

Análisis de Imágenes Digitales

Filtros en el dominio de la frecuencia

Dr. Wilfrido Gómez Flores



Introducción

Una imagen está compuesta por la suma de imágenes base. 

Introducción

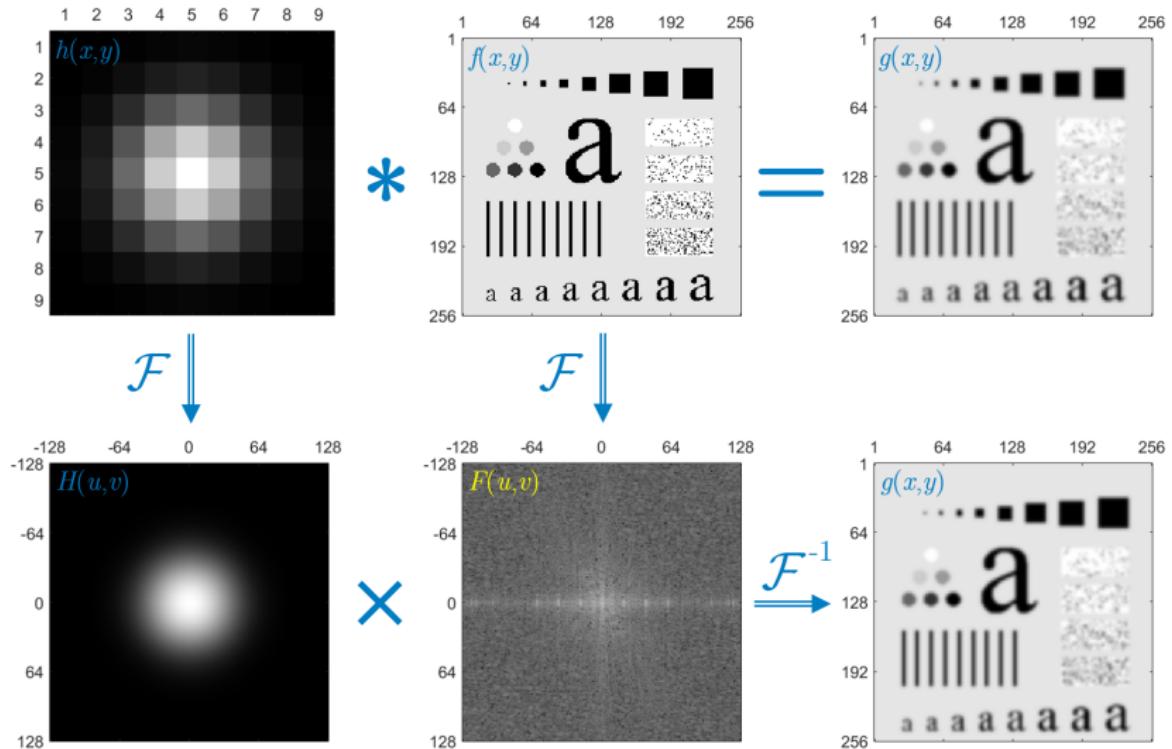
- El filtrado de imágenes en el dominio de la frecuencia se basa en el *teorema de convolución*:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) * h(x, y) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)H(u, v)] \end{aligned} \quad (1)$$

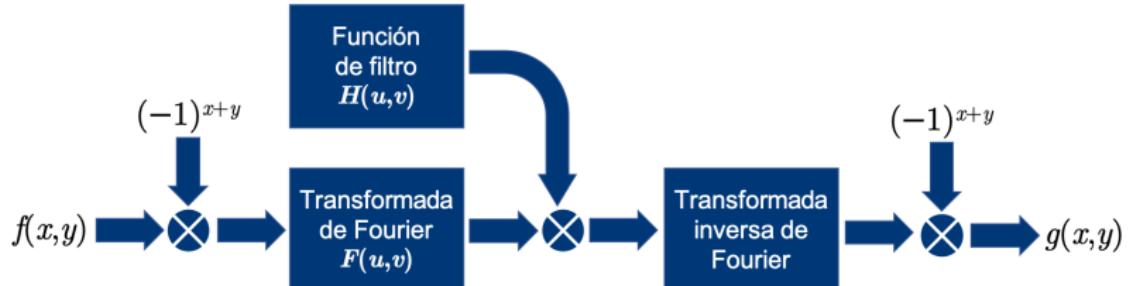
donde $F(u, v)$ es la DFT de $f(x, y)$, \mathcal{F}^{-1} es la transformada inversa, y $H(u, v)$ es una función de filtrado.

- En la *convolución en frecuencia*, las matrices $H(u, v)$ y $F(u, v)$ son de tamaño $M \times N$.
- Para acelerar el proceso de filtrado se utiliza la FFT.

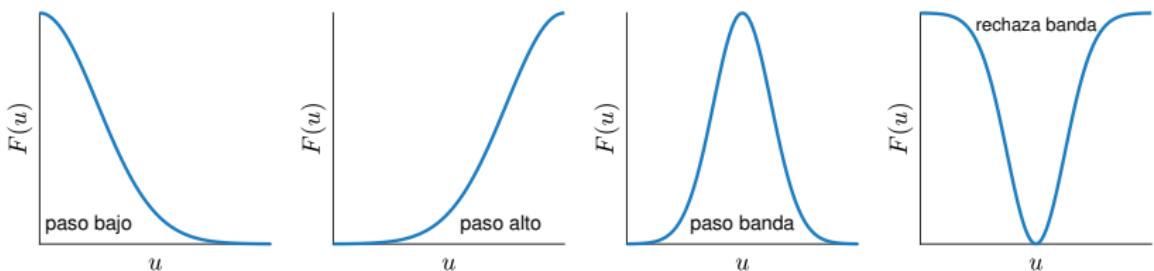
Introducción



Introducción



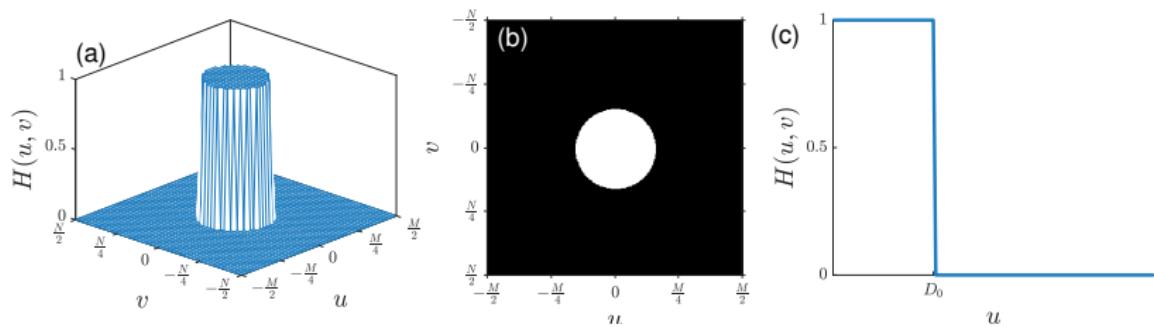
Algoritmo para el filtrado de imágenes digitales en el dominio de la frecuencia. Las funciones de filtro pueden ser paso bajos (filtro suavizante), paso altos (detector de bordes), paso banda (realce de características), y rechaza banda (atenuación local de frecuencias).



Filtros suavizantes

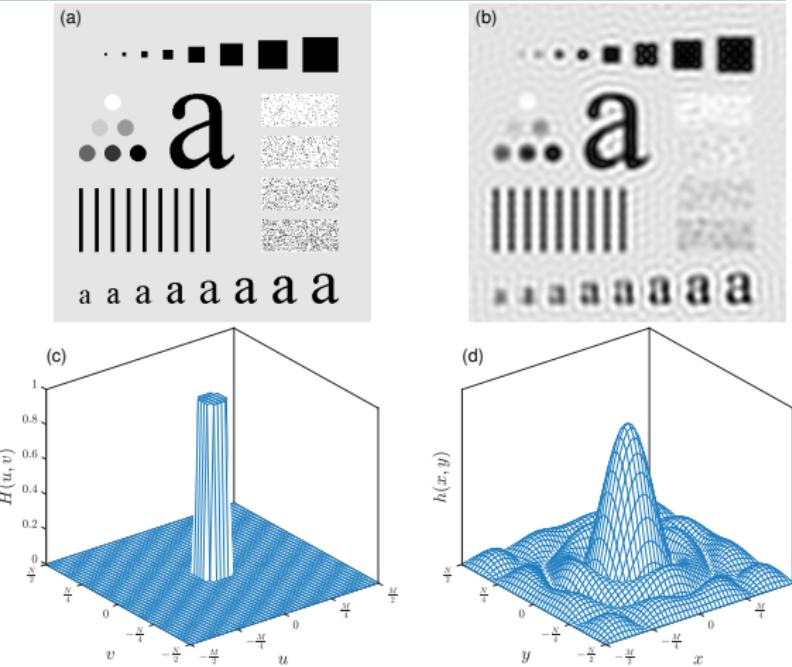
Filtro ideal – corta abruptamente las frecuencias altas a partir de una frecuencia de corte D_0 :

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases}, \text{ con } D(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (2)$$



Filtro ideal: (a) función de filtro $H(u, v)$, (b) función de intensidad, y (c) sección transversal radial de $H(u, v)$ con frecuencia de corte D_0 .

Filtros suavizantes

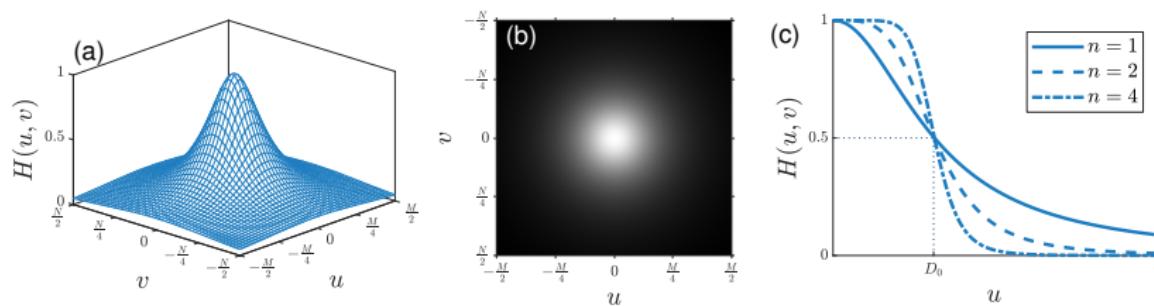


(a) Imagen original. (b) Filtrado ideal. (c) Función de filtro ideal. (d) Transformada de Fourier inversa del filtro ideal. Nótese que se produce un efecto de *rizado* en la imagen filtrada debido a que la transformada de Fourier de un impulso es la función Sinc. Por tanto, el filtro ideal no se usa en la práctica.

Filtros suavizantes

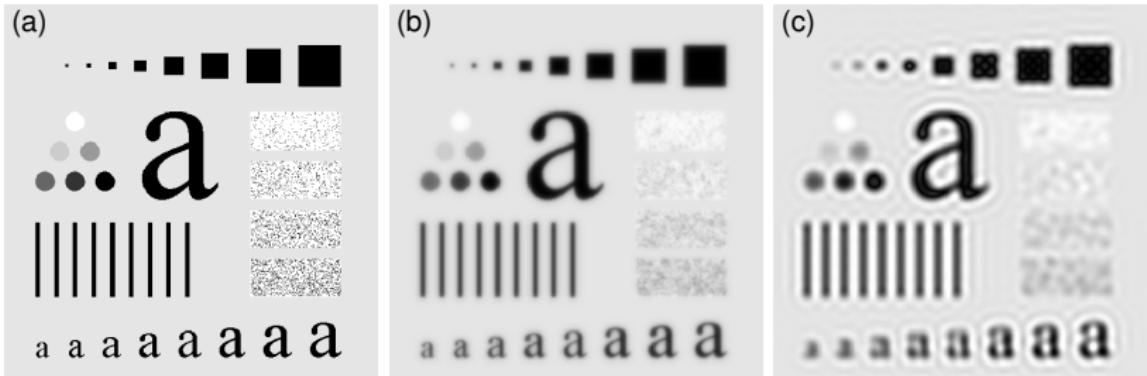
Filtro Butterworth de orden n – en la frecuencia de corte D_0 la magnitud de la señal decrece 50 %:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0} \right]^{2n}} \quad (3)$$



Filtro Butterworth: (a) función de filtro $H(u, v)$, (b) función de intensidad, y (c) sección transversal radial de $H(u, v)$ con frecuencia de corte D_0 y diferentes valores de n .

Filtros suavizantes

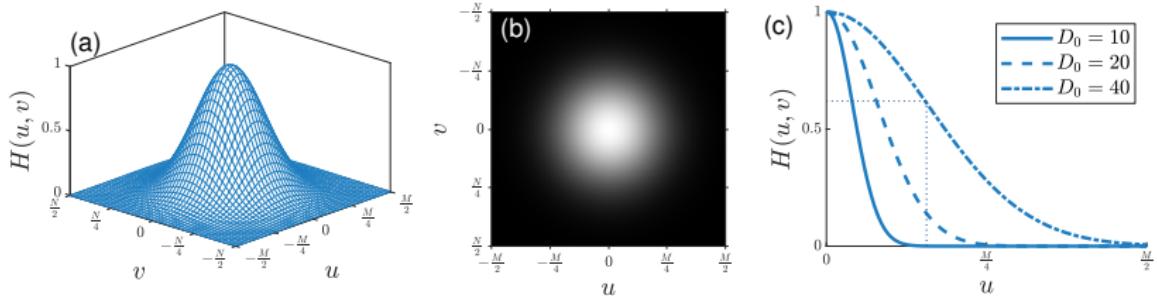


(a) Imagen original. (b) Filtrado Butterworth con $n = 1$. (c) Filtrado Butterworth con $n = 10$. A mayor orden del filtro la respuesta se aproxima al filtro ideal.

Filtros suavizantes

Filtro Gaussiano – en la frecuencia de corte D_0 la magnitud de la señal decae 60.7 %:

$$H(u, v) = \exp \left[-\frac{D(u, v)^2}{2D_0^2} \right] \quad (4)$$



Filtro Gaussiano: (a) función de filtro $H(u, v)$, (b) función de intensidad, y (c) sección transversal radial de $H(u, v)$ con diferentes frecuencias de corte D_0 .

Filtros suavizantes



- (a) Imagen original. Filtrado Gaussiano con diferentes frecuencias de corte:
(b) $D_0 = 10$, (c) $D_0 = 20$, y (c) $D_0 = 40$. A menor valor de D_0 , mayor suavizado de la imagen.

Filtros suavizantes



Comparativo de filtros suavizantes con $D_0 = 30$: (a) imagen original ruidosa, (b) ideal, (c) Butterworth de primer orden, y (d) Gaussiano.

Detección de bordes

- De manera general, la construcción de un filtro paso alto se puede realizar a partir de un filtro paso bajo:

$$H_{\text{hp}}(u, v) = 1 - H_{\text{lp}}(u, v) \quad (5)$$

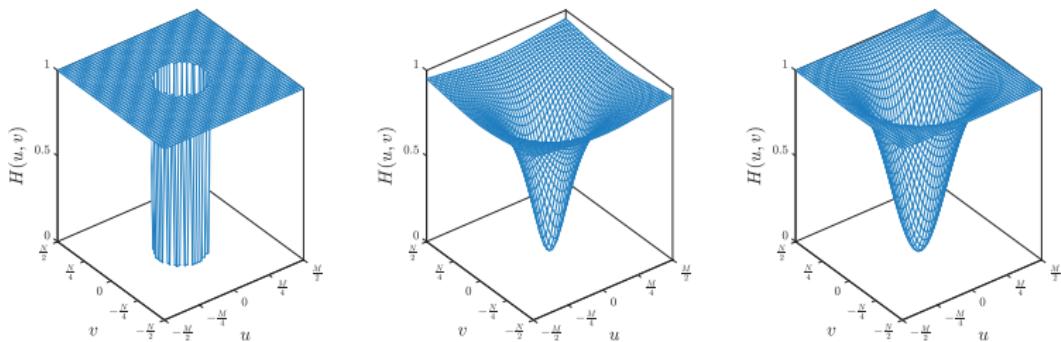
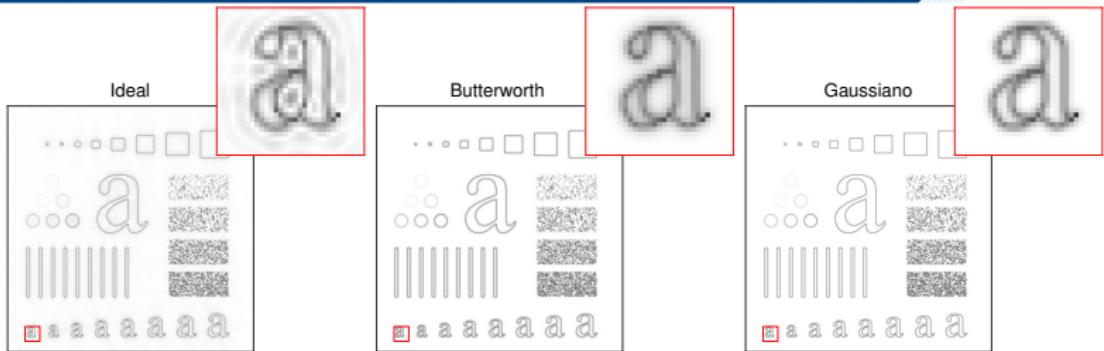
- Equivale a calcular cada función filtro de manera particular:

- **Ideal:** $H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases}$

- **Butterworth:** $H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)} \right]^{2n}}$

- **Gaussiano:** $H(u, v) = 1 - \exp \left[-\frac{D(u, v)^2}{2D_0^2} \right]$

Detección de bordes



Comparativo de filtros paso alto con $D_0 = 160$. Fila superior: detección de bordes. Se muestra el negativo del valor absoluto para fines ilustrativos. Fila inferior: funciones de filtrado de cada tipo.

Detección de bordes

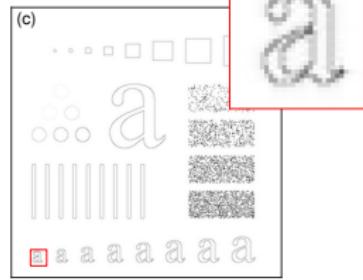
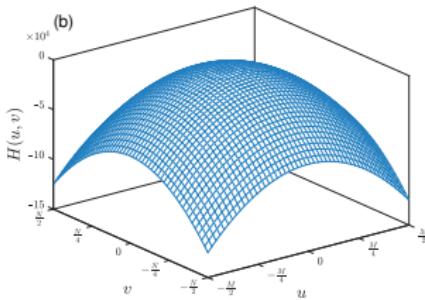
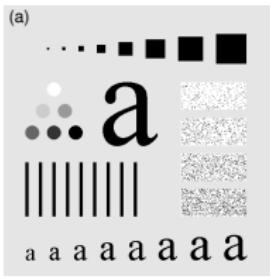
- El Laplaciano en el dominio de la frecuencia se define como:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} [\nabla^2 f(x, y)] &= \mathcal{F} \left[\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right] \\&= (ju)^2 F(u, v) + (jv)^2 F(u, v) \\&= -(u^2 + v^2) F(u, v) \\&= H(u, v) F(u, v)\end{aligned}\tag{6}$$

- Si el origen del espectro está en el centro del plano coordenado:

$$H(u, v) = - \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]\tag{7}$$

Detección de bordes



Laplaciano en el dominio de la frecuencia: (a) imagen original, (b) función de filtrado, y (c) detección de bordes. Se muestra el negativo del valor absoluto para fines ilustrativos.

Filtro *high-boost*

En el dominio de la frecuencia, el filtro *high boost* se calcula como:

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1} \{ [1 + kH_{hp}(u, v)] F(u, v) \} \quad (8)$$

donde $k > 0$ controla la contribución de las altas frecuencias.

Filtrado *high boost* con filtro paso alto Gaussiano y $D_0 = 80$. Primera parte: imagen original, segunda parte: $k = 10$, y tercera parte: $k = 30$. 

Filtro homomórfico

- El modelo de *iluminación-reflectancia* se puede usar para mejorar el contraste de la imagen en el dominio de la frecuencia:

$$\mathcal{F}[z(x, y)] = \mathcal{F}[\ln f(x, y)] = \mathcal{F}[\ln i(x, y)] + \mathcal{F}[\ln r(x, y)] \quad (9)$$

lo cual equivale a $Z(u, v) = F_i(u, v) + F_r(u, v)$.

- Se puede filtrar $Z(u, v)$ usando una función $H(u, v)$:

$$\mathcal{F}^{-1}[S(u, v)] = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F_i(u, v)] + \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F_r(u, v)] \quad (10)$$

lo cual equivale a $s(x, y) = i'(x, y) + r'(x, y)$.

- Finalmente, la imagen filtrada en el dominio espacial es:

$$g(x, y) = \exp[s(x, y)] = \exp[i'(x, y)] \exp[r'(x, y)] \quad (11)$$

Filtro homomórfico

Función de filtrado homomórfico:^a

$$H(u, v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left\{ 1 - \exp \left[-cD^2(u, v)/D_0^2 \right] \right\} + \gamma_L \quad (12)$$

donde $\gamma_L < 1$ atenúa la contribución de bajas frecuencias, $\gamma_H \geq 1$ amplifica la contribución de altas frecuencias, y c controla la pendiente de la transición entre γ_L y γ_H .



Resumen de pasos del filtrado homomórfico.

^a El modelo del sistema ya no es similar, sino una representación donde se ha efectuado una reducción.

Filtro homomórfico

Mejoramiento de contraste con filtro homomórfico: (a) imagen de PET original, (b) imagen mejorada con $D_0 \in [10, 100]$, $\gamma_L \in [0, 0.9]$, $\gamma_H \in [1, 1.5]$ y $c = 1$, y (c) sección transversal radial de la función de filtrado. 

Filtros *notch*

- Los filtros *notch* rechazan frecuencias en un vecindario predefinido, los cuales son simétricos respecto al origen del espectro (u_0, v_0) .
- Se construyen como productos de Q filtros paso alto cuyos centros se han desplazado del origen:

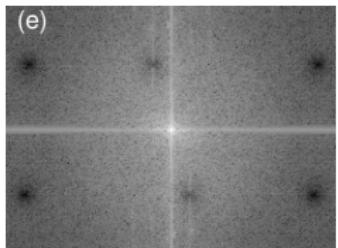
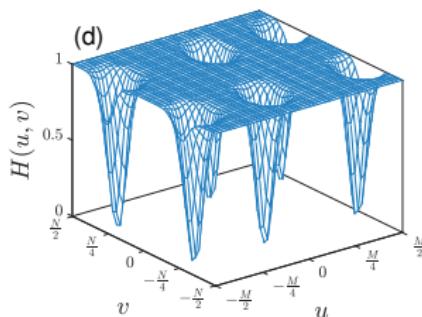
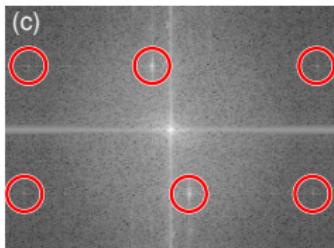
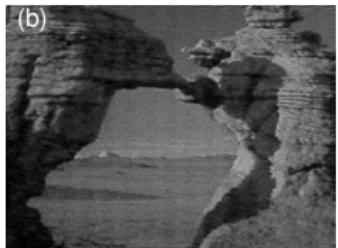
$$H(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v) \quad (13)$$

donde $H_k(u, v)$ y $H_{-k}(u, v)$ son filtros centrados en (u_k, v_k) y (u_{-k}, v_{-k}) , respectivamente, lo que implica que:

$$D_k(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} - u_k \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} - v_k \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$D_{-k}(u, v) = \left[\left(u - \frac{M}{2} + u_k \right)^2 + \left(v - \frac{N}{2} + v_k \right)^2 \right]^{1/2}$$

Filtros *notch*



Los filtros *notch* son útiles para reducir ruido periódico: (a) imagen original contaminada, (b) imagen filtrada, (c) espectro de Fourier de la imagen contaminada; los círculos señalan componentes ruidosas de alta energía, (d) función $H(u, v)$ basado en filtros paso alta Gaussianos, y (e) espectro de Fourier multiplicado por $H(u, v)$ con atenuación de componentes ruidosas.

Filtros de Gabor

- En el dominio de la frecuencia, la función de Gabor es:

$$H(u, v) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\hat{u} - u_k)^2}{\sigma_u^2} + \frac{\hat{v}^2}{\sigma_v^2} \right] \right\} + \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\hat{u} + u_k)^2}{\sigma_u^2} + \frac{\hat{v}^2}{\sigma_v^2} \right] \right\} \quad (14)$$

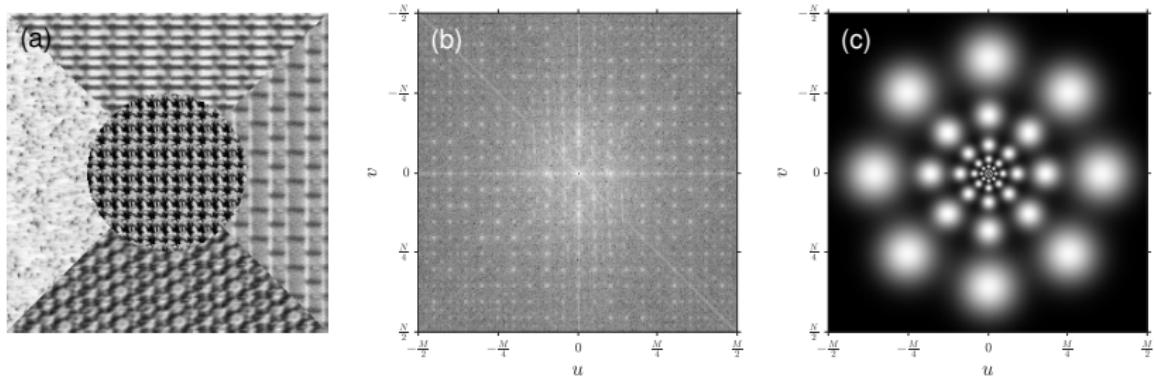
donde $\hat{u} = u \cos \theta + v \sin \theta$ y $\hat{v} = v \cos \theta - u \sin \theta$ son coordenadas rotadas un ángulo $\theta \in (0, \pi)$, y $\sigma_u = \sigma_v = \frac{1}{2\pi\sigma_b}$ son la escala del filtro en función del parámetro de ancho de banda b :

$$\sigma_b = \frac{1}{2u_k} \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \frac{2^b + 1}{2^b - 1}$$

- En un banco de filtros, las frecuencias radiales (u_k) se determinan de acuerdo con el ancho de la imagen (N_c):

$$u_k \in \left\{ 2^0 \sqrt{2}, 2^1 \sqrt{2}, 2^2 \sqrt{2}, \dots, 2^{\log_2(N_c/4)} \sqrt{2} \right\}$$

Filtros de Gabor



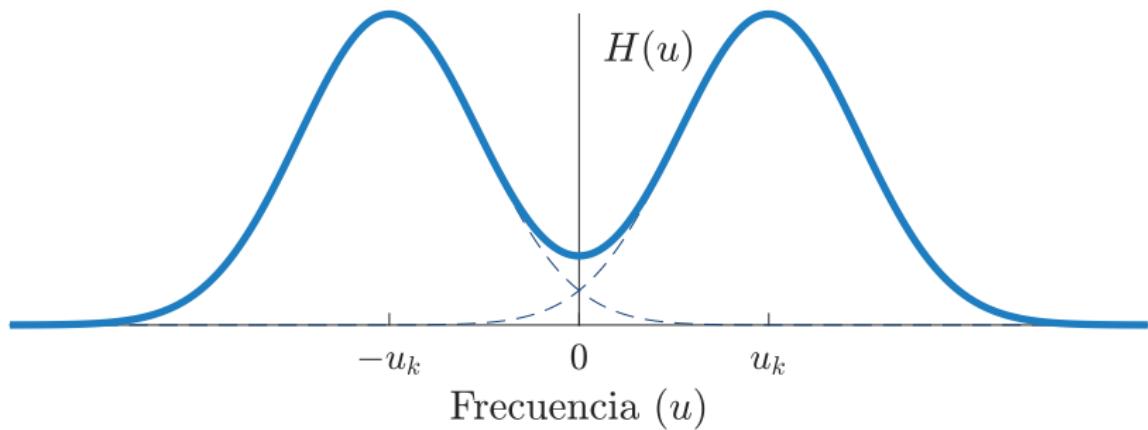
Los filtros de Gabor se utilizan para la extracción de texturas: (a) imagen original con cinco texturas, (b) espectro de Fourier con la componente DC = 0, y (c) banco de filtros de Gabor con paso de ángulo de $\pi/4$ y $b = 1$.

Filtros de Gabor

Banco de filtros de Gabor para extracción de texturas. 

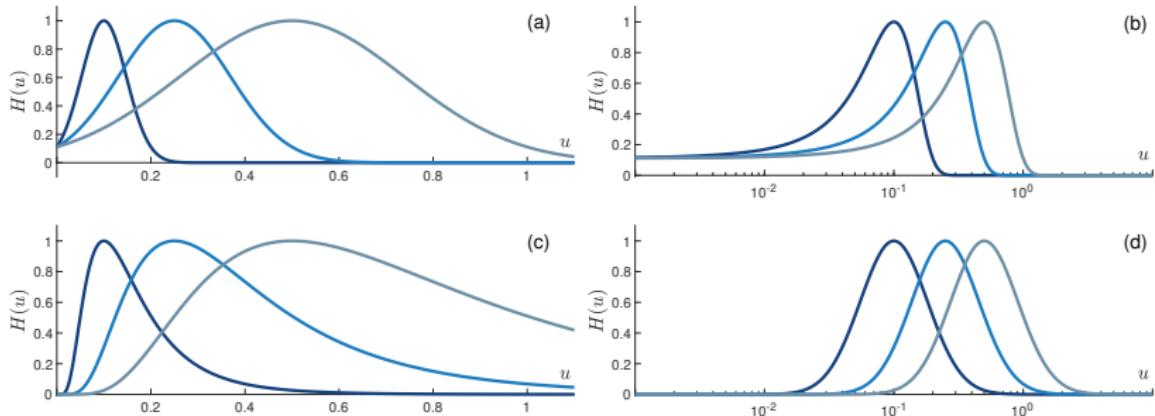
Filtros de Gabor

- Una banda tiene una *octava* de ancho cuando la frecuencia de la banda superior es el doble de la frecuencia de la banda inferior.
- El ancho de banda máximo de un filtro Gabor está limitado a aproximadamente una octava.



No se pueden construir funciones de Gabor de ancho de banda arbitrariamente amplio y aún mantener un componente de DC razonablemente pequeño en el filtro de simetría par.

Filtros de log-Gabor



El filtro de Gabor puede tener una respuesta distinta de cero en la frecuencia de DC, mientras que el log-Gabor siempre es cero. Debido a esto, el filtro de Gabor tiende a sobrerrepresentar las frecuencias más bajas: (a) Gabor – frecuencia lineal, (b) Gabor – frecuencia logarítmica, (c) log-Gabor – frecuencia lineal, y (d) log-Gabor – frecuencia logarítmica.

Filtros de log-Gabor

- El filtro de log-Gabor involucra una *componente radial* centrada en u_0 y una *componente angular* con orientación θ_0 :

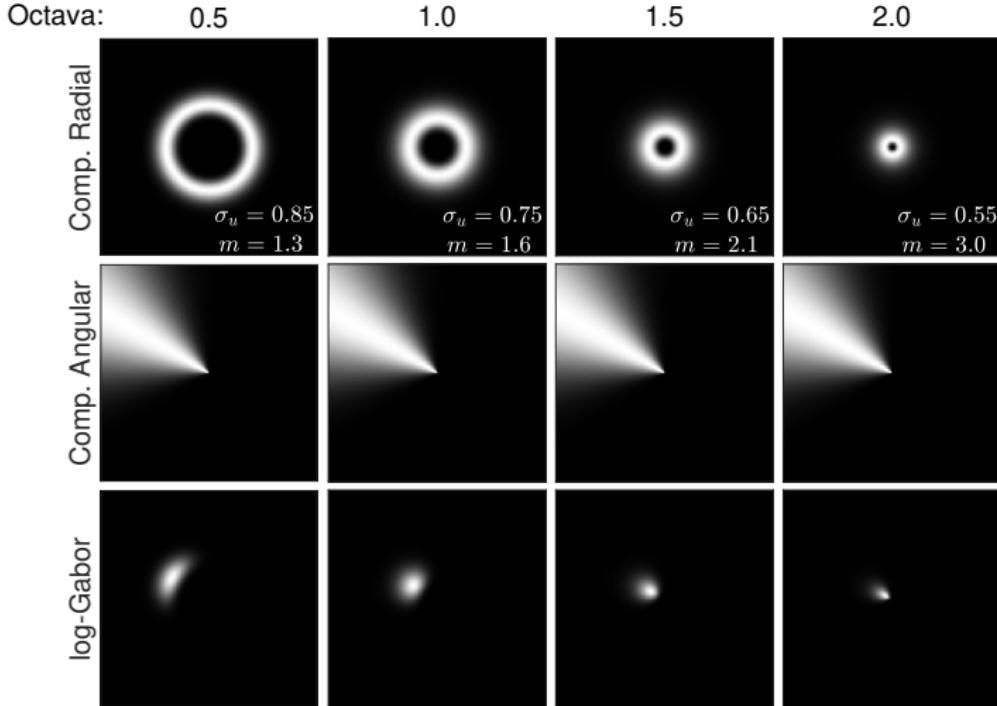
$$H(u, v) = \exp\left(\frac{-(\log(D(u, v)/u_0))^2}{2\log(\sigma_u)^2}\right) \exp\left(\frac{-(\theta - \theta_0)^2}{2\sigma_\theta^2}\right) \quad (15)$$

donde $\theta = \tan^{-1}(-v/u)$ es el ángulo y la diferencia de ángulos:

$$\theta - \theta_0 = \left| \tan^{-1} \left(\frac{\sin \theta \cos \theta_0 - \cos \theta \sin \theta_0}{\cos \theta \sin \theta_0 + \sin \theta \cos \theta_0} \right) \right| \quad (16)$$

- Frecuencia central: $u_0 = \frac{1}{\lambda m^{(s-1)}}$, donde λ es la longitud de onda, m es el incremento de escala y $s = 1, 2, \dots, n_s$.
- Orientación: $\theta_0 = \frac{(o-1)\pi}{n_o}$, donde $o = 1, 2, \dots, n_o$.
- Ancho de la componente angular: $\sigma_\theta = \frac{\pi}{r \cdot n_o}$, donde r es un parámetro de traslape entre intervalos angulares.

Filtros de log-Gabor



Filtros de log-Gabor para diferentes octavas aproximados por los valores σ_u y m en la componente radial. En general, $\lambda = 3$ y $r = 1.5$ garantizan una buena distribución de los filtros sobre el espacio de frecuencias.

Filtros de log-Gabor

Banco de filtros de log-Gabor para extracción de texturas. 