EJERCICIOS del TEMA 1: Introducción

1. Sea Σ un cierto alfabeto y sean **x**, **y**, **z** palabras de Σ^*. Prueba por inducción (sobre los naturales o sobre las palabras, según el caso) las siguientes propiedades:

- **a)** $\mathbf{x}^n \bullet \mathbf{x}^m = \mathbf{x}^{n+m}$
- **b)** $(\mathbf{x} \bullet \mathbf{y})^R = \mathbf{y}^R \bullet \mathbf{x}^R$
- **c)** $(\mathbf{x}^n)^R = (\mathbf{x}^R)^n$
- **d)** $(\mathbf{x}^R)^R = \mathbf{x}$
- **e)** $|\mathbf{x} \bullet \mathbf{y}| = |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$
- **f)** $|\mathbf{x}^n| = n * |\mathbf{x}|$
- **g)** $|\mathbf{x}^R| = |\mathbf{x}|$

2. Define inductivamente las siguientes funciones y predicados sobre palabras:

- **a)** ig(**x**,**y**) (= verdadero cuando **x** e **y** son iguales)
- **b)** ndob(**x**) (= el nº de veces que en **x** aparecen dos símbolos iguales seguidos)
- **c)** maslar(**x**,**y**) (= verdadero cuando **x** es estrictamente más larga que **y**)
- **d)** sufsin(**x**,**s**) (= el sufijo más largo de **x** que no contiene el símbolo **s**)
- **e)** ulsimig(**x**,**y**,**n**) (= cierto cuando los últimos **n** símbolos de las palabras **x** e **y** son iguales)

3. Siendo $\Sigma = \{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$, indica ejemplos de palabras pertenecientes y no pertenecientes a cada uno de los lenguajes siguientes:

- **a)** $\{ \mathbf{w} \in \Sigma^*: \mathbf{w}\bullet\mathbf{w} = \mathbf{w}\bullet\mathbf{w}\bullet\mathbf{w} \}$
- **b)** $\{ \mathbf{w} \in \Sigma^*: \exists\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Sigma^*, \mathbf{u}\bullet\mathbf{v}\bullet\mathbf{w} = \mathbf{w}\bullet\mathbf{v}\bullet\mathbf{u} \}$
- **c)** $\{ \mathbf{w} \in \Sigma^*: \exists\, \mathbf{u} \in \Sigma^*, \mathbf{w}\bullet\mathbf{w}\bullet\mathbf{w} = \mathbf{u}\bullet\mathbf{u} \}$

4. Da expresiones formales similares a las utilizadas en el ejercicio anterior para definir los siguientes lenguajes sobre el alfabeto {**0**,**1**}:

- **a)** Palabras que contienen tres **0**'s exactamente.
- **b)** Palabras que contienen al menos tres **0**'s.
- **c)** Palabras que contienen a lo sumo tres **0**'s.
- **d)** Palabras que contienen la subpalabra **000** pero no **001**.
- **e)** Palabras con alguna subpalabra de tres o más símbolos que se repite tres o más veces.

f) Palabras en las que ningún sufijo no vacío coincide con uno de sus prefijos.

g) Palabras con un sufijo palíndromo de más de 3 símbolos.

h) Palabras a las que podemos concatenar alguna otra palabra distinta de ellas de manera que resulte un palíndromo.

5. Dados los siguientes lenguajes sobre el alfabeto {**0**,**1**,**2**}, escríbelos en función de otros lenguajes más simples utilizando las operaciones de lenguajes.

a) Palabras que tienen longitud múltiplo de 5 ó 3.

b) Palabras que contienen la subcadena **101** pero no contienen las subpalabras **010** ni **202**.

c) Palabras que contienen un número de **2**'s, de **1**'s ó de **0**'s múltiplo de 3.

d) Palabras que tienen un número par tanto de **0**´s como de **1**'s.

e) Palabras que se pueden dividir en dos partes: en la primera no aparece la secuencia **012**, y en la segunda aparece al menos dos veces la cadena **001**.

f) Palabras en las que los **1**'s aparecen en grupos exactamente de dos.

g) Palabras tales que las subpalabras que contienen solamente **1**'s tienen longitud máxima dos.

6. Sea L un lenguaje sobre un cierto alfabeto $\sum$ ¿Pueden L^* ó L^+ ser finitos ? ¿en qué casos? ¿Y puede ser $L^* = L^+$? ¿En qué casos $\varepsilon \in \sum$?

7. Piensa sobre la veracidad de la siguiente afirmación:

La razón de que $\varnothing^* = \varnothing$ es que $L \bullet \varnothing = \varnothing \bullet L = \varnothing$ para cualquier lenguaje L.

8. Sea $\sum$ cualquier alfabeto, sean L, L_1, L_2 y L_3 lenguajes definidos sobre él y sean **m**, **n** números naturales. Denotamos por $\mathcal{E}$ el lenguaje de la palabra vacía { ε }.

a) Demostrar las siguientes propiedades:

a 1) $(L_1 \bullet L_2) \bullet L_3 = L_1 \bullet (L_2 \bullet L_3)$

a2) $L \bullet \mathcal{E} = \mathcal{E} \bullet L = L$

a3) $L \bullet \varnothing = \varnothing \bullet L = \varnothing$

a4) $(L^*)^* = L^*$

a5) $L_1 \bullet (L_2 \cup L_3) = L_1 \bullet L_2 \cup L_1 \bullet L_3$

a6) $(L^n)^R = (L^R)^n$

b) Demuestra que no se verifican las siguientes propiedades:

b1) $L_1 \bullet L_2 = L_2 \bullet L_1$

b2) $(L_1 \bullet L_2)^n = L_1^n \bullet L_2^n$

b3) $(L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$

b4) $(L_1 \cap L_2)^* = L_1^* \cap L_2^*$

b5) $L^R \bullet L = L \bullet L^R$

c) De las propiedades que se enuncian a continuación algunas son ciertas y otras no. Dí cuáles son y demuéstralo en cada caso.

c1) $(L^m)^n = L^{mn}$

c2) $L^+ \bullet L^+ = L^+$

c3) $(L_1 \cup L_2) \bullet L_3 = L_1 \bullet L_3 \cup L_2 \bullet L_3$

c4) $(L_1 \cap L_2) \bullet L_3 = L_1 \bullet L_3 \cap L_2 \bullet L_3$

c5) $L_1 \cup (L_2 \bullet L_3) = (L_1 \cup L_2) \bullet (L_1 \cup L_3)$

c6) $L_1 \cap (L_2 \bullet L_3) = (L_1 \cap L_2) \bullet (L_1 \cap L_3)$

9. Supóngase que la Facultad de Informática de San Sebastián ha decidido aceptar las matrículas interactivamente por Web. Para ello el usuario debe rellenar los datos utilizando un interface que debe detectar errores en la entrada de datos. ¿Qué lenguajes describen los siguientes campos?

a) Los nombres y apellidos pueden ocupar un máximo de 40 caracteres, que podrán ser letras o guiones y pueden estar separados por blancos (nombres compuestos).

b) La casilla correspondiente al DNI, puede rellenarse con el DNI o con el NIF. El DNI es una secuencia de como máximo, ocho dígitos y el NIF se forma con el DNI seguido de una letra.

c) La dirección postal debe estar precedida de **c/** si es calle, **Pza.** si es una plaza, **Avda.** si es una avenida, o **R.** (resto) si no es ninguna de estas tres cosas, pudiendo aparecer en minúsculas o mayúsculas. A continuación debe estar el nombre de la calle, que debe ocupar un máximo de 50 caracteres en los que sólo pueden aparecer letras, espacios en blanco, o guiones.

d) El número de la dirección postal debe ser una secuencia de, como máximo, cuatro dígitos.

e) El código postal está compuesto de cinco dígitos