Apuntes de Métodos Matemáticos de la Física II.

LICENCIATURA EN FÍSICA.

Universidad de Granada

CURSO 2005-2006

Juan Carlos Cabello Piñar

Departamento de Análisis Matemático

Índice general

Capítulo 1

Números reales,vectores y funciones

Comentario

Los estudios antropológicos revelan que han sido necesarios muchos siglos antes de que los hombres concibieran la idea del número. Nuestros antepasados debieron hacer un gran esfuerzo para alejarse de lo concreto de las necesidades de la vida y de la realidad del mundo circundante para llegar a la concepción de la entidad numérica, completamente separada de toda referencia concreta. Las concepciones que el hombre ha tenido sobre la idea de número han seguido un desarrollo paralelo al devenir histórico del hombre. En una primera etapa se aprendió a contar el número de objetos independientemente de la naturaleza de éstos y así aparecieron los números naturales. Las deudas en el trato comercial, hicieron nacer los números enteros, mientras que las reparticiones o el comienzo de las mediciones de campos, pesos, etc dieron lugar al concepto de número racional. Fueron los pitagóricos los que descubrieron que sólo con los números naturales y las fracciones no pueden realizarse todas las medidas posibles de forma exacta, ya que se encontraron pares de segmentos como la diagonal y el lado de un cuadrado cuyo cociente de longitudes no es una fracción. Esto obligó a la consideración de los números irracionales. El conjunto formado añadiendo a estos últimos al conjunto de los números racionales se ha dado en llamar el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. El conocimiento de éstos es la primera premisa para avanzar con provecho en el estudio del Análisis Matemático.

Por otra parte, en diversos campos de la actividad humana ocurre que, para poder expresar sin ambigüedad las leyes que la determinan, se establecen relaciones entre un conjunto de objetos (llamado dominio) y otro conjunto de objetos (llamado rango o recorrido). En realidad se trata de puros artificios usados para describir relaciones especiales en forma cuantitativa. Cuando estas relaciones son tales que a cada elemento del dominio corresponde un sólo elemento del rango, reciben en general el nombre de aplicaciones. Si además el dominio y el rango de estas aplicaciones son conjuntos numéricos se suelen llamar funciones.

Veamos algunos ejemplos:

1.- La fuerza necesaria para estirar un muelle de acero hasta una longitud x a partir de su longitud normal es proporcional a x. Es decir, $F = cx$, donde c es un número independiente de x, que depende de la naturaleza del muelle. Esta fórmula, descubierta por R. Hooke a mediados del siglo XVII, relaciona cada longitud "extra" con la fuerza requerida para tal alargamiento.

Claramente su dominio y su rango es el conjunto de los números reales positivos y a cada elemento del dominio corresponde un sólo elemento del rango, por lo que estamos tratando con nuestro primer ejemplo de función.

2.- Imaginemos ahora un determinado objeto que es levantado hasta cierta altura "h" y es dejado caer libremente. Sabemos que la altura es proporcional al cuadrado del tiempo que tarda en llegar al suelo, concretamente

$$h = 1/2gt^2,$$

donde la constante g es el valor de la aceleración de la gravedad.

Nótese que de esta forma obtenemos una nueva función que expresa sin ambigüedad cómo depende la altura alcanzada respecto del tiempo que tarda en caer.

En realidad, puede asegurarse que, por regla general, las leyes que que determinan un determinado fenómeno depende no sólo de una variable sino de varias. Así por ejemplo, en el coste de un producto, intervienen la materia prima, el transporte de ésta, la mano de obra y otras realidades. Esto nos lleva a tener que considerar funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^q$. Pero todavía más, es normal considerar varios aspectos de un mismo fenómeno y su dependencia de varias variables lo que conduce al estudio de funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^q$ con valores en $\mathbb{R}^n$.

Como puede uno imaginarse existe una gran variedad de ejemplos de funciones en el campo de los fenómenos naturales, y en otros muchos campos del conocimiento, en los que tanto el dominio como el rango son subconjuntos de números reales o de su producto cartesiano. Así pues, dado que el núcleo de este curso es el estudio de las funciones, se entiende que el conocimiento de los números reales es la primera premisa para avanzar con provecho.

En este primer capítulo estudiaremos en primer lugar el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ e iniciaremos el estudio de las funciones definidas y con valores en $\mathbb{R}$, con especial énfasis en las funciones más importantes, llamadas funciones elementales. En segundo lugar, estudiaremos qué propiedades del conjunto $\mathbb{R}$ se mantienen para el conjunto producto cartesiano $\mathbb{R}^n$, y cómo relacionar cada función con valores en $\mathbb{R}^n$ con n funciones con valores en $\mathbb{R}$.

1.1. El conjunto de los números reales.

Sumario

En esta lección estudiaremos las propiedades que se pueden considerar en el conjunto de los números reales. La estrategia que seguiremos en esta primera lección será la de exponer una lista de propiedades fundamentales de los números reales, que serán enunciadas bajo la forma de " axiomas ", y sus consecuencias más importantes. Destacaremos, de entre todos los axiomas, el que llamaremos axioma del supremo, de hecho, este axioma no se verifica en el conjunto de los números racionales, y esto le confiere al conjunto de los números reales su identidad y primacía. Cualquier otra propiedad de los números reales se deduce de éste y del resto de los axiomas. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.1.1. Estructura algebraica

Axioma I: Existe un conjunto, que notaremos por $\mathbb{R}$, en el que existe una operación suma $(+)$, verificando:

1. Propiedad asociativa:

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

(esto es, no es necesario escribir paréntesis si sólo aparece la operación suma).

2. Propiedad conmutativa:

$$x+y = y+x \quad (x,y \in \mathbb{R}).$$

3. Propiedad de existencia de elemento neutro:

   Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$x + 0 = x.$$

4. Propiedad de existencia de elemento simétrico:

   Dado cualquier número real x existe otro número real $-x$ tal que

$$x + (-x) = 0.$$

Axioma II: En $\mathbb{R}$ existe también una operación producto (.), que notaremos por yuxtaposición, verificando:

1. Propiedad asociativa:

$$(xy)z = x(yz) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}),$$

   (esto es, no es necesario escribir paréntesis si sólo aparece la operación producto).

2. Propiedad conmutativa:

$$xy = yx \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

3. Propiedad de existencia de elemento neutro:

   Existe un número real $1 \in \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$x1 = x.$$

4. Propiedad de existencia de elemento inverso:

   Dado cualquier número real $x \neq 0$ existe otro número real $1/x$ tal que

$$x \ 1/x = 1.$$

Ambas operaciones se relacionan entre sí de la siguiente manera

Axioma III:

Propiedad distributiva:

$$(x + y)z = xz + yz \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

1.1.2. Estructura ordenada

Axioma IV: Existe una relación binaria ($\leq$)), verificando:

1. Propiedad reflexiva: $x \leq x \quad (x \in \mathbb{R})$.
2. Propiedad antisimétrica: Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
3. Propiedad transitiva: Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$.

Estas tres propiedades se resumen diciendo que la relación ($\leq$)) es una relación de orden.

De hecho, el orden es total ya que:

Axioma V:

Dados dos números reales x e y, ocurre que ó bien $x \leq y$ ó bien $y \leq x$.

Además el orden tiene un buen comportamiento con respecto a la suma

Axioma VI:

Sean x, y, z tres números reales arbitrarios. Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.

y también respecto al producto

Axioma VII:

Sean x, y dos números reales arbitrarios y $z \geq 0$. Si $x \leq y$, entonces $xz \leq yz$.

Las propiedades enunciadas anteriormente suelen resumirse diciendo que el conjunto $\mathbb{R}$ dotado con las operaciones $+, .$ y el orden $\leq$ tiene estructura de **cuerpo ordenado**.

Notación

Notaremos por:
- $x < y$, el hecho de que $x \leq y$ y $x \neq y$,
- $x - y = x + (-y)$
- $x/y = x \; 1/y$
- $x \geq y$ a la expresión $y \leq x$

y también por

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x\},$$

$$\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R};\ x < 0\},$$

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x\},$$
$$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}.$$

Antes de continuar vamos a resaltar algunas propiedades que son consecuencia de los axiomas anteriores.

Proposición 1.1.1. *Sean x, y, z tres números reales.*

1. $x{,}0 = 0,\ x.(-y) = -xy$
2. *Si* $x \leq y + z$, *entonces* $x - z \leq y$.
3. *Si* $x \leq yz$ *y* $z > 0$, *entonces* $x/z \leq y$.
4. *Si* $x \leq yz$ *y* $z < 0$, *entonces* $x/z \geq y$.
5. *Si* $0 < x < y$, *entonces* $0 < 1/y < 1/x$.
6. $x \leq y$ *si, y sólo si* $x \leq y + z$, *para todo* $z \in \mathbb{R}^+$.

1.1.3. Axioma del supremo.

Es claro que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ cumple todas las propiedades exhibidas hasta el momento. Sin embargo, como ya hemos advertido, en este conjunto no se encuentran suficientes elementos como para medir por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado 1. Debe haber pues alguna otra propiedad exclusiva del conjunto $\mathbb{R}$ que asegure que contiene estos nuevos elementos. Para poder enunciar esta propiedad necesitamos introducir algunos conceptos.

Sea A un subconjunto de números reales no vacío y $z \in \mathbb{R}$. Se dice que z es un **mayorante** o **cota superior** de A si verifica que, para cada $x \in A$,

$$x \leq z.$$

Se dice que z es el **supremo** de A si es el menor de los mayorantes de A.

Invirtiendo el orden en las definiciones anteriores, encontramos los conceptos de **minorante** o **cota inferior** y de **ínfimo**.

Se dirá que un subconjunto A de números reales está **mayorado** (resp. **minorado**) si tiene mayorantes (resp. minorantes).

Se dirá que un subconjunto A de números reales está **acotado** si tiene mayorantes y minorantes. Esto es, si está mayorado y minorado.

Ya podemos enunciar el axioma distintivo del conjunto $\mathbb{R}$, conocido como el axioma del supremo

Axioma VIII:

Todo subconjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo.

Este axioma nos permite incluir, por ejemplo, $\sqrt{2}$ en el conjunto $\mathbb{R}$, ya que es fácil probar que

$$\sqrt{2} = Sup\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}.$$

Por otra parte, es consecuencia inmediata del axioma del supremo, que todo subconjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo. Este hecho nos permite ver que el número e es también un número real, ya que éste puede verse como

$$e = Inf\{(1 + 1/n)^{n+1};\ n \in \mathbb{N}\},$$

aunque también

$$e = Sup\{s_n = 1 + 1 + 1/2 + ... + 1/n!;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Otras consecuencias, algunas sorprendentes, de éste axioma se recogen en el siguiente resultado:

Teorema 1.1.2.

1. *El conjunto de los números naturales no está mayorado.*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in \mathbb{R}^+$ existe un (único) número real positivo $x = \sqrt[n]{y}$ tal que $x^n = y$*
3. *Dados dos números reales $x < y$, existe un número irracional β tal que $x < \beta < y$.*
4. *Dados dos números reales $x < y$, existe un número racional r tal que $x < r < y$.*
5. *Si $P(n)$ es una propiedad relativa a un número natural n y se verifica que $P(1)$ es cierta y que siempre que lo sean $P(1), P(2), ..., P(n)$ lo sea también $P(n + 1)$, entonces dicha propiedad es cierta para todos los números naturales.*

La recta real: representación gráfica del conjunto $\mathbb{R}$

Para tener una idea intuitiva del conjunto, los números reales suele representarse como los puntos de una recta. Para dicha representación fijamos dos puntos sobre una recta horizontal que llamamos origen y punto unidad, y les asignamos los números 0 y 1, respectivamente. El segmento entre 0 y 1 es tomado como unidad de medida y, llevado hacia la derecha del 1, vamos obteniendo los diferentes números naturales. Llevando la misma unidad de medida hacia las izquierda de cero, se obtiene el resto de los números enteros. Los huecos serán rellenados por el resto de los números racionales e irracionales teniendo en cuenta los apartados 3) y 4) del teorema 1.1.2. Así, el hecho de que $x \leq y$ se interpreta como que el " punto " x se encuentra situado a la izquierda del " punto " y.

1.1.4. Valor absoluto de un número real

Dado un número real x, se define su **valor absoluto** por la siguiente regla

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Conviene destacar algunas de sus propiedades:

Proposición Sean x e y dos números reales, entonces

1. $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$.
2. Si $x \neq 0$, entonces $|x| > 0$.
3. $|x| = |-x|$, $|xy| = |x||y|$.
4. $x^2 = |x|^2$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. $|x| \leq y$ si, y sólo si $-y \leq x \leq y$.
6. $||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$,

1.1.5. Intervalos

Otros subconjuntos especialmente interesantes son los llamados intervalos, esto es, hablando rudamente, los conjuntos que no tienen agujeros.

Dados dos números reales a y b, se llamará

Intervalo abierto de extremos a y b, al conjunto

$$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

Intervalo cerrado de extremos a y b, al conjunto

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

Intervalo cerrado en a **y abierto en** b, al conjunto

$$[a,b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}.$$

Intervalo abierto en a **y cerrado en** b, al conjunto

$$]a,b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}.$$

Semirrecta abierta de origen a al conjunto

$$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}.$$

Semirrecta cerrada de origen a al conjunto

$$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}.$$

Semirrecta abierta de extremo b al conjunto

$$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}.$$

Semirrecta cerrada de extremo b al conjunto

$$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}.$$

Estos ocho tipos de conjuntos junto con el propio $\mathbb{R}$ son los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no tienen " agujeros ", esto es, dicho de forma más rigurosa, son los únicos subconjuntos I de números reales que verifican que, para cada dos puntos $x, y \in I$, se tiene que el intervalo $]x, y[$ está contenido en I.

1.1.6. Expresión decimal de un número real

A los elementos del conjunto $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se les denomina números **dígitos**. LLamaremos expresión decimal de un número real dado x a una lista de números dígitos que está unívocamente determinada por dicho número.

Para ver cómo se genera esta asociación (número real-lista de dígitos), comenzamos con el caso particular en que $0 \leq x < 1$. En este caso se puede probar que

Proposición 1.1.3. *Sea $0 \leq x < 1$. Entonces*

1. *Existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, un único $r_n \in \mathbb{Q}$ tal que $10^n r_n \in \mathbb{Z}$ y $r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existen n números dígitos tales que*

$$r_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n}.$$

En tal caso, al número x se le asocia la lista $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ y suele escribirse

$$x = 0'a_1 a_2 ... a_n ...$$

Una tal expresión recibe el nombre de **expresión decimal del número** x.

Así por ejemplo, la expresión decimal del número 1/6 es

$$1/6 = 0'1666..,6...$$

¿Qué ocurre si el número no está en el intervalo $[0, 1[$? Pues bien, para extender esta asociación a cualquier número real usaremos el concepto de parte entera de un número.

Se llama **parte entera** de un número real x al número entero $E(x)$ dado por

$$E(x) = Sup\{p \in \mathbb{Z};\ p \leq x\}.$$

Es inmediato comprobar que para cada $x \in \mathbb{R}$:

1. $E(x) \leq x < E(x+1)$,
2. si p es un número entero verificando:

$$p \leq x < p+1,$$

   entonces $p = E[x]$.

A partir de aquí es claro que para cada número real x, se tiene que $x - E(x)$ es un número real comprendido entre 0 y 1 y por tanto, usando la proposición anterior, tiene su correspondiente lista dígitos asociada $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$. En tal caso, Se llama **expresión decimal de** $x \in \mathbb{R}^+$ a la expresión $E(x)'a_1a_2, ...a_n...$ y suele escribirse

$$x = E(x)'a_1a_2, ..., a_n.$$

Si $x \in \mathbb{R}^-$, basta considerar $-x$ y escribir

$$x = -E(-x)'a_1a_2, ...a_n.$$

Así pues, por comodidad, vamos a suponer que $x \in \mathbb{R}^+$, ya que las definiciones para los números negativos son análogas.

Si la expresión decimal de x es tal que $a_n = 0$ a partir de un cierto valor p, diremos que la expresión decimal de x es **finita** o que x **admite un desarrollo decimal finito** y en tal caso escribiremos

$$x = E(x)'a_1, a_2, ...a_p.$$

Merece la pena destacar que en este caso, claramente, x es un número racional.

Puede ocurrir que un número racional, no admita un desarrollo decimal finito, si bien, en tal caso se advierte que existe una lista de dígitos que se repite periódicamente. Si $E(x)'a_1, a_2, ..., a_n, ...$ es la expresión decimal de un número racional positivo x, donde $a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_q$ es una lista de dígitos que se repite de forma continuada, suele escribirse

$$x = E(x)'a_1, a_2, ..., a_{p-1}, (\widehat{a_p, a_{p+1}, a_{p+2}}, ..., a_q).$$

Una tal expresión recibe el nombre de **expresión decimal periódica**.

Así, por ejemplo $\frac{4}{3} = 1'a_1a_2...a_n, ...$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que, $a_n = 3$. En tal caso escribiremos $4/3 = 1'\widehat{3}$.

La expresión decimal de un número irracional ni es finita ni es periódica.

Sea x un número real positivo, y sea $E(x)'a_1a_2...a_n...$ su expresión decimal. Al valor $E(x)'a_1a_2...a_n$ se le denomina **aproximación decimal de x con n cifras exactas.**

En los cálculos con números irracionales suele usarse la aproximación decimal con cifras exactas, teniendo en cuenta que para ello la última cifra que aparece es fruto del redondeo y que el número de cifras exactas a usar en cada caso dependerá de la precisión que necesitemos. Por ejemplo en lugar de

$$e = 2'718281828459045235360287471352662497757247...,$$

puede escribirse, si en los cálculos sólo necesitamos contar con seis decimales,

$$e \approx 2'718282.$$

1.1.7. Aplicaciones

Con el fin de hacer una definición rigurosa necesitamos recordar algunos conceptos:

Dados dos conjuntos A y B se dice que una correspondencia f entre los elementos de A y de B es una **aplicación entre A y B** si a cada elemento del conjunto A corresponde un sólo elemento del conjunto B. Este hecho suele notarse

$$f : A \longrightarrow B.$$

Al conjunto A se le suele llamar **dominio de la aplicación f** y al conjunto B **rango de la aplicación f**.

Así pues, una aplicación viene determinada por

1. su dominio,
2. el cojunto donde toma valores,

   y
3. la ley de correspondencia, $x \longmapsto f(x)$.

Por otra parte, se dice que una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es

1. **inyectiva** si, para cualesquiera dos elementos $x, y \in A$ tales que $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$), ó equivalentemente si $f(x) = f(y)$ siempre que $x = y$.

2. **sobreyectiva** si el **conjunto imagen de** f,$f(A)$, que no es otro que el conjunto

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R};\ \text{existe}\ \ x \in A,\ \ \text{tal que}\ \ y = f(x)\},$$

coincide con el conjunto donde toma valores la función,

3. **biyectiva** si es sobreyectiva e inyectiva.

Sea $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación inyectiva. A la aplicación cuyo dominio es $f(A)$, cuyo rango es A y que viene definida por la ley $f(x) \longmapsto x$ se le denomina **aplicación inversa** de f y es notada por f^{-1}.

Obsérvese que la función inversa $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ es una aplicación biyectiva.

Dada una aplicación $f : A \longrightarrow B$ y dado un subconjunto C de A, llamaremos **restricción de f al conjunto** C, f/C, a una nueva aplicación cuyo dominio es C, que toma valores en B y cuya ley de correspondencia viene dada por

$$(f/B)(x) = f(x) \ \ (\ x \in B).$$

Sea C un subconjunto de A y $g : C \longrightarrow B$ una aplicación. Llamaremos **extensión de g al conjunto** A, g^A, a una nueva aplicación definida en A, con valores en B y cuya ley de correspondencia está sujeta a la siguiente condición.

$$g^A(x) = g(x) \ \ (\ x \in C).$$

Dados $C \subseteq A$, y $f : A \longrightarrow B$, es claro que f es una extensión de f/C al conjunto A.

1.1.8. Conjuntos finitos e infinitos

Un conjunto A se dice **finito** si es vacío o si existe un número natural n, tal que se puede establecer una aplicación biyectiva entre el propio A y el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$. Además, el número natural n se denominará como el **cardinal de** A,

Un conjunto se dice **infinito** si no es finito.

El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, el de los números irracionales $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ y todos los intervalos son conjuntos infinitos.

Podemos preguntarnos ahora si todos tienen el mismo "número de elementos". Para ello introducimos el siguiente concepto.

Un conjunto A se dice **NUMERABLE** si es vacío o si existe una aplicación inyectiva de él en $\mathbb{N}$.

Claramente todos los conjuntos finitos son numerables y se puede probar que un conjunto infinito es numerable si, y sólo si, existe una aplicación biyectiva de él en $\mathbb{N}$.

Si consideramos las siguientes aplicaciones inyectivas

- $I : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $I(n) = n$,
- $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(-n) = 3^n$, $f(0) = 1$ y $f(n) = 2^n$,
- $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $g(p/q) = f(p)5^q$, siempre que $m.c.d(|p|, q) = 1$, y $q \in \mathbb{N}$

deduciremos que tanto $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Q}$ son conjuntos infinitos numerables y por tanto en algún sentido tiene los mismos elementos.

Sin embargo, se puede probar que no es éste el caso de ninguno de los intervalos ni del conjunto de los números irracionales. Obsérvese que esto último choca con la primera impresión sacada de los apartados 3) y 4) del Teorema 1.1.2.

1.1.9. Relación de ejercicios

1. Supuesto que $\frac{s}{t} < \frac{x}{y}$, donde $s, x \in \mathbb{R}$,$t, y \in \mathbb{R}^+$, probar que
$$\frac{s}{t} < \frac{s+x}{t+y} < \frac{x}{y}.$$

2. Dados los números reales x, y, discútase la validez de las siguientes afirmaciones
   a) $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$
   b) $|x-5| < |x+1|$
   c) $|x| - |y| = |x-y|$

3. Demuéstrese que para cada número natural n se verifica que
   a) $1 + 3 + ... + 2n - 1 = n^2$.
   b) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   c) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$.
   d) $4^n \geq n^2$
   e) $1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n = 2^{n+1}$
   f) $(r+s)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) r^k\, s^{n-k}$, donde $r, s \in \mathbb{R}$ y $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

4. Calcúlense, si existen, el supremo, el máximo, el ínfimo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de números reales:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4 \geq 0\}$,

   b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4 < 0\}$,

   c) $C = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

5. Pruébese que $\sqrt{3}$ es irracional.

6. Pruébese que en toda reunión de personas existen al menos dos que conocen exactamente el mismo número de asistentes.

1.2. Funciones elementales I: Funciones racionales y exponenciales

Sumario

Como ya hemos advertido, el núcleo del curso está constituido por el estudio de aquellas aplicaciones en el que tanto el dominio como el recorrido son subconjuntos de números reales. En esta lección estudiaremos algunos ejemplos importantes de éstas. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.2.1. Funciones reales de variable real.

Llamaremos **función real de variable real** a toda aplicación definida en un subconjunto de números reales y con valores en $\mathbb{R}$, esto es, a toda función función

$$f : A \longrightarrow B,$$

donde A y B son dos subconjuntos no vacíos de números reales.

Sea A un subconjunto de números reales y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es

1. **creciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) \leq f(y)$.

2. **estrictamente creciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.

3. **decreciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) \geq f(y)$.

4. **estrictamente decreciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$.

5. **monótona** (resp. **estrictamente monótona** en A si es creciente o decreciente (resp. estrictamente creciente o decreciente).

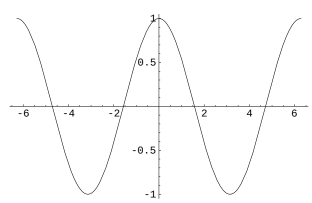
1.2.2. Gráfica de una función

En ocasiones resulta útil tener una "imagen fotográfica"de las funciones, esto se consigue mediante la **gráfica** de dicha función. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se define la gráfica de f, como el conjunto

$$Graf(f) : \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ y = f(x),\ x \in A\}.$$

Es claro que el conjunto $Graf(f)$ es un subconjunto del producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que notaremos por $\mathbb{R}^2$. Al igual que usamos como representación gráfica de $\mathbb{R}$ la recta real, podremos usar el plano como representación gráfica del conjunto $\mathbb{R}^2$ y, por ende, la gráfica de una función real de variable real podrá representarse como un subconjunto de éste.

La idea que ahora queremos resaltar es que la forma de la gráfica revela muchas de las propiedades de la función correspondiente.



Entre ellas estará por supuesto la monotonía, pero habrá otras muchas: acotación, continuidad, derivabilidad, extremos, etc.

1.2.3. Funciones racionales

Veamos algunos ejemplos importantes de funciones reales de variable real.

1. **Función identidad**

   Dada A un subconjunto de números reales, se define la función identidad en A, I_A, como aquella función $I_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que viene definida por

   $$I_A(x) = x, \ \forall x \in A.$$

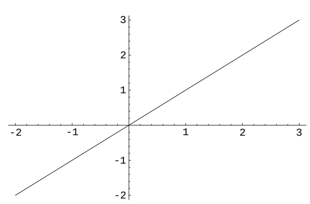
   Dicha función es estrictamente creciente y su gráfica

   $$Graf(I_A) = \{(x, x);\ x \in A\}.$$

   es un subconjunto de la diagonal principal

   $$D := \{(x, x);\ x \in \mathbb{A}\}.$$

   Si $A = [-2, 3]$, entonces su gráfica puede ser representada por

2. **Funciones constantes**

   Dada A un subconjunto de números reales y dado $a \in \mathbb{R}$, se define la función **constante** restringida al conjunto A, C_a, como la función $C_a : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que viene definida por

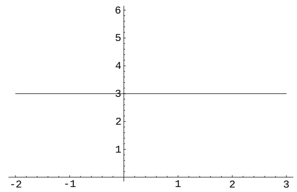
   $$C_a(x) = a, \quad \forall x \in A.$$

   La gráfica de dicha función

   $$Graf(C_a) = \{(x, a);\ x \in \mathbb{R}\}$$

   puede verse como un subconjunto de la recta horizontal $y = a$:

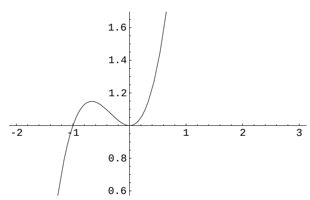
   Si $A = [-2, 3]$ y $a = 3$, entonces su gráfica puede ser representada por



3. Funciones polinómicas

Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice ser **polinómica** si existen $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ números reales tales que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ para cada $x \in A$. La función identidad y toda función constante son ejemplos sencillos de funciones polinómicas.

Si $A = [-2, 3]$ y $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, entonces la gráfica de la función polinómica f puede ser representada por la siguiente figura.



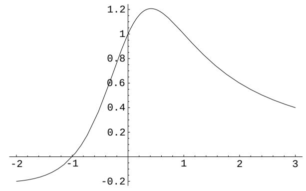
4. Funciones racionales

Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice ser **racional** si existen sendas funciones polinómicas f_1 y f_2, con $f_2(x) \neq 0$, para cada $x \in A$ y tales que, para cada $x \in A$

$$f(x) = f_1(x)/f_2(x).$$

Es claro que todos los ejemplos anteriores lo son de funciones racionales.

Si $A = [-2, 3]$ y $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, entonces la gráfica de la función racional f puede ser representada por

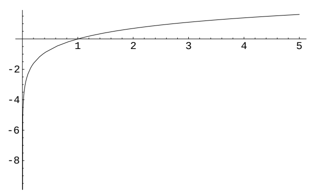


1.2.4. Función logaritmo.

Se define la función **Logaritmo neperiano**, log, como la única biyección estrictamente creciente, que existe de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, verificando:
- $log(1) = 0$
- $log(e) = 1$
- $log(xy) = log(x) + log(y)$.

Como consecuencia, se pueden obtener algunas propiedades tales como que:
- $log(x^p) = plog(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ y para cada $p \in \mathbb{N}$.
- $log(x/y) = log(x) - log(y)$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Si $A =]0, 5]$ entonces la gráfica de la restricción de la función logaritmo neperiano al conjunto A puede ser representada por



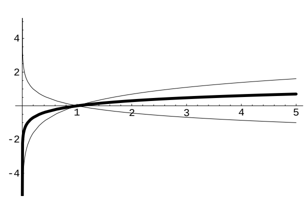
Función logaritmo de base a

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, se llama **función logaritmo de base** a, log_a, a la función definida en $\mathbb{R}^+$ mediante la ley

$$log_a(x) = log(x)/log(a).$$

Si $a > 1$, entonces la función logaritmo de base a es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, mientras que si $a < 1$ entonces es una biyección estrictamente decreciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$.

Así por ejemplo, para $A =]0, 5]$ y para $a = 10$ y a=0,2 las gráficas de las correspondientes restricciones de la función logaritmo al conjunto A pueden ser comparadas con la anterior



1.2.5. Operaciones con funciones.

Antes de seguir con el listado de las funciones elementales conviene hacer algunas precisiones.

1. Algebra de funciones

   En primer lugar hacemos notar que dadas dos funciones fy g definidas sobre un mismo subconjunto de números reales A, se pueden definir las siguientes funciones:

   a) **Función suma**: $f + g$.

   La función suma es una nueva función $f + g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

   Como consecuencia de esta definición aparece, asociadas a cada función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, la llamada **función opuesta**,$-f$, esto es, la función
$$-f : A \longrightarrow \mathbb{R},$$
definida, para cada $x \in A$, por
$$(-f)(x) = -f(x).$$

   b) **Función producto**, $f.g$:

   La función producto es una nueva función $f.g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por
$$f.g(x) = f(x)g(x).$$

   Como consecuencia, siempre $0 \notin f(A)$, definimos la **función inversa para el producto**, $1/f$, como la función
$$1/f : A \longrightarrow \mathbb{R},$$
dada, para cada $x \in A$, por
$$(1/f)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

   c) **Función producto por un escalar** a, af:

   Para cada $a \in \mathbb{R}$, la función , af, es una nueva función de A en $\mathbb{R}$ que viene definida, para cada $x \in A$, por
$$(af)(x) = af(x).$$

2. Composición de funciones

Supongamos ahora que existen sendas funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que el conjunto B contiene al Podemos definir la **función composición** de ambas, $g \circ f$, como la función

$$g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida, para cada $x \in A$, por

$$g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Recordemos que asociada a toda función inyectiva $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos considerar la función inversa, f^{-1}, definida en $f(A)$, con valores en A y que viene definida mediante la ley :

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in A),$$

esto es,

$$f^{-1} \circ f = I_A.$$

Además es claro que

$$f \circ f^{-1} = I_{f(A)}.$$

Es fácil probar, usando estas últimas consideraciones, que toda aplicación estrictamente monótona es inyectiva y que su inversa es igualmente estrictamente monótona y del mismo tipo (creciente ó decreciente).

1.2.6. Función exponencial.

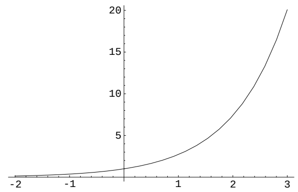
Ya podemos continuar con la lista de ejemplos

Llamaremos **función exponencial**, e^x, a la función inversa del logaritmo neperiano, será por tanto, una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ tal que:
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^{x+y} = e^x e^y$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.
- $e^{logx} = x$
- $log(e^x) = x$.

Su gráfica se puede representar como sigue:

Dados $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$, convendremos en notar

$$x^y = e^{ylogx},$$



en particular se obtiene que:

$$log(x^y) = ylogx,$$

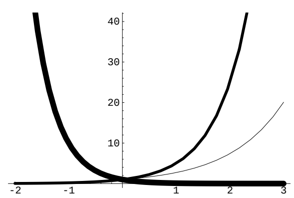
Función exponencial de base a

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, la función $h_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $h_a(x) = a^x$, se denomina **función exponencial de base** a, y se notará por a^x.

Dicha función es estrictamente creciente (resp. decreciente) si $a > 1$ (resp. $a < 1$) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ y verifica las siguientes propiedades:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{x+y} = a^x a^y$.

Sus gráficas para $a = 0,1$ y $a = 5$ se pueden representar como siguen:

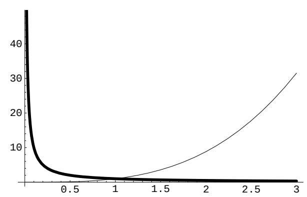


Función potencial

Dado $b \neq 0$, la función $p_b : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $p_b(x) = x^b$, se denomina **función potencial de exponente** b, y se notará por x^b.

Dicha función es estrictamente creciente (resp. decreciente) si $b > 0$ (resp. si $b < 0$) de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y verifica las siguientes propiedades:
- $1^b = 1$
- $(xy)^b = x^b y^b$.

Sus gráficas (para $b = \pi$ y $b = -1$) se pueden representar como siguen:



1.2.7. Funciones definidas a trozos. Funciones parte entera y valor absoluto.

Supongamos que tenemos un subconjunto A de números reales y dos subconjuntos disjuntos de éste B y C tales que $A = B \cup C$. Dispongamos además de sendas funciones reales de variable real g y h definidas respectivamente en B y C. A partir de aquí podemos definir una nueva función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in B \\ h(x) & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

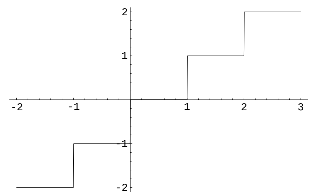
Decimos que una tal función es una **función definida a trozos**. Es evidente que las propiedades de la nueva función dependerán de las propiedades de las funciones que la definen y de la forma en que los subconjuntos se complementan.

Como ejemplos más sencillos veremos los dos siguientes:

Función parte entera:
Se define la función **entera**, E, como la función $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = Sup\{p \in \mathbb{Z};\ p \leq x\}.$$

Dicha función es creciente y su gráfica puede representarse como una escalera " infinita " cuyos peldaños son intervalos de longitud uno, y que, en cada número entero, tiene un " salto " de altura uno.



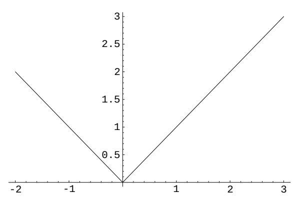
Si $A = [-2, 3]$, entonces la gráfica de la función $E(x)$ restringida al conjunto A puede ser representada por

Función valor absoluto.

Se define la función **valor absoluto** como la función $|.| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida para cada $x \in \mathbb{R}$ por

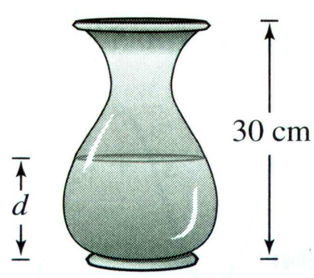
$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

La gráfica puede representarse como la unión de las bisectrices del primer y segundo cuadrante.



1.2.8. Relación de ejercicios.

1. En una vasija de 30 cm de altura entra agua a ritmo constante. Se llena en 5 segundos.Usad esta información y la forma de la vasija para responder a las siguientes cuestiones:



a) Si d representa la profundidad del agua medida en centímetros y t el tiempo transcurrido en segundos, explicad por qué d es función de t.

b) Hallad el dominio y el recorrido de dicha función.

c) Esbozad una posible gráfica de la función.

2. Sea A un subconjunto de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se dice que f es **par** (resp. **impar**) si, para cada $x \in A$, se verifica que $-x \in A$ y que $f(x) = f(-x)$ (resp. $f(x) = -f(-x)$. ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una función par?,¿ y de una función impar? Dense ejemplos de funciones par, impar y no par ni impar.

3. Sea A un subconjunto de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se dice que f está **acotada** (resp. **acotada superiormente / inferiormente**) si su conjunto imagen $f(A)$ es un subconjunto de números reales acotado (resp. superiormente / inferiormente acotado). Prúebese que f está acotada si, y sólo si, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in A$, se verifica que $|f(x)| \leq M$.

4. ¿Qué funciones componen la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos?

$$1)\ f(x) = (log^2 x)e^{x^2}, \qquad 2)\ f(x) = (\sqrt{x})^{logx^3}.$$

Dense otros ejemplos de composición de funciones.

1.3. Funciones elementales II: Funciones trigonométricas

Sumario

Las funciones trigonométricas son importantes porque permiten expresar las distintas relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, y porque sus propiedades le confieren una especial disposición para expresar muchos fenómenos naturales. Estas dos facetas hacen que su empleo en la Física y en la Ingeniería sea muy frecuente. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.3.1. El número π

Consideremos la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \forall t \in [-1, 1].$$

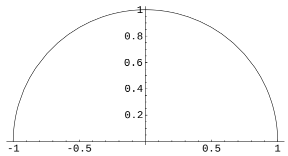
La gráfica de esta función recibe el nombre de **semicircunferencia unidad**.

Notemos por $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}).$$

Es claro que

$$Graf(f) = \gamma([-1, 1]).$$



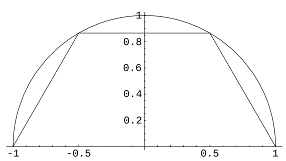
Sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, tal que $t_0 = -1$ y $t_n = 1$ y $t_{i-1} < t_i$, para $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Un tal conjunto P recibe el nombre de **partición del conjunto** $[-1, 1]$. Asociado a esta partición podemos considerar la "poligonal"γ_P que resulta de unir los "segmentos"

$$[\gamma(t_0), \gamma(t_1)], [\gamma(t_1), \gamma(t_2], ..., [\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)].$$

Notemos por $l(\gamma_P)$ a la longitud de la poligonal γ_P determinada por la partición P, esto es,

$$l(\gamma_P) = dist(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + ... + dist(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)).$$

Así, por ejemplo si $P = \{-1, -1/2, 1/2, 1\}$, obtenemos la siguiente poligonal inscrita en la semicircunferencia unidad:



cuya longitud viene dada por:

$$l(\gamma_P) = dist(\gamma(-1), \gamma(-1/2)) + dist(\gamma(-1/2), \gamma(1/2)) + +dist(\gamma(1/2), \gamma(1)).$$

Es notorio que cuanto más puntos tenga la partición, mayor es la longitud de la correspondiente poligonal y, por consiguiente, su longitud está más cercana a la longitud de la semicircunferencia unidad. Es fácil probar que la longitud de dicha semicircunferencia, $l(\gamma)$, no es otra cosa que:

$$l(\gamma) = Sup\{l(\gamma_P);\ P \text{ partición de } [-1, 1]\}.$$

Pues bien, dicha longitud, que es un número real en virtud del axioma del supremo, es conocido como **el número** π. Se puede probar que π no es un número racional.

Pasamos ahora a definir las distintas funciones trigonométricas.

1.3.2. Función arcocoseno

Consideremos ahora, para cada $x \in [-1, 1]$, el trozo de semicircunferencia que es imagen de $\gamma/[x, 1]$. Definimos por

$$l(\gamma/[x, 1]) = Sup\{l(\gamma_Q);\ Q \text{ partición de } [x, 1]\},$$

donde $l(\gamma_Q)$ es la longitud de la " poligonal " asociada a la partición Q.

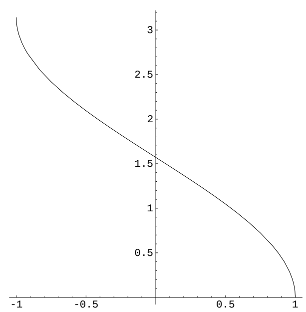
Definimos la función **arcocoseno**, $arc\ cos x$, como la función biyectiva y estrictamente decreciente del intervalo $[-1,1]$ en el intervalo $[0,\pi]$ definida por la ley

$$arc\ cos x = l(\gamma/[x,1]),$$

se puede probar que:

1. $arc\ cos x + arc\ cos(-x) = \pi$.
2. $arc\ cos(0) = \frac{\pi}{2}$.

Y su gráfica puede ser representada como sigue



Antes de pasar al resto de las funciones trigonométricas, vamos definir una propiedad interesante que tienen algunas de las funciones que vamos a definir a continuación: la **periodicidad**.

Se dice que una función $f : A \longmapsto \mathbb{R}$ es una **función periódica**, si existe un número real no nulo T tal que para todo $x \in A$, entonces $x + T \in A$ y

$$f(x+T) = f(x).$$

Dicho número real T recibe el nombre de **periodo de la función** f.

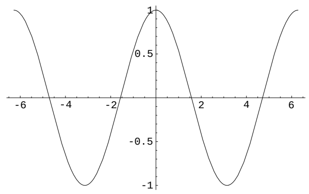
1.3.3. Funciones seno y coseno

Se llama **función coseno** y se nota por <u>$cos x$</u> a la única función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ par y periódica con periodo 2π cuya restricción a $[0,\pi]$ es tal que

$$cos(x) = (arc\ cos)^{-1}(x),$$

y por tanto, para cada $x \in [0,\pi]$,

$$arccos(cos x) = x,$$



y para cada $y \in [-1, 1]$,

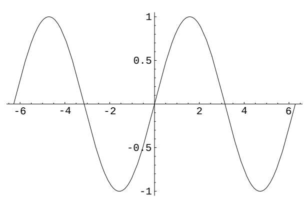
$$cos(arcosy) = y.$$

La gráfica de la función coseno es como sigue

Se llama **función seno**, <u>$senx$</u>, a la única función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ impar y periódica con periodo 2π cuya restricción a $[0, \pi]$ es tal que

$$sen(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}.$$

La gráfica de la función seno es como sigue



El siguiente resultado resume algunas propiedades del seno y coseno.

Teorema 1.3.1.

1. *$sen^2x + cos^2x = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.*

2. *La restricción de la función coseno al intervalo $[0, \pi]$ es una biyección estrictamente decreciente de éste en el intervalo $[-1, 1]$, con*

$$cos0 = 1, \quad cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad cos\pi = -1, \quad cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. *La restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es una biyección estrictamente creciente de éste en el intervalo $[-1, 1]$, con*

$$sen0 = 0, \quad sen(-\frac{\pi}{2}) = -1, \quad sen\frac{\pi}{2} = 1, \quad sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

4. *La imagen de ambas funciones es el intervalo $[-1, 1]$.*

5. *La función coseno es una función par y periódica de periodo 2π:*

$$cosx = cos(-x), \quad cos(x+2\pi) = cosx, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

mientras que la función seno es impar y periódica:

$$sen(-x) = -senx, \quad sen(x+2\pi) = senx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6. $$cos(x+\pi) = -cosx, \quad sen(x+\pi) = -senx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7. $cos(x+y) = cosxcosy - senxseny.$ $\quad sen(x+y) = senxcosy + cosxseny.$

8. *Dados dos números reales a, b, verificando que $a^2+b^2 = 1$, existe un único número real x tal que $x \in]-\pi, \pi]$, $cosx = a$ y $senx = b$.*

9. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $senx = seny$ y $cosx = cosy$, entonces existe un único número entero p tal que $x = y + 2p\pi$.*

10. $\{x \in \mathbb{R};\ cosx = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$ $\quad \{x \in \mathbb{R};\ senx = 0\} = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$

1.3.4. Función tangente

Sea $A = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función tangente**, $\underline{tgx}$, a la función de A en $\mathbb{R}$ definida por

$$tg(x) = \frac{senx}{cosx}.$$

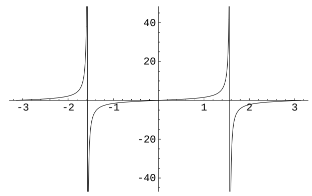
Algunas de sus propiedades pueden verse en el siguiente resultado

Proposición 1.3.2. *1. La función tangente es una función periódica de periodo π, esto es, para cada $x \in A$,*

$$tg(x+\pi) = tg(x).$$

2. *La función tangente restringida al intervalo $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, es una biyección estrictamente creciente de dicho intervalo en $\mathbb{R}$.*

3. *La gráfica de la función tangente restringida al conjunto $[-\pi, \pi]\backslash\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ puede representarse de la siguiente forma:*

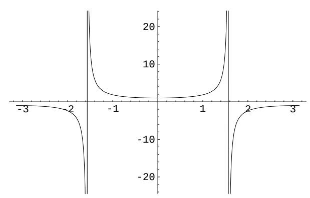


1.3.5. Funciones secante, cosecante y cotangente

Sea $A = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función secante**, $secx$, a la función de A en $\mathbb{R}$ definida por

$$sec(x) = \frac{1}{cosx}.$$

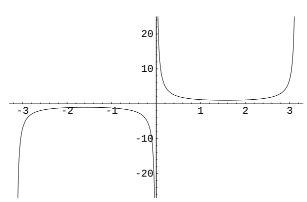
La gráfica de la función secante restringida al conjunto $[-\pi, \pi]\backslash\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ puede representarse de la siguiente forma:



Sea $B = \mathbb{R}\backslash\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función cosecante**, $cosecx$, a la función de B en $\mathbb{R}$ definida por

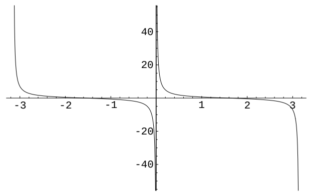
$$cosec(x) = \frac{1}{senx}.$$

La gráfica de la función cosecante restringida al conjunto $A =]-\pi, \pi[/\{0\}$ puede representarse de la siguiente forma:



Llamaremos **función cotangente**, $cotgx$, a la función de B en $\mathbb{R}$ definida por

$$cotg(x) = \frac{cosx}{senx}.$$



La gráfica de la función cotangente restringida al conjunto $A =]-\pi, \pi[/\{0\}$ puede representarse como hemos visto en el dibujo anterior.

1.3.6. Funciones arcoseno y arcotangente.

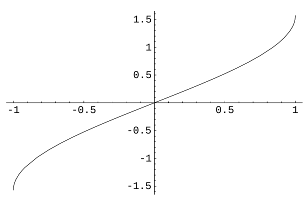
Llamaremos **función arcoseno**, *arc senx*, a la función inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, esto es,

$$arc\ sen[sen(x)] = x,\ (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\ sen[arc\ sen(y)] = y\ \ (y \in [-1, 1]).$$

Dicha función es pues una biyección estrictamente creciente de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-1, 1]$ con

$$arc\ sen(-1) = -\frac{\pi}{2}\quad arc\ sen(0) = 0,\quad arc\ sen(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Su gráfica es como sigue:



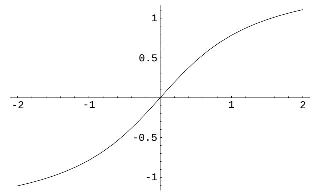
Llamaremos **función arcotangente**, *arc tgx* a la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, esto es,

$$arc\ tg[tg(x)] = x,\ \ tg[arc\ tg(y)] = y.$$

Dicha función es una biyección estrictamente creciente de dicho intervalo en todo el conjunto $\mathbb{R}$ con

$$arc\ tg(0) = 0.$$

Su gráfica de es como sigue:



1.3.7. Identidades Trigonométricas.

Usando las propiedades antes descritas de las funciones trigonométricas pueden deducirse otras muchas conocidas como identidades trigonométricas. A continuación damos algunas de ellas. Dados dos números reales x e y en el dominio correspondiente, obtenemos que:

1. Identidades pitagóricas

$$tg^2(x) + 1 = sec^2(x), \quad \text{ó si se quiere} \quad cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2(x)}}.$$

$$cotg^2(x) + 1 = cosec^2(x), \quad \text{ó si se quiere} \quad sen(x) = \frac{tg(x)}{\sqrt{1 + tg^2(x)}}.$$

2.

$$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx\ tgy}.$$

3. ángulo doble

$$sen2x = 2senxcosx, \quad cos2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sen^2x.$$

4. ángulo mitad

$$sen^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \quad cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x),$$

$$tg(\frac{x}{2}) = \frac{1 - cosx}{senx} = \frac{senx}{1 + cosx}.$$

5. producto

$$senxseny = \frac{1}{2}[cos(x - y) - cos(x + y)],$$

$$cosxcosy = \frac{1}{2}[cos(x - y) + cos(x + y)],$$

$$senxcosy = \frac{1}{2}[sen(x + y) + sen(x - y)].$$

1.3.8. Funciones Hiperbólicas.

Se define la función **coseno hiperbólico**, $coshx$, como una función $cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Se define la función **seno hiperbólico**, $senhx$, como una función $senh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

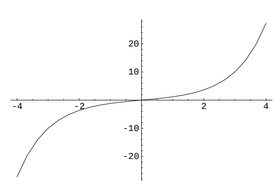
$$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

El siguiente resultado resume algunas propiedades del seno y coseno hiperbólicos.

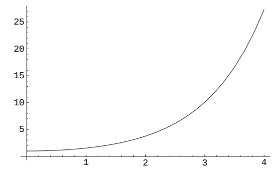
Proposición 1.3.3.

1. *La función coseno hiperbólico es una función par y la función seno hiperbólico es una función impar.*
2. *La función seno hiperbólico es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.*
3. *La restricción de la función coseno hiperbólico a $\mathbb{R}_0^+$ (resp. $\mathbb{R}_0^-$) es una biyección estrictamente creciente (resp. decreciente) de $\mathbb{R}_0^+$ (resp. $\mathbb{R}_0^-$) sobre $[1, +\infty[$.*
4. $$cosh^2x - senh^2x = 1.$$
5. $$cosh(x+y) = coshx\ coshy + senhx\ senhy.$$
$$senh(x+y) = senhx\ coshy\ +\ coshx\ senhy.$$

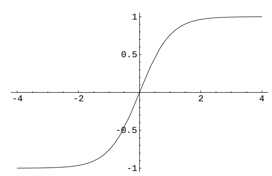
La gráfica del seno hiperbólico es como sigue:



La gráfica de la función coseno hiperbólico restringida a $\mathbb{R}_0^+$ es como sigue



Finalmente, diremos que, por analogía con las funciones trigonométricas, podemos hablar de **tangente hiperbólica**, tgh, la cual es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ sobre $]-1,1[$ y su gráfica es como sigue:



1.3.9. Relación de ejercicios

1. Hállese la función inversa de
   a) $senhx$.
   b) $coshx/_{\mathbb{R}_0^+}$.
2. Sea $g:\mathbb{R}\longrightarrow]-\pi,\pi[$ la función definida por $g(y)=2arctgy$. Hállese en función de y,
   a) $seng(y)$.
   b) $cosg(y)$.

1.4. Sucesiones de números reales

Sumario

Introduciremos en esta lección una herramienta muy potente del análisis matemático: las sucesiones. Esta nos facilitará la comprensión de los conceptos de límite y de continuidad. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.4.1. Acotación, monotonía y convergencia de sucesiones

Una sucesión de elementos de un cierto conjunto A no es más que una "lista ordenada"de elementos de A o dicho de forma más rigurosa: una **sucesión de elementos** de A es una aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

En lugar de escribir $f(n)$ se suele escribir x_n, mientras que la sucesión f suele notarse por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ó simplemente $\{x_n\}$. A la imagen x_n se le denominará término n-ésimo de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Una **sucesión de números reales** no es más que una sucesión en la que $A \subseteq \mathbb{R}$.

Dada una sucesión $\{x_n\}$, al conjunto $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ se le denomina conjunto imagen de la sucesión $\{x_n\}$. Así por ejemplo si consideramos la sucesión $\{1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ su conjunto imagen está formado por sólo dos elementos, a saber $\{0, 1\}$.

Veamos ahora algunas propiedades que pueden tener las sucesiones.

Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

1. está **mayorada**, si existe un número real M tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq M$.
2. está **minorada**, si existe un número real M tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq M$.
3. está **acotada** si está mayorada y minorada. Es fácil probar que una sucesión está acotada si, y sólo si, existe un número real positivo M tal que $|x_n| \leq M$.
4. es **creciente** si, para cada $n \leq m \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \leq x_m$.

5. es **decreciente** si, para cada $n \leq m \in \mathbb{N}$, se tiene que $x_n \geq x_m$).

    Es fácil probar por inducción que una $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (resp. decreciente) si, para cada natural n, $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$.

6. es **convergente** si existe un número real x verificando lo siguiente:

    "para cada intervalo centrado en x, existe un término de la sucesión, a partir del cual, todos los restantes términos están incluidos en dicho intervalo ",

    o escrito en lenguaje formal

    $$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \text{ si } n \geq N \text{ entonces } |x_n - x| < \varepsilon.$$

    Se dice en tal caso que x es el **límite** de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ó que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** x, y suele notarse por

    $$x = lim_n x_n \qquad \text{ó} \qquad \{x_n\} \longrightarrow x.$$

Sea $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ una sucesión. Se dice que $\{y_n\}$ es una sucesión **parcial** de $\{x_n\}$ si

$$y_n = x_{\sigma(n)}.$$

Los ejemplos más sencillos de sucesiones parciales de una sucesión dada son las sucesiones de sus términos pares $\sigma(n) = 2n$ y de sus términos impares $\sigma(n) = 2n + 1$

En el siguiente resultado recogemos más propiedades importantes de las sucesiones.

Proposición 1.4.1.

1. *Toda sucesión convergente tiene un único límite.*

2. *Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, $x \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{x_n\}$ es convergente a x si, y sólo si, la sucesión $\{x_{n+p}\}$ converge también a x.*

3. *Una sucesión es convergente si, y sólo si, todas sus sucesiones parciales convergen al mismo límite.*

4. *La sucesión $\{x_n\}$ converge a cero, si y sólo si la sucesión $\{|x_n|\}$converge a cero.*

5. *Toda sucesión creciente y mayorada $\{x_n\}$ es convergente a $x = Sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. En particular la sucesión $\{x_n\}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1/0! + 1/1! + 1/2! + ... + 1/(n-1)!$ es convergente y su límite es el número e.*

6. *Toda sucesión decreciente y minorada $\{x_n\}$ es convergente a $x = Inf\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. En particular la sucesión $\{1/n^\alpha\}$ converge a cero para todo $\alpha > 0$.*

7. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a x. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq y$, entonces $x \geq y$.*

   Si además se tiene que $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ son dos sucesiones de números reales tales que,

   a) *para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n \leq z_n$,*
   b) *$lim_n z_n = x$,*

   entonces la sucesión $\{y_n\}$ converge también a x.

8. *Si $\{x_n\}$e $\{y_n\}$ son dos sucesiones convergentes respectivamente a x e y, entonces la sucesión*

   a) **suma**, *esto es, la sucesión $\{x_n + y_n\}$ converge a $x + y$.*
   b) **producto**, *esto es, la sucesión $\{x_n y_n\}$ converge a xy.*
   c) **cociente**, *esto es, la sucesión $\{x_n/y_n\}$, converge a x/y siempre que $y \neq 0$ e $y_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

9. *El producto de una sucesión acotada por una convergente a cero es una sucesión convergente a cero.*

Ejemplo:

Pruébese que si $|x| < 1$, entonces la sucesión $\{x^n\}$ converge a cero.

Es fácil probar que toda sucesión convergente está acotada y sin embargo, la sucesión $\{1, 0, 1, 0, ...\}$ que está mayorada por 1 y minorada por 0, luego acotada, demuestra que existen sucesiones acotadas que no son convergentes. No obstante tenemos el siguiente importante resultado parcial

Proposición 1.4.2. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass)*
Toda sucesión acotada admite una parcial convergente.

1.4.2. Sucesiones divergentes

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge positivamente** si

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que si } n \geq N \text{ entonces } x_n > M.$$

Este hecho suele notarse por

$$lim_n x_n = +\infty$$

ó

$$\{x_n\} \longrightarrow +\infty.$$

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge negativamente** si

$$\forall N < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que si } n \geq N \text{ entonces } x_n < N.$$

Este hecho suele notarse por

$$lim_n x_n = -\infty$$

ó

$$\{x_n\} \longrightarrow -\infty.$$

Diremos que que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **divergente** si lo es positivamente o lo es negativamente.

Veamos ahora algunas propiedades de las sucesiones divergentes.

Proposición 1.4.3.

1.- Una sucesión diverge positivamente si, y sólo si, todas sus sucesiones parciales divergen positivamante.

2.- Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, y $p \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{x_n\}$ diverge positivamente si, y sólo si, la sucesión $\{x_{n+p}\}$ diverge positivamente.

3.- Toda sucesión creciente y no mayorada es divergente positivamente. En particular si $|x| > 1$, entonces la sucesión $\{|x^n|\}$ diverge positivamente.

4.- Toda sucesión decreciente y no minorada diverge negativamente.

5.- Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. Si la sucesión $\{x_n\}$ diverge positivamente, entonces la sucesión $\{y_n\}$ también diverge positivamente.

6.- Si $\{a_n\}$ es una sucesión divergente positivamente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{1/a_{n+k}\}$ converge a cero.

7.- Si $\{a_n\}$ es una sucesión de términos positivos que converge a cero, entonces la sucesión $\{1/a_n\}$ divergente positivamente. En particular la sucesión $\{n^\alpha\}$ diverge positivamente para todo $\alpha > 0$.

1.4.3. Relación de ejercicios

1. Probar que si $\{x_n\} \longrightarrow x$, entonces $\{|x_n|\} \longrightarrow |x|$. ¿Es cierto el recíproco?

2. Probar que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas, $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$ también lo son.

3. Estudiar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ en los siguientes casos:

   a) $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

   b) $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4. Dese un ejemplo de una sucesión de números reales...

   a) positivos, convergente a cero, que no sea monótona.

   b) no acotada que admita una parcial convergente.

1.5. Series de números reales

Sumario

Introduciremos en esta lección una de las herramientas más potentes del Análisis Matemático: las series. Nosotros las usaremos para aproximar los valores que se obtendrían al evaluar algunas funciones, ya que dichos valores no son más que la suma de una determinada serie. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.5.1. Series de números reales

Para motivar el concepto de serie de números reales vamos a exponer la siguiente paradoja propuesta por Zenón (495-435 a. de C.)

Paradoja del corredor: " *Un corredor no puede alcanzar nunca la meta.* "

Para justificar esta conclusión vamos a dividir el recorrido total que ha de hacer el corredor en la siguiente forma: consideramos en primer lugar la mitad del recorrido inicial y a éste añadimos la mitad del recorrido restante, a éste último añadimos igualmente la mitad del recorrido restante y así sucesivamente. Obsérvese que para recorrer por separado cada una de estas partes, cada vez más pequeñas, se necesita una cantidad positiva de tiempo, parece natural afirmar que el tiempo necesario para el trayecto total ha de ser la suma de todas estas cantidades de tiempo. Decir que el corredor nunca puede alcanzar la meta equivale a decir que nunca llega en un tiempo finito; o dicho de otro modo, que la suma de un número infinito de intervalos positivos de tiempo no puede ser finita.

Esta paradoja fue resuelta muy posteriormente con la introducción del concepto de serie.

Se llama **serie de números reales** a todo par ordenado de sucesiones de números reales $(\{a_n\}, \{S_n\})$, donde $(\{a_n\}$ es una sucesión arbitraria y, para cada natural n, la segunda sucesión es tal que: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$.

La sucesión $\{S_n\}$ recibe el nombre de **sucesión de sumas parciales de la serie.** Dicha serie suele representarse por $\sum_{n\geq 1} a_n$.

Se dice que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es **convergente** si lo es la sucesión $\{S_n\}$ de sus sumas parciales. Al límite de ésta última sucesión se le denomina **suma de la serie** $\sum_{n\geq 1} a_n$ y se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Antes de pasar a los ejemplos veamos algunas propiedades de las series convergentes.

Proposición 1.5.1. *Sean* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *y* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *dos series de números reales.*

1. *Si la serie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *es convergente entonces la sucesión* $\{a_n\}$ *converge a cero.*

2. *Si ambas series son convergentes y* r, s *son dos números reales, entonces la serie* $\sum_{n\geq 1} ra_n + sb_n$ *es convergente y se verifica que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ra_n + sb_n) = r\sum_{n=1}^{\infty} a_n + s\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3. *Sea* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces la serie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *es convergente si, y sólo si, la serie* $\sum_{n\geq 1} a_{n+k}$ *también lo es. Además en caso de que converjan tenemos que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}.$$

4. *Supongamos que, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $|a_n| \leq b_n$. *Si la serie* $\sum_{n\geq 1} b_n$ *es convergente entonces* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *también es convergente y se verifica que:*

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

En particular , si la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ *es convergente también lo es la serie* $\sum_{n\geq 1} a_n$.

5. *(***Criterio de condensación***) Si la sucesión* $\{a_n\}$ *es una sucesión decreciente de números reales no negativos, entonces la serie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *es convergente si, y sólo si, la serie* $\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n}$ *también lo es.*

Veamos ahora algunos ejemplos de series

1. **Serie geométrica de razón** $r \neq 1$.

   Es aquella cuyo término general es $a_n = r^{n-1}$ y cuya sucesión de sumas parciales es por tanto $S_n = 1 + r + ... + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$. De aquí se deduce que dicha serie es convergente si, y sólo si, $|r| < 1$. Además en caso de que sea convergente se tiene que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}.$$

2. **Serie cuyo término general es** $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$.

   Es aquella cuya sucesión de sumas parciales correspondiente es
   $$S_n = 1 + 1 + 1/2 + ... + \frac{1}{(n-1)!}.$$
   Veremos más adelante que dicha serie es convergente, de hecho, se puede probar que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n-1)! = e.$$

3. **Serie armónica**.

   Es aquella cuyo término general es $a_n = 1/n$ y cuya sucesión de sumas parciales es por tanto $S_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n$. Se puede probar, usando la última propiedad que que dicha serie no es convergente. En general se puede probar, usando esta misma propiedad, que la serie cuyo término general es $a_n = 1/n^{\alpha}$ es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

4. **Serie armónica-alternada**.

   Es aquella cuyo término general es $a_n = (-1)^{n+1}/n$ y cuya sucesión de sumas parciales es por tanto $S_n = 1 - 1/2 + ... + (-1)^{n+1}/n$. Más tarde deduciremos que dicha serie es convergente, de hecho se puede probar que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n = log2.$$

Obsérvese que este último ejemplo prueba que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente y no lo es la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$. Esto da pie a la siguiente definición.

Se dice que una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ es convergente.

Resumiendo hemos visto que:

absolutamente convergente $\Rightarrow$ convergente

convergente $\not\Rightarrow$ absolutamente convergente.

Desafortunadamente, a excepción de los ejemplos anteriormente ya citados y algunos derivados de ellos, para el resto de las series convergentes es difícil calcular la suma. Esto nos obliga a reducir nuestro estudio a probar si una determinada serie es convergente o no.

1.5.2. Criterios de convergencia

1. **Series de términos no negativos**

Obsérvese que si una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es de términos no negativos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, entonces la serie de sumas parciales es una sucesión creciente, y por tanto, convergente si, y sólo si, está mayorada. En consecuencia. la serie es convergente si, y sólo si, la sucesión de sumas parciales está mayorada. Esta particularidad justifica que, para estas series, dispongamos de numerosos criterios de convergencia. Por otra parte, es claro que, después de las propiedades vistas con anterioridad, sólo las series $\sum_{n\geq 1} a_n$, cuyos conjuntos $\{n \in \mathbb{N}; a_n < 0\}$ ó $\{n \in \mathbb{N}; a_n > 0\}$ sean infinitos quedan excluidos de este epígrafe.

Veamos algunos criterios de convergencia para este tipo de series.

Teorema 1.5.2. *(Criterio de comparación)*

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales no negativos y $\{b_n\}$ una sucesión de números reales positivos.

a) *Si la sucesión $\{a_n/b_n\}$ converge a un número positivo, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge si, y sólo si, converge la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$.*

b) *Si la sucesión $\{a_n/b_n\}$ converge a cero y la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.*

c) *Si la sucesión $\{a_n/b_n\}$ diverge positivamente y la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente.*

Conviene resaltar que este criterio se mostrará más potente cuánto mayor número de ejemplos conozcamos su convergencia. En este conocimiento es indispensable recordar que la serie cuyo término general es $a_n = 1/n^\alpha$ es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

Veamos ahora algunos criterios de convergencia intrínsecos, esto es, criterios que involucran sólo a la propia serie.

En primer lugar, obsérvese que si el el conjunto $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \geq 1\}$ es infinito, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente, ya que podríamos construir una parcial de la sucesión término general no convergente a cero.

Veamos a continuación un primer criterio positivo

Teorema 1.5.3. *(Criterio de la raíz)*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales no negativos y $L \in [0,1[$. Si la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ converge a L, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

Si los términos son positivos el siguiente criterio es más cómodo

Teorema 1.5.4. *(Criterio del cociente)*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos y $L \in [0,1[$. Entonces

a) *Si la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ converge a L, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.*

b) *Si la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ converge a $1/L$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente.*

Como consecuencia obtenemos por ejemplo que la serie $\sum_{n\geq 1} 1/n!$ es convergente.

Obsérvese que, cuando dicho cociente $\{a_{n+1}/a_n\}$ tiende a uno, este criterio nos deja sin información. En algunos casos esta laguna se resuelve con un tercer criterio:

Teorema 1.5.5. *(Criterio de Raabe)*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos y $L \in [0,1[$. Entonces

a) *Si la sucesión $\{n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})\}$ converge a L, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$* **no** *es convergente.*

b) *Si la sucesión* $\{n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})\}$ *converge a* $1/L$, *entonces la serie* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *es convergente.*

2. **Series de términos cualesquiera**

La estrategia que seguiremos para las series no incluidas en el apartado anterior será la de estudiar primeramente si son absolutamente convergentes, y para ello usaremos los criterios del apartado anterior. Si son absolutamente convergentes, en virtud de lo ya visto, serán también convergentes, en otro caso necesitaríamos de algún otro criterio. En este curso sólo veremos el criterio de Leibnitz para series alternadas.

Teorema 1.5.6. *(Criterio de Leibnitz)*
Si $\{a_n\}$ *es una sucesión de números reales decreciente y convergente a cero, entonces la serie* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$ *es convergente.*

Como consecuencia ya podemos justificar que la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}/n$ es convergente.

1.5.3. Relación de ejercicios

Estúdiese la convergencia de las siguientes series de números reales:

1. a) $\sum \frac{1}{n2^n}$, b) $\sum \frac{log(n)}{n}$, c) $\sum \frac{1}{2n-1}$, d) $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$.

2. a) $\sum \frac{2^n}{n}$. b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. c) $\sum \frac{1}{nlog(n)}$. d) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

3. a) $\sum (-1)^n \frac{2n-1}{2^n}$. b) $\sum \frac{1}{n!}$. $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

4. a) $\sum (-1)^n \frac{1}{log(n)}$. b) $\sum \frac{n^n}{e^{n^2+1}}$. c) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$.

1.6. El espacio euclídeo. Campos vectoriales y escalares

Sumario

En esta lección nos centramos en la estructura euclídea de $\mathbb{R}^n$, que es indispensable para extender las propiedades y conceptos vistos en el conjunto $\mathbb{R}$. Asociaremos a cada función definida en un subconjunto A de $\mathbb{R}^q$ con valores en $\mathbb{R}^n$ n funciones definidas en A y con valores en $\mathbb{R}$, técnica que resultará muy eficaz más adelante. Realmente, como veremos, nuestro estudio se podría ceñir a los casos en que $n, q \in \{1,2,3\}$ que son en los que trabajaremos siempre, sin embargo, la estructura euclídea puede definirse sin dificultad para cualquier n. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.6.1. Estructura algebraica

Dado $n \in \mathbb{N}$, consideremos en el conjunto

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times .\overset{n}{.}. \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_n);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\},$$

la siguiente operación **Suma**:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) :$$

Es claro que esta operación hereda las propiedades de la suma de números reales:

1. Propiedad asociativa:

$$[(x_1, x_2, ..., x_n)+(y_1, y_2, ..., y_n)]+(x_1, x_2, ..., z_n) = (x_1, x_2, ..., x_n)+[(y_1, y_2, ..., y_n)+(z_1, y_2, ..., z_n)].$$

2. Propiedad conmutativa:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) + (x_1, x_2, ..., x_n).$$

3. Propiedad de existencia de elemento neutro:

Existe una n-upla, $(0, 0, ..., 0)$ tal que para cada n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$, se tiene que

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (0, 0, ..., 0) = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

4. Propiedad de existencia de elemento simétrico:

Para cada n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$, la n-upla $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$, verifica que

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, ..., -x_n) = (0, 0, ..., 0).$$

Por otra parte, únicamente en el caso $n = 2$ se puede definir un producto con propiedades aceptables, pero este hecho no lo trataremos aquí. En el caso $n > 2$ **no es posible definir ningún producto interesante** desde nuestro punto de vista. Sin embargo, vamos a definir dos "seudo-productos"que en muchos casos serán suficientes para poder trabajar.

En primer lugar, definiremos el **producto por un escalar**, el cual asocia a cada pareja formada por un escalar t y una n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ una nueva n-upla definida por

$$t(x_1, x_2, ..., x_n) = (tx_1, tx_2, ..., tx_n).$$

Este seudo-producto hereda algunas propiedades:

1) Para cada n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se tiene que:

$$1(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

2) Propiedad seudo-asociativa:

Para cada dos dos escalares $t, s \in \mathbb{R}$ y una n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se tiene que:

$$t[s(x_1, x_2, ..., x_n)] = ts(x_1, x_2, ..., x_n).$$

3) Propiedad seudo-distributiva:

Para cada dos dos escalares $t, s \in \mathbb{R}$ y una n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se tiene que:

$$(s + t)(x_1, x_2, ..., x_n) = s(x_1, x_2, ..., x_n) + t(x_1, x_2, ..., x_n)$$

4) Propiedad seudo-distributiva:

Para cada dos dos n-uplas, $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n)$ y un escalar $s \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$s[(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n)] = s(x_1, x_2, ..., x_n) + s(y_1, y_2, ..., y_n).$$

Este hecho se expresa diciendo que $\mathbb{R}^n$ dotado con las operaciones **suma** y **producto por un escalar** arriba definidas tiene estructura de **espacio vectorial**. A partir de aquí podemos llamar **vectores** a las n-uplas.

1.6.2. Estructura euclídea

El segundo seudo-producto que vamos a ver, asocia a cada par de n-uplas un escalar.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Dados $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, llamamos **producto escalar** de ambos, $< x, y >$, al número real definido por

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

En algunos libros de Física, suele escribirse $x.y$ en lugar de $< x, y >$. Se dice que dos vectores x e y son **ortogonales** si $< x, y >= 0$, en tal caso se escribe $x \perp y$.

Esta ley verifica las siguientes propiedades:

Proposición 1.6.1. *Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, se tiene que:*

1. $< x, y >=< y, x >$.
2. $r < x, y >=< rx, y >=< x, ry >$.
3. $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$.
4. $< x, x >\geq 0$.
5. $< x, x) > 0$ *si, y sólo si* $x \neq 0$.

Este hecho se expresa diciendo que el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ dotado con esta nueva " operación"tiene estructura de **espacio euclídeo**.

1.6.3. Conceptos topológicos

Entre las consecuencias más notorias de la existencia de un producto escalar podemos subrayar la existencia de una función, que en $\mathbb{R}$ coincide con la función valor absoluto, y que asocia a cada vector un número real no negativo. Concretamente, dado $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos su **norma**, $\|x\|$, mediante la siguiente ley:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Es fácil probar que la aplicación definida por $x \longmapsto \|x\|$ hace el mismo papel que la función valor absoluto en $\mathbb{R}$, tal como muestra, entre otras cosas, el siguiente resultado:

Proposición 1.6.2.

1. $| < x, y > | \leq \|x\| \ \|y\|$. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)*
2. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y >$. *(Teorema de Pitágoras)*
3. $\|rx\| = |r|\|x\| \quad (r \in \mathbb{R})$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(Desigualdad triangular)*
5. $\|x\| = 0$*, si y sólo si* $x = 0$.

La importancia de la existencia de esta función-norma estriba en el hecho de que ésta nos capacita para definir una " distancia " entre dos vectores, y por tanto, la proximidad o lejanía de dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Concretamente, para cada dos vectores

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definimos la distancia entre ellos, por

$$dist(x, y) = \|y - x\|.$$

A su vez ésta nos permite considerar :

1. <u>Conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que hacen el mismo papel que los intervalos de $\mathbb{R}$:</u>

   a) **Bola abierta de centro** $a \in \mathbb{R}^n$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

   $$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \ \|x - a\| < r\}.$$

   b) **Bola cerrada de centro** $a \in \mathbb{R}^n$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

   $$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \ \|x - a\| \leq r\}.$$

2. Conjuntos que juegan el papel de los extremos del intervalo:

Esfera de centro $a \in \mathbb{R}^n$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

$$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x-a\| = r\}.$$

3. Conjunto acotado

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^n$. Se dice que A es un **conjunto acotado** si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$A \subseteq B(0,M).$$

Ejemplo: Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in]0,1[,\ y \in [0,2]\}$.

Es claro que el conjunto A es acotado en $\mathbb{R}^2$, mientras que el eje x no lo es.

4. Punto de acumulación y punto adherente

Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de acumulación** (respectivamente **punto adherente**) de A, $x_0 \in A'$ (resp. $x_0 \in \overline{A}$), si todo bola " punteada " centrada en x_0 intersecta al conjunto A, esto es

$$B(x_0,\varepsilon)\backslash\{x_0\} \bigcap A \neq 0, \quad \forall\varepsilon > 0,$$

(resp. toda bola centrada en x_0 intersecta al conjunto A, esto es,

$$B(x_0,\varepsilon) \bigcap A \neq 0, \quad \forall\varepsilon > 0).$$

Notaremos por A' (resp. por $\overline{A}$) al conjunto de puntos de acumulación (resp. puntos adherentes) de A. Es claro que $\overline{A} = A' \bigcup A$.

Ejemplo: Si consideramos el mismo conjunto A, considerado anteriormente, tendremos que $(0,1) \in A'$.

5. Punto interior

Se dice que $y \in A$ es un **punto interior** de A, si existe $r > 0$ tal que $B(y,r) \subseteq A$.

Notaremos por A° al conjunto de puntos interiores de A.

Ejemplo: Considerando el mismo conjunto anterior, se tiene que $(1/2,1) \in A^\circ$.

6. Conjunto abierto

Diremos que un conjunto A es **abierto** si $A = A^{\circ}$.

Ejemplo: El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in]0,1[,\ y \in]0,2[\}$ es abierto, mientras que el conjunto A, que usamos en todos los ejemplos, no lo es.

7. Conjunto cerrado

Diremos que un conjunto A es **cerrado** si $A' \subseteq A$ ó equivalentemente si $A = \overline{A}$. Es fácil probar que A es cerrado si su complementario es abierto.

Al conjunto $\overline{A} \backslash A^{\circ}$ se le denomina **frontera** de A y suele notarse por $Fr(A)$ o por $\delta(A)$.

Ejemplo: El conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1],\ y \in [0,2]\}$ es cerrado, mientras que el conjunto B anterior no lo es. Es claro que

$$Fr(C) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0, y \in [0,2]\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1, y \in [0,2]\}$$

$$\bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1], y = 0\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1], y = 2\}.$$

8. Conjunto compacto

Diremos que un conjunto A es **compacto** si A es cerrado y acotado.

Ejemplo: El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0,1],\ y \in [0,2]\}$ es compacto, mientras que el conjunto A no lo es.

1.6.4. Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces una aplicación

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow A,$$

que notaremos por $\{x^p\}_{p \in \mathbb{N}}$, donde $x^p = (x_1^p, x_2^p, ..., x_n^p) = f(p)$, diremos que es una **sucesión de vectores de A, ó si se quiere, de $\mathbb{R}^n$**.

Se dice que una sucesión $\{x^p\}_{p \in \mathbb{N}}$ es **convergente** si existe un vector $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ verificando que:

"para cualquier bola abierta de centro x, existe un término de la sucesión a partir del cual, todos los restantes términos están incluidos en dicha bola, "

ó escrito en lenguaje matemático

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que si } p \geq N \text{ , entonces } x^p \in B(x, \varepsilon).$$

Se dice en tal caso que x es el **límite** de la sucesión $\{x^p\}_{p\in\mathbb{N}}$ ó que la sucesión $\{x^p\}_{p\in\mathbb{N}}$ **converge a** x, y suele notarse por

$$x = lim_p\{x^p\}$$

ó

$$\{x^p\} \longrightarrow x.$$

En el siguiente resultado recogemos algunas propiedades importantes de las sucesiones convergentes.

Proposición 1.6.3.

a) *Toda sucesión convergente tiene un único límite.*

b) *Sea $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\{x^p\}$ converge a x si, y sólo si, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, la sucesión de números reales $\{x_i^p\}_{p\in\mathbb{N}}$ converge a x_i.*

c) *Toda sucesión acotada admite una parcial convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass).*

d) *Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces x es un punto adherente de A si, y sólo si, existe una sucesión de elementos de A que converge a x.*

Ejemplo: Calcular el límite de la sucesión $\{(\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n})\}$.

1.6.5. Campos vectoriales y escalares

A las funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^q$ y con valores en $\mathbb{R}$ las llamaremos **campos escalares**. Mientras que a las funciones definidas en dicho tipo de subconjunto pero con valores en $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ se les denominará **campos vectoriales**.

Veamos algunos ejemplos:

a) Proyecciones

Sea $q \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., q\}$ se puede considerar la aplicación

$$p_i : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$p_i : (x_1, x_2, ..., x_q) \longmapsto x_i.$$

Dicha aplicación recibe el nombre de **proyección i-ésima**. Cada función proyección es un campo escalar.

b) Inyecciones.

Podemos considerar ahora la aplicación

$$I_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q,$$

definida por

$$I_i : r \longmapsto (0, 0, ...,^{i)} r, 0, ..., 0).$$

Dicha aplicación recibe el nombre de **inyección i-ésima** y es un ejemplo sencillo de campo vectorial.

c) La función norma

Podemos considerar el campo escalar

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

definido por

$$x \longmapsto \|x\|.$$

Dicha aplicación recibe el nombre de **función norma**

Vistas las propiedades de $\mathbb{R}^n$, es fácil comprender que dadas dos campos vectoriales se pueden sumar pero **no** multiplicar y que en cambio, todo campo vectorial sí se puede multiplicar por un campo escalar.

1.6.6. Funciones coordenadas

Nuestro objetivo ahora es señalar cómo todo campo vectorial con valores en $\mathbb{R}^n$ puede relacionarse con n campos escalares.

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. El campo escalar

$$f_i = p_i \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde p_i es la correspondiente proyección $i-$ésima, recibe el nombre de **función coordenada i-ésima**.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se puede comprobar fácilmente que

$$f = \sum_{i=1}^{n} I_i \circ f_i,$$

donde por I_i queremos indicar la correspondiente función inyección i-ésima.

Más adelante veremos cómo las propiedades de un campo vectorial están íntimamente relacionadas con las propiedades de sus funciones coordenadas.

(Extremos absolutos)

Veamos finalmente la definición de extremos para un campo **escalar**. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Se dice que

a es un **máximo absoluto**, ó simplemente que es un máximo, de f, ó que f **alcanza su máximo en** a si se verifica que

$$f(a) \geq f(x),\ \forall x \in A.$$

a es un **mínimo absoluto** ó simplemente que es un mínimo, de f ó que f **alcanza su mínimo en** a si se verifica que

$$f(a) \leq f(x),\ \forall x \in A.$$

a es un **punto extremo** de f si ó bien es un máximo ó bien es un mínimo.

1.6.7. Relación de ejercicios

a) Pruébese que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se verifica :
$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ (Identidad del paralelogramo).

b) Probar que si $\{x_n\} \longrightarrow x$, entonces $\{||x_n||\} \longrightarrow ||x||$. ¿Es cierto el recíproco?

c) Descríbanse el interior, la adherencia, la acumulación y la frontera de los siguientes Conjuntos:

1) a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Q}$. c) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. d) $[0,1] \cup \{2\}$. e) $\{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$.
2) $A = \{(x_n, y_n);\ x_n = \frac{20}{n}, y_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.
3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = rx\}$. $(r \in \mathbb{R})$
4) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ $(0 < a < b \in \mathbb{R}$.
5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ $(0 < a < b < c \in \mathbb{R}$.
6) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ $(0 < a < b \in \mathbb{R}$.

Capítulo II: Continuidad y límite funcional

En este capítulo tratamos el concepto de continuidad, una de la idea más fascinante de toda la matemática. Hablando intuitivamente, la idea se puede entender con el siguiente ejemplo:

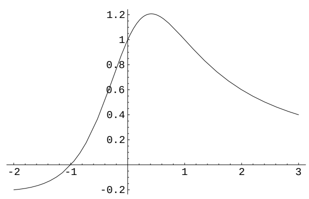
Consideremos una ley física de la forma $P = f(V)$, que relaciona los valores de una "variable independiente V"(podemos pensar que es el volumen de un gas) con otra "variable dependiente P"(podemos pensar que es la presión). Si queremos usar dicha ley, hemos de medir un valor Vo de la variable V, y es inevitable que al hacerlo cometamos algún error el cual, naturalmente, influye en el correspondiente valor de P, que ya no será exactamente igual a $P_0 = f(V_0)$. Surge así la pregunta natural: ¿de qué forma el error en la medida de V afecta al valor resultante de P? Es claro que si para valores de V "muy próximos " a Vo obtengo valores de P muy diferentes entre sí, la ley "f "que relaciona V con P no tendrá ninguna utilidad práctica. Una ley resultará práctica, por el contrario, si para cualquier sistema de medida, inventado y no inventado, la mayor precisión en la medida del volumen V_0 repercuta en la mayor precisión del valor de la presión P_0. Cuando esto ocurre decimos que la ley "f " es continua en Vo.

Resumiendo: se dice que una función f es continua en un punto a, si siempre que x se acerque al punto a, de cualquier forma, el correspondiente valor de la función $f(x)$ se acerca a $f(a)$.

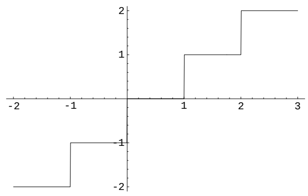
Por otra parte, la continuidad de una función es fácilmente reconocible sin más que observar su gráfica:

Repasemos alguno de los ejemplos visto anteriormente

Recordemos que si $A = [-2, 3]$ y $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, entonces su gráfica puede ser representada por



por lo que puede adivinarse que esta función es continua en todo su dominio. Sabemos en cambio que la gráfica de la función $E(x)$ restringida al conjunto A puede ser representada por



lo que pone de manifiesto que la función parte entera no es continua en los valores enteros del dominio.

Cuando se empezó a desarrollar el Cálculo, la mayor parte de las funciones con las que se trabajaba eran continuas, y por tanto no se tenía la necesidad de penetrar en el significado exacto de continuidad. Fue ya entrado el siglo XVIII cuando se presentaron algunas funciones discontinuas en conexión con distintos problemas de la Física. En particular, los trabajos de Fourier sobre la Teoría del calor. Despues de varios intentos más o menos afortunados, Cauchy dio por primera vez en 1821 una definición matemática satisfactoria, que aún hoy día, puede exponerse más fácilmente por medio del concepto de límite que introduciremos también en este segundo cápitulo.

Índice general

Capítulo 1

Números reales, vectores y funciones

Capítulo 2

Continuidad y límite funcional.

2.1. Límite Funcional

Sumario

En esta lección y en la siguiente trataremos el concepto de límite funcional, uno de los más importantes de toda la matemática. De forma intuitiva, una función tiene límite L en un punto x_0 si en todo punto próximo a x_0 la función toma un valor próximo a L. Para una formulación más rigurosa introduciremos previamente el concepto de punto de acumulación de un conjunto. En la primera lección trataremos con funciones reales devariable real. Finalmente diremos que el concepto de límite funcional es indispensable para entender los conceptos de continuidad y de derivación. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.1.1. Puntos de acumulación.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales. Recordemos que x_0 es un punto de acumulación de A, $x_0 \in A'$,

"si todo intervalo centrado en x_0 tiene algún punto, distinto del propio x_0, en común con A,

ó, escrito en lenguaje de sucesiones

"si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, distintos de x_0, y convergente al propio x_0,

Diremos que x_0 es un **punto de acumulación por la derecha** si $x_0 \in (A^+_{x_0})'$, donde

$$A^+_{x_0} = \{x \in A;\ x > x_0\},$$

lo que en lenguaje de sucesiones puede escribirse,
"si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, mayores que x_0, y convergente al propio x_0. "

ó, escrito en lenguaje de intervalos,

"si todo intervalo de extremo inferior x_0 tiene algún punto, distinto del propio x_0, en común con A. "

Diremos que x_0 es un **punto de acumulación por la izquierda** si $x_0 \in (A^-_{x_0})'$, donde

$$A^-_{x_0} = \{x \in A;\ x < x_0\},$$

lo que en lenguaje de sucesiones puede escribirse,

"si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, menores que x_0, y convergente al propio x_0."

ó, escrito en lenguaje de intervalos,

"si todo intervalo cuyo extremo superior es x_0 tiene algún punto, distinto del propio x_0, en común con A,

Es fácil probar que $x_0 \in A'$ si, y sólo si $x_0 \in (A^-_{x_0})' \cup (A^+_{x_0})'$

2.1.2. Límite funcional y límites laterales.

Límite funcional:

Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $x_0 \in A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f **tiene límite en el punto** x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"para cada intervalo J centrado en L, existe un intervalo I centrado en x_0 tal que $f(I \backslash \{x_0\} \cap A) \subseteq J$",

esto es, en lenguaje más formal

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta, \ x \in A \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

ó si se quiere en lenguaje de sucesiones:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, distintos de x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L".

El tal valor L, si existe es único y recibe el nombre **límite** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0} f(x).$$

Observación 2.1.1. Es importante hacer notar que la igualdad anterior encierra dos afirmaciones: que f tiene límite en el punto x_0 y que dicho límite vale L.

Límites laterales:

Supongamos que $x_0 \in (A^+_{x_0})'$. Se dice que f tiene **límite por la derecha** en el punto x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, mayores que x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L".

ó en lenguaje formal

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } 0 < x - x_0 < \delta, \ x \in A \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Diremos que L es el **límite por la derecha** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Supongamos que $x_0 \in (A^-_{x_0})'$. Se dice que f tiene **límite por la izquierda** en el punto x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, menores que x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L".

ó en lenguaje formal

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } 0 < x_0 - x < \delta, \ x \in A \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Diremos que L es el **límite por la izquierda** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Relación entre el límite ordinario y los límites laterales

Proposición 2.1.2. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $x_0 \in A'$, $L \in \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1. *Si $x_0 \notin (A^-_{x_0})'$, entonces*

$$L = lim_{x \to x_0} f(x) \text{ si, y sólo si, } L = lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

2. *Si $x_0 \notin (A^+_{x_0})'$, entonces*

$$L = lim_{x \to x_0} f(x) \text{ si, y sólo si, } L = lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

3. *Si $x_0 \in (A^-_{x_0})' \bigcap (A^+_{x_0})'$, entonces*

$$lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ si, y sólo si, } lim_{x \to x_0^+} f(x) = lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

4. *Supongamos que $x_0 \in (A^+_{x_0})'$ y llamemos $g = f/A^+_{x_0}$. Entonces*

$$lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \text{ si, y sólo si, } lim_{x \to x_0} g(x) = L.$$

5. *Supongamos que $x_0 \in (A^-_{x_0})'$ y llamemos $h = f/A^-_{x_0}$. Entonces*

$$lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \text{ si, y sólo si, } lim_{x \to x_0} h(x) = L.$$

2.1.3. Límites en el infinito.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales no mayorado y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f **tiene límite en** $+\infty$ si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que diverge positivamente, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L ",

ó dicho en lenguaje de intervalos

" Para cada intervalo J centrado en L existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(]M, +\infty[\cap A) \subseteq J$ ",

ó dicho en lenguaje más formal:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \text{ tal que si } x > M,\ x \in A \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

El tal límite L, caso de existir, es único. Diremos que L es el **límite en** $+\infty$ de f y escribiremos:

$$L = lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Nota

Nótese que si $L = lim_{x \to +\infty} f(x)$, en particular, el límite de la sucesión $\{f(n)\}$ es L. Este hecho nos proporciona un nuevo método para el cálculo de límite de sucesiones.

Si A es un subconjunto no vacío de números reales no minorado, se dice que f **tiene límite en** $-\infty$ si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que diverge negativamente, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L".

ó dicho en lenguaje de intervalos

"Para cada intervalo J centrado en L existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(]-\infty, M[\cap A) \subseteq J$ ",

ó dicho en lenguaje más formal:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \text{ tal que si } x < M,\ x \in A \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En todo caso diremos que L es el **límite en** $-\infty$ de f y escribiremos:

$$L = lim_{x \to -\infty} f(x).$$

2.1.4. Funciones divergentes

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $x_0 \in A'$. Se dice que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge positivamente en el punto** x_0 si verifica la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, distintos de x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ diverge positivamente",

dicho en lenguaje de intervalos:

"Para cada semirrecta de origen M, existe un intervalo I centrado en x_0 tal que $f(I\backslash\{x_0\} \cap A) \subseteq]M, \ +\infty[$, "

esto es, en lenguaje más formal:

$$\forall M, \exists\delta > 0, \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta, \ x \in A \text{ entonces } f(x) > M.$$

Y escribiremos:

$$lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty.$$

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $x_0 \in A'$. Se dice que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge negativamente en el punto** x_0 si verifica la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, distintos de x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ diverge negativamente",

dicho en lenguaje de intervalos:

"Para cada semirrecta de extremo M, existe un intervalo I centrado en x_0 tal que $f(I\backslash\{x_0\} \cap A) \subseteq] - \infty, \ M[$, "

esto es, en lenguaje más formal:

$$\forall M, \exists\delta > 0, \text{ tal que si } 0 < |x - x_0| < \delta, \ x \in A \text{ entonces } f(x) < M.$$

Y escribiremos:

$$lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

Si A es un subconjunto no vacío de números reales no mayorado. Diremos que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge positivamente en** $+\infty$ si verifica la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que diverge positivamente, la sucesión $\{f(x_n)\}$ diverge positivamente."

dicho en lenguaje de intervalos:

"Para cada semirrecta de origen M, existe una semirrecta de origen N tal que $f(]N,+\infty[\cap A) \subseteq]M,+\infty[$,"

esto es, en lenguaje más formal:

$$\forall M, \exists N, \text{ tal que si } x > N,\ x \in A \text{ entonces } f(x) > M.$$

Y escribiremos:

$$lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Análogamente se pueden definir las funciones divergentes negativamente en $+\infty$ y las funciones divergentes negativa y positivamente en $-\infty$.

Antes de finalizar esta sección queremos recordar el comportamiento de algunas funciones elementales en infinito.

Proposición 2.1.3.

1.- $lim_{x\to+\infty}\ e^x = +\infty$,

2.- $lim_{x\to-\infty}\ e^x = 0$

3.- $lim_{x\to+\infty}\ log(x) = +\infty$,

4.- $lim_{x\to 0^+}\ log(x) = -\infty$,

5.- $lim_{x\to\pm\pi/2}\ tg(x) = \pm\infty$,

6.- $lim_{x\to\pm\infty}\ arctg(x) = \pm\pi/2$.

2.1.5. Algebra de límites.

Necesitamos ahora expresar qué ocurre con los límites de funciones cuando sumo, multiplico o divido funciones que tienen límite o son divergentes.

Teorema 2.1.4. *(de la suma de funciones)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty,-\infty\}$ y que $lim_{x\to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty,-\infty\}$. Entonces la función suma $f+g$ converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$lim(f+g)$	$L \in \mathbb{R}$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}$	$L+M$	$+\infty$	$-\infty$
$M = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$M = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Teorema 2.1.5. *(del producto de funciones)*

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ y que $lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función producto $f.g$ converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$lim(f.g)$	$L \in \mathbb{R}^+$	$L = 0$	$L \in \mathbb{R}^-$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	LM	0	LM	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0$	0	0	0	?	?
$M \in \mathbb{R}^-$	LM	0	LM	$-\infty$	$+\infty$
$M = +\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$M = -\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Además si $L = 0$ y g es una función acotada, entonces

$$lim_{x \to x_0} f(x).g(x) = 0.$$

Teorema 2.1.6. *(del cociente de funciones)*

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$ y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ y que $lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función cociente f/g converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$lim(f/g)$	$L \in \mathbb{R}^+$	$L = 0$	$L \in \mathbb{R}^-$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	L/M	0	L/M	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0,\ g(x) > 0$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0,\ g(x) < 0$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$M \in \mathbb{R}^-$	L/M	0	L/M	$-\infty$	$+\infty$
$M = +\infty$	0	0	0	?	?
$M = -\infty$	0	0	0	?	?

Teorema 2.1.7. *(f^g)*

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cada $x \in A$, $f(x) > 0$, y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}_0^+ \bigcup \{+\infty\}$ y que $lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función producto f^g converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$limf^g$	$L = 0$	$0 < L < 1$	$L = 1$	$L > 1$	$L = +\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	0	L^M	1	L^M	$+\infty$
$M = 0$	?	1	1	1	?
$M = \in \mathbb{R}^-$	$+\infty$	L^M	1	L^M	0
$M = +\infty$	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$
$M = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0

Observación 2.1.8. El símbolo ? que aparece en las tablas indica que el resultado depende de las funciones f y g.

2.1.6. Indeterminaciones

Estos resultados inciertos reciben el nombre de **indeterminaciones**. Así pues, vistos los teoremas anteriores, las posibles indeterminaciones son de la forma: $\infty - \infty$, $0.\infty$, $0/0$, ∞/∞, 0^0, 1^∞, ∞^0.

En las siguientes lecciones veremos cómo resolver algunas de estas indeterminaciones. Basten ahora algunos ejemplos y comentarios.

1.) <u>Límite en el infinito de un polinomio</u>

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$, entonces
$lim_{x\to+\infty} p(x) =$signo$(a_n)\infty$.
$lim_{x\to-\infty} p(x) = (-1)^n$signo$(a_n)\ \infty$.

2.) <u>Límite en el infinito de un cociente de polinomios.</u>

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$, y $q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + ... + b_1 + b_0$, entonces

$$lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} signo(a_n/b_p)\infty & si\ n > p \\ a_n/b_p & si\ n = p \\ 0 & si\ n < p \end{cases}$$

$$lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} signo(a_n/b_p)(-1)^{n-p}\infty & si\ n > p \\ a_n/b_p & si\ n = p \\ 0 & si\ n < p \end{cases}$$

3.) En general, las indeterminaciones ∞/∞, $0.\infty$ y $0/0$ se resolverán con las reglas de L+Hôpital que veremos más adelante. No obstante adelantamos la siguiente escala de infinitos que ratificaremos en su momento con las susodichas reglas. En este sentido podemos decir que:

$$x^x \succ e^x \succ x^a \succ (logx)^b,$$

donde $f(x) \succ g(x)$ significa que

$$lim_{x\to+\infty}[f(x)/g(x)] = +\infty.$$

4.) Las indeterminaciones ∞^0, 1^∞ y 0^0 se resuelven aplicando previamente logaritmos y luego aplicando el apartado 3.). Concretamente

Proposición 2.1.9. *Sean* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que, para cada* $x \in A$, $f(x) > 0$. *Sean* $x_0 \in A'$ *y* $L \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$. *Supongamos que* $lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$,0 *(resp.* 1*) y que* $lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ *(resp.* $\pm\infty$*). Entonces*

$$lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^L \Longleftrightarrow L = lim_{x\to x_0} g(x) log(f(x)).$$

Como ejemplo podemos calcular $lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$.

5.) Además, para la indeterminación del tipo 1^∞, se tiene la siguiente técnica propia:

Proposición 2.1.10. *(*1^∞*)*

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *tales que, para cada* $x \in A$, $f(x) > 0$. *Sean* $x_0 \in A'$ *y* $L \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$. *Supongamos que* $lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ *y que* $lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$. *Entonces*

$$lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^L \Longleftrightarrow L = lim_{x\to x_0} g(x)(f(x) - 1).$$

Como ejemplo podemos calcular $lim_{x\to+\infty}(1 + 1/x)^x$.

2.1.7. Funciones asintóticamente equivalentes.

Sería útil, para calcular límites, sustituir funciones de aspecto complejo por otras más funciones más sencillas. Este proceso puede llevarse a cabo considerando funciones cuyo cociente converge a uno.

Dadas dos funciones $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, y sea $x_0 \in A'$. Se dice que ambas funciones son **asintóticamente equivalentes en** x_0 si

$$lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 1.$$

Ejemplos de funciones asintóticamente equivalentes en $x_0 = 0$ son $senx$, tgx , $log(1 + x)$ y x, esto es,

$$lim_{x\to 0}[sen(x)/x] = 1 = lim_{x\to}[tg(x)/log(1 + x)] = lim_{x\to 0}[tg(x)/x] = 1.$$

2.1.8. Relación de ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que existe un número real positivo a tal que $f(x) = f(x+a), \forall x \in \mathbb{R}$. Pruébese que si f tiene límite en $+\infty$ o en $-\infty$, entonces f es constante. Pruébese previamente que $f(x) = f(x+na), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$. Estúdiese si las funciones seno y coseno tienen límite en $+\infty$ y en $-\infty$.

2. Estúdiense los siguientes límites funcionales:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0^+} (senx+1)^{1/x},$$
$$\lim_{x\to 0^+} (1+senx)^{cotgx}, \qquad \lim_{x\to 0^+} (1+tgx)^{cosecx}.$$

3. Sean a, b dos números reales verificando $b < 0 < a$; estúdiese el comportamiento en cero de las funciones $f, g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{a}{x} - \operatorname{arctg}\frac{b}{x}, \quad g(x) = xf(x).$$

4. Estúdiese la existencia de límite en 0, $+\infty$ y $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$.

2.2. Límite funcional en varias variables

Sumario

En esta lección introducimos el concepto de límite funcional para funciones definidas en $\mathbb{R}^q$ y con valores en $\mathbb{R}^n$, donde q y n son números naturales arbitrarios. Reduciremos el caso general al caso en que $n = 1$ mediante el uso de las funciones coordenadas y daremos un tratamiento especial al caso $q = 2$ y $n = 1$. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.2.1. Límite

Sean $q, n \in \mathbb{N}$, A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, $x_0 \in A'$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Se dice que f **tiene límite en el punto** x_0 si existe un vector $L \in \mathbb{R}^n$ con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x^p\}$ de vectores de A, distintos de x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x^p)\}$ converge a L".

ó escrito en lenguaje de $\varepsilon - \delta$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < \|x - x_0\| < \delta,\ x \in A, \ \text{ entonces } \|f(x) - L\| < \varepsilon.$$

El tal límite L, caso de existir, es único. Diremos que L es el **límite** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0} f(x).$$

Es importante hacer notar que la igualdad anterior encierra dos afirmaciones: que f tiene límite en el punto x_0 y que dicho límite vale L.

Se puede probar sin dificultad que:

Proposición 2.2.1.
Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$y $x_0 \in A'$. Si $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$ son dos funciones tales que $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^q$ y $lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R}^q$, entonces

$$lim_{x \to x_0}(f + g)(x) = L + M.$$

Si además $n = 1$, podríamos hablar de producto de funciones, de funciones divergentes, pudiendo aparecer toda la casuística contemplada en la lección 2.1. En este caso también nos aparecerían de nuevo las mismas indeterminaciones aunque desafortunadamente no dispondríamos de las reglas de L+Hôpital.

2.2.2. Límites según un conjunto

Sea $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^q$. Supongamos que $x_0 \in B'$. Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tiene límite **segùn el conjunto B** en el punto x_0 si existe un vector $L \in \mathbb{R}^n$ con la siguiente propiedad:
"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de B, distintos de x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L".

ó escrito en lenguaje de $\varepsilon - \delta$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } 0 < \|x - x_0\| < \delta,\ x \in B, \quad \text{entonces } \|f(x) - L\| < \varepsilon.$$

Diremos que L es el **límite según el conjunto** B de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0, x \in B} f(x).$$

Veamos la relación entre el límite ordinario y los límites según un conjunto.

Proposición 2.2.2. *Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, $x_0 \in B'$, $B \subseteq A$, $L \in \mathbb{R}^n$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Si $L = lim_{x \to x_0} f(x)$ y $B \subseteq A$, entonces $L = lim_{x \to x_0, x \in B} f(x)$.*

Nota

Este resultado puede usarse en las siguientes formas:

1. Si encuentro un subconjunto B de A tal que f no tiene límite en x_0 según B, entonces f no tiene límite en x_0.
2. Si encuentro dos subconjuntos B y C tales que los límites de f según B y C son distintos en x_0, entonces f no tiene límite en x_0.
3. Si para todos los subconjuntos considerados resultase el mismo límite, sólo podríamos deducir que dicho valor es el candidato a límite de la función.

2.2.3. Reducción al caso $n = 1$

Veamos ahora que todo límite de una función vectorial con valores en $\mathbb{R}^n$ se puede reducir al cálculo de los límites de n campos escalares.

Proposición 2.2.3. *(***Regla de oro***)*
Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, $a \in A'$, $L = (L_1, L_2, ..., L_n) \in \mathbb{R}^n$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces

$$lim_{x \to a} f(x) = L, \quad \textit{si, y sólo si, } lim_{x \to a} f_i(x) = L_i \ \forall i.$$

Ejercicio: Calcular el $lim_{x \to 0}(sen(x), tg(x)/sen(x), (1 + x)^{1/x})$

2.2.4. Caso $q = 2$ y $n = 1$

En este caso vamos a considerar dos estrategias. La primera será útil sólo en el caso en que la función no tenga límites, de hecho ya ha sido comentada en la sección segunda. La segunda estrategia es usada tanto para concluir que existe o que no existe el límite de una función dada.

1. **Generar conjuntos $B \subseteq \mathbb{R}^2$ que permitan calcular límites sencillos y compararlos**

   a) Rectas:
   $$B_r = \{(x, y); y = rx \ r \in \mathbb{R}\}.$$

   b) Parábolas:
   $$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = ay^2, \ a \in \mathbb{R}\},$$
   $$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = bx^2\}, \ b \in \mathbb{R}\}.$$

   Ejercicio: Estudiar si existe
   $$lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y),$$
   donde
   $$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & si \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si \ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. **Técnica de coordenadas polares**

Esta técnica consiste en usar las coordenadas polares de un punto del plano.

Se puede establecer una aplicación biyectiva $\varphi : \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, definida por

$$\varphi(\rho, \theta) = (\rho cos(\theta), \rho sen(\theta)).$$

La aplicación $\varphi^{-1}(x, y) = (\rho, \theta)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, y

$$\theta = \begin{cases} \pi & si\ x \in \mathbb{R}^{-1}, y = 0 \\ arctg\frac{y}{x} & si\ x > 0 \\ arctg\frac{y}{x} + \pi & si\ x < 0, y > 0 \\ arctg\frac{y}{x} - \pi & si\ x < 0, y < 0 \end{cases}$$

es la función inversa

Al par (ρ, θ) se le llama **coordenadas polares** del punto (x, y).

Proposición 2.2.4. *Sean I, J dos intervalos de $\mathbb{R}$, $A = I \times J$, $a \in I'$, $b \in J'$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $R \in \mathbb{R}$. Entonces equivalen:*

a) $lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = R$

b) *Para cada sucesión de números positivos $\{r_n\}$ convergiendo a cero y para cada sucesión $\{\alpha_n\}$ de números reales del intervalo $]-\pi, \pi]$, se tiene que*

$$lim\{f(a + r_n cos(\alpha_n), b + r_n sen(\alpha_n))\} = R.$$

Ejercicio: Estudiar si existe

$$lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y),$$

donde

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

¿Qué ocurre si ahora considero la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)} & si\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & si\ (x, y) = (0, 0)? \end{cases}$$

2.2.5. Relación de ejercicios

Determínese el dominio de las siguientes funciones de dos variables y calcúlese el límite de cada una de ellas en $(0,0)$:

1. a) $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$; b) $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$; c) $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

2. a) $f(x,y) = \frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; b) $f(x,y) = \frac{x^4+2x^2y^2+3xy^3}{(x^2+y^2)^2}$; c) $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

3. a) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ c) $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

4. a) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$; b) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^4}$; c) $f(x,y) = xsen\frac{1}{y}$;

5. a) $f(x,y) = (x+y^2)sen(\frac{1}{xy})$; b) $f(x,y) = \frac{y}{x+2y}$;

2.3. Funciones continuas

Sumario

En esta lección tratamos del concepto de continuidad, una de las ideas más fascinantes de toda la matemática. Aquí daremos la definición de función continua y su relación con el concepto de límite funcional. También mostraremos algunas de las propiedades que hacen que las funciones continuas sean tan interesantes. Así mismo observaremos que las funciones elementales son funciones continuas. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.3.1. Continuidad

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$ y sea $a \in A$. Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una **función continua en** a si verifica la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A, \|x - x_0\| \leq \delta \text{ entonces } \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

También se puede escribir en lenguaje de sucesiones:

" *Para cada sucesión* $\{a_n\}$ *de vectores de* A*, convergente al vector* a*, la sucesión* $\{f(a_n)\}$ *converge a* $f(a)$*.*"

Se dice que f es continua en $B \subseteq A$, si f es continua en todos los puntos de B.

Vamos ahora a relacionar la continuidad con la existencia de límite. Para ello recordemos que un punto $a \in A$ es un **punto aislado de** A si no es un punto de acumulación.

Proposición 2.3.1. *Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Si a es un punto aislado entonces f es una función continua en a.*
2. *Si $a \in A \bigcap A'$ entonces f es continua en a si, y sólo si, $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

Nota:

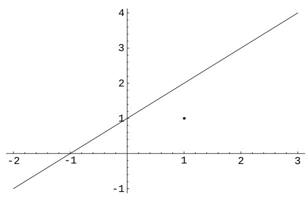
Obsérvese que si $a \notin A$ no tiene sentido hablar de continuidad, Así pues puede que una función tenga límite en un punto $a \in A'$ y que no tenga sentido hablar de continuidad en a $(a \notin A)$.

2.3.2. Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

presenta una discontinuidad evitable en 1, lo cual podía haberse adivinado si hubiésemos pintado previamente su gráfica

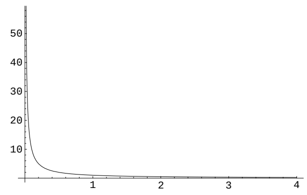


2. La función parte entera presenta una discontinuidad de salto en todos los números enteros. Mientras que la función $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

presenta una discontinuidad en 0.

Este hecho puede adivinarse cuando observamos su gráfica:



3. Las funciones identidad, logaritmo neperiano, seno y coseno son continuas en sus dominios.

4. La función norma, esto es, la aplicación
$$\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$
definida por
$$x \longmapsto \|x\|,$$
es continua en su dominio.

5. Las aplicaciones lineales son funciones continuas en sus dominios

   Dada una aplicación $T : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se dice que T es **lineal** si verifica las siguientes propiedades:

   a) $T(x + y) = T(x + y)$. $\quad (x, y \in \mathbb{R}^q)$.
   b) $T(tx) = tT(x)$. $\quad (t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^q)$.

   Toda aplicación lineal definida en $\mathbb{R}^q$ es continua en $\mathbb{R}^q$.

   a) Proyecciones.

      Sea $q \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., q\}$ se puede comprobar fácilmente que la proyección i-ésima
      $$p_i : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R},$$
      definida por
      $$p_i : (x_1, x_2, ..., x_q) \longmapsto x_i,$$
      es tal que
      $$p_i(x + y) = p_i(x) + p_i(y), \quad p_i(tx) = tp_i(x),$$
      esto es, p_i es lineal. En particular, las proyecciones i-ésimas son funciones continuas en $\mathbb{R}^q$.

b) Inyecciones.

Podemos considerar ahora la aplicación

$$I_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q,$$

definida por

$$I_i : r \longmapsto (0, 0, ...,^{i)} r, 0, ..., 0).$$

Dicha aplicación recibe el nombre de **inyección i-ésima**.

Es fácil probar que las inyecciones i-ésimas son lineales y, por tanto, también son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

En orden a construir nuevas funciones continuas veamos que las operaciones usuales están bien avenidas con la continuidad.

Proposición 2.3.2. *Sean A un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones continuas en a. Entonces $f + g$ es una nueva función continua en a. Si $n = 1$, entonces $f.g$ también es una función continua en a y si además, para cada $x \in A$, $g(x) \neq 0$, entonces f/g es también continua en a.*

Como consecuencia obtenemos que las funciones racionales y la función tangente son también continuas en sus dominios correspondientes.

2.3.3. Propiedades

Comencemos recordando que la propiedad de continuidad es una propiedad local.

Proposición 2.3.3. *(*La continuidad es una propiedad local*)*

Sean A un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$, B un subconjunto de A, $a \in B$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función. Entonces

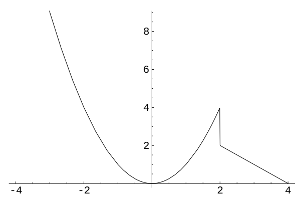
1. *Si f es continua en a, entonces f/B es una función continua en a.*
2. *Si f/B es continua en a y existe una bola centrada en a, $B(a, r)$, tal que $B(a, r) \bigcap A \subseteq B$, entonces f es una función continua en a.*

Observación 2.3.4. La proposición anterior es muy útil para estudiar la continuidad de una función definida en varios subconjuntos.

Como ejemplo estudiemos la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x+4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

cuya gráfica es como sigue



Dado que la función x^2 es continua en $\mathbb{R}$, entonces $f/_{]-\infty,2]} = x^2/_{]-\infty,2]}$ es continua en todos los puntos del intervalo $]-\infty, 2]$, luego por el apartado (2), f es continua en $]\infty, 2[$. Idéntico razonamiento puede seguirse para el intervalo $]2, +\infty[$.

¿Qué ocurre en el punto 2? Como se desprende de la observación de su gráfica, la función presenta una discontinuidad de salto. Compruébese. Obsérvese además que en cambio la función $f/]-\infty, 2]$ es continua en 2.

Proposición 2.3.5. *(Regla de la cadena)*
Sean A un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en a. Sean ahora $B \supseteq f(A)$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua en $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es una función continua en a.

Como consecuencia de las propiedades vistas en la sección anterior y dado que

$$f_i = p_i \circ f, \quad f = \sum_{i=1}^{n} I_i \circ f_i,$$

se tiene que una función es continua si, y sólo si, lo son sus funciones coordenadas.

Proposición 2.3.6. Regla de oro
Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces f es continua en a si, y solo si f_i es continua en a $\forall i$.

Finalizamos esta sección enunciando una importante propiedad únicamente válida para campos escalares ($n = 1$).

Teorema 2.3.7. *(de conservación de la compacidad o de Weierstrass)*
Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Si A es un conjunto compacto y f es continua en A, entonces f está acotada y alcanza su máximo y su mínimo en sendos puntos de A.

2.3.4. Funciones reales de variable real

En esta sección enunciamos propiedades que son exclusivas de las funciones reales de variable real ($q = n = 1$).

Comenzamos con las dos propiedades más importantes y que más usaremos en adelante.

Proposición 2.3.8. *(propiedad de conservación del signo)*
Sean A un subconjunto de numeros reales, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en a. Si $f(a) \neq 0$ Entonces existe un intervalo centrado en a, I, tal que para cada $x \in I \bigcap A$, $f(x)f(a) > 0$.

Teorema 2.3.9. *(de los ceros de Bolzano)*
Sean $[a, b]$ un intervalo de numeros reales, y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $f(a).f(b) < 0$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Este resultado nos proporciona dos métodos útiles para localizar las raíces de una ecuación, llamados **método de la bisección** y el **método de la secante** ó **método regula falsi".**

El primer método consiste en evaluar la función en los extremos del intervalo, si hay cambio de signo se considera el centro del intervalo como un nuevo extremo de los dos subintervalos de igual longitud en que queda divido el intervalo inicial. En aquel subintervalo en el que los valores de f en sus extremos sean de signo diferente se vuelve a partir en dos, para volver a empezar. De esta manera cada vez que realizamos esta partición, la solución queda localizada en un intervalo de menor longitud.

El segundo método es muy similar al primero. Se evalúa la función en los extremos del intervalo, si hay cambio de signo, se traza la recta que une los puntos extremos de la gráfica. Ésta debe cortar al eje x en un nuevo punto. Se construyen ahora los subintervalos formados por el extremo correspondiente y este nuevo punto. En aquel subintervalo en el que los valores de f en sus extremos sean de signo diferente se vuelve a partir en dos siguiendo la misma construcción, y así sucesivamente.

Como consecuencia del teorema de Bolzano (de hecho es equivalente) obtenemos también el siguiente:

Teorema 2.3.10. *(del valor intermedio)*
Sean I un intervalo de numeros reales, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo.

Uniendo ahora el resultado anterior con el teorema de conservación de la compacidad para $q = 1$ obtenemos que:

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ **es continua, existen** $c, d \in \mathbb{R}$ **tales que** $f([a, b]) = [c, d]$**.**

A continuación enunciamos un primer resultado para la función inversa

Proposición 2.3.11. *Sea I un intervalo de números reales y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva en I. Entonces la función inversa f^{-1} es continua en $f(I)$.*

Como consecuencia obtenemos que las funciones exponencial, arcocoseno, arcoseno y arcotangente son continuas en sus correspondientes dominios.

Finalmente, obtenemos el siguiente interesante resultado:

Teorema 2.3.12. *(***de Heine***) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \textit{tal que si } |x - y| < \delta, x, y \in A \textit{ entonces } |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ (*)$$

Esta propiedad (*) suele conocerse como **continuidad uniforme** de la función f en el intervalo $[a, b]$ y viene a indicar que el valor δ depende únicamente del valor de ε y no de la pareja de puntos en cuestión.

Para comprender la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme compáranse las gráficas de una función continua uniforme como es la identidad en $\mathbb{R}$ y una función continua como es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. ¿Qué ocurre cuando considero la función restringida, $f \backslash [0, 1]$?

2.3.5. Relación de Ejercicios

1. Estúdiese la convergencia de las siguientes sucesiones:

   (a) $\left\{\operatorname{sen} \frac{1}{n}\right\}$ (b) $\left\{\cos \frac{1}{n}\right\}$.

2. Sea $f :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

   $$f(x) = (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cotg} x}.$$

   Estúdiese la continuidad de f y su comportamiento en 0 y $\pi/2$.

3. Estúdiese la continuidad y el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   a) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

   b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

4. Estúdiese la continuidad de la función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Estúdiese también la continuidad de la función $|f|$.

5. Dese un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.

6. Dese un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.

7. Dese un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.

8. Dese un ejemplo de una función continua en $[0,1[$ tal que $f([0,1[)$ no sea acotado.

9. Dese un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.

10. ¿Puede existir una función definida en todo $\mathbb{R}$, continua en un punto x, y que no tenga signo constante en ningún intervalo centrado en dicho punto?

11. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hallar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n+1$.

   i) $f(x) = x^3 + x + 3$

   ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

   iii) $f(x) = x^5 + x + 1$

   iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

12. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

13. Sea P un polinomio de grado n tal que el término independiente y el coeficiente líder tienen signo opuesto. Pruébese que P tiene al menos una raíz positiva.

14. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo, es decir, probar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

15. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el Ecuador que se hallan a la misma temperatura.

16. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Probar que existe un intervalo de 5 minutos seguidos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.

17. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el Sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del Domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del Domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del Sábado.

18. Sean $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = x, \forall x \in]0,1[$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_0^+ \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Compruébese que f y g son continuas y acotadas pero no tienen máximo ni mínimo absolutos.

19. Estúdiese la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \text{sen }(xy)\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ (0,0), & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

20. Se considera $f : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Demostrar que:

    a) Existe $M > 0$ tal que $||f(x)|| \leq M||x||, \quad \forall x \in \mathbb{R}^q$.

    b) f es continua en cero.

    c) f es continua en $\mathbb{R}^q$.

Capítulo III: Cálculo diferencial

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada y de cómo calcular la tangente a una cuva en un punto de de la misma. Este último problema se presentaba con frecuencia en mecánica y en óptica. Aún pareciendo hechos no relacionados entre sí pronto se demostró estar íntimamente ligados.

Fermat, en el siglo XVII, tratando de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones, observó que si la gráfica de dichas funciones, en un determinado punto, tiene asociada una recta tangente horizontal, dicho punto es un candidato a máximo o mínimo. La estrategia usada primero por Fermat y más tarde por Newton para calcular la tangente fue aproximar ésta por sucesivas rectas secantes cuyas pendientes pueden calcularse directamente como cocientes. Así pues la pendiente de la recta tangente no es más que el límite de un determindo cociente esto es, la derivada en dicho punto. Con respecto al estudio de la velocidad de un móvil siguiendo una trayectoria de una línea recta, diremos que si la función que describe el movimiento en función del tiempo es la función $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, es sabido que la velocidad media desarrollada por el móvil en el intervalo de tiempo $[a, x]$, con $a, x \in [0, T]$ se obtiene realizando el siguiente cociente:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Así pues si quiero calcular la velocidad en el instante a bastará tomar valores x cada vez más cercanos al propio a, de hecho el valor buscado se encontrará tomando el límite cuando x tiende hacia a en dicho cociente. Este límite no es otra cosa que el valor de la derivada en dicho punto. En general, este concepto se muestra especialmente útil para el estudio de la variación de cualquier función.

Estos hechos serán tratados en este capítulo, donde haremos también el estudio de los extremos para campos escalares.

Índice general

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Cálculo diferencial

3.1. Funciones derivables

Sumario

En esta lección introduciremos el concepto de función derivable, prestaremos atención al problema original de determinar la tangente a una curva dada y estudiaremos algunas de sus propiedades; Enunciaremos el teorema del valor medio y obtendremos algunas consecuencias muy importantes: La relación entre monotonía y derivabilidad, la derivación de la función inversa y la reglas de L+Hôpital para la resolución de algunas indeterminaciones en el cálculo de límites. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.1.1. Derivada. Recta tangente

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $a \in A \cap A'$. Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función derivable en** a si existe el siguiente límite:

$$lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El límite recibe el nombre de **derivada de** f **en el punto** a y se nota por $f'(a)$.

Es claro que f es derivable en a si, y sólo si, existe

$$lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t},$$

y en tal caso

$$lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a).$$

Dado un subconjunto B de $A\cap A'$, se dice que f **es derivable en** B si es derivable en todos los puntos de B.

Es claro que la función identidad I y toda función constante,C, son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$, con $I'=1$ y $C'=0$, mientras que la función valor absoluto es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ salvo en cero, y para cada $x\in\mathbb{R}^*$,

$$(|x|)'=|x|/x.$$

El siguiente resultado nos da la relación entre los conceptos de continuidad y de derivación.

Proposición 3.1.1. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $a\in A\bigcap A'$ y una función $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es derivable en a.*
2. *f es continua en a y existe una función afín g tal que*

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a}=0.$$

Vamos ahora a interpretar geométricamente la existencia de esta función afín.

Obsérvese que cualquier recta que pase por el punto $(a,f(a))$ tiene la forma

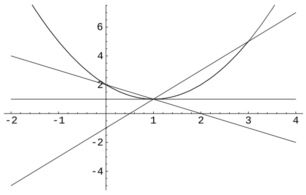
$$y=f(a)+m(x-a).$$

Es claro que manipulando la igualdad del apartado b) obtenemos que

$$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$$

y por tanto su gráfica es una recta del tipo anterior con $m=f'(a)$; la condición sobre el límite del cociente del apartado b) nos afirma que la gráfica de la función afín g es la que mejor se aproxima a la gráfica de la función f en las proximidades del punto a.

Así por ejemplo si consideramos la función $f(x)=(x-1)^2+1$ y el punto $(1,1)$, se tiene que



y por tanto es visible que la recta horizontal es la que mayor "parecido"tiene con la parábola en las "proximidades del punto $(1,1)$.

La recta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ recibe el nombre de **recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(a, f(a))$

3.1.2. Derivadas laterales

Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A \bigcap (A_a^+)'$ y una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que f es **derivable por la derecha** en el punto a si existe existe el siguiente límite:

$$lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El límite recibe el nombre de **derivada de f por la derecha en el punto** a y se nota por $f'_+(a)$.

Análogamente podemos definir el concepto de derivada por la izquierda.

Veamos la relación entre la derivada ordinaria y las derivadas laterales.

Proposición 3.1.2. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A \bigcap A'$, y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1. *Si $a \notin (A_a^-)'$, entonces f es derivable en a si, y sólo si f es derivable por la derecha en a. En caso afirmativo $f'(a) = f'_+(a)$*

2. *Si $a \notin (A_a^+)'$, entonces f es derivable en a si, y sólo si f es derivable por la izquierda en a. En caso afirmativo $f'(a) = f_-(a)'$*

3. *Si $a \in (A_a^-)' \bigcap (A_a^+)'$, entonces f es derivable en a si, y sólo si f es derivable por la derecha y por la izquierda en a y ambas coinciden. En caso afirmativo $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$*

3.1.3. Ejemplos

Las funciones logaritmo neperiano, seno y coseno son derivables en sus respectivos dominios. Además para cada x del dominio correspondiente,

$$log'(x) = 1/x, \quad sen'(x) = cos(x), \quad cos'(x) = -sen(x).$$

También la suma, el producto y el cociente de funciones derivables es una función derivable:

Proposición 3.1.3. *Sean A un subconjunto de números reales, $a \in A$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en a. Entonces $f + g$ y $f.g$ son dos funciones derivables en a, y se tiene que*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si además, para cada $x \in A$, $g(x) \neq 0$, entonces f/g es también derivable en a y se tiene que

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Como consecuencia obtenemos que las funciones racionales y la función tangente son también derivables en su dominio. De hecho, para cada $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\Pi}{2} + k\Pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$tg'(x) = 1 + tg^2(x).$$

También las cosas van bien cuando componemos dos funciones derivables:

Teorema 3.1.4. *(regla de la cadena)*
Sean A un subconjunto de números reales, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en a. Sean ahora $B \supseteq f(A)$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $f(a)$. Entonces $g \circ f$, es una función derivable en a y se tiene que

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

Como consecuencia obtenemos que

Corolario 3.1.5. *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función derivable en a, entonces*

$$(logf(a))' = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

3.1.4. Propiedades de las funciones derivables.

Enunciemos ahora algunas propiedades y características de las funciones derivables.

Proposición 3.1.6. *(La derivabilidad es una propiedad local)*
Sean A un subconjunto de numeros reales, B un subconjunto de A, $a \in B \bigcap B'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces

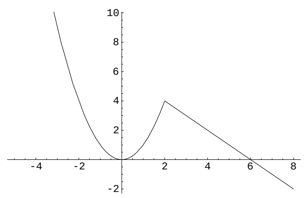
1. *Si f es derivable en a, entonces $f/_B$ es una función derivable en a y $f'(a) = (f/_B)'(a)$.*
2. *Si $f/_B$ es derivable en a y existe un intervalo centrado en a, I, tal que $I \bigcap A \subseteq B$, entonces f es una función derivable en a y $f'(a) = (f/_B)'(a)$.*

Observación 3.1.7. La proposición anterior es muy útil para estudiar la derivabilidad de una función definida en varias ramas.

Como ejemplo estudiemos la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x+6 & si\ x > 2 \end{cases}$$

cuya gráfica es como sigue



Dado que la función x^2 es derivable en $\mathbb{R}$, entonces $f/_{]-\infty,2]} = x^2/_{]-\infty,2]}$ es derivable en todos los puntos del intervalo $]-\infty, 2]$, luego por el apartado (2), f es derivable en $]\infty, 2[$. Idéntico razonamiento puede seguirse para el intervalo $]2, +\infty[$.

¿Qué ocurre en el punto 2? Como se desprende de la observación de su gráfica, la función presenta un "pico", luego pensamos que no es derivable en 2. Compruébese. Obsérvese además que en cambio la función $f/]-\infty, 2]$ es derivable en 2.

En los siguientes resultados usaremos como dominios sólo intervalos, ya que en éstos todos los puntos, incluso sus extremos sean o no del intervalo, son puntos de acumulación. Necesitamos previamente el siguiente lema:

Lema 3.1.8. *Sea I un intervalo de números reales. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en un punto interior a de I en el que f tiene además un extremo absoluto, entonces $f'(a) = 0$.*

Teorema 3.1.9. *(de Rolle)*
Sean $[a, b]$ un intervalo de numeros reales, y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $]a, b[$ verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Observación 3.1.10. La combinación de este teorema y del teorema de Bolzano es muy interesante a la hora de determinar el número de soluciones de una ecuación en un determinado intervalo. A este respecto, resulta interesante releer el teorema de Rolle en la siguiente forma:

" Si f' no se anula en el intervalo $]a, b[$, la ecuación $f(x) = 0$ tiene como mucho una única solución en el intervalo $[a, b]$ "

El siguiente resultado, el cual no es más que otra versión del teorema de Rolle, es el más importante por sus muchas consecuencias.

Teorema 3.1.11. *(del valor medio)*
Sean $[a, b]$ un intervalo de numeros reales, y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $]a, b[$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como primera consecuencia obtenemos la siguiente relación entre el signo de la derivada y la monotonía de la función:

Corolario 3.1.12. *(monotonía de una función)*
Sea I un intervalo de numeros reales, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

1. *f es creciente si, y sólo si $f'(x) \geq 0,\ \forall x \in I$.*
2. *f es decreciente si, y sólo si $f'(x) \leq 0,\ \forall x \in I$.*
3. *Si $f'(x) = 0, \forall x \in I$, si, y sólo f es constante.*
4. *Si $f'(x) > 0\ \forall x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.*
5. *Si $f'(x) < 0\ \forall x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.*
6. *Si $f'(x) \neq 0\ \forall x \in I$, entonces f es estrictamente monótona.*

Al igual que ocurre con el teorema de Rolle, la información dada en este último corolario es muy importante para la localización de las soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = 0$, cuando la función f es derivable.

Como segunda consecuencia, obtenemos cuándo la función inversa es derivable y cuánto vale su derivada:

Corolario 3.1.13. *(derivación de la función inversa)*
Sea I un intervalo de numeros reales, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en $f(I)$ y para cada $x \in I$, se tiene que

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

A partir de aquí, obtenemos que también las funciones exponencial, arcocoseno, arcoseno y arcotangente son derivables. De hecho, para cada x en el correspondiente dominio se tiene que

$$(e^x)' = e^x, \qquad (arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(arc\ cos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (arc\ sen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Y si se quiere, usando la regla de la cadena, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en a y tal que $f(A)$ está contenido en el correspondiente dominio, entonces

$$(e^{f(a)})' = f'(a)e^{f(a)}, \qquad (arctg)'(f(a)) = \frac{f'(a)}{1+f^2(a)},$$

$$(arc\ cos)'(f(a)) = \frac{-f'(a)}{\sqrt{1-f^2(a)}}, \qquad (arc\ sen)'(f(a)) = \frac{f'(a))}{\sqrt{1-f^2(a)}}.$$

Además si $f(A)$ está contenido en $\mathbb{R}^+$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra función derivable también en a, entonces la función $h = f^g$ es derivable en a y

$$h'(a) = f(a)^{g(a)}[g'(a)log(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}].$$

Para calcular derivadas tan complicadas como la anterior podemos usar la técnica logarítmica. El procedimiento es como sigue.

Técnica logarítmica

1. Tomamos logaritmos en la igualdad que define a h.

$$log(h(x)) = g(x)log(f(x)).$$

2. Derivamos ambas igualdades en el punto a
$$\frac{h'(a)}{h(a)} = g'(a)log(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}.$$
3. Finalmente despejamos y obtenemos que
$$h'(a) = f(a)^{g(a)}[g'(a)log(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}].$$

Como ejercicio calcúlese la función derivada de $f(x) = x^{x^x}$ en $\mathbb{R}^+$.

La tercera y última consecuencia a señalar en esta lección es una potente herramienta que nos va a permitir resolver muchas de las indeterminaciones presentadas en la lección I.5 relativas a la convergencia de las funciones.

Corolario 3.1.14. *(Reglas de L+Hôpital)*
Sea I un intervalo de números reales, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y $a \in I$ y supongamos que $f, g : I \backslash \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones tales que

1. *f y g son derivables,*
2. *$g'(x) \neq 0$,*
3. *$lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.*

Si

1. **Primera Regla de LťHôpital**
$$lim_{x \to a} f(x) = lim_{x \to a} g(x) = 0,$$

ó

2. **Segunda Regla de LťHôpital***:*
la función $|g|$ diverge positivamente en a,

entonces
$$lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observación 3.1.15. Las Reglas de LťHôpital siguen permaneciendo válidas si, en el caso en que el intervalo I no esté mayorado, sustituimos los límites en a por límites en $+\infty$. Análogamente para límites en $-\infty$.

Finalmente damos, como consecuencia, una regla práctica para calcular la derivada de algunas funciones definidas a trozos.

Corolario 3.1.16. *Sea I un intervalo, $a \in I$ y $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en a y derivable al menos en $I/\{a\}$. Entonces h es derivable en a si h' tiene límite en el punto a y en caso de ser derivable*
$$h'(a) = lim_{x \to a} h'(x).$$

3.1.5. Relación de ejercicios

1. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, estúdiese la continuidad y derivabilidad en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = [-1, 1]$ y $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
   b) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$.
   c) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$.
   d) $A = \mathbb{R}_0^+$ y $f(x) = x^x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(0) = 0$
   e) $A = \mathbb{R}_0^+$ y
   $$f(x) = \begin{cases} |x - 2| & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ \frac{x}{2}\mathrm{E}\left(\frac{6}{x}\right) & \text{si } 4 \leq x. \end{cases}$$

2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Encuéntrense los valores de α y $,\beta$ que hacen que el punto $(2, 4)$ pertenezca a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x - y = 0$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:
   $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   Estúdiese la continuidad y derivabilidad de f y calcúlese su imagen.

4. Estúdiese la derivabilidad y la existencia de límites en $+\infty$ y $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada caso por

   a)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   b)
   $$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

5. Demuéstrese que la(s) desigualdad(es):

   a) $\frac{x}{1+x} < log(1 + x) < x$ se verifican para todo $x > 0$.
   b) $cosx > 1 - \frac{x^2}{2}$ se verifica para todo $x \in]0, \pi/2[$
   c) $\frac{2x}{\pi} < senx < x < tgx$ se verifican para todo $x \in]0, \pi/2[$

6. Calcúlese el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
   $$f(x) = x^6 - 3x^2 + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7. Calcúlese el número de soluciones de la ecuación $3logx - x = 0$.

8. Sea $a > 1$. Pruébese que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.

9. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = x + logx + arctgx$$

pruébese que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución.

10. Pruébese que la ecuación

$$x + e^x + arctgx = 0$$

tiene una única raíz real. Dese un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

11. Pruébese que la ecuación $tg(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

12. Calcúlese la imagen de $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1/x}$.

13. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Pruébese que la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tiene una solución real única.

14. Determínese el número de raíces reales de la ecuación

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = m$$

según el valor de m.

15. Sea $f : [-1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x + e^x)^{1/x} \quad (x \neq 0) \quad f(0) = e^2$. Estúdiese la continuidad y derivabilidad de f en cero.

16. Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \text{arctg}\frac{1+x}{1-x}$$

Estúdiese la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$.

17. Estúdiese el comportamiento de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

a)

$$A =]2, +\infty[\ , \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} \qquad \forall x \in A, \quad \alpha = 2.$$

b)

$$A = \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}, \quad f(x) = \frac{1}{logx} - \frac{1}{x-1} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 1.$$

c)

$$A =]1, +\infty[, \quad f(x) = \frac{x^x - x}{1 - x - logx} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 1.$$

d)

$$A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{senx}{x^5}, \quad \alpha = 0$$

e)

$$A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (\frac{1}{tgx})^{senx}, \quad \alpha = \pi/2$$

f)

$$A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (1 + senx)^{cotgx}, \quad \alpha = 0$$

g)

$$A = \mathbb{R}^+ \backslash \{e\}, \quad f(x) = x^{\frac{1}{logx-1}}, \quad \alpha = e.$$

h)

$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{1}{x}(e - (1+x)^{\frac{1}{x}}), \quad \alpha = 0$$

18. Estudiar el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a)

$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in A.$$

b)

$$A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1 - cosx}{x^2}, \quad \forall x \in A.$$

c)

$$A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (senx + cosx)^{1/x}, \quad \forall x \in A.$$

d)

$$A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in A$$

e)

$$A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (1 - tgx)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in A$$

f)

$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^{senx}, \quad \forall x \in A$$

g)

$$A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = \frac{x - arctgx}{sen^3 x}, \quad \forall x \in A$$

h)

$$A =]0, \pi/2[, \qquad f(x) = (\frac{1}{tgx})^{senx},$$

i)

$$A = \mathbb{R}^+ \backslash \{e\}, \qquad f(x) = x^{\frac{1}{logx-1}}.$$

19. Sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\log(1 - senx) - 2log(cosx)}{senx} \quad (x \neq 0) \quad f(0) = a.$$

Estúdiese para qué valor de a la función f es continua en cero.

20. Estúdiese el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

a)

$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{log(2 + 3e^x)}{\sqrt{2 + 3x^2}},$$

b)

$$A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = (a^x + x)^{1/x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

c)

$$A =]1, +\infty[\quad f(x) = \frac{x(x^{1/x} - 1)}{logx},$$

d)

$$A = \mathbb{R} \backslash \{e\}, \quad f(x) = x^{\frac{1}{logx-1}}.$$

e)

$$A = \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = x^\alpha sen(1/x), \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

f)

$$A = \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = \frac{x^2 sen(1/x)}{logx}.$$

21 Calcúlense las derivadas de las funciones hiperbólicas.

3.2. Extremos relativos. Polinomio de Taylor.

Sumario

En esta lección vamos a seguir extrayendo consecuencias del teorema del valor medio: estudiaremos condiciones necesarias y condiciones suficientes para que una función tenga extremos relativos. También definiremos el polinomio de Taylor asociado a una función en un punto y estudiaremos algunas de sus propiedades. Finalmente relacionaremos la convexidad de una función con el signno de la segunda derivada, y daremos el método de Newton-Raphson, que es usado para encontrar aproximaciones a las soluciones de una ecuación. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.2.1. Extremos relativos.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que

a es un **máximo relativo** o que f **tiene un máximo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$.

b) $f(a) \geq f(x),\ \forall x \in]a-r, a+r[$.

a es un **mínimo relativo** o que f **tiene un mínimo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$.

b) $f(a) \leq f(x),\ \forall x \in]a-r, a+r[$.

a es un **extremo relativo** si o bien es un máximo relativo ó bien es un mínimo relativo.

Con el siguiente ejemplo veremos qué no existe en general una relación entre extremo relativo y extremo absoluto.

Ejemplo:

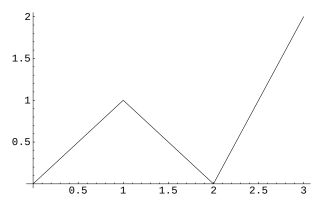
Estúdiense los extremos relativos y absolutos de la función

$$f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x-4 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Observemos primero su gráfica:



y comprobemos que

1. 0 es un mínimo absoluto pero no relativo.

2. 1 es un máximo relativo pero no absoluto.

3. 2 es un mínimo relativo y absoluto

4. 3 es un máximo absoluto pero no relativo.

Nota

Es evidente que, si a es un punto interior y f alcanza su máximo (resp. mínimo) absoluto en a, entonces f sí tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en a.

3.2.2. Extremos relativos y derivabilidad

Comencemos recordando que en todo extremo relativo la derivada se anula.

Proposición 3.2.1. *(Lema 3.1.8)(condición necesaria)*
Sea A un subconjunto no vacío de números reales. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en $a \in A \bigcap A'$ y es derivable en a, entonces $f'(a) = 0$.

Este sencillo resultado nos permite elaborar la siguiente regla práctica para detectar los posbles extremos.

Regla práctica para el cálculo de extremos

Sean A un subconjunto no vacío de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que f alcanza su máximo o su mínimo absoluto (resp. relativo) en a, entonces a está **en una de las tres (resp. dos últimas) situaciones siguientes**:

1) No existe ningún intervalo centrado en a contenido en A.

2) Existe un intervalo centrado en a contenido en A y f no es derivable en a.

3) Existe un intervalo centrado en a contenido en A y $f'(a) = 0$.

Una vez detectados los candidatos, se nos puede presentar una de las dos siguientes situaciones:

1) El conjunto A es un intervalo cerrado y acotado y f es continua.

2) No se da alguna de las circunstancias del primer apartado.

En el primer caso sabemos, por el teorema de Weiertrass sobre la conservación de la compacidad, que f alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos del intervalo, por lo que basta evaluar f en los candidatos de los tres tipos para determinar quiénes son estos extremos. En el segundo caso, nos contentaremos con saber que de haber máximo ó mínimo éste está entre nuestros candidatos.

El siguiente resultado nos permite ver si los puntos del segundo y tercer tipo son al menos extremos relativos y de qué naturaleza son.

Proposición 3.2.2. *(condición suficiente)*
Sean $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ y notemos por $I =]a - r, a + r[$. Sea A un conjunto que contiene a I y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $I \backslash \{a\}$.

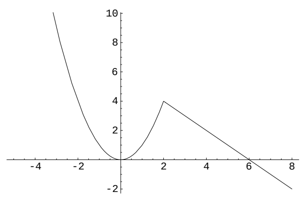
1. *Si para cada $x \in I$ con $x < a$ se tiene que $f'(x) \geq 0$ y para cada $x \in I$ con $x > a$ se tiene que $f'(x) \leq 0$, entonces f alcanza un máximo relativo en a.*

2. Si para cada $x \in I$, con $x < a$, se tiene que $f'(x) \leq 0$ y para cada $x \in I$, con $x > a$, se tiene que $f'(x) \geq 0$, entonces f alcanza un mínimo relativo en a.

Ejemplo: Calcular los extremos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x+6 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Considérese previamente su gráfica



Confírmese que f tiene en 0 un mínimo relativo (no absoluto) y en 2 un máximo relativo (no absoluto) y que f no tiene extremos absolutos.

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función anterior restringida al intervalo $[0, 4]$.

3.2.3. Derivadas sucesivas

Sea A un subconjunto no vacío de números reales, A_1 un subconjunto de $A \bigcap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en todo punto de A_1. La+ función que a cada punto de A_1 le hace corresponder la derivada de f en dicho punto recibe el nombre de **función derivada** de f, función que notaremos por f'. Si $a \in A_1 \bigcap (A_1)'$ y f' es derivable en a, diremos que f es **dos veces derivable en** a y llamaremos **derivada segunda** de f en a a la derivada de f' en a, y la notaremos por $f''(a)$. Sea A_2 el subconjunto de puntos de $A_1 \bigcap (A_1)'$ en los que f es dos veces derivable. La función $f'' : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por la ley $x \longmapsto f''(x)$ se llamará **derivada segunda** de f. Siguiendo este proceso podremos definir el concepto de **n veces derivable** y de la **función derivada n-ésima** de f, que notaremos por $f^{(n)}$.

Sea I un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y n un número natural. Se dice que f es **de clase** $\mathcal{C}^n$en I si f es n veces derivable en I y su derivada n-ésima $f^{(n)}$ es continua en I.

Se dice que f es **de clase infinito** $\mathcal{C}^\infty$ en I si f es de clase $\mathcal{C}^n$ para todo natural n.

Por ejemplo las funciones racionales y las funciones seno, coseno, tangente, arcotangente, arcoseno, arcocoseno, logaritmo neperiano y exponencial son funciones de $\mathcal{C}^\infty$ en sus correspondientes dominios.

3.2.4. Polinomio de Taylor

Sea A un subconjunto de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable en un punto $a \in A \bigcap A'$. Llamaremos **polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto a** a la función polinómica $P_{n,a} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Es inmediato comprobar que $P_{n,a}$ es la única función polinómica que verifica que:

$$P_{n,a}(a) = f(a),\ P'_{n,a}(a) = f'(a),\ ...\ P^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

Nótese que el polinomio de Taylor de grado uno no es más que la función afín g dada en la lección anterior y cuya gráfica llamábamos recta tangente. Cabe esperar que el polinomio de Taylor de grado n en el punto a nos dé una buena aproximación de la función f en las proximidades del punto a, y que deberá ser tanto mejor cuanto mayor sea el grado del polinomio. Este hecho queda probado en el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. *(fórmula infinitesimal del resto)*
Sea I un intervalo, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable. Entonces

$$lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Como primera consecuencia de este hecho obtenemos una regla práctica para el cálculo de extremos relativos.

Corolario 3.2.4. *Sea I un intervalo, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable con*

$$f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Entonces si

a) n es impar y $f^{(n)}(a) \neq 0$, f no tiene ningún extremo relativo en a.

b) n es par y

b1) $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

b2) $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

Como ejercicio calcúlese el vértice de la parábola $y = x^2 + 3x - 2$.

En el ambiente del teorema, la función $R_{n,a} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x),$$

recibe el nombre de **Resto de Taylor de orden n de la función f en el punto a.**

Nuestro siguiente resultado nos va a proporcionar una expresión concreta del resto de Taylor que nos permitirá evaluar el error cometido cuando se sustituya una función por su correspondiente polinomio de Taylor.

Teorema 3.2.5. *(Fórmula de Taylor)*
Sea I un intervalo, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable. Entonces, para cada $x \in I$, $x > a$ (respectivamente $x < a$), existe un punto $c \in]a, x[$ (resp. $c \in]x, a[$) tal que

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ejercicio: Calcúlese el valor de $\sqrt{e}$ con tres decimales.

Observación 3.2.6. Este teorema junto con la fórmula infinitesimal del resto puede usarse para el cálculo de ciertos límites.

Ejercicio: Calcúlese

$$lim_{x \to 0} \frac{(tgx)(arctgx) - x^2}{x^5}.$$

3.2.5. Desarrollo en serie de Taylor

Veamos ahora qué ocurre si hacemos tender el grado del polinomio de Taylor a "infinito".

Proposición 3.2.7. *Sea I un intervalo y f un función de clase C^∞ en I. Supongamos que existe $M > 0$ tal que, para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:*

$$|f^{n)}(x)| \leq M,$$

entonces para cualesquiera $a, x \in I$, se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$ recibe el nombre de **serie de Taylor de la función f en el punto** a, y como puede verse, es una especie de polinomio de Taylor de grado "infinito".

Como consecuencia de la proposición obtenemos que para las principales funciones elementales, el valor en cada punto x coincide con la suma de una cierta serie.

Corolario 3.2.8.

1) *Para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene:*

   a) $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$.

   b) $cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n-1)!}x^{2(n-1)}$.

   c) $sen(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$.

2) *Para cada $x \in]0,2[$, se tiene:*

$$log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

3) *Para cada $x \in]-1,1[$, se tiene:*

$$arctg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}x^{2n-1}.$$

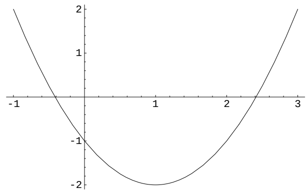
3.2.6. Funciones convexas

Veamos ahora cómo se interpreta geométricamente el hecho de que la derivada segunda sea no negativa.

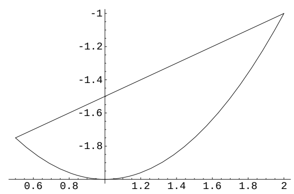
Sea I un intervalo. Se dice $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función convexa** cuando para cualesquiera dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$ y para todo número real $t \in]0,1[$ se verifica que

$$f((1-t)a + tb)) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obsérvese que la función $f(x) = (x-1)^2 - 2$ es convexa ya que su gráfica,



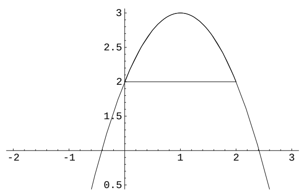
verifica que la imagen de cualquier intervalo contenido en $\mathbb{R}$ está por "debajo"del segmento que une las imágenes de los extremos. Considérese por ejemplo el intervalo $[1/2, 2])$ y el segmento $[(1/2, -3/4), (2, -1)]$ que une las imágenes de sus extremos, tal como vemos en la figura siguiente



Se dice $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función cóncava** cuando para cualesquiera dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$ y para todo número real $t \in]0, 1[$ se verifica que

$$f((1-t)a + tb)) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obsérvese que la función $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ es cóncava ya que por ejemplo, la imagen del intervalo $[0, 2]$ está por encima del segmento $[(0, 2), (2, 2)]$ tal como se aprecia en la siguiente figura



Es claro que toda función afín es simultáneamente convexa y cóncava.

<u>**Puntos de inflexión**</u>

Se dice que $a \in A$ es un **punto de inflexión** de una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si existe $\delta > 0$ tal que f es cóncava (resp. convexa) en el intervalo $]a-\delta, a[$ y f es convexa (resp. cóncava) en el intervalo $]a, a+\delta[$.

Finalmente veamos que existe una estrecha relación entre la convexidad y el signo de la segunda derivada.

Proposición 3.2.9. *Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I. Entonces equivalen:*

1. *f es convexa.*

2. *$f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Es fácil ver ahora que la función exponencial es una función convexa y la función logaritmo neperiano es una función cóncava.

Corolario 3.2.10. *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable en un punto de inflexión a, entonces $f''(a) = 0$.*

La última consecuencia que vamos a señalar en esta lección es un método muy rápido para localizar las soluciones de una ecuación.

Corolario 3.2.11. *(Método de Newton-Raphson)*
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable verificando:

a) $f(a) < 0 < f(b)$.

b) $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

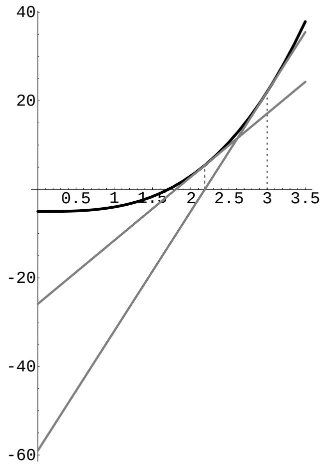
c) $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

Entonces la sucesión $\{x_n\}$, tal que $x_1 \in [a,b]$, y $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ es una sucesión que converge a la única raíz x_0 de la ecuación $f(x) = 0$.
Si además existen $m, M \in \mathbb{R}^+$ tales que $m < f'(x) < M$, entonces

$$|x_{n+1} - x_0| \leq (1 - \frac{m}{M})^n \frac{f(x_1)}{m}.$$

Obsérvese que la condición $c)$ hace alusión a que no hay cambio de convexidad o concavidad.

La forma de construir los distintos términos de la sucesión de aproximaciones es bastante sencilla y responde a una idea muy intuitiva. Una vez fijado un valor inicial x_1, el término x_2 se obtiene como el punto de corte de la recta tangente a f en x_1 con el eje OX. De la misma forma, obtenemos x_{n+1} como el punto de corte de la recta tangente a f en el punto x_n con el eje OX. Para comprender bien el algoritmo observemos el siguiente gráfico donde se ve cómo se generan los valores de las aproximaciones.



3.2.7. Relación de ejercicios

1. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados **(a)** 10 y 10, **(b)** 12 y 18.

2. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

3. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400+y^2/225 = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hállense las dimensiones del rectángulo para que **(a)** el área sea máxima, **(b)** el perímetro sea máximo.

4. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcúlense sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

5. Demuéstrese r que la suma de un número positivo y su inverso es mayor o igual a 2.

6. Hállense las dimensiones del cilindro de mayor volumen entre todos aquellos que tienen la superficie lateral total constante.

7. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Determínense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

8. Se proyecta un jardín de forma de sector circular de radio R y ángulo central θ. El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?.

9. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?.

10. Demuéstrese que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

11. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de 1 m. de largo en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima?.

12. Un muro de 4 metros de altura está a 3 metros de la fachada de una casa. Hallar la escalera más corta que llegará desde el suelo hasta la casa por encima del muro.

13. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ de forma que el segmento (de dicha tangente) interceptado por los ejes sea mínimo. Demuéstrese que la longitud de dicho segmento es 9 unidades.

14. ¿Cuál es la longitud de la barra más larga que puede hacerse pasar horizontalmente a través de la esquina, en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b?

15. Investígese la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima en un cono circular recto de radio r y altura h.

16. Un cultivador de naranjas estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Halle el número de árboles que hace máxima la cosecha.

17. Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio, r, mediante la ecuación $v = Ar^2(r_0 - r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación. Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

18. Una fábrica de plásticos recibe del Ayuntamiento de la ciudad un pedido de 8.000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 800 EUROS por máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sóla persona, que gana 35 EUROS/hora.

    a) ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?

b) Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?.

19. Las palomas domésticas no suelen volar sobre extensiones grandes de agua a menos que se vean forzadas a ello, posiblemente porque se requiera más energía para mantener la altitud sobre el agua fría. Supongamos que se suelta una paloma desde un barco situado a 3 km de la costa, siendo A el punto costero más cercano. El palomar se encuentra en un punto de la costa situado a 10 km de A. Si la paloma gasta dos veces más energía volando sobre el agua que sobre la tierra firme y sigue un camino que hace mínima la energía gastada, determínese el punto dónde la paloma abandona el agua.

20. Se desea construir un envase cilíndrico de con un volumen fijo V_0. Calcúlense las dimensiones (radio y altura) que ha de tener el envase para que la cantidad de material invertido en construirlo, incluyendo las tapas, sea mínimo.

21. Estás diseñando una lata cilíndrica circular recta de volumen fijo V_0, cuyo costo considerará el desperdicio de material. No se desperdicia nada al cortar el aluminio para la superficie lateral, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$. Calcular las dimensiones que minimizan el coste de producción.

22. Pruébese que las funciones exponencial, seno y coseno son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Pruébese que
$$sen(x)^{(n)} = sen(x + n\frac{\pi}{2}), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

23. Pruébese que la función logaritmo es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$ y calcúlese, para cada $n \in \mathbb{N}$, la derivada n-ésima.

24. Calcúlese, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-3} en cada uno de los casos siguientes:
$$a) \;\; \alpha = \sqrt[3]{7'5} \qquad b) \;\; \alpha = \sqrt{e} = e^{1/2} \qquad c) \;\; \alpha = sen\frac{1}{2}.$$

25. Estúdiense los posibles extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

a)
$$f(x) = xlog|x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(0) = 0.$$

b)
$$f(x) = x^2log|x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(0) = 0.$$

3.3. Derivadas parciales. Plano Tangente

Sumario

Con esta lección comienza el estudio de la derivación en varias variables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.3.1. Derivadas parciales

Recuérdese que si A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A \bigcap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces se dice que f es derivable en a si

$$lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t} = f'(a).$$

Tratemos ahora de dar sentido a la expresión anterior en el caso en que $A \subseteq \mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sea un campo vectorial.

Obsérvese en primer lugar que la aproximación al punto a de $\mathbb{R}^q$ puede hacerse por muy diferentes direcciones. Supongamos pues que existe un vector u de $\mathbb{R}^q$ y $\delta > 0$ tal que $a + ru \subseteq A$, con $r \in]-\delta, \delta[$.

Diremos que f admite **derivada direccional en el punto a en la dirección de u** si existe

$$lim_{t\to 0}\frac{f(a+tu)-f(a)}{t}.$$

Dicho límite si existe será denominado **derivada direccional de f en el punto a en la dirección de u** y será notado por $f'(a;u)$ ó también por $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$. Obsérvese que $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ es un vector de $\mathbb{R}^n$.

Las derivadas direccionales más destacadas se obtienen tomando como vectores de dirección u los vectores canónicos de $\mathbb{R}^q$:

Sea $e_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$ el vector de $\mathbb{R}^q$ cuya única coordenada no nula es la i-ésima cuyo valor es uno. Supongamos que existe $\delta > 0$, tal que $a + re_i \subseteq A$, con $r \in]-\delta, \delta[$. Se dice que f tiene **derivada parcial respecto de la variable i-ésima en el punto** a si existe

$$lim_{t\to 0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}.$$

Dicho límite se denomina **derivada parcial i-ésima de f** en el punto a y se nota por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, ó también por $f'(a; e_i)$.

Ejercicio : Calcúlense, si existen, las derivadas parciales en $(0, 0)$ del siguiente campo escalar : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Notas

1. Si f es un <u>campo escalar</u> , entonces el cálculo de la derivada parcial i-ésima de f en un punto genérico $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$ se ha de llevar a cabo **derivando la función real que resulta de considerar constantes las variables** x_j $(j \neq i)$. Expliquemos este punto en el caso $q = 2$:

   Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar con $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea $(a, b) \in A$ tal que $(a, b) + t(0, 1) \in A$, siempre que $t \in]-\delta, \delta[$ para un cierto $\delta > 0$. Consideremos el conjunto

   $$A[b] = \{x \in \mathbb{R};\ (x, b) \in A\}$$

   y la función real de variable real

   $$g = f^b : x \longmapsto f(x, b)\ \forall x \in A[b].$$

   Pues bien, g es derivable en a si, y sólo si, existe $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$. De hecho

   $$g'(a) = lim_{t\to 0}\frac{g(a+t)-g(a)}{t} = lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t} =$$
   $$= lim_{t\to 0}\frac{f((a,b)+t(1,0))-f(a,b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b).$$

2. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial tal que $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ se suele notar por $f'(a)$ y recibe el nombre de **derivada elemental** de f en a.

Vamos a dar ahora una interpretación geométrica y otra física de las derivadas parciales de un campo escalar.

Interpretación geométrica

Consideremos la gráfica del campo escalar anterior , esto es

$$Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x, y)\}.$$

El plano $y = b$, corta a la gráfica, dando lugar a un conjunto C_1,

$$C_1 := \{(x, b, f(x, b)) \in \mathbb{R}^3 : f(x, b) \in A\}.$$

Obsérvese que el conjunto C_1 es la gráfica de la función $g(x) = f^b(x) = f(x, b)$, de manera que la pendiente de su recta tangente es $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Análogamente podría entenderse para la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Interpretación propiamente física

Las derivadas parciales pueden interpretarse como razones de cambio: Consideremos la función T que determina la temperatura en cualquier punto de la corteza terrestre. Claramente ésta depende, en cada punto (x, y), de la longitud x y de la latitud y de dicho punto. La derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial x}(a, b)$ es la razón a la que la temperatura cambia en la dirección este-oeste, mientras que $\frac{\partial T}{\partial y}(a, b)$ es la razón a la que la temperatura cambia en la dirección norte-sur.

3.3.2. Reducción al caso 1

En el caso particular de las derivadas parciales, disponemos de la siguiente regla de oro:

Proposición 3.3.1. *(***Regla de oro***)*

Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, a un punto de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces f admite todas sus derivadas parciales en a si, y solo si f_i admite todas sus derivadas parciales en a $\forall i$. Además en caso afirmativo:

$$(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a))_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a). \quad i = 1, 2, ..., n, \quad j = 1, 2, ..., q.$$

En particular si $q = 1$, entonces $f'(a) = (f_1'(a), f_2'(a), ..., f_n'(a))$.

Ejercicio: Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x + y, x^2, xy)$. Calcúlese $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$.

3.3.3. Regla de la cadena

También para las derivadas parciales se tiene la consiguiente regla de la cadena.

Proposición 3.3.2. *Sean A es un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$, $a \in \mathbb{R}^q$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial que admite todas sus derivadas parciales en a, $B \supseteq f(A)$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial que admite todas sus derivadas parciales en $f(a)$. Entonces la función composición admite todas sus derivas parciales en a, de hecho*

$$\frac{\partial(g \circ f)_k}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a),$$

donde $\frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a))$ representa la derivada parcial i-ésima de la función coordenada g_k en $f(a)$.

Para recordar esta fórmula existe una regla nemotécnica que consiste en identificar h_k con g_k $(k = 1, 2, ..., m)$ y f_i con y_i $(i = 1, 2, ..., n)$, quedando para cada $j = 1, 2, ..., q$

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(a).$$

Ejemplo

Calcúlese $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 2)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 2)$, donde la función $F(u, v) = u^2 + 3uv + 4v^2$, siendo $u = 2 - 2xy^2$ y $v = 1 + x$.

3.3.4. Vector gradiente, matriz jacobiana

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$, a un punto de A y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo **escalar**. Se dice que f tiene **gradiente** en a si admite las q derivadas parciales en a, en cuyo caso definimos el **vector gradiente** de f en a por:

$$\nabla f(a) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_q}(a)) \in \mathbb{R}^q.$$

En el caso de que se consideren campos vectoriales, el concepto de vector gradiente viene sustituido por el de matriz jacobiana.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^q$, a un punto de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo **vectorial** que admite todas sus derivadas parciales en a. Se llama **matriz jacobiana** de f en el punto a,

$J_f(a)$, a la matriz cuya columna i-ésima son las coordenadas del vector $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, esto es, la matriz de orden $n \times q$, dada por:

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_q}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_q}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_q}(a) \end{pmatrix}$$

Notas

1. Obsérvese que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real de variable real ($q = n = 1$), entonces
$$J_f(a) = f'(a).$$

2. Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, es un campo vectorial que admite todas sus derivadas parciales en un punto a de A, entonces, para cada i, los q números que componen la fila i-ésima de la matriz jacobiana son las componentes del vector gradiente de la función coordenada i-ésima, esto es, $\nabla f_i(a)$.

3.3.5. Plano tangente

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus parciales en un punto $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Tal como hicimos con la derivada de una función real de variable real, tratemos, ahora en el caso $n = 2$ y $q = 1$, de encontrar, en cada punto (a, b) , un plano que sea lo más parecido posible a la gráfica del campo escalar en el punto (a, b).

Tengamos en cuenta para ello que

1. Un plano en $\mathbb{R}^3$, $z = mx+ny+c$, no es más que la gráfica de una función afín, esto es, la suma de una aplicación lineal, $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y) = mx+ny$, y una función constante, $C(x, y) = c$, definida también en $\mathbb{R}^2$.

2. Si queremos que el punto $((a, b), f(a, b))$ pertenezca a la gráfica de dicha función afín, necesitamos que $f(a, b) = ma + nb + c$, esto es, $c = f(a, b) - ma - nb$ y por tanto, el plano debe tener la forma:
$$z = m(x - a) + n(y - a) + f(a, b) = T(x - a, y - b) + f(a, b).$$

3. La condición de buena aproximación, dada en el contexto de las funciones reales de variable real, no era otra que el hecho de asegurar la existencia de una función afín g tal que $lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a} = 0$. A posteriori, resultaba que $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$, cuya gráfica es la recta tangente.

4. En nuestro caso no nos es posible dividir por $x-a$ ya que éste es un vector, pero este problema lo podemos resolver tomando su norma.

Así pues, una buena proximación, de un plano a la gráfica del campo f, quedará asegurada si existe una aplicación lineal T tal que

$$lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-T(x-a,y-b)}{||(x,y)-(a,b)||}=0.$$

Es claro que si tal condición se verifica, T es única, y no es otra que

$$T(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,x+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y.$$

y por tanto

$$\Pi(f,(a,b))\equiv z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,(y-b)$$

o, equivalentemente

$$\Pi(f,(a,b))\equiv z=f(a,b)+<\nabla f(a,b),(x-a,y-b)>,$$

es el plano que mejor se aproxima, plano que recibe el nombre de **plano tangente a la gráfica de f en el punto** $f(a,b)$

Como ya hemos comentado, el plano $\Pi(f,(a,b)$ tendrá a lo largo de los ejes x e y, como pendientes respectivamente $m=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ y $n=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Así mismo, llamaremos **vector normal** de la gráfica de f en el punto $(a,b,f(a,b))$, al vector normal al plano tangente $\Pi(f,(a,b))$, esto es,

$$N(f,(a,b))=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b),-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),1\right)$$

3.3.6. Relación de ejercicios

1. Calcúlese el vector gradiente en un punto arbitrario (x,y) de la función f en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y \ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
   b) $f(x,y,z)=(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)} \ \ \forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.
   c) $f(x,y,z)=x^{y+z},\forall x\in\mathbb{R}^+,y,z\in\mathbb{R}$
   d) $f(x,y,z)=(x+y)^z,\forall x,y\in\mathbb{R}^+,z\in\mathbb{R}$

2. Calcúlese el plano tangente a las siguientes superficies en el punto que se indica:

   a) $z = \log(1 + x^2 + y^2)$ en $(0, 0, 0)$.

   b) $z^2 + 3x - x^2 - y^2 = 2$ en $(1, 1, 1)$.

   c) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ en $(1, 2, -1)$.

   d) $z = sen(x)sen(y)$ en $(\pi/2, \pi/4)$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que admite todas sus derivadas parciales. Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(x^2y)$. Pruébese que

$$x\frac{\partial g}{\partial x} = 2y\frac{\partial g}{\partial y}.$$

4. Sea $h(x, y, z) = f(x^2+2yz, y^2+2xz), \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite todas sus derivadas parciales en $\mathbb{R}^3$. Pruébese que:

$$(y^2 - xz)\frac{\partial h}{\partial x} + (x^2 - yz)\frac{\partial h}{\partial y} + (z^2 - xy)\frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

5. Calcúlese $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y}$ de la función $F(u, v) = u^2 + 3uv + 4u^2$, siendo $u = 2 - 2xy^2$ y $v = 1 + x$:

   a) Mediante la regla de la cadena.

   b) Sustituyendo u y v por sus valores.

6. Sean f y g dos funciones reales de variable real, derivables en $\mathbb{R}$. Se define la función de dos variables $z(x, y) = x^2yf(u)+xy^2g(v)$, con $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{x}$. Calcúlese $x\dfrac{\partial z}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial z}{\partial y}(x, y)$.

3.4. Campos diferenciables.

Sumario

Con esta lección comienza el estudio de la derivación en varias variables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

III.4.1 Derivada de un campo vectorial.

III.4.2 Relación entre la diferencial y las derivadas parciales.

III.4.3 Vector tangente a una curva.

III.4.5 Superficies y curvas en forma implícita

III.4.6 Relación de ejercicios.

3.4.1. Derivada de un campo vectorial.

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$ y sea a un punto interior de A (y por tanto la aproximación al punto a puede hacerse en todas las direcciones) y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial.

Se dice que f es un **campo derivable o diferenciable en** a si existe una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - T(x-a)}{\|x-a\|} = 0.$$

Se puede probar que la aplicación lineal es T es única y se denomina **función derivada o diferencial de la función** f **en el punto** a y se nota por $Df(a)$.

Recuérdese que si $q = 2$ y $n = 1$, dicho límite asegura la idoneidad del plano tangente en el punto (a, b).

Es fácil probar que **todo campo diferenciable en un punto** a **es también continuo en** a, pero, ¿es cierto el recíproco? Considérese el siguiente ejercicio.

Ejercicio: Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x, y) = |x| + y.$$

Demuéstrese que, pese a que f es continuo en $(0,0)$, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Se dice que f es diferenciable en un subconjunto $B \subseteq A$ si es diferenciable en cada punto de B.

Ejemplos:

1. Si q=n=1 y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces f es diferenciable en a si, y sólo si, f es derivable en a. En tal caso, $Df(a)(x) = f'(a)x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

2. Los campos constantes $C_y : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$, donde y es un vector de $\mathbb{R}^n$, y definidos por
$$C_y(x) = y, \ \forall x \in \mathbb{R}^q$$
son diferenciables en $\mathbb{R}^q$ y su diferencial $DC_y(x) = 0$, donde por 0 notamos a la aplicación lineal $T : x \longmapsto 0$.

3. Toda aplicación lineal $S : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$, es un campo diferenciable en $\mathbb{R}^q$ y su diferencial $DS(x) = S$. En particular, las proyecciones en $\mathbb{R}^n$ son campos diferenciables en todo punto y, para cada i, $Dp_i(a) = p_i$. Igualmente las inyecciones para cada i, $I_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ son diferenciables en todo punto y $DI_i(a) = I_i$.

En orden a construir nuevos campos diferenciables, veamos que las operaciones usuales están bien avenidas con la diferenciabilidad.

Proposición 3.4.1. *Sean A un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos diferenciables en a. Entonces*

1. *$f + g$ es un nuevo campo diferenciable en a. De hecho, $D(f + g)(a) = Df(a) + Dg(a)$.*

2. *Si $r \in \mathbb{R}$, rf es también un campo diferenciable en a. De hecho, $D(rf)(a) = rDf(a)$.*

3. *Si $n = 1$, $f.g$ también es un campo diferenciable en a y si además, para cada $x \in A$, $g(x) \neq 0$, entonces f/g es también diferenciable en a.*

Proposición 3.4.2. *(Regla de la cadena)*

Sean A un subconjunto de vectores de , a $\mathbb{R}^q$ un punto interior A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función diferenciable en a. Sean ahora $B \supseteq f(A)$ y $f(a)$ es interior a B y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $f(a)$. Entonces $g \circ f$ es una función diferenciable en a. En caso afirmativo,
$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a).$$

Como consecuencia de las propiedades vistas veamos ahora que las funciones coordenadas son diferenciables si, y sólo si, lo es f.

Proposición 3.4.3. *(***Regla de oro***)*

Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, a un punto interior de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Entonces f es diferenciable en a si, y solo si f_i es diferenciable en a $\forall i$. Además en caso afirmativo:

$$(Df(a))_i = Df_i(a).$$

Ejercicio: Estudiar la diferenciabilidad del campo vectrorial $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$f(x, y) = (\sqrt{x}, x^2, x + y).$$

Nota

Si f es una función real de variable real, entonces f es derivable en a si, y sólo si, f es diferenciable en a. En tal caso $Df(a)(t) = tf'(a)$.

3.4.2. Relación entre la diferencial y las derivadas parciales

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$, sea a un punto interior de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial diferenciable en a. Es fácil probar que, para cada $u = (u_1, u_2, ..., u_q) \in \mathbb{R}^q$,

$$Df(a)(u) = f'(a; u).$$

En particular, si f es diferenciable, f admite todas sus derivadas parciales y

$$f'(a; u) = Df(a)(u) = Df(a)(\sum_{i=1}^{q} u_i e_i) = \sum_{i=1}^{q} u_i f'(a; e_i) = \sum_{i=1}^{q} u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

En el caso particular de que f sea un campo escalar, entonces

$$f'(a; u) = Df(a)(u) =< \nabla f(a), u > .$$

Recordemos ahora que, cada aplicación lineal $T : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$, está determinada a partir de los valores $T(e_i)$, donde $e_i = (0, 0, ..., 0, 1^{i)}, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^q$. Concretamente, para cada $u = (u_1, u_2, ..., u_q) \in \mathbb{R}^q$,

$$T(u) = \sum_{i=1}^{q} u_i T(e_i).$$

Este hecho nos permite asociar a cada aplicación lineal T una matriz $A_{n\times q}$ cuya, columna i-ésima está formada por las coordenadas del vector $T(e_i)$, de modo que

$$(T(u))^t = A \times u^t, \quad \forall u \in \mathbb{R}^q,$$

donde por $(T(u)^t$ y u^t indicamos, respectivamente, los vectores $T(u)$ y u dispuestos en forma de columna.

Si f es una función diferenciable en un punto a, podemos aplicar estos dos hechos a la función derivada $Df(a)$. Es claro que su matriz asociada es la matriz jacobiana $J_f(a)$. Así pues, si f es diferenciable en a, para cada $u \in \mathbb{R}^q$,

$$(Df(a)(u))^t = J_f(a) \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_q \end{pmatrix}.$$

Una vez visto que si f es diferenciable en un punto interior a de A, entonces f admite todas sus derivadas parciales en a, podemos preguntarnos si es cierto el recíproco. Con este fin, considérese el siguiente ejercicio.

Ejercicio: Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{y^2+x^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuéstrese que, pese a que existen todas sus derivadas parciales, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Obsérvese que como en este último ejemplo, la existencia de matriz jacobiana (que sirve únicamente sirve para determinar el candidato a función derivada) no es suficiente para deducir la diferenciabilidad y por tanto, hemos de imponer algo más :

Dado A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^q$ y sea f un campo escalar definido en A, se dice que f es **clase $\mathcal{C}^1$ en** A, $f \in \mathcal{C}^1(A)$ si existen las derivadas parciales de f en A y son continuas en A.

Pues bien,

Corolario 3.4.4. *Si A es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^q$ y f es un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ en A, entonces f es diferenciable en A.*

Nota

Si f es un campo diferenciable en un punto a, entonces la derivada direccional es máxima cuando nos movemos en la dirección del vector gradiente, es decir, con $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$. En efecto, según la relación que hemos comentado más arriba tenemos que si $v \in \mathbb{R}^q$, con $\|v\| = 1$ entonces se verifica

$$|f'(a;v)| = |<\nabla f(a), v>| \leq \|\nabla f(a)\| \, \|v\| = \|\nabla f(a)\| \ .$$

Y si tomamos como vector director $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$ obtenemos que se alcanza el máximo valor de la derivada direccional, puesto que

$$|f'(a;v)| = | < \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} > | = \|\nabla f(a)\|.$$

LLegado este momento, podemos considerar la siguiente

Estrategia para el estudio de la diferenciabilidad

1 Estudiamos la continuidad de sus funciones coordenadas.

- a) Si alguna función coordenada **no** es continua en un punto, entonces el campo vectorial no es continuo en dicho punto, y por tanto, **no** es diferenciable en el susodicho punto.
- b) Si todas las funciones coordenadas son continuas, entonces no sabemos nada por el momento.

2 Estudiamos la diferenciabilidad de sus funciones coordenadas.

- a) Si todas las derivadas parciales de sus funciones coordenas existen y son continuas en un conjunto abierto, entonces f es diferenciable en dicho conjunto.
- b) En otro caso, estudiamos la existencia del vector gradiente de cada función coordenada,
  - i) Si tal vector **no existe** para alguna función coordenada en un punto, el campo **no** es diferenciable en dicho punto.
  - ii) Si tal vector existe para todas las funciones coordenadas en un punto, tenemos candidato a diferencial de f en dicho punto y hay que aplicar la definición.

3.4.3. Vector tangente a una curva

Por definición, una **curva o trayectoria en** $\mathbb{R}^n$, γ, es un campo vectorial continuo definido en un intervalo $[a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}^n$.

El ejemplo más sencillo de curva regular es el segmento:
Dados dos puntos x e y de $\mathbb{R}^n$, se define el **segmento de extremos** x **e** y, $[x, y]$, como la curva

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

definida por $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$.
Llamaremos **traza ó gráfica de la curva** γ a la imagen de dicha curva, $\gamma^* = \gamma([a, b])$.

A los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ se les llama, respectivamene, **orígen** y **extremo** de la curva. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva γ es **cerrada**.

Si γ es inyectiva se dice que es **simple** y si γ es cerrada y $\gamma/]a, b[$ es inyectiva, se dice que γ es una curva **cerrada simple.**

γ se dice **diferenciable** si el campo vectorial es diferenciable. Se dice **regular** si es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a, b]$ y finalmente **regular a trozos** si existe una partición P del intervalo $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, tal que la curva $\gamma/_{[x_{k-1}, x_k]}$ es regular para $k = 1, 2, ..., n$.

Nota

A veces, haciendo un abuso del lenguaje, identificamos la curva con su traza. En tal caso, se dice que la curva γ^* viene parametrizada por $\gamma(t)$. Es evidente que, en este sentido, una misma curva puede tener distintas parametrizaciones. Si no se indica nada acerca de la parametrización de la curva, es porque se considera que existe una parametrización predeterminada. Así, por ejemplo

1. La parametrización predeterminada para la elipse de semiejes a y b, viene por $\gamma(t)$, donde $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, está definida por

$$\gamma(t) = (acos(t), bsen(t)).$$

   La elipse es una curva regular cerrada simple.

2. Las gráficas de cualquier función real de variable real continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son otros ejemplos naturales de curvas C, cuyas parametrizaciones predeterminadas vienen dadas por $\gamma(t) = (t, f(t))$. Si f es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces su gráfica es una curva regular.

Obsérvese que $\gamma(t_0) + (t - t_0)\gamma'(t_0)$ (supuesto $\gamma'(t_0) \neq 0$) es la ecuación de una recta en el espacio $\mathbb{R}^n$ que pasa por el punto $\gamma(t_0)$. De hecho, la condición de la derivada elemental de γ en t_0

$$lim_{t \mapsto t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0) - \gamma'(t_0)(t - t_0)}{t - t_0} = 0$$

nos permite afirmar que, de todas las rectas que pasan por dicho punto, $\gamma(t_0) + u(t - t_0)$ (donde u es un vector de $\mathbb{R}^n$), es es la que mejor se aproxima a la traza de la curva γ en las proximidades del punto $\gamma(t_0)$. Dicha recta recibe el nombre de **recta tangente** a la curva γ en el punto $\gamma(t_0)$.

Diremos que el vector $\gamma'(t_0)$ es **tangente a γ en el punto** t_0.

Es claro que podemos interpretar la curva γ como la trayectoria que recorre un móvil cuyo vector de posición en el instante t viene dado por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. En tal caso, el vector derivada $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es la **velocidad** del móvil en el instante t y su norma $||\gamma(t)||$ es la **rapidez o celeridad** del móvil en el instante t.

3.4.4. Curvas y superficies dadas en forma implícita

Curva en el plano en forma implícita:

En el caso en que la traza de la curva venga dada como el conjunto de puntos del plano que anulan una función g de dos variables, est es,

$$\gamma* = \{(x, y);\ g(x, y) = 0\},$$

(por ejemplo, la elipse de semiejes c y d es tal que $g(x, y) = x^2/c^2 + y^2/d^2 - 1$) diremos que la curva viene dada en **forma implícita**.

Veamos que en tal caso, la recta tangente en un punto $(a, b) \in \gamma^*$, es la recta de ecuación implícita

$$< \nabla g(a, b), (x - a, y - b) >= 0.$$

En efecto, la (traza de la) curva, γ^*, resulta de cortar la gráfica de g, con el plano $z = g(a, b)$. La recta resultante de intersectar el plano tangente de g en el punto (a, b) con el plano $z = g(a, b)$ es la recta tangente a la curva y por tanto tiene de ecuaciones

$$z = g(a, b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b)\,(y - b) \quad \text{y} \quad z = g(a, b)$$

o, lo que es lo mismo

$$< \nabla g(a, b), (x - a, y - b) >= 0.$$

Superficies en en forma implícita:

También podemos considerar subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^3$ descritos por una ecuación de la forma

$$g(x, y, z) = 0$$

para una cierta función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Diremos que dichos conjntos son **superficies definidas de forma implícita**, (piénsese por ejemplo en la esfera, esto es,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}).$$

Si suponemos que dicha función g, es diferenciable, podemos considerar el plano

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c)\,(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c)\,(y - b) + \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c)\,(z - c) = 0$$

que es lo mismo que escribir

$$< \nabla g(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) >= 0.$$

Dicho plano es el que mejor se aproxima en el punto $(a, b, c) \in S$ a dicha superficie en un entorno de dicho punto y recibe pues el nombre de **plano tangente a S en el punto** (a, b, c). Así pues al vector normal de dicho plano en el punto (a, b, c) recibe el nombre de **vector gradiente de** g en ese mismo punto.

3.4.5. Relación de ejercicios

1. Dese un ejemplo de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, $n > 1$ que sea continua en un punto pero que no sea diferenciable en él.

2. Sea la función definida como $f(x,y,z) = (3x-2y+z, x+3y-2z)$, $\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que f es diferenciable en cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ y obténgase la diferencial de la función en $(1,1,1)$.

3. Estúdiese la diferenciabilidad de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

   a) $f(x,y) = x^3 + xy - y^2$
   b) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y^2}$
   c) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

4. Estúdiese la diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones:
   $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$f(x,y) = (e^{x+y}, \operatorname{sen}(x-y), x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0$$

$$f(0,y) = (e^y, \operatorname{sen}(-y), 0)$$

   $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$g(x,y,z) = (\cos yz, xyz, \frac{1}{z}) \text{ , si } z \neq 0$$

$$g(x,y,0) = (1,0,0)$$

   Calcúlese, en el caso de que exista, la derivada en el origen.

3.5. Cálculo de extremos

Sumario

En esta lección vamos a examinar criterios que nos permitan determinar los extremos de un campo escalar. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.5.1. Extremos relativos de un campo escalar

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Se dice que

a es un **máximo relativo** o que f **tiene un máximo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$.

b) $f(a) \geq f(x), \ \forall x \in B(a, r)$.

a es un **mínimo relativo** o que f **tiene un mínimo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$.

b) $f(a) \leq f(x), \ \forall x \in B(a, r)$.

a es un **extremo relativo** si o bien es un máximo relativo ó bien es un mínimo relativo.

Como ya vimos en la lección 3.2, sabemos que, en general, no existe relación entre extremo relativo y extremo absoluto, salvo que todo extremo absoluto, que sea un punto interior, también es un extremo relativo.

3.5.2. Extremos relativos y derivabilidad

Comencemos viendo que en todo extremo relativo las derivadas parciales se anulan. Antes necesitamos la siguiente definición:

Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^q$, a un punto interior de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales en a. Diremos que a es un **punto crítico de** f si, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Proposición 3.5.1. *Sean A es un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, a un punto interior de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales en a. Si f tiene un extremo relativo en a entonces a es un punto crítico de f.*

Este sencillo resultado nos permite elaborar la siguiente regla práctica para detectar los posibles extremos de un campo escalar.

Regla práctica para el cálculo de extremos

Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^q$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Supongamos que f alcanza su máximo o su mínimo absoluto en $a \in A$, entonces a está **en una de las tres situaciones siguientes**:

1) a es un punto frontera.

2) a es un punto interior y f no admite alguna derivada parcial en a.

3) a es un punto crítico.

Una vez detectados los candidatos, se nos puede presentar una de las dos siguientes situaciones:

1) El conjunto A es compacto y f es continua.

2) No se dan alguna de las circunstancias del primer apartado.

En el primer caso sabemos, por el teorema de Weiertrass sobre la conservación de la compacidad, que f alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos de A, por lo que basta evaluar f en los candidatos de los tres tipos para determinar quienes son estos extremos. En el segundo caso, nos contentaremos con saber que, de haber máximo ó mínimo, éste está entre nuestros candidatos.

Ejercicio: Calcúlense, si existen, los extremos de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en el conjunto A que es el cuadrado de vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ mediante la ley

$$f(x, y) = xy(1 - x)(1 - y).$$

¿Qué puede decirse si $A = \mathbb{R}^2$?

Vamos ahora a buscar una condición suficiente que nos permita saber cuando un punto crítico es efectivamente un extremo relativo y de qué tipo es. Este tipo de criterios envuelve, como ya pasó en variable real, a las derivadas sucesivas.

3.5.3. Derivadas parciales de orden superior

Sea A un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$ y a un punto interior de A y supongamos que f admite su derivadas parcial j-ésima en una cierta bola centrada en a, $B(a,r) \subseteq A$. Se dice que f **admite la derivada parcial de segundo orden res-pecto de las variables** i, j **en el punto** a, si la función $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ definida en $B(a,r)$ admite derivada parcial i-ésima en el punto a, y notaremos

$$D_{ij}f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i}(a).$$

Una función de q variables admite, suponiendo que existan todas, q^2 derivadas de orden 2.

De forma análoga se definen las derivadas de orden 3, y de orden k en general. Además, se dice que f es **clase** $C^k(A)$ si existen todas las derivadas parciales de orden k en A y son continuas.

Las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a)$ se las conoce como **derivadas cruzadas**. El siguiente resultado establece una condición suficiente para que estas derivadas cruzadas coincidan.

Lema 3.5.2 (de Schwartz)**.** *Sean* $f : A \to \mathbb{R}$, A *un abierto de* $\mathbb{R}^q$ *y* $a \in A$. *Sean* $i, j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ *con* $i \neq j$, *y supongamos que existe* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a)$, $\forall x \in A$, *siendo además esta función continua en* a. *Entonces, existe la otra derivada cruzada en* a *y ambas coinciden.*

En particular,

Corolario 3.5.3. *Sea* A *un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^q$ *y* $f \in C^2(A)$. *Entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}(a), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, q\} \ , \ i \neq j \ .$$

Las derivadas parciales de orden 2 nos permiten construir una matriz que utilizaremos para calcular extremos relativos de campos escalares.

Si f admite todas sus derivadas parciales segundas en a, se define la **matriz hessiana** de f en a por:

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \, \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_q}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_q}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_q \, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_q \, \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_q \, \partial x_q}(a) \end{pmatrix}$$

En virtud del corolario del Lema de Schwartz, si $f \in C^2(A)$, entonces, para cada $a \in A$ $H(f,a)$ es una matriz simétrica. En este caso, se puede definir la forma cuadrática asociada a $H(f,a)$ de la forma siguiente:

$$Q(f,a) : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R} \text{ definida por}$$

$$Q(f,a)(x) = x\, H(f,a)\, x^t \ ,$$

o, lo que es lo mismo

$$Q(f,a)(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\ \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\ \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_q}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\ \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\ \partial x_q}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_q\ \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_q\ \partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_q\ \partial x_q}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Es fácil probar que para cada vector $u \in \mathbb{R}^q$, $Q(f,a)(u) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$.

En particular, si $q = 2$, $n = 1$, y $(a,b) \in A$, y $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$, entonces $Q(f,(a,b))(e_1)$ es la segunda derivada de la función $g(x) = f^b(x)$ y por tanto su signo, indicará si la gráfica de g tiene en el punto $(a, b, f(a,b)$ un máximo ó un mínimo.

Calcúlese la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de $f(x,y) = x^4 - 2xy^3 + 3y^2$ en el punto $(1,1)$.

Con esta notación, podemos presentar la fórmula de Taylor para campos escalares y de orden 2.

Teorema 3.5.4 (de Taylor). *Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^q$ y $f \in C^2(A)$. Sean x, $a \in A$ tales que el segmento $[x,a] \subset A$. Entonces existe un campo escalar R_2 de forma que*

$$f(x) = f(a) + < \nabla f(a), x - a > + \frac{1}{2} Q(f,a)(x-a) + R_2(x-a)$$

y tal que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{R_2(x-a)}{\|x-a\|^2} = 0$.

Obsérvese que, escribiendo la fórmula de la siguiente forma, ésta nos recuerda a la que ya conocemos en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = f(a) + \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j - a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{q} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\ \partial x_i}(a)(x_i - a_i)(x_j - a_j) + R_2(x-a)$$

Ejercicio

Aplicar la fórmula de Taylor a $f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$ en $(0,0)$.

3.5.4. Condición suficiente para la existencia de extremos relativos

A continuación vamos a establecer condiciones que nos permitan decidir cuándo un punto de crítico es extremo o no.

Recordemos que la fórmula de Taylor, en el caso de que la función esté en las condiciones adecuadas, y cuando la aplicamos a un punto crítico, esto es, $\nabla f(a) = 0$, nos dice que

$$f(x) - f(a) \approx \frac{1}{2} Q(f,a)(x-a)$$

Esto último nos lleva a considerar el signo de la forma cuadrática $Q(f,a)$.

Para simplificar la notación, llamaremos Q a la forma cuadrática asociada a $H(f,a)$. Entonces se dice que:

i. Q es **definida positiva sii** $Q(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^q$ y $Q(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.

ii. Q es **definida negativa sii** $Q(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^q$ y $Q(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.

iii. Q es **semidefinida positiva sii** $Q(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^q$ y $\exists\, x \neq 0$, $Q(x) = 0$.

iv. Q es **semidefinida negativa sii** $Q(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^q$ y $\exists\, x \neq 0$, $Q(x) = 0$.

v. Q es **indefinida sii** $\exists\, x,\ y \in \mathbb{R}^q,\ Q(x) < 0 < Q(y)$.

Comenzamos con el siguiente resultado:

Proposición 3.5.5. *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^q$, $f \in C^2(A)$ y $a \in A$ un punto crítico de f. Entonces se verifica que:*

i) Si f alcanza en a un mínimo relativo, entonces Q es semidefinida positiva.

ii) Si f alcanza en a un máximo relativo, entonces Q es semidefinida negativa.

iii) Si Q es definida positiva, entonces f alcanza en a un mínimo relativo.

iv) Si Q es definida negativa, entonces f alcanza en a un máximo relativo.

v) Si Q es indefinida, entonces f no alcanza extremo en a. En este caso se dice que f presenta un punto de silla en a.

El recíproco de estos resultados no es cierto. Con los siguientes ejemplos verificamos que una misma forma cuadrática semidefinida se puede presentar tanto en casos de extremo, como en casos de no extremo.

Ejercicio

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^4$. Comprobamos que $(0, 0)$ es el único punto crítico de f. Si calculamos la matriz hessiana de f en $(0, 0)$ nos queda
$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
que es semidefinida positiva. Pero en este caso podemos concluir que en $(0, 0)$ se tiene mínimo absoluto puesto que
$$f(x, y) = x^2 + y^4 \geq 0 = f(0, 0) \ , \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^3$. Esta función también tiene al $(0, 0)$ como único punto crítico y la matriz hessiana en ese punto es precisamente la misma que la del ejemplo anterior. Sin embargo, en este caso, no se alcanza extremo relativo en $(0, 0)$ ya que si $\delta > 0$, entonces se tiene que
$$f(\delta, 0) = \delta^2 > 0$$
$$f(0, \delta) = -\delta^3 < 0$$

Así pues el estudio emprendido se reduce a clasificar la forma cuadrática $Q(f, a)$ adociada a la matriz hessiana $H_f(a)$.

Para ello, consideramos dos métodos. El primer método es útil para dos y tres dimensiones, mientras que el segundo es más práctico para el caso $q \geq 3$.

Caso q=2

Proposición 3.5.6. *Sea A es un subconjunto abierto de vectores de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(A)$ y (a, b) un punto crítico de f.*

1. *Si*
$$det(H_f(a, b)) > 0 \ y \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0,$$
entonces (su forma cuadrática es definida positiva y por tanto) f tiene en (a, b) un <u>mínimo</u> relativo estricto.

2. *Si*
$$det(H_f(a, b)) > 0 \ y \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0,$$
entonces (su forma cuadrática es definida positiva y por tanto) f tiene en (a, b) un <u>máximo</u> relativo estricto.

3. *Si f tiene alguna derivada de segundo orden en a distinta de cero y es tal que*
$$det(H_f(a, b)) \geq 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \geq 0 \ y \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \geq 0,$$
entonces (su forma cuadrática es semidefinida positiva y por tanto) <u>de tener</u> f un extremo relativo en (a, b), éste ha de ser un mínimo.

4. *Si f tiene alguna derivada de segundo orden en (a,b) distinta de cero y es tal que*

$$det(H_f(a,b)) \geq 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \leq 0 \ \ y \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \leq 0,$$

entonces (su forma cuadrática es semidefinida negativa y por tanto) de tener f un extremo relativo en a, éste ha de ser un máximo.

5. *Si*

$$det(H_f(a,b)) < 0,$$

entonces (su forma cuadrática es indefinida y por tanto) f no tiene ningún extremo relativo en (a,b).

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y.$$

Caso $q = 3$:

Para enunciar el criterio para $q = 3$ clasificar necesitamos la siguiente definición:

Dada una matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3}$. Se dice que K es una **submatriz principal de** A si es una matriz de uno de los siete siguientes tipos:

$$(a_{1,1}), (a_{2,2}), (a_{3,3}), \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}, A$$

Proposición 3.5.7. *Sea A es un subconjunto abierto de vectores de $\mathbb{R}^3$, $f \in C^2(A)$ y (a,b,c) un punto crítico de f.*

1. *Si*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) > 0, det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{pmatrix} > 0, det(H_f(a,b,c)) > 0.$$

entonces (su forma cuadrática es definida negativa y por tanto) f tiene en a un mínimo relativo estricto.

2. *Si*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) < 0, det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{pmatrix} > 0, det(H_f(a,b,c)) < 0.$$

entonces (su forma cuadrática es definida negativa y por tanto) f tiene en (a,b,c) un máximo relativo estricto.

3. *Si f tiene alguna derivada parcial de segundo orden en (a, b, c) distinta de cero y es tal que*
$$det(K) \geq 0, \quad \forall K \text{ submatriz principal de la matriz hessiana } H_f(a, b, c),$$
entonces (su forma cuadrática es semidefinida negativa y por tanto) de tener f un extremo relativo en (a, b, c), éste ha de ser un mínimo.

4. *Si f tiene alguna derivada parcial de segundo orden en (a, b, c) distinta de cero y es tal que*
$$(-1)^{orden\ de\ k} det(K) \geq 0, \quad \forall K \text{ submatriz principal de la matriz hessiana } H_f(a, b, c),$$
entonces (su forma cuadrática es semidefinida negativa y por tanto) de tener f un extremo relativo en (a, b, c), éste ha de ser un máximo.

5. *Si existe una submatriz principal K de orden 2 tal que $det(K) < 0$, entonces (su forma cuadrática es indefinida y por tanto) f no tiene ningún extremo relativo en (a, b, c)*

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por
$$f(x, y, z) = -6x^2 - y^2 - z^2.$$

Caso $q \geq 3$:

Para clasificar una forma cuadrática de dimensión mayor (ó igual que 3) interesa clasificar la forma cuadrática Q asociada a $H_f(a)$ a partir del signo de sus autovalores o valores propios.

Dada una matriz cuadrada A, lLamaremos **polinomio característico** asociado a la matriz A al polinomio, $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$, donde por I representamos la matriz identidad. Las raíces del polinomio característico reciben el nombre de **autovalores** de la matriz A.

De hecho, si representamos por λ_k , $\forall k = 1, 2, \ldots q$, los autovalores de la matriz hessiana $H_f(a)$, se verifica la siguiente caraterización:

i) Q es definida positiva $\iff$ $\lambda_k > 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots, q$.

ii) Q es definida negativa $\iff$ $\lambda_k < 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots q$.

iii) Q es indefinida $\iff$ $\exists\, i \neq j$, con $\lambda_i < 0 < \lambda_j$.

iv) Q es semidefinida positiva $\iff$ $\exists\, \lambda_i = 0$ y $\lambda_k \geq 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots q$.

v) Q es semidefinida negativa $\iff$ $\exists\, \lambda_i = 0$ y $\lambda_k \leq 0$, $\forall k = 1, 2, \ldots q$.

Como consecuencia de lo anterior tenemos que:

Proposición 3.5.8.

i) *Si* $\lambda_k > 0$, $\forall k = 1, 2, \dots q$, *entonces* f *alcanza en* a *un mínimo relativo.*

ii) *Si* $\lambda_k < 0$, $\forall k = 1, 2, \dots q$, *entonces* f *alcanza en* a *un máximo relativo.*

iii) *Si existen* $\lambda_i > 0$ *y* $\lambda_j < 0$, *entonces* f *no alcanza extremo relativo en* a.

iv) *Si* $\exists\, \lambda_i = 0$ *y* $\lambda_k \geq 0$, $\forall k = 1, 2, \dots q$, *entonces* f *de tener un extremo relativo en* a *éste ha de ser un mínimo relativo.*

v) *Si* $\exists\, \lambda_i = 0$ *y* $\lambda_k \leq 0$, $\forall k = 1, 2, \dots q$, *entonces* f *de tener un extremo relativo en* a *éste ha de ser un máximo relativo.*

El único inconveniente que presenta esta clasificación sería, en principio, la dificultad que se puede dar a la hora de calcular los autovalores de la matriz H. Este problema queda resuelto con la **regla de Silvester** que nos va a permitir decidir el número de autovalores positivos sin necesidad de calcularlos, simplemente observando los coeficientes del polinomio característico de H. Concretamente, si

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_q\lambda^q,$$

y notamos por $V(a_0, a_1, a_2, \dots, a_q)$ al **número de cambios de signo que se dan coeficiente a coeficiente**, entonces la regla de Silvester asegura que

$$V(a_0, a_1, a_2, \dots, a_q) = \text{ número de autovalores positivos de } H .$$

$$V(a_0, -a_1, a_2, \dots, (-1)^q\, a_q) = \text{ número de autovalores negativos de } H .$$

3.5.5. Relación de ejercicios

1. Consideremos las funciones reales f y g dadas por:

   a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $g(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

   Se pide:

   a) Calcúlense los puntos críticos.

   b) Calcúlese la matriz hessiana en los puntos críticos.

   c) Estúdiese la existencia de extremos relativos.

2. Calcúlense los extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$.

b) $f(x,y) = |x| + |y|$.

c) $f(x,y) = |x| + y$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos parámetros, y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estúdiese la existencia de extremos de f en función de los parámetros.

4. Calcúlense los extremos relativos de los siguientes campos escalares. Determínese, cuando sea posible, si dichos extremos son absolutos o no lo son.

   a) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

   b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

   c) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.

   d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy \quad (a > 0)$

   e) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$

   f) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

   g) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\,y)$.

   h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$.

   i) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$.

   j) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$.

5. Una función f definida en un abierto del plano se dice que es **armónica** si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

   en todo punto de su dominio. ¿Son armónicas las siguientes funciones?

   a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{y}) \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : \; x \in \mathbb{R}\}$.

   b) $g(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) $h(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{x^2+y^2} \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3.6. Extremos condicionados.

Sumario

En esta lección vamos a enunciar criterios que nos permitan determinar los extremos de un campo escalar en un cierto subconjunto del dominio de dicho campo escalar .El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.6.1. Motivación

Para motivar esta lección vamos a considerar dos ejemplos:

Ejercicio 1: Sea el triángulo

$$\mathrm{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq y \leq 4\}.$$

Se trata de calcular los extremos de la función $f : \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$.

Dado que T es un conjunto compacto y f es una función continua, sabemos que f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sendos puntos de T. Sabemos que ésta función no tiene ningún punto crítico en dicho conjunto por lo que sus valores máximo y mínimo se alcanzarán en puntos de la frontera, esto es, ó bien los vértices del triángulo T ó bien en algún punto de sus tres lados. En consecuencia, los puntos a tener en cuenta son

1) Los tres vértices

2) Para cada lado, los puntos de cada uno de éstos en los que la función restringida alcance sus extremos.

Así pues, se trata de calcular los extremos de f, restringida a cada uno de los siguientes conjuntos

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,4[:\ x = 0\},$$

$$M_2 = \{(x,y) \in]0,4[\times\mathbb{R}:\ y = 4\},\quad M_3 = \{(x,y) \in]0,4[\times]0,4[:\ x = y\},$$

$$M_4 = \{(0,0)\},\ M_5 = \{(0,4)\}\ M_6 = \{(4,4)\}.$$

Dado un subconjunto M del dominio de f, llamaremos **extremo local de f condicionado por** M a cualquier extremo de la función f restringida a M.

En este caso, la búsqueda de los extremos locales condicionados por M_4, M_5 y M_6 es trivial puesto que estos conjuntos constan de un sólo punto. Con respecto a los otros conjuntos bastará eliminar, en cada caso, una variable y calcular los extremos de la correspondiente función real de variable real.

Consideremos el segundo ejemplo:

Ejercicio 2:

Consideremos una placa plana ciruclar P de radio uno, y que se calienta de manera que la temperatura en un punto $(x,y) \in P$ es

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x,$$

y calculemos sus posibles extremos absolutos.

Dado que P es un conjunto compacto y f es un campo continuo, sabemos que f alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos de P. Sabemos que $(1/2,0)$ es el único punto crítico de f, por lo que al menos su valor máximo o mínimo se alcanzará en algún punto del tipo I), esto es, en algún punto de la circunferencia

$$\mathrm{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ahora debemos calcular los puntos extremos de la función T condicionados por el conjunto C. En este caso aparece una dificultad añadida: no podemos despejar ninguna variable en función de la otra.

3.6.2. Conjuntos determinados por una función

Para este último ejercicio, así como en aquellos casos en que haya más de dos variables, necesitaremos desarrollar una nueva técnica. Primero analicemos la situación en ambos ejemplos y veamos que el planteamiento del problema del cálculo de extremos condicionados el conjunto M obedece al siguiente esquema general:

Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^q$ y f un campo escalar definido en A. Sea M un subconjunto de A al que podemos asociar una función $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^{q-k}$ tal que:

1. $M = \{x \in A;\ g(x) = 0\}$.
2. Todas sus funciones coordenadas g_i tienen derivadas parciales continuas en A.
3. Su matiz jacobiana $J_g(x)$ tiene rango $q-k$ en A.

Este hecho se reflejará diciendo que g **determina a** M.

Así pues, en el ejercicio 1, tenemos la siguiente situación:

1. La función $g(x,y) = x$ definida en $A = \mathbb{R}\times]0,4[$ determina a M_1,
2. $g(x,y) = y-4$ definida en $A =]0,4]\times\mathbb{R}$ determina a M_2,
3. $g(x,y) = y-x$ definida en $A =]0,4[\times]0,4[$ a M_3,
4. $g(x,y) = (x, y-x)$ definida en $A = \mathbb{R}^2$ a M_4,
5. $g(x,y) = (x, y-4)$ definida en $A = \mathbb{R}^2$ a M_5,
6. $g(x,y) = (x-4, y-4)$ definida en $A = \mathbb{R}^2$ a M_6.

Y para el ejercicio 2, $g(x,y) = x^2+y^2-1$ definida en $A = \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ determina a C.

Hagamos ahora la siguiente observación.

Proposición 3.6.1. *Sean A un conjunto abierto, $g = (g_1, g_2, ..., g_{q-k})$ una función que determina a un subconjunto M de A y $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales en A y son continuas en $a \in M$. Si f alcanza un extremo condicionado por M en a, entonces existe un único $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{q-k}) \in \mathbb{R}^{q-k}$ tal que*

$$\frac{\partial(f+\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + ... + \alpha_{q-k} g_{q-k})}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \forall i \in \{1,2,...,q\}.$$

Esto nos proporciona la siguiente **estrategia:**

Sean f, A, g y M como en el enunciado de la proposición anterior. Para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{q-k}) \in \mathbb{R}^{q-k}$, llamamos **función de Lagrange asociada a f,M y α** a la función L_α definida en A por

$$L_\alpha = f + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + ... + \alpha_{q-k} g_{q-k}.$$

Dicha función recibe el nombre de .

La proposición anterior nos afirma que:

" Los extremos de f condicionados por M son soluciones del sistema siguiente, llamado **sistema de Lagrange** *".*

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_1}(x) = 0,$

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_2}(x) = 0,$

...

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_q}(x) = 0,$

$g_1(x) = 0, \ldots, \;\; g_{q-k}(x) = 0.$

Si $a = (a_1, a_2, ..., a_q) \in A$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{q-k}) \in \mathbb{R}^{q-k}$ son solución de este sistema, sabemos que α está determinado de forma única y sus coordenadas reciben el nombre de **Multiplicadores de Lagrange para el punto** a.

Ejercicio: Calcúlense los multiplicadores de Lagrange en los ejercicios anteriores.

3.6.3. Matriz hessiana asociada a la función de Lagrange.

Podemos ver ahora ¿qué sucede en los puntos que son solución del sistema de Lagrange en los que la función no alcanza un extremo absoluto? Necesitamos una estrategia que nos permita saber cuando uno de estos puntos es efectivamente un extremo relativo y de qué tipo es. Hagamos primero algunas observaciones.

Espacio tangente

Sean M un subconjunto de un abierto A de $\mathbb{R}^q$ y $a \in M$. Se dice que un vector $u \in \mathbb{R}^q$ es un **vector tangente** a M en a si existe una curva α contenida en M que pasa por el punto a y que tiene tangente en a con dirección u, esto es, existe $r > 0$ tal que $\alpha :]-r, r[\longrightarrow \mathbb{R}^q$ es una función continua tal que

$$\alpha(0) = a, \quad \alpha'(0) = u,$$

donde

$$\alpha'(0) = lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x) - \alpha(0)}{x}.$$

Se define el **espacio tangente** a M en a, $T_M(a)$, como el conjunto de los vectores tangentes a M en el punto a. Se puede probar que si M está determinado por g, entonces $T_M(a)$ coincide con el núcleo de la aplicación $Dg(a)$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}^{q-k}$, notemos ahora por

1) $K(a)$= matriz cuyos vectores fila son los vectores básicos de $T_M(a)$

2) $H_{L_\alpha}(a)$= matriz hessiana de $L_\alpha(a)$

3) $H(a) = K(a) H_{L_\alpha}(a) K(a)^t = (a_{ij})$

4) Para cada $p \leq k$,

$$H_p(a) = a_{ij},$$

con $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$, donde k es la dimensión de $T_M(a)$.

Con esta notación introducida ya podemos decir qué ocurre,

Teorema 3.6.2. *Sean M un subconjunto de un abierto A de $\mathbb{R}^q$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y g una función que determina a M. Supongamos que tanto f como g admiten todas sus derivadas parciales segundas en A y éstas son continuas. Si a y α son soluciones del sistema de Lagrange, y $H(a)$ es como arriba, entonces*

1. *Si, para cada $j \leq k$, $det(H_j(a)) > 0$, f tiene en a un mínimo relativo estricto.*
2. *Si, para cada $j \leq k$, $(-1)^j det(H_j(a)) > 0$, f tiene en a un máximo relativo estricto.*
3. *Si existen dos submatrices principales de $H(a)$, K y L tales que:*

$$det(K) < 0, \quad y \quad (-1)^{orden\ de\ L} det(L) < 0,$$

entonces f no tiene ningún extremo relativo en a.

Ejercicio: Determínense las dimensiones que ha de tener un ortoedro de volumen uno para que su superficie total sea mínima.

Hágase con ambas técnicas: Multiplicadores de Lagrange y despejando una de las variables.

3.6.4. Relación de ejercicios

1. Encuéntrense los puntos donde la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y \qquad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

alcanza sus extremos absolutos siendo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \geq 0, \ x + y \leq 3\}.$$

2. Calcúlense los extremos relativos de $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

   a) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

b) $f(x,y) = |x| + |y|$.

c) $f(x,y) = |x| + y$.

3. Encuéntrense los puntos del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2x, \ y \geq 0\}$ donde la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos.

4. Determínese el punto $P(x,y,z)$ en el plano $2x + y - z = 5$ que está más cerca del origen.

5. Calcúlese la distancia mínima del origen a la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 - z^2 - 1 = 0$

6. Se trata de montar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia se desea emplazarlo donde el campo magnético del planeta sea más débil (aunque por supuesto, en la superficie). El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades; la fuerza del campo magnético viene dada por

$$M(x,y,z) = 6x - y^2 + xz + 60$$

basado en un sistema coordenado cuyo origen está en el centro del planeta. ¿Dónde habrá de ser ubicado el radiotelescopio?.

7. Determínese el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde a, b son reales positivos.

8. Estúdiense los extremos de la función $f : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = logx + logy + logz$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

9. Hállese la mínima distancia entre la recta $x + y = 4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

10. Hállense los extremos condicionados de la función $f(x,y) = x^3 + xy^2$ donde $xy - a^2 = 0, \quad (a \neq 0)$.

11. El área de una caja rectangular sin tapa es de $108u^2$. Hallar que dimensiones debe tener para que conseguir el máximo volumen.

12. En una tienda de bebidas se vende vino de mesa de la marca A y de la marca B. El propietario de la tienda puede obtener ambos vinos a un coste de 1 euro por botella; su hijo, que es estadístico, ha estimado que si el vino A se vende a x euros el litro y el vino B a y euros el litro, entonces se venderá aproximadamente $100 - 200x + 100y$ botellas de la marca A y $100 + 400x - 600y$ botellas de la marca B. ¿Qué precio deberá ponerse a cada marca de vino para maximizar el beneficio?.

3.7. Teoremas de la función inversa e implícita.

Sumario

El objetivo de esta lección es el de generalizar, para campos vectoriales, el corolario 3.1.13 de la derivación de la función inversa, dado en la lección 3.1 para funciones reales de variable real. En este sentido daremos dos versiones equivalentes del mismo resultado denominadas, respectivamente, teorema de la función inversa y teorema de la función implícita. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.7.1. Motivación

Comenzamos recordando el corolario 3.1.13

Sea I un intervalo de numeros reales, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x) \neq 0, \quad \forall x \in I$. Entonces f^{-1} es derivable en $f(I)$ y para cada $x \in I$, se tiene que

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

En orden a extender este resultado a dimensiones superiores, analicemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Considérese el campo vectorial

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{definido por} \quad F(x,y) = (e^x cos(y), e^x sen(y)).$$

Dicho campo es diferenciable en $\mathbb{R}^2$, tiene jacobiano no nulo en $\mathbb{R}^2$ y sin embargo, F ni siquiera es inyectiva, ya que

$$F(x,y) = F(x,y+2\pi) \ , \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

La primera idea que se desprende, es que el resultado, tal cual fue enunciado en $\mathbb{R}$, **no** es generalizable. Obsérvese que si F es un campo vectorial la condición correspondiente, sobre la no nulidad de la derivada, es que el determinante de su matriz jacobiana (**jacobiano**) sea distinto de cero, y como hemos visto, ni tan siquiera esta condición asegura la invertibilidad del campo.

Podemos ahora preguntarnos, si

1. ¿ Es F inyectiva al menos en algún subconjunto abierto U de A?

2. $F \in \mathcal{C}^1(A)$, entonces ¿ Es la función inversa de clase $\mathcal{C}^1$ en la imagen de dicho subconjunto?

Para arbitrar una respuesta para campos vectoriales, necesitamos introducir algunas definiciones.

Definición 3.7.1. Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 en A.

1. Se dice que F es **invertible (globalmente) en** A ó que F es un **difeomorfismo de clase** C^1 **de** A **sobre** $F(A)$, si se verifican las tres condiciones siguientes:

   a) F es inyectiva (y por tanto existe $F^{-1} : F(A) \longrightarrow A$).
   b) $F(A)$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
   c) $F^{-1} \in C^1(F(A))$.

   A la función inversa F^{-1} se le llama **inversa global** de F en A.

2. Se dice que F es **localmente invertible** en $a \in A$ ó que F es un **difeomorfismo de clase** C^1 **local en** a, si existen U y V abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $a \in U$ y verificando que $F/U : U \to V$ es un difeomorfismo de clase C^1 de U sobre V.

   A la función $(F/U)^{-1}$ se le llama **inversa local** de f en a.

Es claro que si una función es invertible en un abierto A, entonces es localmente invertible en cada punto de ese abierto, pero el recíproco no es cierto, ni siquiera en $\mathbb{R}$, ya que, por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es localmente invertible en $\mathbb{R}^*$, pero no lo es globalmente.

3.7.2. Teorema de la función inversa

Teorema 3.7.2 (de la función inversa). *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $F : A \to \mathbb{R}^n$ y $a \in A$ verificando que:*

a) $F \in C^1(A)$,

b) $\det J_F(a) \neq 0$.

Entonces se verifica que F es localmente invertible en a; esto es, existe un entorno abierto $U \subset A$ de a tal que $F(U) = V$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, F es un difeomorfismo de clase C^1 de U sobre V, y para cada $x \in U$ se verifica que

$$J_{F^{-1}}(F(x)) = J_F(x)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_1 n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}^{-1}$$

Además, si F admite todas sus derivadas parciales segundas (respectivamente $F \in C^2(U)$) en U, entonces F^{-1} admite también todas sus derivadas parciales (resp. $F^{-1} \in C^2(V)$) en V.

Comentarios:

1. El teorema de la función inversa es un teorema de existencia, es decir, **no** nos dice en ningún momento **cómo** calcular la función inversa local, **sólo** nos dice que **existe**, de qué clase $\mathcal{C}^k$ es y nos da una **regla** para calcular sus derivadas parciales.

   En particular, el teorema nos permite afirmar que si $F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ es como en el teorema, el sistema de n ecuaciones con n incognitas

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = y_2 \\ \quad\quad\quad ... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = y_n \end{cases}$$

   tiene una única solución $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U$, siempre que $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in V$, y aunque **no** nos dice **cómo** calcular la solución, si sabemos que la función que a cada valor de y le asigna la solución, $y \longmapsto x$, es de clase C^1 en $F(U)$.

   Ejercicio

   Estúdiense los puntos en los que el sistema siguiente

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = xy \end{cases}$$

define a x e y localmente como funciones de u, v. Obténgase la matriz jacobiana de la función inversa $(u,v) \mapsto (x,y)$ en el punto $f(1,0)$.

2. Si $F \in \mathcal{C}^1(A)$, F es inyectiva y $det(J_F(x)) \neq 0$, $\forall x \in A$, entonces F es globalmente invertible en A.

   Ejercicio

   Considérese el campo F relativo al ejercicio anterior y demuéstrese que F/A, donde $A = \{(x,y);\ x+y>0\}$, es inyectivo y que $F(A) = \{(u,v);\quad u^2+4v>0\}$. Conclúyase que para cada (u,v), el sistema tiene una única solución (x,y) y que la aplicación $(u,v) \longmapsto (x,y)$ es de clase $\mathcal{C}^1(F(A))$.

3. La condición de jacobiano no nulo es claramente **necesaria** para que una función sea invertible. Piénsese que si F tiene una función inversa diferenciable, entonces por la regla de la cadena,

$$DF(a) \circ DF^{-1}(F(a)) = I, \quad DF^{-1}(F(a)) \circ DF(a) = I,$$

   luego $DF(a)$ es biyectiva, y por tanto, necesariamente el determinante de la matriz jacobiana de F en a ha de ser distinto de cero.

3.7.3. Teorema de la función implícita

Consideremos la ecuación $x^2+y^2-1=0$. La cuestión es: ¿Podemos despejar la variable x en función de y? Es decir, ¿es posible definir una función h de forma que $x = h(y)$ y que $h(y)^2+y^2=1$? En este caso, la respuesta es **no**, puesto que la solución sería $x = \pm\sqrt{1-y^2}$, que no es una función.

Dado que la posibilidad de despejar globalmente la variable x no ha sido posible, haremos un planteamiento "local" del problema:

Sea (x_0,y_0) un punto solución de la ecuación $g(x_0,y_0)=0$, donde $g(x,y)=x^2+y^2-1$. ¿Se puede definir una función h, esto es, despejar x en función de y al menos en un entorno U de y_0, tal que, para cada $y \in U$, $x = h(y)$, y además $g(h(y),y)=0$? La respuesta es **sí**:

Tomemos, por ejemplo, $(x_0,y_0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Es claro que podemos despejar la variable x tomando como $U =]0,1[$ y como función $x = h(y) = \sqrt{1-y^2}$, para cada $y \in U$.

Cuando, como en el ejemplo anterior, la respuesta es afirmativa en un cierto punto (x_0,y_0), se dice que la ecuación $g(x,y)=0$ **define a la variable x implícitamente**

como función de y en un entorno de (x_0, y_0), y la función $x = h(y)$ recibe el nombre de **función implícita** definida por la ecuación $g(x, y) = 0$ en un entorno de (x_0, y_0).

Así pues, podemos decir que, en el ejemplo propuesto, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define la variable x implícitamente como función de y en el entorno $]0, 1[\times]0, 1[$ de $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Así como que la función $h(y) = \sqrt{1 - y^2}$ es la función implícita definida por la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ en el entorno $]0, 1[\times]0, 1[$.

Daremos ahora una primera condición suficiente para que exista una función implícita h.

Teorema 3.7.3 (de la función implícita $(q = 2, n = 1)$)**.** *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y una función $g : A \to \mathbb{R}$ con $g \in \mathcal{C}^1(A)$. Sea $(x_0, y_0) \in A$ verificando:*

(i) $g(x_0, y_0) = 0$

(ii) $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$

Entonces, la ecuación $g(x, y) = 0$ define **implícitamente** *a la variable x como función de la variable y en un entorno de (x_0, y_0); esto es, existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}$ con $y_0 \in U$, existe W subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ contenido en A y existe una función $h : U \to \mathbb{R}$, verificando:*

1. $h(y_0) = x_0$,
2. $(h(y), y) \in W, \ \forall y \in U$.
3. $g(h(y), y) = 0, \quad \forall y \in U$.
4. $h \in \mathcal{C}^1(U)$ *y se tiene que, para cada $y \in U$,*

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial g}{\partial x}(h(y), y)} \ .$$

Además, si la la función $g \in \mathcal{C}^k(W)$, entonces la función $h \in \mathcal{C}^k(U)$.

Comentarios:

1. Pese a que este último teorema nos da condiciones suficientes para la existencia de una función implícita, éste **no** nos dice **cómo** calcularla. Lo que **sí** nos dice es cuál es su **derivada** en el punto, sin más que aplicar la regla de la cadena.

   En efecto, como $g(h(y), y) = 0, \ \forall y \in U$, si derivamos con respecto a y, el resultado sigue siendo cero. Es decir

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)h'(y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \ , \ \forall y \in U.$$

Si evaluamos en (x_0, y_0) nos queda

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h'(y_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Sólo nos falta despejar la derivada $h'(y_0)$.

Ejemplo

Volviendo a la ecuación que nos ha servido para motivar el concepto de función implícita, esto es, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, podemos preguntarnos ¿dónde se puede aplicar el teorema de la función implícita?

Sólo tenemos que obligar a que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x \neq 0$. Es decir, en los puntos de la circunferencia unidad (x_0, y_0) donde $x_0 \neq 0$ se puede despejar localmente la variable x en función de y.

2. Como interpretación geométrica del teorema, entendemos que dada una curva del plano definida por medio de una ecuación implícita $(g(x, y) = 0)$ podemos obtener, localmente, una curva de forma explícita $x = h(y)$.

   Observemos también que la condición $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ geométricamente nos dice que el vector gradiente $\nabla g(x_0, y_0)$, que recordemos es normal a la curva en el punto (x_0, y_0), no es paralelo al eje OY.

3. Se puede hacer un desarrollo análogo para el concepto de cuándo una ecuación $g(x, y) = 0$ **define a la variable y implícitamente como función de x.**

Ejemplo

Estúdiese si la ecuación

$$senx + cosy + 2y = \pi$$

define la variable y implícitamente como función de x en un entorno de $(0, \pi/2)$. Calcúlese la derivada de la función implícita en 0

A continuación consideraremos el problema de obtener la función implícita para un campo escalar de tres variables; se trata de dar condiciones para que una de ellas sea función implícita de las restantes. Éste caso puede interpretarse geométricamente, de cómo dada una superficie en el espacio, definida de forma implícita $(g(x, y, z) = 0)$, y un punto de esa superficie, se pueden obtener condiciones para que, al menos localmente, la superficie se pueda definir de forma explícita, esto es, $z = f(x, y)$.

Teorema 3.7.4 (de la función implícita ($q = 3, n = 1$)). *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y un campo escalar $g \in C^1(A)$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in A$ verificando:*

(i) $g(x_0, y_0, z_0) = 0$

(ii) $\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Entonces, la ecuación $g(x, y, z) = 0$ define implícitamente a la variable z como función de las variables (x, y) en un entorno de (x_0, y_0, z_0); esto es, existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ con $(x_0, y_0) \in U$, existe W subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ contenido en A y existe la función implícita $f : U \to \mathbb{R}$ verificando que
verificando:

1. $f(x_0, y_0) = z_0$,

2. $(x, y, f(x, y)) \in W$

3. $g(x, y, f(x, y)) = 0, \quad \forall (x, y) \in U$ *. y se tiene que, para cada $(x, y) \in U$,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y, f(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, f(x, y))} \quad .$$

Además, si la la función $g \in \mathcal{C}^k(W)$, entonces la función $f \in \mathcal{C}^k(U)$.

Por último, establecemos una tercera versión del teorema para $q = 3, n = 2$. Ahora se trata de dar condiciones suficientes para que dos de las variables sean función implícita de la restante.

Teorema 3.7.5 (de la función implícita (q=3, n=2)). *Sean A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y un campo vectorial $g : A \to \mathbb{R}^2$ con $g \in C^1(A)$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in A$ verificando:*

(i) $g(x_0, y_0, z_0) = (g_1(x_0, y_0, z_0), g_2(x_0, y_0, z_0)) = (0, 0)$

(ii) $det \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \neq 0$

Entonces, la ecuación $g(x, y, z) = 0$ define implícitamente a las variables (y, z) como función de la variable x en un entorno de (x_0, y_0, z_0); esto es, existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}$ con $x_0 \in U$, existe W subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ contenido en A y existe la función implícita $f : U \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = (y(x), z(x))$ verificando que

1. $f(x_0) = (y_0, z_0)$,

2. $(x, f(x)) \in W, \quad \forall x \in U.$

3. $g(x, f(x))) = 0, \quad \forall x \in U.$

4. $f \in C^1(U)$ *y se tiene que las parciales de las componentes de la función implícita* f *verifican el sistema de ecuaciones siguiente:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x, y(x), z(x)) \dfrac{\partial y}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial g_1}{\partial z}(x, y(x), z(x)) \dfrac{\partial z}{\partial x}(x) = 0 \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x, y(x), z(x)) + \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x, y(x), z(x)) \dfrac{\partial y}{\partial x}(x) + \dfrac{\partial g_2}{\partial z}(x, y(x), z(x)) \dfrac{\partial z}{\partial x}(x) = 0 \end{cases}$$

Además, si la función $g \in \mathcal{C}^k(W)$*, entonces la función* $f \in \mathcal{C}^k(U)$*.*

Comentarios

1. Éste caso puede interpretarse geométricamente de cómo dada una curva Γ en el espacio definida de forma implícita (como intersección de dos superficies), se puede obtener una expresión local de la curva de la forma $\Gamma(x) = (x, y(x), z(x))$.

   Ejemplo

   Calcúlese la recta tangente en el punto $(1, 1, 1)$ a la curva intersección de las superficies siguientes:
   $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ 2x^2 - y^2 - z = 0 \end{cases}$$

2. Éste resultado también puede interpretarse cómo que el sitema de 2 ecuaciones con dos incógnitas
   $$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{array} \right. ,$$
   tiene, para cada $x \in U$, una solución única (y, z) tal que $(x, y, z) \in W$ y donde $g = (g_1, g_2)$.

3. El teorema de la función implícita en el resto de los casos, $q \in \mathbb{N}$ y $n < q$, se puede adivinar, sin más que extrapolar los casos anteriores y simular la técnica para ecuaciones lineales.

3.7.4. Relación de ejercicios

1. Compruébese que la función $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta),$$

donde $U = \mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[$ define un difeomorfismo de clase C^1 de U sobre $V = \mathbb{R}^2\backslash\{(x,0);\ x \leq 0\}$. En tal caso determínese la función inversa.

2. Compruébese que la función $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta,z) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta, z),$$

donde $U = \mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$ define un difeomorfismo de clase C^1 de U sobre $V = \mathbb{R}^3\backslash\{(x,0,z);\ x \leq 0\}$. En tal caso determínese la función inversa.

3. Compruébese que la función $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, \rho sen\varphi),$$

donde $U = \mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$ define un difeomorfismo de clase C^1 de U sobre $V = \mathbb{R}^3\backslash\{(x,0,z);\ x \leq 0\}$. En tal caso determínese la función inversa.

4. Comprobar que en las siguientes ecuaciones se verifican las condiciones del Teorema de la Función Implícita en el punto P y obtener $y'(x)$ en los casos (i) a (iv) y $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ en los otros.

   i) $x^y + 3x^2 - 2y^2 - 2y = 0,\ P = (1,1)$
   ii) $senx + cosy + 2y - \pi = 0,\ P = (0,\pi/2)$
   iii) $ylog(x^2+y^2) - 2xy = 0,\ P = (0,1)$
   iv) $x^y + y^x - 2xy = 0,\ P = (2,2)$
   v) $xlog(1+y) + ze^{4z} = 0,\ P = (0,0,0)$
   vi) $z\ arctg(1-z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0,\ P = (1,1,1)$
   vii) $xyze^z logz - 3x + 3y = 0,\ P = (1,1,1)$

3.8. Algunas aplicaciones del cálculo diferencial.

Sumario

El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.8.1. Aproximación por mínimos cuadrados

Vamos a considerar el problema de determinar la relación funcional entre dos magnitudes x e y cuyos resultados obtenidos tras un experimento realizado han sido

x_1	x_2	...	x_n
y_1	y_2	...	y_n

Se trata de encontrar la ecuación de una curva que, aunque no pase por todos los puntos (x_i, y_i), tenga pocas variaciones y pase lo más cerca posible de todos. El tipo de curva requerido puede obtenerse por conocimiento previo del problema, por la interpretación física del fenómeno, o en forma arbitraria. Una vez elegido el **tipo** de curva que mejor se ajusta, se trata de obtener cual es la curva concreta. Generalmente ésta se obtiene imponiendo el criterio de los mínimos cuadrados.

Supongamos que por razones teóricas bien fundadas sabemos que, para nuestro experimento, la curva que más se ajusta es una recta

$$y = ax + b.$$

Deseamos determinar los parámetros a y b a partir de los datos que han resultado del experimento. Para cada valor determinado x_i, la recta de ajuste proporciona un valor $y_i' = ax_i + b$ normalmente diferente de y_i valor obtenido en el experimento . La diferencia $y_i - y_i'$ será positiva en algunos casos y negativa en otros, puesto que los puntos pueden estar a un lado u otro de la recta. Por este motivo, la suma de las diferencias para todos los puntos es poco significativa (las deferencias negativas podrían compensarse con las diferencias positivas). Para medir pues la distancia entre la recta y los correspondientes puntos se emplean los cuadrados de las diferencias, con lo que nos aseguramos que todos los términos son positivos. Esta suma tiene pues la forma

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Se trata pues de hacer mínima la función $S(a, b)$. Buscamos pues los puntos críticos, esto es, las soluciones del sistema

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0,$$

que, en este caso, se conocen como ecuaciones normales, y que son:

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad a \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Las soluciones vienen dadas por:

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Ejemplo
Demuéstrese que la recta que mejor se ajusta a los puntos de la siguiente tabla:

0	1	2	3	4	5	6	7
2	4	3	6	5	7	9	8

es $y = 2{,}249 + 0{,}929x$

3.8.2. Aplicaciones a la Mecánica Celeste: Movimientos de los de satélites

Es sabido que uno de los mayores impulsos para el desarrollo del cálculo fue provocado por la necesidad de comprender los movimientos de los planetas alrededor del Sol. Estos esfuerzos dieron lugar a las conocidas leyes de Kepler, las cuales describen la cinemática del movimiento de los planetas en torno al Sol:

Primera ley
Los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos

Segunda ley
El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.

Tercera ley
Los cuadrados de los periodos de revolución (tiempo invertido en recorrer una órbita completa) son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la elipse.

Para comprender la primera ley de Kepler, veamos cómo determinar la trayectoria que sigue un determinado satélite alrededor de la Tierra una vez puesto en órbita.

Para ello enunciamos las dos leyes básicas por las que se rigen los movimientos en el espacio:

1. La segunda ley de Newton que afirma que si una fuerza actúa sobre un cuerpo de masa m produce un movimiento con aceleración a cuya dirección y sentido es el de la fuerza, esto es,
$$f = ma \qquad (1),$$
y
2. la ley de gravitación universal, esto es, la fuerza con que dos cuerpos de masas respectivamente M y m situados a una distancia r entre sí, se atraen responde a la siguiente expresión
$$F = G\frac{Mm}{r^2} \qquad (2),$$
donde G es ua constante.

Para entender este estudio aceptamos que el satélite y la Tierra se atraen mútuamente. Sean m la masa del satélite y M la masa de la Tierra. Fijamos como origen de coordenadas en el Universo el centro de la Tierra y suponemos que la función $x(t)$ nos da la posición del satélite en cada instante t. La distancia entre ambos vendrá pues dada por $||x(t)||$, y la dirección del satélite a la Tierra viene determinada por el vector $\frac{x(t)}{||x(t)||}$. Teniendo en cuenta pues la fórmula (2), la fuerza de atracción en el instante t sobre el satélite es

$$f(t) = mMG\frac{-x(t)}{||x(t)||^3},$$

y la fuerza sobre la Tierra es opuesta.

Aplicando pues ahora la fórmula (1) obtenemos que

$$x''(t) = -\mu\frac{x(t)}{||x(t)||^3} \qquad (3),$$

donde μ es una constante.

Es claro que si existe t_0 tal que $x(t_0) = 0$ entonces nos quedamos sin satélite. Por tanto, hemos de suponer que $x(t) \neq 0$ en el intervalo I en el que hacemos nuestro estudio.

Veamos en primer lugar que la trayectoria que sigue el satélite alrededor de la Tierra está en el **mismo plano** que ésta.

Tomemos la fórmula (3) y consideremos sus funciones coordenadas i-ésima y j-ésima, esto es,

$$x_i''(t) = -\mu\frac{x_i(t)}{||x(t)||^3} \qquad x_j''(t) = -\mu\frac{x_j(t)}{||x(t)||^3},$$

y multipliquemos la primera por x_j y la segunda por x_i, para obtener

$$0 = x_i''(t)x_j(t) - x_j''(t)x_i(t) = (x_i'(t)x_j(t) - x_j'(t)x_i(t))',$$

y por tanto la funcíones $x_i'(t)x_j(t) - x_j'(t)x_i(t)$ son constantes en el intervalo considerado I. Es claro que el vector h

$$h = (x_2'(t)x_3(t) - x_3'(t)x_2(t), x_3'(t)x_1(t) - x_1'(t)x_3(t), x_1'(t)x_2(t) - x_2'(t)x_1(t))$$

no depende de t y es perpendicular al vector $x(t)$ en todo tiempo t, esto es, $x(t)$ para todo t pertenece al mismo plano cuyo vector director es h.

Veamos en segundo lugar que la trayectoria es una elipse.

Situemos ahora el origen de coordenadas en el centro de la Tierra y de manera que el plano que contiene a la trayectoria $x(t)$ esté en el plano $x_3 = 0$.

Dado un vector $z \in \mathbb{R}^2$, llamemos $g(z)$ al vector que resulta de girar éste un ángulo de $\pi/2$ radianes. Es claro que

$$< g(y), z >= - < y, g(z) > \quad (*), \qquad g(rz) = rg(z) \forall y, z \in \mathbb{R}^2, \forall r \in \mathbb{R}$$

y, para cualesquira funciones $h, j : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, donde I es un intervalo de números reales, se tiene que

$$[g(h(t)]' = g(h'(t)), \quad \text{y} \quad < h(t), j(t) >' = < h'(t), j(t) > + < h(t), j'(t) > \ \forall t \in I$$

Así pues, se sigue después de (3), que para cada t, $g(x(t))$ es perpendicular al vector $x''(t)$, y por tanto, el producto escalar de los vectores $g(x(t))$ y $x'(t)$ tiene derivada cero ya en particular, dicho producto escalar es constante, k, en el intervalo I.

Por otra parte, es sabido que en toda circunferencia, el vector que une el centro con cualquier punto de ésta es siempre perpendicular a la tangente en dicho punto. Si llamamos, para cada t, $f(t) = \frac{x(t)}{||x(t)||}$, es claro que $f(t)$ está en la circunferencia unidad y que es perpendicular a $f'(t)$, esto es, existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t) = sg(f(t))$, y por tanto $x'(t) = ||x(t)||'f(t) + s||x(t)||g(f(t))$, luego

$$k =< g(x(t)), x'(t) >=< g(x(t)), ||x'(t)|| \frac{x(t)}{||x(t)||} > +s||x(t)|| < g(x(t)), g(f(t)) >=$$

$$= 0 + s||x(t)|| < g(x(t)), g(f(t)) >= s||g(x(t))||^2 = s||x(t)||^2,$$

esto es,

$$s = \frac{k}{||x(t)||^2},$$

en particular,

$$f'(t) = \frac{k}{||x(t)||^2} g(f(t)).$$

Uniendo ahora esta ecuación con la obtenida en (3), nos da que

$$kg(x''(t)) = kg(-\mu \frac{x(t)}{||x(t)||^3}) = -\mu sg(f(t)) = -\mu f'(t),$$

y por tanto,

$$kg(x'(t)) = -\mu(f(t) + w),$$

donde w es un vector constante. Por otra parte, por la propiedad $(*)$,

$$k = - < x(t), g(x'(t)) >,$$

luego

$$k^2 = - < x(t), kg(x'(t) >= \mu < x(t), f(t) + w > .$$

Supongamos ahora que las coordenadas del plano de la trayectoria son elegidas de tal forma que el vector w esté el eje x, esto es, $w = (e, 0)$ para algún $e \in \mathbb{R}$ y que, para cada t, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$. En consecuencia,

$$||x(t)|| + ex_1(t) = \frac{k^2}{\mu}$$

y por tanto

$$||x(t)||^2 = (\frac{k^2}{\mu} - ex_1(t))^2 \qquad (4).$$

Las constantes k y e vienen determinados por la posición inicial $x = x(t_0) = (x_1, x_2)$ y la velocidad $v = x'(t_0) = (v_1, v_2)$ así,

$$k =< g(x), v >, \quad e = \frac{k^2}{\mu} - \frac{||x||}{x_1}.$$

Teniendo en cuenta ahora la ecuación (4) pata $t = t_0$, tenemos que

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{k^4}{(\mu)^2} - \frac{2k^2ex_1}{\mu} + x_1^2e^2,$$

esto es,

$$(1 - e^2)x_1^2 + \frac{2k^2ex_1}{\mu} + x_2^2 = \frac{k^4}{\mu^2} \qquad (5).$$

Esta es la ecuación de una elipse si $|e| < 1$, una hipérbola si $|e| > 1$ y una parábola si $|e| = 1$. En conclusión la trayectoria depende de las condiciones iniciales y de la velocidad inicial.

Falta ver que si $|e| < 1$, entonces el foco de la elipse es el origen de coordenadas. Baste para ello recordar que si la elipse tiene de ecuación

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

su foco es el origen de coordenadas y su semidistancia focal es c y obsérvese que una simple transformación de (5) nos daría la ecuación anterior para convenientes a, b y c.

La primera ley se deduce del análisis de las observaciones hechas anteriormente, para lo que basta considerar el centro del Sol como origen de coordenadas y a los distintos planetas como satélites de éste.

Para el estudio de las otras dos leyes necesitamos avanzar un poco en nuestro curso.

Capítulo IV: Cálculo Integral

Ya hemos comentado algunos de los problemas que dieron origen al orígen del Cálculo, ahora hablaremos de alguno más, tal como el problema de calcular la longitud de una curva o del área y volúmen de una figura acotada por curvas y superficies.

El origen de los métodos que ahora empleamos se remonta a más de 2000 años, cuando los griegos para resolver el problema del cálculo del área de ciertas figuras geométricas, idearon el procedimiento de exhaución: Dada una región cuya área quiere determinarse, se inscriben en ella sucesivas regiones poligonales cuyas áreas se aproximen cada vez mejor al área de la región que queremos determinar; procediendo ahora por "paso al límite"podremos determinar el área buscada. Este método fue usado satisfactoriamente por Arquímedes (287-212 a. C.) para hallar la fórmula exacta del área del círculo.

Gradualmente, este método ha ido transformándose en una potente herramienta que tiene numerosas aplicaciones en todas las ciencias entre ellas la resolución de los problemas ya enunciados y de otros relacionados, como ya veremos, tales como el cálculo del centro de gravedad de un cuerpo y la fuerza de atracción de la gravedad

Índice general

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Integración en una y varias variables

4.1. Funciones integrables

Sumario

En esta lección introduciremos el concepto de función integrable, en el sentido de Riemann, como una evolución natural del método de exhaución, usado por los griegos para calcular ciertas áreas, y estudiaremos sus propiedades. Enunciaremos el teorema fundamental del cálculo que relaciona la integral con la derivación y la Regla de Barrow indispensable para el cálculo integral. Finalmente estudiaremos las funciones impropiamente integrables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.1.1. Funciones integrables

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, llamemos I_k al intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y notemos por

$$M_k(f, P) = Sup\{f(I_k)\}, \quad m_k(f, P) = Inf\{f(I_k)\}.$$

Llamaremos **suma superior de la función f respecto de la partición P** al número real

$$S(f,P) := \sum_{k=1}^{k=n} M_k(f,P)(x_k - x_{k-1}),$$

y análogamente llamaremos **suma inferior de la función f respecto de la partición P** al número real

$$I(f,P) := \sum_{k=1}^{k=n} m_k(f,P)(x_k - x_{k-1}).$$

Sea

$$S := \{S(f,P); P \ \text{ partición del intevalo } [a,b]\}$$

e

$$I = \{I(f,P); P \ \text{ partición del intevalo } [a,b]\}.$$

Es claro que dadas dos particiones cualesquiera del intervalo $[a,b]$ se tiene que

$$I(f,P) \leq S(f,Q),$$

y por tanto el conjunto S es un conjunto minorado de números reales. Llamaremos **integral superior de f** en el intervalo $[a,b]$, al ínfimo del conjunto S que notaremos por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Por idéntica razón el conjunto I es un conjunto mayorado de números reales y llamaremos **integral inferior de f** en el intervalo $[a,b]$ al supremo de dicho conjunto, supremo que notaremos por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Diremos que f **es integrable en el intervalo** $[a,b]$ si el ínfimo del conjunto S y el supremo del conjunto I coinciden, esto es, si

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Si f es integrable en $[a,b]$ dicho valor $InfS = Sup\ I$ será conocido como la **integral de f en** $[a,b]$, y se notará por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Para mayor comodidad, si f es integrable en $[a,b]$, acordamos los siguientes convenios:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \text{y} \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Observación

Es fácil probar que si $[a, b]$ es un intervalo y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, existe una sucesión de particiones $\{P_n\}$ verificando que la sucesión $\{S(f, P_n) - I(f, P_n)\}$ converge a cero.

4.1.2. Ejemplos

1) Es fácil probar que toda función constante es integrable, de hecho

$$\int_a^b c dx = c(b - a).$$

2) Las funciones monótonas en un intervalo $[a, b]$ son funciones integrables en dicho intervalo.

3) Las funciones continuas son también funciones integrables.

   La demostración de que toda función continua es integrable necesita del teorema de Heine sobre la continuidad uniforme.

4) De hecho tenemos que

   Proposición 4.1.1. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces si $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que coincide con f excepto a lo más en un número finito de puntos de $[a, b]$, g es también una función integrable y además*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

5) La función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

   No es integrable en $[0, 1]$. De hecho, es fácil probar que

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx = 1, \quad \underline{\int_0^1} f(x)dx = 0.$$

4.1.3. Propiedades de las funciones integrables

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones integrables

Proposición 4.1.2. *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a, b]$. Entonces*

1. *$f + g$ es una nueva función integrable en $[a, b]$ y se verifica que*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
2. *Para cada $r \in \mathbb{R}$, la función rf es una nueva función integrable en $[a, b]$ y se verifica que*
$$\int_a^b (rf)(x)dx = r\int_a^b f(x)dx.$$
3. *Si para cada $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, se tiene que*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
4. *$|f|$ es también una función integrable y se verifica que*
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f|(x)dx.$$
5. *$f.g$ es una nueva función integrable en $[a, b]$ y se verifica que*
$$\int_a^b (f.g)(x)dx \leq (\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}.(\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} \quad (\textit{desigualdad de Schwarz}),$$
y
$$(\int_a^b (f+g)^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} \leq (\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} + (\int_a^b g^2(x)dx)^{\frac{1}{2}} \ (\textit{desigualdad de Minkowski}).$$

Finalmente también se verifica la propiedad de la aditividad respecto del intervalo, esto es,

Proposición 4.1.3. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $c \in]a, b[$. Entonces f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. En caso de ser integrables se tiene que*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Como ejercicio calcúlese la siguiente integral:
$$\int_0^3 3E[x] + 2\ dx.$$

4.1.4. Relación entre integración y derivación.

Estudiaremos ahora la importante conexión entre los tres conceptos básicos de la primera parte del curso: continuidad, derivación e integración. Para poder enunciar este resultado, esto es, el teorema fundamental del cálculo, necesitamos introducir el concepto de integral indefinida.

Sea I un intervalo de números reales, y una $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c \in I$ llamaremos **integral indefinida de f con origen en** c a la función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida, para cada $x \in I$, por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Teorema 4.1.4. *(fundamental del Cálculo)*
Sea f una función continua en un intervalo I y sea F cualquier integral indefinida de f. Entonces F es derivable en I y para cada $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Para su demostración necesitamos algunas observaciones:

a) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y $c \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0.$$

b) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

Ejercicio: Sea $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x 1/t \; dt.$$

Calcúlese F(1), la función derivada de F y determínense sus propiedades analíticas.

4.1.5. Cómo evaluar una integral

El siguiente resultado, el cual es consecuencia del teorema del valor medio, es importantísimo ya que nos permitirá evaluar la integral de una función conocida su primitiva. Para enunciarlo, necesitamos recordar que dada una función f definida en in intervalo I se dice que f **admite primitiva** si existe una función $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que, para cada $x \in I$, $G'(x) = f(x)$.

Teorema 4.1.5. *(Regla de Barrow)*
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y supongamos que admite una primitiva G. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Es claro que si f es continua, entonces, como consecuencia del teorema fundamental del cálculo, cualquier integral indefinida F de f es una primitiva de f. Pero si intentamos evaluar dichas primitivas no obtenemos ninguna información no trivial. Por tanto el problema de evaluar la integral de una función continua f, para aplicar la Regla de Barrow, consiste en conseguir una primitiva de f susceptible de ser evaluada en los puntos a y b.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 2x^3 + 1 \ dx.$$

A menudo conviene transformar la función f en otra función cuya primitiva sea más accesible; los siguientes resultados ofrecen algunas transformaciones interesantes.

Corolario 4.1.6. *(teorema del cambio de variable)*
Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1([a, b])$ con $g'(x) \neq 0$. Si f es una función continua en $g([a, b])$, entonces la función $f \circ g.g'$ es una nueva función integrable y

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t)).g'(t)dt.$$

La regla formal seguida en el resultado anterior consiste en sustituir $g(t)$ por x y $g'(t)dt$ por dx y los valores extremos $t = a, t = b$ por los correspondientes $x = g(a), x = g(b)$.

Ejercicios:

1. Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 2xe^{x^2} \ dx.$$

2. Demuéstrese que , para $a, b \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_a^{ab} 1/t \ dt = \int_1^b 1/t \ dt.$$

Nota

Obsérvese que después de esta propiedad, la función $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_1^x 1/t \ dt.$$

es una biyección estrictamente creciente verificando que:

- $F(1) = 0$
- $F(xy) = F(x) + F(y)$.
- $F(e) = 1$

Esto es, la función F no es otra cosa que la función logaritmo neperiano cuya existencia afirmábamos al principio de curso.

La siguiente técnica es especialmente útil cuando se trata de calcular la integral de un producto de funciones o de una función fácilmente derivable (basta ver ésta como el producto de ella por la función constante uno).

Corolario 4.1.7. *(teorema de integración por partes)*
Sean $F, G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos funciones de clase* $\mathcal{C}^1([a, b])$*. Entonces*

$$\int_a^b F(x).G'(x)dx = F(b).G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x).G(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_1^2 log(x)dx \ \text{ y } \ \int_0^1 x^2 sen(x)dx.$$

4.1.6. Integrales impropias

El concepto de integral que hemos introducido presenta, entre otras, dos limitaciones importantes:

1. El intervalo de integración es del tipo $[a, b]$

2. El integrando es una función acotada en dicho intervalo.

Nuestro objetivo más inmediato es extender la noción de integral a intervalos arbitrarios y a funciones continuas no necesariamente acotadas.

Sea $I =]\alpha, \beta[$ un intervalo con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty, +\infty\}$. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I y sea G una primitiva de f. Se dice que f es **impropiamente integrable en** $]\alpha, \beta[$ si existen

$$lim_{x\to\beta}G(x), \quad lim_{x\to\alpha}G(x).$$

Además en caso afirmativo

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = lim_{x\to\beta}G(x) - lim_{x\to\alpha}G(x).$$

Dicha integral recibe el nombre de **integral impropia** de f en $]\alpha, \beta[$.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 1/\sqrt{x}dx.$$

Es claro que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es impropiamente integrable en $]a, b[$ y su integral impropia coincide con su integral.

Las propiedades de las funciones impropiamente integrables son similares a las ya estudiadas para las funciones integrables.

Proposición 4.1.8. *Sean $f, g :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones impropiamente integrables. Entonces*

1. *$f + g$ es una nueva función impropiamente integrable en $]\alpha, \beta[$ y se verifica que*

$$\int_\alpha^\beta (f+g)(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

2. *Para cada $r \in \mathbb{R}$, la función rf es una nueva función impropiamente integrable en $]\alpha, \beta[$ y se verifica que*

$$\int_\alpha^\beta rf(x)dx = r\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

3. *Si para cada $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

E incluso,

Proposición 4.1.9. *Sea* $f :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y* $c \in]\alpha, \beta[$. *Entonces* f *es impropiamente integrable en* $]\alpha, \beta[$ *si, y sólo si,* f *es impropiamente integrable en* $]\alpha, c[$ *y* $]c, \beta[$. *En caso afirmativo se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlense, cuando existan, las siguientes integrales:

$$\int_0^1 1/x dx, \quad \int_{-1}^1 1/x^2 dx, \quad \int_1^{+\infty} 1/\sqrt{x} dx \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} 1/x^2 dx.$$

Como consecuencia de la defínción, obtenemos los correspondientes teoremas del cambio de variable y de integración por partes.

Teorema 4.1.10. *(del cambio de variable)*
Sea g *una función de clase* $\mathcal{C}^1$ *en el intervalo* $]\alpha, \beta[$ *con* $g'(x) \neq 0$. *Si* f *es una función continua en* $g(]\alpha, \beta[)$, *entonces* f *es impropiamente integrable en* $]\alpha, \beta[$ *si, y sólo si,* $f \circ g.g'$ *es impropiamente integrable en* $]\alpha, \beta[$. *En caso afirmativo,*

$$\int_{lim_{x\to\alpha} g(x)}^{lim_{x\to\beta} g(x)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 2x/(x^2+1)\ dx.$$

Teorema 4.1.11. *(de integración por partes)*
Sean F *y* G *dos funciones de clase* $\mathcal{C}^1$ *en el intervalo* $]\alpha, \beta[$ *y supongamos que* $F.G$ *tiene límite en* α *y en* β. *Entonces* $F.G'$ *es impropiamente integrable si, y sólo si* $F'.G$ *es impropiamente integrable. En caso afirmativo*

$$\int_\alpha^\beta F(x).G'(x)dx = lim_{x\to\beta} F(x)G(x) - lim_{x\to\alpha} F(x)G(x) - \int_\alpha^\beta F'(x).G(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 log(x)dx.$$

A veces resulta que una determinada función no es impropiamente integrable pero puede obtenerse un cierto valor relacionado con ella.

Supongamos que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en R. Llamamos **valor principal de Cauchy de la integral de** f en $\mathbb{R}$ y suele escribirse,

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f = lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f.$$

Así por ejemplo V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0$.

Análogamente si $f :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$, con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, es una función continua en $]\alpha,\beta[$, llamamos **valor principal de Cauchy de la integral de** f en $]\alpha,\beta[$ y suele escribirse,

$$V.P. \int_{\alpha}^{\beta} f = lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha+\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} f.$$

Es claro que si f es impropiamente integrable en $]\alpha,\beta[$ $(\alpha,\beta \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}\bigcup\{-\infty\})$, entonces su valor principal de Cauchy coincide con su integral impropia.

4.1.7. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_0^1 arctg(x)\ dx, \qquad \int_0^1 x^2e^x\ dx,$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(log(x))^2} \qquad \int_0^{\pi/4} sen^2x\ cos^3x\ dx,$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} cosx\ \log(senx)\ dx, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{senx}{cos^2x}\ dx.$$

2. Hállense las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x sen^3(t)\ dt.$ b) $F(x) = \int_3^{x^2} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2}\ dt$

c) $F(x) = \int_3^{\int_1^x \frac{sen(s)}{s} ds} 1/(sen^2(t^2)+1)\ dt$

d) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+sen^2(t)}\ dt.$

e) $F(x) = \int_a^b \frac{t}{1+t^2+sen(t)}\ dt$ f) $F(x) = \int_a^b \frac{tx}{1+t^2+sen(t)}\ dt$

4.2. Cálculo integral

Sumario

En esta lección nos ocuparemos del problema práctico de evaluar la integral de toda función racional y de algunas funciones no racionales. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.2.1. Integración de funciones racionales

Daremos un método general para la evaluación de la integral de una función racional cuya "única"dificultad consiste en encontrar la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función racional y sean $P, Q, : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las correspondientes funciones polinómicas tales que, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$, para cada $x \in [a,b]$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad (en caso contrario se manipula algebraicamente) que:

1) P y Q son dos polinomios primos entre sí.

2) El polinomio $Q(x)$ es de mayor grado que $P(x)$.

3) El coeficiente líder del polinomio $Q(x)$ es uno.

En la situación anterior, el problema de evaluar la integral de f se resuelve usando sendos resultados algebraicos: la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales y la descomposición en fracciones simples de una función racional con coeficientes reales.

Proposición 4.2.1.

1) *Descomposición en factores irreducibles*

Todo polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales y con coeficiente líder igual a uno puede escribirse en la forma:

$$(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_p)^{n_p}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}...(x^2+b_qx+c_q)^{m_q},$$

donde p y q son números enteros no negativos,$a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_q, c_1, c_2, ..., c_q$ son números reales, donde $a_1 < a_2 < ... < a_p$ son las raíces reales del polinomio Q

y $n_1, n_2, ...n_p$ *son, para cada* $k \in \{1, 2, ..., p\}$*, el orden de multiplicidad de la raíz* a_k*; y finalmente* $m_1, m_2, ..., m_q$ *son números naturales.*

La descomposición anterior en factores es única y

$$n_1 + n_2 + ... + n_p + 2(m_1 + m_2 + ... + m_q)$$

es el grado del polinomio.

2) *Descomposición en fracciones simples*

Si el polinomio se descompone en la forma dada en (1.) *y* $P(x)$ *es un polinomio primo con* $Q(x)$ *de grado menor que el de* $Q(x)$*, la función racional* $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ *puede escribirse de forma única como sigue:*

$$f(x) = \frac{A^{11}}{x-a_1} + \frac{A^{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A^{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} +$$

$$+ \frac{A^{21}}{x-a_2} + \frac{A^{22}}{(x-a_2)^2} + ... + \frac{A^{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + ... +$$

$$\frac{A^{p1}}{x-a_p} + \frac{A^{p2}}{(x-a_p)^2} + ... + \frac{A^{pn_1}}{(x-a_p)^{n_p}} + ... +$$

$$\frac{B^{11}x + C^{11}}{x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{B^{12}x + C^{12}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^2} + ... + \frac{B^{1m_1}x + C^{1m_1}}{(x^2 + b_1 x + c_1)^{m_1}} +$$

$$\frac{B^{21}x + C^{21}}{x^2 + b_2 x + c_2} + \frac{B^{22}x + C^{22}}{(x^2 + b_2 x + c_2)^2} + ... + \frac{B^{2m_2}x + C^{2m_2}}{(x^2 + b_2 x + c_2)^{m_2}} + ... +$$

$$\frac{B^{q1}x + C^{q1}}{x^2 + b_q x + c_q} + \frac{B^{q2}x + C^{q2}}{[(x^2 + b_q x + c_q)^2} + ... + \frac{B^{qm_q}x + C^{qm_q}}{[(x^2 + b_q x + c_q)^{m_q}},$$

donde, para cada $1 \leq i \leq q$ *y* $1 \leq j \leq m_1$*,* B^{ij} *y* C^{ij} *son números reales. Se tiene además que* $A^{kn_k} \neq 0$ *para* $k \in \{1, 2, ..., p\}$ *y* $(B^{jm_j})^2 + (C^{jm_j})^2 > 0$ *para* $j \in \{1, 2, ..., q\}$*.*

La principal dificultad a la hora de aplicar la proposición anterior consiste, como ya se ha dicho, en encontrar la descomposición en factores del polinomio $Q(x)$. Salvado este problema, la descomposición en fracciones simples dada por la segunda parte de la proposición puede ya obtenerse sin dificultad, aunque sí puede ser laboriosa.

La descomposición en fracciones simples dada anteriormente, junto con la linealidad de la integral nos permite limitarnos a considerar las integrales de cada uno de los tipos de fracciones simples que aparecen en la descomposición, a saber

Tipo 1

$$f(x) = \frac{A}{x-c},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = A.log(|\frac{b-c}{a-c}|).$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x}dx.$$

Tipo 2

$$f(x) = \frac{A}{(x-c)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{A}{n-1}[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{x^2-2x+1}dx.$$

Tipo 3

$$f(x) = \frac{Bx+C}{x^2+cx+d},$$

para todo $x \in [a,b]$, donde $B, C, c, d \in \mathbb{R}$. En este caso se procede de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{B}{2}\int_a^b \frac{2x+c}{x^2+cx+d}dx + (C - Bc/2)\int_a^b \frac{dx}{x^2+cx+d}.$$

La primera integral del segundo miembro nos queda no es otra cosa que

$$log(|\frac{b^2+cb+d}{a^2+ca+d}|).$$

Para la segunda integral se escribe $x^2 + cx + d = (x - r)^2 + s^2$ y se toma toma $u = \frac{x-r}{s}$, con lo que nos queda

$$\frac{1}{s}\int_{\frac{a-r}{s}}^{\frac{b-r}{s}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{s}[arc\ tg(\frac{b-r}{s}) - arc\ tg(\frac{a-r}{s})].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2x-1}{x^4+x^3-x-1}dx.$$

Tipo 4 Esto es,

$$f(x) = \frac{r(x)}{(x^2+cx+d)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, donde $, c, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ y $r(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que $2n - 1$.

En este caso usaremos el **método de Hermite** que consiste en escribir

$$f(x) = \frac{ex+f}{x^2+cx+d} + [\frac{F(x)}{(x^2+cx+d)^{n-1}}]',$$

donde $F(x)$ es un polinomio de grado 2n-3 a determinar. Por tanto, la técnica exige derivar el cociente, multiplicar la igualdad por $(x^2 + cx + d)^n$, y a partir de aquí, calcular los coeficientes de dicho polinomio.
Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ex+f}{x^2+cx+d}dx + \frac{F(b)}{(b^2+cb+d)^{n-1}} - \frac{F(a)}{(a^2+ca+d)^{n-1}}.$$

En este caso usaremos el **método de Hermite** que consiste en escribir

$$f(x) = \frac{ex+f}{x^2+cx+d} + [\frac{F(x)}{(x^2+cx+d)^{n-1}}]',$$

donde $F(x)$ es un polinomio de grado 2n-3 a determinar. Por tanto, la técnica exige derivar el cociente, multiplicar la igualdad por $(x^2 + cx + d)^n$, y a partir de aquí, calcular los coeficientes de dicho polinomio.
Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ex+f}{x^2+cx+d}dx + \frac{F(b)}{(b^2+cb+d)^{n-1}} - \frac{F(a)}{(a^2+ca+d)^{n-1}}.$$

La integral que queda es una de tipo 3).

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^4+4x^2+4}dx.$$

4.2.2. Integración de funciones no racionales

El problema de evaluar funciones no racionales se llevará a cabo utilizando diversos cambios de variable hasta conseguir que la nueva función a integrar sea racional. No hay un método general para ello , sino un recetario más o menos amplio, de hecho, la simple inspección del integrando sugiere el cambio de variable adecuado.

Empezaremos fijando una notación que nos permitirá exponer de manera rápida y sin ambigüedad los distintos métodos de integración que vamos a tratar. En lo que sigue I será un intervalo del tipo $[a, b]$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función continua. Para calcular la integral de f usaremos sistemáticamente el cambio de variable $x = \phi(t)$, donde ϕ es una función biyectiva de un cierto intervalo J sobre I y de clase $\mathcal{C}^1$ en J. Si notamos por $g(t) = f \circ \phi(t).\phi'(t)$, para todo $t \in J$, transformaremos la integral de la función inicial en la integral de la función g en el intervalo J. Si g es racional, aplicaremos los conocimientos dados en la primera parte de la lección. En las demás ocasiones será preciso un nuevo cambio de variable. Encontraremos así un nuevo intervalo K y una nueva función φ tal que $t = \varphi(u)$, donde φ es una función biyectiva de K sobre J y de clase $\mathcal{C}^1$ en K. Si notamos por $h(u) = g \circ \varphi(u).\varphi'(u)$, para todo $u \in k$, transformaremos la integral de la función g en la integral de la función h en el intervalo K, y vuelta a empezar.

1. Funciones trigonométricas

   Sea una función f que es cociente de sumas y productos de las funciones seno y coseno. Dado que f es una función periódica de periodo 2π podremos limitarnos a considerar $I \subseteq [-\pi, \pi]$. Hacemos en este caso el cambio de variable

   $$x = \phi(t) = 2arctg(t).$$

   La función g que aparece es una función racional. De hecho,

   $$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{y} \quad sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

   Ejercicio: Calcular $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{sen(x)}$

A parte del cambio típico antes mencionado, podemos incluir otros cambios para algunos casos particulares del siguiente tipo de integral:

$$\int_a^b \frac{sen^n(x)}{cos^m(x)}dx \qquad a, b \in I$$

a) Si n es impar, se hace el cambio $x = arccos(t)$, siempre que $[a, b] \subseteq [0, \pi]$.

b) Si m es impar, se hace el cambio $x = arcsen(t)$, siempre que $[a, b] \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$.

c) Si n y m son pares se usan las fórmulas

$$cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}, \quad sen^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}.$$

2. Funciones trascendentes

Sea f una función que es cociente de sumas y productos de la función e^x con ella misma. Hacemos en este caso el cambio de variable $x = \phi(t) = log(t)$. La función g que aparece es de nuevo una función racional.

Ejercicio: Calcúlese $\int_1^2 \frac{dx}{shx}$

3. Irracionales cuadráticas

Vamos a distinguir tres tipos fundamentalmente:

1) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{x^2 - 1}$

En este caso hacemos el cambio de variable ó bien $x = \phi(t) = \frac{1}{cost}$ y por tanto la función g que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = \phi(t) = ch(t)$ y la función g que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}dx.$$

2) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1 - x^2}$

En este caso hacemos el cambio de variable $x = \phi(t) = sen(t)$ y por tanto la función g que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx.$$

3) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1+x^2}$

En este caso hacemos el cambio de variable ó bien $x = \phi(t) = tg(t)$ y por tanto la función g que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = \phi(t) = sh(t)$ y la función g que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx.$$

Nota

Las funciones $f(x)$ que son cociente de sumas y productos de x y de $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se pueden reducir a uno de los tres casos anteriores ya que

$$ax^2+bx+c = a(x+b/2a)^2 - b^2/4a + c,$$

y por tanto si hacemos un primer cambio $u = x + b/2a$ y posteriormente

a) si $a > 0$ y $b^2 - 4ac > 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{b^2-4ac}}$, resultanto una integral del tipo $\sqrt{t^2-1}$

b) Si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$, resultando una integral del tipo $\sqrt{t^2+1}$.

c) Si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{-a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$ resultando una integral del tipo $\sqrt{1-t^2}$

4. Irracionales en x:

Consideraremos funciones que son cociente de sumas y productos de potencias racionales de x, esto es, f tales que

$$f(x) = F(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., x^{\frac{p_n}{q_n}}).$$

Hacemos el cambio de variable $x = t^m$, donde $m = m.c.m.\{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Así pues, la función a integrar que resulta después del cambio es una función de tipo racional, que ya sabemos resolver.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}dx.$$

4.2.3. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

   a) $\int_2^3 \frac{1+2x-x^2}{x^4-4x^3+7x^2-6x+2}dx$. b) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{senx-tgx}$. c) $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2+cosx}$.

   d) $\int_0^1 \frac{dx}{coshx}$. e) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$ f) $\int_{1/2}^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

   g) $\int_1^2 \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$. h) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^4-1}$. i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$.

   j) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$. k) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$. l) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+x+1}dx$.

2. Pruébense las siguientes igualdades:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1-senx}} = 2, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}\ dx}{\sqrt{x}} = 2, \qquad \int_0^1 log(x)\ dx = -1$$

4.3. Aplicaciones del cálculo integral

Sumario

En esta lección presentaremos varias aplicaciones del cálculo integral. La idea que subyace en todas las aplicaciones que vamos a ver en esta lección es que la integral puede verse como un procedimiento de "paso al límite"de la suma. Así mismo, conviene señalar que en esta lección nos basta con la idea intuitiva del concepto de área y que más adelante definiremos con todo rigor. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.3.1. La integral como ″ paso al límite ″

La idea central en todo lo que sigue es que si f es una función integrable en un intervalo dado, la integral de dicha función puede obtenerse como el límite de una cierta sucesión de sumas. Escribamos esta idea de forma más concreta:

Sea $[a, b]$ un intervalo, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y supogamos que, para cada $k = 1, 2, ..., n$, $t_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$.

Llamaremos **Suma integral de** f **asociada a la partición** P, $\alpha(f, P)$,

$$\alpha(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Se llama **diámetro** de la partición, ΔP, a la mayor de las longitudes de los subíntervalos $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ que genera la partición, esto es,

$$\Delta P = max\{|x_k - x_{k-1}| : \ k = 1, 2, ..., n\}.$$

La idea consiste en usar la siguiente propiedad:

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y si la sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$, $\{P_n\}$, es tal que la sucesión de sus correspondientes diámetros, $\{\Delta(P_n)\}$, converje a cero, entonces la sucesión $\{\alpha(f, P_n)\}$ converge a la integral de f.

Este hecho es consecuencia del siguiente importante resultado

Teorema 4.3.1. *(***Teorema de Darboux***)*
Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable y si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones cuya sucesión de diámetros asociada, $\{\Delta P_n\}$, tiende a cero, entonces las sucesiones $\{S(f, P_n\}$ e $\{I(f, P_n)\}$ convergen a $\int_a^b f(x)dx$.

Esta técnica puede aplicarse a todos los campos de la ciencia, veamos algunos ejemplos:

Ejemplos

1. Cálculo de límites

A modo de ejemplo podemos probar que

$$lim_n\{\frac{1+2+...+n}{n^2}\} = 1/2.$$

Como estrategia general, tomaremos como $\{P_n\}$ la sucesión de particiones del intervalo $[a, b]$ tal que, para cada n, todos los subintervalos que generan I_k^n, son de longitud $(b - a)/n$, entonces

$$lim_n\{\sum_{k=1}^{n} f(y_k^n)(b-a)/n\} = \int_a^b f(x)dx,$$

siempre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_k^n \in I_k^n$, así en nuestro caso concreto

$$lim_n\{\sum_{k=1}^{n} k/n^2\} = lim_n\{\sum_{k=1}^{n}(k/n)1/n\} = \int_0^1 xdx,$$

donde la función f considerada es la restricción de la función identidad al intervalo $[0, 1]$.

2. Ejemplo de un problema de tipo económico.

Supongamos que un negocio obtiene en sus primeros días los siguientes beneficios

días	1	2	3	4
Euros	8	17	32	53

El propietario tiene razones suficientes para creer que el negocio continuará creciendo siguiendo la pauta de los primeros días, a saber el beneficio de cada día t, seguirá la ley $B(t) = 3t^2 + 5$. Para hacer el cálculo del beneficio anual, siguiendo indicaciones de un economista, considera además que la ley del beneficio es la función continua descrita anteriormente. ¿Cuál será este beneficio anual?

La estrategia a seguir será considerar una sucesión de particiones del intervalo $[0, 365]$ cuya sucesión de diámetros tiende a cero. De hecho podemos considerar que, para cada partición, todos los subintervalos son de igual longitud $\Delta(P_n)$. A continuación se construyen las sumas integrales asociadas a la función $B(t)$ considerando como valor de cada subíntervalo su extremo derecho. El paso al límite nos dará como beneficio anual

$$B = \int_0^{365} 3t^2 + 5dt.$$

3. Ejemplo de un problema de tipo físico

Supóngase que queremos calcular la fuerza de atracción de un varilla metálica de masa M y de longitud l y una masa puntual m situada en la dirección de la varilla y cuya distancia al extremo más lejano es L.

La estrategia a seguir será considerar una sucesión de particiones del intervalo $[0, l]$ cuya sucesión de diámetros tiende a cero. De hecho podemos considerar que, para cada partición, todos los subintervalos son de igual longitud $\Delta(P_n)$. A continuación se construyen las sumas integrales asociadas a la función $f(t) = G\frac{Mm}{l(L-t)^2}$ considerando como valor de cada subíntervalo su extremo derecho. El paso al límite nos dará como fuerza de atracción F.

$$F = \int_0^l f(t)dt.$$

4.3.2. Cálculo del área de un recinto plano

La segunda de las aplicación ya fue presentada al inicio de la lección I.9.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función continua y sea

$$R(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Siguiendo el método de exhaución y el apartado anterior, se tiene que el "área"del conjunto $R(f)$, $A(R(f))$, viene dada por la siguiente fórmula.

$$A(R(f)) = \int_a^b f(x)dx.$$

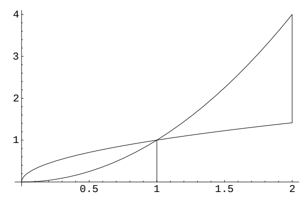
De manera más general, dadas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables, verificando que, para cada $x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ podemos considerar el recinto

$$R(f, g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Es ahora fácil probar que el área de dicho recinto $A(R(f,g)))$, verifica

$$A(R(f,g)) = |\int_a^b f(x) - g(x)dx|.$$

Considérense por ejemplo las funciones $f, g : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, y el recinto $R(f,g)$, comprendido entre las correspondientes gráficas



Es claro que área de dicho recinto $A(R(f,g)))$, verifica

$$A(R(f,g)) = |\int_0^1 x^2 - \sqrt{x}dx| + |\int_1^2 x^2 - \sqrt{x}dx| = 3 - 4/3\sqrt{2}.$$

Ejercicio: Calcular el área de un círculo de radio r.

4.3.3. Cálculo de la longitud de una curva

Una **curva en el plano** no es más que una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado y con valores en $\mathbb{R}^2$.

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva en el plano. Tal como hicimos en la lección I.3 con la semicircunferencia unidad, podemos definir, supuesto que exista dicho supremo, la longitud de la curva γ por

$$l(\gamma) = Sup\{l(P,\gamma);\ P \text{ partición de } [a,b]\},$$

donde para cada partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, se sabe que,

$$l(P,\gamma) = dist(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + ... + dist(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)).$$

Es fácil probar que si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$, cuyos diámetros " tienden " a cero, entonces la sucesión $\{l(P_n,\gamma)\}$ tiende a $l(\gamma)$.

Pues bien, si existen dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo $[a,b]$ tales que $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, entonces

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2}dx.$$

En orden a justificar la fórmula anterior conviene subrayar que para cada partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ y $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$dist(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = dist[(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})), (f(t_k)), g(t_k))] =$$

$$= \sqrt{(f(t_{k-1} - f(t_k))^2 + (g(t_{k-1} - g(t_k)^2},$$

pero, por el teorema del valor medio, sabemos que existen sendos x_k e y_k tales que

$$f(t_{k-1}) - f(t_k) = f'(x_k)(t_k - t_{k-1}),$$

y

$$g(t_{k-1}) - g(t_k) = g'(y_k)(t_k - t_{k-1}),$$

luego

$$dist(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = (t_k - t_{k-1})\sqrt{(f'(x_k))^2 + (g'(y_k))^2},$$

y por tanto

$$l(P, \gamma) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\sqrt{(f'(x_k))^2 + (g'(y_k))^2},$$

por lo que finalmente basta aplicar que la integral no es más que un paso al límite.

En particular si $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, la longitud de su gráfica,

$$l(Graf(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ejercicio: Calcular la longitud de una circunferencia de radio r.

4.3.4. Cálculo del volumen y del área de un sólido de revolución

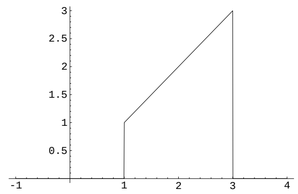
Sólidos de revolución

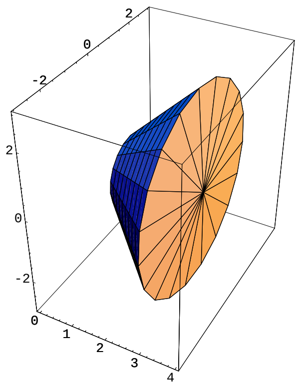
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua cuya gráfica se encuentra en el semiplano superior. Supongamos que el recinto $R(f)$, definido como en el segundo apartado, gira alrededor del eje x. El conjunto así generado es llamado el **sólido de revolución generado por f al girar sobre el eje** x, el cual es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, definido por

$$S_x(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ a \le x \le b,\ y^2 + z^2 \le f^2(x)\}.$$

Considérese por ejemplo la función identidad restringida al intervalo $[1, 3]$. En la siguiente figura vemos el correspondiente $R(f)$

y por tanto el correspondiente sólido de revolución es el siguiente tronco de cono



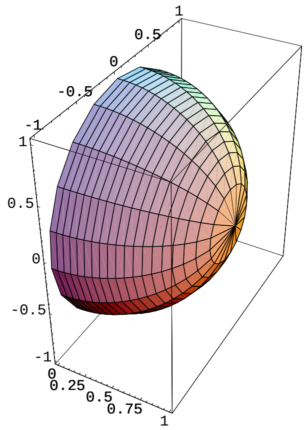


Área lateral

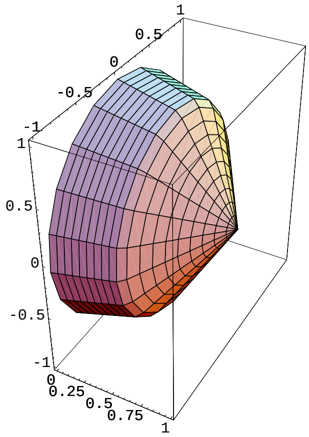
Se puede probar que el "área lateral"de $S_x(f)$, $A(S_x(f))$ se obtiene mediante la fórmula:

$$A(S_x(f)) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Para justificar la fórmula anterior basta considerar, para cada partición del intervalo $[a, b]$ y cada subíntervalo que ésta genera, el tronco de cono correspondiente. Así, por ejemplo, si consideramos la semiesfera de radio uno,



y los dos troncos de cono asociados a la partición $P = \{0, 1/2, 1\}$



Obsérvese que la suma de las áreas laterales de estos dos troncos de cono es menor que el área lateral de la semiesfera y que, a medida que tomemos particiones con más puntos, la suma de las áreas laterales de los correspondientes troncos de cono sigue siendo menor que el área lateral de la semiesfera pero cada vez más ajustada a ésta.

En tal caso, el área lateral se obtiene como paso al límite de la suma de las áreas laterales de los correspondientes troncos de cono, sin más que usar el hecho de que el área lateral de un tronco de cono es $\pi(R+r)s$, donde R es el radio mayor, r el radio menor y s es la "generatriz truncada".

Ejercicio: Calcúlese el área de una esfera.

Volumen

Podemos ahora considerar el volumen del sólido generado por giro alrededor del eje x. Es fácil ver que el "volumen"de $S(f)$, $V(S_x(f))$ se puede obtener mediante la fórmula

$$V(S_x(f)) = \int_a^b \pi f^2(x)dx.$$

Esta fórmula se obtiene considerando el volumen del sólido de revolución como el "paso al límite "de la suma de los correspondientes volúmenes de los de los cilindros, que para cada partición, tienen la longitud cada subíntervalo como altura y el valor de f en un punto de dicho subíntervalo como radio.

Si f es una función continua y monótona y con $0 \notin [a,b]$, y hacemos girar el recinto $R(f)$ alrededor del eje y, obtenemos un nuevo sólido de revolución

$$S_y(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ f(b) \leq z \leq f(a),\ x^2+y^2 \leq f^2(x)\}.$$

En este caso, su volumen, $V(S_y(f))$, puede ser calculado como sigue:

$$V(S_y(f)) = \int_a^b 2x\pi f(x)dx,$$

usando como estrategia el cálculo del límite de las sumas de los volúmenes de los anillos cilíndricos que se generan al tomar particiones en el intervalo $[a, b]$.

Ejercicio: Calcular el volumen de un elipsoide.

4.3.5. Relación de ejercicios

1.- Calcular las siguientes áreas:

a) Área limitada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$

b) Área limitada por $y = x\mathrm{e}^{-x^2}$, el eje x, la recta $x = 0$ y la la recta $x = a$, donde a es la abscisa del punto donde la función $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ alcanza el máximo.

c) Area de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje x.

d) Area comprendida entre la curva $y = \mathrm{tg}(x)$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.

e) Area del recinto limitado por las rectas $x = 0,\ x = 1,\ y = 0$ y la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

f) Area de la superficie obtenida por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 5$ alrededor del eje x.

g) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x) = \cosh x$ y $g(x) = shx$, en el primer cuadrante.

2.- Hallar la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4+48}{24x}$ en $[2, 4]$

3.- Hallar la longitud de la curva $y = \log(1-x^2)$ en $[1/3, 2/3]$.

4.- Hallar la longitud de la catenaria. Ecuación :

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = \frac{1}{2}a(\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a})$$

5.- Al girar alrededor del eje x, el segmento de curva $y = \sqrt{x}$ comprendido entre las abscisas 0 y a, engendra un tronco de paraboloide de revolución cuya superficie equivale a la de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$. Hállese el valor de a.

6.- Calcúlese el volumen del sólido de revolución generado por la curva $y = \mathrm{sen}^2(x),\ x \in [0, \pi]$, cuando ésta gira en torno al eje x.

7.- Hallar el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \dfrac{18x}{x^2+9}$.

8.- Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $x = y^2$ e $y = x^2$

   a) alrededor del eje x.

   b) alrededor del eje y.

9.- Idéntico ejercicio que el anterior para la región limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y la curva $y = x^3 + 2x + 1$.

10.- Calcúlese el trabajo necesario para levantar un objeto de masa m desde una altura h_a hasta una altura h_b, supuesto que la fuerza debida a la atracción que ejerce la Tierra, cuya masa es M y cuyo radio es R, no es constante.

11.- Calcúlese la fuerza de atracción que ejerce una varilla de longitud 6 unidades y de masa 18 unidades sobre un punto de masa m situado a 3 unidades de longitud

   a) en la prolongación de la varilla.

   b) en la perpendicular al punto medio de la varilla.

4.4. Integral de Lebesgue

Sumario

El objetivo de esta lección es presentar, a vista de pájaro, la integral de Lebesgue. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.4.1. ¿Por qué una nueva integral?

Hacia finales del siglo XIX resultó claro para muchos matemáticos que la integral de Riemann tiene importantes limitaciones, es sabido por ejemplo su mal comportamiento con ciertos procesos de convergencia. Ésta y otras limitaciones que ahora veremos, obligaron a realizar nuevos intentos de construcción de otras integrales. Entre estos intentos destacan los debidos a Jordan, Borel, Young y finalmente el de Lebesgue, que resultó ser el más exitoso.

En lo que respecta nosotros, nos interesa destacar las siguientes limitaciones:

1. El conjunto de funciones integrables es relativamente pequeño: Hay funciones sencillas que no son integrables. Recuérdese por ejemplo que la función de Dirichlet, esto es, la función, $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x\ es\ racional \\ 1 & si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$
no es integrable.

2. Su extensión a varias variables tiene algunas dificultades.

Ambos problemas están íntimamente relacionados con el hecho de ampliar el concepto de medida a otros conjuntos de números reales no necesariamente intervalos y por extensión a otros subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Las cuestiones pues a resolver son varias: ¿qué conjuntos se pueden medir?, ¿cómo medirlos? , ¿qué funciones se pueden integrar? y ¿cómo hallar su integral?

4.4.2. Conjuntos medibles

1.- Conjuntos que se pueden medir.

Veamos primero algunos conjuntos que deben estar forzosamente entre la familia de los conjuntos "medibles".

Dado I un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diremos que es un **intervalo** (respectivamante **intervalo acotado**), si existen $I_1, I_2, ..., I_n$ intervalos (respectivamante intervalos acotados) de números reales tales que

$$I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n.$$

Veamos cómo añadir a partir de aquí nuevos conjuntos.

Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es una **σ-álgebra** si

i) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$,

ii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$, entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, y

iii) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$.

Por otra parte, si $\mathcal{S}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una menor σ-álgebra en $\mathbb{R}^n$ conteniendo a $\mathcal{S}$, que denominaremos la **σ-álgebra engendrada** por $\mathcal{S}$.

En una primera etapa vamos a considerar la σ-álgebra engendrada por la familia de los conjuntos de los intervalos acotados, familia que llamaremos **σ-álgebra de Borel**, **B**, mientras que a sus elementos los llamaremos **borelianos**. Para hacernos idea de lo grande que es esta familia tengamos en cuenta que los todos los conjuntos abiertos son borelianos.

Nota

Obsérvese que los conjuntos que resultan de la intersección numerable de abiertos (conjuntos tipo G_δ), no necesariamente abiertos, y los conjuntos que resultan de la unión numerable de cerrados, conjuntos tipo F_δ, no necesariamente cerrados, son también conjuntos borelianos.

¿Cómo medir?

Una vez elegida la familia de conjuntos medibles el problema es asignarle una medida.

Es claro que si I es un intervalo acotado, entonces su medida debe coincidir con su volumen, esto es, $medida(I) = V(I)$, y claro está

$$V(I) = l(I_1)l(I_2)...l(I_n),$$

donde $l(I_k) = b_k - a_k$, siempre que $I_k = [a_k, b_k]$.

A partir de aquí, podemos definir, para cada $A \in$ B, la medida λ, mediante

$$\lambda(A) := Inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n, I_n \text{ intervalo acotado}, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

A dicha medida λ se le llama **medida de Borel-Lebesgue**.

Sabemos que existen conjuntos A borelianos de medida cero, $\lambda(A) = 0$, que contienen subconjuntos no medibles. Parece pues conveniente añadir a la σ-álgebra de Borel estos subconjuntos.

Consideremos pues $\underline{\mathcal{M}}$ la <u>mínima σ-álgebra</u> que contiene simultáneamente a la σ-álgebra de Borel y a todos los subconjuntos de los elementos de ésta que son de medida nula. Sus elementos se denominan **conjuntos medibles-Lebesgue** o simplemente **medibles**.

Los conjuntos medibles se pueden representar por $E = A \cup N$, donde A es un boreliano y N es un subconjunto de un boreliano de medida nula.

Podemos ahora definir una nueva medida, que notaremos igualmente por λ y que llamaremos **medida de Lebesgue** y que viene dada por

$$\lambda(E) = \lambda(A),$$

siempre que $E = A \cup N$, y donde $\lambda(N) = 0$.

Dicha medida posee la propiedad de la aditividad numerable, i.e., para cualquier familia de conjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de la σ-álgebra $\mathcal{M}$, disjuntos dos a dos, se verifica

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Como consecuencia de la definición se pueden obtener las siguientes propiedades:

1. Si $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subset B$ entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

2. $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)\ \forall A_n \in \mathcal{A}$.

3. λ extiende el volumen de un intervalo, esto es, si $I = \prod_{k=1}^{n} I_k$ es un intervalo acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces $\lambda(I) = v(I) = \prod_{k=1}^{n} l(I_k))$.

Se dice que una propiedad P relativa a un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica **casi por doquier (c.p.d.)**, si el conjunto de puntos C donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida cero, esto es, $\lambda(C) = 0$.

4.4.3. Funciones medibles. Integral de Lebesgue

1. Tipos de funciones que se pueden integrar

Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama **medible** si $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$ para todo intervalo abierto I.

Como ejemplos de funciones medibles, se pueden mencionar:

- las funciones continuas c.p.d.,
- funciones iguales c.p.d. a una función continua,
- las funciones características de los conjunto medibles.

Recuérdese que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se llama función **característica de** A, χ_A, a la función $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

2) Cómo hallar su integral

Comencemos ahora con las funciones más sencillas y veamos cómo asignarle una integral

Una función medible $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **simple** si sólo toma un número finito de valores.

Toda función simple s puede representarse por

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

donde $s(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $A_i := \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = \alpha_i\}$ y χ_{A_i} es la función característica de A_i.

Si $\alpha_i \geq 0 \ \ \forall i$, se define la **integral** de s por :

$$\int_{\mathbb{R}^n} s d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i).$$

El teorema de aproximación de Lebesgue nos asegura que toda función f medible **positiva** ($f \geq 0$) es límite de una sucesión creciente $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$ de funciones simples que converge puntualmente a f ($\lim s_n(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$).

A partir de aquí definimos la **integral** de la función f por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda := \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} s_k \, d\lambda$$

Se puede comprobar que dicha definición no depende de la sucesión $\{s_k\}$ elegida.

4.4.4. Funciones integrables

Dada una función medible $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es **integrable** si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda < \infty.$$

En tal caso se define la **integral de** f por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \, d\lambda - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \, d\lambda,$$

donde $f^+ = Max\{f, 0\}$ y $f^- = Max\{-f, 0\}$ (nótese que ambas funciones son medibles positivas).

Notaremos por L al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en $\mathbb{R}^n$, esto es

$$L = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ medible}; \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\lambda < \infty\}.$$

Podemos ahora considerar la integrabilidad en conjuntos medibles.

Dado $E \in \mathcal{M}$ y una función medible $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n)$, podemos considerar la función $f\chi_E$ como la extensión de f a todo $\mathbb{R}^n$, que se anula fuera de E.

Se dice que f es **integrable en** E, si $f\chi_E \in L$, y en tal caso se define la **integral de** f **en** E por

$$\int_E f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E \, d\lambda.$$

Dicha integral recibe el nombre **integral de Lebesgue de** f **en** E.

Dado $E \in \mathcal{M}$, notaremos por $L(E)$ al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en E.

4.4.5. Propiedades

Comentemos algunas de sus propiedades más interesantes:

1) *$L(E)$ es un espacio vectorial y*

$$\int_E (rf+g)\; d\lambda = r\int_E f\; d\lambda + \int_E g\; d\lambda, \quad (r\in\mathbb{R}, f, g\in L(E)).$$

2)

$$|\int_E f\; d\lambda| \leq \int_E |f|\; d\lambda, \quad (f\in L(E))$$

3) *Si f y g son medibles e iguales c.p.d., entonces f es integrable en E si, y sólo si, lo es g*, y en tal caso

$$\int_E f\; d\lambda = \int_E g\; d\lambda.$$

4) Sean E, A y B tres conjuntos medibles tales que $E = A\cup B$ y $\lambda(A\cap B)=0$. Entonces f es integrable en E si, y sólo si, f es integrable en A y B. Además, en caso afirmativo

$$\int_E f\; d\lambda = \int_A f\; d\lambda + \int_B f\; d\lambda.$$

5) $\lambda(E) = \int_E 1\; d\lambda$.

6)

Teorema 4.4.1. *(del cambio de variable)*
Sean U y V dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, y $\phi : U \longrightarrow V$ una función biyectiva de clase $\mathcal{C}^1(U)$ cuyo jacobiano es no nulo en todo punto de U. Sea E un subconjunto medible contenido en U y sea $f : \phi(E)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función integrable. Entonces

$$\int_{\phi(E)} f d\lambda = \int_E f\circ\phi |J_\phi| d\lambda.$$

Veamos finalmente la relación de ésta nueva integral con la integral de Riemann.

- **Las funciones integrables de siempre son también integrables en el sentido de Lebesgue**

Sea $n=1$ y sea $E=[\alpha,\beta]$, con $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$. Si f es integrable en el sentido de Riemann en E entonces $f\in L(E)$ y en tal caso

$$\int_E f\; d\lambda = \int_\alpha^\beta f(x)\; dx.$$

- **Añadimos nuevas funciones**

  La función de Dirichlet es integrable en el sentido de Lebesgue; de hecho, dado que $\mathbb{Q}$ es de medida nula, se tiene que

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = 1.$$

- **También las funciones absolutamente integrables quedan bajo control**

  En el caso en que admitamos que α puede ser $-\infty$ y β a su vez $+\infty$, y que f sea una función continua en $I =]\alpha, \beta[$, $|f|$ es "impropiamente"integrable en el sentido de Riemann en I si, y sólo si, $f \in L(I)$, y en tal caso

$$\int_I |f| \, d\lambda = \int_\alpha^\beta |f(x)| \, dx.$$

- **Seguimos teniendo las propiedades más interesantes de la integral de Riemann**

  a)

  Teorema 4.4.2. *(***Regla de Barrow***) Si $f \in L(I)$ y admite primitiva G, entonces existen los límites de G en α y en β, y además se tiene*

$$\int_I f \, d\lambda = \lim_{x \to \beta} G(x) - \lim_{x \to \alpha} G(x).$$

  En consecuencia,

  b)

  Teorema 4.4.3. *(***de integración por partes***) Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $f'g$ y $fg' \in L(I)$. Entonces existen los límites de fg en α y en β, y además se tiene*

$$\int_I fg' \, d\lambda = \lim_{x \to \beta} f(x)g(x) - \lim_{x \to \alpha} f(x)g(x) - \int_I fg' \, d\lambda.$$

  c)

  Teorema 4.4.4. *(***del cambio de variable***) Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable, con $\varphi'(t) \neq 0$ y $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces $f \in L(\varphi(I))$ si, y sólo si, $f \circ \varphi.\varphi' \in L(I)$ y*

$$\int_{\varphi(I)} f \, d\lambda = \int_I f \circ \varphi.\varphi' \, d\lambda.$$

4.4.6. Funciones definidas por integrales

En esta parte final de la lección vamos a hablar de funciones **definidas por una integral**, llamadas también integrales **dependientes de un parámetro**, esto es, funciones $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de números reales, y definidas a partir de otra función

$$f : I \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que, para cada $t \in I$, $w \longmapsto f(t,w)$ es integrable en E, donde E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Concretamente la función F, viene definida mediante la fórmula

$$F(t) = \int_E f(t,w)d\lambda \ \ \forall t \in I.$$

Pues bien se tiene que si

1) a) para cada $w \in E$, la aplicación $t \longmapsto f(t,w)$ es continua en I y
   b) Existe g integrable en E tal que

$$|f(t,w)| \leq g(w), \quad \forall t \in I, \ \forall w \in E$$

Entonces F es continua en I.

2) a) para cada $w \in E$, la aplicación $t \longmapsto f(t,w)$ es derivable en I y
   b) Existe g integrable en E tal que

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(t,w)| \leq g(w), \quad \forall t \in I, \ \forall w \in E$$

Entonces F es derivable en I con

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t,w)d\lambda \quad \forall t \in I.$$

Ejemplo Pruébese que la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} cos(tx)e^{-x^2/2}dx$$

es derivable con $F'(t) = -tF(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$. Deducir de ello que

$$F(t) = Ce^{-t^2/2} \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

siendo $C = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$.

4.5. Técnicas de integración en varias variables

Sumario

En esta lección vamos a introducir la integración en varias variables. Entre otros problemas nos encontramos con el hecho de que no se dispone de ningún procedimiento elemental comparable a la Regla de Barrow. Esta contrariedad se resolverá con una técnica fundamental: Teorema de Fubini, que relaciona la integral en $\mathbb{R}^n$ con integraciones sucesivas en espacios de menor dimensión. Siguiendo este proceso acabaremos finalmente integrando en una de las variables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.5.1. Teorema de Fubini

Como era de esperar, la definición de integral no es útil para el cálculo de dicha integral. Recuérdese que este problema, en el caso de intervalos de números reales, se resolvió en $\mathbb{R}$ usando la regla de Barrow, pero esta herramienta no está disponible ni en $\mathbb{R}^2$ ni en $\mathbb{R}^3$. Nuestro siguiente resultado trata de resolver esta dificultad, relacionando la integral múltiple con sucesivas integrales en $\mathbb{R}$. Para ello, consideremos las siguientes observaciones:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, notaremos, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, por

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : \ (x,y) \in E\}.$$

Análogamente, notaremos, para cada $y \in \mathbb{R}^q$, por

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : \ (x,y) \in E\}.$$

Es fácil probar que si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces $E(x)$ y $E(y)$ son subconjuntos medibles respectivamente de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$.

Teorema 4.5.1. *(Teorema de Fubini.Caso $p=1, q=1$)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x,y)d(x,y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [\int_{E(x)} f(x,y)dy]dx = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [\int_{E(y)} f(x,y)dx]dy,$$

siendo $\alpha_1 = Inf\ E_1,\ \beta_1 = Sup\ E_1,\ \alpha_2 = Inf\ E_2,\ \beta_2 = Sup\ E_2$, *donde*

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\}$$

y

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R};\ E(y) \neq \emptyset\}$$

En particular, cuando $E = I \times J$, *siendo* I, J *intervalos de* $\mathbb{R}$, *entonces*

$$\int_E f(x,y) = \int_I [\int_J f(x,y)dy]dx = \int_J [\int_I f(x,y)dx]dy.$$

Ejemplo: Calcular el área de la elipse de semiejes a y b.

Teorema 4.5.2. *(Teorema de Fubini. Caso* $p = 2, q = 1$*)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ *medible y sea* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función integrable, entonces*

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} [\int_{E(z)} f(x,y)d(x,y)]dz,$$

siendo $\alpha_3 = Inf\ E_3,\ \beta_3 = Sup\ E_3$, *donde*

$$E_3 = \{z \in \mathbb{R};\ E[z] \neq \emptyset\}$$

y a su vez

$$E[z] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \in E\}.$$

Análogamente se podría hacer, para $(p = 1,\ q = 2)$ sin más que considerar los conjuntos $E[x]$ y $E[y]$.

Ejercicio: Calcúlese el volumen del elipsoide de semiejes a, b y c.

4.5.2. Cambio de coordenadas

Es posible que convenga cambiar la función inicial por otra función. Este cambio será arbitrado por el teorema del cambio de variable, que suele usarse en alguna de las siguientes formas concretas:

Coordenadas polares, $n = 2$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho, \theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta).$$

En este caso
$$detJ_\phi(\rho,\theta) = \rho > 0, \ \forall(\rho,\theta) \in U,$$
y por tanto
$$\int_E f(x,y)d(x,y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta)\rho d(\rho,\theta).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq r^2\}$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y)$.

<u>*Coordenadas cilíndricas, $n = 3$*</u>

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por
$$\phi(\rho,\theta,z) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta, z).$$
En este caso
$$detJ_\phi(\rho,\theta,z) = \rho > 0, \ \forall(\rho,\theta,z) \in U,$$
y por tanto
$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta, z)\rho d(\rho,\theta,z).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \leq r^2;\ 0 \leq z \leq h\}$, con $r,h > 0$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y,z)$.

<u>*Coordenadas esféricas, $n = 3$*</u>

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por
$$\phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, \rho sen\varphi).$$
En este caso
$$detJ_\phi(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2 cos\varphi > 0, \ \forall(\rho,\theta,\varphi) \in U,$$
y por tanto
$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, sen\varphi)\rho^2 cos\varphi d(\rho,\theta,\varphi).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$, con $r > 0$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y,z)$.

4.5.3. Relación de ejercicios

1) Calcúlense las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_I \mathrm{sen}^2 x \ \mathrm{sen}^2 y \ d(x,y),\ I = [0,\pi]\times[0,\pi].$

b) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\ d(x,y),\ I = [0,1]\times[0,1].$

c) $\displaystyle\int_I y\ logx\ d(x,y),\ I = [1,e]\times[1,e].$

d) $\displaystyle\int_I x^3\ y^3\ d(x,y),\ I = [0,1]\times[0,1].$

e) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2}\ d(x,y),\ I = [0,1]\times[0,1].$

f) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\ d(x,y,z),\ I = [0,1]\times[0,1]\times[0,1].$

g) $\displaystyle\int_I x\ log(xy)\ d(x,y),\ I = [2,3]\times[1,2].$

h) $\displaystyle\int_I y\ \cos(xy)\ d(x,y),\ I = [0,1]\times[1,2].$

2) Sea $f : A \to \mathbb{R}$, calcúlese su integral en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = 1$ siendo A la región limitada por $y^2 = x^3,\quad y = x$.

b) $f(x,y) = x^2$ siendo A la región limitada por $xy = 16, y = x, y = 0, x = 8$.

c) $f(x,y) = x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0), (1,1), (0,1)$.

d) $f(x,y) = x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.

e) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2 = x, x = 0, y = 1$.

f) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y = \frac{x^2}{2}, y = x$.

g) $f(x,y) = xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2 = 2x, x = 1$.

h) $f(x,y) = xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$ y el eje OX.

i) $f(x,y) = 4-y^2$ siendo A la región limitada por $y^2 = 2x$ y $y^2 = 8-2x$

j) $f(x,y) = e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y = x$, $x = 2$ y el eje x

3) Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x,y) = 1-x-y,\ A = \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x+y\leq 1\}$

b) $f(x,y) = x^2+y^2,\ A = \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2+y^2\leq 1\}$

c) $f(x,y) = x+y,\ A = \{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2\leq y\leq 2x^2\}$

d) $f(x,y) = x^2\ y^2,\ A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$

e) $f(x,y) = y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le r^2\}$
f) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1,\ x^2 \le y\}$
g) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \le 1, x^2 + y^2 \le 2x\}$
h) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$
i) $f(x,y) = 1,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le r^2\}$
j) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2),\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le \pi/2\}$
k) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$
l) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$
m) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 1\}$
n) $f(x,y) = x\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2\}$
ñ) $f(x,y) = x^2\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ x \ge 0\}$
o) $f(x,y) = x,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + y^2 - 2x \ge 0\}$

4) Utilícese el cambio a coordenadas polares para el cálculo de las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:
a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\quad A = \bar{B}((0,0),1)$
b) $f(x,y) = y,\quad A = \{(x,y) \in B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) :\quad y \ge 0\}$
c) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \bar{B}((1,0),1)$
d) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\quad 4 \le x^2 + y^2 \le 9\}$

5) Calcúlense las siguientes integrales dobles:
a) $f(x,y) = x,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 2x\}$
b) $f(x,y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ x,y \ge 0\}$
c) $f(x,y) = \exp(\frac{x}{y}),\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^3 \le x \le y^2,\quad x \ge 0, y \ge 0\}$
d) $f(x,y) = \exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right),\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x,y \ge 0,\ x + y \le 2\}$
e) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}},\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\quad x \le y,\ x + y \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 1\}$
f) $f(x,y) = x^2 + y^2,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^2 \le 4(x^2 - y^2),\ x \ge 0\}$
g) $f(x,y) = x^2 + y^2,\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 2y,\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$

6) Calcúlese el volumen de la región A definida por:
a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \le r^2,\quad x^2 + y^2 - ry \le 0\}$.
b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \ge 1,\ x^2 + y^2 \le 2,\ z(x^2 + y^2) \le 1,\ z \ge 0\}$.
c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \le x^2 + y^2 \le z\}$.
d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \le z \le 1 - (x^2 + y^2)\}$.

7) Calcúlense las siguientes integrales triples:

a) $\displaystyle\int_A z\, e^{-(x^2+y^2)}\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2(x^2+y^2) \le z^2,\ z \ge 0,\ z \le 1\}$.

b) $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4\}$.

c) $\displaystyle\int_A (x+y-2z)\, d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \ge x^2+y^2,\ z \ge 0,\ z \le 3\}$.

d) $\displaystyle\int_A \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\right)^n d(x,y,z)$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$ $(n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}^+)$.

e) $f(x,y,z) = (x+y+z)^2$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 1, x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$

f) $f(x,y,z) = z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le 1, z \ge 0\}$

g) $f(x,y,z) = z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \le z^2, 0 \le z \le 1\}$

h) $f(x,y,z) = x^2$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \ge 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2 \le 1,\ 4z^2 \ge 3(x^2+y^2)\}$

i) $f(x,y,z) = zy\sqrt{x^2+y^2}$ $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le x^2+y^2,\ 0 \le y \le \sqrt{2x-x^2}\}$

j) $f(x,y,z) = z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x^2+y^2 \le z\}$

k) $f(x,y,z) = z^2$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 \le \mathrm{R}^2,\ x^2+y^2+z^2 \le 2\mathrm{R}z\}$

l) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 3\}$

8) Demuéstrese que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} dx = \sqrt{2\pi/a}$, donde $a > 0$.

4.6. Algunas aplicaciones del cálculo integral a la Física

Sumario

En esta lección obtenemos nuevas aplicaciones del cálculo integral en una y varias variables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.6.1. Volumen de un sólido

Principio de Cavalieri

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\} = [a, b].$$

Según hemos visto en la lección anterior su volumen, $\lambda(E)$, viene dado por

$$\lambda(E) = \int_E 1\ d(x, y, z),$$

por lo que aplicando el teorema de Fubini y la definición de área de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\lambda(E) = \int_a^b (\int_{E(x)} 1\ d(y, z))dx) = \int_a^b \lambda(E(x))dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Veamos una sencilla aplicación: Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E[x] \neq \emptyset\} = [a, b].$$

Según hemos visto ya, su volumen, $\lambda(E)$, viene dado por

$$\lambda(E) = \int_E 1\ d(x, y, z),$$

por lo que, aplicando el teorema de Fubini y la definición de área de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\lambda(E) = \int_a^b \left(\int_{E[x]} 1 \; d(y,z)\right)dx) = \int_a^b \lambda(E[x])dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Obsérvese que si E es el sólido de revolución generado por la gráfica de una cierta $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que

$$V(E) = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

como ya habíamos comentado anteriormente.

Ejemplo:

Un leñador corta una pieza C con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio 50 cm mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con un ángulo $\pi/4$. Calcúlese el volumen de dicha cuña.

La integral en dos variables vista como un cierto volumen

Sea ahora $A \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo integrable en A tal que, para cada $(x,y) \in A$, se tiene que $f(x,y) \geq 0$. Obsérvese que como consecuencia del teorema de Fubini, si

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R};\ A(x) \neq \emptyset\} = [a,b],$$

entonces

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{A(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b S(x)dx,$$

donde, para cada $x \in [a,b]$, $S(x)$ es el área de la región del plano comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $g : A(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $y \in A(x)$ por $g(y) = f(x,y)$. Aplicando finalmente el principio de Cavalieri, la integral

$$\int_A f(x,y)d(x,y)$$

puede interpretarse como el **volumen del sólido comprendido entre el plano** $z = 0$ **y la gráfica del campo escalar** f.

Ejemplo:

Calcúlese el volumen de madera eliminado al taladrar, hasta el centro, una esfera de madera de radio 9 con una broca de radio 1.

4.6.2. Medias

Es sabido que dados $x_1, x_2, ..., x_n$ n números reales, su media aritmética se define como $\widehat{x} = \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$. Esto puede entenderse como el valor medio de una función cuyos valores son constantes en intervalos de longitud 1. Esta idea, permite generalizar el concepto de valor medio para una función real $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$[f]_m = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Sabemos que si f es continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $[f]_m = f(c)$

Análogamente si f es una función de varias variables, se llama **valor medio** de f sobre A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

$$[f]_m = \frac{\int_A f(x_1, x_2, ..., x_n)d(x_1, x_2, ..., x_n)}{\int_A d(x_1, x_2, ..., x_n}.$$

Ejemplo:

Se sabe que la temperatura en cada punto del cubo $I = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen. ¿Cuál es la temperatura media? ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

4.6.3. Centros de gravedad

La ley de Arquímedes del equilibrio para una palanca establece que si se sitúan masas $m_1, m{,}2, ..., m_n$ en los puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ del eje x, y $\overline{x}$ es la posición del punto de apoyo o centro de gravedad, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - \overline{x}) = 0.$$

Y por tanto,

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n}.$$

Si ahora consideremos que la masa se distribuye de forma continua a lo largo de la palanca, es coherente definir el **centro de gravedad** mediante la siguiente fórmula:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Obsérvese que el denominador nos informa sobre la masa total de la palanca, y el numerador sobre el momento total.

Si A es una figura plana y $f(x,y)$ es la función densidad de masa, el **centro de gravedad** tendría como coordenadas $(\overline{x},\overline{y})$ donde:

$$\overline{x} = \frac{\int_A xf(x,y)d(x,y)}{\int_A f(x,y)d(x,y)}$$

y

$$\overline{y} = \frac{\int_A yf(x,y)d(x,y)}{\int_A f(x,y)d(x,y)},$$

donde el denominador señala la masa total de la figura plana.

Análogamente se haría para el centro de gravedad de un sólido.

Ejemplo:

Hállese el centro de gravedad de la región semiesférica definida por $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ y $z \geq 0$, supuesta que la densidad es constantemente igual a uno.

4.6.4. Momentos de inercia

El momento de inercia mide la respuesta de un cuerpo a los esfuerzos para someterlo a rotaciones, como por ejemplo, cuando se trata de hacer girar un tiovivo. Así el momento de inercia I_x mide la respuesta del cuerpo a las fuerzas que intentan hacerlo girar alrededor del eje x.

Si el sólido W tiene una densidad uniforme δ, los **momentos de inercia** I_x, I_y, I_Z respecto de los ejes x, y, z, respectivamente, se definen por

$$I_x = \int_W (y^2+z^2)\delta d(x,y,z), \quad I_y = \int_W (x^2+z^2)\delta d(x,y,z),$$

$$I_z = \int_W (x^2+y^2)\delta d(x,y,z).$$

El factor y^2+z^2 mide la distancia al eje x y pondera más las masas alejadas del eje de rotación. Análogamente el resto de los factores de las otras integrales

El concepto de momento de inercia es análogo al de masa, que mide la respuesta de un cuerpo a los esfuerzos para someterlo a traslaciones. Sin embargo, a diferencia del movimiento de traslación, dependen de la forma y no sólo de la masa total. Esto explica que es más fácil hacer girar una placa grande que una bola compacta de la misma masa.

Ejemplo:

Calcúlese el momento de inercia I_z del sólido comprendido entre el plano $z = 0$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, si se supone que la densidad es constantemente uno.

4.7. Ecuaciones diferenciales

Sumario

En esta lección vamos a introducir las ecuaciones diferenciables (e.d.o.). Estas ecuaciones suelen aparecer en todos los campos de la ciencia y de una forma extaordinariamente prolífica en el campo de la Física. Centraremos nuestra atención en las e.d.o. de primer orden. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.7.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una **ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.)** es una ecuación en la que la incógnita es una una función desconocida y de una sola variable x, y en la que aparecen ligadas la propia función y sus derivadas.

Ejemplos:

$$(y')^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

y

$$(y'')^3 + y^2 = 0 \quad (2).$$

El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden contenida en ella. La ecuación (1) es de orden uno y la ecuación (2) es de orden 2.

Se llama **solución** de la e.d.o. de orden n en un intervalo I a toda función real $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1) f es n-veces derivable en I.
2) Para cada $x \in I$, se verifica la ecuación cuando se sustituye la incógnita por la función f.

Con frecuencia a una solución f de una e.d.o. se le llama una **integral** o **solución particular** de la ecuación y a su gráfica **curva integral** ó curva solución. Se llama **solución general** al conjunto de todas las soluciones. Al proceso de obtener todas las soluciones de la e.d.o. se le denomina **integración ó resolución** de una e.d.o.

Las e.d.o. suelen responder a los planteamientos de algunos problemas físicos. En estos casos suelen aparecer algunas condiciones adicionales. Los tipos más frecuentes de condiciones adicionales suelen ser condiciones **iniciales**. El problema de encontrar la solución de la correspondiente e.d.o. que verifica ciertas condiciones iniciales se denomina **Problema de valores iniciales asociado** a dicha e.d.o.

Ejemplos

$$1) \left\{ \begin{array}{c} y' = y \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{c} my'' = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0 =) = y_1 \end{array} \right.$$

Cuando se trata de encontrar una solución particular de una e.d.o. o de un problema de valores iniciales, parece conveniente que, antes de aventurarnos en la búsqueda de una tal solución, podamos saber si ésta existe, y, una vez garantizada la existencia, saber si ésta es única. Como ejemplo de este tipo de resultados, para la ecuaciones de primer orden, tenemos el siguiente

Teorema 4.7.1. *Sea $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ un problema de valores iniciales. Si existe un rectángulo R del plano tal que $(x_0, y_0) \in R^{int}$ y verificando que $f, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(R)$, entonces existe un intervalo $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ con $\delta > 0$ y una única función $y = f(x)$ definida en I tal que la solución de la e.d.o. que verifica la condición adicional $y_0 = f(x_0)$.*

4.7.2. Lineal de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria se dice **lineal de orden 1** si es de la forma:

$$y' + a(x)y = b(x),$$

donde $b, a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, son dos funciones continuas definidas en un intervalo I de números reales. Si $b(x) = 0, \ \forall x \in I$, se dice que dicha ecuación es **homogénea**.

Caso homogéneo

Para resolver esta ecuación vamos a comenzar considerando el caso homogéneo. En tal caso basta escribir $y'(x)/y(x) = -a(x)$, por lo que

$$log[y(x)] = -A(x)$$

donde $A(x)$ es una primitiva de la función $a(x)$. Y por tanto cualquier función

$$f(x) = Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

es solución de la ecuación.

Si ahora imponemos alguna condición adicional del tipo $y(x_0) = y_0$, la solución, quedará determinada de forma única al quedar determinada la primitiva (todas las primitivas se diferencian en una constante).

Ejemplo: Resuélvase el problema de valores iniciales:

$$y' = -ky, \quad y(0) = 1.$$

<u>Caso no homogéneo:</u>

Es fácil probar que

$$f(x) = (C + B(x))e^{-A(x)},$$

es una solución de la ecuación $y' + a(x)y = b(x)$, donde $C \in \mathbb{R}$, $A(x)$ es cualquier primitiva de $a(x)$, y $B(x)$ es cualquier primitiva de $b(x)e^{A(x)}$.

Análogamente, si fijamos una condición adicional del tipo $y(x_0) = y_0$, la solución, quedará determinada de forma única.

Ejemplo: Resuélvase el problema de valores iniciales:

$$y' + ky = 1, \quad y(0) = 1.$$

4.7.3. e.d.o. de orden uno no lineal

La resolución de estas e.d.o. está supeditado a una clasificación previa en distintos tipos. La experiencia demostrará que muchas veces no será posible expresar las soluciones de forma explícita

Tipo I: **Ecuaciones diferenciales de variable separadas**

Una e.d.o. de primer orden se dice de **variables separadas** si es de la forma

$$y' = G(x, y),$$

donde $G = P(x)Q(y)$, donde $P(x)$ y $Q(y)$ son dos funciones continuas en sendos intervalos, I y J, con $Q(y) \neq 0, \ \forall y \in J$.

Se demuestra que una función f definida en el intervalo I es solución de la ecuación anterior si satisface la siguiente igualdad, que la define implícitamente:

$$B(f(x)) = A(x),$$

donde B es una primitiva de la función $1/Q(y)$ y A es una primitiva de $P(x)$

Ejemplos: Resolver la ecuación $y' = y$ y el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = -y/x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Tipo II: **Ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas**

Una e.d.o. de primer orden se dice **homogénea** si es de la forma

$$y' = F(y/x),$$

donde F es una función continua en cierto conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Una función f es solución si, y sólo si $f(x)/x$ es solución de la ecuación de variables separadas $u' = (F(u) - u)/x$.

Ejemplo: Resuélvase la e.d.o.

$$x^2 y' = y^2 - xy + x^2.$$

Tipo III: **Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas**

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = F(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}),$$

donde $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$, se pueden reducir a una ecuación diferencial homogénea teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

1) Si ambas rectas $Ax + By + C = 0$ y $ax + by + c = 0$ se cortan en el punto (c, d) entonces se hace el cambio $X = x - c$ y $Y = y - d$ y se obtiene que

$$F(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}) = G(Y/X),$$

y por tanto $Y' = G(Y/X)$ es una ecuación diferencial homogénea.

2) Si ambas rectas son paralelas $A/a = B/b$, hacemos el cambio $z = ax + by$ resulta que $z' = a + by'$ por lo que nos resultará una nueva ecuación diferencial de variables separadas:

$$z' = Q(z)P(x),$$

con $P(x)$ constante.

Ejemplos: Resuélvanse las ecuaciones: $y' = \frac{3x+2y}{2+x}$ e $y' = \frac{2x-y+2}{-4x+2y+1}$.

Tipo IV: **Ecuaciones diferenciales exactas**

Una e.d.o. de primer orden se dice que es **exacta** cuando puede escribirse de la forma

$$Q(x,y)y' + P(x,y) = 0,$$

donde P y Q son dos funciones definidas en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tales que pueden obtenerse como derivadas parciales de otra función $G(x,y)$, es decir tales que

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial x} = P(x,y), \; \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = Q(x,y), \; \forall (x,y) \in D.$$

Para saber si una ecuación es ó no exacta no es necesario construir la función G tal como veremos en el tema 6.2.

Si la e.d.o. es exacta, se tiene que f es solución de dicha ecuación si, y sólo si $G(x, f(x)) = C$, con $C \in \mathbb{R}$

Ejemplo: Resolver $y' = \frac{2xcos(y)+3x^2y}{-x^3+x^2seny+y}$ con $y(0) = 2$.

4.7.4. Relación de ejercicios

1) Compruébese que las funciones dadas a continuación son soluciones de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 16y = 0$.
   a) $y = 3\cos[x]$ b) $y = e^{-2x}$ c) $y = 5\log x$
2) Obténganse las soluciones generales de las siguientes e.d.o.
   a) $2x^2 + 2y^2 + (4xy + 3y^2)y' = 0$. b) $3(y-1)^2y' = 2 + sen(x)$.
   c) $(2+y)y' = 2x + 3y$.
   d) $y' = \frac{x+y}{x-y}$. e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{3xy}$.
   f) $2ydx + (x+y)dy = 0$, $y > 0$.
   g) $ye^x dx + (2y + e^x)dy = 0$.
3) Resuélvanse los siguientes problemas de valores iniciales.
   a) $ye^{xy}dx + (3 + xe^{xy})dy = 0$, $y(0) = 0$.
   b) $\frac{y}{x^2}dx - \frac{1}{x}dy = 0$, $y(1) = 2$.
4) Hállese la ecuación de la curva que pasa por el punto $(1,3)$ y cuya pendiente es $\frac{y}{x^2}$.
5) Bajo ciertas condiciones, la caña de azúcar en agua se convierte en dextrosa a un ritmo proporcional a la cantidad que está en ese momento sin convertir todavía. Si de 75 gramos en $t = 0$ se han convertido 8 gramos en los primeros 30 minutos, hállese la cantidad transformada en hora y media.

6) La desintegración radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia que queda por desintegrar. La constante K de desintegración coincide con $log(2)/T$, donde T es la llamada semivida[1] de cada elemento radiactivo. Sabiendo que la semivida del isótopo de Plutonio ^{239}Pu es 24.360 años, y que estimamos que en el accidente nuclear de Chernobil se liberaron 10 gramos del este isótopo, calcélese el tiempo necesario para que sólo quede un gramo.
7) La ley de enfriamiento de Newton afirma que el ritmo de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del aire que le rodea.
   a) Supongamos que una habitación se mantiene a una temperatura constante de 25^{O} y que un objeto se enfria de 100^{O} a 90^{O} en 5 minutos. ¿Qué tiempo se necesitará para enfriar dicho objeto hasta una temperatura de 50^{O}?
   b) Un objeto a 100^{O} es situado dentro de una habitación con temperatura desconocida constante. Sabiendo que después de 10 minutos el cuerpo está a 90^{O} y después de 20 minutos a 82^{O}, calcúlese la temperatura de la sala.
8) (**Modelo de población de Malthus, 1798**). La tasa de crecimiento $(\frac{p'(t)}{p(t)})$ de una población $p(t)$ de moscas de la fruta en un instante dado t es constante en dicho momento. Si hay 180 moscas después del segundo día del experimento y 300 moscas después del cuarto día, ¿cuántas moscas había originalmente?
9) (**Modelo de Verhuslt, 1834**). Un pueblo posee una población actual de 1000 habitantes. Suponiendo que la tasa de crecimiento de una población $p(t)$ está dada por $(2 - p(t))$, determínese la población del pueblo en cualquier instante futuro. Estimar hacía que valor tiende el número de habitantes para valores del tiempo t grandes. Calcúlese el instante en el cual el crecimiento de la población es máximo.
10) (**¡Ratón que te pilla el gato!**) Un ratón se encuentra pacíficamente comiendo su queso en el origen de coordenadas, cuando un gato hambriento localizado en el punto (10,0) lo descubre y parte en su persecución. Instantáneamente, el ratón descubre la presencia de su enemigo y toma la decisión de huir a lo largo del eje y en el sentido positivo con 25 cm/s de velocidad constante. La estrategia del gato es correr siempre en la dirección que se encuentra el ratón a una velocidad constante de 1 m/s. ¿Cuánto tiempo tarda el gato en cazar al ratón?

[1] el número de años que han de transcurrir para que se desintegren la mitad de los átomos iniciales de una muestra.

Análisis Vectorial

En este capítulo completamos y llevamos a su culmen la teoría del Cálculo mostrando los resultados más espectaculares: Teoremas de Green, de la divergencia y de Stokes.

Índice general

Capítulo 1

Capítulo 2

Capítulo 3

Capítulo 4

Capítulo 5

Análisis Vectorial

5.1. Integrales de línea de un campo escalar

Sumario

En esta lección introduciremos el concepto de integral a lo largo de una curva de un campo escalar, llamada también integral de línea respecto de la longitud de arco. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

5.1.1. Curvas en $\mathbb{R}^n$

Recordemos que una **curva** en $\mathbb{R}^n$ es una función continua $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. se dice que dicha curva se dice **regular** si la curva γ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a, b]$.

El ejemplo más sencillo de curva regular es el segmento:
Dados dos puntos x e y de $\mathbb{R}^n$, se define el **segmento de extremos** x **e** y, $[x, y]$, como la curva

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

definida por $\gamma(t) = (1 - t)x + ty$.

Llamaremos **traza ó gráfica de la curva** γ a la imagen de dicha curva, $\gamma^* = \gamma([a,b])$.

A los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ se les llama, respectivamene, **orígen** y **extremo** de la curva. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva γ es **cerrada**.

Si γ es inyectiva se dice que es **simple** y si γ es cerrada y $\gamma/]a,b[$ es inyectiva, se dice que γ es una curva **cerrada simple.**

γ se dice **regular a trozos** si existe una partición P del intervalo $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, tal que la curva $\gamma/_{[x_{k-1},x_k]}$ es regular para $k = 1, 2, ..., n$.

Nota

A veces, haciendo un abuso del lenguaje, identificamos la curva con su traza. En tal caso, se dice que la curva γ^* viene parametrizada por $\gamma(t)$. Es evidente que, en este sentido, una misma curva puede tener distintas parametrizaciones. Si no se indica nada acerca de la parametrización de la curva, es porque se considera que existe una parametrización predeterminada. Así, por ejemplo

1. La parametrización predeterminada para la elipse de semiejes a y b, viene por $\gamma(t)$, donde $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, está definida por

$$\gamma(t) = (acos(t), bsen(t)).$$

   La elipse es una curva regular cerrada simple.

2. Las gráficas de cualquier función real de variable real continua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son otros ejemplos naturales de curvas C, cuyas parametrizaciones predeterminadas vienen dadas por $\gamma(t) = (t, f(t))$. Si f es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces su gráfica es una curva regular.

3. Salvo advertencia, la circunferencia de centro (a,b) y radio r se supone parametrizada por $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = (a + rcos(t), b + rsen(t)), \forall t \in [0, 2\pi]$. La circunferencia es una curva regular cerrada simple

Reparametrización de una curva

Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva y sea $g : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ una biyección tal que $g \in \mathcal{C}^1([c,d])$. A la curva $\alpha = \gamma \circ g$ se le llama **reparametrización** de γ.

Si g es creciente ($g'(t) > 0$) diremos que α es una reparametrización **que conserva la orientación**. En caso contrario ($g'(t) < 0$) diremos que la reparametrización α **invierte** la orientación.

Se dice que dos curvas son **curvas equivalentes** si una de las curvas es una reparametrización que conserva la orientación de la otra.

Algebra de curvas

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva, definimos la curva $-\gamma$, como la curva definida en el intervalo $[-b,-a]$, por

$$-\gamma(t) = \gamma(-t), \quad \forall t \in [-b,-a],$$

además $(-\gamma)^* = \gamma^*$. La curva $-\gamma$ es una reparametrización de la curva γ que invierte la orientación.

Es claro que si γ es regular a trozos también lo será $-\gamma$, y que la

Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\sigma : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos curvas tales que $\gamma(b) = \sigma(c)$. Definimos la **curva suma** de ambas, $\gamma + \sigma$, por

$$\gamma + \sigma(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [a,b], \\ \sigma(t-b+c) & \text{si } t \in [b, b+d-c]. \end{cases}$$

Claramente

$$(\gamma + \sigma)^* = \gamma^* \bigcup \sigma^*.$$

La suma de dos curvas regulares no es necesariamente regular. Sin embargo, es fácil probar que la suma de dos curvas regulares a trozos es regular a trozos. Por otra parte, la suma de curvas es una operación asociativa. Uno de los ejemplos más sencillo de curva regular a trozos a considerar es una poligonal.

Sean p_i n puntos de $\mathbb{R}^n$. Definimos la **poligonal de vértices** $p_1, p_2, ..., p_n$ como la curva $[p_1, p_2, ..., p_n]$, definida por

$$[p_1, p_2, ..., p_n] = [p_1, p_2] + ... + [p_{n-1}, p_n].$$

Suma formal de curvas

Dadas m curvas $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ en $\mathbb{R}^n$ cuyas trazas son disjuntas dos a dos, puede considerarse γ, la **suma formal** de dichas curvas

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_m,$$

entendiendo que para sumarlas debidamente, como funciones que son, habrían de considerarse convenientes reparametrizaciones de éstas definidas en un intervalo común. Este artificio resultará cómodo para muchas aplicaciones.

5.1.2. Longitud de una curva

Dados dos puntos p y q, se denomina **longitud del segmento** $[p,q]$, a la distancia entre sus extremos, esto es, $||q-p||$. Dados n puntos p_i de $\mathbb{R}^n$, llamaremos **longitud de la poligonal** $[p_1,p_2,...,p_n]$ al número $l([p_1,p_2,...,p_n])$, que viene dado por

$$l([p_1,p_2,...,p_n]) = \sum_{i=1}^{n} ||p_i - p_{i-1}||.$$

Sea ahora $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva arbitraria. Para definir el concepto de longitud de dicha curva, seguiremos una vieja estrategia:

Tomemos $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ y asociado a esta partición consideremos la poligonal de vértices $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)]$, que notaremos por γ_P, esto es,

$$\gamma_P = [\gamma(t_0), \gamma(t_1), \gamma(t_2), ..., \gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)].$$

Diremos que la curva γ es **rectificable** si el conjunto

$$\{l(\gamma_P);\ P \text{ partición del intervalo } [a,b]\},$$

está mayorado. En tal caso, al supremo de dicho conjunto se le denomina **longitud de la curva** γ, $l(\gamma)$.

Siguiendo los mismos argumentos de la lección 5,3 es fácil probar que:

Proposición 5.1.1. *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva es regular a trozos, entonces γ es rectificable y*

$$l(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt.$$

Recuérdese que podemos interpretar la curva γ como la trayectoria que recorre un móvil cuyo vector de posición en el instante t viene dado por $\gamma(t)$. En tal caso, el vector derivada $\gamma'(t)$ es la **velocidad** del móvil en el instante t y su norma $||\gamma'(t)||$ es la **rapidez o celeridad** del móvil en el instante t.

5.1.3. Integral de línea de un campo escalar

Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos, U un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que $\gamma^* \subseteq U$,y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Se define la **integral de f a lo largo de la curva γ (ó integral de línea respecto de la longitud de arco de f sobre la curva** γ), $\int_\gamma f(s)ds$, mediante la siguiente fórmula

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt.$$

También puede escribirse $\int_\gamma f(x_1, x_2, ..., x_2)ds$ en lugar de $\int_\gamma f(s)ds$

Nótese que la función $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$s(t) = \int_a^t ||\gamma'(u)||du,$$

llamada **función longitud del arco**, es derivable en virtud del T.F.C. De hecho

$$s'(t) = ||\gamma'(t)||$$

Así pues la definición de integral de línea puede considerarse como un simple cambio de variable.

Si γ es cerrada se suele escribir la integral con el símbolo $\oint_\gamma f(s)ds$.

Obsérvese que, al igual que ocurre con el cálculo de la longitud de una curva, el cálculo de estas integrales suele ser bastante complejo.

5.1.4. Propiedades de la integral de línea de un campo escalar

Vamos ahora a enunciar las propiedades más notorias de las integrales de línea de un campo escalar.

Proposición 5.1.2. *Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos, U un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contenga a γ^* y $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dos campos escalares continuos. Entonces:*

a) $\int_\gamma (rf + tg)(s)ds = r\int_\gamma f(s)ds + t\int_\gamma g(s)ds, \quad \forall r, t \in \mathbb{R}.$

b) *Si σ es una reparametrización de γ, entonces*

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_\sigma f(s)ds,$$

en particular,

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_{-\gamma} f(s)ds.$$

c) *La aplicación $f \longmapsto \int_\gamma$ definida en el conjunto $\mathcal{C}(\gamma^*)$ es un funcional lineal y*

$$|\int_\gamma f| \leq l(\gamma)Max\{|f(z)|;\ z \in \gamma^*\}.$$

d) *Si $\sigma : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es otra curva regular a trozos tal que $\gamma(b) = \sigma(c)$, se tiene que*

$$\int_{\gamma+\sigma} f(s)ds = \int_\gamma f(s)ds + \int_\sigma f(s)ds.$$

e) *Dadas m curvas $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ y γ su suma formal, entonces*

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_{\gamma_1} f(s)ds + \int_{\gamma_2} f(s)ds + ... + \int_{\gamma_m} f(s)ds.$$

Ejemplos:

a) Pruébese que, para cada $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, se tiene que

$$\int_{[a,b]} f(s)ds = \int_a^b f(t)dt.$$

b) Calcúlese la integral de línea

$$\oint_C (x^2 + xy - y^4)ds,$$

siendo C la circunferencia centrada en el origen y de radio r

En ambos ejemplos, hemos confundido las curvas con sus correspondientes imágenes. Esto es posible, porque en virtud de la propiedad segunda, la integral no depende de la parametrización. Así pueden considerarse para su cálculo sus parametrizaciones más típicas, a saber

a) $[a,b] : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$[a,b](t) = t.$$

b) $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\gamma(t) = (a + rcos(t), b + rcos(t).$$

5.1.5. Interpretaciones de la integral.

a) Una interpretación física: La masa total de un alambre

Pensemos en un alambre $A \subseteq \mathbb{R}^3$, del cual conocemos que su densidad lineal viene dada, en cada punto, por la función continua $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que el alambre A es la imagen de una curva simple $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de clase $\mathcal{C}^1$. Se quiere calcular la masa total del alambre A, M_A. Es obvio que si la densidad del alambre fuera constantemente d_0, el problema se resuelve inmediatamente multiplicando d_0 por la longitud del alambre. Así tendríamos

$$M_A = d_0 l(\gamma) = d_0 \int_a^b ||\gamma'(t)||.$$

Pero, ¿qué ocurre si la densidad del alambre es variable? Sigamos el siguiente argumento.

Es claro que, para cada partición del intervalo $[a, b]$, $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, la imagen de $\gamma/[t_{i-1}, t_i]$ es el arco de curva comprendido entre $\gamma(t_{i-1})$ y $\gamma(t_i)$, $\forall i = 1, 2, ..., n$.

Tomemos una sucesión de particiones $\{P_n\}$ cuyos diámetros tiendan a cero y sea, para cada n, z_i^n un punto del subintervalo $[t_{i-1}^n, t_i^n]$. Naturalmente $\gamma(z_i^n)$ está en A.

Dado que la sucesión de los diámetros de las particiones tiende a cero, para n suficientemente grande, se puede considerar que la masa, M_i^n, del alambre entre los puntos $\gamma(t_{i-1}^n)$ y $\gamma(t_i^n)$ es constante y por tanto

$$M_i^n \approx f(\gamma(z_i^n)) \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} ||\gamma'(t)||dt.$$

Teniendo en cuenta ahora la continuidad de la función $||\gamma'(t)||$, se tiene que

$$M_i^n \approx f(\gamma(z_i^n))(t_i^n - t_{i-1}^n)||\gamma'(z_i^n)||dt$$

En consecuencia, la masa total del alambre se puede escribir como

$$M_A = \sum_i M_i^n \approx \sum_i f(\gamma(z_i)^n)||\gamma'(z_i^n)||(t_i - t_{i-1}),$$

por lo que haciendo tender n a infinito,

$$M_A = \int_a^b f((\gamma(t))||\gamma'(t)||dt = \int_\gamma f(s)ds.$$

b) Una interpretación geométrica: El área ó el volumen de un recinto

Si aplicamos la definición de integral de línea en el caso $n = 1$ y $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\gamma(t) = t$, se tiene que

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(t)dt,$$

que, geométricamente, representa el área del recinto comprendido entre la gráfica de f y el eje x.

Análogamente, para $n = 2$, cuando el campo f es positivo el valor $\int_\gamma f(s)ds$ puede interpretarse como el área de una cortina que cuelga de un alambre cuya forma viene descrita por la curva γ y cuya altura viene dada por $f(\gamma(t))$.

c) Otras aplicaciones

La integral de línea de un campo escalar f se utiliza para el cálculo del **centro de gravedad** de la traza de una curva γ, $C_M(\gamma) = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, el cual viene definido por

$$\overline{x} = \frac{M_{y,z}(\gamma)}{M}, \quad \overline{y} = \frac{M_{x,z}(\gamma)}{M} \quad \overline{z} = \frac{M_{x,y}(\gamma)}{M},$$

donde M es la masa total y $M_{y,z}$ $M_{x,z}$ y $M_{x,y}$ son los que llamamos **momentos estáticos**, esto es,

$$M_{x,y}(\gamma) = \int_\gamma zf(x, y, z)ds,$$

$$M_{x,z}(\gamma) = \int_\gamma yf(x, y, z)ds,$$

$$M_{y,z}(\gamma) = \int_\gamma xf(x, y, z)ds,$$

y donde f representa el valor de la densidad en cada punto de la curva γ.

También suele usarse para obtener el **valor medio de un campo sobre una curva**, $\overline{f}_\gamma$ como

$$\overline{f}_\gamma = \frac{1}{l(\gamma)} \int_\gamma f(s)ds,$$

y donde el campo escalar f mide la densidad en cada punto.

5.1.6. Relación de ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, el campo escalar dado por $f(x, y) = x + y$. Calcúlese la integral de f a lo largo del cuadrado de ecuación $|x|+|y| = 1$, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj y empezando por el vértice $(1, 0)$.

2. Calcúlese $\int_\gamma f(s)ds$ en los siguientes casos:

   a) $f(x, y) = x$, $\gamma : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (t, t)$.

   b) $f(x, y) = xy$, $\gamma : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (cos(t), sen(t)$.

   c) $f(x, y) = x^2 - 2xy$, $\gamma : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (-sen(t), cos(t))$.

3. Supóngase un alambre en forma de hélice $\mathcal{H}$, y que viene dada por

   $$\mathcal{H} \equiv \delta(t) = (cos(t), sen(t), t), \forall t \in [0, 2\pi],$$

   y cuya función de densidad viene dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcúlese la longitud del alambre, su masa, su centro de masa y su densidad media.

4. Sean $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $0 < r < R$ y f una función continua en el disco cerrado

   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ ||(x, y) - (a, b)|| \leq R\}.$$

   Pruébese que si $\{r_n\}$ es una sucesión de números reales contenida en $[0, R]$ y convergente a R, entonces

   $$lim_n \left\{ \int_{C((a,b),r_n)} f(s)ds \right\} = \int_{C((a,b),R)} f(s)ds.$$

5.2. Integrales de línea de un campo vectorial

Sumario

En esta lección introduciremos el concepto de integral de línea de un campo vectorial. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

V.2.1 Integrales curvilíneas.

V.2.2 Campos conservativos.

V.2.3 Potencial de un campo conservativo.

V.2.4 Distintas interpretaciones de la integral curvilínea.

V.2.5 Relación de ejercicios.

5.2.1. Integrales curvilíneas.

Dado U un abierto de $\mathbb{R}^n$, una curva regular a trozos $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma * \subseteq U$, y un campo vectorial continuo $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, se define la **integral de F a lo largo de la curva** γ, $\int_\gamma F.ds$, mediante la expresión

$$\int_\gamma F \centerdot ds := \int_a^b < F \circ \gamma(t), \gamma'(t) > dt,$$

donde por $< .,. >$ representamos el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y por tanto

$$\int_\gamma F \centerdot ds = \int_a^b \sum_{i=1}^n F_i \circ \gamma(t)\gamma_i'(t))dt.$$

Teniendo en cuenta que si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar, se admite la siguiente expresión

$$\int_\gamma f \ dx_i = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma_i'(t)dt,$$

podemos también escribir

$$\int_\gamma F \centerdot ds = \int_\gamma F_1 \ dx_1 + F_2 dx_2 + ... + F_n \ dx_n.$$

Si γ es cerrada se suele escribir la integral con el símbolo $\oint_\gamma F \centerdot ds$.

Veamos ahora algunas de las propiedades más características.

Proposición 5.2.1. *Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos, U un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contenga a $\gamma([a,b])$ y $F, G : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales continuos. Entonces:*

1. $\int_\gamma (rF + sG) \cdot ds = r \int_\gamma F \cdot ds + s \int_\gamma G \cdot ds, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}.$

2. *Si σ es una reparametrización de γ, entonces*

$$\int_\gamma F \cdot ds = \pm \int_\sigma F \cdot ds,$$

según que ambas curvas sean ó no equivalentes, en particular,

$$\int_\gamma F \cdot ds = - \int_{-\gamma} F \cdot ds.$$

3. *Si $\sigma : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es otra curva regular a trozos tal que $\gamma(b) = \sigma(c)$ y $F \in \mathcal{C}(\gamma * \cup \sigma *)$, se tiene que*

$$\int_{\gamma+\sigma} F \cdot ds = \int_\gamma F \cdot ds + \int_\sigma F \cdot ds.$$

4. *Dadas m curvas $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m$ y γ su suma formal, entonces*

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds + \int_{\gamma_2} F \cdot ds + ... + \int_{\gamma_m} F \cdot ds.$$

Nota

Nótese que la segunda propiedad es algo diferente a la correspondiente integral de línea de campos escalares. En este caso, la integral depende de la orientación de la curva. Por ello, si no se especifica nada, se entiende que la correspondiente parametrización recorre la curva en contra de las agujas del reloj.

Ejemplo:
Calcúlese la integral curvilínea

$$\oint_C xdy - ydx,$$

siendo C la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r. (Nótese que si no se indica nada se entiende recorrida en contra de las agujas del reloj)

5.2.2. Campos conservativos

Como siempre, con la definición suele ser dificil calcular integrales curvilíneas. En esta sección veremos que, bajo ciertas condiciones sobre el integrando, éste cálculo es más fácil.

El primer resultado a destacar es la siguiente regla

Teorema 5.2.2. *(Regla de Barrow para la integral de línea)*
Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar de clase $\mathcal{C}^1$ y $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regular a trozos con $\gamma* \subseteq U$. Entonces

$$\int_\gamma \nabla g \cdot ds = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)),$$

donde ∇g, es el campo vectorial que a cada punto $x \in U$, le asocia el vector gradiente de g en el punto x. En particular, si γ es cerrada

$$\oint_\gamma \nabla g \cdot ds = 0.$$

En vista del resultado, parece natural preguntarnos si, dado un campo vectorial F, existe un campo escalar, g, de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $F = \nabla g$. Cuando esto ocurra se dice que g es un **potencial de** F (una especie de primitiva)y que F es un campo **conservativo**.

La conclusión es clara: Si F es un campo conservativo y conozco un potencial, entonces el problema del cálculo de la integral de F a lo largo de una curva está resuelto.

Ejemplo

Hállese la integral del campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x,y,z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2),$$

a lo largo de la curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\gamma(t) = (sen(t/2) + cos(2t) - 1, tcos(t), t^2sen(t)).$$

El siguiente resultado caracteriza aquellos campos que admiten un potencial:

Teorema 5.2.3. *Sea U una abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^m$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *F es un campo conservativo.*
2. *F admite un potencial g de clase $\mathcal{C}^{m+1}$.*

3. *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es cualquier curva regular a trozos, con $\gamma* \subseteq U$, la integral $\int_\gamma F \cdot ds$ depende sólo del origen y del extremo de γ.*

4. *Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es cualquier curva cerrada regular a trozos, con $\gamma* \subseteq U$, entonces*

$$\oint_\gamma F \cdot ds = 0.$$

Pese a lo vistoso del resultado anterior, muy útil una vez sabido que un campo es conservativo, éste no es práctico para decidir si un campo es ó no conservativo. Busquemos pues condiciones sencillas de comprobar que nos permitan asegurar que un determinado campo es conservativo.

Comencemos suponiendo que $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo conservativo y que g un potencial de clase $\mathcal{C}^2$ en U de F. Es claro que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = F_i(x), \quad \forall x \in U, \quad \forall i = 1, 2, ..., n,$$

y por tanto, derivando

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \, \partial x_j}(x) = \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}(x), \quad \forall x \in U, \quad \forall i, j = 1, 2, ..., n,$$

y aplicando el lema de Schwarz, se obtiene que una condición necesaria para que un campo vectorial F de clase $\mathcal{C}^1$ admita un potencial: F verifica la siguiente condición

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}(x),, \quad \forall x \in U, \quad \forall i, j = 1, 2, ..., n.$$

Esta condición no es, en general suficiente como muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo

Sea $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, definida por

$$F(x, y) = (\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}).$$

Pruébese que si γ es la circunferencia de centro el origen de coordenadas y radio 1, entonces

$$\int_\gamma F \cdot ds = 2\pi \neq 0.$$

Busquemos ahora alguna condición adicional. Para ello necesitamos algunas definiciones:

Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que es **convexo** si dados dos puntos cualesquiera de C, el segmento que los une está contenido en C.

Teorema 5.2.4. *Sean U un abierto convexo de $\mathbb{R}^n$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces F es conservativo si, y sólo si,*

$$\frac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j(x)}{\partial x_i}(x),, \quad \forall x \in U, \quad \forall i, j = 1, 2, ..., n.$$

De hecho, el teorema sigue siendo cierto para una clase más amplia de conjuntos, los llamados " **simplemente conexos**", esto es, conjuntos del plano que no tienen "agujeros".

Una vez comprobado que un campo es conservativo, veamos ahora a cómo desarrollar un método práctico para el cálculo de un potencial.

Sea F un campo conservativo definido en un conjunto abierto y convexo U de $\mathbb{R}^n$. Vamos a calcular un potencial de F. Sea p un punto del conjunto U y sea γ el segmento que une un punto fijo p del conjunto U con otro punto cualquiera x del mismo conjunto U, esto es, $\gamma = [p, x]$ es inmediato que $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$, definido, para cada $x \in U$, por $g(x) = \int_{[p,x]} F \centerdot ds$ es un potencial de F.

5.2.3. Distintas interpretaciones de la integral curvilínea.

<u>Interpretación física</u>

Justifiquemos, ahora desde la perspectiva de la Física, los conceptos que aparecen en esta lección.

Consideremos el siguiente problema: Supongamos que en cada punto $p = (x, y, z)$ de una región A del espacio actúa una fuerza F. Tenemos así un campo vectorial $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, al que llamamos campo de fuerzas. Si situamos un objeto " puntual" en el punto $p \in A$, y queremos llevarlo a través del campo hasta un punto q, a lo largo de una trayectoria dada γ^*,esto es, queremos realizar un trabajo a lo largo de la gráfica de la curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, de clase $\mathcal{C}^1$, con $\gamma* \subseteq A$, donde $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$. Pues bien, veamos que dicho trabajo W_{pq} se obtiene como

$$W_{pq} = \int_\gamma F \centerdot ds = \int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt.$$

En efecto, baste para ello imaginar una sucesión de poligonales $\{\gamma_{P_n}\}$ inscritas en la curva, asociadas a una sucesión $\{P_n\}$ de particiones del intervalo $[a, b]$, cuyos diámetros tienden a cero. Para n suficientemente avanzado, podemos considerar la fuerza constante F en cada segmento $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ de la correspondiente poligonal y por tanto, el trabajo realizado entre los puntos $\gamma(t_{i-1})$ y $\gamma(t_i)$, $W_{\gamma(t_{i-1}\gamma(t_i)}$, no es otra cosa que

$$W_{\gamma(t_{i-1})\gamma(t_i)} =< F, d >,$$

donde d es el vector de origen $\gamma(t_{i-1})$ y extremo $\gamma(t_i)$. En particular, existe $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$, tal que $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx \gamma'(c_i))(t_i - t_{i-1})$. El resto es consecuencia de que la integral es el paso al límite de la sucesión de sumas correspondiente.

Ejemplo

Calcúlese el trabajo realizado por un punto material que se desplaza a lo largo de la mitad superior de la elipse de semiejes a y b entre los puntos $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ sujeto al campo de fuerzas

$$\overrightarrow{F} = y\,\overrightarrow{i} - x\,\overrightarrow{j}\,.$$

Veamos ahora que el trabajo necesario para mover una partícula desde un punto p hasta un punto q a través de un campo de fuerzas, es igual a la diferencia entre la energía cinética de la partícula en el punto q y la correspondiente en el punto p.

En efecto, según la Segunda Ley de Newton, el valor de la fuerza F en el punto $\gamma(t)$ es igual a la masa m de la partícula por su aceleración en ese punto. Esta última no es otra cosa que el vector derivada segunda $\gamma''(t)$. Entonces,

$$W_{pq} = \int_\gamma F\,.\,ds = \int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt = m\int_a^b < \gamma''(t), \gamma'(t) > dt.$$

Dado que $||\gamma'(t)||^2 =< \gamma'(t), \gamma'(t) >$, es claro que $(/2)||\gamma'(t)||^2$ es una primitiva de $< \gamma''(t), \gamma'(t) >$. Así,

$$W_{pq} = (1/2)m[||\gamma'(t)||^2]_a^b = (1/2)m(||\gamma'(b)||^2 - ||\gamma'(a)||^2).$$

Obsérvese que $||\gamma'(t)||$ es la magnitud del vector velocidad de la partícula en el instante t. Escribiendo $v(p) = ||\gamma'(a)||$ y $v(q) = ||\gamma'(b)||$ la fórmula anterior se puede ver como

$$W_{pq} = (1/2)m(v(q)^2 - v(p)^2).$$

Supongamos finalmente que el campo F es conservativo. Sea $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un potencial de F. Como sabemos $\int_\gamma F.ds = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$ y comparando esta expresión con la integral obtenida anteriormente para W_{pq} en términos de la energía cinética de la partícula, se obtiene:

$$g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) = 1/2m((v(q)^2 - v(p)^2).$$

Ó bien

$$(1/2)mv(p)^2 - g(p) = (1/2)m(v(q)^2 - g(q).$$

Al escalar $-g(x)$ se la llama, en física, **energía potencial de la partícula en el punto** $x \in \mathbb{R}^3$ (Esto justifica el nombre de potencial para la función g).

La fórmula anterior establece entonces, que la suma de la energía cinética y la energía potencial de la partícula en los puntos inicial y final de la trayectoria, es la misma, es decir, se conserva. (De hecho, esta suma es la misma en cualquier punto de la trayectoria). Este es el conocido "Principio de la Conservación de la Energía", y por esta razón, a los campos para los que es válido este principio se les llama campos conservativos.

Relación con la integral a lo largo de una curva de un campo escalar

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, γ una curva regular a trozos tal que $\gamma* \subseteq U$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo. Si notamos por $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$, esto es, el vector tangente unitario a la curva γ en el punto $\gamma(t)$, se tiene, para cada t, que

$$< F(\gamma(t)), \gamma'(t) >=< F(\gamma(t)), T(t) > ||\gamma'(t)||,$$

y por tanto

$$\int_\gamma F \centerdot ds = \int_\gamma g(s) ds,$$

donde $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es el campo escalar tal que, para cada t,

$$g(\gamma(t)) =< F(\gamma(t)), T(t) > .$$

Este hecho, abusando del lenguaje, se suele escribir

$$\int_\gamma F \centerdot ds = \int_\gamma F \centerdot T ds.$$

Por otra parte, obsérvese que $F \centerdot T$ no es otra cosa que la componente tangencial de F a lo largo de la curva γ, baste recordar para ello que

$$| < x, y > | = ||x|| ||y|| cos\alpha,$$

siendo α el valor del ángulo que forman los vectores x e y.

5.2.4. Relación de ejercicios

1. Calcúlese la integral curvilínea

$$\int_\gamma xdx - ydy + zdz,$$

siendo $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida por $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$

2. Calcúlense la integral de F a lo largo de la curva γ en cada uno de los siguientes casos

   a) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ y $\gamma : [0, \pi/4] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (sen(t), sen(t), t)$.

   b) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ y $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (\sqrt{2}t/2, \sqrt{2}t/2, \pi t/4)$.

   c) $F(x, y, z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)$ y $\gamma : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\gamma(t) = (sen(t/2) + cos(2t) - 1, tcos(t), t^2sen(t))$.

3. Compruébese si el campo F es conservativo en cada uno de los siguientes casos:

   a) $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $F(x, y) = (x + 4, 4x + y)$

b) $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $F(x, y, z) = (3y^2z + ye^x, 6xyz + e^x, 3xy^2)$.

4. Calcúlese

$$\int_\gamma F \cdot ds,$$

donde γ es la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ con $\gamma_1 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma_1(t) = (4cos(t), 4sen(t))$, $\gamma_2 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por$\gamma_2(t) = (cos(t) + 2, -sen(t))$, $\gamma_3 : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por$\gamma_3(t) = (cos(t) - 2, -sen(t))$ y F es el campo $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (-y, x), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5.3. Los teoremas de Green y de la divergencia en el plano

Sumario

En esta lección presentamos el teorema de Green el cuál establece una conexión entre la integral de línea extendida a una curva cerrada y la integral doble extendida a la región que encierra la curva, bajo determinadas condiciones de regularidad sobre el campo vectorial a integrar y sobre la región de integración. Veremos como aplicación el cálculo de integrales de línea mediante integrales dobles y viceversa. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

5.3.1. Regiones compactas del plano

El objetivo de esta sección es relacionar integrales de línea a lo largo de curvas cerradas simples, con integrales dobles sobre ciertas regiones del plano que llamaremos " compactas ". Para ello necesitamos dar unos conceptos previos.

Se demuestra (Teorema de la curva de Jordan), que toda curva $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cerrada simple determina dos regiones del plano: Una acotada, A, llamada **región interior a** γ, y otra no acotada, B, llamada **región exterior a** γ. Es claro que $Fr(A) = Fr(B) = \gamma^*$.

Intuitivamente, diremos que una curva cerrada simple γ está **orientada positivamente** cuando al recorrerla, la región interior se mantiene siempre a la izquierda. A la curva así orientada, la notaremos γ^+. En caso contrario, diremos que γ está **orientada negativamente** y la notaremos por γ^-.

Sean $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ $n + 1$ curvas cerradas simples en $\mathbb{R}^2$ tales que:

1. Para cada $i = 1, 2, ..., n$, γ_i^* se encuentra en la región interior de γ
2. Para cada $i \neq j$, $\gamma_i^* \bigcap \gamma_j^* = \emptyset$.
3. Para cada $i \neq j$, γ_i^* se encuentra en la región exterior de γ_j.

Llamaremos **región compacta** en $\mathbb{R}^2$ determinada por $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ al conjunto de los puntos que se encuentran en la región interior de γ y en la región exterior de cada una de las γ_i, junto con la frontera . Es claro que la frontera de la región compacta A es el conjunto $\gamma^* \cup \gamma_1^* \cup \gamma_2^* \cup ... \cup \gamma_n^*$ y la notaremos $Fr(A)$.

Diremos que la frontera de A está **positivamente orientada**, y lo notaremos $Fr(A)^+$, cuando al recorrer las curvas $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, ...\gamma$, la región S se mantiene siempre a la izquierda.

Ejemplos

Los ejemplos más sencillos de regiones compactas A son las llamadas regiones **elementales** que son de tres tipos:

1. Regiones **y-simple** o de **tipo 1**, esto es, regiones de la forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

donde todas las funciones que aparecen son continuas en el intervalo $[a, b]$. Es claro que su frontera $Fr(A)$ lo componen las gráficas de esas funciones y dos segmentos rectilíneos.

2. Regiones **x-simple** o de **tipo 2**, esto es, regiones de la forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \in [c, d], \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\},$$

donde todas las funciones que aparecen son continuas en el intervalo $[c, d]$. Es claro que su frontera $Fr(A)$ lo componen las gráficas de esas funciones y dos segmentos rectilíneos.

3. Regiones **simples**, esto es, regiones que son simultáneamente x-simples e y-simples.

   Ejemplos: circunferencias, cuadrados, y, en general, regiones encerradas por curvas cerradas simples.

5.3.2. Teorema de Green

Ya podemos enunciar el primer resultado importante de esta lección

Teorema 5.3.1. *(Teorema de Green)*
Sea U un abierto en $\mathbb{R}^2$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $A \subseteq U$ una región compacta. Entonces:

$$\int_{Fr(A)^+} F \centerdot ds = \int_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)\right) d(x, y).$$

El Teorema de Green nos permite calcular integrales de línea mediante el cálculo de una integral doble o viceversa.

Ejemplos:

1. Sean $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x,y) = (3x^2y, -x^3)$ y A la región de $\mathbb{R}^2$ definida por
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \leq y \leq 1\}.$$
Calcúlese $\int_{Fr(A)^+} F \centerdot ds$.

2. Calcúlese el área del recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$.

Para resolver el segundo ejemplo, aplicaremos el Teorema de Green, para lo que basta entonces encontrar un campo F definido en un abierto que contenga a S y tal que
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 1.$$
Tómese, por ejemplo, $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (y, 2x)$. A este respecto nótese que $Fr(A)^+$ es la elipse de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ parametrizada por $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\gamma(t) = (acos(t), bsen(t))$.

5.3.3. Teorema de la divergencia en el plano

Veamos ahora la consecuencia más relevante del teorema de Green.

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^n$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo diferenciable y $P \in U$. Se llama **divergencia de F en p a**
$$divF(P) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(P) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(P) + ... + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(P).$$

El teorema de la divergencia permite ver a ésta como una medida del flujo del campo por unidad de área en cada punto p de U.

Teorema 5.3.2. *(Teorema de la divergencia en el plano)*
Sean U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de clase $\mathcal{C}^1$ y $A \subseteq U$ una región compacta de $\mathbb{R}^2$, tal que ∂A^+ sea la imagen de una curva $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ regular a trozos. Sea $G = (-F_2, F_1)$ entonces
$$\int_{Fr(A)^+} G \centerdot ds = \int_A divF/d(x,y).$$

El resultado es obvio a partir del Teorema de Green.

Un campo vectorial F de clase $\mathcal{C}^1$ se dice **libre de divergencia** si $div(F) = 0$.

Notemos ahora por $N(t) = (T_2(t) - T_1(t))$, al **vector unitario normal exterior a** A, el cual es ortogonal a $T(t)$. Es claro que si G es un campo ortogonal a F, entonces

$$G \centerdot T = F \centerdot N,$$

por lo que, abusando del lenguaje, se tiene

$$\int_{Fr(A)^+} G \centerdot ds = \int_{Fr(A)^+} G \centerdot T ds = \int_{Fr(A)^+} F \centerdot N,$$

y por tanto el teorema de la divergencia se puede escribir

$$\int_A div F = \int_{Fr(A)^+} F \centerdot N ds. \qquad (1)$$

La divergencia tiene una importante interpretación física.

Podemos imaginar que F es el campo de velocidades de un fluido. La divergencia representa la razón de expansión por una unidad de superficie bajo el flujo de un fluido.

En efecto, sea B_δ el disco cerrado centrado en un punto P y radio δ. Por el teorema de la divergencia y del teorema del valor medio para integrales, existe un punto $Q \in B_\delta$ tal que

$$\int_{Fr(B_\delta)^+} F \centerdot N ds = \int_{B_\delta} div F = div F(Q).Area(B_\delta) = div F(Q).\pi\delta^2,$$

y por tanto,

$$div F(P) = lim_{\delta \to 0} div F(Q) = lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{Fr(B_\delta)^+} F \centerdot N ds.$$

Así, si $div F(P) > 0$, consideraremos P como una fuente, porque hay un flujo neto hacia el exterior de en entorno de P; si $div F(P) < 0$, se denomina un **sumidero** para F.

Se dice que una curva σ es una **línea de flujo para** un campo vectorial F si, para cada t, $F(\sigma(t)) = \sigma'(t)$. En tal caso F recibe el nombre de **campo de velocidades** de la curva σ.

Por otra parte, teniendo en cuenta (1), se puede demostrar que si F es el campo de velocidades de un fluido, éste es libre de divergencia si, y sólo si, la cantidad neta de fluido que fluye hacia fuera de cualquier región es cero. Un fluido con esta propiedad se denomina **incompresible**.

5.3.4. Rotación de un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo continuo y $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple de clase $\mathcal{C}^1$, tal que $\gamma* \subseteq U$.

Se llama **circulación del campo F alrededor de γ a**

$$C = \oint_{\gamma^+} F \centerdot ds.$$

Sea A la región interior de γ. Se llama **rotación del campo F alrededor de** γ a

$$rotF(\gamma) = \frac{1}{\text{"área" } (A)} \oint_{\gamma^+} F\ ds = \frac{C}{\text{"área" } (A)}.$$

Vamos ahora a "localizar" el concepto de rotación de un campo. Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto de U y consideremos la curva γ_δ cuya traza es la circunferencia de centro P y radio δ. Parece razonable definir **la rotación de F en el punto** P como el límite, cuando δ tiende a cero, de la rotación de F alrededor de γ_δ, esto es,

$$rotF(P) = lim_{\delta\to 0} rotF(\gamma_\delta) = lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi\delta^2} \int_{\gamma_\delta^+} F \centerdot ds$$

Se puede demostrar, aplicando el teorema de Green, el teorema del cambio de variable y el teorema fundamental del cálculo que, si F es un campo de clase $\mathcal{C}^1$ en U, entonces

$$rotF(x, y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in U.$$

Se dice que un campo es **irrotacional en** U cuando $rotF(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in U$. Por tanto, si F es de clase $\mathcal{C}^1$,

$$F \quad \text{es irrotacional si, y sólo si, } \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y), \quad \forall (x, y) \in U.$$

Así pues, por el Teorema de Green, es claro que, si el campo es irrotacional, la circulación de F a lo largo de cualquier curva contenida en U es cero.

De hecho, el Teorema de Green se puede escribir

$$\int_A rotF = \int_{Fr(A)^+} F \centerdot ds \qquad (2)$$

Es obvio que si F es conservativo, es irrotacional, pero el recíproco no es cierto como vimos en un ejemplo de la lección anterior. De hecho vimos que el recíproco si es cierto si el abierto, en el que está definido F, es convexo.

Veamos ahora una interpretación física de la rotación, que, por otra parte, no es otra que su base histórica.

Supongamos que F es el campo de velocidades de la curva $\gamma = (Fr(A)^+$, esto es, $F(x,y)$ nos da el vector velocidad del flujo en el punto $(x,y) \in \gamma* \subseteq U$. Si ahora imaginamos un corcho circular flotando en la corriente líquida cuyo campo de velocidades está descrito por F, además del movimiento de " arrastre ", puede darse un movimiento de " rotación " del corcho alrededor de su eje. El signo de la circulación C nos dice si el campo F hace girar el corcho en sentido antihorario, si es positivo, en sentido horario, si es negativo, o no lo hace girar si C es cero. El concepto de "rotación" nos va a dar una estimación de la velocidad angular con que gira el corcho.

Se prueba que, en en el caso comentado, $rotF(\gamma)$ es el doble de la velocidad angular del corcho. (En un campo irrotacional el corcho no gira sobre su eje).

Ejemplo

Sea $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $F(x,y) = (1,x)$ y sea γ la circunferencia de centro (a,b) y radio r recorrida en sentido positivo. Pruébese que la circulación C de F alrededor de γ es $C = \pi r^2$ y por tanto que $rotF(\gamma) = 1$.

Obsérvese que el valor de C no depende del centro (a,b) de la circunferencia " sobre " la que circula el campo F. Esto significaría que el efecto de la corriente cuyo campo de velocidades está descrito por F, no depende del lugar donde se coloque el corcho.

Como ya vimos, también en la lección anterior,

$$\int_{Fr(A)^+} F \centerdot ds = \int_{Fr(A)^+} F \centerdot T ds,$$

donde $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$ es el vector unitario tangente a $\gamma = Fr(A)^+$ en $\gamma(t)$. Por tanto, el teorema de Green, nos afirma que

$$\int_A rotF(x,y)d(x,y) = \int_{Fr(A)^+} F \centerdot T ds \qquad (2).$$

Las notaciones vistas en (1) y en (2) tienen como objeto mostrar la simetría existente entre las expresiones del teorema de la divergencia y del teorema de Green. Así pues el **teorema de Green** se puede interpretar como que la **integral de la componente tangencial** del campo a lo largo de la curva es igual a la " **suma de los efectos rotacionales**" del campo en el interior, y el **teorema de la divergencia** se puede leer como que la **integral de la componente normal** del campo sobre la curva es igual a la " **suma de los efectos divergentes** " del campo en el interior.

5.3.5. Relación de Ejercicios

1. Calcúlese la circulación del campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $F(x, y) = (1, x)$ a lo largo de $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida a su vez por $\gamma(t) = (a + tcos(t), b + sen(t)$.

2. Calcúlese la circulación de $\overrightarrow{F} = (y - sen(x), x^2)$ a lo largo del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 1)$ recorrido en sentido positivo.

3. Calcúlese el área encerrada por del cardiode γ, donde $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, está definida por
$$\gamma(t) = (2a(1 + cos(t))cos(t), 2a(1 + cos(t))sen(t)).$$

4. Calcúlese el área encerrada por el arco del cicloide γ definido en $[0, 2\pi]$ y el eje x, donde $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, está definida por
$$\gamma(t) = r(t - sen(t), 1 - cos(t)).$$

5. Calcúlese el área encerrada por la lemniscata de Geromo γ, donde $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, está definida por
$$\gamma(t) = (asen(t), asen(t)cos(t)).$$

6. Calcúlese la integral de $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $F(x, y) = (3x^2y, -x^3)$ en la frontera de la región $A = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 \leq y \leq 1\}$.

7. Calcúlense las líneas de flujo del campo vectorial definido en $\mathbb{R}^2$, por $\overrightarrow{F} = y\overrightarrow{i} - x\overrightarrow{j}$.

5.4. Integrales de Superficie

Sumario

En esta lección introduciremos el concepto de parametrización de una superficie, producto vectorial y el cálculo de áreas de superficie, para, posteriormente, definir las integrales de superficie y los flujos, que son las extensiones a las integrales de línea de un campo escalar y de un campo vectorial. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

5.4.1. Parametrización de superficies en $\mathbb{R}^3$

Sea U un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$. Una superficie S es un conjunto del tipo

$$S = \{(x, y, z) \in U;\ f(x, y, z) = 0\},$$

para algún campo escalar $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continuo. Dicha superficie se dice **determinada por** f.

Nuestro objetivo es considerar las posibles representaciones paramétricas de una superficie S.

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $S = g(A)$. El campo vectorial g se dice que es una **parametrización de la superficie** S. De hecho, las coordenadas de los puntos de S las representaremos como

$$x = g_1(u, v),\ y = g_2(u, v),\ z = g_3(u, v).$$

Si g es de clase $\mathcal{C}^1$, g/A es inyectiva y rango $J_g(u, v) = 2,\ \forall (u, v) \in A$, diremos que S es una **superficie simple**.

Se dice que S es una superficie **localmente simple** si, para cada punto $Q \in S$, existe un entorno V tal que $S \cap V$ es una superficie simple. En tal caso existe un conjunto A_0 de $\mathbb{R}^2$ y una función $g_0 : A_0 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $V \bigcap S = g_0(A_0)$ y se dice que g_0 es una **parametrización local de** S.

Sea $S = g(A)$ una superficie simple, entonces se llama **borde de** S, ∂S,

$$\partial S := g(Fr(A)) = g(\partial A).$$

Se llama **interior de** S, $Int(S) := g(int(A))$

Nota

Notemos que los conjuntos recién definidos no tienen ninguna relación con los conceptos topológicos de frontera e interior de S.

Ejemplo

Considérese un tronco de paraboloide parametrizado por $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ y donde B es el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1. Es claro que $g(C)$, donde C es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, es el borde de S, esto es, la circunferencia de radio uno contenida en el plano $z = 1$ y centrada en $(0, 0, 1)$. Por otra parte,

$$Int(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 < 1\},$$

esto es, el resto del tronco del paraboloide. Evidentemente este conjunto tiene interior vacío desde el punto de vista topológico.

Veamos ahora algunos ejemplos de superficies parametrizadas

Ejemplos de superficies parametrizadas

1. Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y $h : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un campo escalar. La gráfica de dicho campo escalar es una superficie S

   $$S = \{(x, y, z) \in U; \ (x, y) \in A, z = h(x, y)\},$$

   donde $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$ es la **parametrización trivial** de la superficie $S = g(A)$. S es uns superficie simple siempre que $h \in \mathcal{C}^1(U)$.

   Así, por ejemplo, el paraboloide P,

   $$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \ z = a(x^2 + y^2)\},$$

   es una superficie simple, ya que $h(x, y) = a(x^2 + y^2)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$.

2. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $h : U \longrightarrow \mathbb{R}$, una función de clase $\mathcal{C}^1$ y sin puntos críticos; entonces, para cada $c \in \mathbb{R}$, la superficie

   $$S = \{(x, y, z) \in U : \ h(x, y, z) = c\},$$

   se denomina **superficie de nivel de valor** c. Se puede probar que S es una superficie de nivel si, y sólo si, S es una superficie localmente simple.

Veamos ahora algunos ejemplos de superficies localmente simples.

1. El cilindro.

   En efecto, sea $r > 0$. Los campos vectoriales $g_1, g_2 : [0, r] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por $g_1(x, y) = (\sqrt{r^2 - y^2}, y, z)$ y $g_2(x, y) = (-\sqrt{r^2 - y^2}, y, z)$ son dos parametrizaciones locales del cilindro $r^2 = x^2 + y^2$ ($x \geq 0$ y $x \leq 0$ respectivamente).

2. La esfera.

   En efecto, sean $r > 0$ y $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u^2 + v^2 \leq 1\}$. Los campos vectoriales $g_1, g_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $g_1(x, y) = (x, y, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$ y $g_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2})$ son dos parametrizaciones locales de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($z \geq 0$ y $z \leq 0$ respectivamente).

3. El elipsoide.

   De hecho, los campos vectoriales $g_1, g_2 : E \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidos por $g_1(x, y) = (x, y, c\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2})$ y $g_2(x, y) = (x, y, -c\sqrt{1 - (x/a)^2 - (y/b)^2})$ (donde E es la elipse de semiejes a y b) son dos parametrizaciones locales del elipsoide de semiejes a , b y c) ($z \geq 0$ y $z \leq 0$ respectivamente).

4. El cono.

   Sea $A =]0, 2\pi[\times \mathbb{R}^+$. Los campos vectoriales $g_1, g_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definidas por $g_1(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ y $g_2(x, y) = (x, y, -\sqrt{x^2 + y^2})$ son dos parametrizaciones locales del cono ($z \geq 0$ y $z \leq 0$ respectivamente).

¿Existen parametrizaciones globales para los cilindros, esferas y conos? La respuesta es afirmativa en algunos casos. De hecho, usando las cambios de coordenadas esféricas, cilíndricas ó elípticas, se obtienen nuevas parametrizaciones:

Ejemplos

- Para la esfera basta considerar $g : [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, \varphi) = (acos(\theta)cos(\varphi), asen(\theta)cos(\varphi), asen(\varphi)).$$

- Para el cilindro basta considerar $g : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\theta, z) = (acos(\theta), asen(\theta), z)).$$

- Para el paraboloide basta considerar $g : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (a\rho acos(\theta), a\rho sen(\theta), a\rho^2).$$

- **No** para el cono, **sí** para el semicono, basta considerar $g : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(\rho, \theta) = (a\rho cos(\theta), a\rho sen(\theta), a\rho).$$

Sea $S = g(A)$ una superficie simple en $\mathbb{R}^3$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S y $B \subseteq \mathbb{R}^2$ una región del plano. Si $\phi : B \longrightarrow A$ es una función biyectiva de clase $\mathcal{C}^1$ y tal que

$$det J_\phi(s,t) \neq 0, \ \forall (s,t) \in B.$$

Entonces la función $h = g \circ \phi : B \longrightarrow \mathbb{R}^3$ se dice que es una **reparametrización** de S.

5.4.2. Espacio tangente y Plano tangente.

Sea S una superficie simple y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de $S = g(A)$. Sean $P = (u_0, v_0) \in int(A)$ y $Q = g(P) \in Int(S)$. Podemos considerar las curvas $\alpha(u) = g(u, v_0)$ y $\beta(v) = g(u_0, v)$, las cuales están contenidas en S y pasan por el punto $Q = g(P)$. Los vectores tangentes a dichas curvas en Q vienen dados por

$$\alpha'(u_0) = \frac{\partial g}{\partial u}(P) \quad \text{y} \quad \beta'(v_0) = \frac{\partial g}{\partial v}(P).$$

Se dice que un vector $u \in \mathbb{R}^3$ es un **vector tangente a** una superficie S en Q, si existe una curva contenida en S que pasa por el punto Q y que tiene tangente en dicho punto, esto es, existe $\gamma : [-\delta, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ continua tal que $\gamma^* \subseteq S$ con $\gamma(0) = Q$ y $\gamma'(0) = u$. Así pues, los vectores $\frac{\partial g}{\partial u}(P)$ y $\frac{\partial g}{\partial v}(P)$ son vectores tangentes a S en Q. De hecho, se demuestra que todo vector tangente se puede escribir como combinación lineal de dichos vectores. La condición sobre el rango, $J_g(u,v) = 2, \ \forall (u,v) \in A$, en la definición asegura que dichos vectores son linealmente independientes.

Se define el **espacio tangente a** S **en** Q, $T_Q(S)$, como el subespacio vectorial de todos los vectores tangentes en Q. Como ya hemos visto, el cojunto de los vectores

$$\frac{\partial g}{\partial u}(P) = (\frac{\partial g_1}{\partial u}(P), \frac{\partial g_2}{\partial u}(P), \frac{\partial g_3}{\partial u}(P))$$

y

$$\frac{\partial g}{\partial v}(P) = (\frac{\partial g_1}{\partial v}(P), \frac{\partial g_2}{\partial v}(P), \frac{\partial g_3}{\partial v}(P))$$

forman una base de dicho espacio tangente.

Se define el **plano tangente a** S **en el punto** $Q = g(P)$ como el plano π que pasa por el punto Q y cuyos vectores directores son $\frac{\partial g}{\partial u}(P)$ y $\frac{\partial g}{\partial v}(P)$, esto es, $\pi \equiv Q + T_Q(S)$.

En consecuencia, el plano tangente tiene las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$(x,y,z) = Q + s\frac{\partial g}{\partial u}(P) + t\frac{\partial g}{\partial v}(P) \quad \forall (s,t \in \mathbb{R}.$$

La condición sobre el rango, $J_g(u, v) = 2$, $\forall (u, v) \in A$, asegura que existe el plano tangente a S en el punto Q, lo que se traduce en que la superficie no tiene vértices ó aristas.

Recordemos que dados $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$, se define su **producto vectorial**, $u \times v$ como

$$u \times v = (M_{11}, M_{12}, M_{13}),$$

siendo M_{ij} el adjunto del elemento a_{ij} de cualquier matriz cuadrada de orden 3, cuyas segunda y tercera filas sean las coordenadas de u y v respectivamente. Sabemos que dicho vector es perpendicular a los vectores u y v y su sentido sigue la regla del sacacorchos.

Así pues, en nuestro caso, el vector, $\frac{\partial g}{\partial u}(P) \times \frac{\partial g}{\partial v}(P)$. es un vector perpendicular al plano tangente. Dicho vector se denomina **vector normal a S en el punto Q**, $N_g(P)$,

$$N_g(P) := \frac{\partial g}{\partial u}(P) \times \frac{\partial g}{\partial v}(P).$$

Si S es una superficie localmente simple pueden existir aristas.

5.4.3. Orientación de una superficie.

En esta sección abordamos el problema de asignar una orientación a una superficie. De manera intuitiva, una superficie en $\mathbb{R}^3$ se dirá **orientable** si es posible decidir, sin ambigüedad, cuál es cada uno de los lados de la superficie. La herramienta con la que se puede precisar esta idea es el concepto de vector normal a la superficie: Su misión será la de " apuntar " en la dirección de uno de los lados de la superficie

Se dice que una superficie S es **orientable** cuando existe un campo continuo $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que asocia a cada punto $Q \in S$ un vector unitario $N(Q)$ normal a S (vector perpendicular al plano tangente). La continuidad nos asegura que los vectores normales no cambian " repentinamente " de sentido.

Si S es una superficie orientable, el campo N le asigna a S una **orientación**. Así, la superficie S junto con el campo N determinan una **superficie orientada**.

Proposición 5.4.1. *Toda superficie simple es orientable*

Si $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S, recordemos que $N_g(P)$ es un vector ortogonal al plano tangente a S en $Q = g(P)$

Así pues, en el caso de una superficie simple, podemos considerar el siguiente campo de vectores normales a S, $N : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$N(Q) = \frac{N_g(P)}{||N_g(P)||}.$$

Se suele decir que la parametrización g determina una orientación en la superficie $S = g(A)$.

Como ejemplo, consideramos el tronco del paraboloide $z = x^2 + y^2$ por debajo del plano $z = 1$, esto es, $S = g(D)$, donde D es el disco de centro $(0, 0)$ y radio 1 y $g(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. Es fácil ver que

$$N(Q) = N(g(u, v)) = \frac{(-2u, -2v, 1)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}},$$

es un vector normal a S en el punto $Q = g(u, v)$

Es claro que el vector $(0, 0, 1)$, que apunta hacia el interior del paraboloide es un vector del campo, ya que

$$(0, 0, 1) = N(g(0, 0)),$$

luego la orientación que proporciona N es hacia el interior de S.

De manera análoga a las curvas, una reparametrización puede invertir ó no la orientación de una superficie. Esto cocurre según que $det J_\phi(s, t)$ sea negativo ó positivo, respectivamente.

5.4.4. Área de una superficie

Sea $S = g(A)$ una superficie simple en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por la función $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se define el **área de** S, $Area(S)$,

$$Area(S) = \int_A ||N_g(u, v)||d(u, v).$$

Como era de esperar, se demuestra que el área de una superficie no depende de la parametrización de S.

En el caso particular en que S sea la gráfica de una función $h : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$, es fácil ver que el vector

$$N_g(u, v) = (-\frac{\partial h}{\partial v}(u, v), -\frac{\partial h}{\partial u}(u, v), 1)$$

y por tanto

$$Area(S) = \int_A \sqrt{1 + (\frac{\partial h}{\partial u}(u,v))^2 + (\frac{\partial h}{\partial v}(u,v))^2} d(u,v).$$

En el caso del ejemplo anterior

$$Area(S) = \int_A \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} d(u,v) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho dt = \pi/6(5^{3/2} - 1).$$

5.4.5. Integrales de superficie de campos escalares

Sea $S = g(A)$ una superficie simple en $\mathbb{R}^3$, parametrizada por la función $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (basta que g sea de $\mathcal{C}^1$, inyectiva y rango $(J_g(u,v))$ sea igual 2, salvo en un conjunto de medida nula) y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Se define la **integral de superficie del campo f sobre S**,

$$\int_S f dS = \int_A f(g(u,v)) ||N_g(u,v)|| d(u,v).$$

En particular,

$$\int_S 1 dS = Ar(S).$$

Sea S una superficie simple en y $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo. Se define el **valor medio de f sobre S** como

$$\overline{f}_S = \frac{\int_S f dS}{Ar(S)}.$$

Si la superficie S es unión finita de superficies simples $= \bigcup S_i$, cuyas intersecciones sean de medida cero (esfera, tronco de cono, ortoedro, etc,) entonces podemos definir

$$\int_S f dS = \sum_i \int_{S_i} f dS.$$

Veamos ahora algunas de las propiedades más características.

Proposición 5.4.2. *Sean S una superficie simple parametrizada por un campo vectorial g, U un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contenga a S y $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dos campos escalares continuos. Entonces:*

1. $\int_S (rf + sg) dS = r \int_S f dS + s \int_S g dS, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}.$

2. *Si h es una reparametrización de S, entonces*

$$\int_{S_g} f dS = \int_{S_h} f dS.$$

(El valor de la integral $\int_S f dS$ no depende de la parametrización que se considere en S.)

3. *Si T es otra superficie simple parametrizada por h tal que medida$(S \cap T) = 0$ y $S \cup T \subseteq U$, se tiene que*

$$\int_{S \cup T} f dS = \int_S f dS + \int_T f dS.$$

Ejemplo

Un helicoide es una superficie S parametrizada por $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$g(r, \vartheta) = (r cos\vartheta, r sen\vartheta, \vartheta),$$

y donde $A = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Calcúlese su área y $\int_S f dS$, donde f es el campo escalar definido por $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

5.4.6. Integrales de superficie de un campo vectorial

Supongamos que $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo continuo que representa el campo de velocidades de un fluido y sea S una superficie simple. Se trata de ver cuál es la cantidad de flujo que pasa a través de la superficie S, además del sentido en que lo hace.

Sean $S = g(A)$ una superficie simple en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, (basta que g sea de $\mathcal{C}^1$, inyectiva y rango $(J_g(u, v))$ sea igual 2, salvo en un conjunto de medida nula), U un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a S y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Se define la **integral de superficie de F sobre S**, llamada **flujo de F a través de S** como

$$\int_{S_g} F \centerdot dS = \int_A < F(g(u, v)), N_g(u, v) > d(u, v).$$

Nótese que $N(g(u, v)) = \frac{N_g(u,v)}{||N_g(u,v)||}$ y por tanto

$$F.N =< F(g(u, v)), N(g(u, v)) >=< F(g(u, v)), N_g(u, v) > ||N_g(u, v)||,$$

esto es, $\int_{S_g} F \centerdot dS = \int_S F.N dS$.

Así pues, si al calcular $\int_{S_g} F \cdot dS$ nos sale positiva, físicamente significa que el flujo del campo atraviesa la superficie S en el mismo sentido que N_g. Por el contrario, si sale negativa, el flujo del campo atraviesa S en el sentido opuesto a N_g.

Si la superficie S es unión finita de superficies simples $= \bigcup S_i$, cuyas intersecciones sean de medida cero (esfera, tronco de cono, ortoedro, etc,) entonces podemos definir

$$\int_S F \cdot dS = \sum_i \int_{S_i} F \cdot dS.$$

En superficies concretas, como el paraboloide ó la esfera, se puede ver si la orientación dada hace que los vectores normales apunten hacia el " interior " de S ó el " exterior " de S, con lo cual sabremos si el flujo atraviesa la superficie hacia el interior o el exterior. En cualquier caso, la cantidad de flujo que atraviesa la superficie es la misma e igual al valor absoluto de la integral.

Ejemplo

Sea S la porción del paraboloide de ecuación $z = u^2 + v^2$ que intersecta al cilindro centrado en el origen de coordenadas y de radio 1 ($u^2 + v^2 \leq 1$). Consideremos el campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (x, y, z - 1)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Se obtiene fácilmente que

$$\int_S F \cdot dS = -3\pi/2.$$

El resultado indica que el flujo atraviesa a S en sentido contrario al vector N. Evaluando éste en un punto concreto, por ejemplo el $(0, 0)$, se tiene $N(0, 0) = (0, 0, 1)$; esto es, N apunta hacia el interior de S, por tanto el flujo atraviesa el paraboloide hacia el exterior.

Veamos ahora algunas de las propiedades más características.

Proposición 5.4.3. *Sean S una superficie simple parametrizada por un campo vectorial g, U un abierto de $\mathbb{R}^n$ que contenga a S y $F, G : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos vectoriales continuos. Entonces:*

1. $\int_{S_g} (rF + sG) \cdot dS = r \int_{S_g} F \cdot dS + s \int_{S_g} G \cdot dS, \quad \forall r, s \in \mathbb{R}.$

2. *Si h es una reparametrización de S, entonces*

$$\int_{S_g} F \cdot dS = \pm \int_{S_h} F \cdot dS,$$

según que la reparametrización conserve o no la orientación.(Esta integral es invariante por reparametrizaciones que no cambien la orientación de la superficie).

3. *Si T es otra superficie simple parametrizada por h tal que medida$(S \cap T) = 0$ y $S \cup T \subseteq U$, se tiene que*

$$\int_{S \cup T} F \centerdot dS = \int_S F \centerdot dS + \int_T F \centerdot dS.$$

Nota

Nótese que la segunda propiedad es algo diferente a la correspondiente integral de superficie de campos escalares en analogía con las integrales de línea para campos vectoriales.

5.4.7. Relación de ejercicios

1. Calcúlese la superficie de un toro $T(R, r)$, sabiendo que su parametrización viene dada por $g : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y) = ((R + rcos(y))cosx, (R + rcos(y))senx, rsen(y)).$$

2. Calcúlese el area del tronco de paraboloide $z = x^2 + y^2$ situado entre el plano $z = 0$ y el plano $z = 1$.
3. Calcúlese el area del tronco de cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 3$.
4. Calcúlese la integral de superficie del campo escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre el tronco de cono del ejercicio anterior.
5. Calcúlense las integrales de superficie de los campos escalares $f(x, y, z) = ax + by + z$ y $f(x, y, z) = xy + z^2$ sobre el toro $T(R, r)$.
6. Calcúlese la integral de superficie del campo vectorial $F(x, y, z) = (ax + by + z, xy + z^2, z)$ sobre el toro $T(R, r)$.
7. Calcúlese el valor medio de la suma de tres números no negativos, tales que la suma de sus cuadrados es siempre igual a la unidad. (Sol.: 3/2)
8. Calcúlese el valor medio del producto de tres números no negativos cuando su suma es siempre igual a la unidad. (Sol.: 1/60)
9. Calcúlese el flujo del campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la esfera centrada en el origen de coordenadas y radio r
10. Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $F(x, y, z) = (3z - 2x, 0, 2z - x)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 1, \ x, y, z \geq 0\}$. Calcúlese $\int_S F \centerdot dS$.

5.5. Teoremas de Stokes y de la divergencia

Sumario

En esta lección presentaremos los teoremas de Stokes y de la divergencia en el espacio o de Gauss. El primero nos relaciona las integrales de superficie con las integrales de línea y con las triples el teorema de la divergencia. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

5.5.1. Teorema de Stokes

En un primer momento abordamos el teorema de Stokes, generalización a $\mathbb{R}^3$ del teorema de Green. Éste establecía la relación entre la integral de línea del campo a lo largo de una curva cerrada simple, frontera de una región compacta $A \subseteq \mathbb{R}^2$, y una integral doble sobre la región A de cierta función (obviamente relacionada con el campo).

El teorema de Stokes generalizará esta situación en el sentido siguiente: sea la región A de $\mathbb{R}^2$ y sea $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie simple $S = g(A)$ orientada. El teorema establece la relación entre la integral de línea a lo largo del borde positivamente orientado y la integral de superficie del campo rotacional sobre la superficie S. Pero ¿qué se entiende por borde positivamente orientado? Intuitivamente, si consideramos un observador que camina a lo largo del borde de una superficie, de manera que el vector normal señala desde sus pies hacia la cabeza, entonces la orientación es positiva si la superficie queda a la izquierda.

Consideremos por ejemplo el tronco de paraboloide S $z = x^2 + y^2$ entre $z = 0$ y $z = 1$. Sabemos que el borde del paraboloide es $g(C((0,0),1)$, donde $g(x,y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y2})$. Como ya hemos visto

$$N_g(x,y) = (-2x, -2y, 1),$$

en particular apunta hacia el interior del paraboloide. Así pues la orientación positiva del borde coincide con $g(\gamma)$, donde $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\gamma(t) = (cost, sent)$.

En general la orientación positiva del borde ∂S^+ es la imagen de la frontera del conjunto A recorrida en sentido positivo. Esta orientación se llama frecuentemente **orientación inducida**.

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^3$ y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable. Se define el **rotacional de F en un punto** $P \in U$ por

$$rotF(P) = (\frac{\partial F_3}{\partial y}(P) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(P), \frac{\partial F_1}{\partial z}(P) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(P), \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(P)).$$

Obsérvese que si U es un abierto sin agujeros, entonces F es conservativo si, y sólo si, $rotF = 0$.

Teorema 5.5.1. *(Teorema de Stokes)*
Sean S una superficie simple y $g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^2$ una parametrización que determina una orientación en S, U un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a S y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces

$$\int_{\partial S^+} F \boldsymbol{.} ds = \int_S rotF \boldsymbol{.} dS.$$

Si S no tiene frontera, como es el caso de la esfera, entonces la integral de la derecha es cero.

Con una técnica similar a la que hicimos en la lección 5,3 con el teorema de la divergencia, usando el teorema de Stokes podemos comprobar que

$$rotF(g(u,v)) \boldsymbol{.} N(g(u,v) = lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi\delta^2}\int_{\partial B_\delta^+} F \boldsymbol{.} ds.$$

Este resultado se puede interpretar afirmando que la componente normal de un campo vectorial ($rotF$) sobre una superficie orientada S es igual a la integral de línea de la componente tangencial de F sobre la frontera de F. Esto nos permite comprender el significado preciso de $rotF$ respecto del movimiento de un fluido en el que F es su campo de velocidades: La circulación $\int_{\partial B_\delta^+} F \boldsymbol{.} ds$ es la velocidad neta del fluido alrededor de ∂B_δ, de modo que $rotF \boldsymbol{.} N$ representa el efecto de giro o rotación del fluido alredor del eje N.

Ejemplo

Úsese el teorema de Stokes para evaluar la integral $\int_C -y^3dx + x^3dy - z^3dz$, donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, y la orientación en C corresponde a un movimiento en sentido contrario al de las agujas del reloj en el plano $z = 0$.

5.5.2. Teorema de la divergencia en el espacio

Sea U un conjunto abierto. Se dice que U es un **dominio** si es arcoconexo, esto es, si dados dos puntos cualesquiera P y Q, existe una curva γ, tal que $P, Q \in \gamma^* \subseteq U$. Diremos que un dominio acotado D es un **dominio regular** cuando su frontera sea una superficie localmente simple. Toda superficie que es frontera de un dominio acotado se dice que es una superficie **cerrada**. Diremos que la superficie está orientada positivamente si, a cada $Q \in S$ le asocia un vector normal que apunta hacia el exterior del dominio.

Recordemos que si U es un abierto de $\mathbb{R}^3$, $F = U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable y P un punto de U, se define la divergencia del campo F en el punto P como

$$divF(P) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(P) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(P).$$

Como ejemplo de dominios regulares D de $\mathbb{R}^3$, consideramos aquellos que sean de alguno de uno de los tres tipos siguientes;

Tipo I, esto,es, de la forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in A_1, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\}.$$

Tipo II esto es, de la forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, z) \in A_2, \phi_1(x, z) \leq y \leq \phi_2(x, y)\}.$$

Tipo III esto es, de la forma

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (y, z) \in A_3, \psi_1(y, z) \leq x \leq \psi_2(y, z)\}.$$

Donde A_1, A_2, A_3 son regiones y-simple, x-simple, y todas las funciones que aparecen son de clase $\mathcal{C}^1$. Por ejemplo, la bola unidad, B, es un dominio regular, basta observar que B no es otro que el conjunto

$$\{(x, y, z);\ x \in [0, 1], y \in [-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}], z \in [-\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \sqrt{1 - x^2 - y^2}]\}.$$

Los conjuntos del tipo $\{x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ (x, y \in A_1)\ z = \varphi_i(x, y)\}$ (análogamente con $y = \phi_i(x, z), x = \psi_i(y, z))$ reciben el nombre de caras. Estos ejemplos elementales de dominios regulares tienen como mínimo dos caras (por ejemplo en el conjunto B anterior, las caras son los dos hemisferios) y como máximo seis (por ejemplo el ortoedro)

El teorema de la divergencia para campos en $\mathbb{R}^3$ va a relacionar la integral de un campo F sobre un determinado tipo de superficie S con la integral triple de la divergencia de F sobre un dominio D determinado por S.

Teorema 5.5.2. *(Teorema de Gauss o la divergencia en el espacio)*

Sea D un dominio regular, S la frontera de dicho dominio regular, superfice orientada positivamente. Entonces, si U es un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contenga a D y a S y $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, se tiene

$$\int_S F \cdot dS = \int_D divF \ d(x, y, z).$$

Este teorema nos permite calcular el flujo de un campo a través de una superficie, **sin conocer una parametrización concreta**, ya que, según el teorema, calculando la integral triple, el resultado será siempre el flujo que atraviesa la superficie hacia el exterior.

Si F es un campo de velocidades de un fluido, la divergencia del campo F representa una medida del flujo del campo por unidad de volumen, en cada punto P de U.

Ejemplo

Considerése el campo vectorial $F(x, y, z) = (2x, y^2, z^2)$ y sea S la esfera unidad. Calcúlese $\int_S F \cdot dS$.

5.5.3. Identidades de operadores

Para finalizar el capítulo, vamos a recapitular algunos resultados en términos de algunos operadores.

Llamaremos **operador gradiente** a la aplicación $\nabla : f \longmapsto \nabla f$ para cada campo escalar f. Sus propiedades más elementales son:

1. $\nabla(f + g) = \nabla(f) + \nabla(g)$.
2. $\nabla(rf) = r\nabla(f)$ $(r \in \mathbb{R})$.
3. $\nabla(fg) = f\nabla(g) + g\nabla(f)$.
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla(f) - f\nabla(g))/g^2$, siempre que $g(x) \neq 0$.

Llamaremos **operador divergencia** a la aplicación $div : F \longmapsto divF$ para cada campo vectorial F. Sus propiedades más elementales son:

1. $divF = \nabla \cdot F$.
2. $div(F + G) = div(F) + div(G)$.
3. $div(fF) = fdiv(F) + \nabla f$.

4. $div(\nabla f \times \nabla g) = 0$.

Llamaremos **operador laplaciano** o de **Laplace** a la aplicación $\nabla^2 : f \longmapsto div(\nabla f)$ para cada campo escalar f. Sus propiedades más elementales son:

1. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + \nabla f \centerdot \nabla g$.
2. $div(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$.

Llamaremos **operador rotacional** a la aplicación $rot : F \longmapsto rotF$ para cada campo vectorial F. Sus propiedades más elementales son:

1. $rotF = \nabla \times F$.
2. $rot(F + G) = rot(F) + rot(G)$.
3. $div(F \times G) = G \centerdot rotF - F \centerdot rotG$.
4. $div\ rot(F) = 0$.
5. $rot(fF) = frot(F) + \nabla f \times F$.
6. $rot(\nabla f) = 0$.

Por otra parte, en términos de operadores, puede escribirse,

$$rotF = \nabla \times F,$$

y por tanto la tesis del teorema de Stokes, queda

$$\int_{\partial S^+} F \centerdot ds = \int_S \nabla \times F \centerdot dS.$$

5.5.4. Relación de ejercicios

1. Compruébese el teorema de Stokes en los siguientes casos:
   a) Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (xy, 2xz, 3yz)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z = 1,\ x, y, z \geq 0\}$.
   b) Sea $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (x^2y, 3x^3z, yz^2)$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1\}$.
2. Sea S el tronco del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ acotado por los planos $z = -1$ y $z = 1$ incluyendo las bases y sea $F(x, y, z) = xy\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. Calcúlese $\int_S F \centerdot dS$
3. Sea S la esfera unidad. Úsese el teorema de la divergencia para calcular

$$\int_S x^2 + y + z\ dS.$$

4. Calcúlese el flujo del campo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido por $F(x,y,z) = (0, e^{senxz} + tgz, y^2)$ a través del elipsoide superior $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6,\ z \geq 0$ con su normal dirigida hacia arriba.

5. Calcúlese el flujo del campo $F(x,y,z) = xy\mathbf{i} + (y^2 + e^{xz^2}\mathbf{j} + sen(xy)\mathbf{k}$ a través de la superficie frontera de la región acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0, y = 0, y + x = 2$.