

Métodos para la Física.
I. Introducción al Cálculo Tensorial

Antonio Hernández Cabrera
Pilar Aceituno Cantero
Departamento de Física Básica. Universidad de La Laguna

16 de febrero de 2009

Índice general

| | | |
|-----------|--|-----------|
| I | Tensoros | 9 |
| 1. | INTRODUCCIÓN | 11 |
| 2. | INDICES | 15 |
| 2.1. | Reglas para índices | 15 |
| 2.1.1. | Índices mudos | 15 |
| 2.1.2. | Índices libres o fijos | 15 |
| 2.1.3. | Contracción | 16 |
| 2.2. | Conexión entre índices y la notación matricial | 16 |
| 2.3. | Delta de Kronecker | 17 |
| 2.4. | Cambio de miembro en una igualdad. | 18 |
| 3. | ESPACIOS VECTORIALES | 21 |
| 3.1. | Definición | 21 |
| 3.2. | Subespacio vectorial | 21 |
| 3.3. | Relaciones entre subespacios. | 22 |
| 3.4. | Sistema libre. Base. | 22 |
| 3.5. | Variedad lineal $L=[\bar{x}_1 \dots \bar{x}_p]$ | 23 |
| 3.6. | Cambio de base. | 23 |
| 4. | APLICACIONES MULTILINEALES: ESPACIOS DUALES | 25 |
| 4.1. | Definición | 25 |
| 4.2. | Condición necesaria y suficiente para definir una aplicación p-lineal | 26 |
| 4.3. | Conjunto de las aplicaciones p-lineales. | 26 |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 4.4. | Cambio de base y de coordenadas contravariantes. | 29 |
| 4.5. | Espacios particulares del $\mathcal{L}[V_1^{n_1} \dots V_p^{n_p}; W^m]$ | 30 |
| 5. | PRODUCTO TENSORIAL DE ESPACIOS VECTORIALES | 35 |
| 5.1. | Definición. | 35 |
| 5.2. | Producto tensorial de los vectores $\bar{x}_1 \in V_1^{n_1}, \dots, \bar{x}_p \in V_p^{n_p}$. . . | 35 |
| 5.3. | Definición de tensor general | 36 |
| 5.4. | Cambio de bases | 36 |
| 5.5. | Relación entre tensores y funciones p -lineales | 37 |
| 6. | TENSORES HOMOGÉNEOS DEFINIDOS EN $V^n(K)$. | 39 |
| 6.1. | Potencia tensorial de un $V^n(K)$ | 39 |
| 6.2. | Potencia tensorial generalizada de orden r de un $V^n(K)$ | 39 |
| 6.3. | Tensor homogéneo T definido en $V^n(K)$ | 39 |
| 6.4. | Sistema de componentes definido en $V^n(K)$ | 40 |
| 6.5. | Criterios de tensorialidad. | 40 |
| 6.5.1. | Si verifican las relaciones tensoriales matricialmente. . . | 40 |
| 6.5.2. | Leyes del cociente | 41 |
| 7. | ÁLGEBRA TENSORIAL HOMOGÉNEA Y MODULAR | 45 |
| 7.1. | Suma y producto por escalar de tensores homogéneos. | 45 |
| 7.2. | Contracción y producto contraído de sistemas de componentes definidos en $V^n(K)$ | 45 |
| 7.3. | Tensores modulares o pseudotensores definidos en $V^n(K)$. . . | 46 |
| 8. | TENSORES SIMÉTRICOS Y HEMISIMÉTRICOS | 49 |
| 8.1. | Definición. | 49 |
| 9. | ALGEBRAS EXTERIORES DEFINIDAS EN $V^n(K)$ | 51 |
| 9.1. | Fórmulas de δ generalizadas y desarrollos de determinantes. . | 51 |
| 9.1.1. | 1) $t_{i_1 \dots i_p \dots i_r}$ es <u>hemisimétrico</u> en un grupo de índices . . | 51 |
| 9.1.2. | 2) $t_{i_1 \dots i_p \dots i_r}$ es <u>hemisimétrico</u> en un grupo de índices . . | 51 |
| 9.1.3. | 3) Desarrollo de un determinante | 51 |
| 9.2. | Producto exterior de p vectores $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p \in V^n$ | 52 |
| 9.2.1. | <u>Definición y naturaleza</u> | 52 |
| 9.2.2. | <u>Componentes de $\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p$</u> | 52 |
| 9.2.3. | <u>Hemisimetrías</u> | 52 |

| | | |
|------------|---|-----------|
| 9.2.4. | Álgebra exterior $V_n^{(p)}$ o $\Lambda_n^{(p)}$, de orden p , contravariante, homogénea, definida en $V^n(K)$ | 52 |
| 9.2.5. | <u>Caso $p = n$, $V_n^{(n)}$. Tensores hemisimétricos de orden n.</u> | 53 |
| 9.2.6. | <u>Cambio de base asociada y de componentes en $V_n^{(p)}$.</u> . . | 53 |
| 9.3. | Producto exterior de funciones lineales (vectores de V^{*n}) . . . | 54 |
| 9.3.1. | Definición: | 54 |
| 9.3.2. | Naturaleza: | 55 |
| 9.3.3. | Hemisimetrías: | 55 |
| 9.4. | Álgebra exterior homogénea, covariante, de orden p | 55 |
| 9.4.1. | Definición: | 55 |
| 9.4.2. | Base de $V_n^{*(p)}$ asociada a \bar{e}_i : | 55 |
| 9.4.3. | Caso $p = n$: | 55 |
| 9.4.4. | Cambio de base y componentes en $V_n^{*(p)}$: | 56 |
| 9.5. | Producto exterior de tensores. | 56 |
| 9.5.1. | Definición: | 56 |
| 9.6. | Sistema de componentes Δ_p y ε en $V^n(k)$ | 57 |
| 9.6.1. | Definición: | 57 |
| 10. | ESPACIOS PRE-EUCLÍDEOS Y EUCLÍDEOS | 59 |
| 10.1. | Definición de producto escalar. | 59 |
| 10.2. | Ortogonalidad. | 59 |
| 10.3. | Propiedades que no cumple el producto escalar. | 60 |
| 10.4. | Matriz de Gramm de un sistema de vectores. | 60 |
| 10.4.1. | Definición: | 60 |
| 10.4.2. | Propiedades: | 60 |
| 10.5. | Norma y módulo de un vector. | 61 |
| 10.6. | Sistemas equivalentes de vectores en $V^n(K)$ | 61 |
| 10.7. | Expresión analítica del producto escalar. | 61 |
| 10.8. | Condiciones de $G_{\bar{e}_i}$ | 61 |
| 10.9. | Cambio de base para $G_{\bar{e}_i}$ | 61 |
| 10.10. | Coordenadas covariantes en \mathcal{E}_n | 62 |
| 10.11. | Base recíproca. | 62 |
| 10.11.1. | Propiedad fundamental | 62 |
| 10.12. | Expresiones del producto escalar en \mathcal{E}_n | 63 |

| | | |
|------------|--|-----------|
| 10.13 | Cambio de base recíproca y de coordenadas covariantes en \mathcal{E}_n . | 63 |
| 10.14 | Producto vectorial, producto mixto. | 63 |
| 11. | DUALIDAD EN UN \mathcal{E}_n | 67 |
| 11.1. | Dualidad normal $\mathcal{E}_n^* \equiv \mathcal{E}_n$. | 67 |
| 11.2. | Dualidad generalizada en espacios vectoriales. | 67 |
| 11.3. | Tensores modulares. | 68 |
| 11.4. | Simetrías y hemisimetrías de un tensor preeuclídeo. | 68 |
| 11.5. | Tensores preeuclídeos de segundo orden particulares en E_n . | 69 |
| 11.5.1. | Tensor regular: | 69 |
| 11.5.2. | Tensor conjugado o traspuesto de un tensor T | 69 |
| 11.5.3. | Tensor recíproco o inverso T^R de un tensor $T \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$, regular. | 69 |
| 12. | ÁLGEBRA EXTERIOR EN ESPACIOS EUCLÍDEOS | 75 |
| 12.1. | Producto exterior de p vectores $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p \in \mathcal{E}_n$. | 75 |
| 12.2. | Álgebra exterior $V_n^{(p)}$ definida en \mathcal{E}_n . | 76 |
| 12.3. | Espacio vectorial orientado $V^n(K)$. | 76 |
| 12.4. | Tensores $g, \frac{1}{g}, +\sqrt{ g }, \frac{1}{+\sqrt{ g }}, \theta, \Delta p, \varepsilon$ definidos en un \mathcal{E}_n . | 76 |
| 12.4.1. | Naturalezas tensoriales: | 77 |
| 12.4.2. | Tensor adjunto $T_A = adj(T)$ de un tensor $T \in V_n^{(p)}$ en un \mathcal{E}_n . | 77 |
| 12.5. | Tensor adjunto del producto exterior $(\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p)_A$. | 78 |
| 12.6. | Producto vectorial y mixto en \mathcal{E}_n . | 79 |
| 12.6.1. | Producto vectorial: | 79 |
| 12.6.2. | Producto mixto: | 79 |
| 13. | Bibliografía: | 81 |

Cediendo a mi descrédito anhelante
La mesticia que tengo me defrauda,
Y aunque el favor lacónico me aplauda,
Preces indico al celestial turbante.
Ostento al móvil un mentido Atlante,
Húrtome al Lete en la corriente rauda,
Y al candor de mi sol, eclipse cauda,
Ajando voy mi vida naufragante.
Afecto aplauso de mi intenso agravio
En mi valor brillante, aunque tremendo,
Libando intercalar gémino labio.
¿Entiendes, Fabio, lo que voy diciendo?
—Y cómo si lo entiendo. —Mientes, Fabio;
Que soy yo quien lo digo y no lo entiendo.
(Rinconete y Cortadillo, de un tal Miguel de Cervantes Saavedra)

Parte I

Tensores

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Las estructuras matemáticas que desarrollan los físicos, siguiendo principios físicos, tienen una inquietante propiedad: la ubicuidad. Pueden trasladarse de un marco conceptual a otro, sirviendo a muchos propósitos diferentes. Un ejemplo claro es el de la geometría no euclídea. Durante milenios los matemáticos trataron de comprobar si los postulados de tal geometría eran independientes entre sí, con el fin de abandonar los que no lo fueran y encontrar una forma más estética y universal. Hasta el siglo XIX no se logró este objetivo. Cuando Carl Friedrich Gauss y colegas desarrollaron una geometría no euclídea para un espacio curvo nadie pensó que la nueva geometría fuera aplicable al mundo real. Más tarde, Georg Friedrich Bernhard Riemann extendió la teoría a los espacios curvos de cualquier dimensión, creando un modelo de gran belleza (y escasa utilidad en ese momento).

Pero no fué hasta el siglo XX cuando, casi de pasada y al empezar a desarrollar la relatividad general, Einstein se percató de que una forma de expresar su idea de la simetría que relaciona a distintos sistemas de referencia entre sí era ligar íntimamente la gravitación con la curvatura espacio-tiempo. Buscando alguna teoría matemática sobre espacios curvos dió con Grossman, quién le puso al corriente sobre los trabajos de Riemann. Las matemáticas estaban allí esperando a que Einstein hiciera uso de ellas, aunque ni Gauss, ni Riemann, ni el resto de los geómetras del siglo XIX sospecharan que su trabajo pudiera servir para algo útil, como son las teorías de la gravitación.

Aún más curioso es el caso de los principios de simetría, en particular de la simetría interna. Esta simetría impone un tipo de estructura de familias en la lista de posibles partículas elementales. El primer ejemplo conocido fué

el de los nucleones que constituyen los núcleos atómicos ordinarios: protón y neutrón. Estos tienen, más o menos, las mismas masas por lo que se supuso que las fuerzas nucleares fuertes deberían seguir alguna simetría sencilla. Las ecuaciones que determinan estas fuerzas deberían conservar su aspecto formal al intercambiarse un neutrón y un protón. Es decir, la fuerza repulsiva entre protón y protón debería ser análoga a la existente entre neutrón y neutrón, aunque no determinara la existente entre protón y neutrón. La sorpresa se produjo cuando, en 1936, se comprobó que esta fuerza era la misma para las tres opciones, lo que dio lugar a la idea de que la transformación protón-neutrón es continua, con partículas con probabilidades arbitrarias de ser protón o neutrón. También se encontró que los nucleones tenían enormes analogías con otras seis partículas, descubiertas posteriormente y conocidas como hiperiones, de masa similar e idéntico espín. Los Físicos, al buscar alguna herramienta útil entre la literatura matemática para describir esta fenomenología encontraron, con enorme sorpresa, que ya existían y estaban catalogados todos los grupos de simetría posibles en la teoría de grupos. Son grupos abstractos que no dependen en absoluto de lo que se transforma. Los grupos que actúan de forma continua son los llamados grupos de Lie, debido al matemático noruego Sophus Lie. Estos son los grupos que afectan a las rotaciones tridimensionales ordinarias y a la teoría electrodébil. En 1960, Gell-Mann y N'eeman descubrieron que uno de estos grupos, el $SU(3)$, era el adecuado para catalogar a las partículas elementales. Este grupo incluso permite predecir si alguna familia está incompleta y determinar sus características, antes de localizar a la oveja perdida, como así ha ocurrido.

Esta teoría de grupos había sido iniciada por Evariste Galois para demostrar que no existen soluciones generales de las ecuaciones algebraicas de quinto y sexto orden. Posteriormente fué continuada por Lie y catalogada por Élie Cartan. Ninguno de ellos llegó a sospechar siquiera la enorme utilidad que tendría en física. A esto es a lo que Eugene Wigner llamó 'la irrazonable efectividad de la matemática', en oposición a la 'razonable ineficacia de la pedagogía'. Da la sensación de que, los matemáticos, de forma inconsciente, anticiparan las necesidades de los físicos. Y esto se debe a la cerrilidad de Agustín-Louis Cauchy que impuso el método abstracto y riguroso entre los matemáticos, método que puede ser independiente de la experiencia y el sentido común, pero no de la estética.

Como estamos viendo, tres han sido las grandes aportaciones de la Física a la comprensión de nuestro mundo en el siglo XX: las Simetrías (Teoría de Grupos), la Relatividad General y la Mecánica Cuántica. Todas ellas fueron

aceptadas casi de inmediato en los círculos científicos por su belleza formal. Lo podemos incluso extender a la primera estructura matricial de la Mecánica Cuántica de Heisenberg que ni el mismo atinaba a explicar con claridad, debido a su interpretación de las matrices. Fué Schrödinger quién aclaró un poco la situación, llegando a resultados análogos pero a partir de una formulación física más clara. La Mecánica Cuántica Relativista, idea de P. Dirac, condujo a la Electrodinámica Cuántica y posteriormente, al ir apareciendo nuevos campos tanto en la teoría como en la experiencia, a la Cromodinámica y a la Teoría Standard, donde las simetrías juegan un papel esencial.

(Extraído de "*El sueño de una teoría final*", de S. Weinberg, ed. Crítica. Barcelona, 2003, y que me viene al pelo. He tratado de apañar un poco la abominable traducción original).

Estos apuntes tratarán de dar una idea de las matemáticas necesarias para poder desarrollar la Relatividad General y las simetrías precisas para la Teoría Standard. Para los dos primeros puntos señalados se supone que los alumnos tienen una base general de la Mecánica Cuántica. En principio, el alumno puede prescindir de los primeros capítulos y empezar por la Introducción a la Teoría de Campos. Pero si alguno está especialmente interesado por las matemáticas y carece de la fe necesaria, no está de más que ojee los capítulos iniciales. Los apuntes estarán distribuidos en tres bloques diferentes, cálculo tensorial, introducción a la teoría de campos, y grupos continuos.

Capítulo 2

INDICES

2.1. Reglas para índices

Vamos a empezar por establecer los 'codigos' o normas del lenguaje que vamos a utilizar a lo largo de la asignatura. No son difíciles de aprender y tienen una enorme utilidad para facilitar los desarrollos matemáticos. Dado que fue Einstein el que, por razones obvias, estructuró la geometría riemanniana para que la entendieran también los físicos, seguiremos la conocida como notación de Einstein. Esencialmente consta de dos tipos de índices:

2.1.1. Índices mudos

Son aquellos que aparecen repetidos en un monomio. Significan valores de 1 a n y sumas. Ejemplo:

$$a_i.^{\alpha} \cdot b_{\alpha} = a_i.^1 \cdot b_1 + \dots + a_i.^n \cdot b_n, \quad (2.1)$$

donde el índice α es mudo. Estos índices pueden cambiar su nombre de forma conjunta sin afectar a su significado. En general, no se pueden poner 3 índices iguales en un monomio.

2.1.2. Índices libres o fijos

Estos índices encierran varias expresiones diferentes al darles valores. Es el caso del índice i en (1). Si i toma N valores diferentes, (1) representa N expresiones diferentes. Si aparece un índice fijo en una expresión, tiene que

estar en todos los monomios y miembros de dicha expresión a igual altura. Más adelante analizaremos con detenimiento el por qué de las diferentes "alturas" o posiciones de los índices

2.1.3. Contracción

Esta operación consiste en pasar dos índices fijos a sumatorios. Por ejemplo, la contracción de los índices primero y tercero de una expresión se representa como

$$C_{13}[a_{ij} \cdot^k] = a_{\alpha j} \cdot^{\alpha} \quad (2.2)$$

El producto contraído de dos sistemas de componentes es una contracción en su producto respecto de un índice de cada factor. Ejemplo:

$$C_{25}[a^i_j \cdot b_k^{lm}] = a^i_{\alpha} \cdot b_k^{l\alpha}. \quad (2.3)$$

Es interesante comentar en este punto que, en ordenaciones o matrices cuadradas, la contracción coincide con la traza de la matriz.

2.2. Conexión entre índices y la notación matricial

Un producto contraído de dos sistemas de componentes se traduce en el producto de las matrices que representan a dicho sistema. Ejemplo:

$$a_{ji} = b_{i\alpha} \cdot c^{\alpha} \cdot_j \quad (2.4)$$

Para realizar esta operación elegimos al azar un índice. Tomemos, por ejemplo, el índice i como representativo de las filas de la matriz a_{ji} . Como dicho índice está en la posición de columna, hemos de trasponer la matriz A y tener en cuenta que columna por fila siempre multiplica a derechas:

$$A^T = B \cdot C \quad (2.5)$$

Si llamamos i a las columnas, fila por columna multiplica a izquierdas, es decir,

$$A = C^T \cdot B^T. \quad (2.6)$$

Como vemos, todas las operaciones supuestamente 'contra natura' siempre están relacionadas con la izquierda, lamentable error que parece tener su origen en las religiones semitas, ya que la parte izquierda representa al principio femenino. Pero eso es otro tema.

Pongamos algunos ejemplos algo más complicados.

Ejemplo 1.

$$\underline{a}^i_{\alpha} \cdot p^{j\beta} \cdot \underline{c}_{\beta}^{\alpha} = m^{j\beta} \cdot n^i_{\beta}; \quad (2.7)$$

aquí \underline{a} denota a los elementos inversos de una matriz. Elegimos el índice j como fila, con lo cual nos queda

$$PC^{-1}(A^{-1})^T = MN^T \quad (2.8)$$

Ejemplo 2.

$$a_i = b_{\alpha\beta} \cdot p^{\alpha} \cdot c^{\beta}_i \quad (2.9)$$

Si tomamos a como matriz fila $\| a_1 \dots a_n \| = \| a_i \|$, el único índice de a indicaría columna:

$$columna \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\} = \{a_i\} \quad (2.10)$$

En nuestro ejemplo, si hacemos i fila,

$$\{a_i\} = C^T B^T \cdot \{p^{\alpha}\} \quad (2.11)$$

Si hacemos i columna,

$$\| a_i \| = \| p^{\alpha} \| \cdot BC \quad (2.12)$$

2.3. Delta de Kronecker

Se define como

$$\delta(ij) = \delta_i^{\cdot j} = \delta^i_{\cdot j} = \begin{cases} 1 & si \ i = j \\ 0 & si \ i \neq j \end{cases} \Rightarrow (\delta_i^{\cdot j}) = I_m \quad (2.13)$$

Su forma de actuar puede expresarse a través de los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: $\underline{a}_\alpha^i a_j^\alpha = \delta_j^i$. Si i es fila $\Rightarrow AA^{-1} = I$

Ejemplo 2: $a_{\alpha i} \delta_j^\alpha = a_{ji}$. Si i es fila $\Rightarrow A^T I = A^T$

2.4. Cambio de miembro en una igualdad.

Sistema de dos componentes.

Caso I.- Cuando un índice es fijo y otro sumatorio se subraya el sistema de componentes, dado que hay que invertirlo, y se intercambian los índices. Además, si están a la misma altura inicialmente, se suben o bajan en bloque.

Ejemplo:

$$a_i \cdot^j b_k = c_i \cdot^j_k \Rightarrow b_k = c_i^j a_j^i \quad (2.14)$$

Caso II.- Cuando ambos índices son mudos en un sistema de componentes: No se puede pasar por sí sólo dicho sistema de componentes en una igualdad. Ejemplo:

$$a_i \cdot^j \cdot b_{j\alpha} \cdot c^{\beta i} = d_{\cdot\alpha}^\beta \Rightarrow C \cdot A \cdot B = D. \quad (2.15)$$

Para cambiar de miembro en la anterior igualdad a a , previamente hay que pasar $b \Rightarrow a_i \cdot^j \cdot c^{\beta i} = d_{\cdot\alpha}^\beta \cdot \underline{b}^{\alpha j}$. Ahora se puede pasar a mediante el proceso anterior.

Caso III.- Cuando los dos índices son fijos. Ejemplo: $a_i \cdot^j \cdot b_{jk} = c_{ki}$. Los dos índices de c son fijos, con lo que hay que auxiliarse con la δ de Kronecker para pasar este sistema de componentes al primer miembro de la igualdad. Es decir, $a_i \cdot^j \cdot b_{jk} \cdot \underline{c}^{i\alpha} = \delta_k^\alpha$.

Capítulo 3

ESPACIOS VECTORIALES

3.1. Definición

Un espacio vectorial $V(K)$, definido sobre K , es un conjunto de elementos $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, llamados vectores, que han de cumplir dos leyes de composición:

A) Ley de composición interna: $V \times V \rightarrow (+) \rightarrow V / \bar{x}, \bar{y} \rightarrow \bar{x} + \bar{y}$. Si se cumple esta ley, el espacio es abeliano.

B) Ley de composición externa: $K \times V \rightarrow (\cdot) \rightarrow V / \alpha, \bar{x} \rightarrow \alpha \cdot \bar{x}$. Esta ley tiene las siguientes propiedades:

a) Asociativa $\Rightarrow (\alpha\beta) \cdot \bar{x} = \alpha(\beta \cdot \bar{x})$

b) Tiene elemento neutro $\Rightarrow 1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$

c) Distributiva $\Rightarrow (\alpha + \beta) \cdot \bar{x} = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{x}$, $\alpha \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \cdot \bar{x} + \alpha \cdot \bar{y}$

Para las leyes anteriores se consideran conmutativos los elementos de K . El **producto neutro** se define de forma que si $\alpha \cdot \bar{x} = \bar{0} \iff \alpha = 0 \vee \bar{x} = 0$.

3.2. Subespacio vectorial

Es un subconjunto de un espacio vectorial que, a su vez, forma espacio vectorial. Un subconjunto S es subespacio si todas las operaciones con sus elementos son cerradas, es decir, si $\bar{x}, \bar{y} \in S \Rightarrow \alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y} \in S$.

3.3. Relaciones entre subespacios.

Se define como **suma de subespacios** a la operación:

$$S_1 + S_2 = \{\bar{x}/\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2\}, \quad (3.1)$$

con $\bar{x}_1 \in S_1$, $\bar{x}_2 \in S_2$. Y se define como **suma directa** de subespacios a:

$$\begin{aligned} S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_i \oplus \dots \oplus S_p &= S_1 + \dots + S_i + \dots + S_p \\ \Leftrightarrow S_i \cap (S_1 + \dots + S_p) &= \{\bar{0}\}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde en la última suma, entre paréntesis, no está incluido S_i .

Los **espacios suplementarios** son aquellos que sumados barren al espacio vectorial total. Los subespacios S_1 y S_2 son suplementarios si:

$$S_1, S_2 \left\{ \begin{array}{l} V = S_1 + S_2 \\ S_1 \cap S_2 = \{\bar{0}\} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Como consecuencia, en V^n , si S_1 y S_2 son suplementarios, las bases juntas de ambos configuran la base V^n .

Si S_1, S_2 son suplementarios $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall \bar{x} \in V \Rightarrow \exists \text{ alguna descomposición} \\ \bar{x} = \bar{x}_1 (\in S_1) + \bar{x}_2 (\in S_2) \end{array} \right]$.

En general, S_1, \dots, S_p son suplementarios si $V = S_1 \oplus \dots \oplus S_p$. Y, para cualquier V^n , S_1, \dots, S_p son suplementarios si sus bases juntas conforman la base de V^n . Además, para cualquier vector $\bar{x} \in V^n$ siempre existe la descomposición $\bar{x} = \bar{x}_1 (\in S_1) + \dots + \bar{x}_p (\in S_p)$.

3.4. Sistema libre. Base.

$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p$ es un sistema libre si $(\alpha^i \bar{x}_i = \bar{0} \Rightarrow \alpha^i = 0)$.

Base de V es el conjunto de vectores tales que

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) son generadores} \\ \text{a) son linealmente independientes} \end{array} \right.$

Dimensión de V: es el número de vectores de la base. Para subespacios se cumple que $\dim S_1 + \dim S_2 = \dim(S_1 + S_2) + \dim(S_1 \cap S_2)$.

3.5. Variedad lineal $L = [\overline{x}_1 \dots \overline{x}_p]$.

Definición: es el conjunto de generadores $[\overline{x}_1 \dots \overline{x}_p] = \{\overline{x} = \alpha^i \overline{x}_i\}$. Una propiedad inmediata es que una variedad lineal es subespacio vectorial, con $\dim [\overline{x}_1 \dots \overline{x}_p]$ igual al número de vectores linealmente independientes y al $\text{rango}(x_i^{\cdot j})$. Se pueden expresar mediante distintos tipos de ecuaciones. Sea $L = [\overline{x}_1 \dots \overline{x}_p]$, con los vectores linealmente independientes;

Ecuación vectorial:

$$\forall \overline{x} \in L \Rightarrow \overline{x} = \alpha^i \cdot \overline{x}_i = \alpha^i \cdot v_i^{\cdot j} \overline{e}_j, \quad (3.4)$$

siendo \overline{e}_j base de V .

Ecuación paramétrica:

$$x^j = \alpha^j \cdot v_i^{\cdot j}; \quad (3.5)$$

el número de parámetros v ha de coincidir con $\dim L$.

Ecuación en implícitas: se obtiene eliminando las constantes $\alpha^j \Rightarrow a^j_{\cdot i} \cdot x^i = 0$, con $i \in I_n$ y $j \in I_m$, con lo que $\dim L = n - \text{rango}(a^j_{\cdot i})$.

3.6. Cambio de base.

Sean \overline{e}_j y \overline{e}'_j dos bases de un espacio vectorial V^n . Ambas bases están relacionadas de tal forma que podemos pasar de una a otra mediante una matriz conocida como matriz cambio de base:

$$\begin{aligned} \overline{e}'_i &= a_i^{\cdot j} \overline{e}_j \Rightarrow \{\overline{e}'_i\} = A \{\overline{e}_j\} : \\ \overline{e}_i &= b_i^{\cdot j} \overline{e}'_j \Rightarrow \{\overline{e}_i\} = A^{-1} \{\overline{e}'_j\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

El efecto sobre los vectores es el siguiente:

$$\forall \overline{x} \in V^n \Rightarrow \overline{x} = \begin{cases} x^\alpha \overline{e}_\alpha \\ x'^i \overline{e}'_i = x'^i a_{i \cdot \alpha} \overline{e}_\alpha \end{cases} \quad (3.7)$$

Es decir, las componentes en ambas bases se relacionarán mediante:

$$\begin{aligned} x'^i &= b_\alpha^{\cdot i} x^\alpha \Rightarrow \{x'^i\} = (A^T)^{-1} \{x^\alpha\}; \\ x^p &= a_m^{\cdot p} x'^m \Rightarrow \{x^p\} = A^T \{x'^m\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Capítulo 4

APLICACIONES MULTILINEALES: ESPACIOS DUALES

4.1. Definición

Dados " p " espacios vectoriales $V_1^{n_1}(K), \dots, V_p^{n_p}(K)$ y el espacio $W^m(K)$, se llama aplicación p -lineal φ , definida en los anteriores espacios, a toda aplicación (es decir, todo elemento tiene imagen única) a:

$$V_1^{n_1}(K) \times \dots \times V_p^{n_p}(K) \xrightarrow{\varphi} W^m(K) / (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) \longrightarrow \varphi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) \quad (4.1)$$

con la condición de p -linealidad, es decir, φ es lineal para cada vector:

$$\varphi \left(\alpha_1^{i_1} \bar{x}_{i_1}, \dots, \alpha_p^{i_p} \bar{x}_{i_p} \right) = \alpha_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \alpha_p^{i_p} \varphi \left(\bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_p} \right). \quad (4.2)$$

Como ejemplo veamos la aplicación trilineal siguiente: $V_1^2 \times V_2^3 \times V_3^2 \xrightarrow{\varphi} W^3$, especificada por

$$\begin{aligned}
 & \varphi \left(\begin{matrix} 3\bar{x}_1 + 4\bar{x}_2, & \bar{x}_1 - 3\bar{x}_2, & \bar{x}_1 - 2\bar{x}_2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{matrix} \right) \\
 = & 3\varphi \left(\begin{matrix} \bar{x}_1, & \bar{x}_1, & \bar{x}_1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) - 6\varphi \left(\begin{matrix} \bar{x}_1, & \bar{x}_1, & \bar{x}_2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) - 9\varphi \left(\begin{matrix} \bar{x}_1, & \bar{x}_2, & \bar{x}_1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) \\
 & + 18\varphi \left(\begin{matrix} \bar{x}_1, & \bar{x}_2, & \bar{x}_2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) + 4\varphi \left(\begin{matrix} \bar{x}_2, & \bar{x}_1, & \bar{x}_1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) - 12\varphi \left(\begin{matrix} \bar{x}_2, & \bar{x}_2, & \bar{x}_1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) \\
 & - 8\varphi \left(\begin{matrix} \bar{x}_2, & \bar{x}_1, & \bar{x}_2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right) + 24\varphi \left(\begin{matrix} \bar{x}_2, & \bar{x}_2, & \bar{x}_2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right). \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Como consecuencia, en una aplicación p-lineal, $\varphi(\bar{x}_1, \dots, \bar{0}, \dots, \bar{x}_p) = \bar{0}$. La dimensión de $V_1^{n_1} \times \dots \times V_p^{n_p}$ es la suma de las dimensiones de cada espacio.

4.2. Condición necesaria y suficiente para definir una aplicación p-lineal

Sea $V_1^{n_1}(K) \times \dots \times V_p^{n_p}(K) \xrightarrow{\varphi} W^m(K)$. Para poder definir la aplicación se requiere conocer su actuación sobre las bases de los espacios:

$$\begin{aligned}
 (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) & \longrightarrow \varphi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) = \\
 \varphi \left(\begin{matrix} x_1^{i_1} \bar{e}_{i_1}, & \dots, & x_p^{i_p} \bar{e}_{i_p} \\ 1 & & p \end{matrix} \right) & = x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} \varphi \left(\begin{matrix} \bar{e}_{i_1}, & \dots, & \bar{e}_{i_p} \\ 1 & & p \end{matrix} \right), \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

donde las componentes x^{i_α} son conocidas, con lo que se necesitan saber los $n_1 \times \dots \times n_p$ grupos $\varphi \left(\begin{matrix} \bar{e}_{i_1}, & \dots, & \bar{e}_{i_p} \\ 1 & & p \end{matrix} \right) = \varphi_{i_1 \dots i_p}^j \bar{\beta}_j$, donde $\varphi_{i_1 \dots i_p}^j$ son $n_1 \times \dots \times n_p \times m$ escalares.

4.3. Conjunto de las aplicaciones p-lineales.

(Conjunto de aplicaciones p-lineales definidas en $V_1^{n_1}, \dots, V_p^{n_p}$ y $W^m : L[V_1^{n_1}, \dots, V_p^{n_p}; W^m]$).

1. $\mathcal{L} [V_1^{n_1}, \dots, V_p^{n_p}; W^m]$ es una forma espacio vectorial, subespacio de W^m , siendo este último el espacio vectorial de las aplicaciones de $V_1^{n_1} \times \dots \times V_p^{n_p}$ en $W^m(V_1^{n_1} \times \dots \times V_p^{n_p})$. Hemos utilizado la notación donde A^B es el conjunto de aplicaciones de B en A .

2. La base de $\mathcal{L} [V_1^{n_1}, \dots, V_p^{n_p}; W^m]$, asociada al grupo de bases $(\bar{e}_{i_1}), \dots, (\bar{e}_{i_p}); \bar{\beta}_j$, es el conjunto de aplicaciones p-lineales $E_{\dots j}^{i_1 \dots i_p}$, donde $i_1 \in I_{n_1}, \dots, i_p \in I_{n_p}$, y definidas como : $E_{\dots j}^{i_1 \dots i_p}(\bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_p}) = \delta_{\dots j_1}^{i_1} \dots \delta_{\dots j_1}^{i_1} \cdot \bar{\beta}_j$

Como consecuencia, $\forall \varphi \in \mathcal{L}$,

$$\begin{aligned} \varphi \left(\bar{e}_{j_1}, \bar{e}_{j_2}, \dots, \bar{e}_{j_p} \right) &= \varphi_{j_1 \dots j_p}^{\dots j} \bar{\beta}_j, \\ \varphi &= \varphi_{j_1 \dots j_p}^{\dots j} E_{\dots j}^{j_1 \dots j_p}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Problema 1.

Pasar a forma matricial:

- 1) $a_{\alpha i} \cdot b^\alpha = d^\beta \cdot \underline{c}^\alpha_{\beta} \cdot e_{i\alpha}$
- 2) $a^\alpha_{\alpha} = b_i \cdot c^j \cdot d_j^i$

Solución:

- 1) Se selecciona un índice fijo, y se toma como fila o como columna. El índice i es fijo. Si $i = \text{fila}$, entonces $A^T \{b^\alpha\} = EC^{-1} \{d^\beta\}$
Si $i = \text{columna}$, $\|b^\alpha\| A = \|d^\beta\| (C^{-1})^T E^T$
- 2) Como no hay índices fijos, se selecciona uno cualquiera. Si $j = \text{fila}$, $a^\alpha_{\alpha} = \|b_i\| D^T \{c^j\}$. Si $i = \text{fila}$, $a^\alpha_{\alpha} = \|c^j\| D \{b_i\}$. Si $i = \text{columna}$, $a^\alpha_{\alpha} = \|b_i\| D^T \{c^j\}$.

Problema 2.

Simplificar las expresiones:

- 1) $(m_{ij} + m_{ji})a^{ij}$, siendo a^{ij} simétrico
- 2) $(m_{ij} + m_{ji}) a^i \cdot a^j$
- 3) $(m_{ijk} + m_{jki} + m_{kij}) a^i \cdot a^j \cdot a^k$
- 4) $a_{ijk} \cdot b_m^{ji}$, con A simétrica en índices 1 y 2, y B simétrica en los índices 2 y 3.
- 5) $(\delta^i_{\cdot j} \cdot \delta^k_{\cdot l} + \delta^i_{\cdot l} \cdot \delta^k_{\cdot j}) a_{ik}$, siendo A simétrica.

Problema 3.

28CAPÍTULO 4. APLICACIONES MULTILINEALES: ESPACIOS DUALES

Para los índices pertenecientes a I_n , con $a_{ij} \cdot b^i = 0$, comprobar que, $\forall b^j$ y $\forall i, j \in I_n$, $a_{ij} = 0$.

Problema 4.

Comprobar que, si $\forall i, j, k \in I_n$, con $a_{ij}b^k = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0$.

Problema 5.

En un espacio $V^3(R)$, se da el vector $\bar{x} = \bar{e}'_1 + \bar{e}'_2 - \bar{e}'_3$ y el cambio de base dado por $\bar{e}_1 = \bar{e}'_1 - \bar{e}'_3$; $\bar{e}'_2 = \bar{e}_2$; $\bar{e}'_3 = \bar{e}'_1 + 2\bar{e}'_2$. Se dan también los espacios definidos por $S_1 = (\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3)$ y

$$S_2 \equiv \begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ x^1 - x^2 + 3x^3 = 0 \end{cases}$$

- 1) Calcular la dimensión, la base, las ecuaciones paramétricas e implícitas de S_1 , S_2 , $S_1 + S_2$ y $S_1 \cap S_2$ en la base \bar{e}_i .
- 2) Pasar \bar{x} a la base \bar{e}_i .
- 3) Ecuaciones implícitas de S_1 en la base \bar{e}'_i .
- 4) Buscar una base de un espacio suplementario de S_1 y otra de S_2 .

Solución:

- 1) $\dim S_1 = 1$, con la base definida en el enunciado. $\dim S_2 = 1$ con base $(4, -5, -3) \Rightarrow \bar{v} = 4\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$.

Sus ecuaciones son:

$$\text{paramétricas} \begin{cases} x^1 = 4\alpha \\ x^2 = -5\alpha \\ x^3 = -3\alpha \end{cases}.$$

Las **implícitas** son las dadas en el enunciado, o bien $\begin{cases} 2x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ 3x^1 + 4x^3 = 0 \end{cases}$.

Para $S_1 \cap S_2$ las ecuaciones en implícitas son $\begin{cases} x^1 + x^3 = 0 \\ 2x^1 + x^2 + x^3 = 0 \\ 3x^1 + 4x^3 = 0 \end{cases}$, con $S_1 \cap$

$S_2 = \{\bar{0}\}$. Por último, en forma **vectorial**, $S_1 + S_2 = [\bar{e}_2, \bar{e}_1 - \bar{e}_3, 4\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3] = V^3$.

- 2) $\bar{x} = x^i \bar{e}_i = x'^i \bar{e}'_i$. De donde,

$$x'^i = b_\alpha^i x^\alpha \Rightarrow i = \text{fila} \Rightarrow \{x'^i\} = (A^T)^{-1} \{x^\alpha\} \Rightarrow \{x^\alpha\} = A^T \{x'^i\}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\{x^\alpha\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3.$$

También se puede hacer por sustitución directa.

3) Implícitas de S_1 en la base \bar{e}'_i :

$$\{x^i\} = A^T \{x'^\alpha\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{Bmatrix}; \text{ como } x^1 + x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$-x'^1 + x'^2 + x'^3 = 0 \Rightarrow x'^1 = 0.$$

4) Para S_{1N} tanto $[\bar{e}_1]$ como $[\bar{e}_2]$ o $[\bar{e}_3]$ son suplementarios de S_1 . Para $S_{2N} = [\bar{e}_1, \bar{e}_2]$.

4.4. Cambio de base y de coordenadas contravariantes.

(Cambio de base y de coordenadas contravariantes en $L[V_1^{n_1}, \dots, V_p^{n_p}; W^m]$).

Sea $V_1, \dots, V_p; W \rightarrow \mathcal{L}[V_1^{n_1}, \dots, V_p^{n_p}; W^m]$ y las correspondientes bases $\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_2}; \bar{\beta}_j \rightarrow E^{i_1, \dots, i_p}_j$. Si cambiamos a las bases $\bar{e}'_{i_1}, \dots, \bar{e}'_{i_2}; \bar{\beta}'_j$ mediante las matrices $A_1, \dots, A_p; D$, ¿Cómo cambiará E^{i_1, \dots, i_p}_j E'^{i_1, \dots, i_p}_j ? Supongamos que $E'^{i_1, \dots, i_p}_j = \lambda^{i_1, \dots, i_p \beta} E^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_\beta$ (I).

Por definición sabemos que $E^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_\beta (\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_2}) = \delta^{\alpha_1}_{i_1} \dots \delta^{\alpha_p}_{i_p} \cdot \bar{\beta}_\beta$ (II).

Y que $E'^{i_1, \dots, i_p}_j (\bar{e}'_{j_1}, \dots, \bar{e}'_{j_2}) = \delta^{i_1}_{j_1} \dots \delta^{i_p}_{j_p} \cdot \bar{\beta}'_j$ (III). Como $\bar{e}'_{j_1} = a^{\beta_1}_{j_1} \bar{e}_{\beta_1}$,

sustituimos en las expresiones este tipo de cambio, obteniendo,

$$\lambda^{i_1, \dots, i_p \beta} \alpha_1, \dots, \alpha_p j \cdot a^{\beta_1}_{j_1} \dots a^{\beta_p}_{j_p} \delta^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots \delta^{\alpha_p}_{\beta_p} \bar{\beta}_\beta =$$

$$\delta^{i_1}_{j_1} \dots \delta^{i_p}_{j_p} \bar{\beta}'_j = \delta^{i_1}_{j_1} \dots \delta^{i_p}_{j_p} d_j^{\beta} \bar{\beta}_\beta. \text{ Despejando las } \lambda,$$

$$\lambda^{i_1, \dots, i_p \beta} \alpha_1, \dots, \alpha_p j = \delta^{i_1}_{j_1} \dots \delta^{i_p}_{j_p} d_j^{\beta} b_{\alpha_1}^{j_1} \dots b_{\alpha_p}^{j_p} \Rightarrow$$

$$E^{i_1, \dots, i_p}_j = b_{\alpha_1}^{j_1} \dots b_{\alpha_p}^{j_p} d_j^{\beta} E^{\alpha_1, \dots, \alpha_p}_\beta \quad (4.6)$$

El cambio de coordenadas contravariantes se realiza de la siguiente forma:
Sea una φ genérica de \mathcal{L} de tal forma que, en dos bases diferentes,

$$\begin{aligned}
\varphi = \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad {}^\beta E^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= \varphi'_{i_1 \dots i_p} \quad {}^j E^{i_1 \dots i_p} = \\
\varphi'_{i_1 \dots i_p} \quad {}^j b_{\alpha_1}^{i_1} \dots b_{\alpha_p}^{i_p} d_j^\beta E^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &\Rightarrow \\
\varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad {}^\beta &= \varphi'_{i_1 \dots i_p} \quad {}^j b_{\alpha_1}^{i_1} \dots b_{\alpha_p}^{i_p} \Rightarrow \\
\varphi'_{i_1 \dots i_p} \quad {}^j &= a_{i_1}^{\alpha_1} \dots a_{i_p}^{\alpha_p} \underline{d}_j^\beta \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad {}^\beta. \quad (4.7)
\end{aligned}$$

Es común denominar en las componentes a los subíndices como covariantes y a los superíndices como contravariantes. El origen de tal denominación está en las invariancias bajo transformaciones de Lorentz (véase Grupo de Lorentz: Relatividad).

4.5. Espacios particulares del $\mathcal{L}[V_1^{n_1} \dots V_p^{n_p}; W^m]$

1. $\mathcal{L}[V_1^{n_1} \dots V_p^{n_p}; K]$. Como base del cuerpo K se usa el 1, por costumbre, aunque serviría cualquier otro número real. La base asociada sería $E^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ donde no existe variación del subíndice final, por lo que se suprime en la notación. $\forall f \in \mathcal{L} \Rightarrow f = f_{i_1 \dots i_p} E^{i_1 \dots i_p} = f(\bar{e}_{i_1} \dots \bar{e}_{i_p})$

2. $\mathcal{L}[V^n(K); K] \equiv V^{*n} = \text{Espacio Dual de } V^n$. Es el espacio de las funciones (aplicaciones lineales) de $V^n(K)$. La base asociada a \bar{e}_i de $V^n(K)$ es $E^i \equiv \bar{e}^{*i}$, de tal forma que $\forall f \in V^{*n} \Rightarrow f = f_i \bar{e}^{*i} = f(\bar{e}_i)$.

El cambio de base dual y de coordenadas sería:

$$\begin{aligned}
e'^{*i} &= b_\alpha^i \bar{e}^{*\alpha} \\
f'_i &= a_i^\alpha f_\alpha \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Problema 6.

Dados los espacios vectoriales $V_1^2(R)$, $V_2^3(R)$, $V_3^2(R)$ y $W^2(R)$, de bases respectivas $(\bar{e}_{i_1}), (\bar{e}_{i_2}), (\bar{e}_{i_3}), (\bar{\beta}_j)$. Se define una aplicación trilineal $\varphi : V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow W$ / $\varphi(\bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, \bar{e}_{i_3}) = \varphi_{ijk} \quad {}^l \bar{\beta}_l$, siendo:

$$\varphi_{ijk} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \text{con} \begin{cases} i = \text{fila} \\ j = \text{columna} \\ k = \text{fila matricial} \\ l = \text{columna matricial} \end{cases}$$

- 1) Hallar $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, siendo $\bar{x} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$, $\bar{y} = \bar{e}_2$, $\bar{z} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$
- 2) Expresar φ en base de $\mathcal{L}[V_1, V_2, V_3; W]$, asociada a las bases dadas.

Problema 7.

Dado el espacio $L[V^2, V^2, V^2; R]$ y el cambio de bases en $V^2(R)$

$\{\bar{e}'_i\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \{\bar{e}_\alpha\}$, se define $f \in \mathcal{L} / f(\bar{e}_i, \bar{e}_j, \bar{e}_k) = f_{ijk} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, función trilineal.

- 1) Hallar $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, siendo $\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{Bmatrix}$.
- 2) Expresar f en base de \mathcal{L} asociada a \bar{e}_i .
- 3) Expresar f en base de \mathcal{L} asociada a \bar{e}'_i .
- 4) Hallar $f(\bar{e}'_2, \bar{e}'_1, \bar{e}'_1 - \bar{e}'_2)$.

Problema 8.

Se da $V^3(R)$ con base \bar{e}_i . Se define una función bilineal f en V^3 por

$$f(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } i \text{ fila y } j \text{ columna.}$$

Se da el cambio de base $\{\bar{e}'_i\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Hallar $f(\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2)$.
- 2) Hallar $f(\bar{e}'_2, 2\bar{e}'_1 - \bar{e}'_2)$.
- 3) Buscar la matriz de cambio de base en $\mathcal{L}_2[V^3; R]$ de la base asociada a \bar{e}_i a la base asociada a \bar{e}'_i .
- 4) Expresar f en las dos bases de \mathcal{L}_2
- 5) Estudiar si $\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in V^3 \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x})$.

Problema 9.

32CAPÍTULO 4. APLICACIONES MULTILINEALES: ESPACIOS DUALES

Dado $V^3(R)$ con base \bar{e}_i . Se define $f : V^n \rightarrow K$, función lineal / $f(\bar{e}_i) = f_i$,
 $f(\bar{e}_1) = 5$
 con $f(\bar{e}_2) = 0$
 $f(\bar{e}_3) = -1$

Se da el cambio de base $\{\bar{e}'_i\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \{\bar{e}_\alpha\}$.

- 1) Calcular $f(\bar{e}_1 + 2\bar{e}_3)$ en las dos bases.
- 2) Calcular $f = f_i \bar{e}^{*i}$ en las dos bases.
- 3) Calcular $\bar{e}^*(\bar{e}'_j)$ en forma matricial.

Problema 10.

Dados $V^3(R)$ y $(f^1, f^2, f^3) \in V^{*3}$, con $f^1(\bar{x}) = x^1 - x^2$, $f^2(\bar{x}) = x^2 - x^3$, $f^3(\bar{x}) = x^1 + x^3$. Se da el cambio de base $\{\bar{e}'_i\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{\bar{e}_\alpha\}$.

- 1) Buscar la base $\bar{e}''_i \in V^3$ de la cual la (f^1, f^2, f^3) es la dual en función de \bar{e}_i .
- 2) Lo mismo en función de \bar{e}'_i .
- 3) Calcular $f^2(\bar{e}'_1 - 2\bar{e}'_3)$.

Problema 11.

Sea f , función lineal tal que $f \in \mathcal{L}_p[V^n, \dots, V^n; R]$, con $f : V^n \times \dots \times V^n \rightarrow R / (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) \rightarrow f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$. Buscar la condición necesaria y suficiente para que

f hemisimétrica $\Leftrightarrow f$ alternada.

Problema 12.

Sean $U(K)$, $V(K)$ espacios vectoriales de dimensión finita y $(\bar{u}_1^*, \dots, \bar{u}_p^*)$, $(\bar{v}_1^*, \dots, \bar{v}_p^*)$ dos familias de vectores de U^* , V^* .

- 1) Demostrar que la aplicación $T : U \times V \rightarrow K / \forall (\bar{u}, \bar{v}) \in U \times V \Rightarrow T(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}_i^* \bar{u})(\bar{v}_i^* \bar{v})$; con $i \in I_p$, es una aplicación bilineal.
- 2) Demostrar que para toda aplicación bilineal $f : U \times V \rightarrow K$ existen dos familias $(\bar{u}_i^*, \bar{v}_i^*) / f(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}_i^* \bar{u})(\bar{v}_i^* \bar{v})$.

3) Sean $U^3(R)$ y $V^4(R)$, de bases \bar{e}_i y \bar{E}_j . Se considera una función bilineal

$$f : U \times V \rightarrow R \quad f(\bar{e}_i, \bar{E}_j) = t_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar las familias $(\bar{U}_1^* \dots \bar{U}_p^*)$, $(\bar{V}_1^* \dots \bar{V}_p^*)$, del apartado anterior.

Capítulo 5

PRODUCTO TENSORIAL DE ESPACIOS VECTORIALES

5.1. Definición.

Se llama producto tensorial de los espacios vectoriales $V_1^{n_1}(K), \dots, V_p^{n_p}(K)$ de bases $(\bar{e}_{i_1}), \dots, (\bar{e}_{i_p})$ a un nuevo espacio vectorial que se representa por

$V_1^{n_1} \otimes \dots \otimes V_p^{n_p}$, tal que:

a) Una base de $V_1^{n_1} \otimes \dots \otimes V_p^{n_p}$ es el conjunto de grupos representado por $\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}$, que se llama base de $V_1^{n_1} \otimes \dots \otimes V_p^{n_p}$ asociada a las bases $(\bar{e}_{i_1}), \dots, (\bar{e}_{i_p})$.

b) Se define una aplicación p -lineal φ de $V_1^{n_1} \times \dots \times V_p^{n_p}$ en $V_1^{n_1} \otimes \dots \otimes V_p^{n_p}$ por $\varphi(\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_p}) = \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}$ (APLICACIÓN UNIVERSAL).

5.2. Producto tensorial de los vectores $\bar{x}_1 \in V_1^{n_1}, \dots, \bar{x}_p \in V_p^{n_p}$

Es el vector de $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$ que se representa por $\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_p$, y se define por $\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_p = \varphi(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) = (\text{por ser } \varphi \text{ p-lineal}) = x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} \cdot (\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p})$.

5.3. Definición de tensor general

Definido en V_1, \dots, V_p , es todo vector T del espacio vectorial $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$
Ej.: $\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_p$ define a un tensor tal que,

$$\forall T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_p, \quad T = \begin{cases} t^{i_1 \dots i_p} (\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) \\ t'^{i_1 \dots i_p} (\bar{e}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}'_{i_p}) \end{cases} \quad \text{siendo } t^{i_1 \dots i_p} \text{ las compo-}$$

nentes de T (son las $\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_p$)

$$t^{i_1 \dots i_p} (\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) = \bar{x}_1^{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{x}_p^{i_p}$$

El orden p del tensor es el número de componentes de T en un determinado grupo de bases = $\dim(V_1^{n_1} \otimes \dots \otimes V_p^{n_p}) = n_1 \times \dots \times n_p$

5.4. Cambio de bases

De forma esquemática podemos representar el cambio de base como

Espacios: $V_1^{n_1}, \dots, V_p^{n_p} \longrightarrow V_1^{n_1} \otimes \dots \otimes V_p^{n_p}$

Bases: $\bar{e}_{i_1}, \dots, \bar{e}_{i_p} \longrightarrow \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}$

Matriz: $\downarrow A_1$

$$\bar{e}'_{i_1} \dots \bar{e}'_{i_p} \longrightarrow \bar{e}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}'_{i_p}$$

$$\bar{e}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}'_{i_p} = a_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, a_{i_p}^{\alpha_p} (\bar{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{\alpha_p})$$

$\forall T \in V_1 \otimes \dots \otimes V_p =$

$$T = \begin{cases} t^{\alpha_1 \dots \alpha_p} (\bar{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{\alpha_p}) \\ t'^{i_1 \dots i_p} (\bar{e}'_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}'_{i_p}) = t'^{i_1 \dots i_p} a_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, a_{i_p}^{\alpha_p} (\bar{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{\alpha_p}) \end{cases}$$

\implies

$$\boxed{t'^{i_1 \dots i_p} = b_{\alpha_1}^{i_1}, \dots, b_{\alpha_p}^{i_p} t^{\alpha_1 \dots \alpha_p}}, \quad (5.1)$$

que son las expresiones conocidas como RELACIONES TENSORIALES.

Problema13.

$$\text{en } V_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Componentes de $U = (\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2) \otimes (\bar{e}_1) \otimes (\bar{e}_1 - \bar{e}_2)$

Dados $V_1^{n_1}, \dots, V_r^{n_r}$, estudiar si $V_1^{n_1} \otimes \dots \otimes V_r^{n_r} \equiv \mathcal{L}_r[V_1^{*n_1}, \dots, V_r^{*n_r}; K] = (\mathcal{L}_r[V_1^{n_1}, \dots, V_r^{n_r}; K])^* = \mathcal{L}_r[V_1^{n_1}, \dots, V_r^{n_r}; K]$.

1. Dado $T \in V^1(K) \otimes W^m(K)$, con $T = \bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2$ descomponible $\Rightarrow rang(t^{ij}) \leq$

Dados $\bar{x} \in V^n(K)$, $\bar{y} \in W^m(K)$, hallar la condición necesaria y suficiente para que $\bar{x} \otimes \bar{y} = \bar{y} \otimes \bar{x}$.

Capítulo 6

TENSORES HOMOGÉNEOS DEFINIDOS EN $V^n(K)$.

CRITERIOS DE TENSORIALIDAD

6.1. Potencia tensorial de un $V^n(K)$.

Es el espacio vectorial $\overbrace{V^n \otimes \dots \otimes V^n}^p = (\otimes V^n)^p$. La base de $(\otimes V^n)^p$ asociada a \bar{e}_i es $\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}$.

6.2. Potencia tensorial generalizada de orden r de un $V^n(K)$.

Es el espacio vectorial $(\otimes V^n)^{p_1} \otimes (\otimes V^{*n})^{q_1} \otimes \dots \otimes (\otimes V^n)^{p_r} \otimes (\otimes V^{*n})^{q_r}$

6.3. Tensor homogéneo T definido en $V^n(K)$.

Es todo vector de la anterior potencia tensorial generalizada. El orden de T , o de la potencia tensorial, es $r = p_1 + q_1 + \dots + p_r + q_r$. La **especie** o **varianza** de T viene dado por el número de **contravarianzas** $p = p_1 + \dots + p_r$ y el número de **covarianzas** $q = q_1 + \dots + q_r$.

Las componentes de T en \bar{e}_i son las coordenadas de T en la base asociada. Como ejemplo tengamos a $V^n \otimes V^n \otimes V^{*n}$ que tiene por base $\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}^{*k}$. Se puede expresar el tensor en cualquier otra base, ya que,

$$T = \left\{ \begin{array}{l} t^{\alpha\beta}_{\gamma}(\bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta \otimes \bar{e}^{*\gamma}) \\ t'^{ij}_k(\bar{e}'_i \otimes \bar{e}'_j \otimes \bar{e}'^{*k}) = t'^{ij}_k a_i^\alpha a_j^\beta b_\gamma^k(\bar{e}_\alpha \otimes \bar{e}_\beta \otimes \bar{e}^{*\gamma}) \end{array} \Rightarrow \right.$$

$$t^{\alpha\beta}_{\gamma} = t'^{ij}_k a_i^\alpha a_j^\beta b_\gamma^k \Rightarrow t'^{ij}_k = b_\alpha^i b_\beta^j a_\gamma^k t^{\alpha\beta}_{\gamma} \quad (6.1)$$

El número de relaciones, en un caso general, es n^r , que coincide con el número de componentes de una base y con la dimensión de la potencia tensorial.

6.4. Sistema de componentes definido en $V^n(K)$.

Es un conjunto de sistemas de componentes de igual orden, definido en K , asociados uno y sólo uno a cada base de V^n . Un sistema de componentes definido en $V^n(K)$ tiene naturaleza tensorial homogénea si pueden ser las componentes, en cada base, de un T homogéneo; o sea, si verifican las relaciones de cambio de base.

6.5. Criterios de tensorialidad.

(Criterios de tensorialidad para sistemas de componentes definidos en $V^n(K)$).

Son los métodos para comprobar si el sistema de componentes tiene naturaleza tensorial. Existen varios métodos:

6.5.1. Si verifican las relaciones tensoriales matricialmente.

Ejemplo:

$$\text{Sea } T \in V^n(K). \Rightarrow t^i = b_\alpha^i t^\alpha \Rightarrow \{t^i\} = (A^T)^{-1} \{t^\alpha\}$$

$$t'_i = a_i^\alpha t_\alpha \Rightarrow \{t'_i\} = A \{t_\alpha\}.$$

$$\text{Sea } T \in V^{*n} \otimes V^{*n} \Rightarrow t'_{ij} = a_i^\alpha a_j^\beta t_{\alpha\beta} \Rightarrow (t'_{ij}) = A(t_{\alpha\beta}) A^T.$$

Sea $T \in V^n \otimes V^n \Rightarrow t'^{ij} = b_\alpha^i b_\beta^j t^\alpha t^\beta \Rightarrow (t'^{ij}) = (A^T)^{-1}(t^{\alpha\beta})A^{-1}$.

Sea $T \in V^{*n} \otimes V^n \Rightarrow (t'_i{}^j) = A(t_\alpha{}^\beta)A^{-1}$.

Sea $T \in V^n \otimes V^{*n} \Rightarrow (t'^i{}_j) = (A^T)^{-1}(t^\beta{}_\alpha)A^T$.

El sistema de componentes Δ , correspondiente a $\delta(ij)$, es la matriz identidad I en cualquier especie.

6.5.2. Leyes del cociente

1ª ley del cociente:

Si el producto algo-contráido de un sistema de componentes $T \in V^n(K)$ por un tensor arbitrario U da otro tensor $V \Rightarrow T$ tiene naturaleza tensorial.

Ejemplo:

Sea $T \begin{cases} \text{en } \bar{e}_i \text{ componentes } t(ijk) \\ \text{en } \bar{e}'_i \text{ componentes } t'(ijk) \end{cases}; U \begin{cases} u_i{}^j \text{ en } \bar{e}_i \\ u'_i{}^j \text{ en } \bar{e}'_i \end{cases}$ tensor arbitrario; $V \begin{cases} v_i{}^{jk} \text{ en } \bar{e}_i \\ v'_i{}^{jk} \text{ en } \bar{e}'_i \end{cases}$

tensor resultante del producto contraído. Si se verifica en una \bar{e}_i genérica que $t(\alpha\beta\gamma) \cdot u_\alpha{}^\lambda = v_\beta{}^\gamma{}^\lambda$ y que $t'(ijk) \cdot u'_i{}^l = v'_j{}^{kl}$, entonces T tiene naturaleza tensorial homogénea, de tercer orden, contra-cova-contravariante. Se demuestra haciendo el cambio de base, ya que $t'(ijk) = b_\alpha^i a_j{}^\beta b_\gamma^k t(\alpha\beta\gamma)$.

2ª ley del cociente:

Si el producto sin contraer de un sistema de componentes $T \in V^n(K)$ por un tensor U , no nulo, da otro tensor $V \Rightarrow T$ tiene naturaleza tensorial, dados su orden y especie por las reglas de índices.

Ejemplo:

$t(\alpha\beta) \cdot u^\gamma = v_\beta{}^\gamma$, T tiene naturaleza tensorial homogénea, de segundo orden, contra-covariante. Se demuestra cambiando de base, ya que $t'(ij) = b_\alpha^i a_j{}^\beta t(\alpha\beta)$.

3ª ley del cociente:

Si el producto contraído en un índice de un sistema de componentes $T \in V^n(K)$ por un tensor U de segundo orden, regular (sus matrices son regulares), da un tensor $V \Rightarrow T$ tiene naturaleza tensorial, dados su orden y especie por las reglas de índices.

4ª ley del cociente:

Si el producto totalmente contraído de un sistema de componentes $T \in V^n(K)$ por un producto tensorial de vectores y funciones lineales arbitrarios da un tensor homogéneo de orden cero (escalar intrínseco) $\Rightarrow T$ tiene naturaleza tensorial, dados su orden y especie por las reglas de índices. Tengamos pues, en una base \bar{e}_i genérica, el producto $t(\alpha\beta\gamma) x^\alpha f_\beta y^\gamma = k$. En otra base \bar{e}'_i , $t'(ijk) x'^i f'_j y'^k = k$ (para escalares intrínsecos $k' = k$). Esto nos indica la naturaleza homogénea de T , de tercer orden. Mediante el cambio de base pueden saberse las especies del tensor:

$$\begin{aligned} t'(ijk) b_\alpha^i x^\alpha a_j^\beta f_\beta b_\gamma^k y^\gamma &= t(\alpha\beta\gamma) x^\alpha f_\beta y^\gamma \\ \underbrace{\left[t'(ijk) b_\alpha^i a_j^\beta b_\gamma^k - t(\alpha\beta\gamma) \right]}_{\Downarrow C(\alpha\beta\gamma)} \underbrace{x^\alpha f_\beta y^\gamma}_{\Downarrow \text{hay que quitarlos por partes}} &= 0, \quad \forall x^\alpha, f_\beta, y^\gamma \\ \Rightarrow t'(ijk) &= a_i^\alpha b_\beta^j a_k^\gamma t(\alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

Un ejemplo de la aplicación de las leyes del cociente sería en $V^n(K)$, el sistema de componentes definido por $\Delta \begin{cases} \bar{e}_i \rightarrow \delta(ij) \\ \bar{e}'_i \rightarrow \delta(ij) \end{cases}$. Sea \bar{x} un vector cualquiera de V^n de tal forma que, en \bar{e}_i , $\delta(ij) \cdot x^j = x^i$ y en \bar{e}'_i , $\delta(ij) \cdot x'^j = x'^i$. Como \bar{x} es arbitrario, se usa la primera ley del cociente con lo que Δ tiene naturaleza homogénea contra-covariante. Si $\delta(ij) \cdot x^i = x^j$, Δ tiene naturaleza homogénea cova-contravariante.

Problema 17

Dado $V^2(R)$, y el cambio de base $\{e'_i\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \{\bar{e}_\alpha\}$. Sean T, U tensores homogéneos definidos en V^2 , de componentes, orden y especie dados por, en \bar{e}_i : $t_i^{jk} = \delta_i^k \cdot \delta_l^j$ y en \bar{e}'_i : $u'_{ij} = \delta_i^j$,

- 1) Componentes de U en \bar{e}_i
- 2) Componentes de T en \bar{e}_i y \bar{e}'_i , matricialmente.
- 3) Componentes de $C_{12}[T]$ en \bar{e}_i y \bar{e}'_i , matricialmente. Naturaleza tensorial.
- 4) Componentes de $C_{23}[T]$ en \bar{e}_i y \bar{e}'_i , matricialmente. Naturaleza tensorial.
- 5) Componentes de $C[U]$ en \bar{e}_i y \bar{e}'_i , matricialmente. Naturaleza tensorial.
- 6) Componentes de $C_{14}[U \otimes T]$
- 7) Componentes de $C_{13}[U \otimes T]$

Capítulo 7

ÁLGEBRA TENSORIAL HOMOGÉNEA Y MODULAR

7.1. Suma y producto por escalar de tensores homogéneos.

Son las operaciones del Espacio Vectorial potencia tensorial de donde proceden vectores.

7.2. Contracción y producto contraído de sistemas de componentes definidos en $V^n(K)$.

Dado un sistema de componentes $T \in V^n$ de componentes en dos bases diferentes $\begin{cases} \bar{e}_i : t(ijk) \\ \bar{e}'_i : t'(ijk) \end{cases} \Rightarrow C_{13} [T] = \begin{cases} \bar{e}_i : t(\alpha j \alpha) \\ \bar{e}'_i : t'(\alpha j \alpha) \end{cases}$. Si T son componentes de un tensor homogéneo entonces, "si se contraen índices de distinta especie $\Rightarrow C_{ij} [T]$ tiene naturaleza tensorial". Pero si se contraen índices de igual especie, en general el resultado de la contracción no es tensorial.

Ejemplo:

Tengamos el tensor $T \in V^{*n} \otimes V^{*n} \otimes V^n$ de componentes en dos bases diferentes $\left\{ \begin{matrix} \bar{e}_i : t_{ij}^k \\ \bar{e}'_i : t'_{ij}^k \end{matrix} \right\} \Rightarrow C_{13}[T] = \left\{ \begin{matrix} \bar{e}_i : t_{\alpha j}^\alpha \\ \bar{e}'_i : t'_{\alpha j}^\alpha \end{matrix} \right\}$. Como $t'_{ij}^k = a_i^\alpha a_j^\beta b_\gamma^k t_{\alpha\beta}^\gamma$, entonces, $t'_{ij}^i = a_i^\alpha a_j^\beta b_\gamma^i t_{\alpha\beta}^\gamma = (a_i^\alpha b_\gamma^i = \delta_\gamma^\alpha) = a_j^\beta t_{\alpha\beta}^\alpha$, donde hemos sumado n^2 componentes. Como se puede apreciar, el resultado de la contracción consiste en reducir en dos el orden del tensor contraído.

Producto contraído de dos tensores homogéneos es una contracción en su producto tensorial. Se realiza respecto de un índice de cada factor.

Aplicación de un tensor homogéneo a un vector. Es su producto contraído en índices contiguos y de distinta especie. Veámoslo con un ejemplo. Sean $T \in V^{*n} \otimes V^n$ y $\bar{x} \in V^n$. La aplicación como postfactor es $\bar{x} \cdot T = x^i \cdot t_i^j \bar{e}_j$. Si $T \in V^{*n} \otimes V^{*n}$, las aplicaciones $\left\{ \begin{matrix} T \cdot \bar{x} = t_{ij} x^j \bar{e}^{*i} \\ \bar{x} \cdot T = x^i \cdot t_{ij} \bar{e}^{*j} \end{matrix} \right.$ serán iguales en simetría.

7.3. Tensores modulares o pseudotensores definidos en $V^n(K)$

Un tensor T modular de peso $\omega \in K$ es un sistema de componentes definido en V^n que verifica las relaciones tensoriales modulares. Veámoslo con el siguiente ejemplo: Sea T tensor modular, de tercer orden, peso ω , contra-cova-contr, de componentes en dos bases diferentes:

$T \left\{ \begin{matrix} \bar{e}_i : t_i^j{}^k \\ \bar{e}'_i : t'_{ij}{}^k \end{matrix} \right.$. Si al hacer el cambio de bases obtenemos que

$$t'_{ij}{}^k = |A|^\omega \bar{b}_i^\alpha a_\beta^j \bar{b}_k^\gamma t_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (7.1)$$

T es modular de peso ω . Este tipo de tensor es corriente en Electrodinámica y en Relatividad. Si $\omega = 0$ el tensor es **homogéneo**. El álgebra para tensores modulares es idéntica a la de los homogéneos. El conjunto de los tensores modulares de orden, especie y peso cero forman un espacio vectorial. Es interesante anotar los siguientes puntos:

1. En caso de que $\omega \neq 0$, los tensores T modulares no se pueden poner en base de la correspondiente potencia tensorial. Es decir, $T \neq t^i{}_j(\bar{e}_i \otimes \bar{e}^{*j})$.
2. Las contracciones funcionan igual que en los tensores homogéneos, pero conservando el peso.

7.3. TENSORES MODULARES O PSEUDOTENSORES DEFINIDOS EN $V^N(K)$ 47

3. Los productos de tensores tienen por peso la suma de los pesos de cada tensor.
4. Siguen valiendo todas las leyes del cociente, pero teniendo en cuenta el párrafo anterior para los pesos.

Problema 18.

Sea un $V^2(R)$, donde se define el tensor T , de cuarto orden, cova-cova-contravariante, de componentes en \bar{e}_i :

$$t_{ij}{}^{kl} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \text{ Se da el cambio de base } \begin{cases} \bar{e}_1 = \bar{e}'_1 + \bar{e}'_2 \\ \bar{e}_2 = \bar{e}'_1 \end{cases}.$$

- 1) Buscar las simetrías y hemisimetrías de T .
- 2) Descomponer T en productos del máximo número de tensores sin contraer, de forma que, en \bar{e}_i , los dos primeros tengan por primera componente el 2, siendo el primer tensor homogéneo y el último modular, con peso 1. Expresarlos en las dos bases.
- 3) Calcular todos los tensores de segundo orden contraídos de T en \bar{e}_i .
- 4) Calcular todos los tensores doblemente contraídos de T en las dos bases.
- 5) Componentes de T en \bar{e}'_i .
- 6) Naturaleza tensorial del sistema de componentes t_{ij} ¹².

Problema 19.

Siendo A y B tensores homogéneos asimétricos de segundo orden, covariantes, y U , V tensores homogéneos de primer orden contravariantes, todos definidos en $V^n(K)$, y cuyas componentes verifican que $[a_{ij} - kb_{ij}]u^i = 0$ y $[a_{ij} - k'b_{ij}]v^i = 0$, $\forall (i, j) \in I_n$ y $k \neq k'$,

- 1) Demostrar que $a_{ij}u^i v^j = b_{ij}u^i v^j = 0$.
- 2) Expresar k en función de las componente de los tensores. Naturaleza de k

Capítulo 8

TENSORES SIMÉTRICOS Y HEMISIMÉTRICOS

8.1. Definición.

Un tensor T homogéneo o modular en $V^n(K)$ se dice que es simétrico o hemisimétrico en un grupo de índices si sus componentes, en cualquier base, son simétricas o hemisimétricas en dicho grupo de índices.

Consecuencia: Si en una base las componentes de un tensor son simétricas o hemisimétricas en un grupo de índices a igual altura, el tensor es simétrico o hemisimétrico en cualquier base. Sin embargo, si las componentes de un tensor son simétricas o hemisimétricas en un grupo de índices de distinta especie, al cambiar el tensor de base no tiene por qué conservarse la simetría o la hemisimetría. Esta característica puede patentizarse con el siguiente ejemplo. Sea $T \in V^{*n} \otimes V^n \otimes V^{*n}$, con $t_i^j{}_k = -t_k^j{}_i$ en \bar{e}_i . Hay que demostrar que en otra base, \bar{e}'_i , $t'_i{}^j{}_k = -t'_k{}^j{}_i$. Haciendo el cambio de base, $t'_i{}^j{}_k = a_i{}^\alpha b_\beta{}^j a_\gamma{}^\beta t_\alpha{}^\gamma{}_k$ y $t'_k{}^j{}_i = -a_k{}^\alpha b_\beta{}^j a_i{}^\gamma t_\alpha{}^\gamma{}_k \Rightarrow t'_i{}^j{}_k = -t'_k{}^j{}_i$. Luego, se conserva la hemisimetría para índices de la misma especie.

Problema 11

Sea f , función lineal definida por $f \in L_p[V^n, \dots, V^n; R] : V^n \times \dots \times_p V^n \xrightarrow{f} R$
 $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_p) \longrightarrow f(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_p)$

Se dice que f es alternada si : $f(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_p) = 0$ cuando se repiten dos vectores, y que f es hemisimétrica si : $f(\dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_j \dots) = -f(\dots \bar{x}_j \dots \bar{x}_i \dots)$.

1) Demostrar que f hemisimétrica $\iff f$ alternada.

CONDICIÓN NECESARIA:

Si f es alternada, $f(\dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_i \dots) = 0$. Como $f(\dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_i \dots) = -f(\dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_i \dots) = 0$

Esto sólo es cierto para cuerpos de característica 0 (ej. los reales).

CONDICIÓN SUFICIENTE:

$f(\dots \bar{x}_i + \bar{x}_j \dots \bar{x}_i + \bar{x}_j \dots) = 0$, por alternada. Por p-linealidad tenemos que
 $f(\dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_i \dots) + f(\dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_j \dots) + f(\dots \bar{x}_j \dots \bar{x}_i \dots) + f(\dots \bar{x}_j \dots \bar{x}_j \dots) = 0$
 $\longrightarrow 0$ $\longrightarrow 0$

por alternada

por alternada

$\implies f(\dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_j \dots) = -f(\dots \bar{x}_j \dots \bar{x}_i \dots)$

2) Se define $f \in L_3[V^2(R); R]$ $f(\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k) =$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

siendo $F = f_{ijk}$. Ver si $f(\bar{e}_i \bar{e}_j \bar{e}_k)$ es totalmente hemisimétrico.

Vemos que f_{ijk} es simétrico en 1^0 y 2^0 índices por ser simétricas las matrices en la ordenación usual. Para ver si lo es en los índices 1^0 y 3^0 , se ordena de forma que los índices 1^0 y 3^0 indiquen fila y columna:

$$f_{ijk} \begin{pmatrix} i = \text{fila} \\ k = \text{columna} \\ j = \text{matriz} \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{j=1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{j=2} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{j=3}$$

En este caso ya no es hemisimétrica $\implies f$ no es alternada.

3) $L_{pH}[V^n; R] \subset L_p[V^n; R]$ son las funciones p-lineales hemisimétricas. Calcular la base y la dimensión. La base asociada a \bar{e}_i (conjunto de funciones p-lineales hemisimétricas) es $E_H^{(i_1 \dots i_p)} / E_H^{(i_1 \dots i_p)}(\bar{e}_{j_1} \dots \bar{e}_{j_p}) = \delta_{j_1 \dots j_p}^{(i_1 \dots i_p)}$

cuya dimensión es $\binom{n}{p}$. Tienen que ser funciones hemisimétricas. Se ve que

sí lo son en la δ . Los índices entre paréntesis indican que están ordenados de manera preestablecida, como ocurrirá en el Algebra Exterior. Así,
 $\forall f \in L_{pH}[V^n; R] \Rightarrow f = f_{(i_1 \dots i_p)} E_H^{(i_1 \dots i_p)}$.

Capítulo 9

ALGEBRAS EXTERIORES DEFINIDAS EN $V^n(K)$

9.1. Fórmulas de δ generalizadas y desarrollos de determinantes.

9.1.1. 1) $t_{i_1 \dots i_p \dots i_r}$ es hemisimétrico en un grupo de índices

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p \iff t_{i_1 \dots i_p \dots i_r} = \delta_{i_1 \dots i_p}^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)} t_{(\alpha_1 \dots \alpha_p) i_{p+1} \dots i_r}$$

9.1.2. 2) $t_{i_1 \dots i_p \dots i_r}$ es hemisimétrico en un grupo de índices

$\alpha_1, \dots, \alpha_p \iff t_{i_1 \dots i_p \dots i_r} = \frac{1}{p!} \delta_{i_1 \dots i_p}^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)} t_{(\alpha_1 \dots \alpha_p) i_{p+1} \dots i_r}$ sin ser la t estricta en sus índices. Estricto quiere decir estrictamente ordenados los índices, y se simboliza poniendo los índices ordenados entre paréntesis.

9.1.3. 3) Desarrollo de un determinante

$$\begin{vmatrix} a_{i_1}^{j_1} & \dots & a_{i_1}^{j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p}^{j_1} & \dots & a_{i_p}^{j_p} \end{vmatrix} = \begin{cases} \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{j_1 \dots j_p} & a_{i_1}^{\alpha_1} \dots a_{i_p}^{\alpha_p} \\ \delta_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} & a_{\alpha_1}^{j_1} \dots a_{\alpha_p}^{j_p} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p j_1} & \cdots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix} = \begin{cases} \delta_{j_1 \dots j_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} & a_{i_1 \alpha_1} \cdots a_{i_p \alpha_p} \\ \delta_{i_1 \dots i_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} & a_{\alpha_1 j_1} \cdots a_{\alpha_p j_p} \end{cases}$$

9.2. Producto exterior de p vectores $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p \in V^n$

9.2.1. Definición y naturaleza

$$\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p = \delta_{1 \dots p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} (\bar{x}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \bar{x}_{\alpha_p}) \Rightarrow \bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p \in (\otimes V^n)^p$$

9.2.2. Componentes de $\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p &= \delta_{1 \dots p}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} x_{\alpha_1}^{i_1} \dots x_{\alpha_p}^{i_p} (\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) = t_{i_1 \dots i_p} (\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) = \\ &\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \cdots & x_1^{i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p^{i_1} & \cdots & x_p^{i_p} \end{vmatrix} (\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) = \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} (\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) \end{aligned}$$

9.2.3. Hemisimetrías

- A) $T = \bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p$ es un tensor totalmente hemisimétrico.
 B) Tiene la hemisimetría especial de unos productos exteriores respecto a otros.

9.2.4. Álgebra exterior $V_n^{(p)}$ o $\Lambda_n^{(p)}$, de orden p , contravariante, homogénea, definida en $V^n(K)$

Definición:

Es el conjunto de todos los tensores T de orden p , totalmente contravariantes, homogéneos definidos en $V^n(K)$, $\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p$

Propiedad:

$V_n^{(p)} \subset (\otimes V^n)^p$, con operaciones cerradas $\Rightarrow V_n^{(p)}$ es espacio vectorial.

Base de $V_n^{(p)}$ asociada a una base \bar{e}_i de V^n :

Es el conjunto de vectores de $V_n^{(p)}$, $\bar{e}_{(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(i_p)}$, con $i_1, \dots, i_p \in I_n \Rightarrow \dim V_n^{(p)} = C_{n,p} = \binom{n}{p}$.

Además, $\forall T \in V_n^{(p)}$, T tiene por coordenadas $t^{(i_1 \dots i_p)}(\bar{e}_{(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(i_p)})$. Para demostrarlo hay que tener en cuenta que $\bar{e}_{(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(i_p)}$ son

(A) **generadores**, con lo que:

$$\forall T \in V_n^{(p)}, T = t^{i_1 \dots i_p}(\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) =$$

$$\delta_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{i_1 \dots i_p} t^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}(\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) = t^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}(\bar{e}_{(\alpha_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(\alpha_p)}).$$

(B) $\bar{e}_{(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(i_p)}$ son **linealmente independientes**. Si existiera otro conjunto análogo $\lambda \Rightarrow \lambda^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} \bar{e}_{(\alpha_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(\alpha_p)} = \Omega_p$ (tensor nulo).

$$\lambda^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} \delta_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{i_1 \dots i_p} \bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p} = \Omega_p \Rightarrow$$

$$\lambda^{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} \delta_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}^{i_1 \dots i_p} = \lambda^{i_1 \dots i_p} = 0, \forall (i_1, \dots, i_p) \in I_n.$$

9.2.5. Caso $p = n$, $V_n^{(n)}$. Tensores hemisimétricos de orden n.

En este caso sólo hay un elemento en la base del espacio, por lo que $\dim V_n^{(n)} = 1$. La base asociada a la \bar{e}_i es la $\bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n$. Es decir, $\forall T \in V_n^{(n)} \Rightarrow T = t^{1 \dots n}(\bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n)$, donde $t^{1 \dots n}$ es un sistema de componentes de V^n . Además, $\forall \bar{e}_i \Rightarrow t^{i_1 \dots i_n} = \delta_{1 \dots n}^{i_1 \dots i_n} t^{1 \dots n} = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} t^{1 \dots n}$, siendo $1 \dots n$ estricto, es decir, ordenado de 1 a n . Hemos introducido aquí el tensor de permutaciones $\varepsilon^{i_1 \dots i_n} = \delta_{1 \dots n}^{i_1 \dots i_n}$, donde la permutación de dos índices implica un cambio de signo. Al igual que la delta de Kronecker puede valer 1, -1, o 0. El último caso corresponde al de dos índices repetidos.

Mediante la 2ª ley del cociente se puede demostrar que $t^{1 \dots n}$ es un tensor de orden cero y peso -1, es decir, un escalar contramodular. Esto es debido a que $\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$ tiene peso 1, mientras que $\varepsilon_{i_1 \dots i_n}$ tiene peso -1. Otra forma de verlo es haciendo un cambio de base:

$$t^{1 \dots n} = b_{\alpha_1}^{-1} \dots b_{\alpha_n}^{-n} t^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = b_{\alpha_1}^{-1} \dots b_{\alpha_n}^{-n} \delta_{1 \dots n}^{\alpha_1 \dots \alpha_n} t^{1 \dots n} = |A|^{-1} t^{1 \dots n}, \text{ por ser } t^{\alpha_1 \dots \alpha_n} \text{ totalmente hemisimétrico.}$$

9.2.6. Cambio de base asociada y de componentes en $V_n^{(p)}$.

(A) El cambio de base viene dado por $\bar{e}'_{(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}'_{(i_p)} = a_{(i_1)}^{\alpha_1} \dots a_{(i_p)}^{\alpha_p} (\bar{e}_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\alpha_p})$. Pero esta última aún no es base del álgebra exterior por no ser

estrictas sus componentes (las alfas no están entre paréntesis, es decir, no tienen por qué estar ordenadas). Aprovechando las hemisimetrías podemos escribir,

$$\begin{aligned}
 (\bar{e}_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\alpha_p}) &= \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{(j_1 \dots j_p)} (\bar{e}_{(j_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(j_p)}) \Rightarrow \bar{e}'_{(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}'_{(i_p)} \\
 &= \begin{vmatrix} a_{(i_1)}^{(j_1)} & \dots & a_{(i_1)}^{(j_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i_p)}^{(j_1)} & \dots & a_{(i_p)}^{(j_p)} \end{vmatrix} (\bar{e}_{(j_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(j_p)}), \text{ que ya tiene la base adecuada.} \\
 \text{Luego,}
 \end{aligned}$$

$$(\bar{e}_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\alpha_p}) = \begin{vmatrix} a_{(i_1)}^{(j_1)} & \dots & a_{(i_1)}^{(j_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i_p)}^{(j_1)} & \dots & a_{(i_p)}^{(j_p)} \end{vmatrix} (\bar{e}_{(j_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{(j_p)}) \quad (9.1)$$

(B) Para las componentes hemos de relacionar $t^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}$ con $t^{(i_1 \dots i_p)}$. Una forma de hacerlo es sustituyendo directamente el cambio de base:

En la base \bar{e}_i tenemos que $T = t^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)} (\bar{e}_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\alpha_p})$.

En la base \bar{e}'_i , $T = t'^{(i_1 \dots i_p)} \bar{e}'_{(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}'_{(i_p)} =$

$$\begin{aligned}
 &t'^{(i_1 \dots i_p)} \begin{vmatrix} a_{(i_1)}^{(\alpha_1)} & \dots & a_{(i_1)}^{(\alpha_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i_p)}^{(\alpha_1)} & \dots & a_{(i_p)}^{(\alpha_p)} \end{vmatrix} (\bar{e}_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\alpha_p}) = \\
 &t'^{(i_1 \dots i_p)} |A_p| (\bar{e}_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\alpha_p}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow t'^{(i_1 \dots i_p)} = |A_p|^{-1} t^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}. \quad (9.2)
 \end{aligned}$$

Otra forma es hacer el cambio directo de componentes:

$$t'^{(i_1 \dots i_p)} = b_{\alpha_1}^{(i_1)} \dots b_{\alpha_p}^{(i_p)} t^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = b_{\alpha_1}^{(i_1)} \dots b_{\alpha_p}^{(i_p)} \delta_{(j_1 \dots j_p)}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} t^{(j_1 \dots j_p)} = |A_p|^{-1} t^{(j_1 \dots j_p)}. \text{ Hay}$$

que hacer constar que $|A_p|$ es un menor del determinante total de cambio de base $|A|$. Es decir, sólo cuando $p = n \Rightarrow t'^{1 \dots n} = |A| t^{1 \dots n}$

9.3. Producto exterior de funciones lineales (vectores de V^{*n})

9.3.1. Definición:

Es un tensor $f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{1 \dots p} (f^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes f^{\alpha_p})$, con $p \leq n$.

9.3.2. Naturaleza:

$f^1 \wedge \dots \wedge f^p \in (\otimes V^{*n})^p$ es un tensor totalmente covariante, homogéneo, de orden p .

9.3.3. Hemisimetrías:

$f^1 \wedge \dots \wedge f^p$ es un tensor totalmente hemisimétrico, con hemisimetría especial dada por:

$f^1 \wedge \dots \wedge f^p = \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} f_{i_1}^{\alpha_1} \dots f_{i_p}^{\alpha_p} (\bar{e}^{*i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{*i_p}) = t_{i_1 \dots i_p} (\bar{e}^{*i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{*i_p})$, donde $t_{i_1 \dots i_p} = \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{i_1 \dots i_p} f_{i_1}^{\alpha_1} \dots f_{i_p}^{\alpha_p}$ es totalmente hemisimétrico, dadas las propiedades de la δ de Kronecker generalizada.

9.4. Algebra exterior homogénea, covariante, de orden p .

(Algebra exterior homogénea, covariante, de orden p , $V_n^{*(p)}$ o $\Lambda_n^{*(p)}$ definida en V).

9.4.1. Definición:

Es el conjunto de tensores homogéneos, de orden p , totalmente covariantes y totalmente hemisimétricos como el $f^1 \wedge \dots \wedge f^p$. $V_n^{*(p)}$ forma espacio vectorial.

9.4.2. Base de $V_n^{*(p)}$ asociada a \bar{e}_i :

Es $\bar{e}^{*(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}^{*(i_p)}$, de forma que

$$\forall T \in V_n^{*(p)} \Rightarrow T = t_{(i_1 \dots i_p)} (\bar{e}^{*(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}^{*(i_p)})$$

9.4.3. Caso $p = n$:

Cuando el número de índices que entran en el producto exterior coincide con la dimensión del espacio, sólo existe una ordenación linealmente independiente. Es decir, sólo hay un elemento en la base del álgebra exterior, de modo que $\forall T \in V_n^{*(n)} \Rightarrow T = t_{1 \dots n} \bar{e}^{*1} \wedge \dots \wedge \bar{e}^{*n}$ y $t'_{1 \dots n} = |A| t_{1 \dots n}$, es un tensor comodular, de orden 0, es decir, un escalar comodular.

9.4.4. Cambio de base y componentes en $V_n^{*(p)}$:

$$(\bar{e}^{*(i_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}^{*(i_p)}) = \begin{vmatrix} b_{(\alpha_1)}^{(i_1)} & \dots & b_{(\alpha_1)}^{(i_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{(\alpha_p)}^{(i_1)} & \dots & b_{(\alpha_p)}^{(i_p)} \end{vmatrix} (\bar{e}^{*(\alpha_1)} \wedge \dots \wedge \bar{e}^{*(\alpha_p)}) \quad (9.3)$$

\Rightarrow

$$t'_{(i_1 \dots i_p)} = \begin{vmatrix} a_{(i_1)}^{(\alpha_1)} & \dots & a_{(i_1)}^{(\alpha_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i_p)}^{(\alpha_1)} & \dots & a_{(i_p)}^{(\alpha_p)} \end{vmatrix} t_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)}. \quad (9.4)$$

9.5. Producto exterior de tensores.

9.5.1. Definición:

Dados $T_1 \in V_n^{(p)}$; $T_2 \in V_n^{(q)}$; $T_3 \in V_n^{(r)}$ se define como producto exterior de dichos tensores a:

$$T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 = t_1^{(\alpha_1 \dots \alpha_p)} \cdot t_2^{(\beta_1 \dots \beta_q)} \cdot t_3^{(\gamma_1 \dots \gamma_r)} \cdot (\bar{e}_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\alpha_p} \wedge \bar{e}_{\beta_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\beta_q} \wedge \bar{e}_{\gamma_1} \wedge \dots \wedge \bar{e}_{\gamma_r}) \in V_n^{(p+q+r)}$$

Problema 20.

Dado un $V^n(K)$, estudiar si los espacios $L[V^n; V^n]$, $L[V^n; V^{*n}]$, $L[V^{*n}; V^{*n}]$, $L[V^{*n}; V^n]$ son isomorfos canónicos con los espacios de tensores de segundo orden definidos en V^n .

Problema 21.

Las componentes en una base \bar{e}_i de $V^n(R)$ de un tensor A covariante de segundo orden verifican la relación $Ba_{ij} + Ca_{ji} = 0$, $\forall i, j \in I_n$, con $B, C \in R$. ¿Tiene carácter intrínseco la relación? ¿Se deduce alguna peculiaridad para A ?

Problema 22.

Sea T un tensor homogéneo contra-cova-cova-contravariante, definido en $V^2(R)$, hemisimétrico en los índices (1 y 4) y (2 y 3).

- 1) Calcular $C_{25,36}[T \otimes \bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2]$, con $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in V^2(R)$, en función de $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$.
- 2) Naturaleza tensorial de una componente cualquiera de T .

3) En una base cualquiera \bar{e}_i , dada $t_{21}^{12} = 5$, ordenar matricialmente las t_{jk}^{il} .

Problema 23.

Un sistema de índices varía de 1 a n . Se da la matriz $A = a_i^j$, regular, de tal forma que:

$$U_{(i_1 \dots i_p)} = \begin{vmatrix} a_{i_1}^{j_1} & \dots & a_{i_1}^{j_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p}^{j_1} & \dots & a_{i_p}^{j_p} \end{vmatrix} t_{(j_1 \dots j_p)}. \text{ Despejar } t_{(j_1 \dots j_p)} \text{ a partir de } U_{(i_1 \dots i_p)}.$$

9.6. Sistema de componentes Δ_p y ε en $V^n(k)$.

9.6.1. Definición:

Con el fin de utilizar una notación mas abreviada es común recurrir a la notación siguiente:

$\Delta_p = \delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}$ en una base \bar{e}_i , o $\delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}$ en una base \bar{e}'_i .

$\varepsilon = \varepsilon(i_1 \dots i_n) = \delta_{i_1 \dots i_n}^{1 \dots n} = \delta_{1 \dots n}^{i_1 \dots i_n}$ que es invariante.

Existen $C_{2p,p} = \binom{2p}{p}$ tensores diferentes del tipo Δ_p , con naturalezas tensoriales diferentes, según el orden de los super y subíndices. Es decir, aunque no es costumbre en este caso ordenar los índices, existen tanto $\delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}$ como $\delta_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}$ y las posible variantes.

Por su parte ε tiene naturaleza tensorial de orden n , totalmente contravariante, modular de peso 1. Existe la versión totalmente covariante, que es modular de peso -1. Estas dos últimas características pueden comprobarse mediante un cambio de base. Para el primer caso, como $p = n$,

$$\varepsilon^{j_1 \dots j_n} = a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} b_{j_1}^{\beta_1} b_{j_n}^{\beta_n} \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n} = |A| b_{j_1}^{\beta_1} b_{j_n}^{\beta_n} \varepsilon^{j_1 \dots j_n}, \text{ ya que } a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{j_1 \dots j_n} = |A|.$$

Problema 24.

En $V^3(R)$ nos dan los vectores siguientes:

$$\bar{x}_1 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$$

$$\bar{x}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$$

$$\bar{x}_3 = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$$

Calcular:

- 1) Componentes de $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ en base de $V_3^{(2)}$.
- 2) Componentes de $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$ en base de $(\otimes V_3)^2$.
- 3) Componentes de $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$ en base de $V_3^{(3)}$.
- 4) Componentes de $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$ en base de $(\otimes V_3)^3$.

Problema 25.

Dado un $V^4(R)$ donde se define un tensor $T = t_{ijk}(e^{*i} \otimes e^{*j} \otimes e^{*k})$ de componentes

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Expresar T como combinación lineal de productos exteriores.
- 2) Expresar T como producto exterior. Expresión general de T .

Capítulo 10

ESPACIOS PRE-EUCLÍDEOS Y EUCLÍDEOS

10.1. Definición de producto escalar.

Un espacio vectorial pre-euclídeo (o euclidean) \mathcal{E}_n es un $V^n(R)$ en el que se define una aplicación $g : V^n \times V^n \rightarrow R$, bilineal, simétrica y regular, de tal forma que, para un par de vectores $\bar{x}, \bar{y} \in V^n \times V^n \rightarrow g(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \in R$ se ha de satisfacer que

1) Bilinealidad: $(\alpha^i \bar{x}_i) \cdot (\beta^j \bar{y}_j) = \alpha^i \beta^j (\bar{x}_i \cdot \bar{y}_j)$

2) Simetría: $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$

3) Regularidad: Si $\forall \bar{x} \in V^n$, $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \bar{0}$. Es decir, el único vector ortogonal a todos los del espacio es el vector nulo.

Esta aplicación se denomina **producto escalar**. Un **espacio euclídeo** E_n es un pre-euclídeo en el que se exige que $\forall \bar{x} \in E_n \Rightarrow \bar{x} \cdot \bar{x} > 0$, excepto si $\bar{x} = \bar{0}$. Es decir, **la norma ha de ser positiva**. En consecuencia, la positividad de la norma implica la regularidad.

10.2. Ortogonalidad.

1) $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{E}_n$ son ortogonales $\Leftrightarrow \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

2) $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p\}$ forma un sistema ortogonal $\Leftrightarrow (\forall i, j \in I_n \text{ e } i \neq j \Rightarrow \bar{x}_i \cdot \bar{x}_j = 0)$.

En los sistemas vectoriales anteriores no se considera el $\bar{0}$.

- 3) Dos subespacios S_1 y S_2 son ortogonales si todo vector de uno de ellos es ortogonal a todos los del otro.
- 4) El complemento ortogonal S_n de un subespacio $S \subset \mathcal{E}_n$ es el subconjunto de vectores de \mathcal{E}_n ortogonales a todos los vectores de S . S_n es espacio vectorial. Sin embargo, S_n no es suplementario de S en \mathcal{E}_n , pero sí lo es en E_n .

10.3. Propiedades que no cumple el producto escalar.

- 1) No es asociativo: $(\bar{a} \cdot \bar{b}) \cdot \bar{c} \neq \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot \bar{c})$.
- 2) No es cancelativo: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{c} \not\Rightarrow \bar{b} = \bar{c}$ a no ser que la igualdad sea $\forall \bar{a}$.

10.4. Matriz de Gramm de un sistema de vectores.

10.4.1. Definición:

En un espacio \mathcal{E}_n se llama matriz de Gramm de $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ a:

$$G = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{x}_p \cdot \bar{x}_1 & \cdots & \bar{x}_p \cdot \bar{x}_p \end{pmatrix}. \text{ El } \mathbf{grammiano} \text{ es el determinante de } G = \Gamma(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) = |G_{\bar{x}}|.$$

10.4.2. Propiedades:

- G es simétrica de dimensión $p \times p$.
- Si $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ es un sistema ortogonal $\Rightarrow G$ es diagonal.
- Si $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p)$ es linealmente independiente $\Rightarrow G$ es regular.
- En espacios euclídeos, $\Gamma(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p) \geq 0$, y G está definida positiva.

10.5. Norma y módulo de un vector.

- 1) Norma de un vector: $\forall \bar{x} \in \mathcal{E}_n$, $N(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{x}$, que puede ser mayor, igual o menor que cero. La norma sólo está definida positiva en los espacios euclídeos.
- 2) Módulo de un vector: $\forall \bar{x} \in E_n$, $|\bar{x}| = +\sqrt{N(\bar{x})}$.

10.6. Sistemas equivalentes de vectores en $V^n(K)$.

Dos sistemas $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p\}$ y $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_p\}$ son equivalentes si $[\bar{x}_1] = [\bar{y}_1]$, $[\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2] = [\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2]$, etc.

10.7. Expresión analítica del producto escalar.

Sea la aplicación $g : \mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n \rightarrow R / \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{E}_n \times \mathcal{E}_n$, de modo que

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^i \bar{e}_i)(y^j \bar{e}_j) = x^i y^j \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = g_{ij} x^i y^j = \|x^i\| G \{y^j\}. \quad (10.1)$$

A $g_{ij} x^i y^j$ se le denomina **forma bilineal fundamental** de \mathcal{E}_n en forma contravariante, en la base \bar{e}_i .

10.8. Condiciones de $G_{\bar{e}_i}$.

En \mathcal{E}_n , $G_{\bar{e}_i}$ es simétrica en R , $n \times n$. Además, es regular.

En E_n , $G_{\bar{e}_i}$ además de simétrica ha de estar definida positiva, es decir, $N(\bar{x}) = g_{ij} x^i x^j \geq 0$.

Como podemos observar, es norma general llamar a $g_{\bar{e}_i \bar{e}_j} = g_{ij}$. Así, de ahora en adelante g_{ij} sólo corresponderá al producto escalar de vectores de las bases, $g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j$.

10.9. Cambio de base para $G_{\bar{e}_i}$.

Dado el cambio de base $\bar{e}'_i = a_i^\alpha \bar{e}_\alpha$, como $g'_{ij} = \bar{e}'_i \cdot \bar{e}'_j = a_i^\alpha a_j^\beta \bar{e}_\alpha \cdot \bar{e}_\beta = a_i^\alpha a_j^\beta g_{\alpha\beta} \Rightarrow$

$$G'_{\bar{e}_i} = A G_{\bar{e}_i} A^T \quad (10.2)$$

Este tipo de cambio de base recibe el nombre de **transformación congruente**.

10.10. Coordenadas covariantes en \mathcal{E}_n .

Las coordenadas covariantes de un vector \bar{x} en una base \bar{e}_i de \mathcal{E}_n son un conjunto n de números reales tales que $x_i = \bar{x} \cdot \bar{e}_i$. En consecuencia, $x_i = (x^j \bar{e}_j) \cdot \bar{e}_i = g_{ij} x^j$ que, en forma matricial será $\{x_i\} = G_{\bar{e}_i} \{x^j\}$. De estas expresiones se deduce que $x^j = \underline{g}^{ji} x_i$.

10.11. Base recíproca.

Se llama base recíproca \bar{e}^i de la base \bar{e}_i a la que verifica $\bar{e}^i \cdot \bar{e}_j = \delta^i_j$. Si $\bar{e}^i = \lambda^{ij} \bar{e}_j$ y $\bar{e}^i \cdot \bar{e}_\alpha = \delta^i_\alpha \Rightarrow (\lambda^{ij} \bar{e}_j) \cdot \bar{e}_\alpha = \delta^i_\alpha = \lambda^{ij} g_{j\alpha} \Rightarrow \lambda^{ij} = \delta^i_\alpha g^{\alpha j} = g^{ij} \Rightarrow \bar{e}^i = \underline{g}^{ij} \bar{e}_j$, o bien,

$$\{\bar{e}^i\} = G_{\bar{e}_i}^{-1} \{\bar{e}_j\}. \quad (10.3)$$

Si definimos $G_{\bar{e}^i} = g^{ij} = \bar{e}^i \cdot \bar{e}^j = (\underline{g}^{i\alpha} \bar{e}_\alpha) \cdot (\underline{g}^{j\beta} \bar{e}_\beta) = \underline{g}^{i\alpha} \underline{g}^{j\beta} g_{\alpha\beta} = \underline{g}^{i\alpha} \delta^j_\alpha = \underline{g}^{ij} \Rightarrow$

$$G_{\bar{e}^i} = (G_{\bar{e}_i})^{-1}. \quad (10.4)$$

La base recíproca de la recíproca coincide con la base original de partida. En sistemas ortonormales y sólo en E_n , $\{\bar{e}^i\} = G_{\bar{e}_i}^{-1} \{\bar{e}_j\} = \{\bar{e}_i\}$. Es el caso de los sistemas cartesianos ortonormales y, como veremos, de los sistemas naturales.

10.11.1. Propiedad fundamental

Las coordenadas covariantes de un vector en una base determinada son las contravariantes en la base recíproca. En efecto, sea $\bar{x} \in \mathcal{E}_n$. Entonces,

$$\bar{x} = x^j \bar{e}_j = \underline{g}^{ji} x_i \bar{e}_i = x_i \bar{e}^i. \quad (10.5)$$

10.12. Expresiones del producto escalar en \mathcal{E}_n .

Aprovechando la propiedad fundamental podemos escribir que:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^i \bar{e}_i) \cdot (y^j \bar{e}_j) = g_{ij} x^i y^j = \|x^i\| G_{\bar{e}_i} \{y^j\}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_i \bar{e}^i) \cdot (y_j \bar{e}^j) = g^{ij} x_i y_j = \|x_i\| G_{\bar{e}^i}^{-1} \{y_j\}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x^i \bar{e}_i) \cdot (y_j \bar{e}^j) = \delta_i^j x^i y_j = x^i y_i$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_i \bar{e}^i) \cdot (y^j \bar{e}_j) = \delta_j^i x_i y^j = x_i y^j$$

10.13. Cambio de base recíproca y de coordenadas covariantes en \mathcal{E}_n .

Dado el cambio de base $\bar{e}'_i = a_i{}^\alpha \bar{e}_\alpha$ y sabiendo que $G'_{\bar{e}_i} = A G_{\bar{e}_i} A^T$, podemos ver que:

$$\{\bar{e}'^i\} = (A^T)^{-1} G^{-1} A^{-1} A G \{\bar{e}^\alpha\} = \{\bar{e}'^i\} (A^T)^{-1} \{\bar{e}^\alpha\} \Rightarrow$$

$$\bar{e}'^i = b_\alpha{}^i \bar{e}^\alpha, \quad (10.6)$$

$$\bar{x} = x'_i \bar{e}'^i = x'_i b_\alpha{}^i \bar{e}^\alpha \Rightarrow$$

$$x'_i = a_i{}^\alpha x_\alpha. \quad (10.7)$$

10.14. Producto vectorial, producto mixto.

Se define como **producto vectorial** de dos vectores a:

$$\bar{x}_1 \times \bar{x}_2 = \sqrt{g} \begin{vmatrix} \bar{e}^1 & \bar{e}^2 & \bar{e}^3 \\ x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}. \quad (10.8)$$

Se define como **producto mixto** de tres vectores a:

$$\begin{aligned} [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3] &= \sqrt{g} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \\ x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (10.9)$$

El **volumen de un paralelepípedo** viene dado por:

$$V(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \sqrt{\Gamma(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)} = |[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3]|.$$

El **área de un paralelogramo** viene dada por:

$$A(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sqrt{\Gamma(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = |\bar{x}_1 \times \bar{x}_2|.$$

Capítulo 11

DUALIDAD EN UN \mathcal{E}_n

11.1. Dualidad normal $\mathcal{E}_n^* \equiv \mathcal{E}_n$.

Dado que la base $\bar{e}^i \in \mathcal{E}_n$ se transforma en los cambios de base de la misma forma que la base $\bar{e}^{*i} \in \mathcal{E}_n^*$, se dice que \mathcal{E}_n y \mathcal{E}_n^* son isomorfos naturales. En consecuencia, $\mathcal{E}_n \equiv \mathcal{E}_n^*$ y $\bar{e}^i = \bar{e}^{*i}$. Esta propiedad va a ser de gran importancia en Física, por poderse trabajar indistintamente con un espacio determinado o con su dual.

11.2. Dualidad generalizada en espacios vectoriales.

Dos espacios vectoriales $U(K)$ y $V(K)$ son duales, con dualidad generalizada, si existe una aplicación $g : U \times V \rightarrow K / \forall \bar{u} \in U$ y $\forall \bar{v} \in V \Rightarrow g(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u} \cdot \bar{v}$, siendo g bilineal y regular. Es decir, se han de cumplir las propiedades siguientes:

- 1) **Bilinealidad:** $(\alpha \bar{u}) \cdot (\beta \bar{v}) = \alpha \beta (\bar{u} \cdot \bar{v})$.
- 2) **Regularidad por la izquierda:** Si $(\forall \bar{u} \in U, \bar{u} \cdot \bar{v} = 0_K) \Leftrightarrow \bar{v} = \bar{0}_V$.
- 3) **Regularidad por la derecha:** Si $(\forall \bar{v} \in V, \bar{u} \cdot \bar{v} = 0_K) \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}_U$.

En consecuencia,

- 1) Si $U(K)$ y $V(K)$ son de dimensión finita y son duales entre sí, ambos tienen igual dimensión.
- 2) Para dos espacios de dimensión finita, con bases $\bar{e}_i, \bar{\beta}_j$, la matriz $G_{\bar{e}_i \bar{\beta}_j} = \bar{e}_i \cdot \bar{\beta}_j$ es regular.

3) Dos espacios vectoriales de dimensión finita, e igual para ambos, son duales.

11.3. Tensores modulares.

Los tensores modulares en \mathcal{E}_n se definen y funcionan exactamente igual que en V^n .

Un tensor preeuclídeo se llama **isotrópico** si sus componentes de una cierta especie son iguales en cualquier base. Un caso de este tipo es Δ_p .

11.4. Simetrías y hemisimetrías de un tensor preeuclídeo.

Un tensor preeuclídeo se llama simétrico o hemisimétrico en un grupo de índices si, en una base \bar{e}_i , las componentes correspondientes a esos índices, que han de estar a igual altura, son simétricas o hemisimétricas.

Consecuencias:

- 1) Al igual que en V^n , dentro de la especie determinada por los índices, se conserva la simetría y hemisimetría al cambiar de base.
- 2) Además, todas las especies de componentes que tengan esos índices a igual altura también son simétricas o hemisimétricas.

Ejemplo:

Sea $T \in (\otimes E_n)^3$, con componentes, en la base \bar{e}_i , t^{ijk} , hemisimétricas en los índices i, j . Según la segunda consecuencia, $t_i^j{}_k$ también son hemisimétricas en i, j :

$t_i^j{}_k = g_{i\alpha} g_{k\gamma} t^{\alpha j \gamma}$, hemisimétricas estas últimas, por el enunciado, en α, γ .
 $t_k^j{}_i = g_{k\alpha} g_{i\gamma} t^{\alpha j \gamma} = -g_{k\alpha} g_{i\gamma} t^{\gamma j \alpha} = -t_i^j{}_k$, como queríamos demostrar.

Propiedad:

La contracción de un tensor pre-euclídeo en dos índices hemisimétricos es el tensor nulo. Recordemos que la contracción de un tensor preeuclídeo en dos índices es otro tensor preeuclídeo si las especies de componentes contraídas tienen los índices a distinta altura. Por esta razón, para poder contraer es preciso cambiar de altura uno de los índices en los que las componentes son hemisimétricas.

Ejemplo:

Sea, en E_n , el tensor $T = t^{ij}_k (\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j \otimes \bar{e}^k)$, hemisimétrico en i, j . Contrayendo estos índices,

$C_{12}[T] = t^{\alpha}_{\alpha k} \bar{e}^k = \bar{0}$, puesto que $g_{\alpha\beta} t^{\alpha\beta}_k = 0_K$. Sin embargo, $t^{\alpha\alpha K} \neq 0_K$.

11.5. Tensores preeuclídeos de segundo orden particulares en E_n .

11.5.1. Tensor regular:

Es aquel que tiene la matriz de componentes regular en alguna base. Si esto ocurre, la matriz de componentes es regular para cualquier especie y base:

Si (t_i^j) es regular $\Rightarrow (t'_i{}^j) = A(t_{\alpha}{}^{\beta})A^{-1}$ también es regular.

Si (t_i^j) es regular $\Rightarrow t_{ij} = g_{j\beta} t_i{}^{\beta} \Rightarrow (t_{ij}) = (t_i{}^{\beta})G$ también es regular.

11.5.2. Tensor conjugado o traspuesto de un tensor T

Es el tensor euclídeo $T^c \not\vdash \forall \bar{e}_i$, cuya la matriz de componentes cova-covariantes es la traspuesta de la matriz de las componentes cova-covariantes de T . Es decir, $(t'_{ij}) = A(t_{\alpha\beta})A^T \Rightarrow (t'_{ij})^T = A(t_{\alpha\beta})^T A^T$. En consecuencia, se verifica que:

$$\text{componentes de } T \left\{ \begin{array}{l} (t_{ij}) \Rightarrow (t_{ij}^c) = (t_{ij})^T \\ (t^{ij}) \Rightarrow (t^{cij}) = (t^{ij})^T \\ (t_i^j) \Rightarrow (t_i^c{}^j) = (t^i{}_j)^T \\ (t^i{}_j) \Rightarrow (t^{ci}{}_j) = (t^i{}_j)^T \end{array} \right\} \text{componentes de } T^c.$$

11.5.3. Tensor recíproco o inverso T^R de un tensor $T \in \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{E}_n$, regular.

Es el tensor preeuclídeo $T^R \not\vdash \forall \bar{e}_i$, y la matriz de sus componentes cova-contravariantes es la inversa de la matriz de las componentes cova-contravariantes de T . Por lo tanto,

$(t'_i{}^j) = A(t_{\alpha}{}^{\beta})A^{-1} \Rightarrow (t'_i{}^j)^{-1} = A(t_{\alpha}{}^{\beta})^{-1}A^{-1}$. En consecuencia, tendremos

que para las componentes de un T regular $\left\{ \begin{array}{l} (t_i^j) \Rightarrow (t_i^R{}^j) = (t_i^j)^{-1} \\ (t_i^j) \Rightarrow (t^{Rj}{}_i) = (t_i^j)^{-1} \\ (t_{ij}) \Rightarrow (t_{ij}^R) = (t^{ij})^{-1} \\ (t^{ij}) \Rightarrow (t^{Rij}) = (t_{ij})^{-1} \end{array} \right\}$ componentes de T^R .

Problema 26.

Dado un $V^4(R)$ y el tensor $T = t^{ij}(\bar{e}_i \otimes \bar{e}_j)$, de componentes

$$t^{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

y el vector $\bar{x} = \bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 + \bar{e}_4$, calcular:

- 1) $U = T \wedge x$
- 2) L_u definida como el conjunto de vectores de $V^4(R)$ tales que $U \wedge \bar{x} = \Omega$, siendo Ω el tensor nulo.
- 3) Descomponer U en producto exterior de tensores.

Problema 27.

Sea un $V^4(R)$. Se introduce una conexión mediante $G_{\bar{e}_i} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Clasificar la conexión. ¿Cuál es el índice del espacio?.
- 2) Clasificar los subespacios $S_1 \equiv [(1101)(0010)(0001)]$ y $S_2 \equiv \begin{cases} x^2 - x^4 = 0 \\ x^3 = 0 \end{cases}$.
- 3) Buscar los complementos ortogonales de S_1 y S_2 . ¿Son suplementarios de S_1 y S_2 , respectivamente?.
- 4) Sea $\bar{x} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_4$. Buscar la proyección ortogonal de \bar{x} sobre S_1 y S_2 .
- 5) Buscar la base recíproca de \bar{e}_1 .

Problema 28.

Sea E_3 , con la métrica $G_{\bar{e}_i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Se da el cambio de base

$$(\bar{e}'_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\bar{e}_i).$$

- 1) Clasificar E_3 .
- 2) Buscar la base recíproca de \bar{e}_i en función de \bar{e}'_i .

11.5. TENSORES PREEUCLÍDEOS DE SEGUNDO ORDEN PARTICULARES EN E_N . 71

- 3) Buscar la base recíproca de \bar{e}'_i en función de la recíproca de \bar{e}_i .
- 4) Buscar la base recíproca de \bar{e}'_i en función de \bar{e}_i .
- 5) Buscar la base ortogonal de E_3 en función de \bar{e}_i .
- 6) Buscar la base ortonormal de E_3 en función de \bar{e}_i y \bar{e}'_i .
- 7) Poner en forma covariante al vector $\bar{x} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$ en las bases \bar{e}_i y \bar{e}'_i .

Problema 29.

Sea E_2 , con la métrica $G_{\bar{e}_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Se da el tensor euclídeo, de cuarto orden, cova-contravariante, de componentes en la base \bar{e}_i :

$$t_{i \ k}^{j \ l} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ y el cambio de base } \begin{matrix} \bar{e}'_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{e}'_2 = \bar{e}_1 \end{matrix}.$$

- 1) Buscar las simetrías y hemisimetrías de T .
- 2) Relacionar T con el tensor Δ . ¿Es T isotrópico?.
- 3) Buscar los tensores procedentes de las contracciones simples y dobles de T .

Problema 30.

Dada la métrica $G_{\bar{e}_i} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, estudiar si existen tensores eu-

clídeos hemisimétricos de segundo orden, distintos del tensor nulo, cuyas componentes mixtas en la base \bar{e}_i sean hemisimétricas. Hacer lo mismo para las simetrías. ¿Es general el resultado obtenido?.

Problema 31.

Sea E_n , euclídeo y el sistema $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in E_n$. Se forma la matriz M cuyas filas $1, 2, \dots, n$ son las coordenadas contravariantes de los vectores $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$. Se pide:

- 1) Naturaleza tensorial de los cofactores de una fila cualquiera de M .
- 2) Si $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ forman base, buscar las coordenadas covariantes de la base recíproca en función de los cofactores anteriores.

Problema 32.

Sea T un bivector de $V^n(K)$, es decir, un tensor antisimétrico dos veces contravariante.

- 1) Mostrar que si T es descomponible en un producto de dos vectores, el sistema de ecuaciones lineales S , dado por $T^{ij} \cdot x^k + T^{jk}x^i + T^{ki}x^j = 0$, admite solución no nula.

- 2) Recíprocamente, si S admite solución no nula para x^i , demostrar que existe un vector \bar{y} tal que $T^{ij} = x^i y^j - x^j y^i$. Se puede, mediante un cambio de componentes, considerar a \bar{x} como el primer vector de la base.
- 3) Deducir que un bivector de R^4 es descomponible si y sólo si sus componentes verifican $T^{12}T^{34} + T^{23}T^{14} + T^{31}T^{24} = 0$.

11.5. *TENSORES PREEUCLÍDEOS DE SEGUNDO ORDEN PARTICULARES EN E_N* .73

Capítulo 12

ÁLGEBRA EXTERIOR EN ESPACIOS EUCLÍDEOS

12.1. Producto exterior de p vectores $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_p \in \mathcal{E}_n$.

Es el tensor pre-euclídeo, de orden p en \mathcal{E}_n , $\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p = \delta_{1\dots p}^{\alpha_1\dots\alpha_p}(\bar{x}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \bar{x}_{\alpha_p})$. El producto exterior tiene por componentes $\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p = \delta_{1\dots p}^{\alpha_1\dots\alpha_p} x_{\alpha_1}^{i_1} \dots x_{\alpha_p}^{i_p} (\bar{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_p}) \Rightarrow$ componentes de

$$t^{i_1\dots i_p} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_1^{i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p^{i_1} & \dots & x_p^{i_p} \end{vmatrix} \quad (12.1)$$

$\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p = \delta_{\alpha_1\dots\alpha_p}^{1\dots p} x_{\alpha_1 i_1} \dots x_{\alpha_p i_p} (\bar{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{i_p}) \Rightarrow$ de componentes

$$t_{i_1\dots i_p} = \begin{vmatrix} x_{1i_1} & \dots & x_{1i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{pi_1} & \dots & x_{pi_p} \end{vmatrix}. \quad (12.2)$$

$\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p$ es un tensor totalmente hemisimétrico, con hemisimería especial.

12.2. Álgebra exterior $V_n^{(p)}$ definida en \mathcal{E}_n .

1) Es el conjunto de tensores preeuclídeos de orden p , totalmente hemisimétricos, definidos en \mathcal{E}_n siendo $\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_p$ un ejemplo típico.

2) $V_n^{(p)}$ es espacio vectorial, subespacio de $(\otimes \mathcal{E}_n)^p = \otimes^p \mathcal{E}_n$.

3) Las bases de $V_n^{(p)}$ asociadas a \bar{e}_i son $\left\{ \begin{array}{l} (\bar{e}_{(i_1)} \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{(i_p)}) \\ (\bar{e}_{(i_1)} \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{(i_p)}) \end{array} \right\}$, tales que, $\forall T \in V_n^{(p)}$, $T = \left\{ \begin{array}{l} t^{(i_1 \cdots i_p)} (\bar{e}_{(i_1)} \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{(i_p)}) \\ t_{(i_1 \cdots i_p)} (\bar{e}_{(i_1)} \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{(i_p)}) \end{array} \right\}$.

4) Relación entre ambos tipos de bases y componentes :

$$(\bar{e}_{(i_1)} \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{(i_p)}) = g_{(i_1)\alpha_1} \cdots g_{(i_p)\alpha_p} (\bar{e}^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \bar{e}^{\alpha_p}) =$$

$$\left| \begin{array}{ccc} g_{(i_1)(j_1)} & \cdots & g_{(i_1)(j_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{(i_p)(j_1)} & \cdots & g_{(i_p)(j_p)} \end{array} \right| (\bar{e}^{(j_1)} \wedge \cdots \wedge \bar{e}^{(j_p)}).$$

$$t^{(i_1 \cdots i_p)} = g^{(i_1)\alpha_1} \cdots g^{(i_p)\alpha_p} t_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \quad (\text{siendo } t_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \text{ totalmente hemisimétrico}) =$$

$$\left| \begin{array}{ccc} g^{(i_1)(j_1)} & \cdots & g^{(i_1)(j_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{(i_p)(j_1)} & \cdots & g^{(i_p)(j_p)} \end{array} \right|.$$

5) Si $p = n \Rightarrow t^{1 \cdots n} = g^{-1} t_{1 \cdots n}$.

12.3. Espacio vectorial orientado $V^n(K)$.

En $V^n(K)$, se dice que dos bases \bar{e}_i y \bar{e}'_i tienen igual orientación si el determinante de la matriz de cambio de base es positiva ($|A| > 0$). La orientación es una relación de equivalencia, por lo que establece una partición en clases de equivalencia. Sólo existen dos clases.

$V^n(K)$ está orientado si sólo se consideran bases de igual orientación.

12.4. Tensores $g, \frac{1}{g}, +\sqrt{|g|}, \frac{1}{+\sqrt{|g|}}, \theta, \Delta p, \varepsilon$ definidos en un \mathcal{E}_n .

Los tensores $\Delta p, \varepsilon$ son isotrópicos por definición.

12.4. TENSORES $G, \frac{1}{G}, +\sqrt{|G|}, \frac{1}{+\sqrt{|G|}}, \theta, \Delta P, \varepsilon$ DEFINIDOS EN UN \mathcal{E}_N .77

12.4.1. Naturalezas tensoriales:

1) g se transforma como $G' = AGA^T \Rightarrow g' = |A|^2 g \Rightarrow$ naturaleza tenensorial modular, de orden 0, peso 2.

2) $\frac{1}{g}$ se transforma como $\frac{1}{g'} = |A|^{-2} \frac{1}{g} \Rightarrow$ naturaleza tensorial modular, orden 0, peso -2.

3) $+\sqrt{|g|} \Rightarrow +\sqrt{|g'|} = |A| \left(+\sqrt{|g|} \right) \Rightarrow$ naturaleza tensorial modular, de orden 0, peso 1 (Solo para \mathcal{E}_n orientado).

4) $\frac{1}{+\sqrt{|g|}} \Rightarrow \frac{1}{+\sqrt{|g'|}} |A|^{-1} \frac{1}{+\sqrt{|g|}} \Rightarrow$ naturaleza tensorial modular, orden 0, peso -1.

5) $\theta \Rightarrow \forall \bar{e}_i : \text{son las constantes } \theta_{i_1 \dots i_n} = +\sqrt{|g|} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \Rightarrow$ naturaleza tensorial homogénea \Rightarrow preeuclideo de orden n.

6) $\theta^{i_1 \dots i_n} = g^{i_1 \alpha_1} \dots g^{i_n \alpha_n} + \sqrt{|g|} \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} =$
 $= +\sqrt{|g|} \delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_n} \cdot g^{\alpha_1 1} \dots g^{\alpha_n n} = \frac{1}{+\sqrt{|g|}} \varepsilon^{i_1 \dots i_n}.$

$+\sqrt{|g|}$ solo se define en espacios vectoriales orientados.

θ se llama tensor de permutación u orientación. Es totalmente hemisimétrico:
 $\theta \in V_n^{(n)} \Rightarrow$

$$\theta \begin{cases} \theta^{1 \dots n} \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n = \frac{1}{+\sqrt{|g|}} \bar{e}_1 \wedge \dots \wedge \bar{e}_n \\ \theta_{1 \dots n} \bar{e}^1 \wedge \dots \wedge \bar{e}^n = +\sqrt{|g|} \bar{e}^1 \wedge \dots \wedge \bar{e}^n \end{cases} \quad (12.3)$$

12.4.2. Tensor adjunto $T_A = \text{adj}(T)$ de un tensor $T \in V_n^{(p)}$ en un \mathcal{E}_n .

Definición:

Se define como tensor adjunto del tensor T al tensor

$T_A = \frac{1}{p!} C_{1,n+1}[\theta \otimes T]$, es decir, sus componentes serán:

$$T_A = \begin{cases} \frac{1}{p!} \theta_{i_1 \dots i_n} t^{i_1 \dots i_p} (\bar{e}^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{i_n}) \\ \frac{1}{p!} \theta^{i_1 \dots i_n} t_{i_1 \dots i_p} (\bar{e}_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}) \\ \frac{1}{p!} \theta^{i_1}_{i_2 \dots i_n} t_{i_1}^{i_2 \dots i_p} (\bar{e}_{i_{p+1}} \otimes \bar{e}^{i_{p+2}} \dots \otimes \bar{e}^{i_n}) \end{cases} \in V_n^{(n-p)}. \quad (12.4)$$

Consecuencias:

Como $t_{\underbrace{i_1 \dots i_p}_{H} \dots i_r} \overbrace{U^{i_1 \dots i_p} \dots i_r}^H = p! t_{(i_1 \dots i_p) \dots i_r} U^{(i_1 \dots i_p) \dots j_s}$, tendremos que,

$$T_A = \begin{cases} \theta_{(i_1 \dots i_p) i_{p+1} \dots i_n} t^{(i_1 \dots i_p)} (\bar{e}^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{i_n}) \\ \theta_{(i_1 \dots i_p) i_{p+1} \dots i_n} t_{(i_1 \dots i_p)} (\bar{e}_{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{i_n}) \end{cases}, \text{ o, también,}$$

$$T_A = \begin{cases} \theta_{(i_1 \dots i_p) (i_{p+1} \dots i_n)} t^{(i_1 \dots i_p)} (\bar{e}^{(i_{p+1})} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{(i_n)}) \\ \theta_{(i_1 \dots i_p) (i_{p+1} \dots i_n)} t_{(i_1 \dots i_p)} (\bar{e}_{(i_{p+1})} \otimes \dots \otimes \bar{e}_{(i_n)}) \end{cases}.$$

Propiedades:

$$1^a (T_A)_A = (-1)^{p(n-p)} T$$

$$2^a T_1, T_2 \in V_n^{(p)} \Rightarrow (T_1 = T_2 \Leftrightarrow \text{adj} T_1 = \text{adj} T_2)$$

$$3^a T_1, T_2, T_3 \in V_n^{(p)} \Rightarrow [(\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3)_A = \alpha (T_1)_A + \beta (T_2)_A + \gamma (T_3)_A].$$

12.5. Tensor adjunto del producto exterior

$(\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p)_A.$

Es el tensor $T = (\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p)_A =$

$$= \theta_{(i_1 \dots i_p) i_{p+1} \dots i_n} \begin{vmatrix} x_1^{(i_1)} & \dots & x_1^{(i_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p^{(i_1)} & \dots & x_p^{(i_p)} \end{vmatrix} (\bar{e}^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{i_n}) =$$

$$= \sqrt{g} \varepsilon \begin{vmatrix} x_1^{(i_1)} & \dots & x_1^{(i_p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p^{(i_1)} & \dots & x_p^{(i_p)} \end{vmatrix} (\bar{e}^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{i_n}) = \sqrt{g} \varepsilon t^{(i_1 \dots i_p)} (\bar{e}^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{i_n}) =$$

$$\sqrt{g} \delta_{(i_1 \dots i_p) i_{p+1} \dots i_n}^{1 \dots n} t^{(i_1 \dots i_p)} (\bar{e}^{i_{p+1}} \otimes \dots \otimes \bar{e}^{i_n}) =$$

$$\delta_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{(i_1 \dots i_n)} x_1^{\alpha_1} \dots x_p^{\alpha_p} \Rightarrow$$

$$T = (\bar{x}_1 \wedge \dots \wedge \bar{x}_p)_A = C_{1,n+1}(\theta \otimes \bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_p). \quad (12.5)$$

$$\vdots$$

$$p, n+p$$

12.6. Producto vectorial y mixto en \mathcal{E}_n .

12.6.1. Producto vectorial:

Es un vector $\bar{v} \in \mathcal{E}_n$, que se define como:

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \bar{x}_1 \times \cdots \times \bar{x}_{n-1} = (\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_{n-1})_A = \\
 &= \begin{cases} \theta_{i_1 \cdots i_n} x_1^{j_1} \cdots x_{n-1}^{i_{n-1}} \bar{e}^{i_n} \\ \theta^{i_1 \cdots i_n} x_{1,i_1} \cdots x_{n-1,i_{n-1}} \bar{e}_{i_n} \end{cases} \Rightarrow \\
 \bar{v} &= +\sqrt{g} \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1}^1 & \cdots & x_{n-1}^n \\ \bar{e}^1 & \cdots & \bar{e}^n \end{vmatrix} = \\
 &= +\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n} \\ \bar{e}_1 & \cdots & \bar{e}_n \end{vmatrix}. \tag{12.6}
 \end{aligned}$$

12.6.2. Producto mixto:

Es un escalar intrínseco $u \in R$, que se define como:

$$\begin{aligned}
 u &= [\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n] = (\bar{x}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{x}_n)_A = \begin{cases} \theta_{i_1 \cdots i_n} x_1^{j_1} \cdots x_{n-1}^{i_n} \\ \theta^{i_1 \cdots i_n} x_{1,i_1} \cdots x_{n,i_n} \end{cases} \Rightarrow \\
 u &= +\sqrt{g} \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \\
 &= +\frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}. \tag{12.7}
 \end{aligned}$$

Capítulo 13

Bibliografía:

1. Lichnerowicz, A.: *Elementos de cálculo tensorial*, Aguilar (1972). A pesar de su relativa antigüedad sigue considerándose como la base imprescindible del cálculo tensorial. Lo cierto es que el cálculo tensorial no ha variado mucho, a nivel docente, desde el pasado siglo.
2. Levi-Civita, T.: *Der absolute Differentialkalkül*, Springer (1928). Libro histórico para los adeptos e iniciados.
3. Cartan, E.: *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars (1946). Es otro libro histórico, bastante claro e interesante.
4. Lawden, D.F.: *An introduction to tensor calculus, relativity and cosmology*, Wiley (1986). Aunque más moderno que los anteriores está enfocado a la relatividad general.
5. Anderson, J. L.: *Principles of relativity physics*, Academic Press (1967). Al igual que el anterior, se centra en la relatividad general.
6. González de Posada, F.: *Problemas de análisis tensorial*, Copygraph (1972). Los problemas que incluimos en nuestros apuntes han sido extraídos de este texto. Contiene una rica colección de problemas con sus soluciones.