Instituto Politécnico Nacional

Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería y Ciencias Sociales

Academia de matemáticas

La ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es una expresión matemática en la cual se encuentra una función desconocida y al menos una derivada de dicha función. Las ecuaciones diferenciales son empleadas frecuentemente en la Física, la Química, en la Economía, además de que la solución de éstas ayuda a la Astronomía en el estudio del movimiento de cuerpos celestes.

El orden de una ecuación diferencial está dado por la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación; mientras que el grado de la ecuación diferencial se determina al observar el grado de la derivada de mayor orden que aparece en ella.

A continuación se muestran algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales:

Ecuación	Orden	Grado
$\frac{dy}{dx}+3x=-7$	Primero	Primero
$\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+5y=0$	Segundo	Primero
$(y''')^2-5(y')^3-5y=x$	Tercero	Segundo
$5\ddot{y}+8(\dot{y})^3-8x=0$	Segundo	Primero

Solución de una ecuación diferencial

Cuando una función definida en el intervalo ***I*** se sustituye en una ecuación diferencial y la reduce a una identidad, entonces se dice que esa función es una solución de la ecuación en ese intervalo.

Una solución en la cual la variable dependiente se expresamente solamente en términos de la variable independiente y de constantes se dice que es una solución explícita, en caso contrario se tiene una solución implícita.

La solución general de una ecuación diferencial de grado ***n*** contiene ***n*** parámetros en su solución, lo cual significa que una ecuación diferencial puede tener un número infinito de soluciones que corresponden al número infinito de valores de los parámetros. Una solución de una ecuación diferencial que no tiene tales parámetros se llama una solución particular.

Revisa los siguientes ejemplos, donde se comprueba que la función es solución de la ecuación diferencial

1. $(x-2y)dx - xdy = 0$ donde $x^3 - 3x^2y = c$

   Se deriva la función:

   $$\frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2y) = \frac{d}{dx}c$$

   $$\frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}3x^2y = 0$$

   $$3x^2\frac{d}{dx}x - 3\left(x^2\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}x^2\right) = 0$$

   $$3x^2(1) - 3\left(x^2\frac{dy}{dx} + y(2x)(1)\right) = 0$$

   $$3x^2 - 3x^2\frac{dy}{dx} - 6xy = 0$$ se despeja $\frac{dy}{dx}$

   $$3x^2 - 6xy = 3x^2\frac{dy}{dx}$$

   $$\frac{3x^2 - 6xy}{3x^2} = \frac{dy}{dx}$$

   $$\frac{3x(x-2y)}{3x\cdot(x)} = \frac{dy}{dx}$$

   $$\frac{x-2y}{x} = \frac{dy}{dx}$$ se le da la forma de la ecuación diferencial

   $$(x-2y)dx = xdy$$

   $$(x-2y)dx - xdy = 0$$ por lo tanto $x^3 - 3x^2y = c$ si es solución de la ecuación diferencial

2. $y'' + y' - 6y = 0$ donde $y = e^{2x}$

   Se deriva la función:

   $$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}e^{2x}$$

   $$y' = e^{2x}\frac{d}{dx}(2x)$$

   $$y' = e^{2x}\cdot(2)$$

   $$y' = 2e^{2x}$$

   Se determina la segunda derivada de la función:

   $$\frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}2e^{2x}$$

   $$y'' = 2(e^{2x})\frac{d}{dx}2x$$

   $$y'' = 2(e^{2x})(2)$$

   $$y'' = 4e^{2x}$$

   Se sustituyen la primera y la segunda derivada:

   $$4e^{2x} + 2e^{2x} - 6(e^{2x}) = 0$$

   $$6e^{2x} - 6e^{2x} = 0$$

   $$0 = 0$$ por lo tanto $y = e^{2x}$ si es solución de la ecuación diferencial

3. $\cos x \cdot \cos y\, dx + \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y\, dy = 0$ donde $\operatorname{sen}x = c \cdot \cos y$

Se deriva la función:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}x = \frac{d}{dx}c \cdot \cos y$$

$$\cos x \frac{dx}{dx} = c \cdot (-\operatorname{sen}y)\frac{dy}{dx}$$

$$\cos x \cdot (1) = -c \cdot \operatorname{sen}y \frac{dy}{dx}$$

$$\cos x\, dx = -c \cdot \operatorname{sen}y\, dy$$

$\cos x\, dx + c \cdot \operatorname{sen}y\, dy = 0$ se sustituye $\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos y} = c$

$$\cos x\, dx + \left(\frac{\operatorname{sen}x}{\cos y}\right)\operatorname{sen}y\, dy = 0$$

$\cos x \cdot \cos y\, dx + \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y\, dy = 0$ por lo tanto $\operatorname{sen}x = c \cdot \cos y$, si es solución de la ecuación diferencial

4. $(x^2 + y^2)dx - xy\, dy = 0$ donde $y^2 = 2x^2 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{c}\right)$

Se deriva la función:

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}2x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2\left[x^2 \frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x}{c}\right) + \ln\left(\frac{x}{c}\right)\frac{d}{dx}x^2\right]$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2\left[x^2 \cdot \frac{1}{\frac{x}{c}} \cdot \frac{1}{c} + \ln\left(\frac{x}{c}\right)(2x)\right]$$

$2y\dfrac{dy}{dx} = 2x + 4x \cdot \ln\left(\dfrac{x}{c}\right)$ se divide por “2” y se multiplica la expresión por “x”

$xy\dfrac{dy}{dx} = x^2 + 2x^2 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{c}\right)$ pero se sabe que $y^2 = 2x^2 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{c}\right)$ entonces:

$$xy\, dy = (x^2 + y^2)dx$$

$$0 = (x^2 + y^2)dx - xy\, dy$$

$(x^2 + y^2)dx - xy\, dy = 0$ por lo tanto $y^2 = 2x^2 \cdot \ln\left(\dfrac{x}{c}\right)$, si es solución de la ecuación

Comprueba que las funciones, sean una solución de la ecuación diferencial dada:

1.	$2y' + y = 0$	$y = e^{-\frac{x}{2}}$	
2.	$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$	$y = \frac{1}{16}x^4$	
3.	$y'' + 2y' - 3y = 0$	$y_1(x) = e^{-3x}$	$y_2(x) = e^x$
4.	$xy' + y = \cos x$	$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	
5.	$3y\,dx = 2x\,dy$	$x^3 = cy^2$	
6.	$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$	$y = xe^x$	
7.	$y' + 2y = e^x$	$y = ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x$	
8.	$y''' = 0$	$y = ax^2 + bx + c$	
9.	$(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$	$(x-a)^2 + y^2 = a^2$	
10.	$yy' = x - 2x^3$	$y = x\sqrt{1-x^2}$	
11.	$x^2y'' + xy' + y = 0$	$y = \operatorname{sen}(\ln x)$	
12.	$4x\,dy - y\,dy = 0$	$y^2 = 4x^2$	
13.	$y'' - 2y = 0$	$y = c_1 + c_2e^{2x}$	
14.	$y' - 2y = -8$	$y = 4 + c_1e^{2x}$	
15.	$2(y+3)dx - x \cdot y\,dy = 0$	$2\ln x - y + 3\ln(y+3) = c$	
16.	$dy - (25 + y^2)\,dy = 0$	$y = 5\tan 5x$	
17.	$(x - 2y)dx - x\,dy = 0$	$x^3 - 3x^2y = c$	
18.	$(x^2y + 1)dx + x^3dy = 0$	$x^2y = 1 + cx$	
19.	$2xy\,dx + (x^2 + 2y)dy = 0$	$x^2y + y^2 = c_1$	
20.	$2x(y+1)dx - y\,dy = 0$	$x^2 = y - \ln(y+1) + c$	
21.	$\frac{dy}{dx} + y - \operatorname{sen} x = 0$	$2y = \operatorname{sen} x - \cos x + 20 \cdot e^{-x}$	
22.	$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$	$y = c_1x + c_2x\ln x + 4x^2, \quad x > 0$	