matesfacil

Autómata Finito Determinista

Contenido de esta página:

- Introducción.
- Definición de **Autómata Finito Determinista** (AFD).
- Representación de un AFD.
- Lenguaje de un AFD.
- Función de transición de estados **extendida**.

Páginas relacionadas:

- Autómatas Finitos No deterministas y con transiciones-ε.
- Ejemplos de Autómatas Finitos y Lenguajes Regulares.
- Lema de Bombeo para Lenguajes Regulares.
- Teoremas sobre los lenguajes de Autómatas.
- Máquinas de Turing.

Introducción

La Teoría de Autómatas es una rama de la Teoría de la Computación que estudia las máquinas teóricas llamadas **autómatas**. Estas máquinas son modelos matemáticos.

Un Autómata está formado por un conjunto de estados, uno de los cuales es el estado en el que la máquina se encuentra inicialmente. Recibe como entrada una **palabra** (una concatenación de símbolos del alfabeto del autómata) y según esta palabra la máquina puede cambiar de estados.

Los Autómatas se clasifican según el número de estados (finito o no), la forma en que se realiza el cambio de estado (determinista o no), si acepta o no el símbolo vacío ε, si tiene o no una pila, etc.

Los Autómatas están estrechamente relacionados con la máquina de Turing (1936), de gran importancia en la Teoría de la Computación. Esto se debe a que una máquina de Turing puede simular el almacenamiento y la unidad de control de una computadora. Tenemos certeza de que lo que no puede ser resuelto por una máquina de Turing no puede ser resuelto por una computadora real.

Autómata Finito Determinista

Llamamos **Autómata Finito Determinista** a

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

siendo

- Q el conjunto finito de **estados**, que denotaremos por

  $$q_0, q_1, q_2, \ldots$$

- Σ el **alfabeto**, es decir, un conjunto finito de símbolos que formarán **palabras** o **cadenas**.

  El conjunto de palabras que se pueden formar concatenando los símbolos de Σ se denota por Σ^*. La **palabra vacía**, que no está formada por ningún símbolo, forma parte de Σ^*.

- δ es la **función de transición**. Determina el comportamiento del autómata.

  $$\delta(q_i, a) = q_j$$

  significa que si en el estado q_i de Q el autómata recibe el símbolo de entrada a de Σ, entonces pasa al estado q_j de Q.

- q_0 es el **estado inicial**, el estado en qué el autómata se encuentra inicialmente.

- F es el subconjunto de Q (por tanto, finito) que contiene los **estados de aceptación** (o **finales**), que son los estados que provocan la **parada** del autómata.

  Cuando se llega a uno de estos estados a través de una palabra *w* de Σ^*, diremos que el autómata acepta a dicha palabra (es una palabra del lenguaje del autómata).

Representación o diagrama de un AFD

Representaremos los estados del AFD mediante círculos que encierran el nombre del estado (q_0, q_1,...).

La posible transición

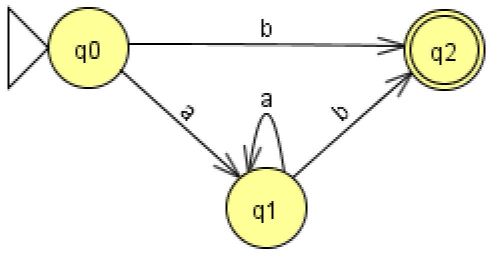
$$\delta(q_i, x) = q_j$$

se representa mediante una flecha que empieza en q_i y termina en q_j con la etiqueta "x".

Los circulos de los estados de aceptación tienen el borde doble.

El estado inicial, q_0, se representa con una flecha que termina en dicho estado (pero no empieza en ningún estado).

EJEMPLO 1



Ver explicación

El AFD representado tiene tres estados:

$$q_0,\ q_1,\ q_2$$

El estado inicial es q_0 y el final es q_2.

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\},\ F = \{q_2\}$$

El alfabeto del autómata podría ser cualquiera siempre que contenga los símbolos a y b que son los que emplea el AFD. Podemos suponer

$$\Sigma = \{a, b\}$$

La función de transición es

$$\delta(q_0, a) = q_1$$

$$\delta(q_0, b) = q_2$$

$$\delta(q_1, a) = q_1$$

$$\delta(q_1, b) = q_2$$

Notemos que la tercera expresión corresponde con el arco que parte del estado q_1 y termina en dicho estado.

Iniciamos el AFD:

El AFD se encuentra en q_0. Si recibe el símbolo b, pasa al estado q_2 que es un estado final. Por tanto, el autómata se para (finaliza el proceso) y **acepta** la palabra $w = b$ de Σ^*.

Si por el contrario recibe el símbolo a, pasa al estado q_1. En este estado hay dos posibilidades:

1. Si el siguiente símbolo que recibe es b, pasa al estado final q_2. El autómata se para y acepta la palabra formada por la concatenación de todos los símbolos que ha recibido.

2. Si el siguiente símbolo que recibe es a, el autómata se mantiene en el mismo estado. Entonces inspecciona el siguiente símbolo, lo que nos lleva al punto anterior o de nuevo a este.

Ejemplos de palabras:

- *ac*: no la acepta ya que el símbolo *c* no forma parte del alfabeto Σ. Si forzamos su funcionamiento, el autómata **muere** (se bloquea) en el estado q_1. No alcanza un estado de aceptación.
- *aab*: la acepta. De q_0 pasa a q_1 al recibir la primera *a*, de q_1 pasa a q_1 al recibir la segunda *a*, de q_1 pasa a q_2 al recibir *b*.

  Como q_2 es el estado final, el autómata finaliza y acepta la cadena *abb*.
- *bd*: no la acepta porque el símbolo *d* no forma parte del alfabeto Σ. Si forzamos su funcionamiento, el autómata alcanzaría el estado de aceptación al recibir *b*, pero entonces recibe *d* y, puesto que no hay ningún arco etiquetado con *d*, el autómata se bloquea porque no sabe cómo responder.
- *a*: no la acepta. El autómata pasa al estado q_1 al recibir *a* y muere en este estado ya que no es de aceptación y no hay más transiciones (porque no hay más símbolos de entrada).

Lenguaje de un AFD

Llamamos **lenguaje del autómata finito determinista** A, **L(A)**, al conjunto de palabras para las cuales el autómata llega a un estado de aceptación.

Si empleamos la función de transición extendida (definida más adelante), podemos definir el lenguaje como

$$L(A) := \{w \in \Sigma^* \ : \ \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

EJEMPLO 2

Lenguaje del autómata del **EJEMPLO 1**.

Ver solución

$$L = \{b,\ a^n b \ : \ n \geq 1\}$$

También lo podemos representar mediante la **expresión regular**

$$(1 + aa^*)b$$

Función de transición de estados extendida

Llamamos **función de transición extendida** a la función

$$\hat{\delta}$$

definida inductivamente como sigue:

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$$

$$\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

siendo *w* una palabra que se puede descomponer como *w* = *xa* donde *a* es el último símbolo de la palabra *w* y *x* es la cadena de símbolos que precede a *a*.

PROBLEMA 3

Para el **EJEMPLO 1**

$$\hat{\delta}(q_0, aaab) = q_2$$

Ver explicación

Recordamos que las transiciones del autómata son

$$\delta(q_0, a) = q_1$$

$$\delta(q_0, b) = q_2$$

$$\delta(q_1, a) = q_1$$

$$\delta(q_1, b) = q_2$$

Calculamos la función extendida por inducción:

$$\hat{\delta}(q_0, aaab) = \delta(\hat{\delta}(q_0, aaa), b)$$

$$\hat{\delta}(q_0, aaa) = \delta(\hat{\delta}(q_0, aa), a)$$

$$\hat{\delta}(q_0, aa) = \delta(\hat{\delta}(q_0, a), a)$$

$$\hat{\delta}(q_0, a) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \varepsilon), a)$$

$$\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0$$

Conociendo éste último, vamos sustituyendo hacia arriba:

$$\hat{\delta}(q_0, a) = \delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), a) =$$

$$= \delta(q_0, a) = q_1$$

$$\hat{\delta}(q_0, aa) = \delta(\hat{\delta}(q_0, a), a) =$$

$$= \delta(q_1, a) = q_1$$

$$\hat{\delta}(q_0, aaa) = \delta(\hat{\delta}(q_0, aa), a) =$$

$$= \delta(q_1, a) = q_1$$

$$\hat{\delta}(q_0, aaab) = \delta(\hat{\delta}(q_0, aaa), b) =$$

$$= \delta(q_1, b) = q_2$$

Observamos que la función de transición extendida nos permite saber el estado en el que se encuentra el autómata al recibir una determinada palabra partiendo de un determinado estado.

Como

$$\hat{\delta}(q_0, aaab) = q_2$$

y q_2 es un estado de aceptación, sabemos que el autómata acepta la palabra *aaab*.

Inicio