \right) \right| = \left| \frac{z-(2nl+\xi)}{r_n^3} \right| \leq \frac{A}{r_n^2} < \frac{A}{n^2},$$

donde A es cierta constante.

Si en lugar de los campos de los manantiales, se suman sus potenciales, entonces se obtiene la serie

$$\frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n} \right), \quad (6)$$

que diverge, puesto que sus términos son positivos y de orden $\frac{1}{n}$.

La diferenciación término a término de la serie (6) es posible dado que con esto se obtienen series uniforme y absolutamente convergentes.

38. Se busca la solución del problema de contorno

$$\Delta u = 0 \quad \text{dentro de la capa} \quad 0 < z < l,$$

$$u|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=l} = 0$$

con la condición que en el punto P ($z = \xi$, $x = \xi$, $y = \eta$) el potencial u tiene la singularidad

$$u \approx \frac{I}{4\pi\sigma} \frac{1}{r_0},$$

$$r_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\xi)^2}.$$

El método de imágenes da

$$u(M, P) = \frac{I}{4\pi\sigma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} \right), \quad (1)$$

dónde

$$r_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (2nl + (-1)^n \xi)]^2},$$

$$r'_n = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + [z - (2nl - (-1)^n \xi)]^2},$$

Indicación. Los manantiales I y los desagües $-I$ se encuentran respectivamente en los puntos (fig. 41)

$$\begin{aligned} x &= \xi, & y &= \eta, & z &= \zeta_n = 2nl + (-1)^n \xi, \\ x &= \xi, & y &= \eta, & z &= \zeta'_n = 2nl - (-1)^n \xi. \end{aligned}$$

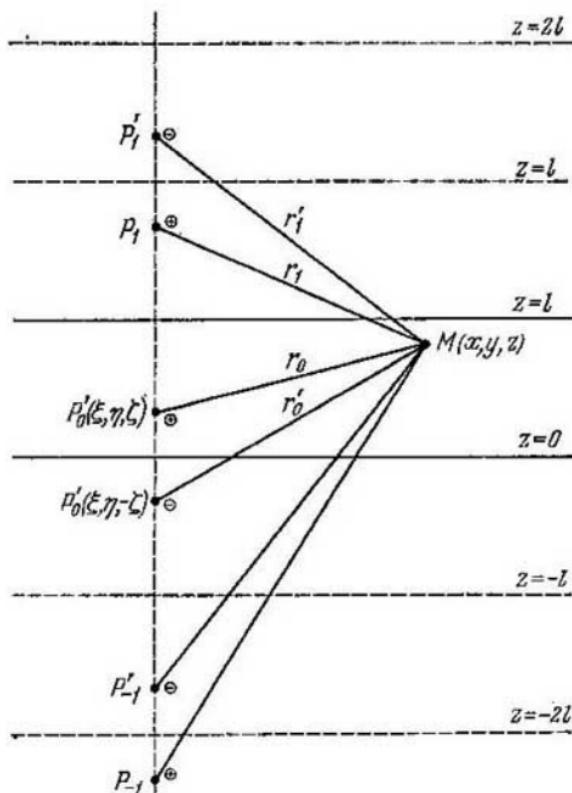


Fig. 41

La convergencia y la derivabilidad de la serie (1) se demuestra por analogía con el problema 36.

39. La función de manantial puntiforme puesto en el punto $P_0(\xi, \eta, \zeta)$ con la condición de frontera

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + hu \right)_{z=0} = 0, \quad (1)$$

se da por la fórmula

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_0} - 2 \int_{\zeta}^{\infty} e^{-h(s-\zeta)} \frac{ds}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+s)^2}} \right],$$

donde

$$r_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r'_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

Solución. El manantial $e(P_0)$ y el desagüe $-e(P'_0)$ dan sobre el plano $z = 0$ la condición $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ para $z = 0$. En nuestro problema $\frac{\partial n}{\partial z} = -hu$ para $z = 0$. Por eso buscamos la solución en la forma de una suma de los términos, correspondientes a $e(P_0)$ y $-e(P'_0)$, y el complemento de la forma $v(x - \xi, y - \eta, z + \zeta)$, suponiendo

$$G = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_0} \right) + v(x - \xi, y - \eta, z + \zeta). \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1) y teniendo en cuenta que $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial \xi}$, obtenemos

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + hv \right)_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}}, \quad \rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Resolviendo esta ecuación y sustituyendo ξ por $z + \zeta$, obtenemos

$$v(x - \xi, y - \eta, z + \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h(\zeta - s)} \frac{ds}{\sqrt{\rho^2 + (z + s)^2}}, \quad (3)$$

ó

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{\zeta+z}^{\infty} e^{-h(\zeta + z - s)} \frac{ds}{\sqrt{\rho^2 + s^2}}. \quad (4)$$

40. $u = u_{36}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - u_{36}(x, y, z; -\xi, \eta, \zeta)$, donde u_{36} es la solución del problema 36, o en la forma desarrollada

$$u = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} - \frac{1}{\bar{r}_n} + \frac{1}{\bar{r}'_n} \right), \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} r_n &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl + \zeta)]^2}, \\ r'_n &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl - \zeta)]^2}, \\ \bar{r}_n &= \sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl + \zeta)]^2}, \\ \bar{r}'_n &= \sqrt{(x + \xi)^2 + (y - \eta)^2 + [z - (2nl - \zeta)]^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

41. El campo eléctrico $E = -\operatorname{grad} u$, donde $u = u(\rho, \varphi, z)$ es el potencial que se determina por la fórmula

$$u = e \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r'_k} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} r_k &= MP_k = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos [\varphi - (\psi + 2\alpha k)] + (z - \zeta)^2}, \\ r'_k &= MP'_k = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos [\varphi - (2\alpha k - \psi)] + (z - \zeta)^2}, \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{n},$$

$M = M(\rho, \varphi, z)$ es el punto de observación; $P = P(s, \psi, \zeta)$, el punto en que se encuentra el manantial.

Indicación. Pasar a las coordenadas cilíndricas ρ, φ, z , dirigiendo el eje z a lo largo de la arista del ángulo diedro; con la reflexión espectral el manantial se repetirá $2n - 1$ veces, por eso el potencial buscado puede obtenerse mediante la suma de los potenciales de $2n$ cargas.

Con la reflexión de la carga en los lados del ángulo diedro, todas sus imágenes se encontrarán sobre la circunferencia de radio s que se encuentra en el plano $z = \zeta$, en valor absoluto son iguales a la carga inicial y se alternan por el signo.

Las cargas $+e$ se encuentran en los puntos $P_h(s, 2\alpha k + \psi, \zeta)$; las cargas $-e$ en los puntos $P'_h(s, 2\alpha k - \psi, \zeta)$, donde k varían entre los límites de 0 a $n - 1$.

No es difícil ver que las cargas de signos opuestos están situadas simétricamente con respecto a los planos $\varphi = 0$ y $\varphi = \alpha$. En realidad, a la carga P_h ($\varphi = 2\alpha k + \psi$) le corresponde la carga P'_{n-k} ($\varphi = 2\alpha(n-k) - \psi$) simétrica con respecto al plano $\varphi = 0$; análogamente, a la carga P_h ($\varphi = 2\alpha k - \psi$) le corresponde la carga P'_{n-k+1} ($\varphi = 2\alpha(n-k+1) - \psi$), simétrica con respecto al plano $\varphi = \alpha$.

Observemos que para $\alpha = \pi$ la fórmula (1) da la solución del problema 35.

42. El potencial de la carga e se da por la suma

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{36}(\rho, \varphi, z; s, 2\alpha k + \psi, \zeta) - u_{36}(\rho, \varphi, z; s, 2\alpha k - \psi, \zeta)], \quad \alpha = \frac{\pi}{n},$$

donde u_{36} es la solución del problema 36, cuya expresión en el sistema cilíndrico de coordenadas es de la forma

$$u_{36}(M, P) = u_{36}(\rho, \varphi, z; s, \psi, \zeta) = e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r'_n} \right),$$

además

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos(\varphi - \psi) + |z - (2nl + \zeta)|^2},$$

$$r'_n = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos(\varphi - \psi) + |z - (2nl - \zeta)|^2}$$

Para $\alpha = \pi$ obtenemos la solución del problema 36, para $l \rightarrow \infty$ tenemos:

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} [u_{35}(\rho, \varphi, z; s, 2\alpha k + \psi, \zeta) - u_{35}(\rho, \varphi, z; s, 2\alpha k - \psi, \zeta)],$$

donde u_{35} es la solución del problema 35.

Indicación. Reflejando la carga en los planos $z = 0$ y $z = l$, hallamos el potencial de la carga en la capa $0 < z < l$, después de que en correspondencia con la solución del problema 41 realizamos la reflexión sobre los lados del ángulo.

43. La distribución estacionaria de la temperatura se da por la fórmula en el sistema polar de coordenadas

$$u = \frac{Q}{c\rho_0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_k} + \frac{1}{r'_k} \right),$$

donde

$$r_k = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos[\varphi - (2\alpha k + \psi)] + (z - \zeta)^2},$$

$$r'_k = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos[\varphi - (2\alpha k - \psi)] + (z - \zeta)^2},$$

Q es el potencial del manantial calorífico colocado en el punto $M_0(s, \psi, \zeta)$; $M = M(\rho, \varphi, z)$, el punto de observación; $c\rho_0$, la capacidad calorífica de una unidad de volumen.

Indicación. La solución se busca en la forma

$$u = \frac{Q}{c\rho} \frac{1}{r_0} + v, \quad r_0 = r_{MM_0} = \sqrt{\rho^2 + s^2 - 2\rho s \cos(\varphi - \psi) + (z - \zeta)^2},$$

donde v es la función armónica regular en todas partes; la función u satisface las condiciones de frontera de segundo género

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0, \alpha} = 0.$$

La función v se busca mediante el método de imágenes análogamente al problema 41.

$$44. \quad u(\rho, \varphi) = V \left(1 - \frac{\varphi}{\alpha} \right).$$

Indicación. Se debe hallar la función de manantial dentro del ángulo

$$G_1(\rho, \varphi; s, \psi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \frac{r'_k}{r_k}$$

(véanse los problemas 41-43) y utilizar la fórmula de Green

$$u(\rho, \varphi) = -V \int_0^\infty \left(\frac{\partial G}{\partial \psi} \right)_{\psi=\alpha} ds.$$

$$45. \quad u(x, y) = V \left(1 - \frac{t}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right).$$

Indicación. Construir la función $G(M, P)$ para el semiplano

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r'_0}{r_0}.$$

La solución se puede obtener también de la solución del problema 44, poniendo allí $\alpha = \pi$ y pasando a las coordenadas cartesianas x, y .

46. Si el eje z está dirigido a lo largo de una de las aristas de modo que la sección perpendicular esté en el plano (x, y) , entonces el potencial es igual a

$$u = e \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{mn}} - \frac{1}{r'_{mn}} + \frac{1}{\bar{r}_{mn}} - \frac{1}{\bar{r}'_{mn}} \right),$$

donde

$$r_{mn} = \sqrt{(x - (2ma + \xi))^2 + (y - (2nb + \eta))^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$r'_{mn} = \sqrt{(x - (2ma - \xi))^2 + (y - (2nb - \eta))^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$\bar{r}_{mn} = \sqrt{(x - (2ma + \xi))^2 + (y - (2nb - \eta))^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$\bar{r}'_{mn} = \sqrt{(x - (2ma - \xi))^2 + (y - (2nb + \eta))^2 + (z - \zeta)^2},$$

donde a y b son los lados del rectángulo.

Indicación. Recubrir todo el plano (x, y) por los rectángulos que se obtienen de la sección del cilindro dado mediante el desplazamiento de la magnitud bn a lo largo del eje y y de la magnitud am a lo largo del eje x . Uniendo cuatro

de estos rectángulos situados dentro de la región $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$, en grupo y tomando las reflexiones impares en todas partes, obtenemos el primer sumando de la suma de la serie. Desplazando todo el grupo a lo largo de los ejes x e y a $2am$ y $2bn$, obtenemos los restantes términos de la serie.

47. Dirigimos el eje x a lo largo de uno de los catetos, colocando el origen de las coordenadas en el vértice del ángulo recto. Entonces la solución del problema se puede escribir de la forma

$$u(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = u_{46}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - u_{46}(x, y, z; \xi, \eta, -\zeta), \quad (0 \leq x \leq a, y \leq z),$$

donde u_{46} es la solución del problema 46 para el cilindro con la sección cuadrada y el lado del cuadrado es igual a a .

Indicación. El plano $x = y$ parte al cilindro con la sección cuadrada en dos cilindros simétricos con las secciones en la forma de rectángulos isósceles. Al punto (ξ, η, ζ) ($\eta < \xi$) de un cilindro le corresponde el punto (η, ξ, ζ) simétrico del otro cilindro. Tomando la solución del problema para el cilindro de la sección cuadrada con los polos en los puntos simétricos, obtenemos la solución buscada del problema.

48. La solución $u = u(x, y, z)$ es de la forma

$$u = u_4(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) - u_{46}(x, y, z; \xi, \eta, -\zeta),$$

donde $u_{46}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ es la solución del problema 46.

Indicación. Sobre el plano $z = 0$ se cumple la condición de frontera $u = 0$ es decir, las reflexiones en este plano deben ser impares.

49. El potencial en el punto $M(x, y, z)$ de la carga puntiforme colocada en el punto $P(\xi, \eta, \zeta)$ dentro del paralelepípedo con los lados a, b, c , es igual a

$$u = e \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{r_{kmn}^{(1)}} - \frac{1}{r_{kmn}^{(2)}} + \frac{1}{r_{kmn}^{(3)}} - \frac{1}{r_{kmn}^{(4)}} + \frac{1}{r_{kmn}^{(5)}} - \frac{1}{r_{kmn}^{(6)}} + \frac{1}{r_{kmn}^{(7)}} - \frac{1}{r_{kmn}^{(8)}} \right],$$

$$r_{kmn}^{(1)} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(2)} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(3)} = \sqrt{[x - (2ak + \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(4)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(5)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(6)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn + \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(7)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm + \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

$$r_{kmn}^{(8)} = \sqrt{[x - (2ak - \xi)]^2 + [y - (2bm - \eta)]^2 + [z - (2cn - \zeta)]^2},$$

a, b, c son las dimensiones del paralelepípedo; $M(x, y, z)$, el punto de observación; $P(\xi, \eta, \zeta)$, el punto en que se encuentra la carga.

Indicación. Eligimos el sistema de coordenadas de modo que su origen se encuentre en uno de los vértices del paralelepípedo y los ejes se dirijan a lo largo de las aristas. Recubrimos este espacio por paralelepípedos semejantes al dado mediante los desplazamientos según los ejes x, y, z en ak, bm y cn , respectivamente, donde a, b, c son las longitudes de las aristas a lo largo de los ejes x, y, z .

Uniendo en un grupo ocho de estos paralelepípedos que estén dentro de la región $-a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b, -c \leq z \leq c$ y tomando las reflexiones impares sobre todas las caras, obtenemos el primer sumando de la suma que representa la respuesta. Desplazando después todo el grupo según los ejes x, y, z a las distancias $2ak, 2bm, 2cn$, obtenemos los sumandos restantes de la suma.

La solución de esto problema es parecida a la solución del problema 46.

2. Funciones de manantial para regiones con fronteras esféricas (circulares) y planas

50. Sean: a , el radio de la esfera; e , la magnitud de la carga; O , el centro de la esfera; M , el punto de observación; M_0 , la posición de la carga (fig. 42), entonces la solución se puede escribir de la forma

$$u = e \left(\frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right),$$

dónde

$$r_0 = MM_0, \quad \rho_0 = OM_0, \quad r_1 = MM_1,$$

M_1 es el punto que está en la prolongación de OM_0 y se obtiene de M_0 mediante la transformación los radios-vectores inversos.

Solución. La tarea consiste en buscar la función armónica en todos los puntos interiores de la esfera excepto el punto M_0 , en cuyo entorno se puede representar de la forma

$$u = \frac{e}{r_0} + v(M),$$

dónde v es el potencial del campo de la inducción, además, sobre la superficie de la esfera

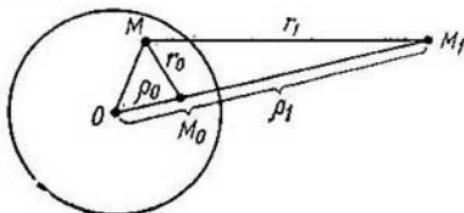


Fig. 42

$$u = 0.$$

Para buscar v se debe utilizar la transformación de los radios inversos

$$OM_0 \cdot OM_1 = a^2.$$

Colocando en el punto M_1 la imagen de la carga M_0 , escribimos

$$u = \frac{e}{r_0} + \frac{e_1}{r_1},$$

dónde e_1 es la magnitud de la carga en el punto M_1 . La condición $u = 0$ sobre Σ da

$$e_1 = \frac{-r_1}{r_0} e.$$

En realidad, examinemos los triángulos OMM_0 y OMM_1 . Son semejantes dado que tienen el ángulo común OMM_0 y los lados proporcionales $\frac{OM_0}{OM} = \frac{OM}{OM_1}$ ($OM = a$).

De aquí se deduce que

$$\frac{OM_0}{OM} = \frac{OM}{OM_1} = \frac{MM_0}{MM_1}, \quad \text{o} \quad \frac{\rho_0}{a} = \frac{a}{\rho_1} = \frac{r_0}{r_1}.$$

De esta manera sobre la esfera

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{a}{\rho_0}.$$

Por eso la función

$$u = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right)$$

se anula sobre la esfera; de aquí se deduce también que $e_1 = -\frac{a}{\rho_0} e$.

51. La densidad de las cargas superficiales sobre la esfera es igual a

$$\sigma = -e \frac{a^2 - \rho_0^2}{4\pi a r_0^2}, \quad r_0 = r_{MM_0}, \quad \rho_0 = r_{OM_0},$$

donde O es el origen de las coordenadas; M , el punto de observación; M_0 , la posición de la carga; a , el radio de la esfera.

La solución del primer problema de contorno $\Delta u = 0$ y $u|_{\rho=a} = f(\vartheta, \varphi)$ se da por la fórmula

$$u = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{a^2 - \rho_0^2}{ar_0^3} f dS,$$

donde la integración se realiza sobre la esfera, o

$$u(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{a^2 - \rho_0^2}{(a^2 - 2ar_0 \cos \gamma + \rho_0^2)^{3/2}} f(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta,$$

donde $\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

Indicación. La densidad de las cargas superficiales

$$\sigma = D_n|_{\Sigma}$$

donde D_n es la proyección del vector de la inducción $D = eE$ sobre la dirección de la normal interior; dado que en este caso $e = 1$ (el vacío), entonces

$$4\pi\sigma = E_n|_{\Sigma} \quad \text{o} \quad 4\pi\sigma = -\frac{\partial u}{\partial n_{int}}|_{\rho=a} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a},$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n}$ es la derivada según la dirección de la normal exterior. Los cálculos dan

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a} = -e \frac{a^2 - \rho_0^2}{4\pi a r_0^3}.$$

Para resolver el primer problema de contorno se debe utilizar la fórmula

$$u(M) = - \iint_{\Sigma} u(P) \frac{\partial G}{\partial n_P} dS_P,$$

teniendo en cuenta que la función del manantial G es el potencial de la carga puntiforme de magnitud $\frac{1}{4\pi}$, obtenemos

$$u(M) = - \iint_{\Sigma} u(P) [\sigma(M, P)]_{e=1} dS_P.$$

Hallamos la densidad de las cargas superficiales

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a}.$$

La derivada $\frac{\partial u}{\partial n}$ según la dirección n es igual a

$$\frac{\partial u}{\partial n} = e \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) - \frac{a}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) \right].$$

Calculamos:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_0} \right) = -\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0^2} \cos(r_0, n),$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_1} \right) = -\frac{1}{r_1^2} \frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1^2} \cos(r_1, n).$$

De ΔOMM_0 y ΔOMM_1 (véase la fig. 42) hallamos

$$\cos(r_0, n) = \frac{a^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2ar_0}, \quad \cos(r_1, n) = \frac{a^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2ar_1}.$$

Teniendo en cuenta la proporción $\frac{r_1}{r_0} = \frac{a}{\rho_0}$, después de las transformaciones obtenemos la fórmula para σ .

$$52. \quad u = e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{\rho_1} \frac{1}{r_0} \right)$$

(con esto se conservan las notaciones del problema 50) y

$$\rho_1 = r_{OM_1}.$$

Indicación. Si la carga se encuentra fuera de la esfera en el punto $M(\rho_1, \theta_1, \varphi_1)$, entonces su imagen, en virtud de la transformación de los radios inversos $OM_0 \cdot OM_1 = a^2$, estará en el punto $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$. Por eso

$$u = \frac{e}{r_1} + \frac{C_1}{r_0}.$$

La determinación de C_1 se realiza por analogía con el problema 50.

53. La densidad de las cargas superficiales es igual a

$$\sigma = -e \frac{\rho_1^2 - a^2}{4\pi a r_1^3}.$$

La solución del primer problema exterior de contorno para la esfera es de la forma

$$u = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\rho_1^2 - a^2}{a r_1^3} f dS$$

6

$$u(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\rho_1^2 - a^2}{[a^2 - 2a\rho_1 \cos\gamma + \rho_1^2]^{3/2}} f(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta,$$

donde

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

Indicación. Compárese con los problemas 50 y 51.

$$54. \text{ a)} \quad u = e \left(\ln \frac{1}{r_0} - \ln \frac{a}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right),$$

$$\text{b)} \quad u = e \left(\ln \frac{1}{r_1} - \ln \frac{a}{\rho_1} \frac{1}{r_0} \right).$$

c) La solución del primer problema de contorno dentro del círculo es de la forma

$$u_1(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho_0^2}{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} f(\varphi) d\varphi,$$

fuera del círculo

$$u_2(\rho_1, \varphi_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_1^2 - a^2}{a^2 + \rho_1^2 - 2a\rho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)} f(\varphi) d\varphi,$$

dónde

$$f = u|_{\rho=a}.$$

Aquí se adoptaron las notaciones siguientes: a es el radio del círculo con el centro en el origen de las coordenadas (el punto O), $r_0 = MM_0$, $r_1 = MM_1$, $\rho_0 = OM_0$, $\rho_1 = OM_1$; $M_0(\rho_0, \varphi_0)$, la posición de la carga; $M_1(\rho_1, \varphi_1)$, la posición de su imagen.

Indicación. Para buscar las soluciones de los problemas a) y b) es obvio que se debe actuar del mismo modo que en el problema 50, teniendo en cuenta, sin embargo, que en el caso plano el potencial cerca de la carga tiene una singularidad logarítmica.

Haciendo $e = \frac{1}{2\pi}$, obtenemos la función de manantial G . El cálculo de las derivadas según la dirección de la normal $\frac{\partial G}{\partial n}$ lleva a las expresiones

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial n} \Big|_{\rho=a} &= -\frac{1}{2\pi a} \frac{a^2 - \rho_0^2}{r_0^2} && \text{(la carga dentro del círculo)}, \\ \frac{\partial G_2}{\partial n} \Big|_{\rho=a} &= -\frac{1}{2\pi a} \frac{\rho_1^2 - a^2}{r_1^2} && \text{(la carga fuera del círculo)}. \end{aligned}$$

55. a) Para la semiesfera situada sobre el plano $z = 0$ (en la región $z \geq 0$) la función de manantial es de la forma

$$G = G_{50}(M, M_0) - G_{50}(M, M'_0), \quad (1)$$

dónde

$$G_{50} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0} \frac{1}{r_1} \right)$$

(véase el problema 50), $M'_0(\rho_0, \pi - \vartheta_0, \varphi_0)$, es el punto simétrico al punto $M_0(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ con respecto al plano $z = 0$ (fig. 43).

b) Para una cuarta parte de la esfera (fig. 44) acotada por los planos $z = 0$ y $x = 0$ y la superficie de la esfera tenemos

$$G = G_{50}(M, M_0) - G_{50}(M, M'_0) + G_{50}(M, M''_0) - G_{50}(M, M'''_0), \quad (2)$$

dónde $M_0(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, $M'_0(\rho_0, \pi - \vartheta_0, \varphi_0)$, $M''_0(\rho_0, \pi - \vartheta_0, \pi + \varphi_0)$, $M'''_0(\rho_0, \vartheta_0, \pi + \varphi_0)$ son las posiciones del manantial y de sus imágenes.

Indicación. a) Exigiendo el cumplimiento de la condición de frontera $u = 0$ sobre la esfera, obtenemos $G_{50}(M, M_0)$; para satisfacer la condición $u = 0$ para $z = 0$ es necesario colocar en el punto M'_0 la carga $-\frac{1}{4\pi}$ y, respectivamente,

en el punto M'_1 , la carga $+\frac{1}{4\pi}$, lo que nos da $-G_{50}(M, M'_0)$.

b) Para satisfacer las condiciones $u = 0$ para $x = 0$ y $z = 0$ (sobre los

lados del ángulo diedro de magnitud $\frac{\pi}{2}$) es necesario colocar sobre la esfera de radio ρ_0 los manantiales en los puntos M'_0, M''_0, M'''_0 . La reflexión en la esfera da las cargas en M_1, M'_1, M''_1, M'''_1 , agrupándolas, obtenemos la fórmula (2).

56. a) La función de manantial para el primer problema interior de contorno para el semicírculo $0 < \varphi < \pi$ es igual a

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = G_{54}(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) - G_{54}(\rho, \varphi; \rho_0, 2\pi - \varphi_0), \quad (1)$$

donde

$$G_{54} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho_0 r_1}{ar_0}$$

(véase el problema 54).

b) Para la cuarta parte del círculo $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ tenemos:

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = G_{54}(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) - G_{54}(\rho, \varphi; \rho_0, 2\pi - \varphi_0) -$$

$$- G_{54}(\rho, \varphi; \rho_0, \pi - \varphi_0) + G_{54}(\rho, \varphi; \rho_0, \pi + \varphi_0). \quad (2)$$

c) La función de manantial para el sector $\rho \leq a$, $0 < \varphi < \alpha = \frac{\pi}{n}$ es de la forma

$$G(\rho, \varphi; \rho_0, \varphi_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [G_{54}(\rho, \varphi; \rho_0, 2k\alpha + \varphi_0) - G_{54}(\rho, \varphi; \rho_0, 2k\alpha - \varphi_0)]. \quad (3)$$

De aquí, en particular, de una vez obtenemos las fórmulas (1) (para $n = 1$) y (2) (para $n = 2$).

Solución. c) A fin de satisfacer la condición $G = 0$ para $\varphi = 0$ y $\varphi = \alpha$ colocamos $2n - 1$ cargas sobre la circunferencia $\rho = \rho_0$, en los puntos $\varphi_h =$

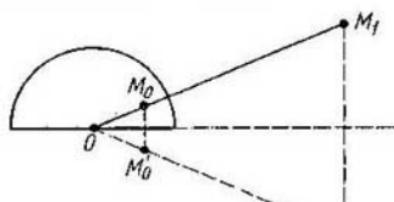


Fig. 43

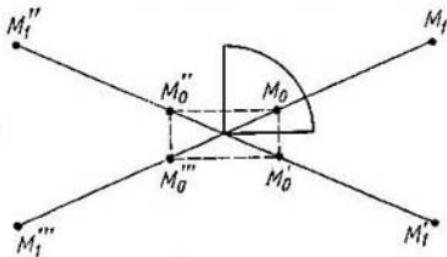


Fig. 44

$= 2k\alpha + \varphi_0$ las cargas positivas y en los puntos $\varphi'_h = 2k\alpha - \varphi_0$ las negativas, después de que realizamos la reflexión de todo el sistema de $2n$ cargas en la esfera $\rho = a$, es decir, colocamos las cargas de signos opuestos en los puntos $\rho = \rho_1 = \frac{a^2}{\rho_0^2}$, $\varphi = \varphi'_h$ (las cargas negativas) y $\rho = \rho_1$, $\varphi = \varphi_h$ (las cargas positivas). Agrupando las cargas de dos en dos en $M_0^{(k)}(\rho_0, \varphi_h)$ y $M_1^{(k)}(\rho_1, \varphi_h)$ y sumando sus acciones, obtenemos la fórmula (3).

57. El potencial del campo excitado por la carga puntiforme e , colocada dentro de la capa esférica $a \leq \rho \leq b$, es igual a

$$u(M, M_0) = e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e_n}{r_n} - \frac{e'_n}{r'_n} \right), \quad (1)$$

donde $M(\rho, \theta, \varphi)$ es el punto de observación; $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$, el punto en que está la carga inicial, $r_n = MM_n$, $r'_n = MM'_n$, $M_n(\rho_n, \theta_n, \varphi_n)$ y $M'_n(\rho'_n, \theta'_n, \varphi'_n)$, los puntos en que se colocan las cargas positivas e_n y las cargas negativas $-e'_n$, además

$$e_n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^k & \text{para } n=2k, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} & \text{para } n=2k+1, \end{cases} \quad (2)$$

$$e'_n = \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^k \frac{a}{\rho_0} & \text{para } n=2k, \\ \left(\frac{b}{a}\right)^k \frac{b}{\rho_0} & \text{para } n=2k+1, \end{cases}$$

$$\rho_n = \begin{cases} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^k \rho_0 & \text{para } n=2k, \\ \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^{k+1} \rho_0 & \text{para } n=2k+1, \end{cases}$$

$$\rho'_n = \begin{cases} \left(\frac{a^2}{b^2}\right)^k \frac{a^2}{\rho_0} & \text{para } n=2k, \\ \left(\frac{b^2}{a^2}\right)^k \frac{b^2}{\rho_0} & \text{para } n=2k+1. \end{cases} \quad (3)$$

La serie (1) converge uniformemente y absolutamente.

Solución. Todas las cargas e_n y e'_n estarán, obviamente, sobre el rayo $\varphi = \varphi_0$, $\theta = \theta_0$, sus posiciones sobre el rayo se determinan por las distancias del centro ρ_n y ρ'_n . Al determinar e_n , e'_n , ρ_n , ρ'_n tendremos en cuenta que 1) la posición de la carga se determina como resultado de las reflexiones sucesivas en las esferas $\rho = a$ y $\rho = b$ mediante las transformaciones de los radios inversos en las cuales $\rho_n \rho'_n = a^2$ ó $\rho_n \rho'_n = b^2$; 2) con cada transformación la magnitud de la carga varía en $-\frac{a}{\rho_0}$ ó en $-\frac{b}{\rho_0}$ veces.

Sea $e_0 = 1$ la carga en el punto M_0 . Con las primeras reflexiones en las esferas $\rho = a$ y $\rho = b$ obtenemos las cargas $e'_0 = \frac{a}{\rho_0}$ y $e'_1 = \frac{b}{\rho_0}$ en los puntos $\rho'_0 = \frac{a^2}{\rho_0}$ y $\rho'_1 = \frac{b^2}{\rho_0}$. Construyendo después sus imágenes, hallamos $e_1 = -\frac{b}{\rho'_0}$, $e'_0 = -\frac{b}{a}$ y $e_2 = \frac{a}{\rho'_1}$, $e'_1 = \frac{a}{b}$ en los puntos $\rho_1 = \frac{b^2}{\rho'_0} = \frac{b^2}{a^2} \rho_0$ y $\rho_2 = \frac{a^2}{\rho'_1} = \frac{a^2}{b^2} \rho_0$.

Continuando los razonamientos, vemos que las cargas pares se encuentran dentro de la esfera $\rho = a$, y los impares, fuera de la esfera $\rho = b$. No es difícil por eso escribir las fórmulas recurrentes

$$e_{2k+1} = \frac{b}{a} e_{2k-1}, \quad e_{2k} = \frac{a}{b} e_{2k-2}, \quad (4)$$

$$\rho_{2k+1} = \frac{b^2}{a^2} \rho_{2k-1}, \quad \rho_{2k} = \frac{a^2}{b^2} \rho_{2k-2} \quad (5)$$

y las fórmulas análogas para e'_{2k} , ρ'_{2k} , e'_{2k+1} , ρ'_{2k+1} . De aquí encontramos las expresiones (2), (3) para e_n , e'_n , ρ_n , ρ'_n . Sumando los potenciales

$$\frac{e_n}{r_n} \quad \text{y} \quad -\frac{e'_n}{r'_n},$$

obtenemos la serie (1).

Examinemos el término general de la serie

$$g_n = \frac{e_n}{r_n} - \frac{e'_n}{r'_n}$$

para n suficientemente grandes. A través de los puntos OM_1M_n trazamos el plano; sea $n = 2k$. De ΔOMM_{2k} hallamos

$$r_{2k} = \sqrt{\rho^2 + \rho_{2k}^2 - 2\rho\rho_{2k} \cos \gamma},$$

donde

$$\cos \gamma = \frac{\rho^2 + \rho_{2k}^2 - r_0^2}{2\rho\rho_{2k}}.$$

Análogamente hallamos

$$r'_{2k} = \sqrt{\rho^2 + (\rho'_{2k})^2 - 2\rho\rho'_{2k} \cos \gamma}.$$

Dado que $\rho_{2k} = \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \rho_0 \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_{2k} = \rho, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r'_{2k} = \rho.$$

Por otra parte $e_{2k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k \rightarrow 0$, $e'_{2k} = e_{2k} \frac{a}{\rho_0} \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$. Por eso

$$|g_{2k}| < C_k = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a}{\rho_0}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^k. \quad (6)$$

Sea $n = 2k + 1$. Dado que $\rho_{2k+1} > b$, $\rho'_{2k+1} > b$ y para $k \rightarrow \infty$ crecen infinitamente, entonces

$$\frac{1}{r_{2k+1}} < \frac{1}{2\rho_{2k+1}} = \frac{1}{2\rho_0} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k+2}, \quad \frac{1}{r'_{2k+1}} < \frac{1}{2\rho'_{2k+1}} = \frac{\rho_0}{2a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{2k+2},$$

por otra parte

$$e_{2k+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1}, \quad e'_{2k+1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{k+1} \frac{a}{\rho_0},$$

de modo que

$$|g_{2k+1}| < \frac{e_{2k+1}}{r_{2k+1}} + \frac{e'_{2k+1}}{r'_{2k+1}} \leqslant \frac{1}{b} \left(1 + \frac{a}{\rho_0}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^k = C_k. \quad (7)$$

De las estimaciones mayorantes (6) y (7) se deduce la convergencia uniforme y absoluta de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$. Su derivabilidad se demuestra análogamente.

Los casos límites:

a) para $a \rightarrow 0$ todos los términos de la serie (1) se anulan excepto dos:

$$\frac{e_0}{r_0} - \frac{e'_1}{r'_1},$$

como resultado de que obtenemos la solución del problema interior de contorno para la esfera

$$u = u_{50} = e \left(\frac{1}{r_0} - \frac{b}{\rho_0} \frac{1}{r'_1} \right)$$

(véase el problema 50);

b) para $b \rightarrow \infty$ obtenemos:

$$u = u_{52} = e \left(\frac{1}{r_0} - \frac{a}{\rho_0} \frac{1}{r'_0} \right)$$

que es la solución del problema exterior para la esfera (véase el problema 52).

58. La función de manantial dentro del anillo se da por la fórmula

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{e_n r'_n}{r_n e'_n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\ln \frac{e_n}{r_n} - \ln \frac{e'_n}{r'_n} \right), \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} M &= M(\rho, \varphi), & M_0 &= M(\rho_0, \varphi_0), & r_n &= M M_n, \\ r'_n &= M M'_n, & M_n &= M(\rho_n, \varphi_0), & M'_n &= M(\rho'_n, \varphi_0), \end{aligned}$$

las magnitudes e_n, e'_n, ρ_n y ρ'_n se determinan según las fórmulas (2), (3) del problema 57.

La serie (1) converge uniforme y absolutamente, al mismo tiempo que las series que se obtienen de ella mediante la diferenciación término a término.

Los casos límites:

a) $a = 0$

$$u = u_{54a} = e \left(\ln \frac{1}{r_0} - \ln \frac{b}{\rho_0} \frac{1}{r'_1} \right) \quad (\text{véase el problema 54a});$$

b) $b = \infty$,

$$u = u_{54b} = e \left(\ln \frac{1}{r_0} - \ln \frac{a}{\rho_0} \frac{1}{r'_0} \right) \quad (\text{véase el problema 54b}).$$

59. Si la carga está en el punto $M_1(\rho_1, \vartheta_0, \varphi_0)$, entonces el potencial en presencia de la esfera cargada

$$u(M, M_0) = \frac{e_1}{r} + \frac{ea}{\rho_1} \frac{1}{r} + u_{52},$$

donde $u_{52} = e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{\rho_1} \frac{1}{r_0} \right)$ es el potencial de la carga puntiforme en presencia de la esfera puesta a tierra (véase el problema 52), $M = M(r, \vartheta, \varphi)$, el punto de observación, $M_0(\rho_0, \vartheta_0, \varphi_0)$, es el punto en que está la imagen de la carga,

$$\rho_0 = \frac{a^2}{\rho_1}, \quad r_0 = M M_0, \quad r_1 = M M_1, \quad r = OM.$$

La densidad de las cargas superficiales

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2} \left(e_1 + \frac{ea}{\rho_1} \right) - \frac{e}{4\pi} \frac{\rho_1^2 - a^2}{ar_1^3} = \sigma_0 + \sigma_{\text{ind.}},$$

donde $\sigma_{\text{ind.}} = \frac{e}{4\pi a} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{\rho_1^2 - a^2}{r_1^3} \right)$ es la densidad de las cargas inducidas.

Indicación. La solución se debe buscar de la forma

$$u = U + u_{52}, \quad (1)$$

donde $U = \frac{aV}{r}$ es el potencial del campo generado por la esfera cargada hasta el potencial V . Para determinar V se utiliza la igualdad

$$4\pi e_1 = - \iint_S \frac{\partial u}{\partial r} dS = 4\pi a V - \iint_S \frac{\partial u_{52}}{\partial r} dS. \quad (2)$$

Mediante la fórmula de Green

$$v(\rho_1, \theta_0, \varphi_0) = \iint_S \frac{\partial G_{52}}{\partial r} dS$$

y la relación

$$u_{52} = 4\pi e G_{52}$$

obtenemos:

$$4\pi ev(\rho_1, \theta_0, \varphi_0) = \iint_S \frac{\partial u_{52}}{\partial r} dS,$$

donde v es la solución del problema exterior de contorno para la esfera S con la condición

$$v|_S = 1,$$

que es igual a

$$v(\rho_1, \theta_0, \varphi_0) = \frac{a}{\rho_1}.$$

La fórmula (2) da

$$e_1 = aV - \frac{a^2}{\rho_1}. \quad (3)$$

De aquí hallamos

$$V = \frac{e_1}{a} + \frac{e}{\rho_1}.$$

3. Función de manantial en medios heterogéneos

Si las características del medio (ϵ , μ , k , etc.) sufren una discontinuidad sobre cierta superficie, entonces sobre esta superficie se deben cumplir las condiciones de conjugación. En el caso electrostático tenemos:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \\ \epsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 - \epsilon_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_2 &= 4\pi \eta, \end{aligned}$$

donde η es la densidad superficial de las cargas libres, las cifras 1 y 2 corresponden a los valores límites por las partes exterior y interior de la superficie S ; $\frac{\partial}{\partial n}$ significan la diferenciación según la dirección de la normal. Si $D = \epsilon E$ es el vector de la inducción eléctrica y $E = -\operatorname{grad} u$, entonces la segunda condición significa que

$$D_{n_2} - D_{n_1} = 4\pi \eta.$$

Si no hay cargas libres ($\eta = 0$), entonces

$$\epsilon_1 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_1 = \epsilon_2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_2.$$

Deduciremos la fórmula para la densidad superficial de las cargas sobre la frontera de separación de dos medios con constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 (fig. 45).

De las ecuaciones de Maxwell se deduce:

$$E_{n_1}^{(1)} - E_{n_2}^{(2)} = 4\pi\sigma.$$

Examinando el elemento infinitésimo dS , tendremos

$$E_{n_1}^{(1)} = 2\pi\sigma + E_{n_1}^{(0)},$$

$$E_{n_2}^{(2)} = -E_{n_1}^{(2)} = 2\pi\sigma - E_{n_1}^{(0)},$$

donde $E_{n_1}^{(1)}$ y $E_{n_2}^{(2)}$ son los valores límites en el punto M de la frontera S de las proyecciones de los vectores $E^{(1)}$ y $E^{(2)}$ sobre las direcciones de las normales interiores n_1 y n_2 ; $E_{n_1}^{(0)}$, el valor de $E_{n_1}^{(0)}$ en el punto M , es decir, sobre la superficie misma.

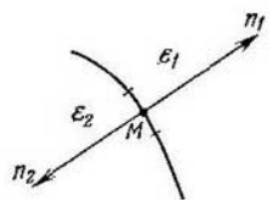


Fig. 45

De la segunda condición de conjugación

$$\epsilon_1(2\pi\sigma + E_{n_1}^{(0)}) + \epsilon_2(2\pi\sigma - E_{n_1}^{(0)}) = 4\pi\eta$$

obtenemos

$$\sigma = \frac{2\eta}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} E_{n_1}^{(0)}.$$

Si no hay carga real sobre la superficie, entonces

$$\sigma = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} E_{n_1}^{(0)}.$$

Sustituyendo aquí el valor $E_{n_1}^{(0)}$ sobre la superficie S , podemos determinar σ .

60. Si la carga está en el punto $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ del semiespacio $z > 0$ ($\zeta > 0$), entonces

$$u = \begin{cases} u_1 = \frac{\epsilon}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{r'_0} \right) & \text{para } z > 0 \quad (\epsilon = \epsilon_1), \\ u_2 = \frac{2\epsilon}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{r_0} & \text{para } z < 0 \quad (\epsilon = \epsilon_2), \end{cases} \quad (1)$$

donde

$$r_0 = MM_0 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$r'_0 = MM'_0 = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}.$$

De la fórmula (1) se ve que el campo en una región con la constante dieléctrica ϵ_1 es tal como si todo el espacio estuviese lleno con el dielectrónico ϵ_1 y en el punto reflejado $M'_0(\xi, \eta, -\zeta)$ se encuentra la carga adicional

$$\epsilon' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \epsilon.$$

El campo dentro de la región ϵ_2 coincide con el campo de la carga

$$\epsilon'' = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \epsilon$$

que está en el punto M_0 si el medio es homogéneo y $\epsilon = \epsilon_1$.

La densidad de las cargas superficiales inducidas sobre la frontera $z = 0$ es igual a $\sigma = \epsilon_0 \frac{\zeta}{2\pi r_0^2}$.

Indicación. La solución se debe buscar de la forma

$$u_1 = \frac{e}{\varepsilon_1} \frac{1}{r_0} + \frac{e'_0}{\varepsilon_1} \frac{1}{r'_0}, \quad (2)$$

$$u_2 = \frac{e_1}{\varepsilon_1} \frac{1}{r_0}, \quad (3)$$

donde e'_0 y e_1 son unas constantes que se debe determinar.

Las condiciones de conjugación

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \quad \text{para } z=0$$

dan

$$e_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e, \quad e'_0 = -\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e.$$

La densidad de las cargas superficiales es igual a

$$\sigma = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} E_{n_1}^{(0)}, \quad (4)$$

donde $E_{n_1}^{(0)}$ es el campo primario de la carga e para $z=0$ que está en el punto M_0 que es igual a

$$E_{n_1}^{(0)} = -\frac{e}{\varepsilon_1} \frac{\zeta}{r_0^3}, \quad (5)$$

donde

$$\tilde{r}_0 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2}.$$

De las fórmulas (4) y (5) se deduce:

$$\sigma = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} e \frac{\zeta}{2\pi r_0^3} = e_0 \frac{\zeta}{2\pi r_0^3}.$$

La carga sumaria inducida sobre el plano $z=0$ es igual a

$$e_0 = 2\pi \int_0^\infty \sigma \rho d\rho = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} e.$$

61. El potencial del campo eléctrico excitado por el manantial de la corriente eléctrica I colocado en el punto $M_0(0, 0, \zeta)$ es igual a

$$u = \frac{I}{4\pi\sigma_2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{I_n}{4\pi\sigma_2} \left(\frac{1}{r_n} + \frac{1}{r'_n} \right) \quad (1)$$

(en todas partes de la capa $0 < z < h$), donde

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}, \quad r_n = \sqrt{x^2 + y^2 + |z - (2nh + \zeta)|^2}, \\ r'_n &= \sqrt{x^2 + y^2 + |z - (2nh - \zeta)|^2}, \quad I_n = \kappa^n I, \quad r' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + \zeta)^2}, \\ \kappa &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad |\kappa| < 1. \end{aligned}$$

Si $\zeta = 0$, es decir el manantial está sobre el plano $z = 0$, entonces $r_n = r'_n$ y el potencial es igual a

$$u = \frac{I}{2\pi\sigma_2 r} + \frac{I}{2\pi\sigma_2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n \neq 0)}}^{\infty} \frac{I_n}{r_n},$$

donde

$$r_n = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2nh)^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La densidad de la corriente para $z = 0$ es igual a

$$j_x = \frac{xI}{2\pi\rho^3} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{xI_n}{[\rho^2 + 4n^2h^2]^{3/2}},$$

$$j_y = \frac{yI}{2\pi\rho^3} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{yI_n}{[\rho^2 + 4n^2h^2]^{3/2}},$$

$$j_z = 0.$$

Indicación. Se exige resolver el problema

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{para } 0 < z < h, \quad \Delta u_2 = 0 \quad \text{para } z > h,$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u_2, \\ \sigma_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \sigma_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{array} \right\} \quad \text{para } z = h, \quad u \approx \frac{I}{4\pi\sigma_2} \frac{1}{r} \quad \text{para } r \rightarrow 0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = 0, \quad x = 0, \quad y \neq 0 \quad (r \neq 0).$$

La última condición significa que la reflexión en el plano $z = 0$ será impar. Para realizar la reflexión en el plano $z = h$ se debe utilizar el método de la solución del problema 60. Hay que tener en cuenta también que para la construcción de la solución dentro de la capa $0 < z < h$ no es necesario calcular la solución en la región $z > h$.

Para satisfacer la condición de frontera $\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right|_{z=0} = 0$) es necesario colocar en el punto $M(0, 0, -\zeta)$ el manantial de la corriente eléctrica I . Para que se cumplan las condiciones de conjugación para $z = h$ es preciso ahora colocar en los puntos $M(0, 0, 2h - \zeta)$ y $M(0, 0, 2h + \zeta)$ los manantiales $I_1 = xI$. Pero con eso hemos quebrantado las condiciones para $z = 0$. A fin de satisfacer la condición para $z = 0$ es necesario colocar en los puntos $M(0, 0, -2h + \zeta)$ y $M(0, 0, -2h - \zeta)$ los manantiales de la corriente eléctrica I_1 . Pero con eso infringimos las condiciones de conjugación para $z = h$. Continuando este proceso, podremos satisfacer a todas las condiciones de frontera solo mediante la serie (1).

La convergencia absoluta y uniforme de esta serie y también de las series derivadas se asegura con la condición

$$|\alpha| < 1.$$

Utilizando la fórmula $j = -\sigma \operatorname{grad} u$, no es difícil hallar las componentes de la densidad de la corriente j_x, j_y, j_z para $z = 0$.

62. El potencial arriba del plano x, z ($y > 0$) es igual a la suma de los potenciales de la carga misma e y de sus siete imágenes situadas del modo siguiente

(fig. 46):

- e en el punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $-e$ en el punto $M_1(-x_0, y_0, z_0)$,
 e' en el punto $M'_0(x_0, -y_0, z_0)$, $-e'$ en el punto $M'_1(-x_0, -y_0, z_0)$,
 $-ce$ en el punto $M_2(c^2x_0, c^2y_0, c^2z_0)$, $-ce'$ en el punto $M'_2(c^2x_0, -c^2y_0, c^2z_0)$,
 ce en el punto $M_3(-c^2x_0, c^2y_0, c^2z_0)$, ce' en el punto $M'_3(-c^2x_0, -c^2y_0, c^2z_0)$,

donde

$$c = \frac{a}{b}, \quad e' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} e.$$

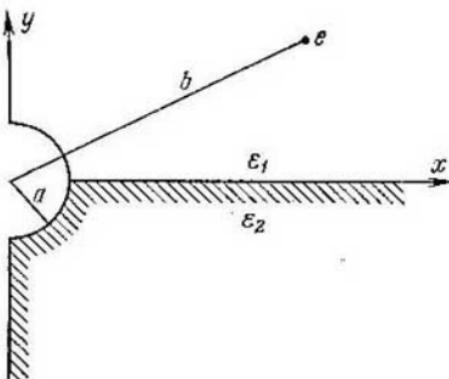


Fig. 46

El potencial dentro del dielectrónico para $y < 0$ se puede obtener, utilizando sólo las imágenes en la región $y > 0$ y sustituyendo e por la carga

$$e'' = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} e.$$

63. El campo eléctrico excitado por el manantial de la corriente eléctrica que está en el punto $M_0(0, -h, \zeta)$, de potencia I_0 , es igual a

$$u_1 = \frac{I_0}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_0} \right) + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \frac{I_0}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r'_1} \right) \quad \text{para } y < 0,$$

donde

$$r_0 = \sqrt{x^2 + (y+h)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r'_0 = \sqrt{x^2 + (y+h)^2 + (z+\zeta)^2}, \\ r_1 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2 + (z-\zeta)^2}, \quad r'_1 = \sqrt{x^2 + (y-h)^2 + (z+\zeta)^2}.$$

La densidad de la corriente para $y=0, \zeta=0$

$$j_x = \frac{\sigma_1 \sigma_2 I_0}{(\sigma_1 + \sigma_2) \pi} \frac{x}{R^3}, \quad j_y = 0, \quad j_z = \frac{\sigma_1 \sigma_2 I_0}{(\sigma_1 + \sigma_2) \pi} \frac{z}{R^3},$$

de modo que

$$|j| = \frac{\sigma_1 \sigma_2 I_0}{(\sigma_1 + \sigma_2) \pi} \frac{\rho}{R^3}, \quad R = \sqrt{\rho^2 + h^2}, \quad \rho^2 = x^2 + z^2.$$

64. El potencial del campo fuera de la esfera es igual a

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{e_n}{r_n} - \frac{e'_n}{r'_n} \right),$$

donde e_n y e'_n son las cargas las magnitudes de que se determinan según las fórmulas recurrentes

$$\begin{aligned} e_{2k+1} &= \frac{a}{b} \frac{c - \rho_{2k+1}}{\rho_{2k-1}} e_{2k-1}, & e_{2k+2} &= \frac{a}{b} \frac{c - \rho'_{2k+1}}{\rho'_{2k+1}} e_{2k}, \\ e'_{2k+1} &= \frac{a}{b} \frac{c - \rho'_{2k+1}}{\rho'_{2k-1}} e'_{2k-1}, & e'_{2k+2} &= \frac{a}{b} \frac{c - \rho_{2k+1}}{\rho_{2k+1}} e'_{2k}. \end{aligned}$$

Estas cargas están en los puntos (fig. 47) $M_n(\rho_n, \theta_0, \varphi_0)$ y $M'_n(\rho'_n, \theta_0, \varphi_0)$,

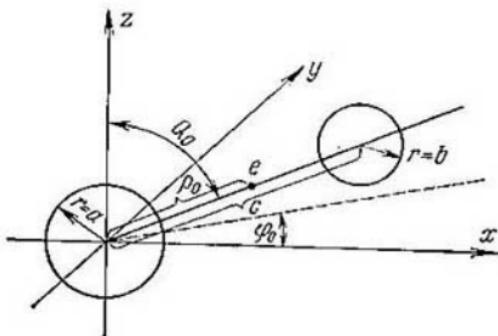


Fig. 47

donde ρ_n y ρ'_n se determinan según las fórmula recurrentes

$$\begin{aligned} \rho_{2k+1} &= \frac{(c^2 - b^2) \rho_{2k-1} - a^2 c}{c \rho_{2k-1} - a^2}, & \rho'_{2k+1} &= \frac{(c^2 - b^2) \rho'_{2k-1} - a^2 c}{c \rho'_{2k-1} - a^2}, \\ \rho_{2k+2} &= \frac{a^2 (c - \rho_{2k})}{c (c - \rho_{2k}) - b^2}, & \rho'_{2k+2} &= \frac{a^2 (c - \rho'_{2k})}{c (c - \rho'_{2k}) - b^2}, \end{aligned}$$

además

$$\rho'_0 = \frac{a^2}{\rho_0}, \quad \rho'_1 = \frac{c(c - \rho_0) - b^2}{c - \rho_0}, \quad \rho_1 = \frac{c(c - \rho'_0) - b^2}{c - \rho'_0},$$

$$e_0 = e, \quad e'_0 = \frac{a}{\rho_0} e, \quad e'_1 = \frac{b}{c - \rho_0} e, \quad e_1 = \frac{ab}{c \rho_0 - a^2} e,$$

$$r_n = \sqrt{\rho^2 + \rho_n^2 - 2\rho\rho_n \cos \alpha_n}, \quad r'_n = \sqrt{\rho'^2 + \rho'_n^2 - 2\rho\rho'_n \cos \alpha'_n},$$

donde α_n es el ángulo entre OM_m y OM'_n ; O , el origen de las coordenadas; M_m , la posición del manantial; M'_n , el punto de observación.

§ 4. Método de separación de variables

1. Problemas de contorno para el círculo, el anillo y el sector

65. Si sobre la frontera del círculo de radio a la función buscada $u|_{\rho=a}=f(\varphi)$, entonces

$$u(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \quad \text{para } \rho < a, \quad (1)$$

donde A_n, B_n son los coeficientes de Fourier para la función $f(\varphi)$ iguales a

$$\left. \begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (n=0, 1, 2, \dots), \\ B_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

De la fórmula (1) se puede obtener la representación integral de la solución del primer problema interior de contorno para la ecuación de Laplace dentro del círculo (fórmula de Poisson)

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi)} f(\psi) d\psi. \quad (3)$$

Solución. Se exige hallar la función $u(\rho, \varphi)$ continua dentro del círculo $0 < \rho < a$ que satisface la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4)$$

dentro de este círculo y la condición de frontera

$$u|_{\rho=a} = f(\varphi). \quad (5)$$

donde f es una función continua dada.

El problema se resuelve mediante el método de separación de variables (véase [7], cap. IV, § 3). La solución se busca en forma de suma

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho, \varphi),$$

donde

$$u_n(\rho, \varphi) = R_n(\rho) \Phi_n(\varphi),$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases} \quad R_n(\varphi) = \begin{cases} \rho^n, \\ \rho^{-n}, \end{cases} \quad (6)$$

$$66. \quad u(\rho, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad (1)$$

donde a es el radio del círculo, A_n y B_n se determinan según las fórmulas (2) del problema 65.

Indicación. Se exige hallar la función $u(\rho, \varphi)$ que satisface la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{fuera del círculo,}$$

la condición de frontera $u|_{\rho=a} = f(\varphi)$ y la condición de acotación para $\rho \rightarrow \infty$.

La solución se busca mediante el método de separación de variables. De la condición de acotación en el infinito se deduce que $C_n = 0$ y obtenemos la solución particular de la forma

$$u_n(\rho, \varphi) = \left(\frac{a}{\rho} \right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

La solución general se da por la serie

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho, \varphi).$$

Utilizando la condición de frontera para $\rho = a$, llegamos a (1).

67. a) La solución del segundo problema interior de contorno para el círculo es

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{na^{n-1}} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C_1,$$

b) la solución del problema exterior es

$$u(\rho, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + C_2, \quad (2)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias; a , el radio del círculo; A_n y B_n , los coeficientes de Fourier de la función $f(\varphi) = \frac{\partial u}{\partial v}|_{\rho=a}$; v , la dirección de la normal exterior a la región en examen.

Indicación. a) Se exige hallar la función $u(\rho, \varphi)$ continua sobre el círculo $0 < \rho < a$ que satisface la ecuación $\Delta u = 0$ dentro de este círculo y la condición de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{\rho=a} = f(\varphi)$$

sobre su frontera para $\rho = a$ y también la condición

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

b) Se exige hallar la función $u(\rho, \varphi)$ que satisface la ecuación de Laplace fuera del círculo de radio $\rho = a$, la condición de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{\rho=a} = f(\varphi)$$

y la condición de acotación para $\rho \rightarrow \infty$

La solución de ambos problemas se busca mediante el método de separación de variables análogamente al problema 65.

$$68. \text{ a) } u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{a^{n-1}(n+ah)} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \frac{A_0}{2h}. \quad (4)$$

$$b) \quad u(\rho, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n-a\hbar)\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \frac{A_0}{2\hbar}, \quad (2)$$

donde A_n y B_n son los coeficientes de Fourier de la función $f(\varphi)$ que se determinan según las fórmulas (2) del problema 65.

69. El potencial del campo electrostático es

$$u = \begin{cases} \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a\rho \sin \varphi}{a^2 - \rho^2} \\ \text{para } \rho < a \text{ (dentro del cilindro),} \\ \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a\rho \sin \varphi}{\rho^2 - a^2} \\ \text{para } \rho > a \text{ (fuera del cilindro).} \end{cases} \quad (1)$$

Las componentes del campo E_ρ y E_φ se calculan según las fórmulas

$$E_\rho = - \frac{1}{\partial \rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}, \quad E_\varphi = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

La densidad de las cargas superficiales es

$$\sigma = - \frac{V_1 - V_2}{a\pi^2 \sin \varphi}.$$

Indicación. El método de separación de variables da la solución en la forma de las series

$$u = \begin{cases} \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{2(V_1 - V_2)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} \\ \text{dentro del cilindro } (\rho < a), \\ \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{2(V_1 - V_2)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} \\ \text{fuera del cilindro } (\rho > a). \end{cases} \quad (2)$$

Las series que están en la derecha pueden ser sumados si utilizamos la fórmula

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \quad (3)$$

En realidad,

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\varphi}{2k+1} = \frac{1}{2i} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1} e^{i(2k+1)\varphi}}{2k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^{2k+1} e^{-i(2k+1)\varphi}}{2k+1} \right\}.$$

Denotando

$$z = \xi e^{i\varphi} = \xi \cos \varphi + i\xi \sin \varphi, \quad z^* = \xi e^{-i\varphi} = \xi \cos \varphi - i\xi \sin \varphi$$

y utilizando la fórmula (3), obtenemos

$$J = \frac{1}{4i} \ln \frac{(1+z)(1-z^*)}{(1-z)(1+z^*)} = \frac{1}{4i} \ln \frac{1-\xi^2 + i2\xi \sin \varphi}{1-\xi^2 - i2\xi \sin \varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\xi \sin \varphi}{1-\xi^2}.$$

De aquí, en virtud de (2) se deduce la fórmula (1) ($\xi = \frac{\rho}{a}$ para $\rho < a$ ó $\xi = \frac{a}{\rho}$ para $\rho > a$).

70. a) Las soluciones de los problemas interiores de contorno son de la forma

$$1) \quad u(\rho, \varphi) = A \frac{\rho}{a} \sin \varphi,$$

$$2) \quad u(\rho, \varphi) = B + \frac{3A}{a} \rho \sin \varphi - 4A \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \sin 3\varphi,$$

$$3) \quad u(\rho, \varphi) = A \frac{\rho}{a} \sin \varphi - \frac{8A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2k} \frac{\cos 2k\varphi}{4k^2 - 9}$$

b) Las soluciones de los problemas exteriores de contorno se dan por las expresiones

$$1') \quad u(\rho, \varphi) = A \frac{a}{\rho} \sin \varphi,$$

$$2') \quad u(\rho, \varphi) = B + \frac{3Aa}{\rho} \sin \varphi - 4A \left(\frac{a}{\rho} \right)^3 \sin 3\varphi,$$

$$3') \quad u(\rho, \varphi) = A \frac{a}{\rho} \sin \varphi - \frac{8A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho} \right)^{2k} \frac{\cos 2k\varphi}{4k^2 - 9}.$$

Indicación. Utilizar en los problemas 2) y 3) la fórmula trigonométrica

$$\sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin 3\varphi.$$

71. Suponiendo que el flujo se mueve en el sentido negativo del eje x , introducimos el sistema cilíndrico de coordenadas (ρ, φ, z) con el eje z a lo largo del eje del cilindro y el eje polar a lo largo del eje x ; entonces la distribución de la temperatura dentro del cilindro se da por la fórmula

$$u(\rho, \varphi) = -\frac{q}{k} \rho \cos \varphi + \text{const.}$$

La condición $\int_0^{2\pi} Q d\varphi = 0$ se cumple; el problema tiene solución.

72.

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} u_1(\rho, \varphi) = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)V_1 + (3\varepsilon_1 - \varepsilon_2)V_2}{4\varepsilon_1} + \frac{4(V_1 - V_2)}{\pi} \times \\ \quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_2 b^{2m+1} \rho^{2m+1}}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1) b^{4m+2} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) a^{4m+2}} \frac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1} \\ \text{para } \rho < a, \\ u_2(\rho, \varphi) = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(V_1 - V_2) + 4\varepsilon_1 V_2}{4\varepsilon_1} + \\ + \frac{2(V_1 - V_2)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \rho^{4m+2} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) a^{4m+2}}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) b^{4m+2} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) a^{4m+2}} \times \\ \times \frac{b^{2m+1}}{\rho^{2m+1}} \frac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1} \quad \text{para } a < \rho < b. \end{cases}$$

Indicación. Se exige hallar la solución de la ecuación de Laplace sobre el círculo de radio a ($u = u_1$) y el anillo $a < \rho < b$ ($u = u_2$) con la condición de frontera

$$u_2(b, \varphi) = \begin{cases} V_1 & \text{para } 0 < \varphi < \pi, \\ V_2 & \text{para } \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

y las condiciones de conjugación

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial \rho} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial \rho} \quad \left. \right\} \quad \text{para } \rho = a.$$

Solución. Buscamos la solución $u = \frac{u_1}{u_2}$ en la forma de la suma

$$u_1 = V_2 + \hat{u}_1, \quad u_2 = V_2 + \hat{u}_2,$$

donde la función $\hat{u} = \begin{cases} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{cases}$ es armónica y se cumple, para $\rho = b$, la condición de frontera

$$\hat{u}_2 = \begin{cases} V_1 - V_2 & \text{para } 0 < \varphi < \pi \\ 0 & \text{para } \pi < \varphi < 2\pi, \end{cases}$$

y las condiciones de conjugación para $\rho = a$.

Suponiendo después $\hat{u}_1 = R_1(\rho) \Phi(\varphi)$, $\hat{u}_2 = R_2(\rho) \Phi(\varphi)$,

hallamos, como siempre, la función $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

y para R_1 y R_2 obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR_1}{d\rho} \right) - n^2 R_1 &= 0 \quad \text{para } 0 < \rho < a, \\ \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR_2}{d\rho} \right) - n^2 R_2 &= 0 \quad \text{para } a < \rho < b \end{aligned}$$

con las condiciones de conjugación

$$R_{1n}(a) = R_{2n}(a), \quad \varepsilon_1 R'_{1n}(a) = \varepsilon_2 R'_{2n}(a)$$

y la condición de acotación de $R_{1n}(0)$.

De aquí obtenemos:

$$R_{1n} = A_n \rho^n, \quad R_{2n} = B_n \rho^n + \frac{C_n}{\rho^n}.$$

Las condiciones de conjugación dan:

$$A_n = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} B_n, \quad C_n = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} a^{2n} B_n.$$

La solución general del problema, obviamente, se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \hat{u}_2(\rho, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\rho^n + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{a^{2n}}{\rho^n} \right) (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi), \\ \hat{u}_1(\rho, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \rho^n (B_n \cos n\varphi + \bar{B}_n \sin n\varphi), \end{aligned}$$

donde B_n y \bar{B}_n son los coeficientes que se determinan de la condición de frontera para $\rho = b$.

$$73. u = u(\rho, \varphi) = \frac{a^2 v_0}{\rho} \cos \varphi.$$

Indicación. Introduciendo el sistema de coordenadas (ρ, φ, z) , ligado con el eje del cilindro y el eje z a lo largo del cilindro, obtenemos para el potencial de velocidades $u = u(\rho, \varphi)$ el problema de contorno

$$\Delta u = 0 \quad \text{para } \rho > a, \quad -\frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = v_0 \cos \varphi.$$

$$74. u = u(\rho, \varphi) = -v_0 \left(\rho + \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \varphi.$$

Indicación. Si el flujo se mueve a lo largo del eje x , entonces el potencial del movimiento no perturbado del líquido es

$$\text{Haciendo } u_0 = -v_0 x = -v_0 \rho \cos \varphi.$$

$$u = u_0 + \hat{u},$$

obtenemos para \hat{u} el segundo problema exterior de contorno

$$\Delta \hat{u} = 0 \quad \text{para } \rho > a, \quad -\frac{\partial \hat{u}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = v_0 \cos \varphi.$$

75. a) Si la esfera se mueve en la dirección del eje z , entonces en el sistema de coordenadas (r, θ, φ) , con origen en el centro de la esfera, el potencial de velocidades del líquido es

$$u = u(r, \theta) = \frac{1}{2} v_0 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta.$$

b) Si el líquido se mueve en la dirección negativa del eje z , entonces

$$u = u(r, \theta) = v_0 \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \cos \theta.$$

Indicación. a) Se exige hallar la solución de la ecuación

$$\Delta u = 0 \quad \text{para} \quad r > a$$

con la condición de frontera

$$-\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_0 \cos \theta$$

y la condición de regularidad en el infinito.

b) Suponiendo

$$u = u_0 + \hat{u},$$

donde

$$u_0 = v_0 z = v_0 r \cos \theta$$

obtenemos para \hat{u} el problema de contorno del punto a).

Solución. a) Dado que la condición de frontera no depende de φ , entonces el potencial tampoco es función de φ , es decir, $u = u(r, \theta)$.

La ecuación de Laplace para la función $u(r, \theta)$ es de la forma

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0.$$

La solución buscaremos de la forma

$$u(r, \theta) = R(r) \cos \theta,$$

lo que da para $R(r)$:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - 2R = 0, \quad R'(a) = -v_0.$$

Suponiendo $R(r) = r^\sigma$, hallamos

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = -2,$$

es decir, la solución general de la ecuación es de la forma $R(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$, donde A y B son constantes.

De las condiciones para $r=a$ y en el infinito ($|R(r)| < \frac{M}{r}$) obtenemos

$$A=0, \quad B=\frac{v_0 a^3}{2},$$

de modo que

$$R(r) = v_0 \frac{a^3}{2r^2}.$$

El problema b) después de tener en cuenta la indicación se resuelve análogamente.

76. Introduciendo el sistema esférico de coordenadas (r, θ, φ) con origen en el centro de la esfera y el eje polar dirigido a lo largo del campo exterior,

para el potencial del campo electrostático $E = -\text{grad } u$ obtenemos:

$$u_1 = -E_0 \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} r \cos \theta \quad \text{para } r < a,$$

$$u_2 = -E_0 \left(r - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) a^3}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta \quad \text{para } r > a,$$

donde a es el radio de la esfera.

La polarización de la esfera es

$$P_1 = \frac{3}{4\pi} \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0$$

y su momento dipolo,

$$p = \frac{4}{3} \pi a^3 P_1 = a^3 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0, \quad \epsilon_1 = 1 + 4\pi n_1$$

Solución. Para determinar el campo dentro y fuera de la esfera se debe resolver para el potencial el problema siguiente.

Supondremos

$$u_2 = u_0 + \hat{u}_2,$$

donde

$$u_0 = -E_0 z = -Er \cos \theta.$$

Para determinar u_1 y \hat{u}_2 se deben resolver las ecuaciones

$$\Delta u_1 = 0 \quad \text{para } r < a, \quad \Delta \hat{u}_2 = 0 \quad \text{para } r > a$$

con las condiciones de frontera

$$\left. \begin{aligned} u_1 - \hat{u}_2 &= -E_0 a \cos \theta, \\ \epsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} - \epsilon_2 \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial r} &= -\epsilon_2 E_0 \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \text{para } r = a$$

y la condición de regularidad para \hat{u}_2 en el infinito.

La solución de este problema, es natural buscarla de la forma

$$u_1(r, \theta) = R_1(r) \cos \theta, \quad \hat{u}_2(r, \theta) = R_2(r) \cos \theta.$$

La sustitución en las ecuaciones y en las condiciones de frontera da:

$$r^2 R_1'' + 2r R_1' - 2R_1 = 0, \quad r^2 R_2'' + 2r R_2' - 2R_2 = 0, \quad R_1(a) - R_2(a) = -aE_0,$$

$$\epsilon_1 R_1'(a) - \epsilon_2 R_2'(a) = -\epsilon_2 E_0, \quad |R_2| < \frac{M}{r} \quad \text{para } r \rightarrow \infty,$$

donde M es cierta constante. De aquí ya no es difícil hallar R_1 y R_2 . Conociendo los potenciales, es fácil encontrar los campos $E_1 = -\text{grad } u_1$, $E_2 = -\text{grad } u_2$.

El vector de la polarización eléctrica P_1 de la esfera se determina por la igualdad siguiente:

$$P_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) E_1}{4\pi}.$$

Dentro de la esfera es diferente de cero sólo la componente E_z :

$$E_z = -\frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} E_0,$$

de modo que

$$E = E_z = \frac{3\epsilon_2}{2\epsilon_2 + \epsilon_1} E_0.$$

Por eso la polarización de la esfera es

$$P_1 = \frac{3\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{4\pi(\epsilon_1 + 2\epsilon_2)} E_0.$$

77. Elegimos el sistema de coordenadas de modo que el eje z esté dirigido a lo largo del eje del cilindro, y el campo E_0 , a lo largo del eje x .

El potencial del campo dentro y fuera del cilindro se da por las fórmulas

$$u_1(\rho, \varphi) = -\frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0 \rho \cos \varphi \quad \text{para } \rho < a$$

$$u_2(\rho, \varphi) = -E_0 \left(\rho + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \varphi \quad \text{para } \rho > a,$$

donde a es el radio del cilindro.

El campo dentro del cilindro es igual a

$$E_1 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E_0$$

y está dirigido a lo largo del eje x .

La polarización es

$$P_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \epsilon_2}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} E_0$$

el momento dipolo para una unidad de longitud es

$$p = \pi a^2 P_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) \epsilon_2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} a^2 E_0.$$

Indicación. Véase el problema 76.

78. El potencial del campo fuera de la esfera es

$$u(r, \varphi) = -E_0 \left(r - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta \quad \text{para } r > a,$$

si el origen del sistema esférico de coordenadas lo ponemos en el centro de la esfera y el eje polar z lo dirigimos a lo largo del campo exterior E_0 .

Indicación. El potencial se debe representar en forma de suma $u = u_0 + \hat{u}$, donde $u_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ es el potencial del campo exterior. Para el potencial de la parte deformada del campo \hat{u} obtenemos el siguiente problema de contorno:

$$\Delta \hat{u} = 0 \quad \text{para } r > a, \quad \hat{u} = E_0 a \cos \theta \quad \text{para } r = a.$$

79. El potencial del campo es

$$u = u(\rho, \varphi) = -E_0 \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \varphi.$$

La densidad de las cargas superficiales es igual a $\sigma = 2E_0 \cos \varphi$.

Indicación. Véase el problema 78.

80. Si

$$u|_{\rho=a} = f(\varphi), \quad u|_{\rho=b} = F(\varphi),$$

entonces

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n \rho^n + \frac{D_n}{\rho^n} \right) \sin n\varphi \right] + \\ + B_0 \ln \rho + A_0, \quad (1)$$

donde

$$A_n = \frac{b^n F_n^{(1)} - a^n f_n^{(1)}}{b^{2n} - a^{2n}}, \quad B_n = \frac{[b^n f_n^{(1)} - a^n F_n^{(1)}] a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}}, \quad A_0 = \frac{f_0^{(1)} - F_0^{(1)}}{\ln \frac{a}{b}},$$

$$C_n = \frac{b^n F_n^{(2)} - a^n f_n^{(2)}}{b^{2n} - a^{2n}}, \quad D_n = \frac{[b^n f_n^{(2)} - a^n F_n^{(2)}] a^n b^n}{b^{2n} - a^{2n}}, \quad B_0 = \frac{F_0^{(1)} \ln a - f_0^{(1)} \ln b}{\ln \frac{a}{b}},$$

además $f_n^{(1)}$, $f_n^{(2)}$, $F_n^{(1)}$, $F_n^{(2)}$, son los coeficientes de Fourier para las funciones $f(\varphi)$ y $F(\varphi)$ iguales a

$$f_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad f_n^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$f_n^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Las expresiones de F_n son análogas.

Solución. Se exige hallar la solución de la ecuación de Laplace dentro del anillo $a < \rho < b$ con las condiciones de frontera $u|_{\rho=a} = f(\varphi)$, $u|_{\rho=b} = F(\varphi)$ sobre su frontera. Utilizando el método de separación de variables y poniendo

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi),$$

obtenemos:

$$R_n(\rho) = A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^n}, \quad R_0(\rho) = A_0 + B_0 \ln \rho.$$

A diferencia del problema para el círculo, aquí se deben conservar ambos sumandos, dado que el punto $\rho = 0$ se encuentra fuera del anillo.

Como resultado obtenemos las soluciones particulares de la forma

$$u_0(\rho, \varphi) = A_0 + B_0 \ln \rho,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \left(A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n \rho^n + \frac{D_n}{\rho^n} \right) \sin n\varphi.$$

Componiendo después la solución general y exigiendo la satisfacción de las condiciones de frontera para $\rho = a$ y $\rho = b$, tendremos

$$A_0 + B_0 \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n a^n + \frac{B_n}{a^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n a^n + \frac{D_n}{a^n} \right) \sin n\varphi \right] = f(\varphi),$$

$$A_0 + B_0 \ln b + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n b^n + \frac{B_n}{b^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n b^n + \frac{D_n}{b^n} \right) \sin n\varphi \right] = F(\varphi),$$

de donde obtenemos las ecuaciones para determinar A_n , B_n , C_n y D_n

$$A_n a^n + \frac{B_n}{a^n} = f_n^{(1)}, \quad C_n a^n + \frac{D_n}{a^n} = f_n^{(2)}, \quad A_0 + B_0 \ln a = f_0^{(1)},$$

$$A_n b^n + \frac{B_n}{b^n} = F_n^{(1)}, \quad C_n b^n + \frac{D_n}{b^n} = F_n^{(2)}, \quad A_0 + B_0 \ln b = F_0^{(1)}.$$

$$81. u(\rho, \varphi) = u_0 - \frac{2u_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^{2m+1}}{b^{4m+2} - a^{4m+2}} \times \\ \times \left(\rho^{2m+1} - \frac{a^{4m+2}}{\rho^{2m+1}} \right) \frac{\sin(2m+1)\varphi}{2m+1} - \frac{u_0}{2} \frac{\ln \frac{a}{\rho}}{\ln \frac{a}{b}}. \quad (1)$$

Indicación. Es conveniente representar la solución en forma de suma

$$u = u_0 + v,$$

donde la función v satisface la condición

$$v|_{\rho=a}=0, \quad v|_{\rho=b} = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < \varphi < \pi, \\ -u_0 & \text{para } \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

82. La distribución de la temperatura dentro del cable se da por la expresión

$$u(\rho, \varphi) = \frac{q}{4} (\rho^2 - a^2) - \frac{2x_0 b + q b^2}{2} \ln \frac{\rho}{a} + \frac{0.5 b^3 x_0}{a^4 + b^4} \left(\rho^2 - \frac{a^4}{\rho^2} \right) \cos 2\varphi,$$

donde $q = -\frac{q_0}{k}$, $q_0 = 0.24 I^2 R$ es la cantidad de calor que se desprende al pasar la corriente durante una unidad de tiempo sobre una unidad de longitud del cilindro; R , la resistencia de la unidad de longitud del cilindro; $x_0 = \frac{A}{2k}$; k , el coeficiente de la conductibilidad térmica.

Indicación. Se exige hallar la solución de la ecuación $\Delta u = q$ dentro del anillo $a < \rho < b$ con las condiciones de frontera

$$u|_{\rho=a} = 0,$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = A \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = -x_0 - u_0 \cos 2\varphi.$$

Conviene representar la función u en forma de suma $u = u_1 + u_2$, donde u_1 es la solución del problema

$$\Delta u_1 = q, \quad u_1|_{\rho=a} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = -x_0.$$

83. La temperatura en el punto (ρ, φ) es

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi, \quad (1)$$

donde

$$f_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} f(\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi d\varphi.$$

En el caso particular

$$f(\varphi) = \begin{cases} u_1 & \text{para } 0 < \varphi < \frac{\alpha}{2}, \\ u_2 & \text{para } \frac{\alpha}{2} < \varphi < \alpha \end{cases}$$

la serie se suma (véase la indicación al problema 69) y da:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{u_1 + u_2}{\pi} \arctg \frac{2\rho^{\frac{\alpha}{\alpha}} a^{\frac{\alpha}{\alpha}} \sin \frac{\pi}{\alpha} \varphi}{\frac{2\pi}{\alpha} - \rho^{\frac{\alpha}{\alpha}}} + \frac{u_1 - u_2}{\pi} \arctg \frac{2\rho^{\frac{\alpha}{\alpha}} a^{\frac{\alpha}{\alpha}} \sin \frac{2\pi}{\alpha} \varphi}{\frac{4\pi}{\alpha} - \rho^{\frac{\alpha}{\alpha}}}.$$

Solución. La búsqueda de la temperatura estacionaria se reduce a la solución del primer problema de contorno para la ecuación de Laplace dentro del sector con las condiciones de frontera

$$u|_{\rho=a} = f(\varphi), \quad u=0 \quad \text{para} \quad \varphi=0 \quad \text{y} \quad \varphi=\alpha.$$

Haciendo

$$u = R(\rho) \Phi(\varphi)$$

y realizando la separación de variables, obtenemos:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0, \quad \Phi' + \lambda \Phi = 0, \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(\alpha) = 0.$$

De aquí hallamos

$$\Phi = A \sin \sqrt{\lambda} \varphi + B \cos \sqrt{\lambda} \varphi.$$

Las condiciones para $\varphi=0$ y $\varphi=\alpha$ dan:

$$B=0, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{\alpha},$$

es decir

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^2.$$

De esta manera

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi.$$

El sistema de funciones $\Phi_n = \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi$ es ortogonal en el intervalo $0 < \varphi < \alpha$,

$$\int_0^\alpha \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi \sin \frac{\pi m}{\alpha} \varphi d\varphi = 0, \quad m \neq n.$$

y tiene la norma

$$\sqrt{\int_0^\alpha \sin^2 \frac{\pi n}{\alpha} \varphi d\varphi} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

de modo que el coeficiente f_n del desarrollo de cierta función $f(\varphi)$ en serie con respecto a las funciones $\Phi_n(\varphi)$,

$$f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi,$$

se determina según la fórmula

$$f_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha f(\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi d\varphi.$$

Resolviendo la ecuación para R y teniendo en cuenta la acotación de la función R , obtenemos la solución particular de nuestro problema en la forma

$$u_n(\rho, \varphi) = A_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi.$$

La solución general es natural buscarla en forma de serie

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi.$$

Haciendo $\rho = a$ y tomando en consideración la condición para $\rho = a$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n a^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi = f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi,$$

de donde se deduce, que

$$A_n = \frac{f_n}{a^{\frac{\pi n}{\alpha}}},$$

donde f_n es el coeficiente del desarrollo de la función $f(\varphi)$.

84. La temperatura en el punto (ρ, φ) es

$$u(\rho, \varphi) = u_1 + \frac{4(u_2 - u_1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{\frac{(2m+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin(2m+1) \frac{\pi}{\alpha} \varphi}{2m+1} \quad (1)$$

ó

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2u_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{2\pi}{\alpha} - a^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2a^{\frac{2\pi}{\alpha}} \rho^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha}} + \frac{2u_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a^{\frac{\pi}{\alpha}} \rho^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha}}{\rho^{\frac{2\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2\pi}{\alpha}}}. \quad (2)$$

Indicación. Véase la indicación al problema 69. Véase también el problema 83.

85. El potencial del campo electrostático es

$$u = u(\rho, \varphi) = V_1 + \frac{4(V_2 - V_1)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^{2m+1} \frac{\sin(2m+1) \varphi}{2m+1}$$

ó

$$u(\rho, \varphi) = V_1 + \frac{2}{\pi} (V_2 - V_1) \operatorname{arctg} \frac{a \rho \sin \varphi}{\rho^2 - a^2}.$$

El vector del campo eléctrico es

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u.$$

Indicación. Véanse los problemas 69 y 84. Para $\alpha = \pi$ tenemos $u_{84} = u_{85}$.

$$86. \quad u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} + B_n \rho^{-\frac{\pi n}{\alpha}} \right) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi, \quad (1)$$

donde

$$A_n = \frac{b^{\frac{\pi n}{\alpha}} F_n - a^{\frac{\pi n}{\alpha}} f_n}{b^2 \frac{\pi n}{\alpha} - a^2 \frac{\pi n}{\alpha}}, \quad B_n = \frac{b^{\frac{\pi n}{\alpha}} f_n - a^{\frac{\pi n}{\alpha}} F_n}{b^2 \frac{\pi n}{\alpha} - a^2 \frac{\pi n}{\alpha}} a^{\frac{\pi n}{\alpha}} b^{\frac{\pi n}{\alpha}},$$

$$f_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha f(\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi d\varphi, \quad F_n = \frac{2}{\alpha} \int_0^\alpha F(\varphi) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi d\varphi.$$

Los casos particulares:

para $a \rightarrow 0$

$$B_n = 0, \quad A_n = F_n \frac{1}{b^{\frac{\pi n}{\alpha}}}$$

y obtenemos la solución del problema 83 para un sector circular;

para $b \rightarrow \infty$

$$A_n = 0, \quad B_n = f_n a^{\frac{\pi n}{\alpha}}$$

y obtenemos

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{a}{\rho} \right)^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi \quad \text{dentro de la región } \rho > a, \quad 0 < \varphi < \alpha$$

para $\alpha = \pi$ obtenemos la solución para un anillo semicircular.

Solución. Se exige hallar la función armónica dentro del sector del anillo $a < \rho < b$, $0 < \varphi < \alpha$, que satisface las condiciones de frontera

$$u = 0 \quad \text{para} \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \alpha, \quad u|_{\rho=a} = f(\varphi), \quad u|_{\rho=b} = F(\varphi).$$

Utilizando el método de separación de variables, obtenemos las soluciones particulares de la forma (véase el problema 83)

$$u_n(\rho, \varphi) = R_n(\rho) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi$$

donde $R_n(\rho)$ se determina de la ecuación

$$\rho^2 R_n'' + \rho R_n' - \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^2 R_n = 0$$

y es de la forma

$$R_n = A_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} - B_n \rho^{-\frac{\pi n}{\alpha}}.$$

Componiendo la serie

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \rho^{\frac{\pi n}{\alpha}} - B_n \rho^{-\frac{\pi n}{\alpha}} \right) \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi$$

y satisfaciendo las condiciones de frontera para $\rho = a$ y $\rho = b$, hallamos los coeficientes A_n y B_n .

$$87. u(\rho, \varphi) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(ab)^{\frac{n}{\alpha}}}{\frac{2\pi n}{b^{\alpha} - a^{\alpha}}} \left[\left(\frac{b}{\rho} \right)^{\frac{n}{\alpha}} - \left(\frac{\rho}{b} \right)^{\frac{n}{\alpha}} \right] \sin \frac{\pi n}{\alpha} \varphi,$$

donde $n = 2k + 1$.

88. Sea que el eje x está dirigido a lo largo de los cables y pasa por el punto medio entre ellos, el plano $z = 0$ es perpendicular al plano que pasa por los cables paralelos.

Sólo la componente según x del potencial vectorial A difiere de cero, satisface la ecuación de Laplace fuera de los cables y es igual a

$$A_x = \frac{2I\mu}{c} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad A_y = A_z = 0,$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío; μ , la permeabilidad magnética del medio; I , la intensidad de la corriente que pasa por la sección de cada cable,

$$R_1 = \sqrt{(y - 0,5a)^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{(y + 0,5a)^2 + z^2},$$

a , la distancia entre los cables.

Las componentes del vector de inducción $B = \operatorname{rot} A$ que se determinan por las fórmulas

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad B_z = \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

son iguales a

$$B_x = 0, \quad B_y = \frac{2\mu I z}{c} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right), \quad B_z = -\frac{2\mu I}{c} \left[\frac{y + 0,5a}{R_2^2} - \frac{y - 0,5a}{R_1^2} \right].$$

Indicación. Utilizar la fórmula para el potencial vectorial de la corriente lineal I

$$A = \frac{\mu}{c} \oint_L \frac{Ids}{r},$$

donde la integración se realiza a lo largo del contorno L de la corriente. Cada una de las componentes A_x, A_y, A_z satisface fuera de L la ecuación de Laplace.

El vector de la inducción magnética es

$$B = \operatorname{rot} A = \frac{\mu I}{c} \oint_L \frac{[ds \ r]}{r^3}.$$

89. La componente z del potencial vectorial, es diferente de cero e igual a

$$A_z = \frac{4\pi}{c} \left\{ \mu a C_0 \ln a + \frac{\mu a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) \right\},$$

donde a es el radio del cilindro; C_0, C_n, D_n , los coeficientes del desarrollo de la corriente superficial i_z con respecto a los armónicos circulares

$$i_z(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi).$$

Indicación. El potencial vectorial en el punto $M(r, \varphi)$ que está a una distancia R del conductor infinito, que lleva la corriente $I = i_z a d\varphi$, es paralelo

a él o igual a $\frac{2\mu_1 i_z a d\alpha}{c} \ln R$. Por eso el potencial vectorial para la película es

$$A_z = \frac{2\mu_1 I}{c} \int_0^{2\pi} i_z \ln R d\alpha, \quad R^3 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\varphi - \alpha).$$

Desarrollando $\ln R$ en serie con respecto a las potencias de $\frac{r}{a}$, obtenemos la expresión necesaria para A_z .

90. Sea B_0 el vector de la inducción del campo magnético exterior que está dirigido a lo largo del eje x , el eje z está dirigido a lo largo de la corriente.

Las componentes del vector de la intensidad del campo magnético se determinan según las fórmulas:

dentro del cilindro

$$\left. \begin{aligned} H_r^{(1)} &= \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} B_0 \cos \varphi, \\ H_\varphi^{(1)} &= \frac{I}{2\pi a^2} r - \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} B_0 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad \text{para } r < a;$$

fueras del cilindro

$$\left. \begin{aligned} H_r^{(2)} &= \left(1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{a^2}{r^2} \right) H_0 \cos \varphi, \\ H_\varphi^{(2)} &= \frac{I}{2\pi r} - \left(1 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{a^2}{r^2} \right) H_0 \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad \text{para } r > a.$$

Indicación. Buscamos el campo resultante en forma de suma

$$B = B_0 + B_1,$$

donde B_1 es el campo secundario, o

$$B = \operatorname{rot} A, \quad A = A_0 + A_1,$$

donde A es el potencial vectorial; A_1 , el potencial vectorial del campo secundario, además $A_0 = z^0 B_0 r \sin \varphi$ (z^0 es el vector unitario según el eje z). Sobre la superficie del cilindro debe cumplirse la condición de continuidad del potencial vectorial y de las componentes tangenciales del vector H , de modo que

$$A^{(1)} = A^{(2)}, \quad \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A^{(2)}}{\partial r} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A^{(1)}}{\partial r} \quad \text{para } r = a,$$

$$\Delta A^{(1)} = 0 \quad \text{para } r < a, \quad \Delta A^{(2)} = 0 \quad \text{para } r > a.$$

91. La componente z del potencial vectorial es solo la que difiere de cero y es igual a

$$A_z = \begin{cases} A^{(1)} & \text{para } r < a, \\ A^{(2)} & \text{para } a < r < b, \\ A^{(3)} & \text{para } r > b, \end{cases}$$

donde

$$A^{(1)} = \frac{4\mu_1 I}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_{2n+1} r^{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{c_0}{r} \right)^{2n+1} \right] \cos(2n+1)\varphi,$$

$$A^{(2)} = \frac{4\mu_2 I}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\beta_{2n+1} r^{2n+1} + \gamma_{2n+1} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+1} \right] \cos(2n+1)\varphi,$$

$$A^{(3)} = \frac{4\mu_1 I}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{2n+1} r^{-(2n+1)} \cos(2n+1)\varphi,$$

donde $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n$, son los coeficientes que se determinan de las condiciones de conjugación para $r = a$ y $r = b$. En particular,

$$\delta_{2n+1} = \frac{4\mu_2}{\mu_1} \frac{c_0^{2n+1}}{2n+1} \frac{1}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + 1\right)^2 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{4n+2}},$$

donde μ_1 es la permeabilidad magnética del medio. Por consiguiente,

$$A^{(3)} = \frac{16\mu_2 I}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + 1\right)^2 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^{4n+2}} \times \\ \times \left(\frac{c_0}{r}\right)^{2n+1} \cos(2n+1)\varphi.$$

Las componentes del vector B se determinan según las fórmulas

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \varphi}, \quad B_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial r}.$$

Indicación. Utilizar la expresión para el potencial vectorial de la línea bifilar

$$A_z = \frac{2\mu_1 I}{c} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

donde R_1 y R_2 son las distancias entre los cables y el punto (r, φ) de observación; utilizar también el desarrollo de $\ln R_1$ y $\ln R_2$ en las series siguientes para $r > c_0$:

$$\ln R_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{c_0}{r}\right)^n \cos n\varphi + \ln r,$$

$$\ln R_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{c_0}{r}\right)^n (-1)^n \cos n\varphi + \ln r.$$

92. El vector de la intensidad del campo magnético resultante es

$$H = -\operatorname{grad} V.$$

V es el potencial escalar del campo, igual a

$$V = \begin{cases} V_0 + \varphi & \text{en el espacio exterior} \\ V_0 + \psi & \text{en la sección de la esfera} \\ V_0 + w & \text{en el espacio interior} \end{cases} \quad \begin{array}{ll} \text{para } r > a, \\ \text{para } b < r < a, \\ \text{para } r < b. \end{array}$$

Aquí

$$V_0 = -H_0 x = -H_0 r \cos \theta, \quad \varphi = C_1 \frac{a^3}{r^2} \cos \theta, \quad \psi = \left(C_2 r + C_3 \frac{a^2}{r}\right) \cos \theta, \\ w = C_4 r \cos \theta,$$

donde

$$C_1 = \frac{(2\mu+1)(\mu-1)(1-\lambda)}{\Delta} H_0,$$

$$C_2 = \frac{2\mu(1-\lambda)-(2+\lambda)}{\Delta} (\mu-1) H_0, \quad C_3 = \frac{3(\mu-1)}{\Delta} H_0,$$

$$C_4 = \frac{2(1-\lambda)(\mu-1)^2}{\Delta} H_0, \quad \lambda = \frac{a^3}{b^3}, \quad \Delta = 2(1-\lambda)(\mu-1)^2 - 9\mu\lambda.$$

La intensidad del campo dentro de la esfera es

$$H = \frac{1}{1 + \frac{2}{9} \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right] \left(V\bar{\mu} - \frac{1}{V\bar{\mu}} \right)^2} H_0 \quad \text{para } r < b.$$

De aquí se ve que H siempre es menor que H_0 , es decir, el apantallado tiene lugar tanto para $\mu < 1$, como para $\mu > 1$ (para los diamagnéticos y los paramagnéticos).

Indicación. Los coeficientes C_i deben determinarse de las condiciones de conjugación para $r = a$ y para $r = b$.

2. Problemas de contorno para la franja, el rectángulo, la capa plana y el paralelepípedo

93. Si sobre los lados de un rectángulo están dadas las funciones

$$u|_{y=0} = f(x), \quad u|_{y=b} = \varphi(x), \quad u|_{x=0} = \psi(y), \quad u|_{x=a} = \chi(y),$$

que satisfacen las condiciones $f(0) = \psi(0)$, $f(a) = \chi(0)$, $\chi(b) = \varphi(a)$, $\varphi(0) = \psi(b)$, entonces

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\bar{\varphi}_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} b} + \bar{f}_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} (b-y)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} b} \right] \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a} x + \right. \\ \left. + \left[\bar{\chi}_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{b} x}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{b} a} + \bar{\psi}_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{b} (a-x)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{b} a} \right] \operatorname{sen} \frac{\pi n}{b} y \right\} + u_0(x, y),$$

donde $\bar{\varphi}_n$, \bar{f}_n , $\bar{\chi}_n$, $\bar{\psi}_n$ son los coeficientes de Fourier de las funciones

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - u_0(x, b), \quad \bar{f}(x) = f(x) - u_0(x, 0),$$

iguales a

$$\bar{f}_n = \frac{2}{a} \int_0^a \bar{f}(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a} x dx, \quad \bar{\varphi}_n = \frac{2}{a} \int_0^a \bar{\varphi}(x) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a} x dx,$$

$$\bar{\psi}_n = \frac{2}{b} \int_0^b \bar{\psi}(y) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{b} y dy, \quad \bar{\chi}_n = \frac{2}{b} \int_0^b \bar{\chi}(y) \operatorname{sen} \frac{\pi n}{b} y dy.$$

La función es

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy,$$

donde

$$A = f(0), \quad B = \frac{f(a) - f(0)}{a}, \quad C = \frac{\psi(b) - \psi(0)}{b},$$

$$D = \frac{[\varphi(a) - \varphi(0)] - [f(a) - f(0)]}{ab}.$$

Solución. Se exige hallar la solución de la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dentro del rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaga las condiciones de frontera, además, en virtud de estas condiciones los valores de la función $u(x, y)$ sobre la frontera son continuos.

Representamos la función incógnita en forma de suma

$$u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y),$$

donde $u_0(x, y)$ es la función armónica que se elige de modo que la función $v(x, y)$ en todos los vértices del rectángulo se anule y en la parte restante sea completamente arbitraria. Suponiendo

$$u_0(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy,$$

vemos que esta función es armónica; los coeficientes A , B , C y D elegimos en correspondencia con la condición indicada más arriba para $v(x, y)$.

La función armónica $v(x, y)$ satisface las condiciones de frontera

$$v|_{y=0} = \bar{f}(x), \quad v|_{y=b} = \bar{\psi}(x), \quad v|_{x=0} = \bar{\varphi}(y), \quad v|_{x=a} = \bar{\chi}(y)$$

además las funciones \bar{f} , $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\chi}$ se anulan en los vértices del rectángulo.

La función $v(x, y)$ se puede representar en forma de suma de cuatro funciones armónicas cada una de las cuales toma el valor dado sobre uno de los lados y se convierte en cero sobre los tres lados restantes. Hallamos una de estas funciones $v(x, y)$ de la ecuación

$$v_{1xx} + v_{1yy} = 0$$

con las condiciones de frontera

$$v_1|_{y=0} = 0, \quad v_1|_{y=b} = \bar{\psi}(x), \quad v_1|_{x=0, a} = 0.$$

Haciendo

$$v_1(x, y) = X(x) Y(y)$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación, tendremos:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda$$

o

$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad X'' + \lambda X = 0.$$

A la última ecuación se le debe añadir la condición

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0.$$

Resolviendo este problema de contorno para $X(x)$, hallamos las funciones propias

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{a} x,$$

y los valores propios correspondientes

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2.$$

De la ecuación y la condición

$$Y'' - \lambda Y = 0, \quad Y(0) = 0,$$

que es una consecuencia de la condición $v_1(x, 0) = X(x) Y(0) = 0$, hallamos

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y.$$

Buscamos la solución del problema, como de costumbre, en forma de serie

$$v_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a} x.$$

La condición para $y=b$ da:

$$A_n = \frac{\bar{\varphi}_n}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} b}$$

de modo que

$$v_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\varphi}_n \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} b} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{a} x.$$

Ahora ya no es difícil escribir la solución general de nuestro problema.

94. a) Si están dadas las condiciones de frontera

$u|_{y=0} = f(x)$, $u|_{x=0} = \varphi(y)$, $u_x|_{x=a} = \psi(y)$, $u_y|_{y=b} = \chi(x)$, además $f(0) = \varphi(0)$,

$$\begin{aligned} u(x, y) = & f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2a} (2n+1) b} \left[\bar{f}_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{2a} (2n+1) (b-y) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\pi \chi_n}{h(2n+1)} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2a} (2n+1) y \right] \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2a} (2n+1) x + \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2b} (2n+1) a} \times \right. \\ & \times \left. \left[\bar{\varphi}_n \operatorname{ch} \frac{\pi}{2b} (2n+1) (a-x) + \frac{2\pi \psi_n}{a(2n+1)} \operatorname{sh} \frac{\pi}{2b} (2n+1) x \right] \operatorname{sen} \frac{\pi}{2b} (2n+1) y \right\}, \end{aligned}$$

donde \bar{f}_n , $\bar{\varphi}_n$, ψ_n , χ_n , son los coeficientes de Fourier de las respectivas funciones, además

$$\bar{f}(x) = f(x) - f(0), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - f(0), \quad \bar{\varphi}(0) = \bar{f}(0) = 0.$$

b) Si están dadas las condiciones de frontera

$u|_{y=0} = f(x)$, $u|_{y=b} = \varphi(x)$, $u_x|_{x=0} = \psi(y)$, $u_x|_{x=a} = \chi(y)$, entonces la solución de la ecuación $\Delta u = 0$ es de la forma

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} b} \left[f_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} (b-y) + \varphi_n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} y \right] \cos \frac{\pi n}{a} x + \\ & + \frac{b}{\pi n \operatorname{sh} \frac{\pi n}{a} b} \left[\chi_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{b} x - \psi_n \operatorname{ch} \frac{\pi n}{b} (a-x) \right] \operatorname{sen} \frac{\pi n}{b} y \}. \end{aligned}$$

$$95. \quad u(x, y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{b}} \right). \quad (1)$$

Solución. El método de separación de variables conduce a las soluciones particulares

$$u_n(x, y) = \left(A_n e^{-\frac{\pi n}{b} x} + B_n e^{\frac{\pi n}{b} x} \right) \sin \frac{\pi n}{b} y.$$

De la acotación de la solución para $x \rightarrow \infty$ se deduce que $B_n = 0$. Componiendo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y satisfaciendo la condición de frontera para $x=0$, obtenemos

$$u(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{(2m+1)\pi}{b} x} \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi}{b} y}{2m+1}. \quad (2)$$

No es difícil sumar esta serie. En realidad,

$$H \equiv \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{(2m+1)\pi}{b} x} \frac{\sin \frac{2m+1}{b} \pi y}{2m+1} = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-\frac{\pi x}{b}} e^{i \frac{\pi y}{b}} \right)^{2m+1}}{2m+1} \right\}.$$

Haciendo

$$Z = e^{-\frac{\pi x}{b}} e^{i \frac{\pi y}{b}}$$

y tomando en consideración que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{Z^{2m+1}}{2m+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+Z}{1-Z} \quad (3)$$

tendremos

$$\begin{aligned} H &= \operatorname{Im} \frac{i}{2} \ln \frac{\left(1 - e^{-\frac{2\pi x}{b}} \right) + i 2 e^{-\frac{\pi x}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}}{1 - 2 e^{-\frac{\pi x}{b}} \cos \frac{\pi y}{b} + e^{-\frac{2\pi x}{b}}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 e^{-\frac{\pi x}{b}} \sin \frac{\pi y}{b}}{1 - e^{-\frac{2\pi x}{b}}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{b}} \right), \end{aligned}$$

de donde se deduce la fórmula (4).

Observemos que mediante el paso al límite, cuando $b \rightarrow \infty$, a partir de (1) se obtiene directamente la solución de la ecuación de Laplace para el cuarto del plano con las condiciones de frontera

$$u|_{x=0} = V, \quad u|_{y=0} = 0.$$

En este caso

$$u(x, y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$96. u(x, y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{b}} \right) + \frac{V_0 y}{b} - \frac{2V_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi y}{b}}{e^{\frac{\pi x}{b}} + \cos \frac{\pi y}{b}}. \quad (1)$$

El paso al límite cuando $b \rightarrow \infty$ da:

$$u(x, y) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Indicación. Es conveniente representar el potencial buscado en forma de la suma

$$u(x, y) = \frac{V_0 y}{b} + u_1(x, y) + u_2(x, y), \quad (2)$$

donde $u_1(x, y)$ es la solución del problema 95 y $u_2(x, y)$ satisface la ecuación $\Delta u_2 = 0$ sobre la región $x > 0, 0 < y < b$ y las condiciones

$$u_2|_{x=0} = -\frac{V_0 y}{b}, \quad u_2|_{y=0, b} = 0.$$

El primer sumando en (2) representa el potencial del campo en un condensador plano. Determinando de aquí $u_2(x, y)$, llegamos a la serie

$$u_2(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{-\frac{\pi n}{b} x}}{n} \operatorname{sen} \frac{\pi n}{b} y,$$

que se suma análogamente a la serie (2) del problema 95.

$$97. u = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(2m+1)}{a} x}{2m+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)}{a} y}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)}{a} b} + \\ + \frac{4V}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(2m+1)}{b} y}{2m+1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)}{b} (a-x)}{\operatorname{sh} \frac{\pi(2m+1)}{b} a}. \quad (4)$$

El caso límite

$$u \rightarrow u_{\text{gg}} \quad \text{cuando} \quad a \rightarrow \infty.$$

$$98. u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{para } y < h, \\ u_2(x, y) & \text{para } h < y < b, \end{cases}$$

donde

$$\left. \begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-V\sqrt{\lambda_n} x} \bar{Y}_n(y), \quad \bar{Y}_n(y) = \frac{\sin V\sqrt{\lambda_n} y}{\sin V\sqrt{\lambda_n} h}, \\ u_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-V\sqrt{\lambda_n} x} \bar{Y}_n(y), \quad \bar{Y}_n(y) = \frac{\sin V\sqrt{\lambda_n} (b-y)}{\sin V\sqrt{\lambda_n} (b-h)}, \\ A_n &= \frac{V}{\|Y\|^2 \sqrt{\lambda_n}} \left[\frac{\varepsilon_1}{\sin V\sqrt{\lambda_n} h} + \frac{\varepsilon_2}{\sin V\sqrt{\lambda_n} (b-h)} \right], \\ \|Y\|^2 &= \frac{\varepsilon_1 h}{2 \sin^2 V\sqrt{\lambda_n} h} + \frac{\varepsilon_2 (b-h)}{2 \sin^2 V\sqrt{\lambda_n} (b-h)}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

λ_n es la n -ésima raíz de la ecuación trascendente

$$\varepsilon_1 \operatorname{ctg} V\sqrt{\lambda_n} h + \varepsilon_2 \operatorname{ctg} V\sqrt{\lambda_n} (b-h) = 0. \quad (2)$$

Solución. Se exige hallar la función $u = \begin{cases} u_1 & \text{para } y < h, \\ u_2 & \text{para } h < y < b, \end{cases}$ continua en la región $x \geq 0, 0 \leq y \leq b$, que satisface dentro de la región $x > 0, 0 < y < b$ la ecuación

$$\operatorname{div}(e \operatorname{grad} u) = 0,$$

donde

$$e = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{para } y < h, \\ \varepsilon_2 & \text{para } h < y < b, \end{cases}$$

y las condiciones de frontera $u_1 = 0$ para $y = 0$, $u_2 = 0$ para $y = b$, $u_1 = V$ para $x = 0$.

Si se tiene en cuenta que e es constante a trozos, entonces para u_1 y u_2 obtenemos las ecuaciones $\Delta u_1 = 0$, $\Delta u_2 = 0$ y sobre la frontera de discontinuidad $y = h$ u_1 y u_2 deben satisfacer las condiciones de conjugación

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} \quad \text{para } y = h.$$

Haciendo

$$u(x, y) = X(x) Y(y),$$

de la ecuación $(eu_x)_x + (eu_y)_y = 0$ obtenemos después de la separación de variables

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left(e \frac{dY}{dy} \right) + e \lambda Y &= 0, \quad X'' - \lambda X = 0, \\ Y(0) &= 0, \quad Y(b) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta la discontinuidad de e , tendremos para

$$Y(y) = \begin{cases} \bar{Y}(y) & \text{para } y < h, \\ \bar{\bar{Y}}(y) & \text{para } h < y < b \end{cases}$$

las condiciones

$$\begin{aligned} \bar{Y}'' + \lambda \bar{Y} &= 0, \quad \bar{\bar{Y}}'' + \lambda \bar{\bar{Y}} = 0, \quad \bar{Y}(0) = 0, \\ \bar{Y}(b) &= 0, \quad \bar{Y}(h) = \bar{\bar{Y}}(h), \quad \varepsilon_1 \bar{Y}'(h) = \varepsilon_2 \bar{\bar{Y}}'(h). \end{aligned}$$

La solución de este problema se busca en la forma

$$\bar{Y}(y) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} y}{\sin \sqrt{\lambda} h}, \quad \bar{Y}(y) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} (b-y)}{\sin \sqrt{\lambda} (b-h)}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la segunda ecuación de conjugación, obtenemos la ecuación característica para determinar λ :

$$\varepsilon_1 \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} h + \varepsilon_2 \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} (b-h) = 0. \quad (4)$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, las raíces de esta ecuación; $Y_1, Y_2, \dots, Y_n(y)$, las funciones propias respectivas. De la teoría general de los problemas acerca de los valores propios*) se deduce la existencia de un conjunto numerable de valores propios (λ_n) al que corresponden las funciones propias $\{Y_n(y)\}$ que forman el sistema ortogonal de funciones con respecto al núcleo $e(y)$

$$\int_0^b Y_m(y) Y_n(y) e(y) dy = 0 \quad \text{para } m \neq n,$$

6

$$\varepsilon_1 \int_0^h \bar{Y}_m(y) \bar{Y}_n(y) dy + \varepsilon_2 \int_h^b \bar{Y}_m(y) \bar{Y}_n(y) dy = 0 \quad \text{para } m \neq n.$$

Para la norma de la función propia $\|Y_n\|$ obtenemos:

$$\|Y_n\|^2 = \int_0^b Y_n^2(y) e(y) dy = \varepsilon_1 \int_0^h \bar{Y}_n^2(y) dy + \varepsilon_2 \int_h^b \bar{Y}_n^2(y) dy.$$

Calculando estas integrales y teniendo en cuenta la ecuación (4) para λ_n , hallamos:

$$\|Y_n\|^2 = \frac{\varepsilon_1 h}{2 \sin^2 \sqrt{\lambda_n} h} + \frac{\varepsilon_2 (b-h)}{2 \sin^2 \sqrt{\lambda_n} (b-h)}. \quad (5)$$

Los coeficientes del desarrollo de cierta función $f(y)$ en la serie respecto a las funciones propias $Y_n(y)$ se determinan según la fórmula

$$f_n = \frac{1}{\|Y_n\|^2} \int_0^b f(y) Y_n(y) e(y) dy.$$

De la ecuación (3) hallamos

$$X_n(x) = A_n e^{-\sqrt{\lambda_n} x}.$$

La solución general del problema es de la forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\lambda_n} x} Y_n(y).$$

Para determinar A_n utilizamos la condición para $x = 0$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n(y).$$

*) Véase [7], cap. II, § 3, apartado 9.

De aquí

$$A_n = \frac{V}{\|Y_n\|^2} \int_0^b Y_n(y) \epsilon(y) dy = \\ = \frac{V}{\sqrt{\lambda_n} \|Y_n\|^2} \left[\frac{\epsilon_1}{\sin \sqrt{\lambda_n} h} + \frac{\epsilon_2}{\sin \sqrt{\lambda_n} (b-h)} \right].$$

99. El potencial del campo electrostático es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (a-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} a} Y_n(y). \quad (1)$$

donde

$$Y_n(y) = \begin{cases} \bar{Y}_n(y) & \text{para } y < h, \\ \bar{\bar{Y}}_n(y) & \text{para } h < y < b, \end{cases}$$

Las expresiones para $Y_n(y)$, A_n y el cuadrado de la norma están dadas en la respuesta al problema anterior; λ_n es la raíz de la ecuación

$$\epsilon_1 \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} (b-h) + \epsilon_2 \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} h = 0.$$

El paso al límite cuando $a \rightarrow \infty$ da la solución del problema 98

$$u_{98}|_{a=\infty} = u_{98},$$

dado que

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} (a-x)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n} a} = e^{-\sqrt{\lambda_n} x}$$

Indicación. Véase la solución del problema 98.

100. La intensidad del campo eléctrico $E = -\operatorname{grad} u$, donde u es el potencial igual a

$$u(x, y) = \begin{cases} u_1(x, y) & \text{para } y < h, \\ u_2(x, y) & \text{para } h < y < b, \end{cases}$$

$$u_1(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon_2 \left[\operatorname{th} \frac{\pi(2k+1)}{a} h + \operatorname{th} \frac{\pi(2k+1)}{a} (b-h) \right]}{\epsilon_1 \operatorname{th} \frac{\pi(2k+1)}{a} (b-h) + \epsilon_2 \operatorname{th} \frac{\pi(2k+1)}{a} h} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)}{a} y}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)}{a} b} \operatorname{sen} \frac{\pi(2k+1)}{a} x$$

$$u_2(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)}{a} y + \right.$$

$$+\left\{\frac{e_2 \operatorname{th} \frac{\pi(2k+1)}{a} h - e_1 \operatorname{th} \frac{\pi(2k+1)}{a} (b-h)}{e_1 \operatorname{th} \frac{\pi(2k+1)}{a} (b-h) + e_2 \operatorname{th} \frac{\pi(2k+1)}{a} h}\right\} \times \times \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(2k+1)x}{a}}{(2k+1) \operatorname{sh} \frac{\pi(2k+1)b}{a}}.$$

Indicación. La solución se busca en la forma $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) Y_n(y)$, donde $X_n(x)$ es la función propia del problema de contorno $X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(a) = 0$

y

$$Y_n(y) = \begin{cases} \bar{Y}_n(y) & \text{para } y < h, \\ \cdot \bar{Y}_n(y) & \text{para } h < y < b \end{cases}$$

es la solución del problema

$$\bar{Y}_n'' - \lambda_n \bar{Y}_n = 0, \quad \bar{Y}_n'' - \lambda_n \bar{\bar{Y}}_n = 0, \quad \bar{Y}_n(0) = 0, \\ \bar{Y}_n(h) = \bar{\bar{Y}}_n(h), \quad e_1 Y_n'(h) = e_2 \bar{Y}_n'(h),$$

que se determinan con exactitud hasta el multiplicador constante.

101. $u(x, y) = \frac{Q}{2abk} [(y-b)^2 - (x-a)^2] + \text{const}$, donde k es el coeficiente de la conductibilidad térmica.

Indicación. Se exige resolver el segundo problema de contorno para la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dentro del rectángulo con las condiciones de frontera

$$ku_y(x, 0) = -\frac{Q}{a}, \quad ku_x(0, y) = -\frac{Q}{b}, \quad u_x(a, y) = 0, \quad u_y(x, b) = 0.$$

En este caso la reducción de ese problema a dos problemas para cada uno de los cuales sobre tres lados están tomadas las condiciones de frontera nulas, es imposible, dado que con esto se quebranta la condición necesaria de resolución del segundo problema de contorno

$$\oint_c \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Solución. Dado que los valores de frontera no varían a lo largo de los lados, entonces se puede buscar la solución en la forma del polinomio armónico

$$u(x, y) = A + Bx + Cy + Dxy + E(x^2 - y^2).$$

Satisfaciendo las condiciones de frontera, hallamos los valores correspondientes de los coeficientes y, como resultado, llegamos a la fórmula de la respuesta.

La solución se puede hallar también mediante el método de separación de variables, suponiendo

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) Y_n(y),$$

donde $Y_n(y) = \cos \sqrt{\lambda_n} y$ es la función propia del problema de contorno $Y'' + \lambda Y = 0, Y'(0) = Y'(b) = 0,$

que corresponde al valor propio $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$.

Hallemos:

$$u_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b u(x, y) Y_n(y) dy \quad \text{para } n > 0.$$

Sustituyendo aquí

$$Y_n = -\frac{1}{\lambda_n} Y_n''$$

e integrando dos veces por partes, obtenemos

$$u_n(x) = -\frac{2}{b} \frac{2}{\lambda_n} \left\{ [u Y_n'']_0^b - [u_u Y_n]_0^b + \int_0^b u_{yy} Y_n'' dy \right\}.$$

Teniendo en cuenta las condiciones de frontera y la ecuación $u_{xx} + u_{yy} = 0$, tendremos

$$u_n(x) = -\frac{2Q}{kab\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_n} u_n''(x),$$

6

$$u_n''(x) - \lambda_n u_n(x) = \frac{2Q}{abk}.$$

Integrando las condiciones de frontera para $x = 0$ y $x = a$, obtenemos las condiciones para $u_n(x)$:

$$u_n'(0) = 0, \quad u_n'(a) = 0.$$

De aquí hallamos:

$$u_n(x) = -\frac{2Q}{kab\lambda_n} \quad \text{para } n > 0.$$

Para hallar

$$u_0(x) = \frac{1}{b} \int_0^b u(x, y) dy,$$

integraremos la ecuación $\Delta u = 0$ por partes, lo que da:

$$u_0''(x) = \frac{Q}{abk}, \quad u_0'(0) = \frac{Q}{bk}, \quad u_0'(a) = 0,$$

de donde

$$u_0(x) = -\frac{Q}{2abk} (x-a)^2 + \text{const.}$$

De esta manera obtenemos

$$u(x, y) = -\frac{Q}{2abk} (x-a)^2 + \frac{2Q}{kab\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{b} y}{n^2} + \text{const.}$$

6

$$u(x, y) = \frac{Q}{2abk} [(y-b)^2 - (x-a)^2] + \text{const.}$$

dado que

$$\frac{4b}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n}{b} y}{n^2} = (y-b)^2.$$

102. Si el flujo q está dado sobre el lado $y = b$, entonces

$$u(x, y) = u_1 - \frac{4qa}{k\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2m+1)\pi}{a} y}{\operatorname{ch} \frac{(2m+1)\pi}{a} b} \frac{\sin \frac{\pi(2m+1)}{a} x}{(2m+1)^2}.$$

Indicación. Es conveniente representar la solución en forma de suma

$$u(x, y) = u_1 + v(x, y),$$

donde $v(x, y)$ es la solución de la ecuación $\Delta v = 0$ que satisface las condiciones de frontera

$$v = 0 \quad \text{para } x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad -kv_y(x, b) = q.$$

103. La solución de la ecuación $\Delta u = 0$ dentro del paralelepípedo rectangular con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_1(y, z), & u|_{x=a} &= f_2(y, z), \\ u|_{y=0} &= f_3(x, z), & u|_{y=b} &= f_4(x, z), \\ u|_{z=0} &= f_5(x, y), & u|_{z=c} &= f_6(x, y) \end{aligned}$$

es de la forma

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z) + u_3(x, y, z),$$

donde

$$u_1(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f_2)_{mn} \operatorname{sh} v_{mn}^{(1)} x + (f_1)_{mn} \operatorname{sh} v_{mn}^{(1)} (a-x)}{\operatorname{sh} v_{mn}^{(1)} a} \times$$

$$\times \operatorname{sen} \frac{\pi m}{b} y \operatorname{sen} \frac{\pi n}{c} z,$$

$$v_{mn}^{(1)} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}},$$

$$(f_i)_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^c f_i(y, z) \operatorname{sen} \frac{\pi m}{b} y \operatorname{sen} \frac{\pi n}{c} z dy dz \quad (i=1, 2).$$

Las funciones $u_2(x, y, z)$ y $u_3(x, y, z)$ se determinan mediante fórmulas análogas.

Solución. La función incógnita $u(x, y, z)$ se puede representar en forma de una suma de tres funciones armónicas u_1, u_2, u_3 , que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} u_1|_{x=0} &= f_1(y, z); & u_1|_{x=a} &= f_2(y, z); & u_1 &= 0 \quad \text{para } y = 0; b; z = 0, c, \\ u_2|_{y=0} &= f_3(x, z); & u_2|_{y=b} &= f_4(x, z); & u_2 &= 0 \quad \text{para } x = 0; a; z = 0, c, \\ u_3|_{z=0} &= f_5(x, y); & u_3|_{z=c} &= f_6(x, y); & u_3 &= 0 \quad \text{para } x = 0; a; y = 0, b. \end{aligned}$$

Nos detendremos en la determinación de $u_1(x, y, z)$. Haciendo $u_1(x, y, z) = X(x) v(y, z)$, después de la separación de variables obtenemos para $v(y, z)$ el problema de contorno acerca de las vibraciones propias de la membrana rectangular con la frontera fija

$$v_{yy} + v_{zz} + \lambda v = 0, \quad v = 0 \quad \text{para } y = 0, b; z = 0, c,$$

las funciones propias normalizadas que son de la forma

$$v_{mn}(y, z) = \sqrt{\frac{4}{bc}} \operatorname{sen} \frac{\pi m}{b} y \operatorname{sen} \frac{\pi n}{c} z \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

y los valores propios son iguales a $\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2} \right)$. Determinando luego de la ecuación $X'' - \lambda_{mn} X = 0$ la función $X_{mn}(x)$, obtenemos

$$u_1(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_{mn}} x + B_{mn} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_{mn}} x) v_{mn}(y, z).$$

Los coeficientes del desarrollo A_{mn} y B_{mn} se determinan de las condiciones para $x = 0$ y $x = a$. Análogamente se hallan las funciones $u_2(x, y, z)$ y $u_3(x, y, z)$.

Observemos que para resolver el primer problema de contorno para el rectángulo hemos introducido el polinomio armónico auxiliar, mediante el cual las magnitudes de las funciones de frontera en las vértices pasaron a ser iguales a cero. En el problema para el paralelepípedo, la construcción de tal polinomio es considerablemente más compleja y ella no se realizó. Por eso las series construidas convergen no uniformemente en los entornos de los vértices del paralelepípedo.

104. El potencial del campo electrostático es

$$u(x, y, z) = \frac{16V}{\pi^2} \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{b} y \operatorname{sh} \pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}} (c-z)}{(2m+1)(2n+1) \operatorname{sh} \pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}} c}. \quad (1)$$

Para $c \rightarrow \infty$ obtenemos la solución para el tubo semiacotado

$$u(x, y, z) =$$

$$= \frac{16V}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{b} y}{(2m+1)(2n+1)} \times \\ \times e^{-\pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}} z}. \quad (2)$$

$$105. u(x, y, z) =$$

$$= V - \frac{16V}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} v_{mn} \left(\frac{c}{2} - z \right) \operatorname{sen} \frac{(2m+1)\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{(2n+1)\pi}{b} y}{\operatorname{ch} \frac{v_{mn} c}{2} (2m+1)(2n+1)},$$

donde

$$v_{mn} = \pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{b^2}}.$$

El paso límite cuando $c \rightarrow \infty$ da:

$$u(x, y, z) = V - u_{104b},$$

donde u_{104b} se determina por la fórmula (2) del problema 104.

La solución se puede representar también en forma de suma

$$u(x, y, z) = \frac{16V}{\pi^2} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \bar{\mu}_{mn} \left(\frac{a}{2} - x \right)}{\operatorname{ch} \bar{\mu}_{mn} \frac{a}{2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(2m+1)}{b} y \operatorname{sen} \frac{\pi(2n+1)}{c} z}{(2m+1)(2n+1)} +$$

$$+ \frac{16V}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \bar{\mu}_{mn} \left(\frac{b}{2} - y \right)}{\operatorname{ch} \bar{\mu}_{mn} \frac{b}{2}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi(2m+1)}{a} x \operatorname{sen} \frac{\pi(2n+1)}{c} z}{(2m+1)(2n+1)}.$$

$$\bar{\mu}_{mn} = \pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{b^2} + \frac{(2n+1)^2}{c^2}}, \quad \bar{\mu}_{mn} = \pi \sqrt{\frac{(2m+1)^2}{a^2} + \frac{(2n+1)^2}{c^2}}.$$

3. Problemas que exigen la utilización de las funciones cilíndricas

106. $u(\rho, \varphi, z) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{m,n} \cos n\varphi + B_{m,n} \operatorname{sen} n\varphi) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} (l-z)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} l} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (C_{m,n} \cos n\varphi + D_{m,n} \operatorname{sen} n\varphi) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} z}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} l}, \quad (1)$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la m -ésima raíz de la ecuación

$$J_n(\mu) = 0;$$

$A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$, los coeficientes del desarrollo de las funciones $f(\rho, \varphi)$ y $F(\rho, \varphi)$ iguales a

$$A_{m,n} = \frac{2}{a^2 \pi e_n [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(\rho, \varphi) \cos n\varphi J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \rho d\rho d\varphi,$$

$$e_n = \begin{cases} 2, & n=0, \\ 1, & n \neq 0, \end{cases}, \quad (2)$$

$$B_{m,n} = \frac{2}{a^2 \pi [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(\rho, \varphi) \operatorname{sen} n\varphi J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \rho d\rho d\varphi, \text{ etc.}$$

Solución. El problema se resuelve mediante el método de separación de variables. Sustituyendo la expresión

$$u(\rho, \varphi, z) = V(\rho, \varphi) Z(z)$$

en la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

y separando las variables, obtenemos para $V(\rho, \varphi)$ la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \lambda V = 0 \quad (4)$$

con la condición de frontera

$$V(a, \varphi) = 0$$

y para $Z(z)$, la ecuación

$$Z'' - \lambda Z = 0. \quad (5)$$

Suponiendo después

$$V(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi),$$

tendremos

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda - \frac{v^2}{\rho^2} \right) R = 0, \quad (6)$$

$$\Phi'' + v^2 \Phi = 0, \quad (7)$$

donde v es la constante de la separación. De la condición de periodicidad de la función Φ respecto al ángulo φ hallamos $v^2 = n^2$.

Para $R(\rho)$ tenemos la ecuación de Bessel

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\lambda - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0$$

con la condición de frontera

$$R(a) = 0$$

y la condición natural de acotación en el cero*)

$$|R(0)| < \infty.$$

De aquí hallamos

$$R(\rho) = J_n(\sqrt{\lambda} \rho).$$

La condición de frontera para $\rho = a$ da:

$$J_n(\mu) = 0, \quad \text{donde } \mu = \sqrt{\lambda} a.$$

Designamos por $\mu_1^{(n)}$, $\mu_2^{(n)}$, ..., $\mu_m^{(n)}$ las raíces de esta ecuación. De esta manera el problema de contorno para $V(\rho, \varphi)$ tiene los valores propios

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \right)^2 \text{ a los que corresponden las funciones propias}$$

$$\bar{V}_{m,n} = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \cos n\varphi, \quad \bar{\bar{V}}_{n,m} = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \sin n\varphi,$$

que forman dos sistemas ortogonales de funciones, para las cuales

$$\|\bar{V}_{n,m}\|^2 = \frac{a^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2 \pi \epsilon_n, \quad \|\bar{\bar{V}}_{n,m}\|^2 = \frac{a^2}{2} [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2 \pi,$$

donde

$$\epsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{para } n=0, \\ 1 & \text{para } n \neq 0, \end{cases}$$

*) Véase [7], complemento 1.

la solución general de nuestro problema se representa en forma de serie

$$u(\rho, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{m,n} \bar{V}_{m,n}(\rho, \varphi) + B_{m,n} \bar{\bar{V}}_{m,n}(\rho, \varphi)) Z_{m,n}(z),$$

donde $Z_{m,n}(z)$ es la solución de la ecuación (5).

Dado que la función buscada $u(\rho, \varphi, z)$ se puede representar en forma de suma

$$u(\rho, \varphi, z) = u_1(\rho, \varphi, z) + u_2(\rho, \varphi, z),$$

donde $u_1(\rho, \varphi, z)$ y $u_2(\rho, \varphi, z)$ son unas funciones armónicas que satisfacen la condición

$$\begin{aligned} u_1|_{\rho=a} &= 0, & u_1|_{z=0} &= f(\rho, \varphi), & u_1|_{z=l} &= 0, \\ u_2|_{\rho=a} &= 0, & u_2|_{z=0} &= 0, & u_2|_{z=l} &= F(\rho, \varphi), \end{aligned}$$

entonces es suficiente limitarse a la búsqueda de la función $u_1(\rho, \varphi, z)$. En este caso

$$Z_{m,n}(z) = \operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} (l - z).$$

Satisfaciendo la condición de frontera para $z = 0$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{m,n} \bar{V}_{m,n} + B_{m,n} \bar{\bar{V}}_{m,n}) \operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} l = f(\rho, \varphi).$$

hallaremos

$$A_{m,n} = \frac{\tilde{f}_{m,n}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} l}, \quad B_{m,n} = \frac{\tilde{\bar{f}}_{m,n}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} l},$$

donde

$$\tilde{f}_{m,n} = \frac{1}{\|\bar{V}_{m,n}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(\rho, \varphi) \bar{V}_{m,n}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

$$\tilde{\bar{f}}_{m,n} = \frac{1}{\|\bar{\bar{V}}_{m,n}\|^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(\rho, \varphi) \bar{\bar{V}}_{m,n}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

$$107. \quad u = u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m \operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}(l-z)}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}z}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{a} l} J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a} \rho \right),$$

donde $\mu_m^{(0)}$ es la m -ésima raíz de la ecuación

$J_0(\mu) = 0$,
 A_m y B_m se dan por las fórmulas

$$A_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^a f(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a} \rho \right) \rho d\rho,$$

$$B_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_m^{(0)})} \int_0^a F(\rho) J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a} \rho \right) \rho d\rho.$$

$$108. \quad u = u(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{I_0\left(\frac{\pi n}{l} \rho\right)}{I_0\left(\frac{\pi n}{l} a\right)} \sin \frac{\pi n}{l} z,$$

dónde $f_n = \frac{2}{l} \int_0^b f(z) \sin \frac{\pi n}{l} z dz$ son los coeficientes de Fourier; $I_0(x) = J_0(ix)$, la función de Bessel de orden nulo del argumento imaginario, que satisface la ecuación

$$J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) - J_0(x) = 0.$$

Los casos particulares:

$$a) \quad f_n = \frac{2f_0}{\pi n} [1 - (-1)^n],$$

$$u = \frac{4f_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\pi(2m+1)}{l} \rho\right)}{I_0\left(\frac{\pi(2m+1)}{l} a\right)} \frac{\sin \frac{\pi(2m+1)}{l} z}{2m+1};$$

$$b) \quad f_n = \frac{4Al}{(\pi n)^3} [1 - (-1)^n],$$

$$u = \frac{8Al}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\pi(2m+1)}{l} \rho\right)}{I_0\left(\frac{\pi(2m+1)}{l} a\right)} \frac{\sin \frac{\pi(2m+1)}{l} z}{(2m+1)^3}.$$

109. La solución general del primer problema interior de contorno para el cilindro acotado $0 < \rho < a$, $0 < z < l$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

$$u|_{\rho=a} = f(\varphi, z),$$

$$u|_{z=0} = \psi_1(\rho, \varphi), \quad u|_{z=l} = \psi_2(\rho, \varphi)$$

se representa en forma de una suma de tres soluciones

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

donde u_1 , u_2 y u_3 , son las soluciones de los problemas de contorno

$$\Delta u_1 = 0, \quad u_1|_{\rho=a} = f(\varphi, z), \quad u_1|_{z=0} = u_1|_{z=l} = 0,$$

$$\Delta u_2 = 0, \quad u_2|_{\rho=a} = 0, \quad u_2|_{z=0} = \psi_1(\rho, \varphi), \quad u_2|_{z=l} = 0,$$

$$\Delta u_3 = 0, \quad u_3|_{\rho=a} = 0, \quad u_3|_{z=0} = 0, \quad u_3|_{z=l} = \psi_2(\rho, \varphi),$$

las cuales se determinan mediante las series siguientes:

$$u_1(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n,m}^{(1)} \cos n\varphi + B_{n,m}^{(1)} \sin n\varphi) \times$$

$$\times \frac{I_n\left(\frac{\pi m}{l} \rho\right)}{I_n\left(\frac{\pi m}{l} a\right)} \sin \frac{\pi m}{l} z,$$

donde

$$A_{n,m}^{(1)} = \frac{2}{\pi e_n l} \int_0^{2\pi} \int_0^l f(\varphi, z) \cos n\varphi \sin \frac{\pi m}{l} z d\varphi dz, \quad e_n = \begin{cases} 2 & \text{para } n=0, \\ 1 & \text{para } n \neq 0, \end{cases}$$

$$B_{n,m}^{(1)} = \frac{2}{\pi l} \int_0^{2\pi} \int_0^l f(\varphi, z) \sin n\varphi \sin \frac{\pi m}{l} z d\varphi dz,$$

$$u_1(\rho, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A_{n,m}^{(2)} \cos n\varphi + B_{n,m}^{(2)} \sin n\varphi) \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}(l-z)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} l} \times \times J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right),$$

y

$$A_{n,m}^{(2)} = \frac{2}{\pi e_n a^2 [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \psi_1(\rho, \varphi) \cos n\varphi J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \rho d\rho d\varphi,$$

$$B_{n,m}^{(2)} = \frac{2}{\pi a^2 [J'_n(\mu_m^{(n)})]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \psi_1(\rho, \varphi) \sin n\varphi J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \rho d\rho d\varphi,$$

si en las expresiones para $A_{n,m}^{(2)}$ y $B_{n,m}^{(2)}$ se sustituye $\psi_1(\rho, \varphi)$ por $\psi_2(\rho, \varphi)$, entonces

$$u_1(\rho, \varphi, z) = u_2(\rho, \varphi, l-z),$$

Indicación. Se debe buscar las soluciones particulares para u_1 en la forma
 $u_1(\rho, \varphi, z) = V(\rho, \varphi) Z(z).$

Para $Z(z)$ se obtiene el problema de contorno

$$Z'' + \lambda Z = 0, \quad Z(0) = Z(l) = 0, \quad \lambda_m = \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2, \quad Z_m = \sin \frac{\pi m}{l} z,$$

y para $V(\rho, \varphi)$, la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} - \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 V = 0,$$

de donde hallamos

$$V_{m,n}(\rho, \varphi) = I_n \left(\frac{\pi m}{l} \rho \right) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

Suponiendo

$$u_2(\rho, \varphi, z) = V(\rho, \varphi) Z(z),$$

tendremos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \lambda V = 0, \quad V(a, \varphi) = 0,$$

de modo que

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \right)^2, \quad V_{m,n} = J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \begin{cases} \cos n\varphi, \\ \sin n\varphi, \end{cases}$$

y

$$Z'' - \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \right)^2 Z = 0, \quad Z(l) = 0,$$

de donde hallamos:

$$Z_{m,n} = C_{m,n} \operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(n)}}{a} (l-z).$$

110. El potencial del campo electrostático dentro de la caja cilíndrica es

$$u(\rho, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0 \left[\frac{(2k+1)\pi}{l} \rho \right]}{J_0 \left[\frac{(2k+1)\pi}{l} a \right]} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{l} z}{2k+1}.$$

El campo sobre el eje del cilindro es

$$E_z(0, z) = - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\rho=0} = - \frac{4V_0}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{l} z}{I_0 \left(\frac{(2k+1)\pi}{l} a \right)},$$

$$E_z(0, 0) = - \frac{4V_0}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l}{I_0 \left(\frac{(2k+1)\pi}{l} a \right)}$$

(véase la solución del problema 108).

En el caso límite cuando $l \rightarrow \infty$ tenemos

$$u(\rho, z) = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{J_0(\xi, \rho)}{I_0(\xi a)} \frac{\sin \xi z}{\xi} d\xi.$$

El campo sobre el eje del cilindro ($\rho=0$) es igual a

$$E_z = - \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{\rho=0} = - \frac{2V_0}{\pi a} \int_0^\infty \frac{\cos \frac{z}{a} s ds}{I_0(s)}.$$

En particular,

$$E_z(0, 0) = - \frac{2V_0}{\pi a} \int_0^\infty \frac{ds}{I_0(s)}.$$

$$111. \quad u(\rho, z) = 2V_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{a} (l-z)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{a} l} \frac{J_0 \left(\frac{\mu_m^{(0)} \rho}{a} \right)}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})},$$

donde $\mu_m^{(0)}$ son las raíces de la ecuación $J_0(\mu_m^{(0)}) = 0$.

Observando que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{a} (l-z)}{\operatorname{sh} \frac{\mu_m^{(0)}}{a} l} = e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{a} z},$$

obtenemos la solución del problema para el cilindro semiacotado

$$u(\rho, z) = 2V_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{a} z}}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a} \rho\right).$$

112. La solución del problema

$\Delta u = 0$ ($\rho < a$, $0 < z < \infty$), $u|_{\rho=a} = 0$, $u|_{z=0} = V_0$ es de la forma

$$u_{111}(\rho, z) = 2V_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\mu_m^{(0)}}{a} z}}{\mu_m^{(0)} J_1(\mu_m^{(0)})} J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a} \rho\right)$$

y la solución del problema

$\Delta u = 0$ ($\rho < a$, $0 < z < \infty$), $u|_{\rho=a} = V_0$, $u|_{z=0} = 0$ se da por la fórmula

$$u(\rho, z) = V_0 - u_{111}(\rho, z).$$

113. La distribución de la temperatura dentro del cilindro se da por la fórmula

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m}{a} (l-z)}{\operatorname{ch} \frac{\mu_m}{a} l} J_0\left(\frac{\mu_m}{a} \rho\right),$$

donde

$$A_m = \frac{2aq}{k\mu_m^2 J_1(\mu_m)},$$

μ_m es la raíz de la ecuación

$$J_0(\mu) = 0,$$

k , es el coeficiente de la conductibilidad térmica.

Indicación. El problema se reduce a la solución de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ para las condiciones de frontera

$$-k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = q, \quad u|_{\rho=a} = 0, \quad u|_{z=l} = 0.$$

$$114. \quad u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\operatorname{sh} \frac{v_m(l-z)}{a}}{\operatorname{ch} \frac{v_m}{a} l} J_0\left(\frac{v_m}{a} \rho\right), \quad (1)$$

$$A_m = \frac{2h^2 a^3 q}{k(a^2 h^2 + v_m^2) v_m^2 J_1(v_m)}, \quad (2)$$

donde v_m es la m -ésima raíz de la ecuación trascendente

$$J_1(v) = \frac{ah}{v} J_0(v), \quad (3)$$

h , es el coeficiente del intercambio de calor. Pasando al límite cuando $h \rightarrow \infty$, obtenemos de aquí la solución del problema 113.

Indicación. Se exige resolver el problema de contorno

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad (0 < \rho < a, \quad 0 < z < l), \\ -k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &= q, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} + hu \Big|_{\rho=a} = 0, \quad u \Big|_{z=l} = 0. \end{aligned}$$

115. a) La solución del problema para el cilindro semiacotado ($l = \infty$) es de la forma

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{\mu_m}{a} z} J_0\left(\frac{\mu_m}{a} \rho\right), \quad (1)$$

donde μ_m es la raíz de la ecuación $J_0(\mu) = 0$,

$$A_m = \frac{2aq}{k\mu_m^2 J_1(\mu_m)} \cdot \quad (2)$$

b) La solución del problema 114 para $l = \infty$

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\frac{v_m z}{a}} J_0\left(\frac{v_m}{a} \rho\right), \quad (3)$$

donde v_m es la raíz de la ecuación (3) del problema 114; A_m se determina por la fórmula (2) del problema 114.

Indicación. La solución se busca en la forma

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(z) R_m(\rho),$$

donde $R_m(\rho)$ coincide con las funciones respectivas de los problemas 113 y 114; $Z_m(z)$ se determina de la ecuación $Z'' - \lambda_m Z = 0$ y la condición $Z(\infty) = 0$, de modo que $Z_m = A_m e^{-\sqrt{\lambda_m} z}$.

116. La intensidad del campo electrostático $E = -\operatorname{grad} u$, donde u es el potencial, es igual a

$$\begin{aligned} u(\rho, z) &= \frac{4V_0}{\pi} \times \\ &\quad I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} \rho\right] K_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} a\right] - \\ &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} a\right] K_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} \rho\right]}{I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} b\right] K_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} a\right]} \times \\ &\quad \quad \quad - I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} a\right] K_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} b\right] \\ &\quad \quad \quad \times \frac{\sin \frac{\pi(2m+1)}{l} z}{2m+1}. \quad (1) \end{aligned}$$

Aquí I_0 y K_0 son las funciones de Bessel de orden nulo del argumento imaginario de primer y segundo géneros respectivamente.

Los casos límites:

1) $l = \infty$, entonces

$$u(p, z) = \frac{2V_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_0(ps) K_0(as) - I_0(as) K_0(ps)}{I_0(bs) K_0(as) - I_0(as) K_0(bs)} \frac{\sin sz}{s} ds \quad (2)$$

es el potencial dentro del tubo semiacotado;

2) para $a = 0$ tenemos

$$u(p, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} p\right]}{I_0\left[\frac{\pi(2m+1)}{l} b\right]} \frac{\sin \frac{\pi(2m+1)}{l} z}{2m+1} = u_{116} \quad (3)$$

que es el potencial dentro de la caja cilíndrica.

Indicación. La solución se busca en la forma $u = \Sigma R(p) Z(z)$, para $R(p)$ se obtiene el problema

$$R'' + \frac{1}{p} R' - \lambda R = 0, \quad R(a) = 0.$$

La solución general de esta ecuación es de la forma

$$R(p) = A I_0(\sqrt{\lambda} p) + B K_0(\sqrt{\lambda} p).$$

La condición $R(a) = 0$ da $B = -A I_0'(\sqrt{\lambda} a)/K_0(\sqrt{\lambda} a)$. Para $Z(z)$ tenemos $Z'' + \lambda Z = 0$, $Z(0) = Z(l) = 0$, $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, $Z_n(z) = \sin \frac{\pi n}{l} z$.

Con el paso al límite cuando $l \rightarrow \infty$ introducimos la variable $s_m = \frac{\pi(2m+1)}{l}$, de modo que $\Delta s = \frac{2\pi}{l}$ y nuestra serie se transforma en integral.

117. La temperatura en el punto (p, z) dentro del toroide es

$$u(p, z) = u_0 + (u_1 - u_0) v(p, z),$$

donde $v(p, z) = v_{116}(p, z) + v_{116}(p, l-z)$, $v_{116}(p, z)$ es la solución del problema 116 para $V_0 = 1$.

118. Si denotamos por $u(p, \varphi, z)$ la temperatura estacionaria en el punto (p, φ, z) , entonces

$$1) \quad u(p, \varphi, z) = u_0 = \text{const}, \quad 2) \quad u(p, \varphi, z) = u(z) = u_1 \frac{z}{l}.$$

$$119. \quad u(p, z) = \pi u_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\sqrt{\lambda_m} b)}{\lambda_m [J_0(\sqrt{\lambda_m} a) + J_1(\sqrt{\lambda_m} b)]} \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} (l-z)}{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda_m} l} R_m(p),$$

donde

$$R_m(p) = J_0(\sqrt{\lambda_m} p) N_0(\sqrt{\lambda_m} a) - J_0(\sqrt{\lambda_m} a) N_0(\sqrt{\lambda_m} p),$$

λ_m es la m -ésima raíz de la ecuación

$$\frac{J_0(\sqrt{\lambda_m} a)}{N_0(\sqrt{\lambda_m} a)} = \frac{J_0(\sqrt{\lambda_m} b)}{N_0(\sqrt{\lambda_m} b)}.$$

Resolución. La solución buscada del problema de contorno

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad u|_{\rho=a} = u|_{\rho=b} = 0, \quad u|_{z=0} = u_0$$

la representamos de forma $u(\rho, z) = \sum R(\rho) Z(z)$, donde $R(\rho)$ se determina de la ecuación de Bessel

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \lambda R = 0 \quad (1)$$

con las condiciones de frontera $R(a) = 0$, $R(b) = 0$, y $Z(z)$ satisface la ecuación $Z'' - \lambda Z = 0$ y la condición

$$Z(l) = 0.$$

De (1) hallamos

$$R(\rho) = CJ_0(\sqrt{\lambda}\rho) + DN_0(\sqrt{\lambda}\rho).$$

Empleando las condiciones para $\rho=a$ y $\rho=b$, tendremos

$$R_m(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda_m}\rho) N_0(\sqrt{\lambda_m}a) - J_0(\sqrt{\lambda_m}a) N_0(\sqrt{\lambda_m}\rho),$$

donde λ_m se determina de la ecuación

$$\frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}a)}{N_0(\sqrt{\lambda_m}a)} = \frac{J_0(\sqrt{\lambda_m}b)}{N_0(\sqrt{\lambda_m}b)}.$$

Calculando, como de costumbre, la norma de la función propia $R_m(\rho)$

$$\|R_m\|^2 = \int_a^b \rho R_m^2(\rho) d\rho,$$

obtenemos:

$$\|R_m\|^2 = \frac{2}{\pi^2} \frac{J_0^2(\sqrt{\lambda_m}a) - J_0^2(\sqrt{\lambda_m}b)}{J_0^2(\sqrt{\lambda_m}b)}.$$

De la ecuación (2) hallamos:

$$Z_m(z) = A_m \frac{\sinh \sqrt{\lambda_m}(l-z)}{\sinh \sqrt{\lambda_m}l}.$$

A la función $u(\rho, z)$ la buscamos en la forma

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m R_m(\rho) \frac{\sinh \sqrt{\lambda_m}(l-z)}{\sinh \sqrt{\lambda_m}l}.$$

El coeficiente A_m se determina de la condición de frontera

$$u(\rho, 0) = u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m R_m(\rho).$$

De aquí

$$A_m = \frac{u_0}{\|R_m\|^2} \int_a^b \rho R_m(\rho) d\rho.$$

*) Véase en el cap. VII, § 2, el problema 27.

Sustituyendo $R_m(\rho)$ de la ecuación

$$R_m(\rho) = -\frac{1}{\lambda_m \rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \cdot \frac{dR_m}{d\rho} \right],$$

obtenemos

$$\begin{aligned} A_m &= -\frac{u_0}{\lambda_m \|R_m\|^2} \int_a^b \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR_m}{d\rho} \right) d\rho = \\ &= -\left[\frac{u_0}{\lambda_m \|R_m\|^2} \left(\rho \frac{dR_m}{d\rho} \right) \right]_{\rho=a}^{\rho=b} = \frac{u_0}{\lambda_m \|R_m\|^2} [aR'_m(a) - bR'_m(b)]. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} R'_m(a) &= \sqrt{\lambda_m} [J'_0(\sqrt{\lambda_m} a) N_0(\sqrt{\lambda_m} a) - J_0(\sqrt{\lambda_m} a) N'_0(\sqrt{\lambda_m} a)] = -\frac{2}{\pi a}, \\ R'_m(b) &= \sqrt{\lambda_m} [J'_0(\sqrt{\lambda_m} b) N_0(\sqrt{\lambda_m} b) - J_0(\sqrt{\lambda_m} b) N'_0(\sqrt{\lambda_m} b)] = \\ &= \sqrt{\lambda_m} \frac{N_0(\sqrt{\lambda_m} a)}{N_0(\sqrt{\lambda_m} b)} [J'_0(\sqrt{\lambda_m} b) N_0(\sqrt{\lambda_m} b) - J_0(\sqrt{\lambda_m} b) N'_0(\sqrt{\lambda_m} b)] = \\ &= -\frac{2}{\pi b} \frac{N_0(\sqrt{\lambda_m} a)}{N_0(\sqrt{\lambda_m} b)} = -\frac{2}{\pi b} \frac{J_0(\sqrt{\lambda_m} a)}{J_0(\sqrt{\lambda_m} b)}, \end{aligned}$$

aquí hemos utilizado la expresión para el wronskiano

$$J_0(x) N'_0(x) - J'_0(x) N_0(x) = \frac{2}{\pi x}.$$

Sustituyendo las expresiones de $R'_m(a)$, $R'_m(b)$ y $\|R_m\|^2$, hallamos:

$$A_m = \frac{\pi u_0}{\lambda_m} \frac{J_0(\sqrt{\lambda_m} b)}{J_0(\sqrt{\lambda_m} a) + J_0(\sqrt{\lambda_m} b)}.$$

120. Resolución. Se exige hallar la solución de la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi f,$$

donde $f(\rho, z) = \frac{f}{2\pi\rho} \delta(\rho) \delta(z - \zeta)$ (*) es la densidad volumétrica que corresponde a la carga puntiforme colocada en el punto $\rho=0$, $z=\zeta$ de modo que

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \int_0^h f(\rho, z) \rho d\rho dz = e.$$

Para $z=0$, $z=h$, $\rho=a$ deben cumplirse las condiciones de frontera
 $u=0$.

La solución se busca en la forma de la serie

(*) $\delta(\rho)$ y $\delta(z - \zeta)$ son la función δ . Véase [7], cap. III, aplicaciones.

$$u(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\rho) \operatorname{sen} \frac{\pi m}{h} z.$$

Para $R_m(\rho)$ se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR_m}{d\rho} \right) - \mu_m^2 R_m = -\frac{4e}{h\rho} \delta(\rho) \operatorname{sen} \mu_m z = -f_m,$$

donde $\mu_m = \frac{\pi m}{h}$ y además $R_m(a) = 0$. La solución general de la ecuación homogénea tiene la forma

$$R_m(\rho) = A_m I_0(\mu_m \rho) + B_m K_0(\mu_m \rho).$$

Variando las constantes arbitrarias A_m y B_m de la ecuación heterogénea para R_m , obtenemos

$$A'_m I_0(\mu_m \rho) + B'_m K_0(\mu_m \rho) = 0, \quad A'_m I'_0(\mu_m \rho) + B'_m K'_0(\mu_m \rho) = -\frac{f_m}{\mu_m}.$$

De aquí hallamos

$$B'_m = \frac{f_m I_0(\mu_m \rho)}{\mu_m W_m}, \quad W_m = I'_0(x) K_0(x) - I_0(x) K'_0(x),$$

que es el determinante de Wronski igual a $W = \frac{1}{x}$ ($x = \mu_m \rho$), de modo que

$$B'_m = \rho f_m I_0(\mu_m \rho), \quad A'_m = -\rho f_m K_0(\mu_m \rho).$$

Determinando de aquí mediante la integración A_m y B_m , tendremos

$$R_m(\rho) = A_m^0 I_0(\mu_m \rho) + B_m^0 K_0(\mu_m \rho) +$$

$$+ \int_0^\rho s [I_0(\mu_m s) K_0(\mu_m s) - I_0(\mu_m s) K_0(\mu_m s)] f_m(s) ds,$$

donde A_m^0 y B_m^0 son constantes.

De la condición $|R_m(0)| < \infty$ se deduce $B_m^0 = 0$. La condición para $\rho = a$ da:

$$A_m^0 = -\frac{1}{I_0(a\mu_m)} \int_0^a [I_0(s\mu_m) K_0(a\mu_m) - I_0(a\mu_m) K_0(s\mu_m)] s f_m(s) ds,$$

de modo que

$$R_m(\rho) = -\frac{K_0(a\mu_m) I_0(\rho\mu_m)}{I_0(a\mu_m)} \int_0^a I_0(s\mu_m) s f_m(s) ds +$$

$$+ K_0(\rho\mu_m) \int_0^a I_0(s\mu_m) s f_m(s) ds + I_0(\rho\mu_m) \int_0^a K_0(s\mu_m) s f_m(s) ds,$$

6

$$R_m(\rho) = \frac{4e}{h} \frac{I_0(a\mu_m) K_0(\rho\mu_m) - K_0(a\mu_m) I_0(\rho\mu_m)}{I_0(a\mu_m)} \operatorname{sen} \mu_m z,$$

dado que

$$\int_0^a K_0(s\mu_m) s f_m(s) ds = \frac{4e}{h} \operatorname{sen} \mu_m z \int_0^a K_0(s\mu_m) \delta(s) ds = 0,$$

ya que el punto $s=0$ está fuera de la región de integración

$$\int_0^{\rho} I_0(s\mu_m) sf_m(s) ds = \int_0^a I_0(s\mu_m) sf_m(s) ds = \\ = \frac{4e}{h} \operatorname{sen} \mu_m \zeta \int_0^a \delta(s) ds = \frac{4e}{h} \operatorname{sen} \mu_m \zeta.$$

De esta manera el potencial de la carga puntiforme e colocada sobre el eje del cilindro $\rho \leq a$, $0 \leq z \leq h$ con las paredes conductoras, se representa mediante la serie

$$u(\rho, z) = \frac{4e}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{\pi m}{h} a\right) K_0\left(\frac{\pi m}{h} \rho\right) - K_0\left(\frac{\pi m}{h} a\right) I_0\left(\frac{\pi m}{h} \rho\right)}{I_0\left(\frac{\pi m}{h} a\right)} \times \\ \times \operatorname{sen} \frac{\pi m}{h} \zeta \operatorname{sen} \frac{\pi m}{h} z.$$

En el límite cuando $a \rightarrow \infty$ obtenemos la expresión para el potencial de la carga puntiforme dentro de la capa entre los planos conductores $z = 0$ y $z = h$:

$$u(\rho, z) = \frac{4e}{h} \sum_{m=1}^{\infty} K_0\left(\frac{\pi m}{h} \rho\right) \operatorname{sen} \frac{\pi m}{h} \zeta \operatorname{sen} \frac{\pi m}{h} z.$$

Realizamos ahora el paso límite cuando $h \rightarrow \infty$. Con esto obtenemos:

$$u = \frac{4e}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} K_0(\mu_m \rho) \operatorname{sen} \mu_m \zeta \sin \mu_m z \Delta \mu \rightarrow \frac{4e}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\mu \rho) \operatorname{sen} \mu \zeta \operatorname{sen} \mu z d\mu = \\ = \frac{2e}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\mu \rho) [\cos \mu(z - \zeta) - \cos \mu(z + \zeta)] d\mu. \quad (1)$$

Tomando en consideración la fórmula

$$\int_0^{\infty} K_0(\mu \rho) \cos \mu z d\mu = \frac{\pi}{2(\rho^2 + z^2)^{1/2}},$$

obtenemos para el potencial la siguiente expresión

$$u = \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z + \zeta)^2}},$$

lo que coincide con la expresión conocida para el potencial de la carga puntiforme dentro del semiespacio. Para obtener de (1) el potencial de la carga en el espacio no acotado introducimos una variable nueva

$$z' = z - \zeta,$$

lo que da:

$$u = \frac{2e}{\pi} \int_0^\infty K_0(\mu\rho) \cos \mu z' d\mu - \frac{2e}{\pi} \int_0^\infty K_0(\mu\rho) \cos \mu(z' + 2\zeta) d\mu = \\ = \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z')^2}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z' + 2\zeta)^2}} \xrightarrow{\text{cuando } \zeta \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z')^2}}$$

121. El potencial de la carga puntiforme colocada en el punto $(0, \zeta)$ dentro del tubo semiacotado $\rho < a, z > 0$ con las paredes conductoras, sobre las cuales se mantiene un potencial nulo, se determina por la expresión

$$u(\rho, z) = \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z - \zeta)^2}} - \frac{e}{\sqrt{\rho^2 + (z + \zeta)^2}} - \frac{4e}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(a\mu) I_0(\rho\mu)}{I_0(a\mu)} \sin \mu\zeta \sin \mu z d\mu.$$

122. Sea que la carga e está en el punto (r', φ', ζ) dentro del cilindro circular infinito con las paredes conductoras; el potencial del campo eléctrico, excitado por esta carga, se da por la serie

$$u(r, \varphi, z) = \frac{4e}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r\right) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r'\right) - \frac{\mu_m^{(n)} |z - \zeta|}{a}}{\mu_m^{(n)} [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2} e^{-\frac{\mu_m^{(n)} |z - \zeta|}{a}} \cos n(\varphi - \varphi'), \quad (1)$$

donde $\mu_m^{(n)}$ es la raíz de la ecuación $J_n(\mu) = 0$; a , el radio del cilindro.

Si la carga está sobre el eje del cilindro ($r' = 0$), entonces

$$u(r, \varphi, z) = \frac{4e}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{a} r\right) - \frac{\mu_m^{(0)} |z - \zeta|}{a}}{\mu_m^{(0)} J_1^2(\mu_m^{(0)})} e^{-\frac{\mu_m^{(0)} |z - \zeta|}{a}}.$$

Solución. Para construir la función de manantial resolvemos mediante el método de separación de variables la ecuación heterogénea

$$\Delta u = -4\pi\rho \quad (2)$$

con la condición de frontera

$$u|_{\Sigma} = 0,$$

donde Σ es la superficie del cilindro. Con esto consideraremos que la sección transversal del cilindro es una región arbitraria S con frontera C .

Sean $\{\psi_n(M)\}$ y $\{\lambda_n\}$ las funciones propias y los valores propios del problema

$$\Delta_2 \psi + \lambda \psi = 0 \quad \text{dentro de } S, \quad \psi = 0 \quad \text{sobre } C.$$

Buscaremos la solución en la forma

$$u(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \psi_n(M). \quad (3)$$

Desarrollando con esto $\rho(M)$ también en serie, obtenemos

$$\rho(M, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n(z) \psi_n(M),$$

donde

$$u_n(z) = \frac{1}{\|\Psi_n\|^2} \int_S u(M', z) \Psi_n(M') d\sigma_{M'},$$

$$\rho_n(z) = \frac{1}{\|\Psi_n\|^2} \int_S \rho(M', z) \Psi_n(M') d\sigma_{M'},$$

donde

$$\|\Psi_n\|^2 = \int_S \Psi_n^*(M') d\sigma_{M'}.$$

De la ecuación (2) se deduce la ecuación para $u_n(z)$

$$u_n'' - \lambda_n u_n = -4\pi \rho_n \quad (\lambda_n > 0),$$

además $u_n \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \pm\infty$.

De aquí hallamos

$$u_n(z) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-V\lambda_n|z-\zeta|}}{2\sqrt{\lambda_n}} \rho_n(\zeta) d\zeta$$

o

$$u_n(z) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_S \rho(M', \zeta) e^{-V\lambda_n|z-\zeta|} \frac{\Psi_n(M')}{2\sqrt{\lambda_n}} d\sigma_{M'} d\zeta.$$

Sustituyendo esta expresión en la fórmula (3) y cambiando formalmente el orden de la suma y de la integración, obtenemos

$$u(M, z) = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_S \rho(M', \zeta) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M) \Psi_n(M')}{2\sqrt{\lambda_n} \|\Psi_n\|^2} e^{-V\lambda_n|z-\zeta|} \right\} d\sigma_{M'} d\zeta.$$

De aquí se deduce que la función de manantial puntiforme es igual a

$$G(M, M', z, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n(M) \Psi_n(M')}{2\sqrt{\lambda_n} \|\Psi_n\|^2} e^{-V\lambda_n|z-\zeta|}.$$

El potencial de la carga e , obviamente, es igual a $u = 4\pi e G$. Si el cilindro es circular (S es un círculo), entonces

$$\psi_n = \Psi_{m,n}(r, \varphi) = J_m\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} r\right) \begin{cases} \cos n\varphi, & \lambda_n = \lambda_{m,n} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a}\right)^2, \\ \sin n\varphi, & \end{cases}$$

$$\|\psi_n\|^2 = \|\Psi_{m,n}\|^2 = \frac{\pi}{2} \varepsilon_n a^2 [J'_m(\mu_m^{(n)})]^2,$$

donde

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 2 & \text{para } n=0, \\ 1 & \text{para } n \neq 0. \end{cases}$$

Sustituyendo estas expresiones en la fórmula de G , obtenemos la solución del problema en la forma (1). De un modo análogo puede ser hallada la solución del problema sobre la carga puntiforme dentro del cilindro.

4. Problemas que exigen la utilización de las funciones esféricas y cilíndricas

123. La solución del primer problema interior de contorno para la esfera

$$\Delta u = 0 \quad \text{para} \quad r < a, \quad u|_{r=a} = f(\theta, \varphi)$$

puede ser representada en forma de serie

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n Y_n(\theta, \varphi), \quad (1)$$

donde

$$Y_n = \sum_{k=0}^n (A_{nk} \cos k\varphi + B_{nk} \sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta), \quad (2)$$

$$A_{0,0} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$A_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta) \cos k\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \quad n > 0, \quad (3)$$

$$B_{nk} = \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta) \sin k\varphi \sin \theta d\theta d\varphi.$$

124. La solución del primer problema exterior de contorno para la esfera

$$\Delta u = 0 \quad \text{para} \quad r > a, \quad u|_{r=a} = f(\theta, \varphi)$$

se representa por la serie

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} (A_{nk} \cos k\varphi + B_{nk} \sin k\varphi) P_n^{(k)}(\cos \theta)$$

donde A_{nk} y B_{nk} son los coeficientes que se determinan por las fórmulas (3) del problema 123.

125. a) La solución del segundo problema interior de contorno para la esfera

$$\Delta u = 0 \quad \text{para} \quad r < a, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{r=a} = f(\theta, \varphi);$$

$f(\theta, \varphi)$ es la función que satisface la condición

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 0,$$

y que tiene la forma

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{na^{n-1}} Y_n(\theta, \varphi) + \text{const} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{h=0}^n \frac{r^n}{na^{n-1}} (A_{nh} \cos k\varphi + B_{nh} \sin k\varphi) P_n^{(h)}(\cos \theta) + \text{const}, \end{aligned}$$

donde A_{nh} y B_{nh} se determinan por las fórmulas (3) del problema 123.

b) La solución del segundo problema exterior de contorno para la esfera

$$\Delta u = 0 \quad \text{para } r > a, \quad \frac{\partial u}{\partial u} \Big|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \quad \text{o} \quad -\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = f(\theta, \varphi)$$

(n es la normal exterior) es de la forma

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+2}}{(n+1)r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi) + \text{const.}$$

Para el caso particular

$$f(\theta, \varphi) = A \cos \theta$$

obtenemos

$$Y_n(\theta, \varphi) = 0 \quad \text{para } n > 1, \quad Y_1(\theta, \varphi) = A \cos \theta,$$

$$u(r, \theta) = Ar \cos \theta \quad (r < a),$$

$$u(r, \theta) = \frac{Aa^3}{2r^2} \cos \theta \quad (r > a).$$

126. La intensidad del campo electrostático, como de costumbre, se expresa mediante el potencial u ,

$$E = -\text{grad } u,$$

que es igual a

$$u = V_1 - \frac{V_2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \frac{2n+1}{n+1} P_{n-1}(0) P_n(\cos \theta), \quad r < a,$$

donde a es el radio de la esfera; P_n , el polinomio de Legendre de n -ésimo orden.

$$P_n(0) = \begin{cases} \frac{(-1)^v 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2v-1)}{v! 2^v} & \text{para } n = 2v, \\ 0 & \text{para } n = 2v+1. \end{cases}$$

Indicación. Para calcular la integral

$$\int_0^1 P_n(x) dx$$

utilizar:

1) la fórmula recurrente

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1} [P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)],$$

2) las fórmulas

$$P_{n+1}(0) - P_{n+1}(0) = P_{n+1}(0) \frac{2n+1}{n+1}, \quad P_{2v}(0) = (-1)^v \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2v-1)}{v! 2^v},$$

$$P_{2v+1}(0) = 0.$$

127. La carga está en el punto $r = r_0$, $\theta = 0$; donde r , θ , son las coordenadas esféricas; el origen de las coordenadas está en el punto $r = 0$.

a) Si $r_0 < a$, donde a es el radio de la esfera, entonces el potencial es

$$u(r, \theta) = \begin{cases} e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r^n}{r_0^{n+1}} - \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} \right) P_n(\cos \theta) & \text{para } r < r_0, \\ e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0^n}{r^{n+1}} - \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} \right) P_n(\cos \theta) & \text{para } r > r_0, \end{cases}$$

y la densidad de las cargas superficiales sobre la esfera es

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{r_0^n}{a^{n+2}} P_n(\cos \theta).$$

b) Si $r_0 > a$, entonces el potencial es

$$u(r, \theta) = \begin{cases} e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r^n}{r_0^{n+1}} - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1} r_0^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) & \text{para } r < r_0, \\ e \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0^n}{r^{n+1}} - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1} r_0^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta) & \text{para } r > r_0, \end{cases}$$

y la densidad de las cargas superficiales sobre la esfera es igual a

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{a^{n-1}}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Indicación. Se debe utilizar el desarrollo

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\cos \theta) & \text{para } r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n P_n(\cos \theta) & \text{para } r > r_0, \end{cases}$$

donde R es la distancia entre el punto de observación (r, θ) y la carga $(r_0, 0)$.

El potencial de la carga puntiforme se busca en forma de suma

$$u(r, \theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r < a, \quad (1)$$

$$u(r, \theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r > a. \quad (2)$$

Los coeficientes A_n y B_n se determinan de la condición de frontera $u|_{r=a} = 0$:

$$A_n = -e \frac{r_0^n}{a^{n+1}}, \quad B_n = -e \frac{a^n}{r_0^{n+1}}.$$

La densidad de las cargas superficiales se halla según la fórmula

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a}. \quad (3)$$

Además, en el caso a) se debe utilizar la fórmula (2); en el caso b), la fórmula (1). 128. Sea que la esfera de radio a , sobre la cual está distribuida la carga e_1 , está situada en el campo de la carga puntiforme e que se encuentra en el punto $(r_0, 0)$.

El potencial del campo es

$$u = \frac{e}{R} + \frac{aV_0}{r} - e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

y la densidad superficial de las cargas inducidas sobre la esfera se da por la expresión

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{a^{n-1}}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \frac{V_0}{4\pi a}, \quad V_0 = \frac{e_1}{a} + \frac{e}{r_0}.$$

Indicación. La solución como siempre se busca en la forma

$$u(r, \theta) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta).$$

La condición de frontera $u|_{r=a} = V_0$ da:

$$u(a, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ e \frac{a^n}{r_0^{n+1}} + B_n \right\} P_n(\cos 0) = V_0 = \text{const.}$$

De aquí hallamos

$$B_0 = V_0 - e \frac{1}{r_0}, \quad B_n = -e \frac{a^n}{r_0^{n+1}}.$$

Utilizando el desarrollo

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\cos \theta),$$

hallamos:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_{r=a}.$$

Para determinar V_0 sirve la condición de normalización

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma a^2 \sin \theta d\theta d\varphi = e_1.$$

129. Sean (r, θ, φ) las coordenadas esféricas; $r = 0$ el centro de la esfera; a , su radio; $u = u(r, \theta, \varphi)$, el potencial de velocidad

$$a) \quad u = u(r, \theta) = \frac{v_0 a^3}{2r^2} P_1(\cos \theta) = \frac{v_0 a^3}{2r^2} \cos \theta,$$

$$b) \quad u = u(r, \theta) = -v_0 \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) P_1(\cos \theta).$$

Indicación. La solución se busca en la forma

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+2}}{(n+1)r^{n+1}} Y_n(\theta, \varphi),$$

donde $Y_n(\theta, \varphi)$ es una función esférica. De la condición de frontera para $r = a$ hallamos:

$$Y_n(\theta, \varphi) = \begin{cases} 0 & \text{para } n \neq 1, \\ \frac{v_0}{2} P_1(\cos \theta). \end{cases}$$

Compárase con las soluciones de los problemas 74 y 75 de este capítulo.

130. El potencial del campo deformado es igual a

$$u = \begin{cases} u_1 = -E_0 \frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} r \cos \theta & \text{dentro de la esfera } (r < a), \\ u_2 = -E_0 \left[1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] r \cos \theta & \text{fuera de la esfera,} \end{cases}$$

donde a es el radio de la esfera; $u = u_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$, el potencial del campo exterior al no existir la esfera. El campo es $E = (0, 0, E_z)$, donde

$$E_z = -\frac{\partial u}{\partial z} = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon_2}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} E_0 & \text{dentro de la esfera} \\ \left[1 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{2a^3}{r^3} \right] E_0 & \text{fuera de la esfera.} \end{cases}$$

Indicación. Véase [7], complemento, parte II, § 3.

131. a) Si la carga está fuera de la esfera en el punto $(r_0, 0)$, $r_0 > a$, entonces el potencial del campo eléctrico es igual a

$$u(r, 0) = \begin{cases} u_1(r, 0) & \text{para } r < a, \\ u_2(r, 0) & \text{para } r > a, \end{cases}$$

donde

$$u_1(r, 0) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

$$\sigma_2 = \sigma|_{r=b} = \frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(r_0^{2n+1} - a^{2n+1})}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \frac{b^{n-1}}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Indicación. La solución se debe buscar de forma

$$u(r, 0) = \frac{e}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta),$$

A_n y B_n se determinan de las condiciones $u = 0$ para $r = a$ y $r = b$.

137. a) La intensidad del campo de una carga puntiforme e colocada en el punto $r = r_0$, $\theta = 0$ fuera de la esfera $r_0 > b$, $E = -\text{grad } u$, donde el potencial

$$u = \begin{cases} u_1 & \text{para } r < a, \\ u_2 & \text{para } a < r < b, \\ u_3 & \text{para } r > b, \end{cases}$$

se determina por las fórmulas

$$u_1(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r < a,$$

$$u_2(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{r}{a} \right)^n + C_n \left(\frac{b}{r} \right)^{n+1} \right] P_n(\cos \theta) \quad \text{para } a < r < b,$$

$$u_3(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{b}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) + \frac{e}{\epsilon_3 R} \quad \text{para } r > b,$$

donde $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}$ es la distancia entre el punto de observación $(r, 0)$ y la carga, y

$$B_n = \frac{ea^n \delta_{23} [n\epsilon_3 + (n+1)]}{r_0^{n+1} [1 + n(n+1)] \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+1} (\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_3 - \epsilon_2) \delta_{12} \delta_{23}},$$

$$A_n = (2n+1) \epsilon_2 \delta_{12} B_n,$$

$$C_n = \left(\frac{a}{b} \right)^{n+1} (\epsilon_2 - \epsilon_1) \delta_{12} n B_n, \quad D_n = \left(\frac{b}{a} \right)^n B_n + C_n - \frac{eb^n}{\epsilon_3 r_0^{n+1}},$$

$$\delta_{i, i+1} = \frac{1}{n\epsilon_i + (n+1)\epsilon_{i+1}} \quad (i = 1, 2).$$

Análogamente se resuelve el problema si la carga puntiforme está dentro de la esfera $r_0 < a$ ó $a < r_0 < b$. Las expresiones correspondientes para el potencial no las damos.

138. Si el campo exterior E_0 está dirigido a lo largo del eje polar z de modo que su potencial es

$$V_0 = -E_0 z = -E_0 r P_1(\cos \theta) \quad [P_1(x) = x],$$

133. Si la esfera es de conductibilidad ideal ($\sigma_1 = \infty$) y el manantial de la corriente eléctrica de potencia I está en el punto $(r_0, 0)$, $r_0 > a$, del medio que posee una conductibilidad σ_2 , entonces

$$j_1 = 0, \quad j_2 = -\sigma_2 \operatorname{grad} u_2,$$

donde

$$u_2(r, \theta) = -\frac{I}{4\pi\sigma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \frac{I}{4\pi\sigma_2 R} \quad (r > a).$$

134. La temperatura $u(r, 0)$ fuera de la esfera es igual a (el manantial en el punto $(r_0, 0)$)

$$u(r, 0) = \frac{Q}{4\pi k R} + \frac{Q}{4\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta),$$

donde k es el coeficiente de la conductibilidad térmica; $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos \theta}$; a , el radio de la esfera.

135. La temperatura dentro de la esfera $r < a$ es igual a

$$u(r, 0) = \frac{Q}{4\pi k R} + \frac{Q}{4\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)-ah}{n+ah} \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} P_n(\cos \theta),$$

donde h es el coeficiente de intercambio de calor, el manantial está en el punto $(r_0, 0)$.

Indicación. Para $r = a$ tiene lugar la condición

$$k \frac{\partial u}{\partial r} + hu = 0.$$

La solución se debe buscar, como de costumbre, de forma

$$u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi k R} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta);$$

utilizar el desarrollo de $\frac{1}{R}$ y determinar A_n de la condición de frontera.

136. El potencial de la carga puntiforme e entre las esferas concéntricas ($a \ll r \ll b$) es igual a

$$u(r, 0) = \frac{e}{R} - e \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{r_0^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} + \frac{b^{2n+1} - r_0^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} \right] P_n(\cos \theta).$$

Para $a \rightarrow 0$ de aquí obtenemos la solución del problema 127 a); para $b \rightarrow \infty$, la solución del problema 127 b).

La densidad de las cargas inducidas es

$$\sigma_1 = \sigma |_{r=a} = -\frac{e}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(b^{2n+1} - r_0^{2n+1})}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} \frac{a^{n-1}}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta),$$

$$u_2(r, 0) = e \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \frac{e}{\varepsilon_2} \frac{1}{R}.$$

Indicación. La solución se busca de forma

$$u_1(r, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (r < a),$$

$$u_2(r, 0) = \frac{e}{\varepsilon_2} \frac{1}{R} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) \quad (r > a).$$

donde A_n y B_n son los coeficientes que se determinan de la condición de conjugación

$$u_1 = u_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial r} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial r} \quad \text{para } r = a.$$

b) Si $r_0 < a$, entonces

$$u_1(r, 0) = e \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} P_n(\cos \theta) + \frac{e}{\varepsilon_1 R} \quad \text{para } r < a,$$

$$u_2(r, 0) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n\varepsilon_1 + (n+1)\varepsilon_2} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r > a.$$

Indicación. Véase el problema 131 a).

132. La densidad de la corriente eléctrica es

$$j_1 = -\sigma_1 \operatorname{grad} u_1 \quad \text{para } r < a, \quad j_2 = -\sigma_2 \operatorname{grad} u_2 \quad \text{para } r > a.$$

El manantial de la corriente eléctrica está en el punto $(r_0, 0)$.

a) Si $r_0 < a$, entonces

$$u_1 = \frac{I}{4\pi} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2} \frac{r_0^n r^n}{a^{2n+1}} P_n(\cos \theta) + \frac{I}{4\pi\sigma_1 R} \quad (r < a),$$

$$u_2 = \frac{I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2} \frac{r_0^n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (r > a).$$

b) Si $r_0 > a$, entonces

$$u_1(r, 0) = \frac{I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n(\cos \theta) \quad (r < a),$$

$$u_2(r, 0) = \frac{I}{4\pi} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2} \frac{a^{2n+1}}{r_0^{n+1} r^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \frac{I}{4\pi\sigma_2 R} \quad (r > a).$$

entonces la solución del problema es de la forma

$$V = V_1 = ArP_1(\cos \theta) \quad \text{para } r \leq a,$$

$$V = V_2 = \left(Br + \frac{C}{r^2} \right) P_1(\cos \theta) \quad \text{para } a \leq r \leq b, \text{ (dentro de la cubierta),}$$

$$V = V_3 = \left(-E_0 r + \frac{A}{r^2} \right) P_1(\cos \theta) \quad \text{para } r \geq b,$$

donde A, B, C, D son los coeficientes iguales a

$$A = -\frac{9E_0H}{\Delta}, \quad B = -\frac{3(2H+1)}{\Delta} E_0, \quad C = -\frac{3(H-1)}{\Delta} E_0 a^3,$$

$$D = E_0 b^3 + \left[1 + \frac{(2H+1)b^3}{(H-1)a^3} \right], \quad H = \frac{e_2}{e_1}, \quad \Delta = 9H - 2(H-1)^2 \times \\ \times \left[\left(\frac{a}{b} \right)^3 - 1 \right].$$

139. Introduciendo las notaciones: a , radio de la armadura interior; b , radio de la armadura exterior del condensador; δ , distancia entre los centros de las esferas, y despreciando los términos $\delta^2, \delta^3, \delta^4$, etc., obtenemos para la densidad de las cargas superficiales sobre la armadura interior

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{eab(V_1 - V_2)}{4\pi(b-a)} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{3\delta}{b^3 - a^3} \cos \theta \right),$$

donde $V_1 - V_2$ es la diferencia de los potenciales de las armaduras. Con esto se supone que el origen del sistema esférico de coordenadas está en el centro de la esfera interior.

Indicación. Utilizar el desarrollo de la inversa de la distancia entre los puntos respecto a los polinomios de Legendre. Si $r = a$ es la armadura interior, entonces la ecuación aproximada (con la diferencia hasta los términos de orden δ^2 y mayores) de la armadura exterior puede ser escrita de forma

$$r = b + \delta P_1(\cos \theta).$$

140. Si los puntos del anillo tienen las coordenadas esféricas $r = c, \theta = \alpha$, entonces el potencial en el punto (r, θ) es igual a

$$V = \frac{e}{ec} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r > c \text{ ó } \theta \neq \alpha, \quad r = c$$

y

$$V = \frac{e}{ec} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{c} \right)^n P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \theta) \quad \text{para } r < c \text{ ó } \theta \neq \alpha, \quad r = c.$$

Indicación. Primero se busca el potencial en el punto $(r_0, 0)$ sobre el eje polar z

$$V(r_0, 0) = \frac{e}{c} \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + c^2 - 2r_0 c \cos \alpha}} = \begin{cases} \frac{e}{ec} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c}{r_0} \right)^{n+1} P_n(\cos \alpha), & r_0 > c, \\ \frac{e}{ec} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{c} \right)^n P_n(\cos \alpha), & r_0 < c. \end{cases}$$

141. Si $a \cos \alpha > b$, entonces el potencial entre el anillo y la esfera, más exactamente dentro de la región $b < r < a$, se da por la fórmula

$$V(r, 0) = \frac{2\pi\varkappa}{e_1} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \alpha) \sin \alpha \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^n - \frac{n(e_2 - e_1) b^{2n+1}}{a^n [n(e_2 + e_1) + e_1] r^{n+1}} \right\} P_n(\cos 0),$$

donde $\varkappa = \frac{e}{2\pi a \sin \alpha}$; e , es la carga completa del anillo. El origen de las coordenadas está en el centro de la esfera.

Indicación. Utilizar la solución del problema 140 sobre el potencial del anillo cargado, cuyos puntos se dan en coordenadas esféricas $r = a$, $\theta = \alpha$. La solución se busca en la forma de la suma

$$V(r, 0) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{r}{b} \right)^n P_n(\cos \theta) & \text{para } r < b, \\ V_a + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \left(\frac{b}{r} \right)^{n+1} P_n(\cos \theta) & \text{para } r > b, \end{cases}$$

donde A_n y B_n son los coeficientes que se determinan de las condiciones de conjugación para $r = b$, y V_a es el potencial del anillo del problema 140.

142. Sea que el origen de las coordenadas está en el centro del anillo y de la esfera, el eje polar está dirigido perpendicularmente al plano del anillo. Entonces, tendremos para el potencial la expresión (a es el radio del anillo)

$$V(r, \theta) = \begin{cases} V_1(r, 0) & \text{para } r < a \quad \text{o} \quad r = a, \quad 0 \neq \frac{\pi}{2}, \\ V_2(r, 0) & \text{para } b > r > a \quad \text{o} \quad r = a, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

donde

$$V_1(r, 0) = \frac{e}{\varepsilon a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^{2n} - \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+1} \left(\frac{r}{b} \right)^{2n} \right] P_{2n}(\cos \theta),$$

$$V_2(r, 0) = \frac{e}{\varepsilon a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{2n+1} - \left(\frac{a}{b} \right)^{2n+1} \left(\frac{r}{b} \right)^{2n} \right] P_{2n}(\cos \theta).$$

La componente normal de la intensidad del campo eléctrico sobre la esfera $r = b$ es igual a

$$E_r = - \frac{\partial V_2}{\partial r} \Big|_{r=b} = \frac{e}{ab\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} (4n+1) P_{2n}(\cos \theta).$$

Aquí ϵ_0 es la constante dieléctrica de la sustancia que llena la esfera,
 $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2n-2) \cdot 2n$, $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

Indicación. Se debe utilizar la solución del problema 140 sobre el potencial del anillo cargado, a saber: si el origen del sistema esférico de coordenadas está en el centro del anillo sobre el que está distribuida la carga e , entonces el potencial en cualquier punto (r, θ) es (véase el problema 140 para $\alpha = \frac{\pi}{2}$)

$$V_a(r, \theta) = \begin{cases} \frac{e}{\epsilon_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(0) P_n(\cos \theta) & \text{para } r > a \text{ ó } r = a, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{e}{\epsilon_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(0) P_n(\cos \theta) & \text{para } r < a \text{ ó } r = a, \theta \neq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

además

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

La solución del problema planteado se debe buscar en forma de suma

$$V = V_a + V_{lu},$$

donde V_{lu} es el potencial de las cargas inducidas sobre la esfera, igual a

$$V_{lu} = \frac{e}{\epsilon_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \left(\frac{r}{b}\right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta),$$

A_{2n} se halla de la condición $V = 0$ para $r = b$.

143. Si a es el radio de la esfera en el centro en que se ha puesto el origen del sistema esférico de coordenadas, entonces el potencial de la corriente en todos los puntos interiores de la esfera se expresa por la fórmula

$$V(r, \theta) = \frac{I}{2\pi a \sigma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+3}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta).$$

Indicación. En virtud de la simetría del problema $V=0$ para $\theta = \frac{\pi}{2}$,

y por eso se puede resolver el problema para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, haciendo

$$V(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1} P_{2n+1}(\cos \theta).$$

Los coeficientes A_{2n+1} se deben determinar de la condición

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma \int_0^\delta \left(-\frac{\partial V_\delta}{\partial r}\right) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = I, \quad \frac{\partial V_\delta}{\partial r} \Big|_{\theta=\delta} = 0.$$

144. Supongamos que la carga puntiforme está en el origen de las coordenadas, y que $z = a$ y $z = b$ son los planos que acotan la placa; ϵ_2 , la constante dieléctrica de la placa; ϵ_1 , la constante dielectrénica del espacio.

El potencial del campo dentro de la región $z > b$ es igual a

$$V(\rho, z) = \frac{e(1-\beta^2)}{\epsilon_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{\sqrt{(z+2nh)^2 + \rho^2}},$$

donde

$$\beta = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1}, \quad \rho^2 = x^2 + y^2, \quad h = b - a.$$

Resolución. Se requiere hallar la función

$$V(\rho, z) = \begin{cases} V_1(\rho, z) & \text{para } -\infty < z < a \\ V_2(\rho, z) & \text{para } a < z < b \\ V_3(\rho, z) & \text{para } b < z < +\infty \end{cases} \quad \begin{array}{l} (\text{debajo de la placa}), \\ (\text{en la placa}), \\ (\text{encima de la placa}), \end{array}$$

armónica en todas partes excepto en el punto $\rho = 0, z = 0$, donde V_1 tiene una singularidad del tipo $\frac{e}{\epsilon_1 r}$, y que satisface para $z = a$ y $z = b$ las condiciones comunes de conjugación

$$V_1 = V_2, \quad \epsilon_2 \frac{\partial V_1}{\partial z} = \epsilon_1 \frac{\partial V_2}{\partial z} \quad \text{para } z = a;$$

$$V_2 = V_3, \quad \epsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial z} = \epsilon_1 \frac{\partial V_3}{\partial z} \quad \text{para } z = b.$$

Dado que la región no es acotada, entonces la solución se debe buscar en forma de integral, partiendo del desarrollo

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda|z|} d\lambda \quad *) \quad (1)$$

suponiendo

$$V_1(\rho, z) = \frac{e}{\epsilon_1} \left[\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda|z|} d\lambda + \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{\lambda z} d\lambda \right],$$

$$V_2(\rho, z) = \frac{e}{\epsilon_1} \left[\int_0^\infty B(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{\lambda z} d\lambda \right],$$

$$V_3(\rho, z) = \frac{e}{\epsilon_1} \int_0^\infty D(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z} d\lambda.$$

Todas las integrales, excepto la última, deben permanecer finitas para $\rho \rightarrow 0$ y $z \rightarrow 0$; además de eso

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} V_1 = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} V_3 = 0.$$

*) Véase [7], pág. 750.

Las condiciones de conjugación para $z = a$ y $z = b$ dan:

$$A(\lambda) = (\beta + 1) C(\lambda) - \beta e^{-2a\lambda}, \quad B(\lambda) = \beta e^{2a\lambda} C(\lambda) + \beta - 1,$$

$$C(\lambda) = \frac{\beta e^{-2\lambda b}}{1+\beta} D(\lambda), \quad D(\lambda) = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2 e^{-2\lambda b}}$$

de modo que

$$V_3 = \frac{e(1-\beta^2)}{\sigma_1} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z}}{1-\beta^2 e^{-2\lambda b}} d\lambda.$$

Para calcular esta integral desarollamos $\frac{1}{1-\beta^2 e^{-2\lambda b}}$ en serie con respecto a las potencias $\beta^2 e^{-2\lambda b}$

$$V_3 = \frac{e(1-\beta^2)}{\sigma_1} \left\{ \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z} d\lambda + \beta^2 \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda(z+2b)} d\lambda + \dots \right\},$$

de donde, utilizando la fórmula (1), obtenemos el resultado en forma de serie que se dio más arriba.

145. El potencial sobre la superficie terreste para $z = 0$ puede ser representado de dos formas

$$V(\rho, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \int_0^\infty \frac{1-\beta e^{-2\lambda b}}{1+\beta e^{-2\lambda b}} J_0(\lambda\rho) d\lambda$$

6

$$V(\rho, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left[\frac{1}{\rho} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n}{\sqrt{4h^2 n^2 + \rho^2}} \right], \quad (1)$$

donde

$$\beta = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}.$$

Si en los puntos $x = a$ y $x = -a$ se han colocados dos electrodos, y, además, a través del primer electrodo fluye una corriente I y a través del segundo, otra $-I$, entonces

$$V(\rho, 0) = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{\sqrt{4h^2 n^2 + R_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{4h^2 n^2 + R_2^2}} \right] \right\}, \quad (2)$$

donde

$$R_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}.$$

Indicación. La solución se busca en la forma

$$V_1 = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \left[\int_0^\infty J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z} d\lambda + \int_0^\infty A(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z} d\lambda + \right. \\ \left. + \int_0^\infty B(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{\lambda z} d\lambda \right]$$

dentro de la región $0 \leq z \leq h$,

$$V_2 = \frac{I}{2\pi\sigma_2} \int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{-\lambda z} d\lambda \quad \text{dentro de la región } z \geq a.$$

Los coeficientes del desarrollo $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ y $C(\lambda)$ se determinan de dos condiciones de conjugación para $z = h$ y la condición $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ para $z = 0$, $\rho \neq 0$. El paso de la integral a la suma se realiza análogamente a lo hecho en el problema 144.

La fórmula (2) se obtiene de la (1) mediante el principio de superposición. 146. Sobre la superficie terrestre el potencial es igual a

$$V(x, y, 0) = V_0 \frac{\operatorname{arcsinh} \alpha \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{x^2 + y^2}}}{\operatorname{arccch} \alpha}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma_t}{\sigma_a}} > 1.$$

Solución. Se exige resolver la ecuación

$$\sigma_t (V_{xx} + V_{yy}) + \sigma_a V_{zz} = 0$$

en el semiespacio $z \geq h$ con la condición de frontera

$$V = V_0 \quad \text{sobre la esfera} \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Haciendo $t = az$, obtenemos $V_{xx} + V_{yy} + V_{tt} = 0$ y $V = V_0$ sobre la superficie del elipsoide de revolución

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{t^2}{c^2} = 1,$$

donde $a^2 = b^2$, $c^2 = \alpha^2 a^2$. Fuera del elipsoide, sobre el plano $z = 0$, es evidente que $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$. Por eso el problema se reduce al cálculo del potencial del campo del elipsoide cargado de revolución. Su solución (véase el problema 164) es de la forma

$$V = V_0 \frac{\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s) \sqrt{c^2 + s}}}{\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 - s) \sqrt{c^2 + s}}},$$

donde λ es la coordenada elíptica. En este caso el elipsoide es alargado, por eso tienen lugar las relaciones

$$c^2 + \lambda = (c^2 - a^2) \eta^2, \quad 1 < \eta^2 < \infty, \quad c^2 + \lambda = (c^2 - a^2) \xi^2, \quad 0 < \xi^2 < 1,$$

$$\frac{\rho^2}{(c^2 - a^2)(\eta^2 - 1)} + \frac{t^2}{(c^2 - a^2)\eta^2} = 1 \quad y$$

$$\frac{\rho^2}{(c^2 - a^2)(1 - \xi^2)} + \frac{t^2}{(c^2 - a^2)\xi^2} = 1,$$

de aquí

$$t = \sqrt{c^2 - a^2} \eta \xi, \quad \rho = \sqrt{(c^2 - a^2)(1 - \xi^2)(\eta^2 - 1)}.$$

Calculando las integrales, obtenemos

$$V = V_0 \frac{\operatorname{arcth} \sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 + \lambda)^{-1}}}{\operatorname{arcth} \sqrt{(c^2 - a^2)c^{-2}}}$$

o

$$V = V_0 \frac{\operatorname{arcth} \frac{1}{\eta}}{\operatorname{arcth} \sqrt{\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}}} = V_0 \frac{\operatorname{arcth} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 1}}}{\operatorname{arcth} \alpha}.$$

Da las ecuaciones

$$t = \alpha z = a \sqrt{\alpha^2 - 1} \xi \eta, \quad \rho^2 = a^2 (\alpha^2 - 1) (1 - \xi^2) (\eta^2 - 1),$$

eliminando ξ , obtenemos

$$\frac{\rho^2}{\eta^2 - 1} + \frac{\alpha^2 z^2}{\eta^2} = a^2 (\alpha^2 - 1).$$

Para $z = 0$ de aquí se deduce

$$\eta^2 - 1 = \frac{\rho^2}{a^2 (\alpha^2 - 1)},$$

de modo que

$$V(\rho, 0) = V_0 \frac{\operatorname{arcth} \frac{a \sqrt{\alpha^2 - 1}}{\rho}}{\operatorname{arcth} \alpha}.$$

§ 5. Potenciales y sus aplicaciones

147. El potencial volumétrico de la esfera homogénea es

$$V = u(r) = \begin{cases} 2\pi\rho_0 \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) & \text{para } r < a, \\ \frac{M}{r} & \text{para } r > a, \end{cases} \quad (1)$$

donde a es el radio de la esfera; $M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^3$, su masa.

Indicación. El potencial volumétrico

$$V(M) = \int_T \frac{\rho_0}{r_{MP}} d\tau_p, \quad (2)$$

(donde T es el volumen de la esfera) es una función armónica fuera de la esfera (para $r > a$), que satisface la ecuación

$$\Delta V = -4\pi\rho \quad (3)$$

dentro de la esfera y es continua al igual que su derivada según la dirección de la normal sobre su frontera. Dado que $\rho_0 = \text{const}$, entonces el potencial posee simetría esférica.

148. *Solución.* El problema se reduce al cálculo de la integral volumétrica

$$V(r) = 2\pi\rho_0 \int_0^a \int_0^\pi \frac{\xi^2 d\xi \sin \theta d\theta}{R},$$

donde

$$R^2 = \xi^2 + r^2 - 2\xi r \cos \theta.$$

Introduciendo la nueva variable de integración R en lugar de θ y tomando en consideración que

$$R dR = r\xi \sin \theta d\theta,$$

obtenemos

$$V(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_0^a \xi \left[\int_{|r-\xi|}^{r+\xi} dR \right] d\xi.$$

Si $r > a$, entonces siempre $r > \xi$ y

$$V(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_0^a \xi \left[\int_{r-\xi}^{r+\xi} dR \right] d\xi = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{3r} = \frac{M}{r}.$$

Si $r < a$, entonces

$$V(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r} \left[\int_0^r \xi (r+\xi-r+\xi) d\xi + \int_r^a \xi (r+\xi+r-\xi) d\xi \right] = 2\pi\rho_0 \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right).$$

149.

$$a) \quad V = \begin{cases} \frac{2\pi\rho_0(b^2-a^2)}{r^2} & \text{para } r < a, \\ 2\pi\rho_0 b^2 - \frac{2\pi\rho_0}{3} \left(r^2 + \frac{2a^3}{r} \right) & \text{para } a < r < b, \\ \frac{4\pi\rho_0}{3} (b^3 - a^3) \frac{1}{r} & \text{para } r > b; \end{cases}$$

$$b) \quad V = \begin{cases} 2\pi \left[\rho_1 \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) + \rho_2 (c^2 - b^2) \right] & \text{para } r < a, \\ 2\pi\rho_2(c^2 - b^2) + \frac{4\pi}{3} \rho_1 a^3 \frac{1}{r} & \text{para } a < r < b, \\ \frac{4\pi}{3} \rho_1 \frac{a^3}{r} + 2\pi\rho_0 c^2 - \frac{2\pi\rho_0}{3} \left(r^2 + \frac{2b^3}{r} \right) & \text{para } b < r < c, \\ \frac{4\pi [\rho_2(c^3 - b^3) + a^3\rho_1]}{3r} = \frac{M_1 + M_2}{r} & \text{para } r > c. \end{cases}$$

Indicación. En virtud del principio de superposición de las soluciones de la ecuación lineal, el potencial buscado se representará en forma de la suma

$$V = V_{147} + V_{149a},$$

donde V_{147} y V_{149a} son las soluciones de los problemas 147 y 149a; c) el potencial es

$$V = \begin{cases} \frac{M(c)}{r} & \text{para } r > c, \\ \frac{M(r)}{r} + 4\pi \int_r^c \xi \rho(\xi) d\xi & \text{para } r < c, \end{cases}$$

donde

$$M(c) = 4\pi \int_0^c \rho(\xi) \xi^2 d\xi, \quad M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(\xi) \xi^2 d\xi$$

es la masa distribuida con densidad volumétrica $\rho(r)$ dentro de la esfera de radio c (o de radio r).

Si

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{para } r < a, \\ \rho_0 & \text{para } a < r < b, \end{cases}$$

entonces, de aquí directamente obtenemos la solución del problema 149 a)

$$V = \begin{cases} \frac{M}{r} & \text{para } r > b, \\ \frac{4\pi\rho_0}{3r} (r^3 - a^3) + 2\pi\rho_0 (b^2 - r^2) & \text{para } a < r < b, \end{cases}$$

donde

$$M = \frac{4\pi}{3} (b^3 - a^3) \rho_0.$$

Para $\rho = \rho_0$ dentro de la esfera de radio a ($c = a$) de la fórmula general obtenemos

$$V = \begin{cases} \frac{M}{r} & \text{para } r > a, \\ 2\pi\rho_0 \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) & \text{para } r < a, \end{cases}$$

donde $M = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0$, etc.

150. El potencial de la capa simple esférica homogénea es

$$u = \begin{cases} \frac{4\pi a^2 v_0}{r} & \text{para } r < a, \\ \frac{M}{r} & \text{para } r > a, \end{cases}$$

donde $M = 4\pi a^2 v_0$ es la masa total de la capa simple distribuida sobre la esfera.

Indicación. El potencial de la capa simple es

$$u(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{v_0}{R} \sin \theta d\theta d\phi,$$

donde $R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}$, además del cálculo directo que en este caso es sencillo, es conveniente buscar la solución de la ecuación

$$\Delta u = 0 \quad \text{para} \quad r \neq a,$$

continua en todas partes y que para $r = a$ tiene las derivadas con respecto a la normal discontinuas

$$\frac{du_2}{dr} \Big|_{r=a} - \frac{du_1}{dr} \Big|_{r=a} = 4\pi\nu_0,$$

donde u_1 es la solución de la ecuación $\Delta u = 0$ fuera de la esfera ($r > a$); u_2 , la solución dentro de la esfera ($r < a$).

151. Sea que el centro de la esfera de radio a está en el punto $x = 0, y = 0, z = b$ y $\rho = \rho_0$ es la densidad de las cargas volumétricas. El potencial del campo electrostático es igual a

$$V = \begin{cases} 2\pi\rho_0 \left(a^2 - \frac{r^2}{3} \right) - \frac{M}{r_1} & \text{para } r < a, \\ M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) & \text{para } r > a, \end{cases}$$

donde

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 a^3, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-b)^2}, \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+b)^2}.$$

Indicación. Para calcular la influencia del plano $z = 0$ de conductibilidad ideal, se debe reflejar especularmente la esfera inicial con centro en el punto $(0, 0, b)$ con respecto al plano $z = 0$. La solución en este caso se representa en forma de suma

$$V = \begin{cases} C_1 - \frac{2}{3} \pi \rho_0 r^2 - \frac{M}{r_1} & \text{para } r < a, \\ M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) & \text{para } r > a. \end{cases}$$

La constante C_1 se determina de la condición de conjugación de las soluciones para $r = a$.

152. El potencial logarítmico del círculo en el punto (r, ψ)

$$V = V(r) = \rho_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \ln \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + r^2 - 2\lambda r \cos \psi}} \lambda d\lambda d\psi$$

se calcula directamente y es igual a

$$V(r) = \begin{cases} M \left(\frac{1}{2} - \ln a - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \right) & \text{para } r < a, \\ M \ln \frac{1}{r} & \text{para } r > a. \end{cases}$$

Indicación. Para calcular las integrales se debe desarrollar la función subintegral

$$\ln \frac{1}{R} = \ln \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + r^2 - 2\lambda r \cos \psi}}$$

en la serie

$$\ln \frac{1}{R} = \begin{cases} \ln \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^n \cos n\psi & \text{fuera del círculo } r > a, \\ \ln \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^n \cos n\psi & \text{para } \lambda < r < a, \\ \ln \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^n \cos n\psi & \text{para } r < \lambda < a. \end{cases}$$

153. El potencial logarítmico de la capa simple del segmento $-a \leq x \leq a$ con densidad constante $\rho = \rho_0$

$$V(x, y) = \rho_0 \int_{-a}^{+a} \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}} d\xi$$

se calcula directamente y es igual a

$$V = \rho_0 \left\{ 2a - y \operatorname{arctg} \frac{2ay}{y^2 + x^2 - a^2} - \frac{a-x}{2} \ln [y^2 + (a-x)^2] - \frac{a+x}{2} \ln [y^2 + (a+x)^2] \right\}.$$

Indicación. Realizar la integración por partes.

154. Sea $M(x, y)$ el punto de observación; φ , el ángulo bajo que se ve el segmento $(-a, a)$ desde el punto M .

El potencial logarítmico de la capa doble del segmento

$$W(M) = v \int_{-a}^{+a} \frac{\cos \theta_{MP}}{R_{MP}} d\xi_P = vy \int_{-a}^{+a} \frac{d\xi}{R^2}$$

(R es la distancia entre M y el punto de integración P) es igual a

$$W(M) = v \left[\operatorname{arctg} \frac{x+a}{y} - \operatorname{arctg} \frac{x-a}{y} \right] = \pm v\varphi,$$

además

$$W = \begin{cases} v\varphi & \text{si } y > 0, \\ -v\varphi & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

155. El potencial de la capa simple uniformemente distribuida sobre el disco circular tiene dos representaciones analíticas:

1) la representación del potencial en la forma de desarrollo con respecto a las funciones esféricas

$$V(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} \frac{2e}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n [P_n(0) + P_{n-2}(0)] P_n(\cos \theta) - \\ \quad - \frac{2er}{a^2} P_1(\cos \theta) & \text{para } r < a, \\ \frac{2e}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} [P_n(0) - P_{n+2}(0)] P_n(\cos \theta) & \text{para } r > a; \end{cases} \quad (1)$$

2) la representación del potencial en forma de integral elíptica

$$V = \frac{\frac{2e}{\pi}}{\sqrt{r^2 - 2ar \operatorname{sen} \theta + a^2}} K \left(\sqrt{\frac{4ar \operatorname{sen} \theta}{r^2 - 2ar \operatorname{sen} \theta + a^2}} \right), \quad (2)$$

dónde $K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-x^2 \cos^2 \alpha}}$ es una integral elíptica. Aquí $e = \pi a^2 \sigma$ es la carga sumaria.

Indicación. Para deducir la fórmula (1) se calcula la magnitud del potencial sobre el eje z perpendicular al plano en que está el disco,

$$V(0, 0, z) = \frac{2e}{a^2} [\sqrt{z^2 + a^2} - z],$$

y después se halla su desarrollo con respecto a las funciones esféricas zonales. Los razonamientos ulteriores se realizan por analogía con el problema 140.

156. Elegimos el sistema de coordenadas (ρ, φ, z) con origen en el centro del círculo y el eje z perpendicular al plano en que está el bucle circular con la corriente eléctrica. El potencial vectorial tiene sólo una componente A_φ :

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{c} \oint \frac{ds}{R} = \frac{2\mu I}{c} \int_0^\pi \frac{a \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho \cos \varphi}},$$

que es igual a

$$A_\varphi = \frac{4\mu I}{ck} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K - E \right],$$

dónde μ es la permeabilidad magnética del medio; I , la intensidad completa de la corriente que fluye por el bucle,

$$k^2 = \frac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2},$$

K y E son las integrales elípticas completas de primer y segundo género

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

En largas distancias de la corriente ($k \ll 1$) tenemos:

$$A_\varphi = \frac{\pi \mu I}{8c} \sqrt{\frac{a}{\rho}} k^3 \left(1 + \frac{3}{4} k^2 + \frac{75}{128} k^4 + \dots \right).$$

Para un bucle muy pequeño $\sqrt{\rho^2 + z^2} \gg a$ nos queda:

$$A_\varphi = \frac{\pi a^2 \mu I \operatorname{sen} \theta}{cr^2}.$$

157. En las coordenadas polares (ρ, ψ) hallamos:

a) la solución del primer problema interior de contorno para el círculo

$$u = W(\rho, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2) f(\psi) d\psi}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\psi - \psi)},$$

b) la solución del problema exterior

$$u = W(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(\rho^2 - a^2) f(\psi) d\psi}{a^2 + \rho^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \psi)},$$

donde a es el radio del círculo.

Las soluciones de las ecuaciones integrales respectivas son de la forma

$$a) \quad v(s) = \frac{1}{\pi} f(s) - \frac{1}{4\pi^2 a} \int_C f(s) ds$$

donde C es la circunferencia de radio a .

$$b) \quad v(s) = -\frac{1}{\pi} f(s) + \frac{1}{4\pi^2 a} \int_C f(s) ds.$$

Indicación. a) Si el contorno C es la circunferencia de radio a , entonces

$$\frac{\cos \varphi_P \rho_a}{r_{PP_a}} = \frac{1}{2a}$$

y la ecuación para $v(s_0)$ toma la forma

$$v(s_0) + \frac{1}{2\pi a} \int_C v(s) ds = \frac{1}{\pi} f(s_0), \quad (1)$$

es decir,

$$v(s) = \frac{1}{\pi} f(s) + A. \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1), hallamos

$$A = -\frac{1}{4\pi^2 a} \int_C f(s) ds.$$

Conociendo $v(s)$, después de las transformaciones simples llegamos a la integral de Poisson.

b) Para el problema exterior de contorno la ecuación integral para $v(s_0)$ será de la forma

$$v(s_0) - \frac{1}{2\pi a} \int_C v(s) ds = -\frac{1}{\pi} f(s_0).$$

Esta tiene solución cuando $\int_C f(s) ds = 0$, en este caso $v(s) = -\frac{1}{\pi} f(s) + A$,

donde A es una constante arbitraria. Sustituyendo esta expresión en el potencial de la capa doble, no es difícil convencerse de que indeterminación de los valores de $v(s)$ no influye en la solución del problema inicial.

Si $\int_C f(s) ds \neq 0$, entonces la solución del problema exterior de Dirichlet sobre el plano se debe buscar en la forma

$$u(M) = W(M) + B,$$

donde $W(M) = \int_C \frac{\cos \Phi_{MP}}{r_{MP}} v(P) dr_P$, es el potencial logarítmico de la capa doble, y $B = \int_C f(s) ds$. En este caso la ecuación integral para $v(s_0)$ tendrá solución.

158. La solución del segundo problema de contorno

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad \text{para } \rho < a \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = f(\varphi)$$

se busca en la forma de la expresión del potencial de la capa simple

$$u = V(\rho, \varphi) = a \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \psi)}} v(\psi) d\psi + \text{const.}$$

La solución de la ecuación para $v(\varphi)$ da:

$$v(\varphi) = \frac{1}{\pi} f(\varphi).$$

159. a) La solución del primer problema de contorno $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ sobre el semiespacio $z > 0$, $u|_{z=0} = f$ se busca en forma de potencial de la capa doble

$$u(x, y, z) = W = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \Phi}{r^2} v(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$$

y se da por la fórmula

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z/(x - \xi, y - \eta)}{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}} \left(v = \frac{1}{2\pi} f \right).$$

b) La solución del segundo problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad \text{para } z > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = f$$

se busca en la forma del potencial de la capa simple

$$u(x, y, z) = V(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}}$$

y se da por la fórmula

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} + \text{const} \quad \left(\mu = \frac{1}{2\pi} f \right).$$

160. El primer problema de contorno

$$\Delta_2 u = u_{xx} + u_{yy} \quad \text{para } y > 0, \quad u|_{y=0} = f(x)$$

tiene la solución

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}.$$

Indicación. La solución se busca en forma de potencial de la capa doble

$$u = W(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} v\left(\frac{s}{z}\right) \frac{\cos \Psi_{MP}}{r_{MP}} d\zeta_P,$$

para la densidad v de que se obtiene la ecuación integral con el núcleo idénticamente igual a cero, de modo que

$$v\left(\frac{s}{z}\right) = \frac{1}{\pi} f\left(\frac{s}{z}\right).$$

161. Solución. Si la superficie Σ es equipotencial, entonces a cada valor del parámetro s debe corresponder el potencial determinado

$$V = f(s)$$

que satisface la ecuación de Laplace. La diferenciación da:

$$V_x = f'(s) s_x, \quad V_{xx} = f''(s) (s_x)^2 + f'(s) s_{xx}, \dots$$

de modo que

$$\Delta V = V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} = f''(s) (\operatorname{grad} s)^2 + f'(s) \Delta s.$$

De aquí se deduce:

$$\frac{\Delta s}{(\operatorname{grad} s)^2} = -\frac{f''(s)}{f'(s)} = \varphi(s),$$

es decir, la superficie Σ es equipotencial si la razón $\Delta s/(\operatorname{grad} s)^2$ es una función sólo de s .

Denotando

$$q_1 = \frac{x^2}{(a^2+s)^n} + \frac{y^2}{(b^2+s)^n} + \frac{z^2}{(c^2+s)^n}, \quad p = \frac{1}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s},$$

vemos que la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = 1 \quad (1)$$

se reduce a $q_1 = 1$. Diferenciando esto con respecto a x , obtenemos:

$$s_x = \frac{2x}{(s+a^2) q_2}, \quad s_y = \frac{2y}{(s+b^2) q_2}, \quad s_z = \frac{2z}{(s+c^2) q_2}, \quad (\operatorname{grad} s)^2 = \frac{4}{q_2}.$$

Los cálculos dan:

$$s_{xx} = \frac{2}{q_2 (a^2+s)} - \frac{8x^2}{q_2^2 (a^2+s)^3} - \frac{8x^2 q_3}{q_2^2 (a^2+s)^2}, \dots$$

$\Delta s = \frac{2p}{q_2}$ y, por consiguiente, $\varphi(s) = \frac{p}{2}$. Integrando la ecuación

$$\frac{f''(s)}{f'(s)} = -\varphi(s) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+a^2} + \frac{1}{s+b^2} + \frac{1}{s+c^2} \right),$$

obtenemos:

$$V = f(s) = A \int_0^s \frac{ds}{R(s)} + B,$$

donde

$$R(s) = \sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}.$$

En el infinito cuando $s \rightarrow \infty$ el potencial debe ser igual a cero; de aquí se deduce que

$$V = -A \int_s^{\infty} \frac{ds}{R(s)}.$$

162. Si el elipsoide dado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

es conductor y lleva sobre sí la carga e , entonces

$$V = \frac{e}{2\epsilon} \int_s^{\infty} \frac{ds}{R(s)}.$$

Sobre la superficie del elipsoide $s = 0$ el potencial V es igual a

$$V_0 = \frac{e}{2\epsilon} \int_0^{\infty} \frac{ds}{R(s)}.$$

La capacidad del elipsoide es

$$C = \frac{e}{V_0} = 2\epsilon \left[\int_0^{\infty} \frac{ds}{R(s)} \right]^{-1}.$$

La densidad superficial de la carga se da por la expresión

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} |\operatorname{grad} V|_{s=0} = -\frac{e}{4\pi} (V_s |\operatorname{grad} s|)_{s=0},$$

de donde en virtud de las igualdades $(V_s)_{s=0} = -\frac{e}{2\epsilon abc}$, $|\operatorname{grad} s| = \frac{2}{\sqrt{q_2}}$ se deduce:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Si $a = b > c$ (el esferoide alargado o el elipsoide aplastado de revolución) entonces obtenemos

$$V = \frac{e}{2\epsilon} \int_s^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2) \sqrt{s+c^2}} = \frac{e}{\epsilon \sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2-c^2}{\lambda+c^2}}.$$

Si $a > b = c$ (el esferoide alargado o el elipsoide alargado de revolución), entonces obtenemos

$$V = \frac{e}{2\epsilon} \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{\lambda+a^2} + \sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{\lambda+a^2} - \sqrt{b^2-a^2}}.$$

Aquí λ es la raíz de la ecuación (1) del problema 161

163. La densidad superficial de la carga sobre el disco elíptico es

$$\sigma = \frac{e}{4\pi bc} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

donde e es la carga completa del disco.

La capacidad del disco circular ($a = 0$, $b = c$) es

$$C = 8\pi b.$$

La densidad de la carga sobre cada uno de los lados del disco circular es

$$\sigma = \frac{e}{4\pi b \sqrt{b^2 - p^2}}.$$

El potencial excitado por el disco circular se expresa por la fórmula

$$V = 4V_0 \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{\lambda}}$$

6

$$V = 4V_0 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{r^2 - b^2 + \sqrt{(r^2 - b^2)^2 + 4b^2x^2}}} (x^2 + y^2 + z^2 = r^2).$$

Indicación. Para calcular σ para el disco elíptico utilizar la fórmula para σ de la solución del problema 162

$$\sigma = \frac{e}{4\pi bc} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2y^2}{b^4} + \frac{a^2z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Eliminando $\frac{x^2}{a^2}$ de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, obtenemos:

$$\sigma = \frac{e}{4\pi bc} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + \frac{a^2y^2}{b^4} + \frac{a^2z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

El paso al límite cuando $a \rightarrow 0$ da la fórmula necesaria para σ .

Para el disco circular $a = 0$, $c^2 = b^2$, $p^2 = y^2 + z^2$. El parámetro λ se determina como la raíz positiva de la ecuación

$$\frac{x^2}{s} + \frac{y^2 + z^2}{b^2 + s} = 1$$

que es igual

$$\lambda = \frac{1}{2} [r^2 - b^2 + \sqrt{(r^2 - b^2)^2 + 4b^2x^2}]$$

164. *Indicación.* Se requiere demostrar que

$$\Delta V = -4\pi\rho_0 \quad \text{dentro del elipsoide,}$$

$$\Delta V = 0 \quad \text{fuera del elipsoide.}$$

La demostración de la primera igualdad no representa dificultades. Al demostrar la segunda igualdad se deben utilizar las relaciones $\operatorname{grad} \lambda \cdot \operatorname{grad} f = 4$, $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{4R'(s)}{R(s)}$.

165. a) El potencial de gravitación del elipsoide alargado de revolución ($b = c < a$)

$$V(x, y, z) = 2\pi(1 - \varepsilon^2)\rho_0 \left\{ \frac{a^2}{2\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} - \varepsilon \right) x^2 - \frac{1}{2\varepsilon^3} \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) (y^2 + z^2) \right\} \text{ dentro del elipsoide,}$$

$$V(x, y, z) = 2\pi(1 - \varepsilon^2)\rho_0 \left\{ \frac{a^2}{2\varepsilon} \ln \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \varepsilon a}{\sqrt{a^2 + \lambda} - \varepsilon a} - \right.$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \varepsilon a}{\sqrt{a^2 + \lambda} - \varepsilon a} - \frac{\varepsilon a}{\sqrt{a^2 + \lambda}} \right) z^2 - \\ - \frac{1}{2\varepsilon^3} \left[\frac{\varepsilon a \sqrt{a^2 + \lambda}}{(1 - \varepsilon^2) a^2 + \lambda} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \varepsilon a}{\sqrt{a^2 + \lambda} - \varepsilon a} \right] (y^2 + z^2) \} \text{ fuera del elipsoide,}$$

donde $\varepsilon^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$, λ es la raíz positiva de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2 + z^2}{c^2 + s} = 1.$$

b) El potencial de la gravitación del elipsoide aplastado de revolución ($b = a > c$)

$$V(x, y, z) = 2\pi (1 + \varepsilon^2) \rho_0 \left\{ \frac{c^2}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \varepsilon - \frac{1}{2\varepsilon^3} \left(\operatorname{arctg} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon^2} \right) (x^2 + y^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon^3} (\varepsilon - \operatorname{arctg} \varepsilon) z^2 \right\} \text{ dentro del elipsoide,}$$

$$V(x, y, z) = 2\pi (1 + \varepsilon^2) \rho_0 \left\{ \frac{c^2}{\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2\varepsilon^3} \left[\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} - \frac{\varepsilon c \sqrt{c^2 + \lambda}}{(1 + \varepsilon^2) c^2 + \lambda} \right] (x^2 + y^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon^3} \left(\frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} - \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2 + \lambda}} \right) z^2 \right\} \text{ fuera del elipsoide,}$$

donde $\varepsilon^2 = \frac{a^2}{c^2} - 1$ y λ es la raíz positiva de la ecuación

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} = 1.$$

El paso al límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ da el potencial de la esfera homogénea de radio a :

$$V = \begin{cases} 2\pi\rho_0 \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right) & \text{para } r < a, \\ \frac{M}{r} & \text{para } r > a \left(M = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_0 \right). \end{cases}$$

166. El potencial logarítmico de la región elíptica homogénea

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$$

se da por las fórmulas

$$V(x, y) = \pi ab \rho_0 \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{a+b}{2} \right) - \frac{\pi ab \rho_0}{a+b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ dentro de la elipse,}$$

$$V(x, y) = \pi ab \rho_0 \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{a+b}{2} \right) - \pi ab \rho_0 \frac{\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + \lambda}} + \frac{y^2}{\sqrt{b^2 + \lambda}}}{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}} - \\ - \pi ab \rho_0 \ln \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}}{a+b} \text{ fuera de la elipse,}$$

donde λ es la raíz positiva de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} = 1.$$

167. El potencial fuera de la elipse es igual a

$$V(x, y) = V_0 \left[1 - \frac{1}{2 \ln \frac{2}{a+b}} \int_0^\lambda \frac{ds}{\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)}} \right] (a \geq b > 0),$$

6

$$V(x, y) = V_0 \left[1 - \frac{1}{2 \ln \frac{2}{a+b}} \ln \frac{2\lambda + a^2 + b^2 + \sqrt{(\lambda + a^2)(\lambda + b^2)}}{(a+b)^2} \right],$$

onde λ es la raíz positiva de la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} = 1.$$

La densidad de la carga distribuida en la elipse es igual a

$$\sigma = \frac{V_0}{2\pi ab \ln \frac{2}{a+b}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}.$$

El paso límite cuando $b \rightarrow 0$ da el potencial del segmento $0 \leq x \leq a$ sobre el plano (x, y)

$$V(x, y) = V_0 \left[1 - \frac{1}{2 \ln \frac{2}{a}} \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{\rho^2 + \sqrt{(\rho^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2} + \sqrt{0,5\rho^2[\rho^2 - a^2 + \sqrt{(\rho^2 - a^2)^2 + 4a^2y^2}] + a^2y^2}}{a^2} \right],$$

onde $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Indicación. La deducción de la fórmula para $V(x, y)$ es completamente análoga a la deducción dada en la solución del problema 163.

En el infinito introducimos la condición

$$u = V - A \ln \frac{1}{\rho} \rightarrow 0 \quad \text{para } \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, |\operatorname{grad} u| < \frac{B}{\rho^2},$$

onde A y $B > 0$ son ciertas constantes.

168. Sean I la corriente eléctrica que fluye por el bucle C_a con centro en el punto $z = 0$, $\rho = 0$ y radio a ; I' , la corriente que fluye por el bucle C_b de radio b con centro en el punto $z = d$, $\rho = 0$.

Para la fuerza de la interacción entre C_a y C_b es posible una de las representaciones:

$$1) \quad F = \frac{2\pi\mu II' dk}{c^2 \sqrt{ab}} \left[-K(k) + \frac{a^2 + b^2 + d^2}{(a-b)^2 + d^2} E(k) \right],$$

donde

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + d^2}, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

son las integrales elípticas de primer y segundo género,

$$2) \quad F = \frac{\pi \mu I I' \sin \alpha}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^2}{b^2 + a^2} \right)^{\frac{n}{2}} P_n(\cos \alpha) P_n(0), \quad (d^2 + b^2 > a^2),$$

donde $\alpha = \theta_b$ es la coordenada de los puntos del anillo C_b si el origen de las coordenadas está en el centro del anillo C_a ;

$$3) \quad F = -\frac{\pi \mu I I' \sin^2 \beta}{c^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a}{b} \right)^{n+1} P_{n+1}(\cos \beta) P_n(\cos \beta), \quad (b > a);$$

con esto el origen de coordenadas está situado en el vértice del cono circular que pasa por C_a y C_b ($a \neq b$) y que tiene un ángulo de abertura β ; si $a < b$, entonces la serie que está a la derecha converge rápidamente.

Indicación. La fuerza que actúa sobre el contorno por el que fluye la corriente I colocado en el campo magnético es igual a

$$F = \frac{I}{c} \oint [dsB],$$

donde B es la inducción del campo exterior y la integración se realiza por el contorno dado. En nuestro caso

$$B = \frac{\mu I'}{c} \oint_2 \frac{|dsr|}{r^3}.$$

Para calcular la magnitud de B sobre el contorno C_b se debe utilizar la solución del problema 156.

169. Sea que los anillos C_a de radio a y C_b de radio b están en los planos paralelos Σ_a y Σ_b , y sus centros están sobre una recta perpendicular a los planos Σ_a y Σ_b ; el coeficiente de inducción mutua puede ser representado del modo siguiente:

$$1) \quad M_{12} = \frac{8\mu \sqrt{ab}}{k} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K - E \right], \quad \text{donde} \quad k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + d^2},$$

$K(k)$ y $E(k)$ son las integrales elípticas; d , la distancia entre los centros de los anillos.

2) Si el origen de las coordenadas se coloca en el centro de C_a , entonces el anillo C_b tendrá las coordenadas $r_b = \sqrt{b^2 + d^2}$, $\theta_b = \beta$, y

$$M_{12} = \pi \mu b \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)!!}{(2m-1)(2m)!!} \left(\frac{b^2 + d^2}{a^2} \right)^{\frac{2m-1}{2}} \times \\ \times P_{2m-1}(\cos \beta), \quad \left[\frac{b^2 + d^2}{a^2} < 1 \right].$$

Si $\frac{b^2 + d^2}{a^2} > 1$, entonces en vez de $\left[\frac{b^2 + d^2}{a^2} \right]^{\frac{2m-1}{2}}$ se debe escribir $\left[\frac{a^2}{b^2 + d^2} \right]^m$.

Una forma análoga tiene la expresión para la inducción mutua de dos anillos arbitrariamente orientados si sus ejes se intersecan.

Indicación. El coeficiente de la inducción mutua de los contornos 1 y 2 se determina por la fórmula

$$M_{12} = \oint_1 A_2 ds_1,$$

donde A_2 es el potencial vectorial del campo excitado por la corriente unitaria en el contorno 2.

En nuestro caso

$$M_{ba} = \oint_{C_b} A_a ds_b = 2\pi b |A_a|_{\rho=b},$$

donde $|A_a|$ se calcula en base a la solución del problema 156.

A NUESTROS LECTORES

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y de ciencia ficción. Diríjan sus opiniones a: Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú 1-110, GSP, URSS.