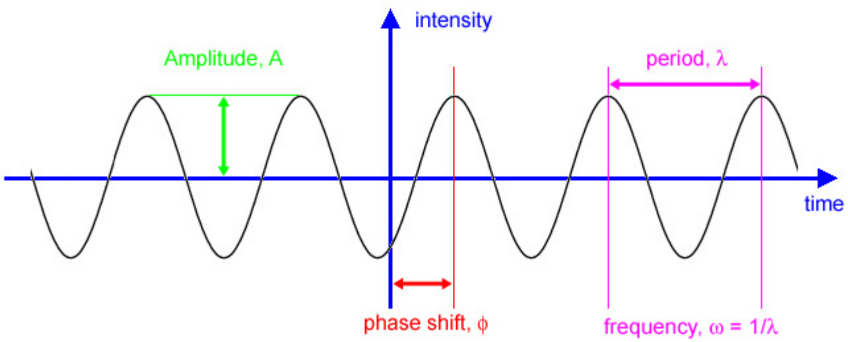
Procesamiento de Imágenes

Filtros en el dominio frecuencial

Transformada de Fourier 2D

Recordemos……

- La representación de una función por la SF significa: sumar funciones básicas, senos y cosenos, multiplicados por los coeficientes.



$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t\right)$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t - \phi_n\right)\right] dt \text{ for } n \geq 0$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\left[\sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} t - \phi_n\right)\right] dt \text{ for } n \geq 0$$

En forma compleja……

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{+i\frac{2\pi n}{\lambda}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|\, e^{+i\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right)}$$

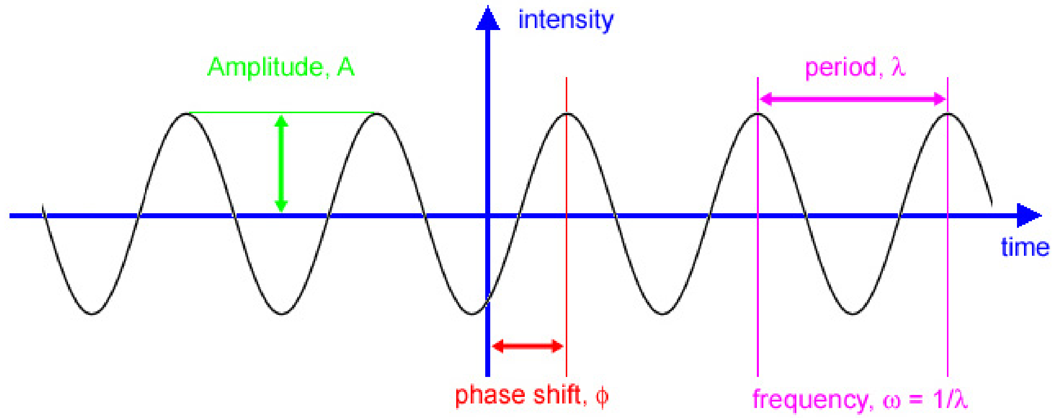
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n| \cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right) + i\cdot |C_n| \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t+\phi_n\right)$$

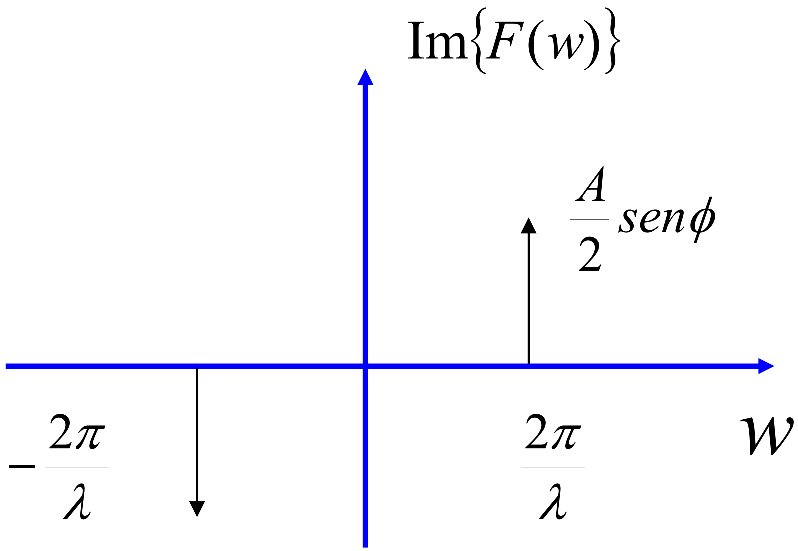
$$Cn = |Cn|\, e^{+i\phi_n} = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\, e^{-i\frac{2\pi n}{\lambda}t}\, dt$$

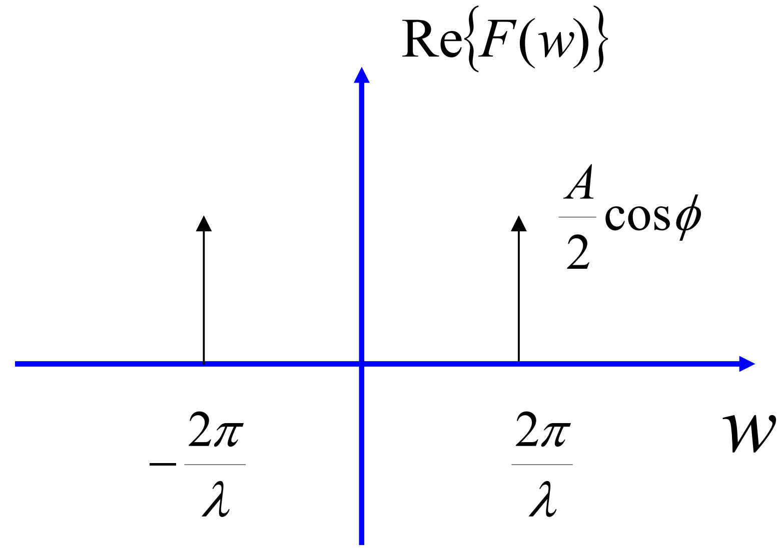
$$= \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f(t)\left[\cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t-\phi_n\right) - i\cdot \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda}t-\phi_n\right)\right]dt$$

Los coeficientes son complejos porque hay que representar la amplitud y fase de la sinusoide

$$f(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{\lambda} + \phi\right)$$







$$F(w) = \frac{A}{2}\cos\phi[\delta(w - 2\pi/\lambda) + \delta(w + 2\pi/\lambda)] + j\frac{A}{2} sen\phi[\delta(w - 2\pi/\lambda) - \delta(w + 2\pi/\lambda)]$$

TFD 1D

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) e^{-j\frac{2\pi xu}{N}} \qquad para\ u = 0,1,2,.....N-1$$

Transformada de Fourier (2D)

- Se define

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\,e^{\frac{-j2\pi xu}{N}}\,e^{\frac{-j2\pi yv}{N}}$$

$$F(u,v)=\sum_{r=0}^{R-1}\sum_{c=0}^{C-1} I(r,c)\,e^{\frac{-j2\pi cu}{C}}\,e^{\frac{-j2\pi rv}{R}}$$

- La TF 2D de una imagen: es una expansión de la función en términos de “imágenes cosenoidales” (funciones básicas).

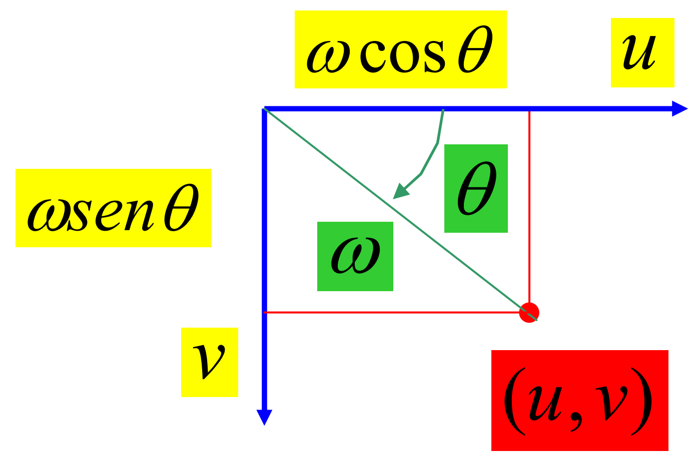
- En las 2 expresiones anteriores x e y son las coordenadas de los pixels.
- N es la cantidad de pixels según x e y.
- u y v son las frecuencias en el dominio de Fourier.
- En la segunda expresión suplantamos x e y por r (row) y c (column).
- C=cantidad de pixels en el sentido de las columnas.
- R=cantidad de pixels en el sentido de las filas.

Transformada de Fourier 2D

- ¿Qué son sinusoides 2D?

$$e^{\pm j2\pi\left(\frac{vr}{R}+\frac{uc}{C}\right)} = e^{\pm j\frac{2\pi}{N}(vr+uc)}$$

$$e^{\pm j\frac{2\pi}{N}(r\cos\theta + c\,sen\,\theta)}$$



$$donde \quad v = \omega sen\,\theta \quad u = \omega\cos\theta$$

$$\omega = \sqrt{v^2+u^2} \qquad \theta = tg^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) \qquad y \qquad \lambda = \frac{N}{\omega}$$

Por Euler

Sinusoides 2D……

$$e^{\pm j\frac{2\pi}{N}(r\cos\theta + c\,sen\theta)} = \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(r\,sen\theta + c\cos\theta\right)\right]$$

$$\pm\, j\,sen\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(r\,sen\theta + c\cos\theta\right)\right]$$

- Son sinusoides "gratings" con

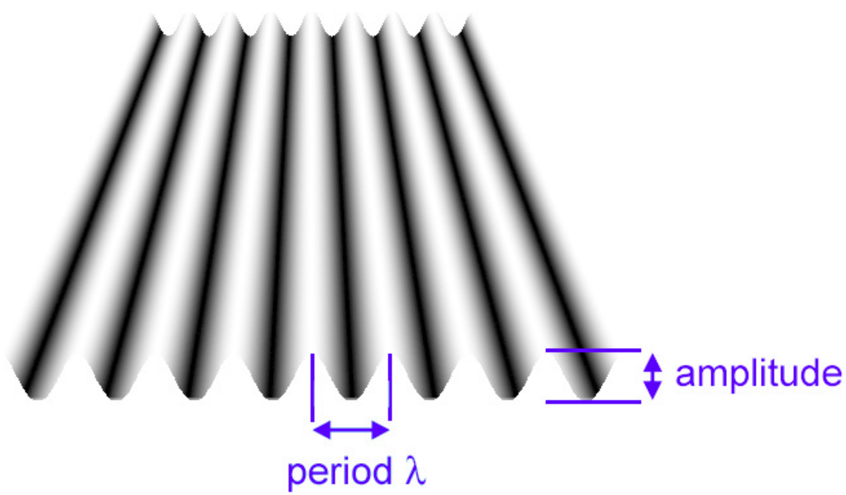
$$\frac{2\pi\omega}{N}\quad \textit{frecuencia en radianes} \qquad \frac{\omega}{N}\quad \textit{la frecuencia}$$

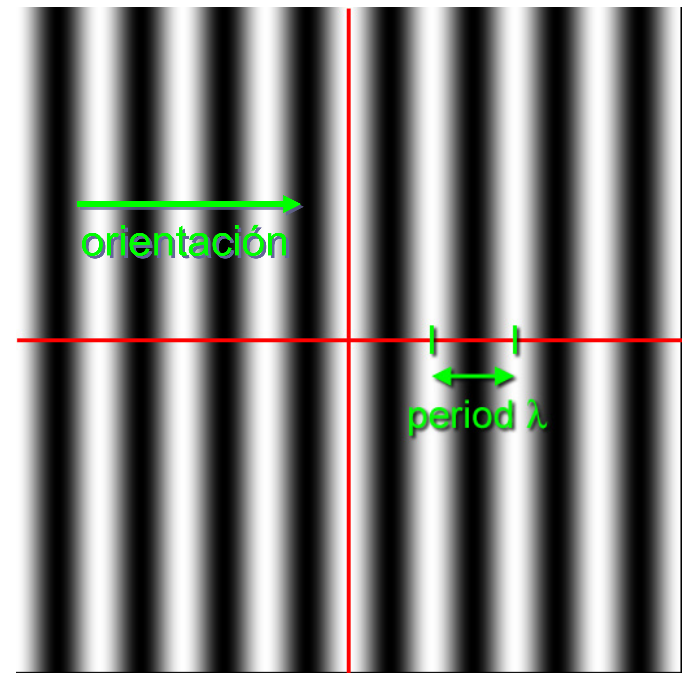
$$\lambda = \frac{N}{\omega}\quad \textit{el período}$$

Sinusoides 2D……

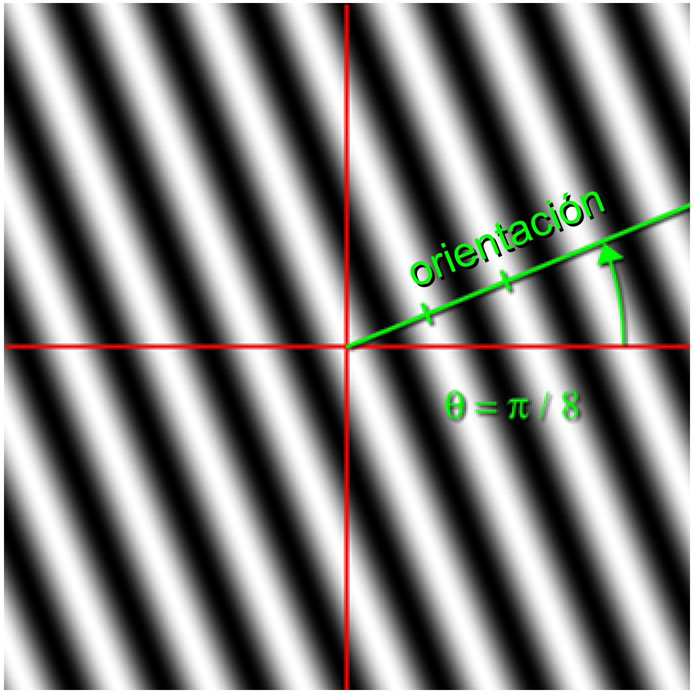
Son “ondas planas”, con amplitudes en escala de grises y período definido por la distancia entre pixels

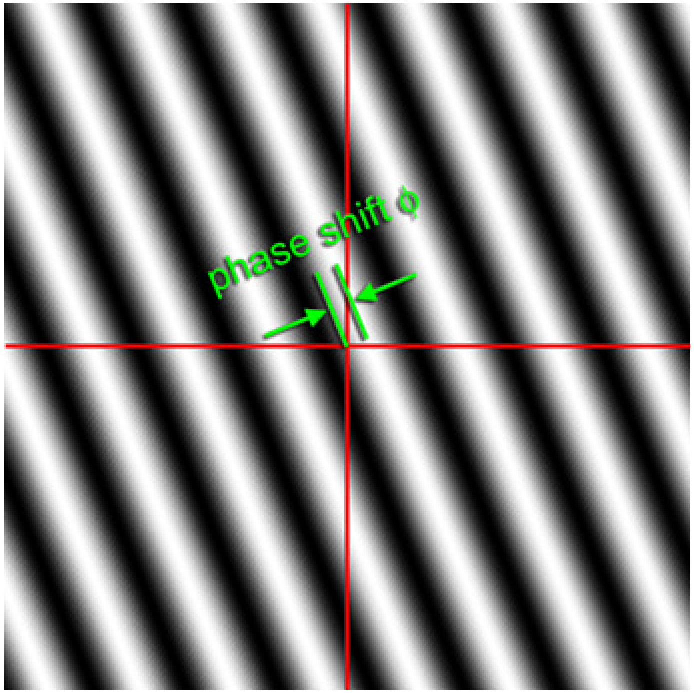
$$I(r,c) = \frac{A}{2}\left\{\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(r\cdot\sin\theta + c\cdot\cos\theta\right)+\phi\right]+1\right\}$$



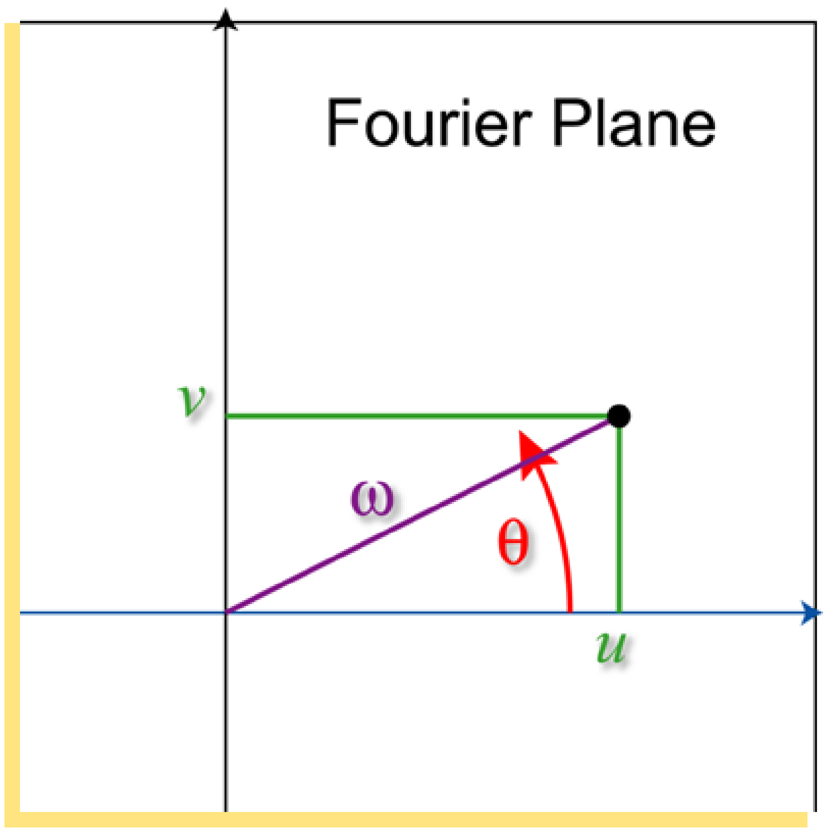


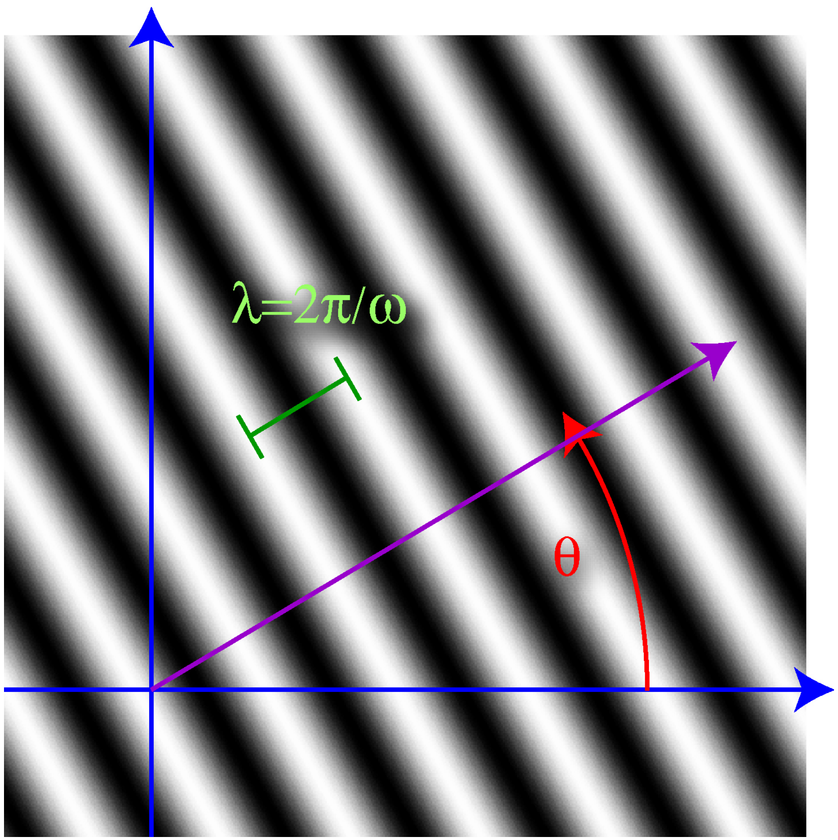
Sinusoides 2D……





Puntos en el plano de Fourier



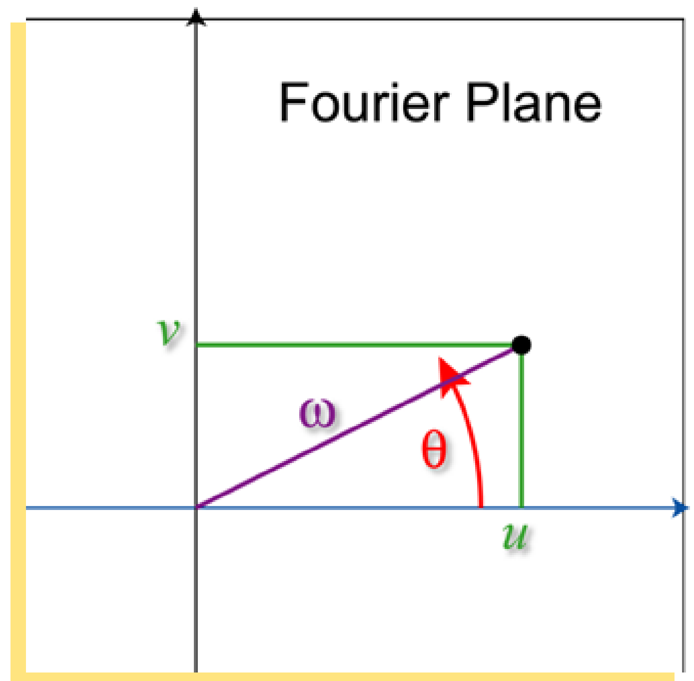


El punto representa a esta sinusoide particular "grating" (reja)

Puntos en el plano de Fourier

El punto en la columna freq. u y fila freq. v representsa una sinusoide con ω and orientation θ (si R=C=N).

ω = N/λ, donde λ es el período y R=C=N.



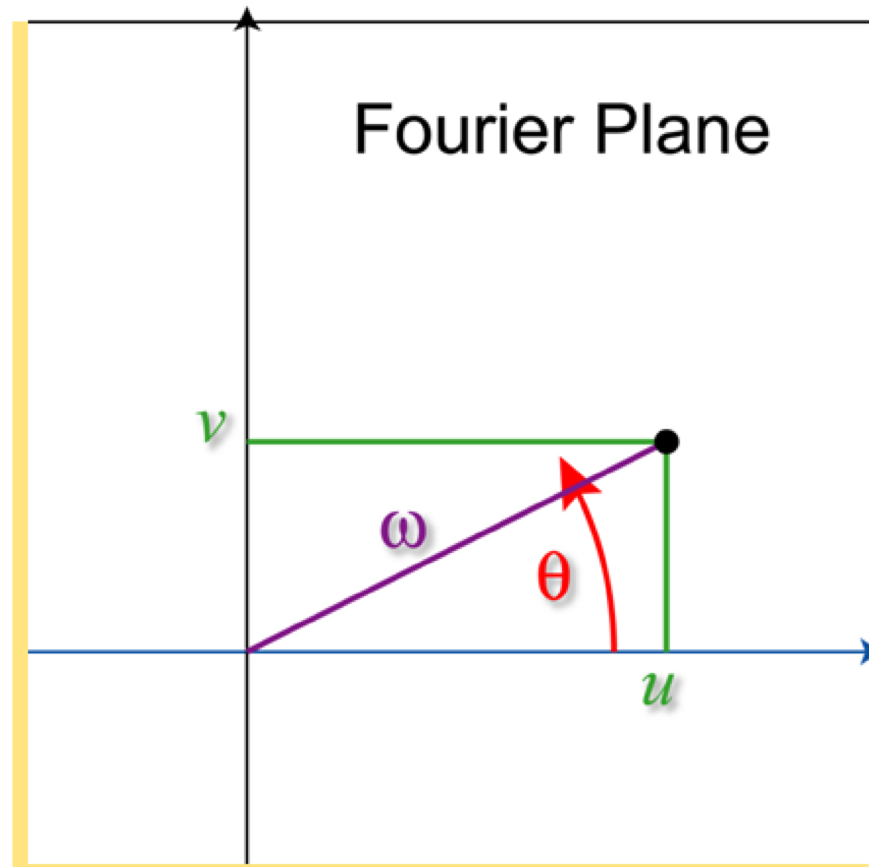
$$\lambda_u = \tfrac{C}{u} \quad \text{y} \quad \lambda_v = \tfrac{R}{v} \quad \text{pixels.}$$

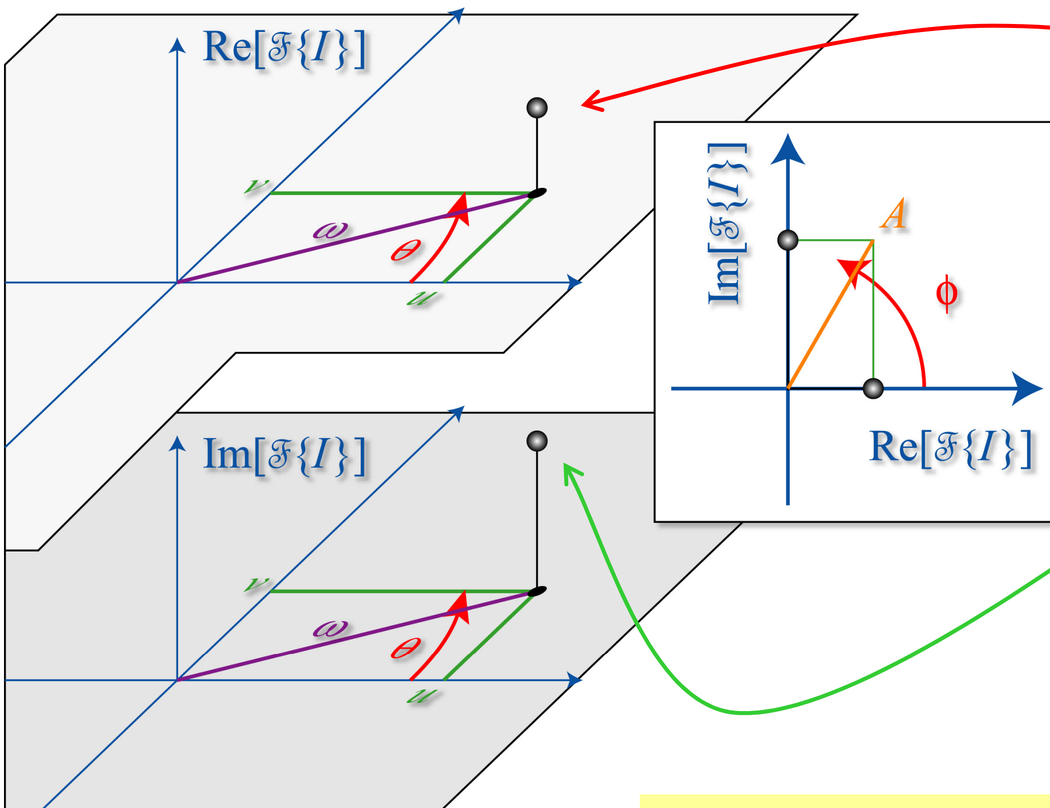
$$\theta_{\mathrm{wf}} = \tan^{-1}\left(\frac{vC}{uR}\right),$$

$$\lambda_{\mathrm{wf}} = \sqrt{\left(\frac{C}{u}\right)^2 + \left(\frac{R}{v}\right)^2}.$$

$$\omega_u = \tfrac{u}{C}, \quad \omega_v = \tfrac{v}{R}, \qquad \text{y}$$

$$\omega_{\mathrm{wf}} = 1 \Big/ \sqrt{\left(\tfrac{C}{u}\right)^2 + \left(\tfrac{R}{v}\right)^2} \quad \text{ciclos.}$$

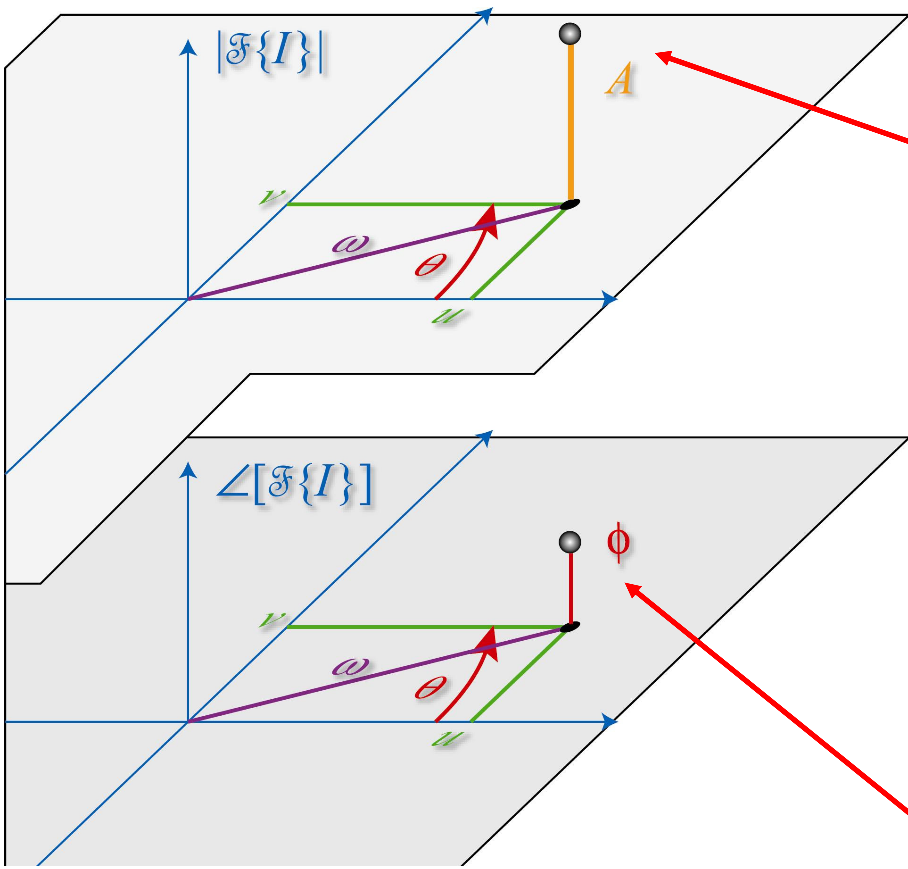




Es un número complejo con una parte real y una parte imaginaria.

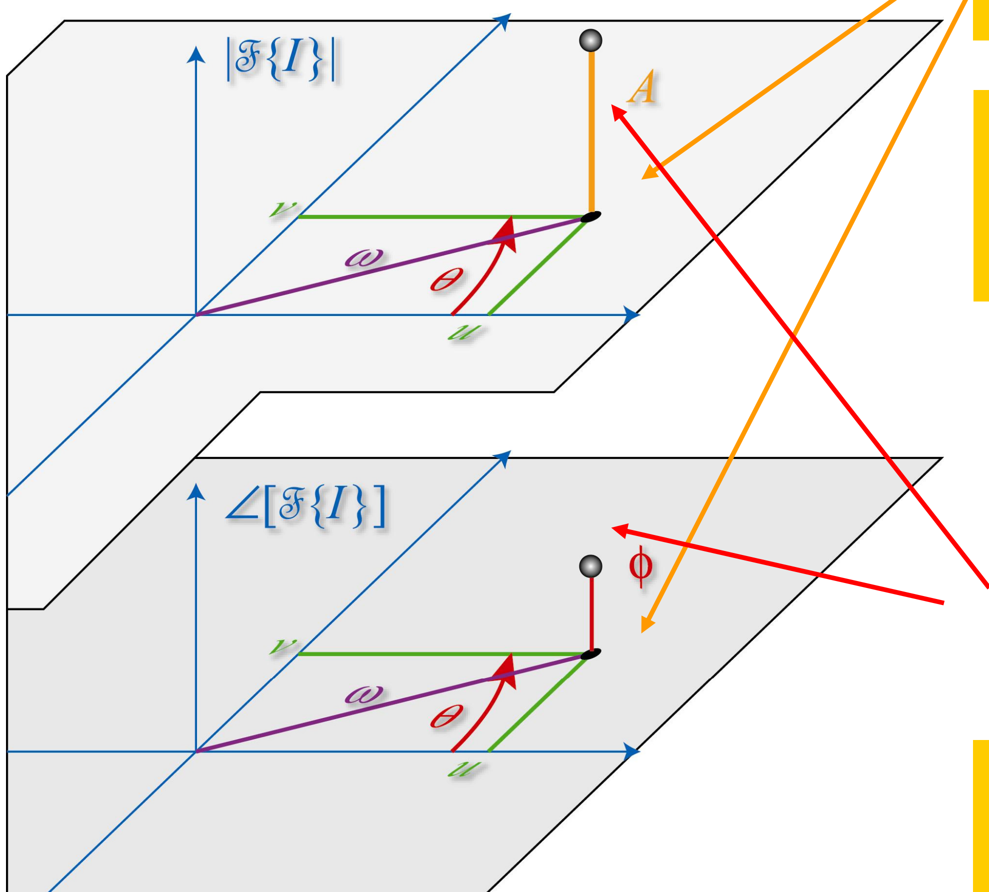
Recordar es complejo por magnitud A y fase ϕ

Representan la amplitud y fase de una sinusoide con frecuencia ω and dirección θ.



La magnitud A (ω,θ) en el punto (ω,θ) representa la amplitud de una sinusoide…

..y la fase $\phi(\omega,\theta)$, representa el desplazamiento relativo al origen.

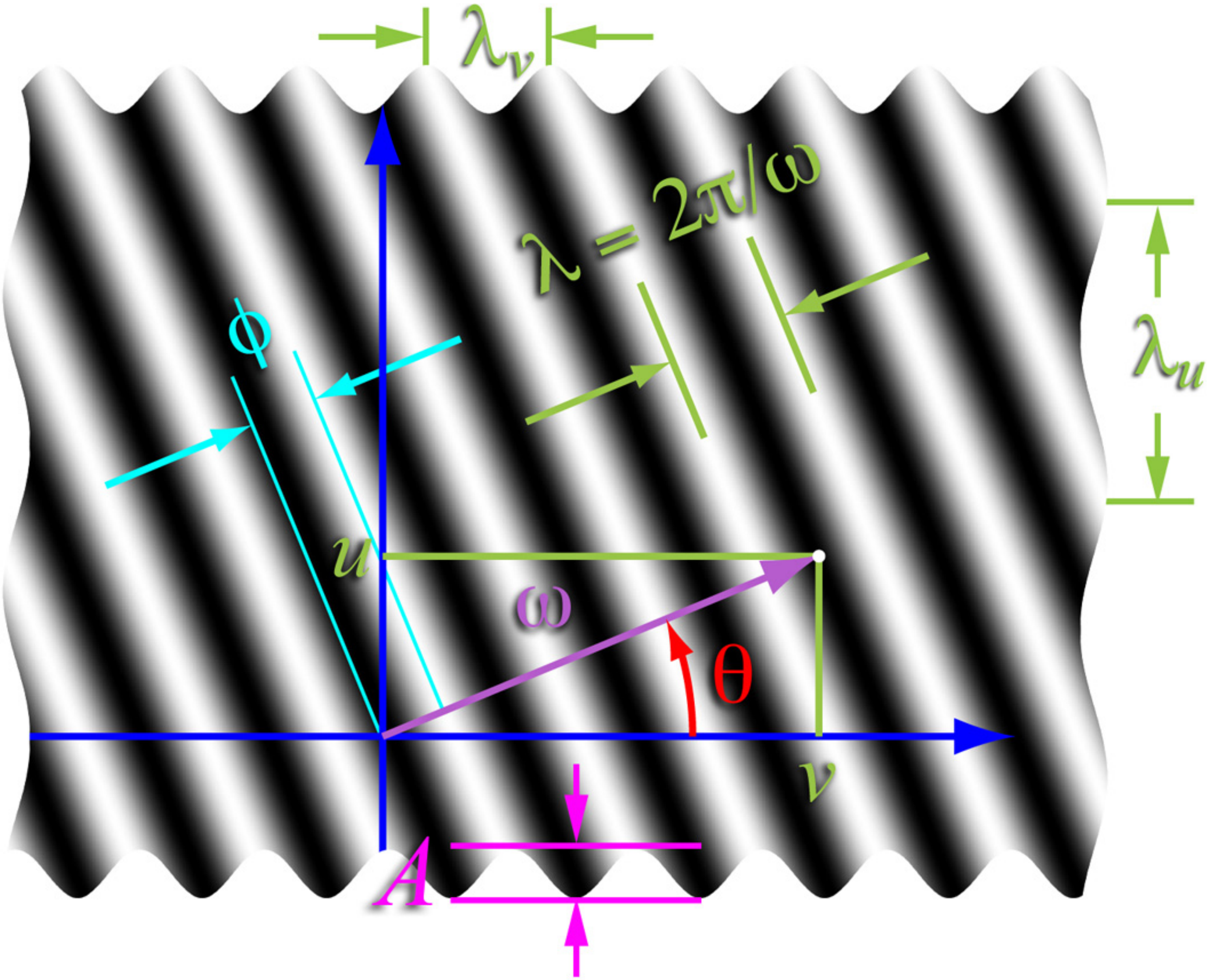


Entonces el punto (u,v) en el plano Fourier…

…representa a una sinusoide "gratings" de frecuencia ω y orientación θ.

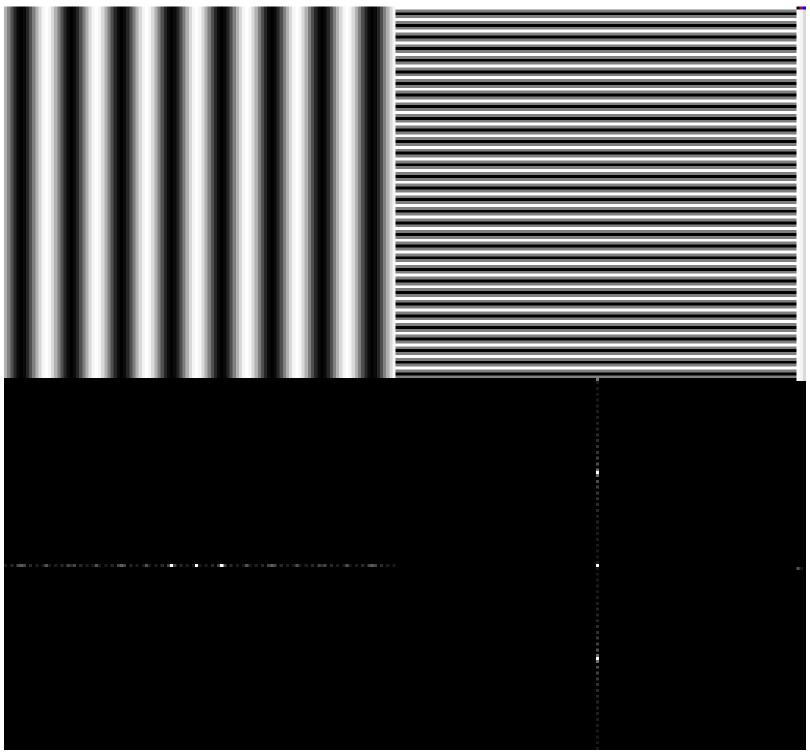
El valor complejo $F(u,v)$ de la TF en el punto (u,v)…

…representa la amplitud A, y el desplazamiento de fase ϕ de una sinusoide.



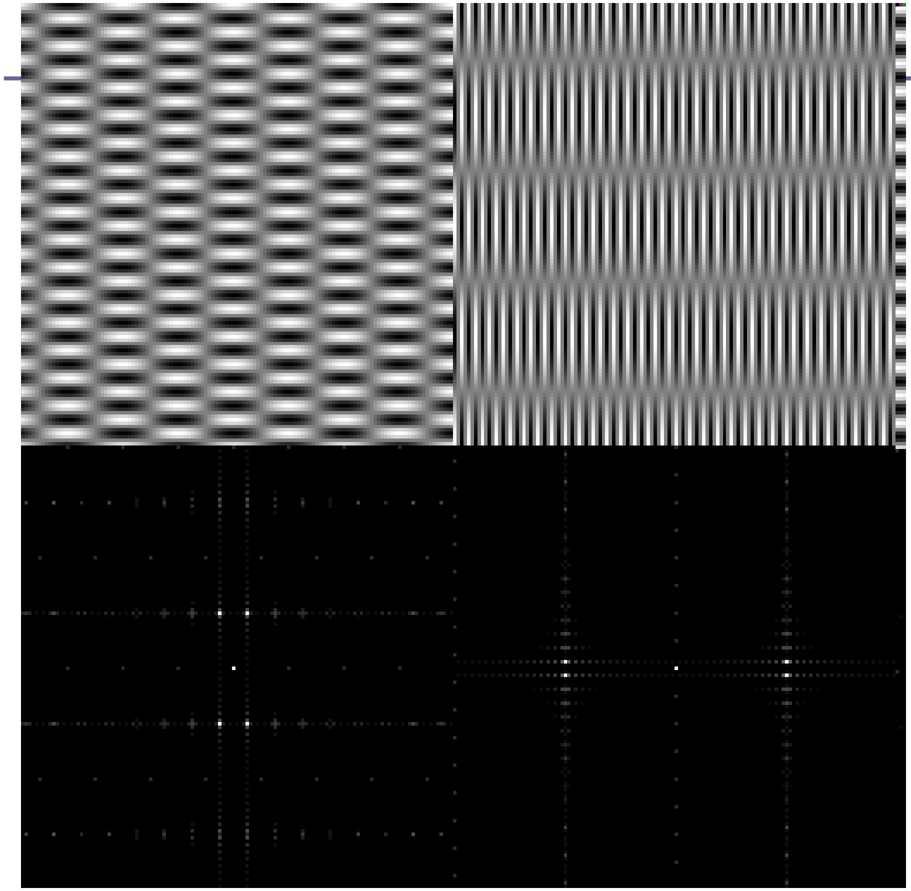
λ_v
$\lambda = 2\pi/\omega$
ϕ
λ_u
u
ω
θ
v
A

TF para procesamiento de imágenes



- ✓La imagen puramente horizontal, es un coseno de 8 ciclos.
- ✓La imagen puramente vertical, es un coseno de 32 ciclos.
- ✓El centro de la imagen es el origen del sistema de coordenadas de la frecuencia.
- ✓El eje u representa a las componentes horizontales de f.
- ✓El eje v representa a las componentes verticales de f.

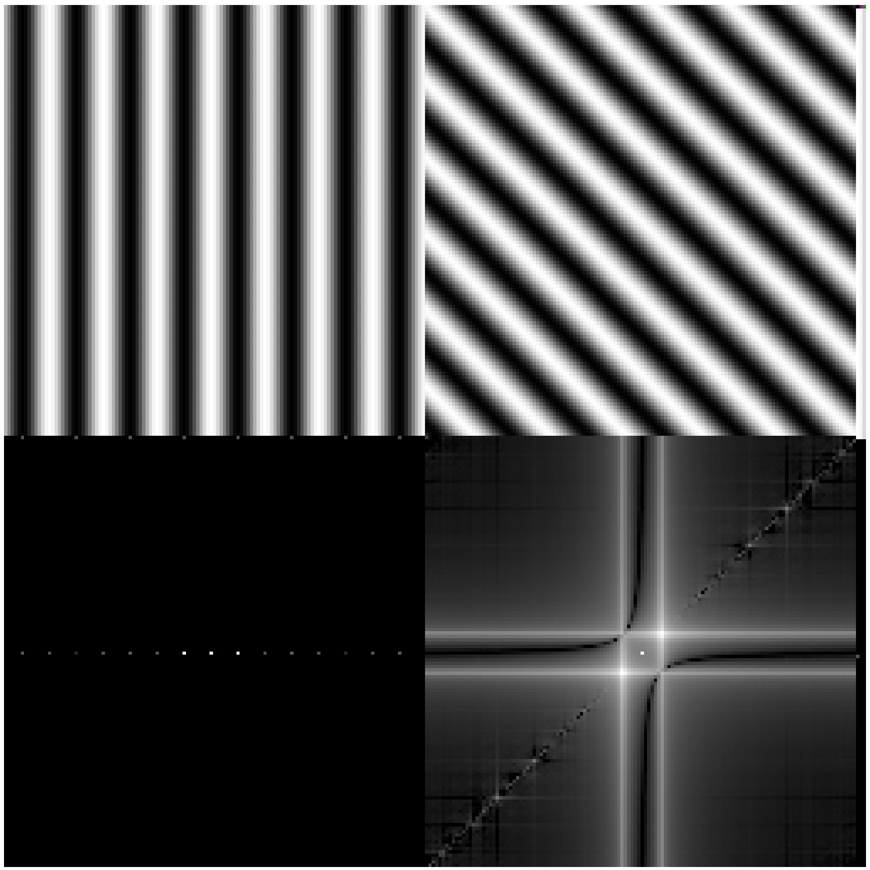
Recordar la transformada de un coseno



La imagen de la izquierda tiene 4 ciclos horizontales y 16 ciclos verticales.

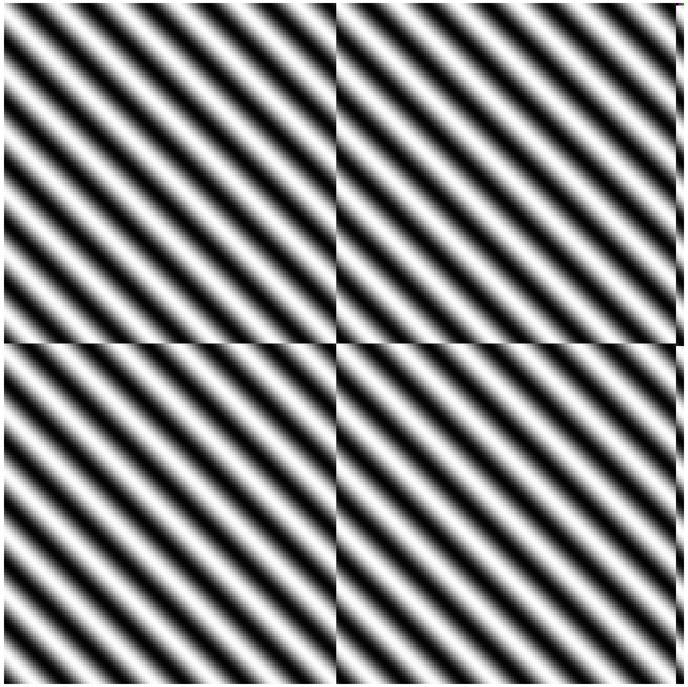
La imagen de la derecha tiene 32 ciclos horizontales y 2 ciclos verticales.

Efectos de rotación y de bordes



- El cos de la izquierda tiene una TF sencilla. La TF de la derecha nos sorprende.
- Además de las componentes diagonales, hay componentes verticales y horizontales.
- La respuesta es que la TF trata siempre a la imagen como parte de una imagen periódica infinita, tanto en el sentido horizontal como en el vertical.

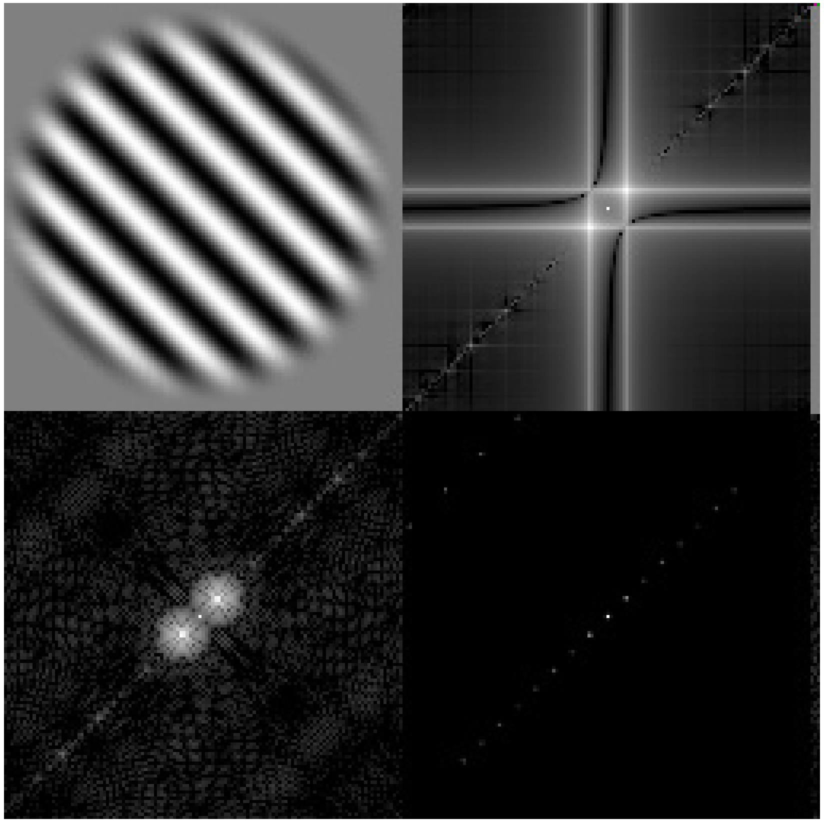
Efectos de rotación y de bordes



Aquí se ve la replicación y el efecto de los bordes

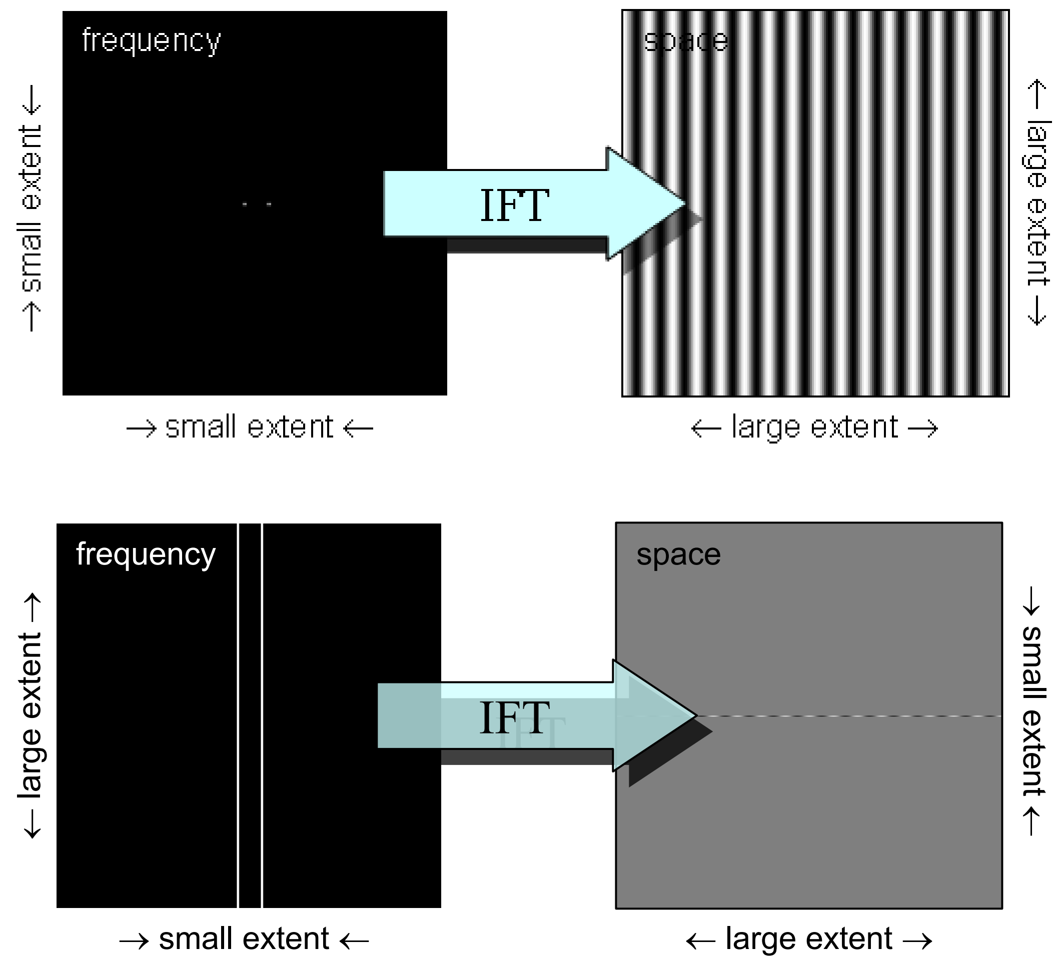
Coseno “con ventana”

Efecto de imagen finita

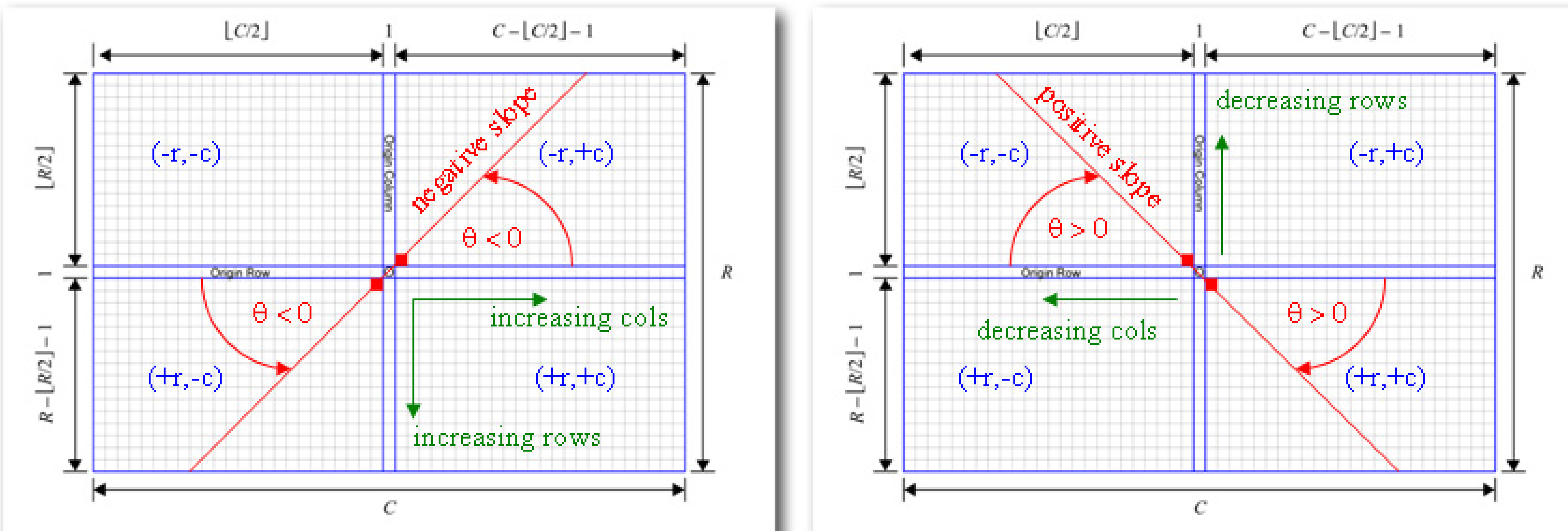


Coseno real

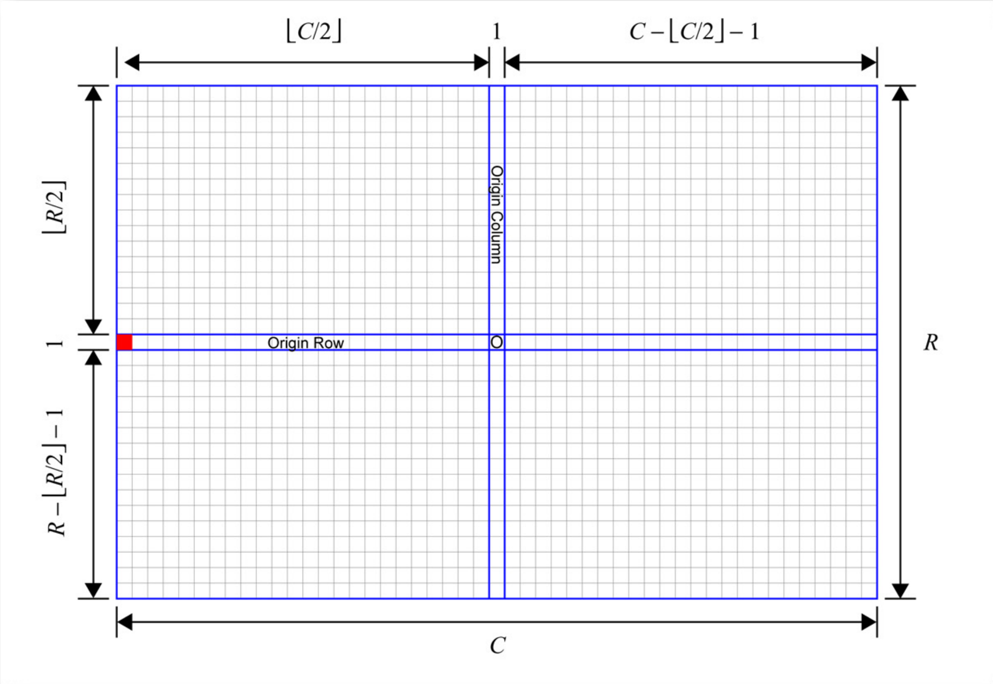
Otros ejemplos

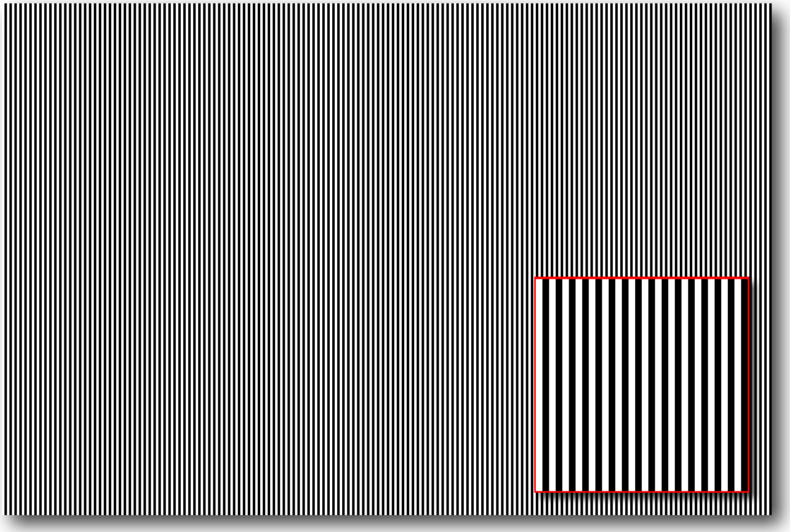


Coordenadas y direcciones en el plano de Fourier



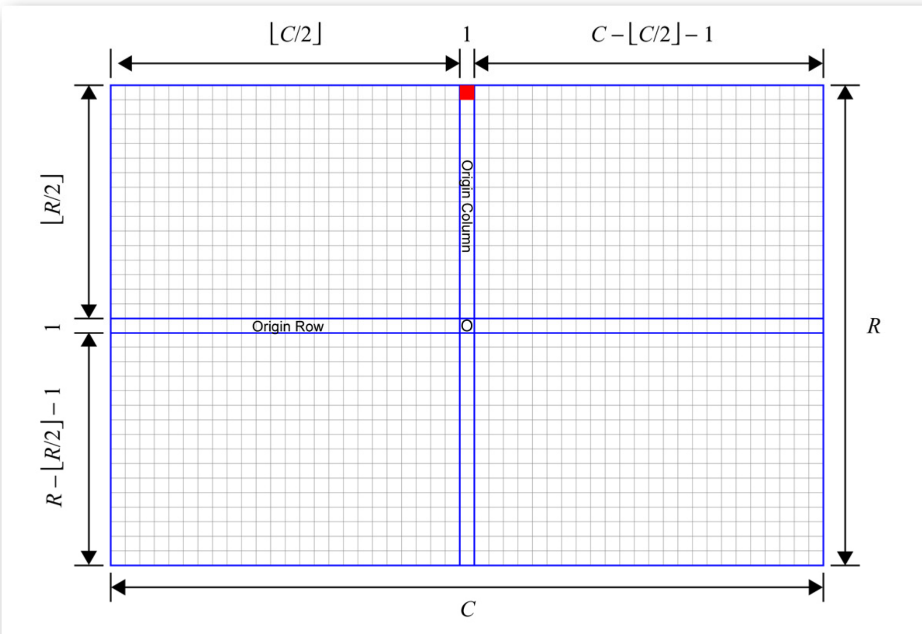
Puntos en el plano de Fourier

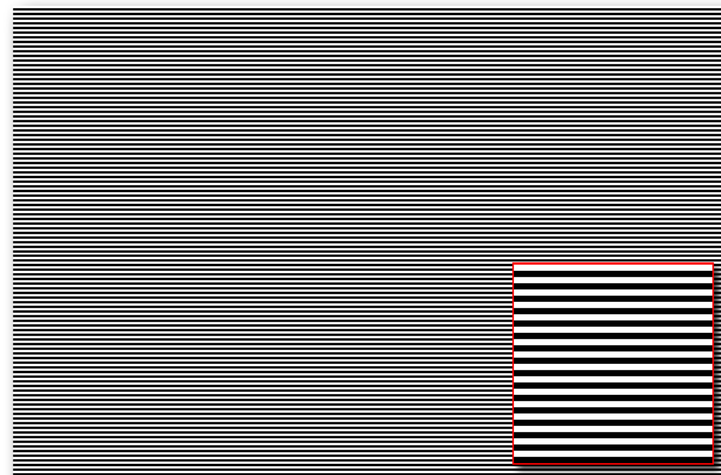




Sinusoide horizontal de mayor frecuencia posible

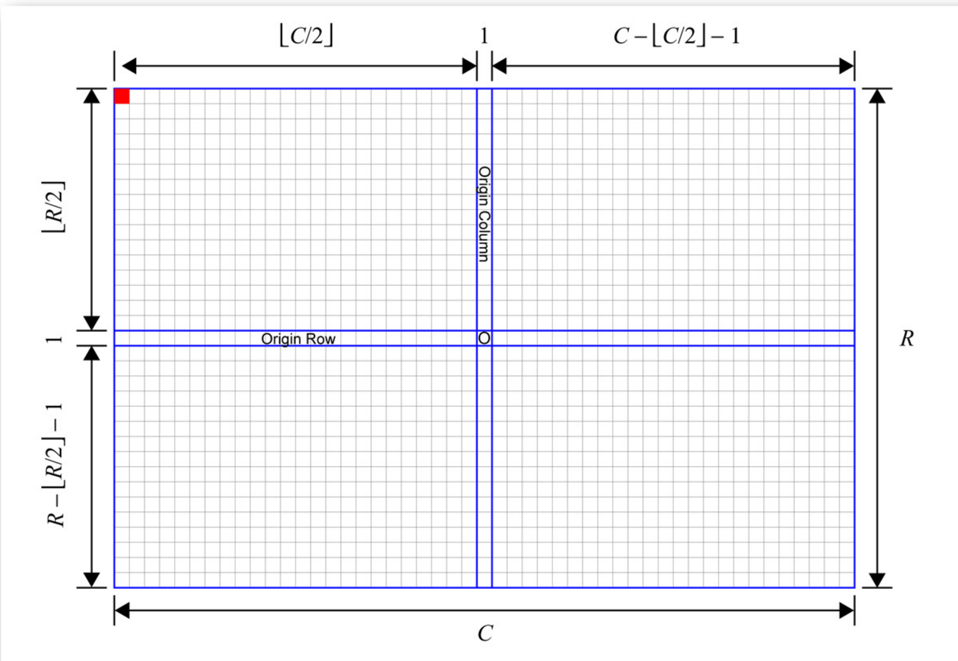
Puntos en el plano de Fourier

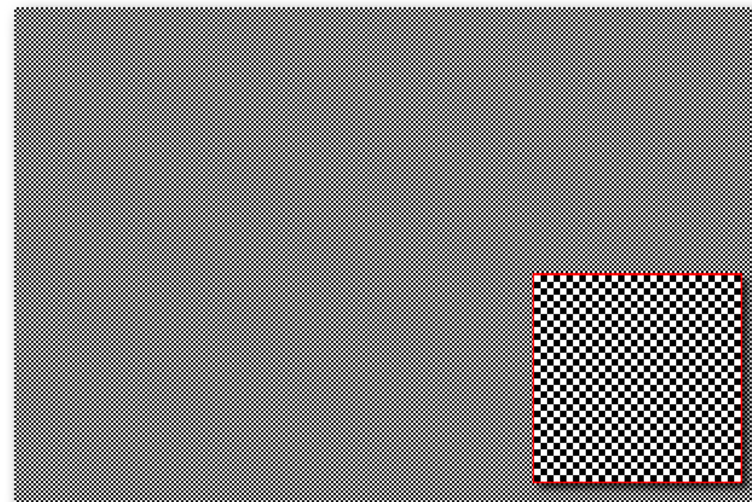




Sinusoide vertical de mayor frecuencia posible

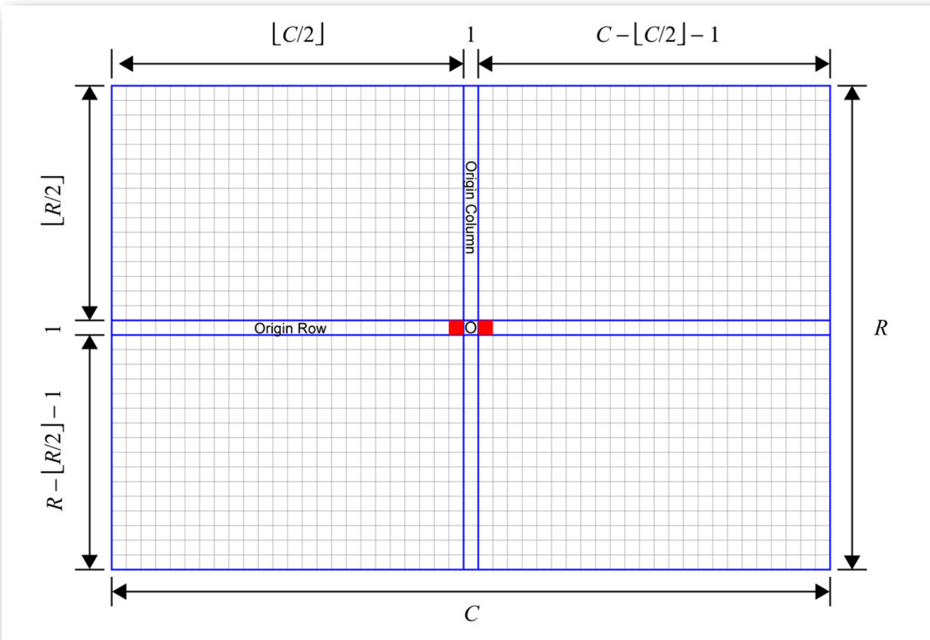
Puntos en el plano de Fourier





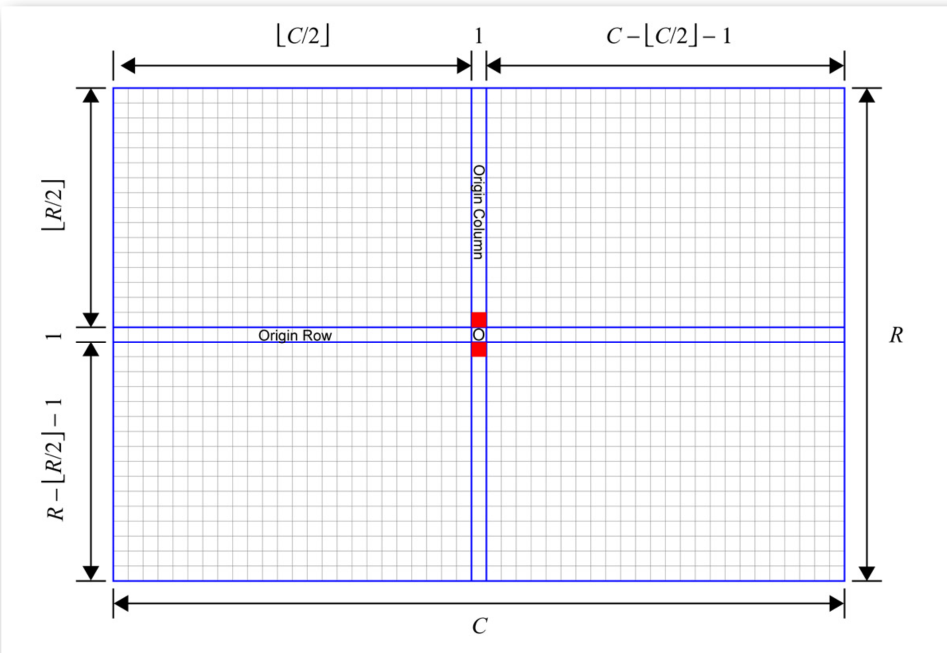
Sinusoide vertical+horizontal de mayor frecuencia posible

Puntos en el plano de Fourier



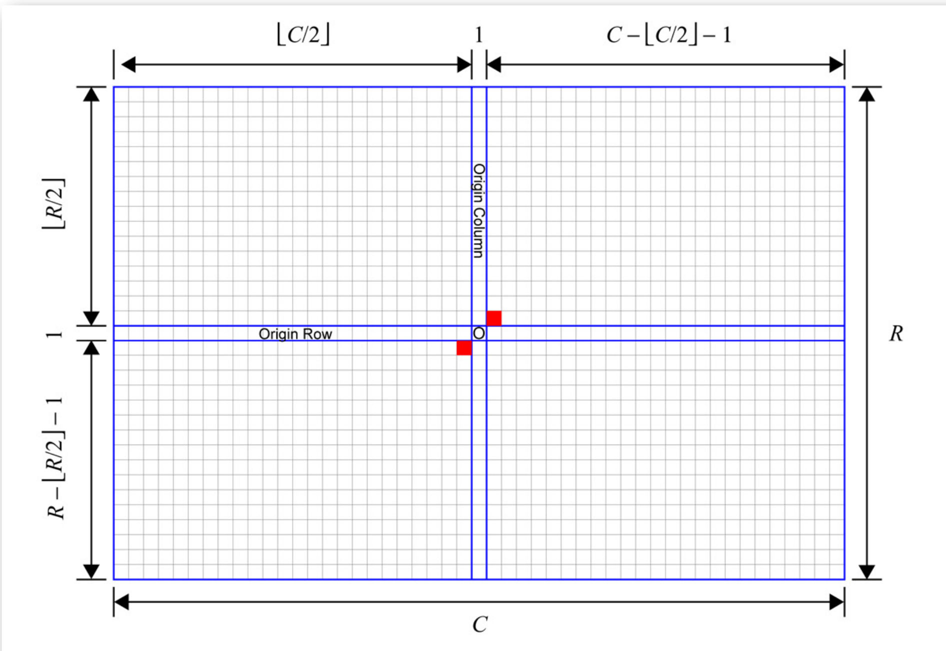
Sinusoide horizontal de menor frecuencia posible

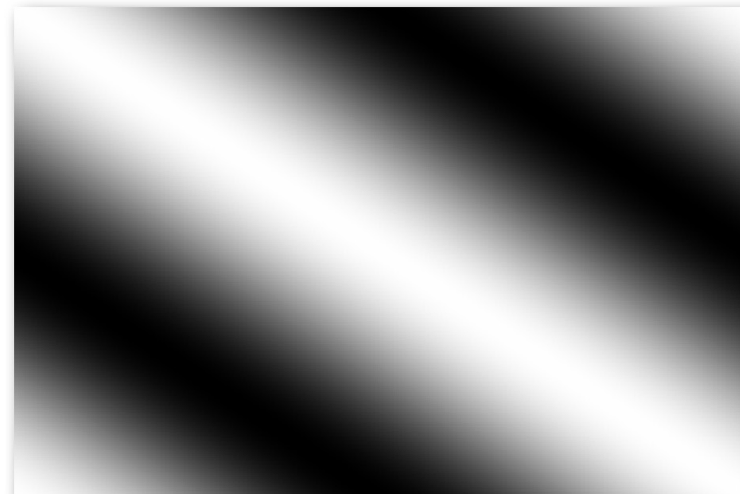
Puntos en el plano de Fourier



Sinusoide vertical de menor frecuencia posible

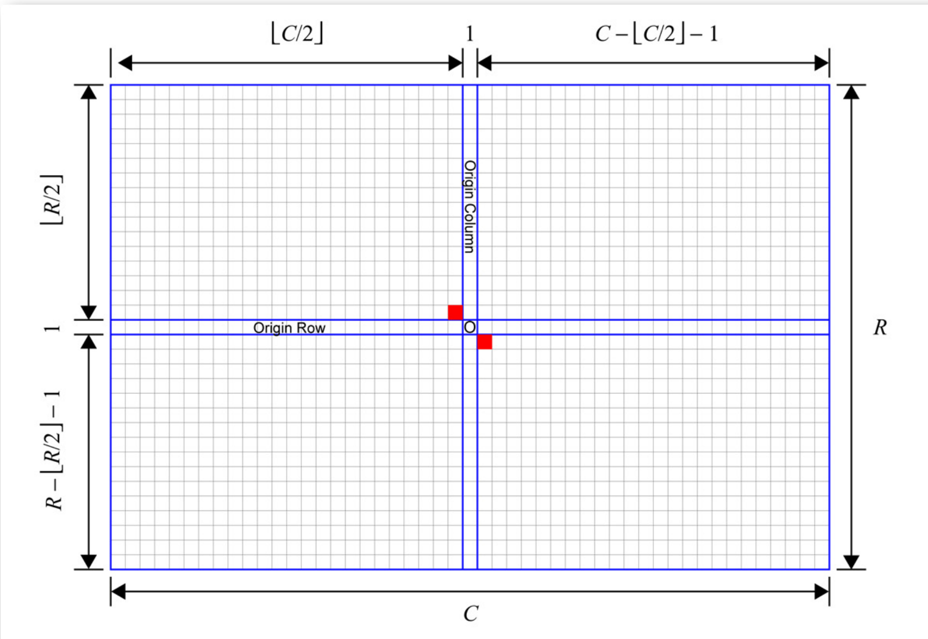
Puntos en el plano de Fourier

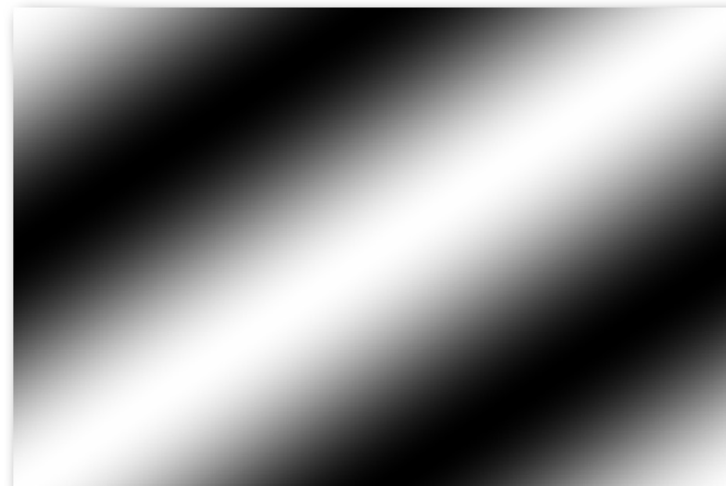




Sinusoide diagonal (-) de menor frecuencia posible

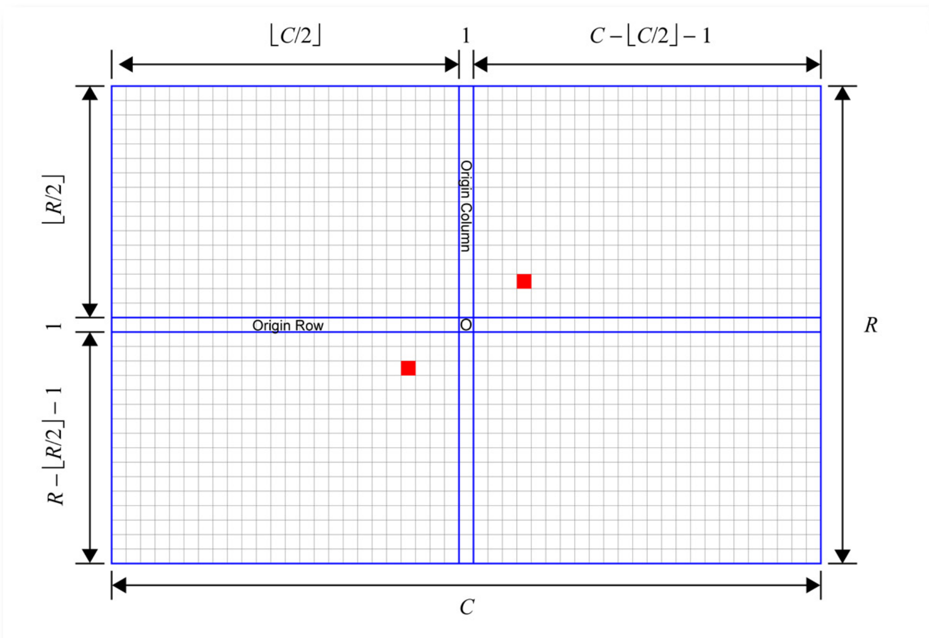
Puntos en el plano de Fourier

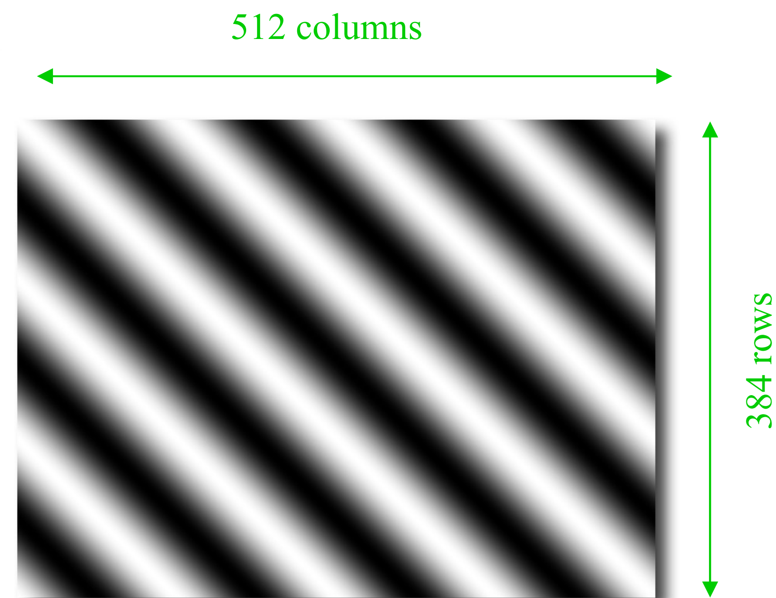




Sinusoide diagonal (+) de menor frecuencia posible

Frecuencias y períodos en el plano de Fourier

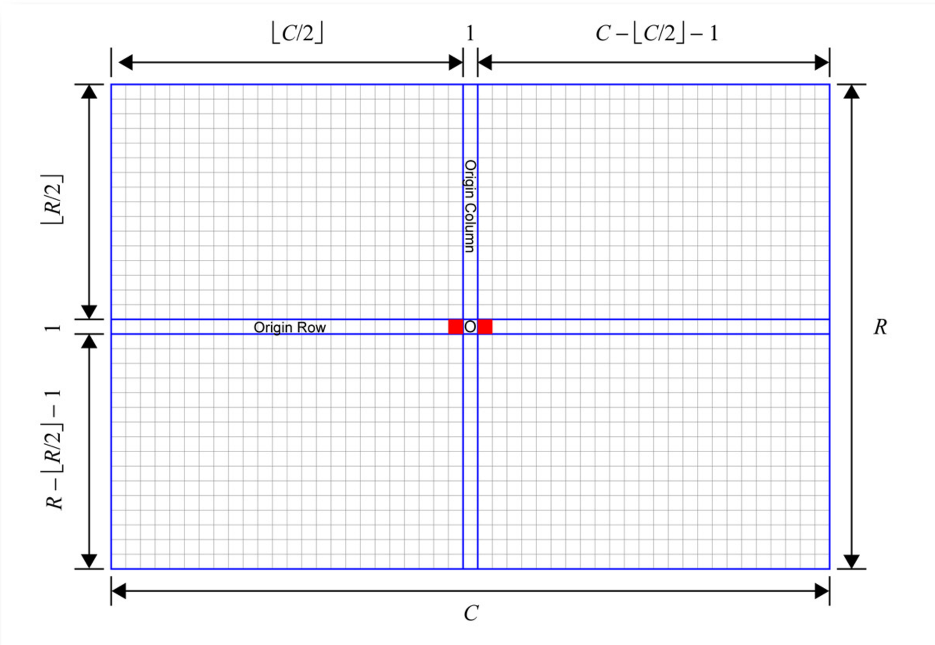


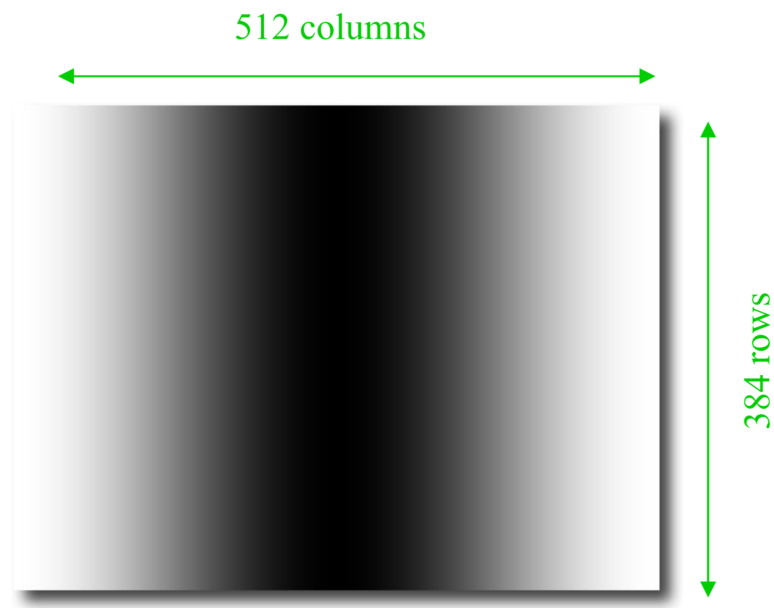


Frecuencias: (u,v) = (4,3) – Períodos

$\lambda_u =$ C/u=512/4=128 $\lambda_v =$ R/v=384/3=128

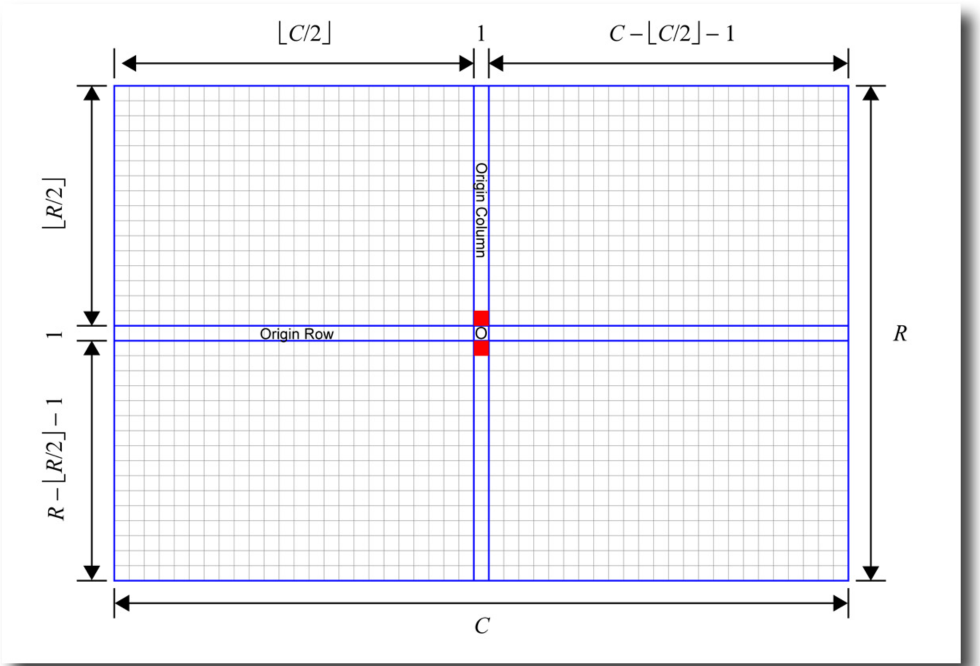
Frecuencias y períodos en el plano de Fourier

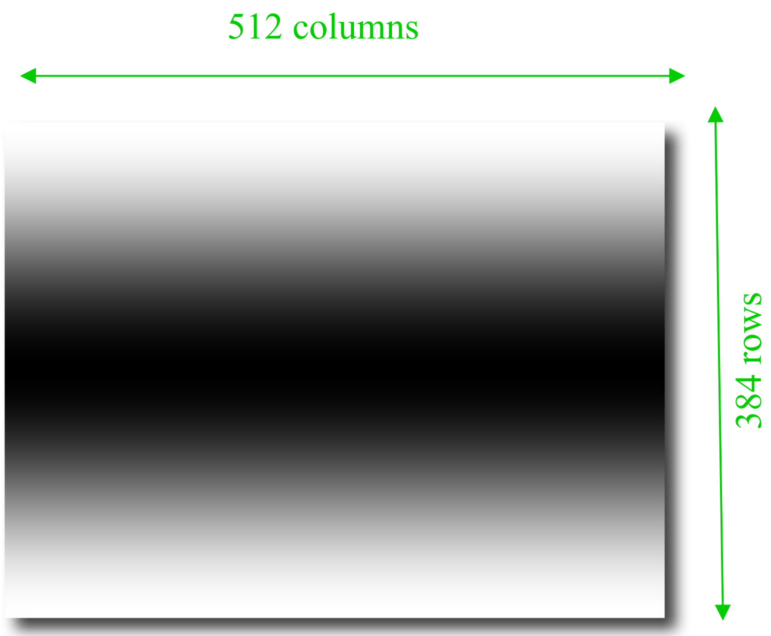




Frecuencias: (u,v) = (1,0) – Período $\lambda_u =$ C/u=512/1=512

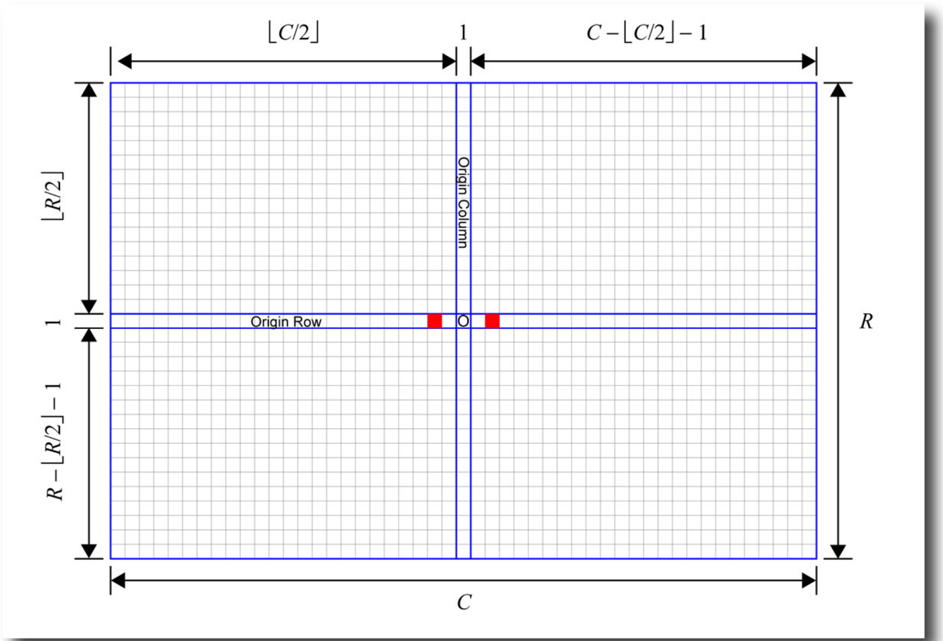
Frecuencias y períodos en el plano de Fourier

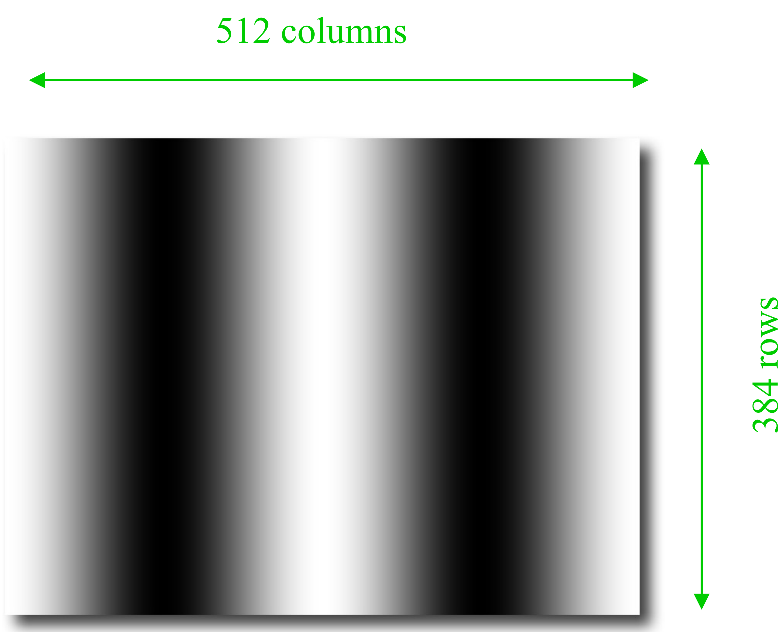




Frecuencias: (u,v) = (0,1) – Período $\lambda_v =$ C/u=384/1=384

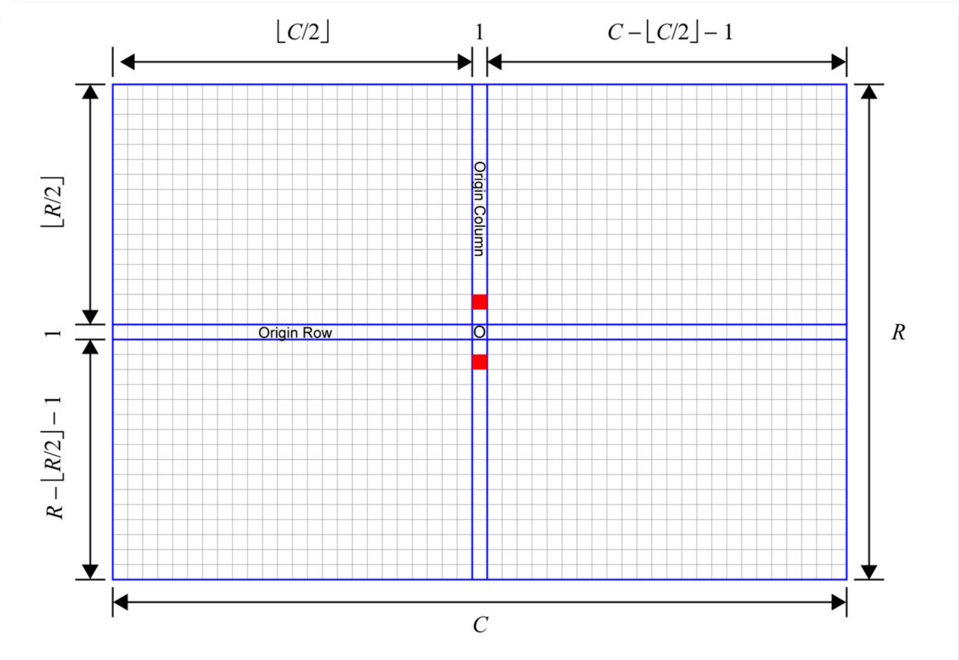
Frecuencias y períodos en el plano de Fourier

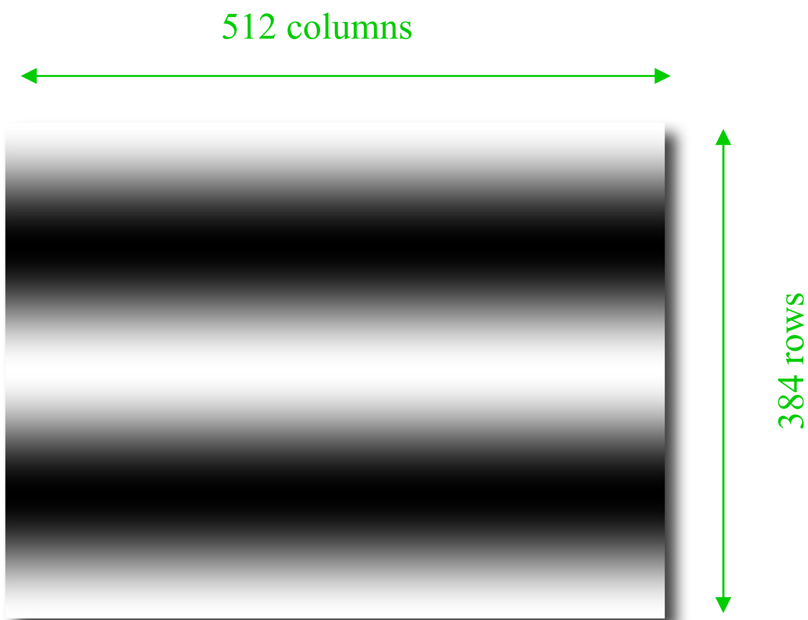




Frecuencias: (u,v) = (2,0) – Período $\lambda_u =$ C/u=512/2=256

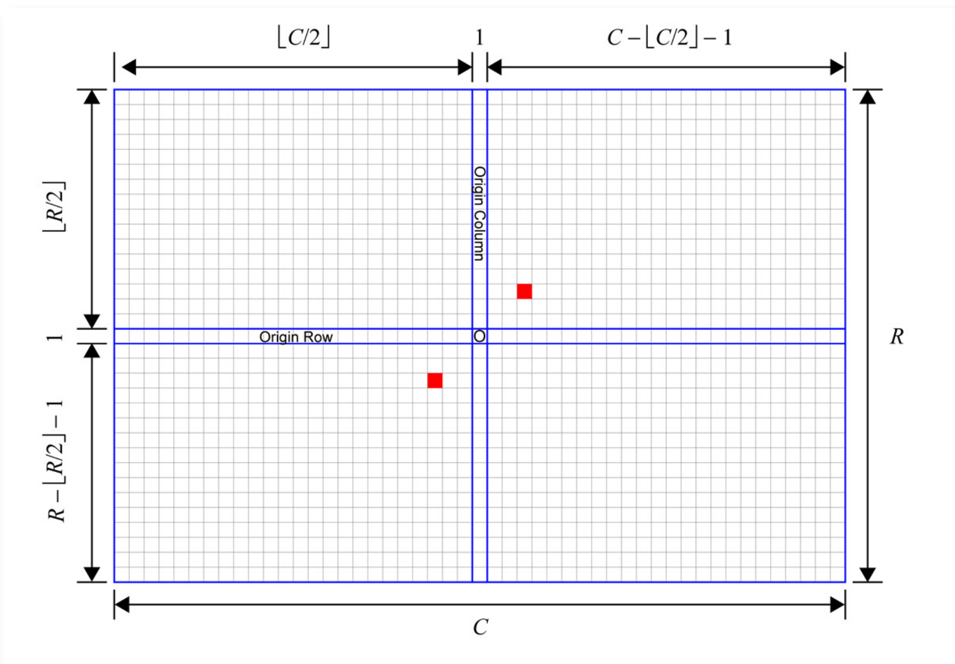
Frecuencias y períodos en el plano de Fourier

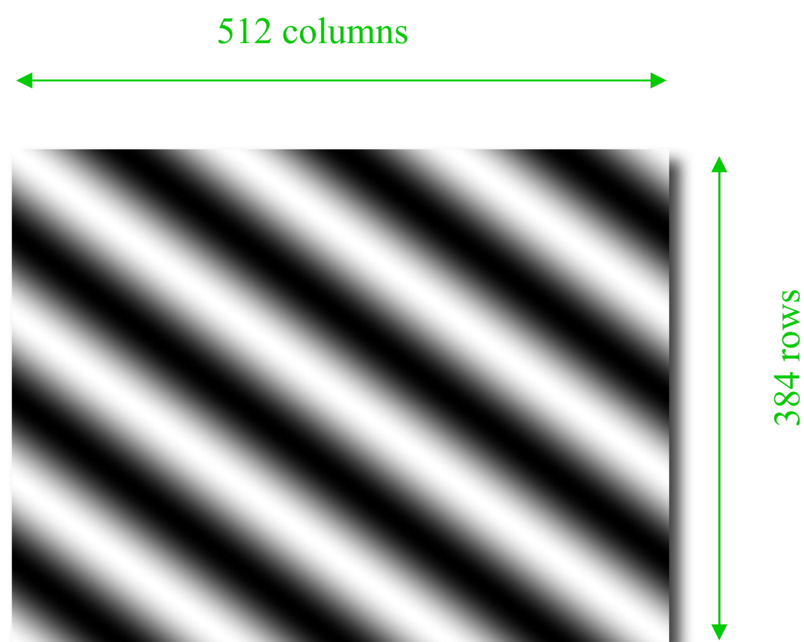




Frecuencias: (u,v) = (0,2) – Período λ_v = C/u=384/2=192

Frecuencias y períodos en el plano de Fourier





Frecuencias: (u,v) = (3,3) – Períodos

$\lambda_u =$ C/u=512/3=170 2/3 R/v=384/3=128

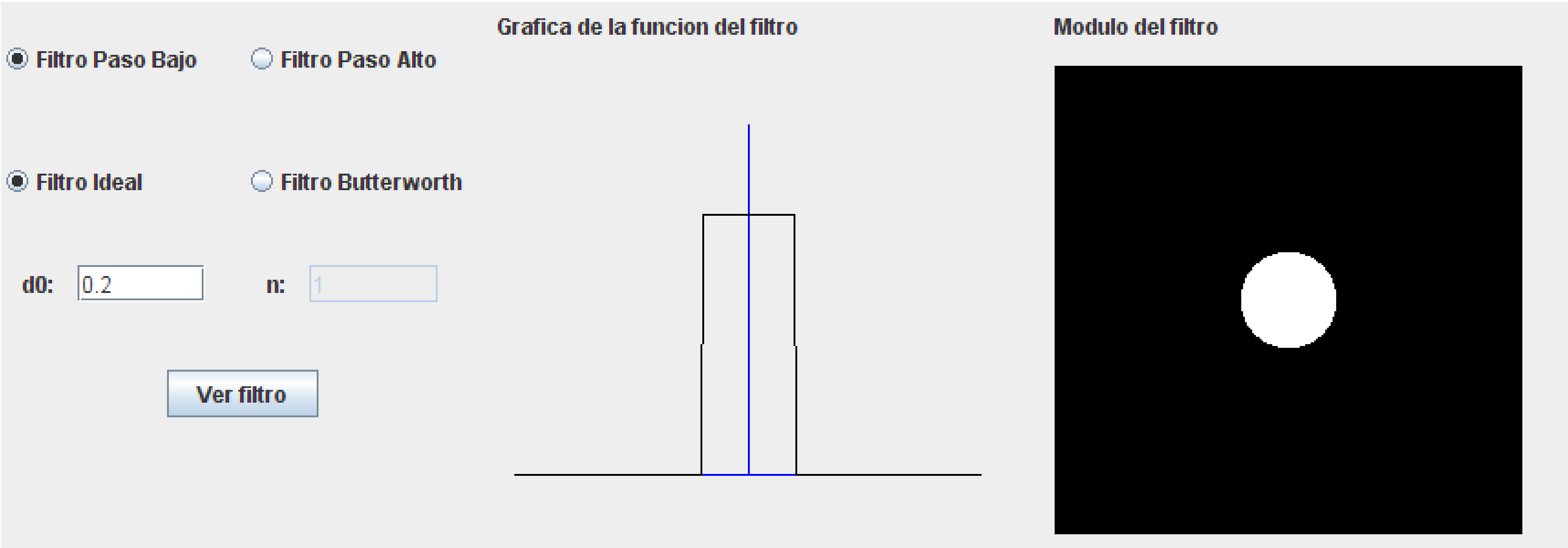
Filtrado en el dominio de la frecuencia

- En el filtrado espacial: convolucionamos.
- En el dominio frecuencial: multiplicamos las funciones.
- El proceso de filtrado en el dominio frecuencial es:
  - Transformar la imagen
  - Multiplicar el espectro de la imagen por el filtro
  - Transformar el espectro de vuelta al dominio espacial

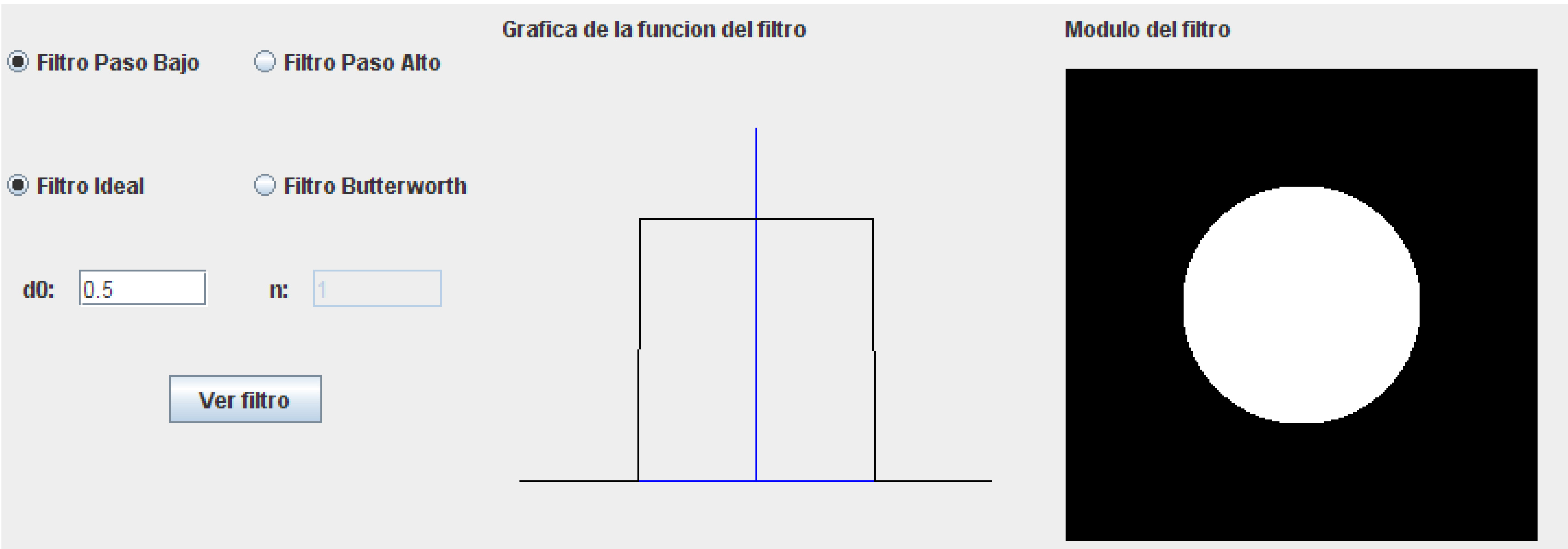
Filtro pasa bajos ideal

$$H(u,v)=\begin{cases}1 & si\ D(u,v)\le D_0\\ 0 & si\ D(u,v)>D_0\end{cases}$$

$$D(u,v)=\left(u^2+v^2\right)^{1/2}$$

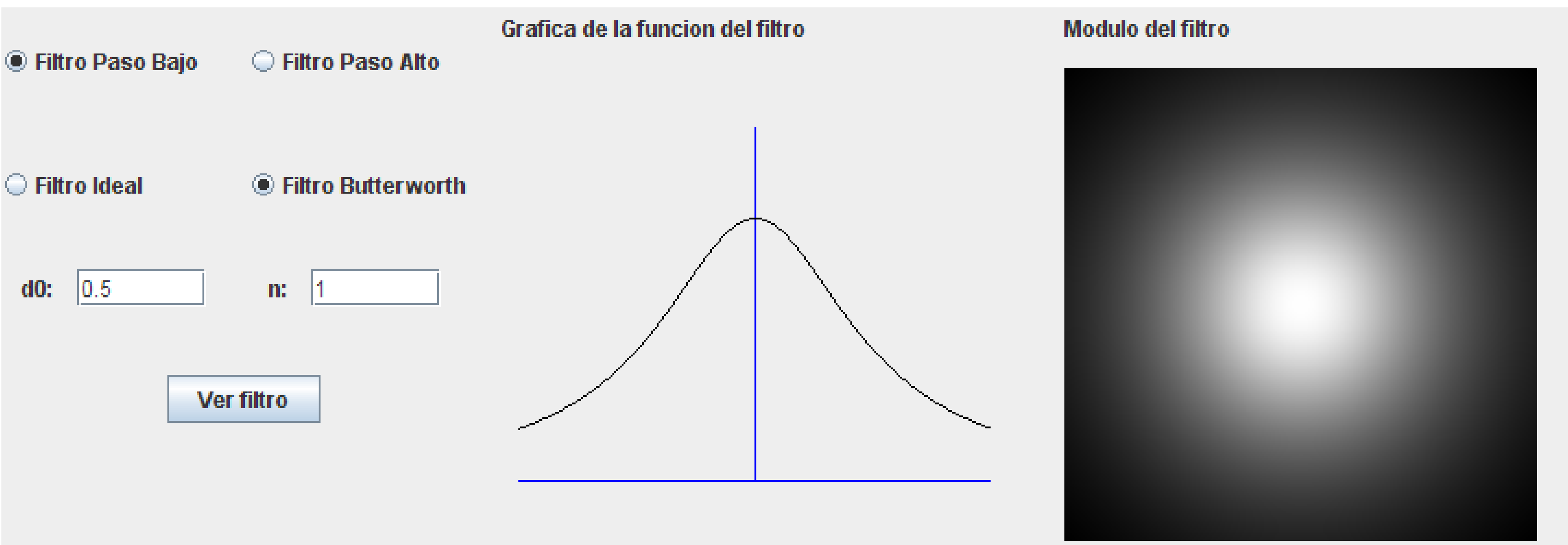


Filtro pasa bajos ideal

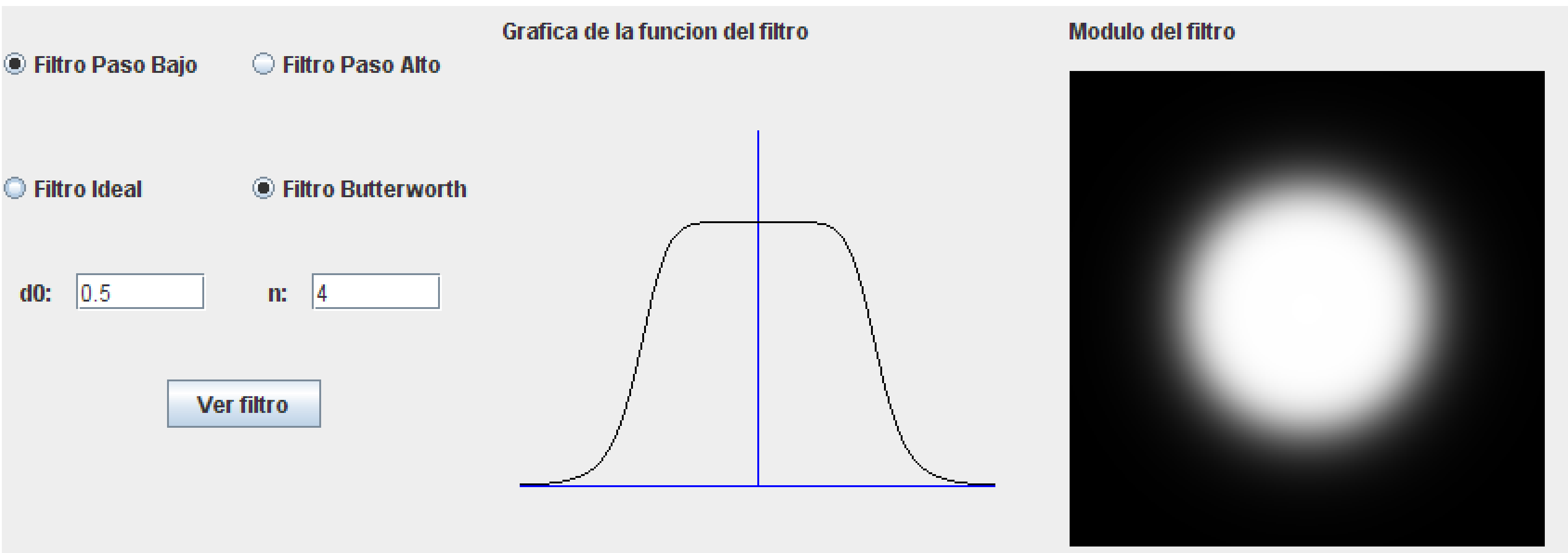


Filtro pasa bajos real: Butterworth

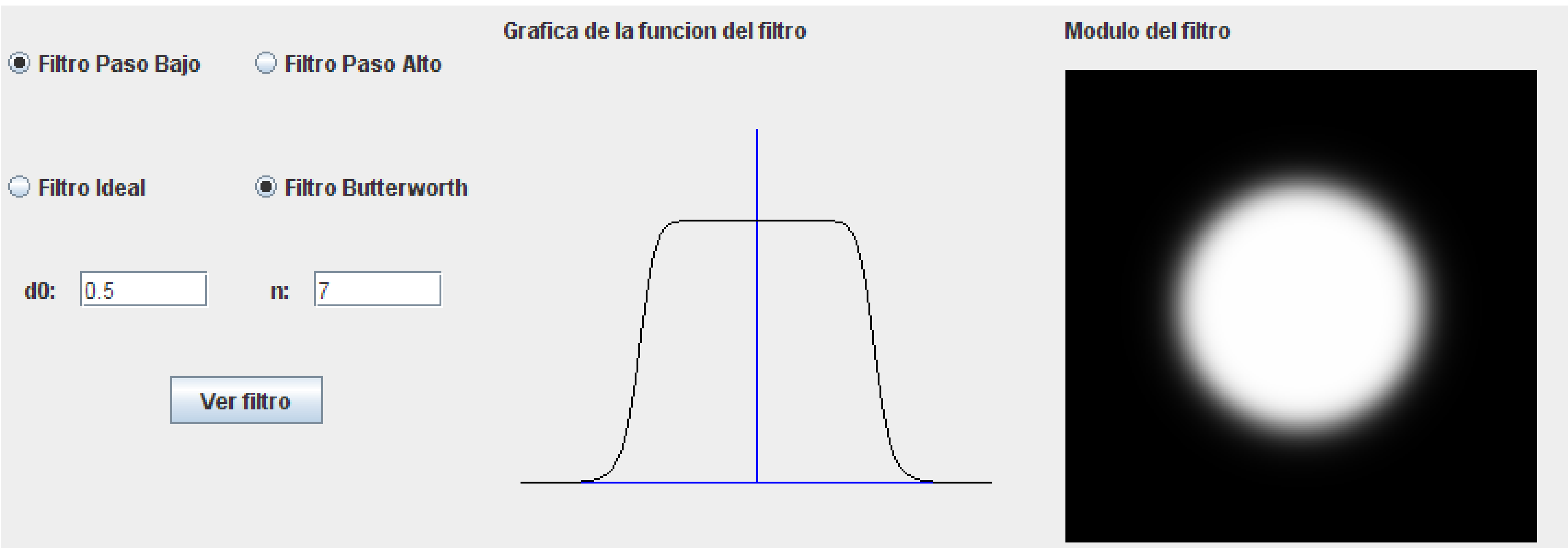
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[D(u,v) / D_0 \right]^{2n}}$$



Filtro pasa bajos real: Butterworth

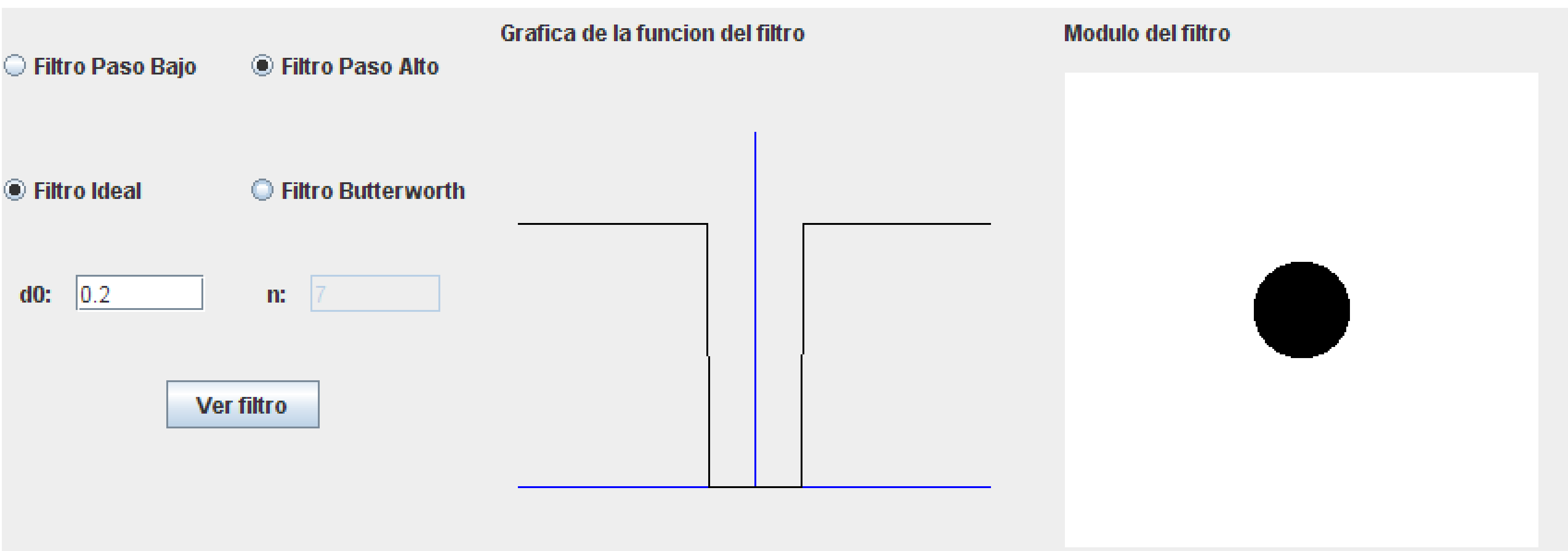


Filtro pasa bajos real: Butterworth

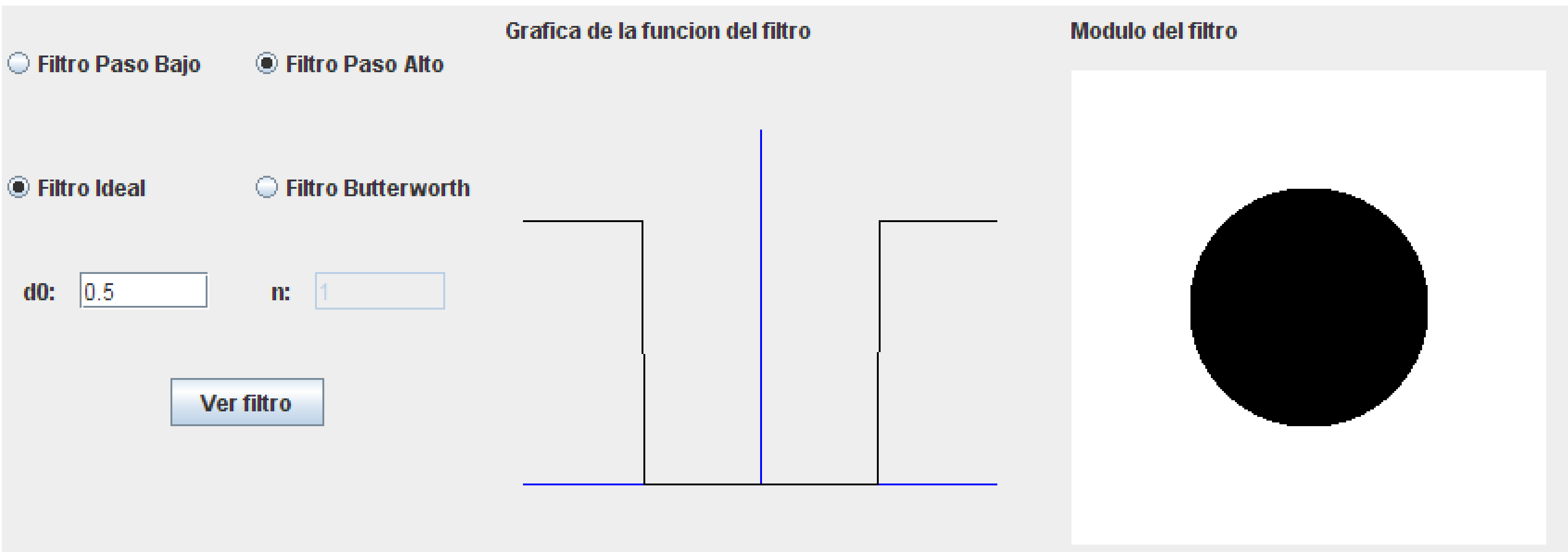


Filtro pasa altos ideal

$$H(u,v)=\begin{cases}0 & si\ D(u,v)\leq D_0\\ 1 & si\ D(u,v)>D_0\end{cases}$$

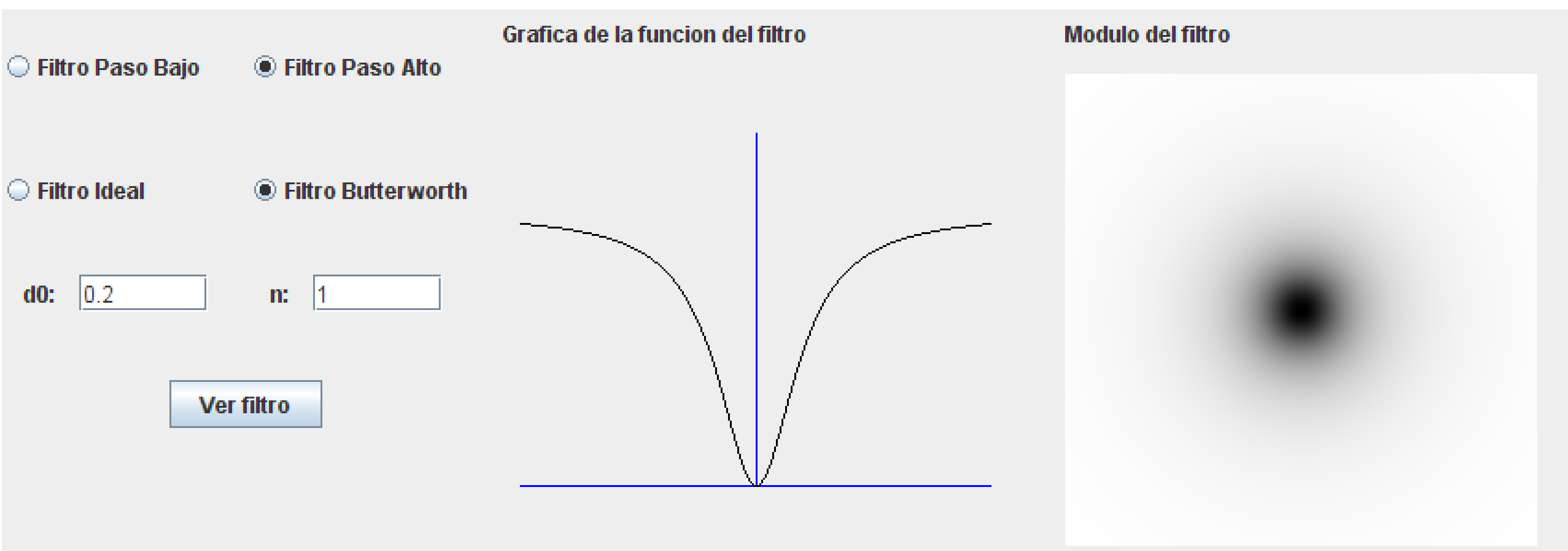


Filtro pasa altos ideal

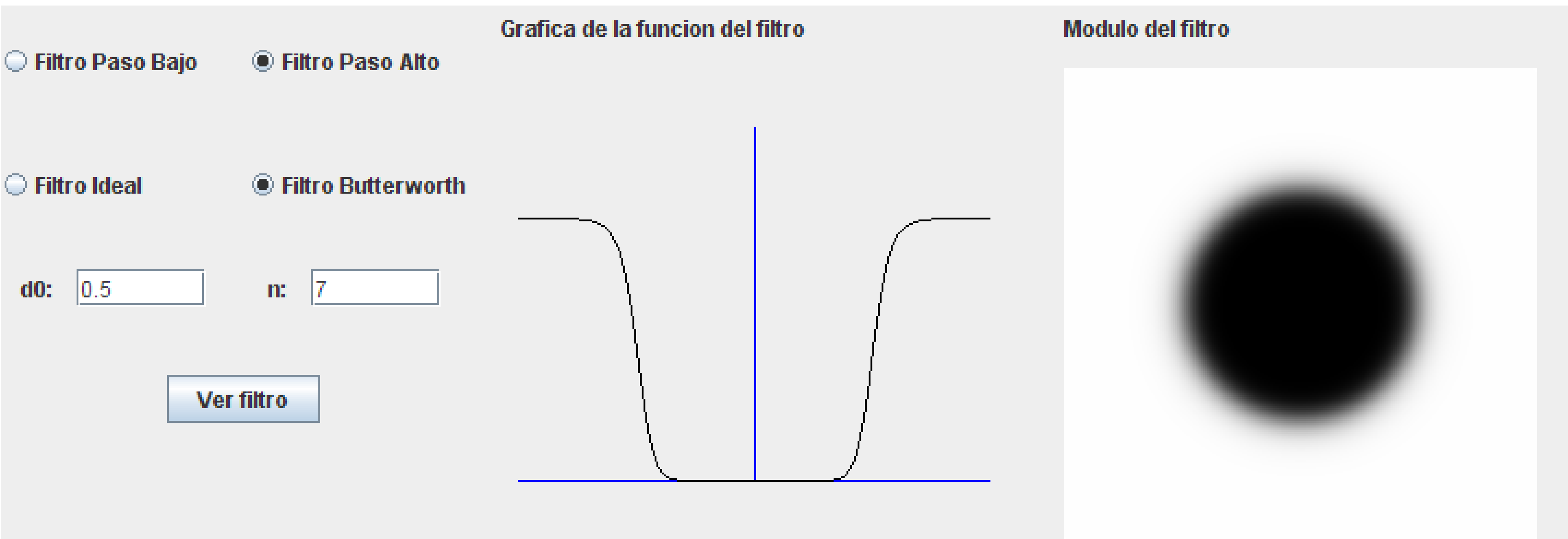


Filtro pasa altos real: Butterworth

$$H(u,v)=\frac{1}{1+\left[D_0 / D(u,v)\right]^{2n}}$$



Filtro pasa altos real: Butterworth



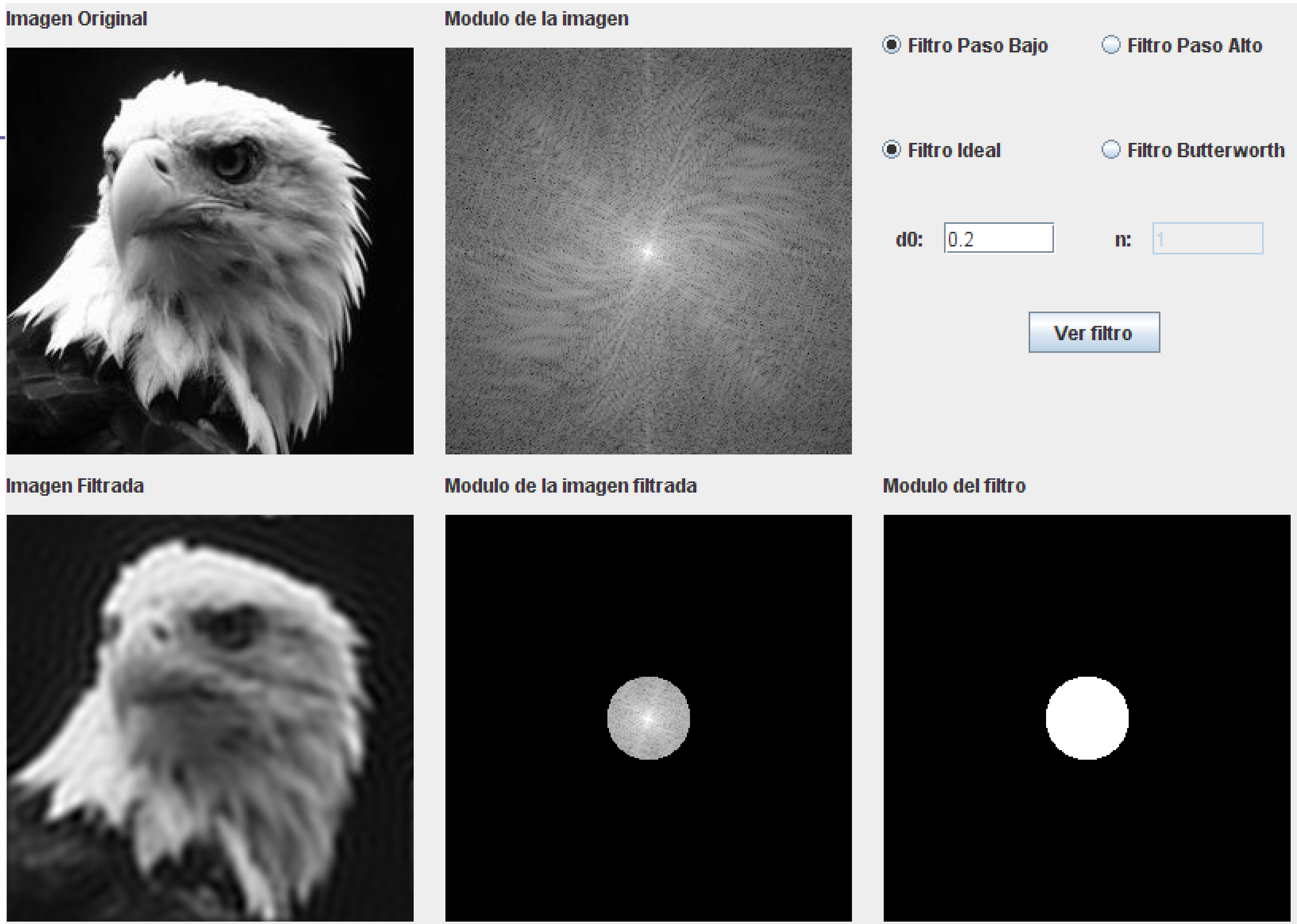


Imagen Original
Modulo de la imagen
Filtro Paso Bajo
Filtro Paso Alto
Filtro Ideal
Filtro Butterworth
d0:
0.2
n:
1
Ver filtro
Imagen Filtrada
Modulo de la imagen filtrada
Modulo del filtro

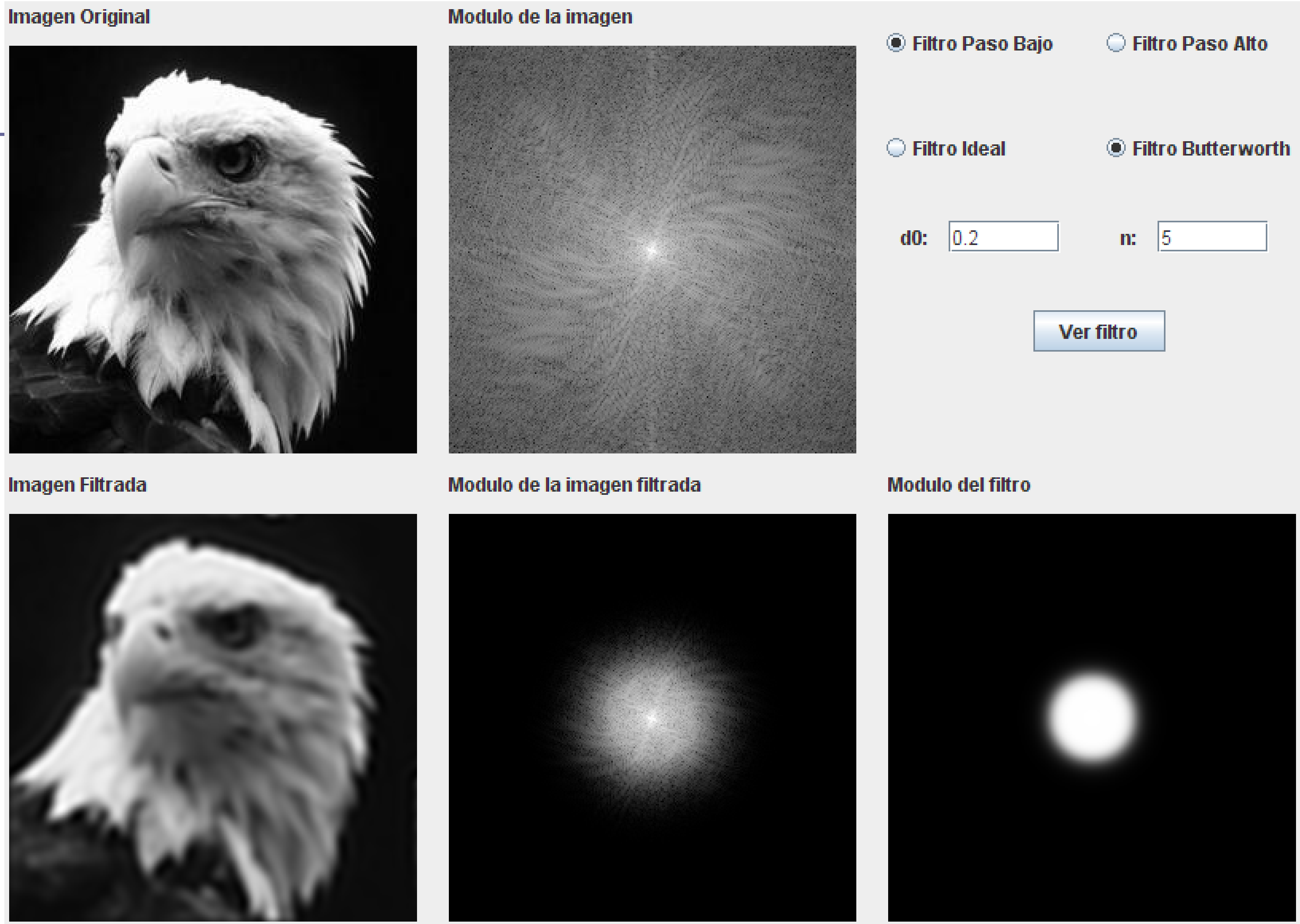


Imagen Original
Modulo de la imagen
Filtro Paso Bajo
Filtro Paso Alto
Filtro Ideal
Filtro Butterworth
d0:
0.2
n:
5
Ver filtro
Imagen Filtrada
Modulo de la imagen filtrada
Modulo del filtro

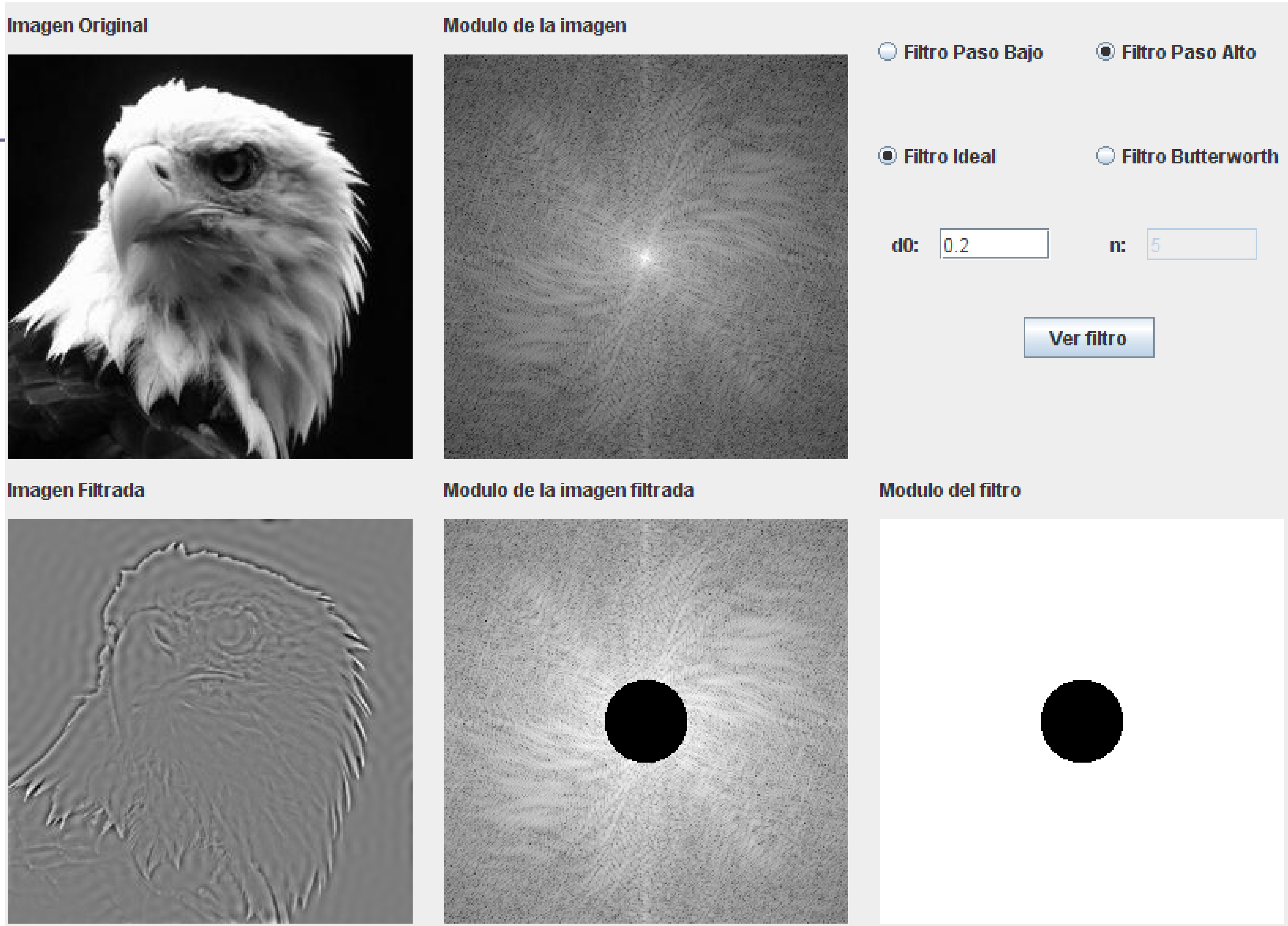


Imagen Original
Modulo de la imagen
Filtro Paso Bajo
Filtro Paso Alto
Filtro Ideal
Filtro Butterworth
d0:
0.2
n:
5
Ver filtro
Imagen Filtrada
Modulo de la imagen filtrada
Modulo del filtro

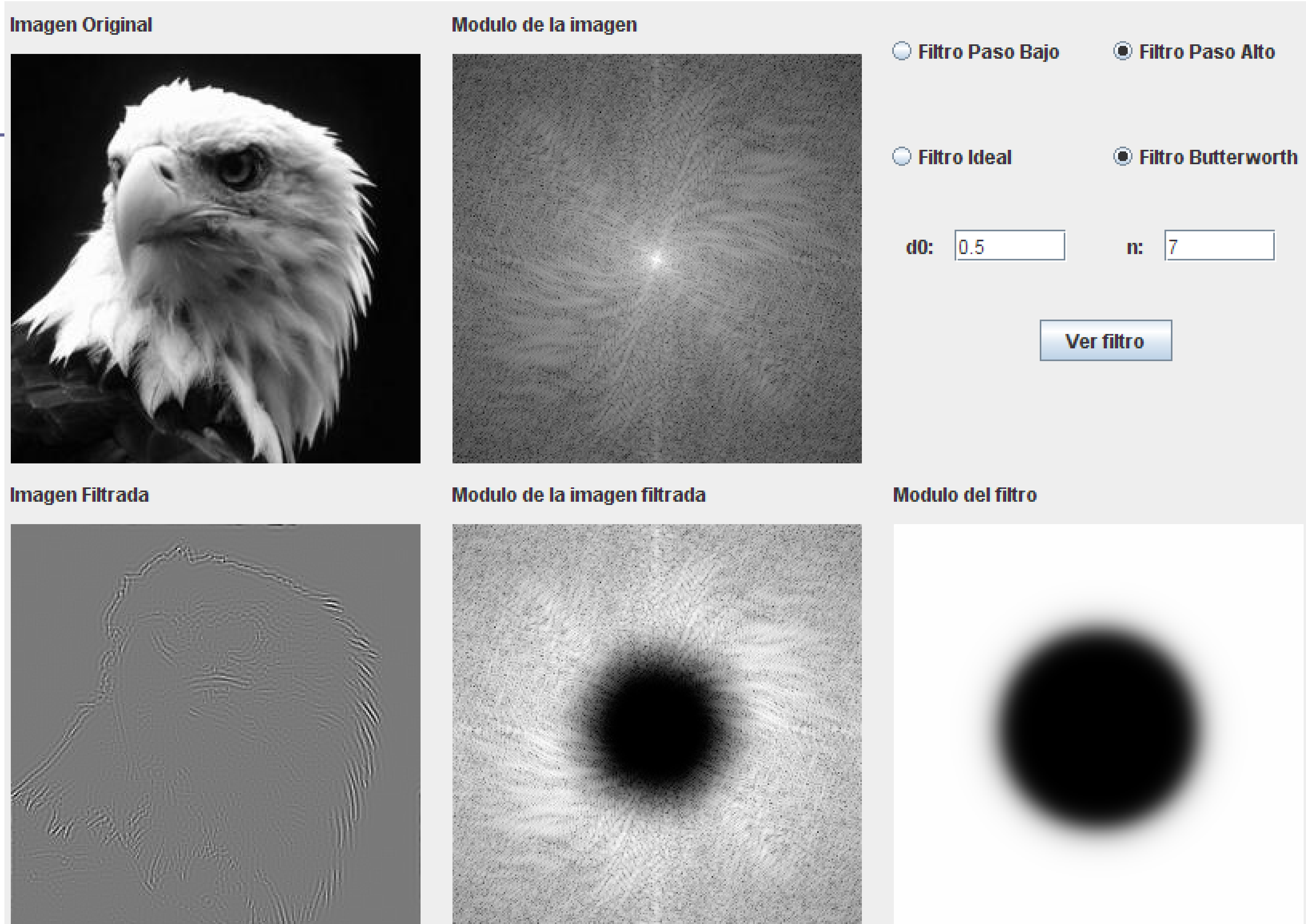


Imagen Original
Modulo de la imagen
Filtro Paso Bajo
Filtro Paso Alto
Filtro Ideal
Filtro Butterworth
d0:
0.5
n:
7
Ver filtro
Imagen Filtrada
Modulo de la imagen filtrada
Modulo del filtro

La importancia de la fase

- En la representación de Fourier de las señales, el módulo y la fase tienden a representar diferentes papeles y en algunas situaciones la mayoría de las características más importantes de una señal se preservan sólo si la información de la fase se mantiene.
- Cuando una señal es de longitud finita, la información de la fase simplemente basta para reconstruir una señal dentro de un factor de escala. Estas afirmaciones son válidas tanto para señales unidimensionales como multidimensionales.

La importancia de la fase

- Una imagen de sólo fase tiene una transformada de Fourier cuya fase es igual a la fase de la señal original y módulo unidad.
- Muchas de las características de la imagen original son identificables claramente en la imagen de sólo fase, pero no ocurre lo mismo en la imagen de sólo módulo (aquella cuya transformada de Fourier tiene como módulo el de la imagen original, y fase nula).

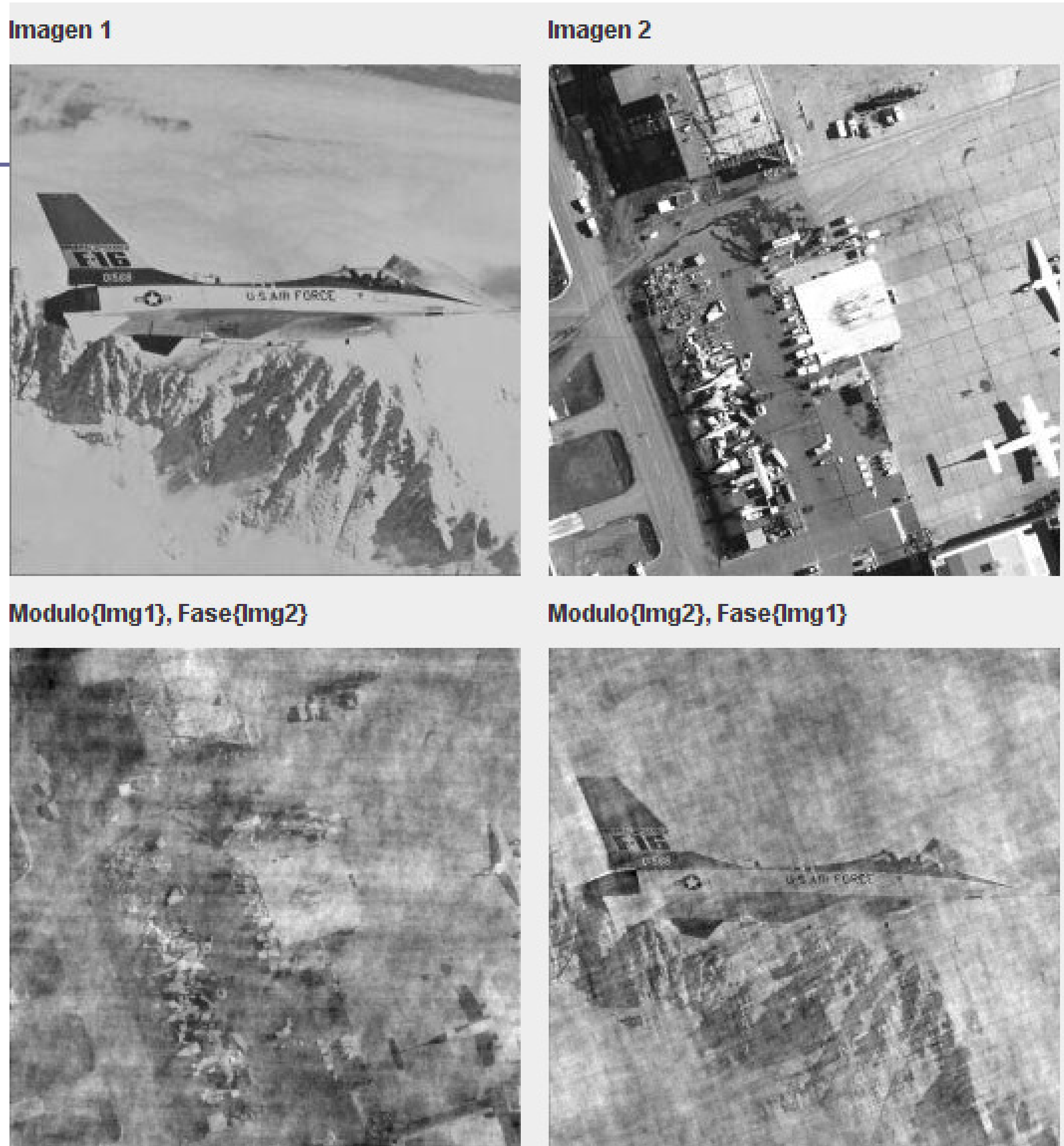


Imagen 1
Imagen 2
Modulo{Img1}, Fase{Img2}
Modulo{Img2}, Fase{Img1}