Métodos Matemáticos I

Hoja 1

1. ¿Cuál es la probabilidad de tener 3 o más aciertos con un boleto de la lotería primitiva?

Sol: P(tocar algo)$\approx$ 0,018638 $\approx$ 1 vez al año
(1 año=52 semanas)

2*. Se tienen r urnas, cada una con N bolas numeradas de 1 a N. Se extrae una bola de cada urna sin importar el orden, ¿cuantos casos diferentes habrá?

Sol: $P_r^N = \frac{(N+r-1)!}{(N-1)!r!}$

3. Las baldosas del suelo de una habitación tienen forma de triángulo equilátero de lado l. Considerando despreciable la separación entre baldosas, ¿cuál es la probabilidad de una que moneda de radio r lanzada al azar acabe reposando íntegramente en el interior de una baldosa?

Sol: $P_r = \left(1 - \frac{2r}{l} tg\frac{\pi}{3}\right)^2$ si $r < \frac{l}{2} cotg\frac{\pi}{3}$
$P_r = 0$ si $r > \frac{l}{2} cotg\frac{\pi}{3}$

4. Se tienen dos urnas con N bolas cada una; en la primera hay z bolas blancas y $N-z$ bolas negras, en la segunda hay x bolas blancas e $y = N-x$ bolas negras. Se extraen $n(> 2)$ bolas con reemplazamiento de cada urna. Se desea determinar los valores x, y, z tal que la probabilidad de sacar todas blancas en la primera urna sea igual a la probabilidad de sacar todas blancas o todas negras en la segunda, ¿es esto posible?

Sol:$\left(\frac{z}{N}\right)^n = \left(\frac{x}{N}\right)^n + \left(\frac{y}{N}\right)^n \Rightarrow z^n = x^n + y^n n > 2$

Imposible por el teorema de Fermat

5. Un tenista tiene, en promedio, un 50 % de probabilidad de sacar correctamente al primer intento. Con el primer servicio tiene una probabilidad del 80 % de ganar el punto, mientras que si falla el primer saque dicha probabilidad es solo del 50 %. En el caso de que sea su turno de saque, calcula
(a) La probabilidad de ganar un punto.
(b) * La probabilidad de ganar un juego.

Sol: (a)P(ganar un punto)= 0,65
(b)P(ganar un juego)= 0,829645

6. En el juego del tute entre 4 jugadores se reparten todas las cartas de la baraja española, dando 10 a cada jugador. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
(a) Cada jugador recibe un as.
Sol: $P_a = 0{,}10942$
(b) El jugador que reparte las cartas no recibe ningún as.
Sol: $P_b = 0{,}299869$
(c) El jugador que reparte las cartas recibe 3 ases.
Sol: $P_c = 0{,}0{,}0393916$
(d) Alguno de los 4 jugadores no recibe ningún as.
Sol: $P_d = 0{,}890579$
(e) Alguno de los 4 jugadores recibe 3 ases.
Sol: $P_e = 0{,}157566$
(f) Todos los jugadores reciben un as y un rey (sin importar los palos)
Sol: $P_f = 0{,}0121876$
(g) Algún jugador recibe el rey y el caballo de oros.
Sol: $P_g = \frac{3}{13}$

7. Un aficionado a la serie StarTrek procura ver todos los capítulos que se emiten por televisión. Podemos suponer que la probabilidad de ver un capítulo es aproximadamente $p = 0{,}8$, independientemente del número de veces emitido y de los capítulos vistos con anterioridad. Se emite por televisión un conjunto de 13 capítulos 3 veces seguidas. Calcula:
(a) La probabilidad, P_a, de que un capítulo concreto sea visto al menos una vez tras las 3 emisiones de la serie.
Sol: $P_a = 0{,}992$
(b) La probabilidad, P_b, que un capítulo concreto sea visto por primera vez justo en la tercera emisión de la serie.
Sol: $P_b = 0{,}0320$
(c) La probabilidad, P_c, de ver todos los capítulos al menos una vez tras las tres emisiones de la serie.
Sol: $P_c = 0{,}9008$
(d) La probabilidad, P_d, de ver al menos un capítulo nuevo durante la tercera emisión de la serie.
Sol: $P_d = 0{,}3448$

8. Entre las ciudades A y B hay dos carreteras y otras dos entre las ciudades B y C. Cada una de las carreteras tiene una probabilidad p de quedar bloqueada por la nieve. ¿Cuál es la probabilidad de que se pueda viajar por carretera de A a C?, ¿y si hay también una carretera directa entre A y C?

Sol: (a) $P_{AC} = (1-p)^2$
(b) $\widetilde{P}_{AC} = 1 - 2p^3 + p^5$

9. ¿Cuantas personas debe haber en un grupo para que la probabilidad de que al menos una haya nacido un 29 de febrero sea mayor o igual a 1/2?

Sol: $n > 1012$

10. Un sistema paralelo con n componentes trabaja correctamente cuando al menos uno de sus componentes funciona. Si cada componente es independiente de los demás y la probabilidad de que un componente aislado falle es $p = 1/2$, calcula la probabilidad condicional de que el componente número 1 funcione dado que el sistema trabaja correctamente.

Sol: $P\left(1|\, n\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-(1/2)^n}$

11. De una urna que contiene b bolas blancas y $N-b$ bolas negras se extraen r bolas. Calcula la probabilidad, $P(k)$, de que k de ellas sean blancas. Demuestra que cuando b y N tienden a ∞ de modo que $b/N \to p$ entonces:

$$P(k) \to \left(\begin{array}{c} r \\ k \end{array} \right) p^k (1-p)^{r-k}.$$

12. Se distribuyen bolas de tres colores en 3 urnas idénticas según la siguiente tabla:

	Urna 1	Urna 2	Urna 3
Rojo	2	4	3
Blanco	3	1	4
Azul	5	3	3

Se elige al azar una urna y se extrae una bola:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea roja?
Sol: $P_a(1R) = \frac{1}{3}$

(b) Si efectivamente la bola fue roja, ¿Cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la 3?
Sol: $P_b(3\,|R) = \frac{3}{10}$
Se elige al azar una urna y se extraen de ella dos bolas (sin devolución):

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una bola sea roja?
Sol: $P_a(0R) = 0{,}4344$

13. Una bolsa contiene 12 castañas de las cuales 3 tienen gusano. Un niño se lleva 3 castañas de la bolsa y a continuación se coge una castaña al azar de la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha castaña tenga un gusano? Si realmente tiene un gusano, ¿cuál es la probabilidad de que las castañas del niño tengan al menos un gusano?

Sol: $P_a = \frac{1}{4}$; $P_b = 0{,}490909$

14. Un rey tiene dos bolsas con 10 monedas cada una, en una de las bolsas hay 7 monedas de oro y 3 de plata, mientras que la otra tiene 3 de oro y 7 de plata. El rey permite a uno de sus súbditos elegir una de las bolsas sin abrirlas, únicamente se le permite extraer dos monedas antes de elegir.

(a) El súbdito extrae dos monedas de la misma bolsa. Calcula la probabilidad de que dicha bolsa sea la de 7 monedas de oro para cada uno de los tres casos posibles (2 de oro, 2 de plata y 1 de cada).
Sol: P($bolsa7oros\,|2oros$)=7/8
P($bolsa7oros\,|1oro1plata$)=1/2
P($bolsa7oros\,|2platas$)=1/8

(b) Si en función de la extracción se elige la bolsa con mas probabilidades de contener 7 monedas de oro, ¿Qué probabilidad tiene el súbdito de elegir la mejor bolsa?
Sol:$P(acertar) = \frac{7}{10}$

(c) El súbdito podría haber seguido otra estrategia que consiste en extraer una moneda de cada bolsa. Calcula la probabilidad de éxito en este caso.

Sol: $P(acertar) = \frac{7}{10}$
Ambas estrategias son igual de buenas

15. Utilizando una moneda trucada, la probabilidad de obtener cara es p. Sea p_n la probabilidad de que después n lanzamientos hayan salido un número par de caras. Demuestra que

$$p_n = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^n\right].$$

16*. Se tienen n bolas numeradas de 1 a n y n cajas con igual numeración. Se distribuyen al azar las bolas una en cada caja. Sea P_n la probabilidad de que ninguna bola aparezca en la caja con su propio número.

(a) Halla una ley de recurrencia para P_n en términos de P_{n-1} y P_{n-2}.

Sol: $nP_n = P_{n-2} + (n-1)\,P_{n-1}$

(b) Demuestra que $P_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.

(c) Calcula $\lim_{n\to\infty} P_n$.

Sol: $P_n \to e^{-1}$

17*. Calcula la probabilidad de que la combinación ganadora de la lotería primitiva tenga dos, o más, números seguidos.

Sol: P(dos o mas números seguidos)=0.495198

18. Calcula el número de lanzamientos de moneda que hacen falta, en promedio, para obtener 3 caras consecutivas.

Sol: $\langle n \rangle = 14$

19*. Un físico con cierta capacidad telecinética puede señalar el resultado correcto en el lanzamiento de una moneda el 60 % de las veces. Con dos canicas en su poder, reta a un individuo con una provisión infinita de canicas a una competición de lanzamiento de monedas; cada vez que se lanza una moneda el perdedor paga una canica al ganador. Calcula la probabilidad de que el físico acabe perdiendo todas sus canicas.

20. Sea X una variable aleatoria tal que $\Pr(X = 0)$= $\Pr(X = 1)$=1/2, $\Pr(X \neq 0, 1)$=0, y sea Y otra variable aleatoria idéntica independiente.

(a) Dada la variable aleatoria $V = X + Y$, calcula su función de masa, su media y su varianza.
Sol: f(V=0)=1/4 ; f(V=1)=1/2 ; f(V=2)=1/4
$\langle V \rangle = 3/2$
Var(V)=1/2

(b) Dada la variable aleatoria $W =\mid X - Y \mid$, calcula su función de masa, su media y su varianza.
Sol: f(W=0)=1/2 ; f(W=1)=1/2
$\langle W \rangle = 1/2$
4ex)Var(W)=1/4

(c) Calcula la función de masa conjunta de V y W, $\Pr(V, W)$.

(d) Calcula $\langle V \cdot W \rangle$ y demuestra que V y W no son independientes, aunque están descorrelaccionadas.

21. Demuestra que si X_1 y X_2 son variables aleatorias con la misma distribución de probabilidad entonces: $\mathrm{Cov}(X_1 - X_2, X_1 + X_2) = 0$. Nótese que no se ha asumido que sean independientes.

22. Se arrojan dos dados. Sean las siguientes proposiciones:
A_l={el valor obtenido en el primer dado es divisible por l},
B_l={el valor obtenido en el segundo dado es divisible por l},
C_l={la suma de los valores de los dos dados es divisible por l},
Las correspondientes variables aleatorias tomarán valor 1 si la proposición es verdadera y 0 si la proposición es falsa. Estudia si son independientes o no los siguientes pares de sucesos: (a) A_l y B_k para todos los valores de l y k, (b) A_2 y C_2, y (c) A_4 y C_4.

23. Se tira un dado sucesivas veces. Sea W el número de tiradas necesarias para que aparezca por primera vez un 6. Determina la función de masa, la media y la varianza de W.

24. Un profesor del campus de La Merced, que aparca su coche en la calle los días laborables, recibió 12 multas de aparcamiento, todas ellas en martes o jueves. Suponiendo que la probabilidad de recibir una multa es igual en todos los días laborables, ¿cuál es la probabilidad de este suceso?, ¿esta justificado que alquilase una plaza de garaje solo para los martes y jueves?

Sol: Si está justificado

25. Un autobús pasa por una parada cada 15 minutos. Sea X el tiempo que debe esperar una persona que llega de pronto a la parada. Calcula la distribución de probabilidad, así como su media y su varianza. ¿ Cuál es la probabilidad de que una persona espere mas de 5 minutos?

Sol:f(x)=$\begin{cases} 1/15 & 0 < x \leq 15 \\ 0 & x > 15 \end{cases}$
$\langle X \rangle = 7{,}5$ minutos
Var(X)=18.75 minutos^2
P(x>5)=2/3