CAPÍTULO 8

Espacios vectoriales con producto interior

8.1. Espacios vectoriales con producto interior

Definición 8.1.1 **(Productor interior)** *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice un* **producto interior** *sobre V si verifica:*

1. $\langle v, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V, \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = \theta.$
2. $\forall v_1, v_2$ *y* $w \in V$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,
$$\langle \alpha v_1 + \beta v_2, w\rangle = \alpha\langle v_1, w\rangle + \beta\langle v_2, w\rangle.$$
3. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle} \quad \forall v, w \in V.$

Propiedades 8.1.1 *1. De (3) se tiene que*

$$\langle v, v\rangle = \overline{\langle v, v\rangle} \quad \forall v \in V,$$

de donde se puede concluir que $\langle v, v\rangle \in \mathbb{R}$.

2. *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y* V *espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *entonces (3) se transforma en*

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall v, w \in V.$$

3. $\forall w_1, w_2$ *y* $v \in V$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

$$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \overline{\alpha}_1\langle v, w_1\rangle + \overline{\alpha}_2\langle v, w_2\rangle.$$

En particular, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\langle v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2\rangle = \alpha_1\langle v, w_1\rangle + \alpha_2\langle v, w_2\rangle.$$

Ejemplo 8.1.1 (Producto interior) *1.- Sea* $V = \mathbb{C}^n$ *espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$.

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v}_i,$$

es un producto interior.

2. *Sea* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_{n\times m}\times\mathcal{M}_{n\times m} &\to \mathbb{R}\\ \langle A,B\rangle &= tr(A^t B),\end{aligned}$$

es un producto interior. Donde la **traza** *de una matriz cuadrada* A *es la suma de los elementos de la diagonal principal y se denota por* $tr(A)$.

3. *Sea* $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ *el espacio vectorial de las funciones continuas de* $[a,b]$ *en* $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\langle\ ,\ \rangle : C_{\mathbb{R}}[a,b]\times C_{\mathbb{R}}[a,b] &\to \mathbb{R}\\ \langle f,g\rangle &= \int_a^b f(x)g(x)dx,\end{aligned}$$

es un producto interior.

Definición 8.1.2 (**Norma**) *Sea* V *un espacio vectorial con producto interior, se llama norma del vector* v *al número* $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$.

Propiedades 8.1.2 *$\forall u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,*

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$.
2. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.
3. $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|$. **(Desigualdad de Cauchy-Schwartz)**
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. **(Desigualdad triangular)**

Definición 8.1.3 *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior*

1. *$v, w \in V$, v es* **ortogonal** *a w si $\langle v, w \rangle = 0$.*
2. *un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un* **conjunto ortogonal** *si $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$.*
3. *un subconjunto $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es un conjunto* **ortonormal** *si es un conjunto ortogonal y $\|v_i\| = 1 \quad \forall i = \{1, \ldots, n\}$.*

Lema 8.1.1 *Si* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es* $L.I.$

Demostración: Demostrar en clases.

Corolario 8.1.1 *Si un vector* w *es* $C.L.$ *de un conjunto ortogonal de vectores no nulos* $\{x_1, \ldots, x_n\}$*, entonces* w *es igual a*

$$w = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle w, x_k \rangle}{\|x_k\|^2} x_k.$$

Demostración: Demostrar en clases.

Proposition 8.1.1 **(Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt)** *Sea* V *espacio vec-*

torial de dimensión finita con producto interior $\langle , \rangle$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces existe una base ortogonal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que el subespacio generado por los vectores $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es el mismo que el subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ($1 \leq m \leq n$). Explícitamente, la base es

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1, & (1)\\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1, & (2)\\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2, & (3)\\ \vdots \quad & \vdots \\ w_n &= v_n - \frac{\langle v_n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_n, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1}\rangle}{\|w_{n-1}\|^2} w_{n-1}. & (n) \end{aligned}$$

Ejemplo 8.1.2 *1. Sea $B = \{(3,0,4), (-1,0,7), (2,9,11)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Encuentre una* *base ortogonal para* $\mathbb{R}$.

Respuesta: $B' = \{(3,0,4),(-4,0,3),(0,9,0)\}$

Observación: Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interior $\langle , \rangle$ y $\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V. Entonces, por Gram-Schmidt existe una base ortogonal $\{w_1,\ldots,w_n\}$ de V. Sea $u_i = w_i/\|w_i\|$, entonces $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base de V donde los vectores son ortogonales y de norma 1.

Definición 8.1.4 *Sea V espacio vectorial con producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ y sean U, W subespacios de V. Diremos que U es* **ortogonal** *a W y denotaremos $U \perp W$ si para todo $u \in U$ y para todo $w \in W$ tenemos que $\langle u, w\rangle = 0$.*

Si X es subconjunto de V, definimos

$$X^{\perp} := \{u \in V : \langle u, x\rangle = 0, \forall\, x \in X\}. \qquad (\textbf{Complemento ortogonal de X})$$

Proposition 8.1.2 *Sea V espacio vectorial con producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ y $X \subseteq V$. Entonces $X^\perp$ es un subespacio de V.*

Demostración: Demostrar en clases.

Observación: Si W es subespacio y x es ortogonal a todo vector de una base de W entonces $x \in W^\perp$.

Ejemplo 8.1.3

1. *$W = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$. Encuentre $W^\perp$.*
2. *Sean $S = \{(x,y,z) : 2x - 3y + z = 0\}$ y $T = \{(x,y,z) : \dfrac{x}{2} = -\dfrac{y}{3} = z\}$. Muestre que $S \perp T$.*

8.1.1. Listado 6

1. a) Considere $\mathbb{R}^2$ con el producto interior usual. Si $x = (1, 2)$ y $y = (-1, 1)$, encuentre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que
$$\langle v, x\rangle = -2 \ \wedge \ \langle v, y\rangle = 3.$$

   b) Demuestre que para cada vector $u \in \mathbb{R}^2$, se tiene
$$u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \langle u, e_2\rangle e_2,$$
   donde $\{e_1, e_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}$.

2. Encuentre una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir de $\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$.

3. Dado el vector $(2, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$, construya a partir de él una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el *p.i.* usual. Sea $S = \langle\{(1, 1, 1), (-1, 1, 0)\}\rangle$.

   a) Caracterice $S^{\perp}$ y determine su dimensión.

b) Encontrar una base B ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que uno de sus vectores sea elemento de $S^\perp$.

5. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con el *p.i.*

$$\langle p, q\rangle = 2\int_0^2 p(x)q(x)dx$$

Pruebe que el conjunto $\{1, x-2, x^2-2\}$ es *l.i.* y ortonormalice respecto del *p.i.* dado.

6. En $\mathbb{C}^2$ se define el producto interior

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i.$$

Pruebe que los vectores $x = (3, -i)$, $y = (2, 6i)$ son ortogonales y normalícelos.

7. Pruebe que en el espacio $C_{\mathbb{R}}[0,1]$, con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

el conjunto $\{1, \sqrt{3}(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\}$ es una base ortonormal.

8. En el espacio $C_{\mathbb{R}}[0, 2\pi]$, con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx,$$

el conjunto $\{\sin(x), \cos(x)\}$ es ortogonal.

9. Pruebe que $\{\sin(nx), \cos(nx), 1\}$ es un conjunto ortogonal con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

10. En el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que 2 con el producto

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

construya a partir de la base $\{1, x, x^2\}$ una base ortonormal.

11. Sean x e y vectores de un espacio vectorial con $p.i.$ tales que $x + y$ es ortogonal a $x - y$. Demuestre que $\|x\| = \|y\|$.

12. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $p.i.$. Demuestre que: $\forall x, y \in V$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

13. Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y = z\}$. Halle $W^\perp$. ¿Qué representan geométricamente W y $W^\perp$?