matesfacil

Construcción de Autómatas Finitos

Contenido de esta página:

Introducción

En esta sección vamos a ver cómo construir autómatas finitos (deterministas y no deterministas y con y sin pila) a partir de **expresiones regulares** o de la propia definición del lenguaje.

Recordamos al lector que las expresiones regulares son una forma de representar un lenguaje (regular). Veamos algunos ejemplos:

- $0(11)^*$

  El lenguaje de esta expresión regular lo conforman las palabras que empiezan por 0 seguidas de un número par de 1's (el asterisco significa que la subcadena a la que enierra puede repetirse tantas veces como se desee).

  La palabra $w = 0$ también es una palabra de dicho lenguaje y corresponde al caso en que la subcadena 11 se repite 0 veces.

- $(1+0)1^*$

  El lenguaje está formado por las palabras que empiezan por 0 o por 1 (el signo + representa la unión, es decir, o uno u otro) y que están seguidas (o no) por 1's.

- $(000)^*$

  Representa el lenguaje formado por las cadenas con un número múltiplo de 3 de ceros.

  La palabra vacía, ε, también forma parte de este lenguaje.

  También podemos escribir este lenguaje como

  $$L = \{0^{3n} : n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\}$$

- L = { $1^n 0^m$: $n, m \geq 0$ naturales}

  Este lenguaje también puede expresarse mediante la expresión regular 0*1*. Sin embargo, si exigimos que $n = m$ ya no es posible expresarlo mediante una expresión

regular ya que dicho lenguaje no es regular. Es un lenguaje libre del contexto.

Páginas relacionadas:

- Autómatas Finitos y su Lenguaje.
- Lema de Bombeo para Lenguajes Regulares.
- Máquinas de Turing.
- Teoremas sobre Autómatas Finitos, Lenguajes Regulares y Gramáticas Libres del Contexto.

Problemas resueltos

PROBLEMA 1

Dado el alfabeto

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

construir un **Autómata Finito Determinista** de 4 estados como máximo, que acepte el lenguaje representado por la siguiente expresión regular

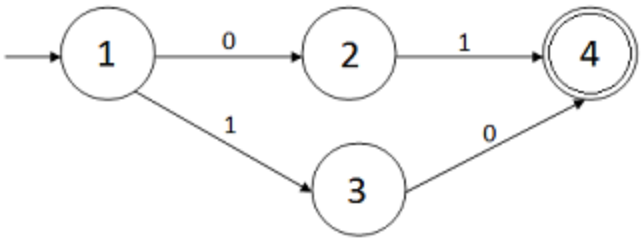
$$((01 + 10)(11)^*0)^*(01 + 10)(11)^*$$

Ver solución

Vamos a representar el autómata por partes, es decir, iremos obteniendo autómatas hasta llegar al autómata final que se pide.

El primer autómata que vamos a escribir es de cuatro estados y acepta el siguiente lenguaje

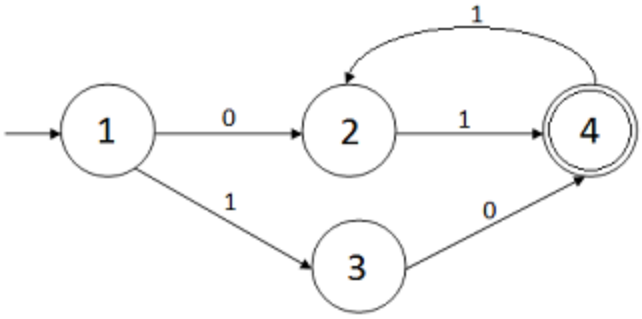
$$(01 + 10)$$



No hacemos ningún comentario ya que el autómata es simple.

Ahora vamos a añadir las cadenas $(11)^*$, es decir, el siguiente autómata acepta el lenguaje

$$(01 + 10)(11)^*$$



Hemos añadido sólo un arco etiquetado con *1* del estado 4 (el final) al estado 2.

Veamos su funcionamiento:

- como el arco empieza en el estado final, cabe la posibilidad de no usarse, es decir, lo que corresponde con el elemento

$$\varepsilon \; de \; (11)^*$$

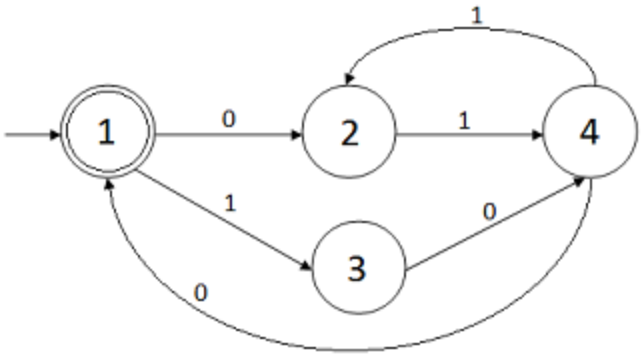
- que el arco acabe en el estado 2 asegura que una vez se accede al arco, necesariamente tiene que haber otro 1 para poder alcanzar el estado final, es decir, este arco sirve para concatenar la palabra *11*,

El siguiente paso es el lenguaje

$$((01+10)(11)^*0)^*$$

Queremos que todas las palabras anteriores terminen con un 0 y, además, la expresión está encerrada bajo un *, por lo que tendrá que haber un arco al estado inicial de modo que exista la posibilidad de recorrer el autómata tantas veces como se desee.

Está claro que el arco etiquetado con 0 tiene que comenzar en el estado 4. Nos vemos obligados a cambiar el estado final ya que, hasta ahora, no todas las palabras acaban en 0 (sólo la palabra *10*). Así pues, el estado final actual será el estado inicial anterior:



Observaciones:

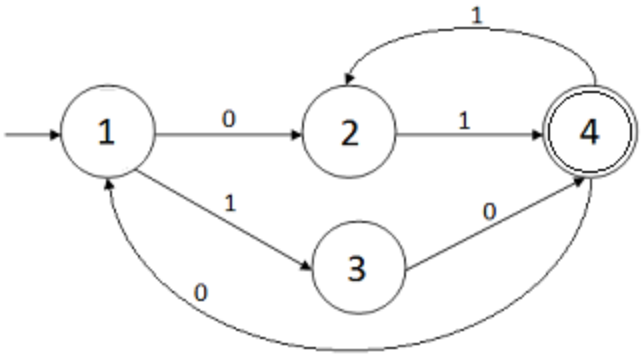
- El estado 1 es estado inicial y estado final. Esto no supone ningún problema ya que el último * incluye la posibilidad de tomar la palabra vacía

$$\varepsilon$$

En el siguiente paso vamos a concatenar las palabras del lenguaje

$$(01+10)(11)*$$

a las que ya teníamos anteriormente. Como la expresión anterior la hemos obtenido, en realidad, en el primer diagrama, será suficiente cambiar el estado final al estado 4:



Observaciones: si llamamos

$$a = (01 + 10)(11)^*$$

el lenguaje que queremos representar es

$$(a0)^*a$$

De este modo,

- si sólo se accede al estado 4 (estado final) una vez, la palabra es de la forma *a*
- si se accede *n + 1* veces al estado 4, la palabra es de la forma

$$(a0)_1(a0)_2 \dots (a0)_n a0$$

  donde el subíndice de cada paréntesis indica el número de veces que se repite la secuencia *a0*.

Por tanto, se trata de una palabra del lenguaje.

Tabla de la función de transición del AFD:

	0	1
$\rightarrow 1$	2	3
2	$\emptyset$	4
3	4	$\emptyset$
$*4$	1	2

PROBLEMA 2

Dado el alfabeto *Σ = { a, b, c }*, definir un Autómata Finito Determinista para el lenguaje formado por las cadenas *x* tales que $n_\alpha\ (x)$ es par y no existe ninguna subcadena *bc* en *x*.

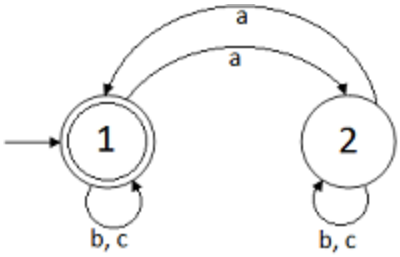
$n_\alpha\ (x)$ representa el número de *a*'s en la cadena *x*. Consideramos que el número 0 es un número par.

Ver solución

Tenemos dos condiciones para el estado final: $n_\alpha(x)$ par y que no haya subcadenas *bc* en *x*. Primero vamos a tratar la primera condición:

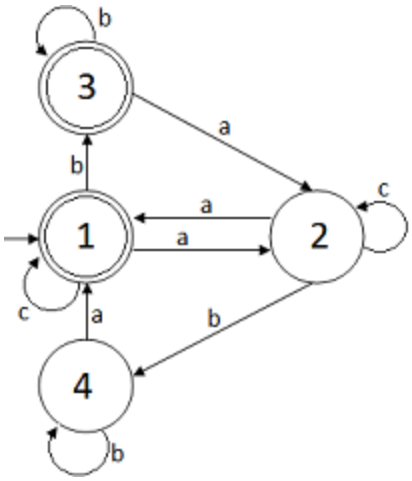
Definimos dos estados: $q = 1$ que es el inicial y también el final y $q = 2$. Estaremos en el primero cuando $n_\alpha(x)$ es par y en el segundo cuando es impar. Comenzamos en $q = 1$ ya que no tenemos ninguna *a*. Cambiaremos al otro estado cuando haya otra *a*. Si tenemos otra *a*, volveremos al primer estado.

Veamos el diagrama de este autómata que posteriormente modificaremos:



Este autómata controla la paridad de *a*'s pero no discrimina si existen o no subcadenas *bc*. Esto es lo que vamos a hacer ahora definiendo otros dos estados.

Mostramos el diagrama del autómata propuesto y después lo explicaremos:



- El autómata es finito y determinista.
- Los transiciones directas que hay entre los estados 1 y 2 se producen cuando se encuentra un símbolo *a* en la palabra. El primero corresponde a $n_\alpha(x)$ par y el segundo a $n_\alpha(x)$ impar. Por ello, el primer estado es un estado final.
- En el estado 1 hay un arco saliente y entrante con la etiqueta *c*. Esto se debe a que las *c*'s pueden aparecer concatenadas o detrás de una *a*.
- No sucede lo mismo que en el punto anterior con las *b*'s ya que éstas no pueden estar seguidas de una *c*. Por ello, cuando aparece una *b* (ya sea detrás de una *a* o de una *c* se accede a un estado distinto para asegurar que posteriormente no haya ninguna otra *c*. Este estado del que hablamos son en realidad dos: el estado 3 y el estado 4. Al estado 3 se accede desde el estado 1 (en el que $n_\alpha(x)$ es par) por lo que es un estado final ($n_\alpha(x)$ sigue siendo par). Al estado 4 se accede cuando $n_\alpha(x)$ es impar, por lo que no puede ser un estado final.

- Los estados 3 y 4 (cuando hay una *b*) no tienen arcos etiquetados con *c* para evitar la subcadena *bc*, pero sí tiene etiquetas *a*. Según si en el estado actual $n_\alpha(x)$ es par o no, se accede a los estados 1 ó 2 a través de un arco etiquetado con *a*.

- Los estados 3 y 4 tienen una etiqueta *b* saliente y entrante ya que las *b*'s pueden concatenarse.

Tabla de la funcón de transición del AFD:

	a	b	c
$\rightarrow 1^*$	2	3	1
2	1	4	2
3^*	2	3	$\emptyset$
4	1	4	$\emptyset$

PROBLEMA 3

Dado el alfabeto $\Sigma = \{ 0, 1 \}$, construir un Autómata Finito que acepte el siguiente lenguaje:

- Si la cadena no tiene ningún 1, entonces la cadena debe contener un número de par de 0's (consideramos al cero como par);

- si la cadena tiene un número par de 1's (y mayor que 0), la cadena debe terminar con un número impar de 0's;

- si la cadena tiene un número impar de 1's, la cadena debe terminar con un número par de 0's.

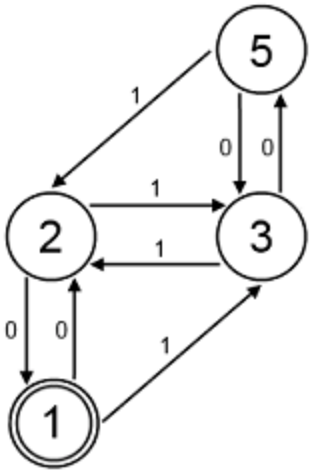
Ver solución

Lo primero que haremos es diferenciar entre número par o impar de 1's en la palabra. Para ello dispondremos de dos estados: $q = 2$ si es par y $q = 3$ si es impar.

Estos dos estados están unidos por dos arcos etiquetados con 1 ya que cada vez que aparece un nuevo 1 en la palabra cambia la paridad.

Para los 0's vamos a utilizar un estado distinto para cada uno de los estados $q = 2$ y $q = 3$: el estado $q = 1$ para $q = 2$ y el estado $q = 5$ para $q = 3$.

El diagrama es el siguiente (no es el final):



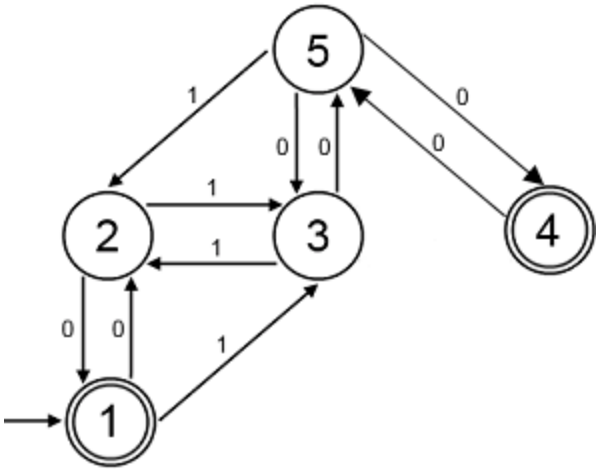
Observaciones:

- Notemos que de cada uno de estos dos estados (es decir, $q = 1$ y $q = 5$) parte también un arco etiquetado con 1 que nos conduce al estado *opuesto* del que venimos mediante el arco etiquetado con 0.

  Es decir, si estamos en $q = 1$ (desde $q = 2$) nos lleva a $q = 3$; si estamos en $q = 5$, nos lleva a $q = 2$. Esto lo hacemos así porque los estados 1 y 5 tienen memoria de paridad de unos. Luego al aparecer un 1 tenemos que cambiar de paridad.

- El estado 1 es un estado final ya que sólo se accede a él después de un número impar de 0's (bucle 2 <⋯> 1) y esto sólo ocurre el caso de número par de 1's.

El diagrama final del autómata es el siguiente:



Observaciones:

- Lo que nos permite el estado 4 es asegurar que las palabras que tienen un número impar de 1's terminen con una secuencia par de 0's (entrando en el bucle 5 <⋯> 4).

  Notemos que sólo accedemos a este estado cuando ya no habrá más 1's en la palabra.

- El estado 1 es el inicial. No hemos hablado de la primera de las condiciones (que si no hay 1's en la palabra, el número de 0's es par), pero este caso consiste en el bucle de estados 1 <⋯> 2.

- El autómata **no es determinista** ya que en algunos estados tenemos arcos salientes con la misma etiqueta pero que terminan en distintos estados.

La tabla de la función de transición es:

	0	1
$\rightarrow 1^*$	$\{2\}$	$\{3\}$
2	$\{1\}$	$\{3\}$
3	$\{5\}$	$\{2\}$
4^*	$\{5\}$	$\emptyset$
5	$\{4,\ 3\}$	$\{2\}$

PROBLEMA 4

Dado el alfabeto *Σ = { 0, 1 }*, considerar los siguientes lenguajes:

$$L_1 = \{(01)^n \ | n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{(10)^n \ | n \geq 0\}$$

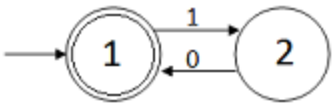
$$L_2 = L_3 = L_1 \cup L_2$$

Ver solución

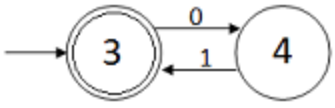
Construir el autómata finito que reconozca el lenguaje

$$L = L_3^*$$

Consideremos el siguiente autómata:



Es fácil ver que acepta el lenguaje L_1. Igualmente, el siguiente autómata acepta el lenguaje L_2:



Sabemos que dado un lenguaje L, por definición,

$$L^* := \cup_{i \in \mathbb{N}} L^i$$

Es fácil ver que las palabras de $L_1{}^2$ *son de la forma*

$$(10)^n(10)^m, \ \$n, m \geq 0$$

Pero

$$(10)^n(10)^m = (10)^{(n+m)}$$

y éste es un elemento de L_1. Es decir, podemos probar fácilmente por inducción que

$$L_1^* = L_1$$

Sucede lo mismo con el otro lenguaje:

$$L_2^* = L_2$$

Buscamos un autómata para el lenguaje

$$L = L_3^* = (L_1 \cup L_2)^*$$

Vamos a ver cómo son sus palabras:

$$L_3^1 = (L_1 \cup L_2) = \{(10)^n,\ (01)^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$L_3^2 = (L_1 \cup L_2)(L_1 \cup L_2) = \{(10)^t,\ (10)^m(01)^n,\ (01)^r(10)^s,\ (01)^u \mid t, m, n, r, s, u \in \mathbb{N}\}$$

Hemos tenido en cuenta que

$$(10)^n(10)^m = (10)^{(n+m)},\ n, m \geq 0$$

Además, podemos escribir

$$(10)^t = (10)^t(01)^0$$

para simplificar más.

Análogamente para *(01)*^{u}:

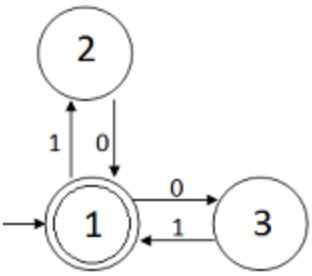
$$L_3^2 = \{(10)^m(01)^n,\ (01)^r(10)^s \mid m, n, r, s \in \mathbb{N}\}$$

$$L_3^3 = \{(10)^m(01)^n(10)^u,\ (01)^q(10)^r(01)^s \mid m, n, u, p, r, s \in \mathbb{N}\}$$

Podemos deducir que el lenguaje $L_3{}^*$ estará constituido por palabras formadas por la concatenación alternada o no de *(10)* y/o *(01)*, es decir,

$$L_3^* = ((10)^*(01)^*)^*$$

Este lenguaje es aceptado por el siguiente autómata (finito determinista):



PROBLEMA 5

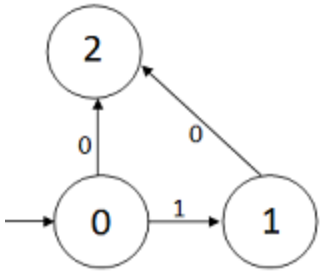
Dado el alfabeto $\Sigma = \{ 0, 1 \}$, construir el Autómata Finito Determinista equivalente a la siguiente expresión:

$$(((0+10)(10)^*(11+0))+11)(0+1)^*$$

Ver solución

Iremos construyendo el autómata paso a paso.

Para la expresión regular *(0+10)* tenemos el diagrama:

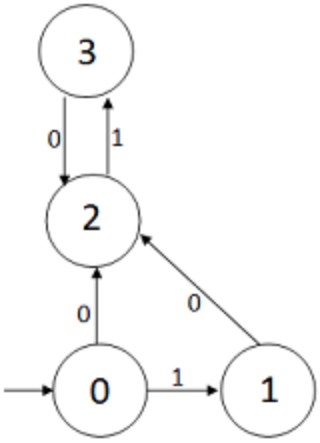


Observaciones:

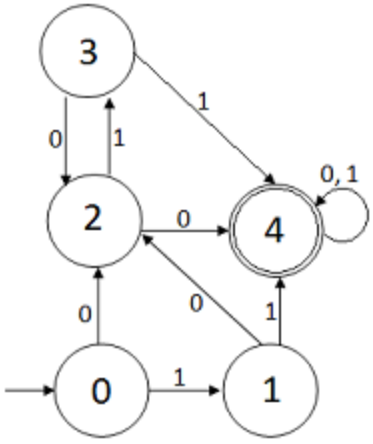
- El estado 0 es el inicial.
- Accedemos al estado 2 desde $q = 0$ mediante un arco etiquetado con 0, o bien, pasando por el estado $q = 1$ con la secuencia de arcos 1⋯> 0.

Queremos concatenar las palabras $(10)^*$. Para ello, debemos partir del estado $q = 2$. El operador * consiste en un bucle entre los estados $q = 2$ y $q = 3$.

El diagrama es:



Finalmente, vamos a añadir todas las partes que nos quedan:



Observaciones:

- El estado 0 es el inicial.
- Accedemos al estado *q = 2* desde *q = 0* mediante un arco etiquetado con 0, o bien, pasando por el estado *q = 1* con la secuencia de arcos 1 ⋯> 0.
- Después del bucle $(10)^*$ tenemos *(11+0)*. Una vez terminado el bucle (estamos en *q = 2*) pasamos al estado *q = 4*. Este cambio de estado puede ser a través del estado *q = 3* (en caso de concatenar *11*) o directamente desde *q = 2* (en caso de concatenar 0).
- Notemos que todo lo que hemos explicado anteriormente es una de las dos partes de la unión del paréntesis (el grande). Así que también debemos llegar hasta el estado *q = 4* simplemente con la cadena *11* desde el estado inicial. Esto lo hacemos aprovechando el estado *q = 1*.
- El estado *q = 4* es final ya que la última parte de la expresión regular tiene un *. Además, este estado tiene un arco con etiqueta doble para generar las posibles secuencias finales $(0+1)^*$.

El autómata que hemos obtenido es finito y determinista, con 5 estados y con un sólo estado final.

PROBLEMA 6

Dado el alfabeto *Σ = { a, b, c }*, construir un autómata a pila que reconozca el siguiente lenguaje:

$$L = \{a^i b^j c^k a^i \mid i, j > 0;\ k = j\}$$

Ver solución

Podemos escribir las palabras como

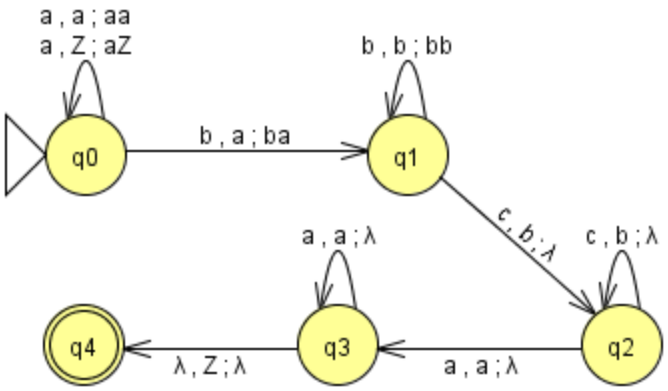
$$a^i b^j c^j a^i$$

De este modo, el esquema a seguir es sencillo:

- se guardan en la pila todos los símbolos hasta llegar al primer símbolo *c*, que no se guarda.

- Cada vez que se recibe una *c*, se borra una *b* de la pila.
- La última *b* se borra al recibir la *c*.
- Ahora en la pila sólo quedan *a*'s. Cada vez que se recibe una *a*, se borra otra de la pila.

El autómata es el siguiente:



Observaciones:

- El autómata acepta las palabras por estado final ($q = 4$), aunque también por pila vacía (al borrar el indicador de pila vacía, *Z*).
- El símbolo de pila *Z* indica pila vacía.
- El autómata a pila es determinista.

PROBLEMA 7

Dado el alfabeto $\Sigma = \{ a, b \}$, construir un autómata a pila que reconozca el lenguaje:

$$L = \{w \,|w \in \{a,b\}^*, n_a(w) \geq n_b(w)\}$$

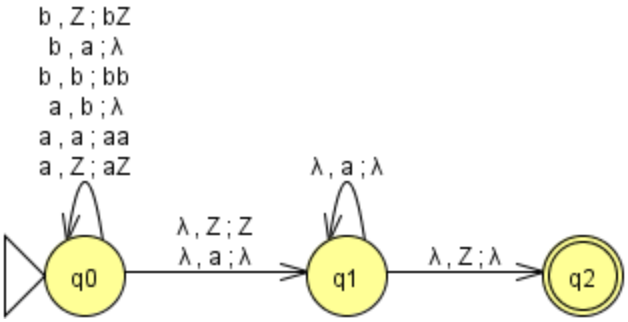
siendo

$$n_a(w)$$

el número de *a*'s en *w* y $n_b(w)$ el número de *b*'s.

Ver solución

El autómata es el siguiente:



Inicio