

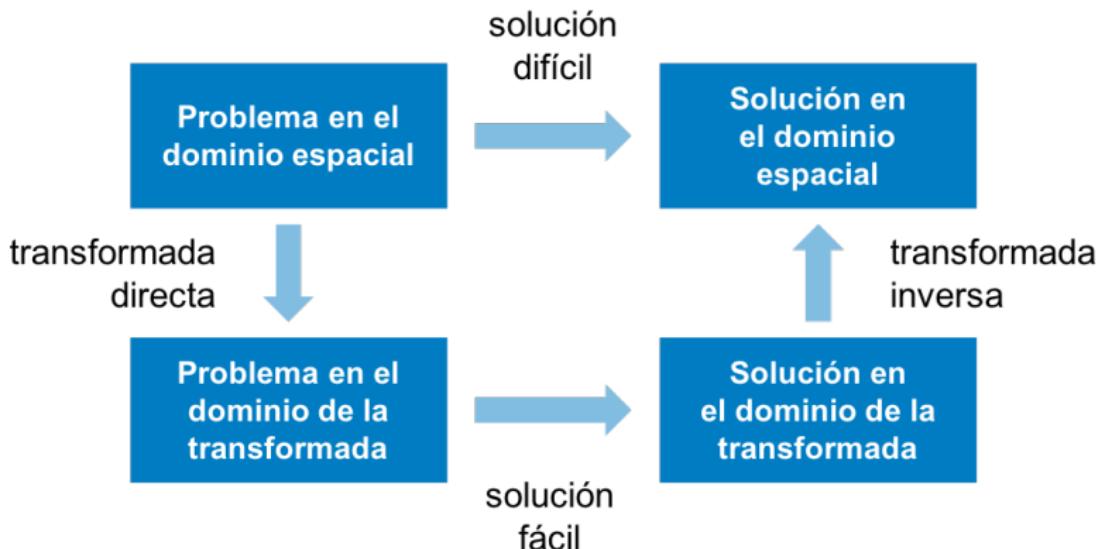
Análisis de Imágenes Digitales

Transformada de Fourier discreta

Dr. Wilfrido Gómez Flores

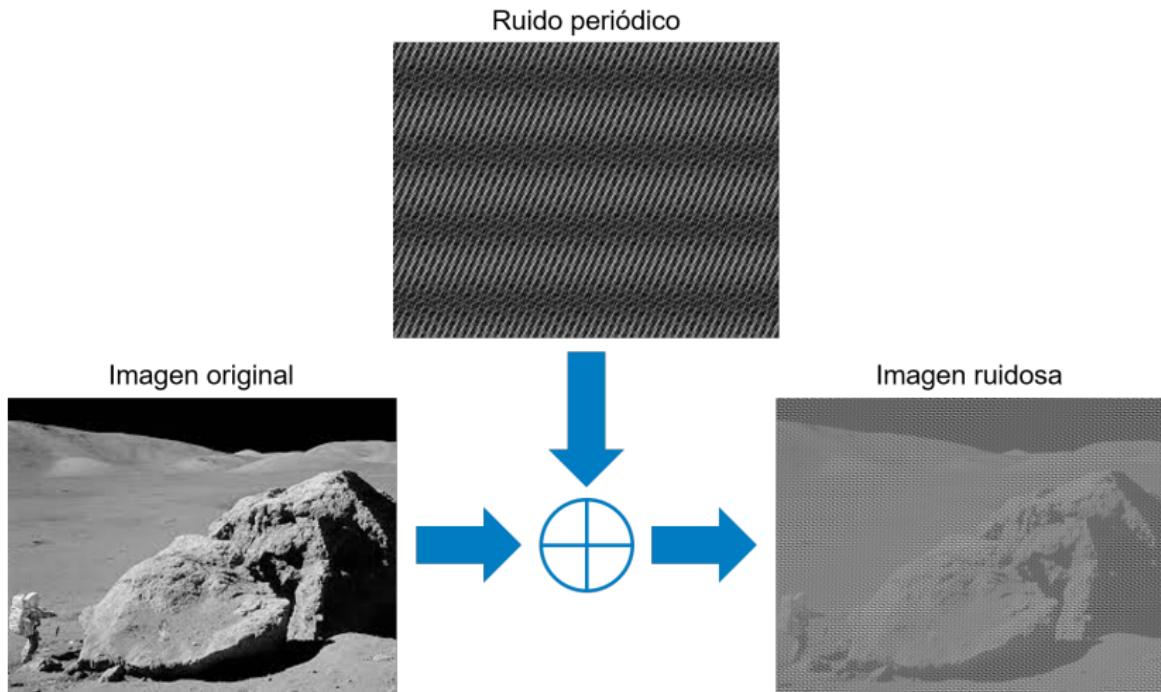


Introducción



Algunos problemas de análisis de imágenes son más fáciles de tratar al transformar la imagen del dominio espacial a otro dominio, realizar dichas tareas en ese nuevo dominio, y aplicar una transformación inversa para regresar al dominio espacial con el problema resuelto.

Introducción



Ejemplo: el ruido periódico se filtra en el dominio de la frecuencia.

Transformada de Fourier

- La transformada de Fourier es la técnica base del filtrado en el dominio de la frecuencia y se define como:

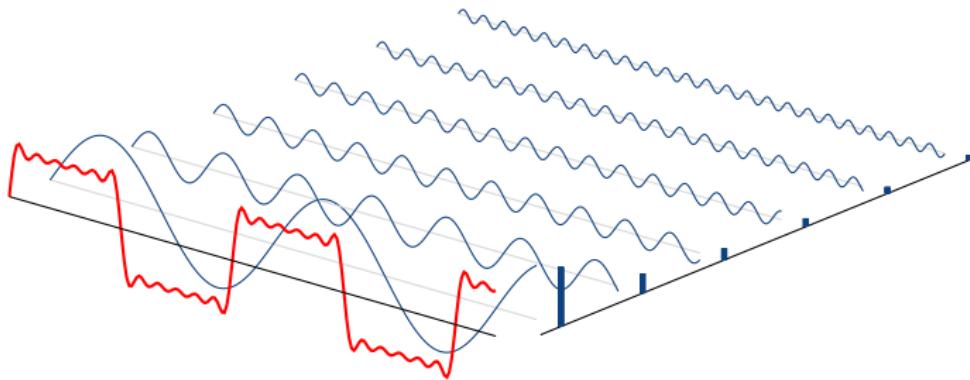
$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

donde $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$ es la fórmula de Euler.

- Transforma del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.
- Asume que una función no periódica es una función periódica con periodo infinito.

Transformada de Fourier



La transformada de Fourier es útil para descomponer una señal en el tiempo en sus componentes de frecuencia (armónicos). La curva roja representa una señal en el tiempo y sus componentes de frecuencia se proyectan en las barras azules. La integración de todas las señales senoidales reconstruye la señal en el tiempo.

Transformada de Fourier

- Forma polar de la función compleja $F(\omega)$:

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (3)$$

donde $|F(\omega)|$ y $\phi(\omega)$ son la magnitud y la fase del espectro:

$$|F(\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[F(\omega)] + \operatorname{Im}^2[F(\omega)]} \quad (4)$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[F(\omega)]}{\operatorname{Re}[F(\omega)]} \right\} \quad (5)$$

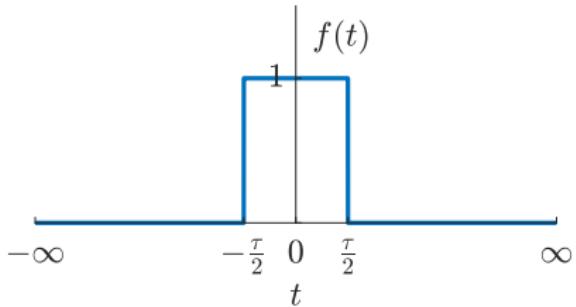
- También, se tiene que

$$|F(-\omega)| = |F(\omega)| \quad \text{y} \quad \phi(-\omega) = -\phi(\omega)$$

Transformada de Fourier

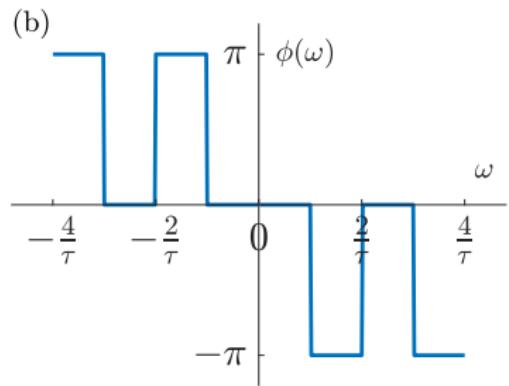
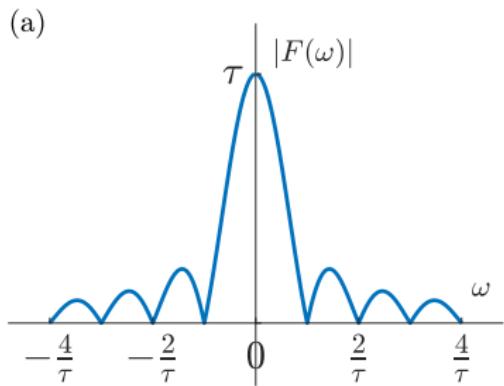
Transformada de Fourier para el pulso rectangular:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{1}{j\omega} \left(e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right) = \tau \frac{\sin \left(\omega \frac{\tau}{2} \right)}{\omega \frac{\tau}{2}} = \tau \text{sinc} \left(\omega \frac{\tau}{2} \right) \end{aligned}$$

Transformada de Fourier



Espectros de Fourier del pulso rectangular: (a) magnitud y (b) fase.

Transformada de Fourier

Propiedad	Función en tiempo	Función en frecuencia
Linealidad	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Escalamiento	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Desplazamiento en tiempo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Desplazamiento en frecuencia	$f(t)e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
Diferenciación en tiempo	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^{(n)} F(\omega)$
Integración en tiempo	$\int_{-\infty}^t f(t) dt$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
Modulación	$f(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$
Inversión	$f(-t)$	$F(-\omega)$ ó $F^*(\omega)$
Dualidad	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Teorema de Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$
Teorema de convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega)F_2(\omega)$

Teorema de convolución

La **convolución** es un operador que describe el comportamiento de un sistema lineal invariante en el tiempo:

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad (6)$$

donde $f(t)$ es la señal de entrada, $h(t)$ es la respuesta al impulso del sistema, y $g(t)$ es la señal de salida.



Teorema de convolución

- La transformada de Fourier de la convolución es:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t) * h(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \quad (7)\end{aligned}$$

- De acuerdo con la propiedad de *desplazamiento en el tiempo*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega\tau} H(\omega) \quad (8)$$

- Sustituyendo (8) en (7):

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t) * h(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} H(\omega)d\tau \\ &= H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = H(\omega)F(\omega) \quad (9)\end{aligned}$$

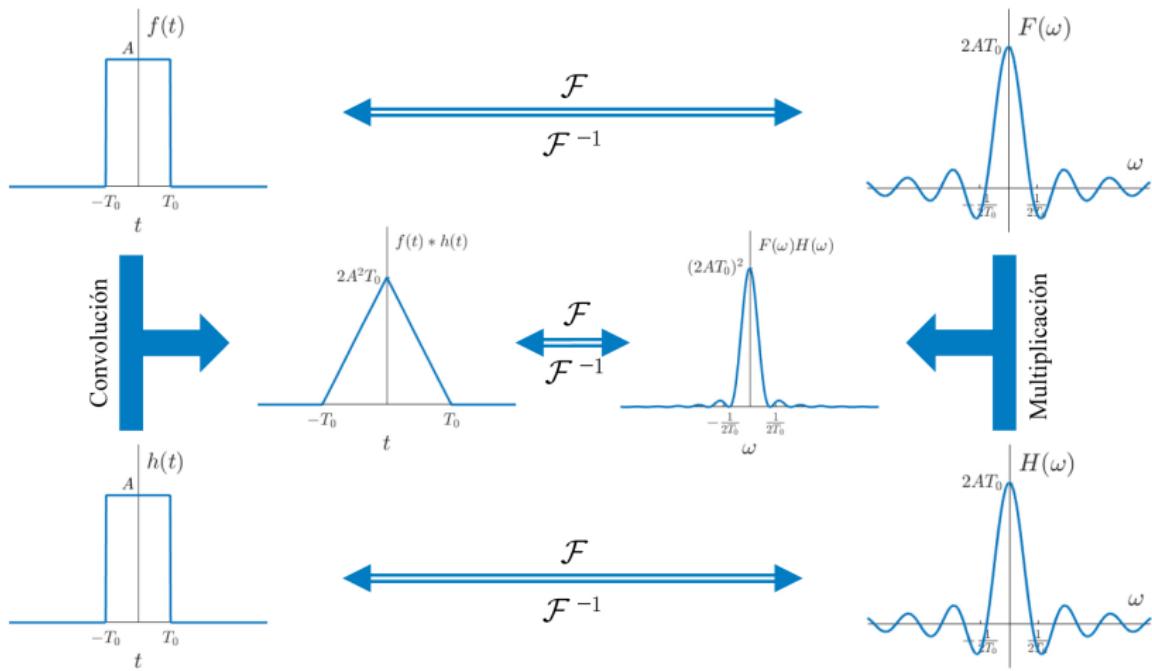
Teorema de convolución

El *teorema de convolución* establece que una convolución en el dominio del tiempo equivale al producto de dos transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia:

$$\mathcal{F}[f(t) * h(t)] = H(\omega)F(\omega) \quad (10)$$

donde $F(\omega)$ y $H(\omega)$ son las transformadas de Fourier de $f(t)$ y $h(t)$, respectivamente.

Teorema de convolución



Transformada de Fourier 2D

- Sea $f(s, t)$ una función continua de dos variables continuas s y t .
El par de transformadas de Fourier en dos dimensiones son:

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) e^{-j2\pi(s\mu+t\nu)} ds dt \quad (11)$$

y

$$f(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(s\mu+t\nu)} d\mu d\nu \quad (12)$$

donde μ y ν son las variables de frecuencia.

- De manera similar que en el caso unidimensional, el dominio de las variables μ y ν define el dominio continuo de la frecuencia.

Transformada de Fourier 2D

Transformada de Fourier de un pulso rectangular en dos dimensiones:

$$\begin{aligned} F(\mu, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) e^{-j2\pi(\mu s + \nu t)} d\mu d\nu = \int_{-S/2}^{S/2} \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi(\mu s + \nu t)} d\mu d\nu \\ &= AST \left[\frac{\sin(\pi\mu S)}{\pi\mu S} \right] \left[\frac{\sin(\pi\nu T)}{\pi\nu T} \right] \end{aligned}$$

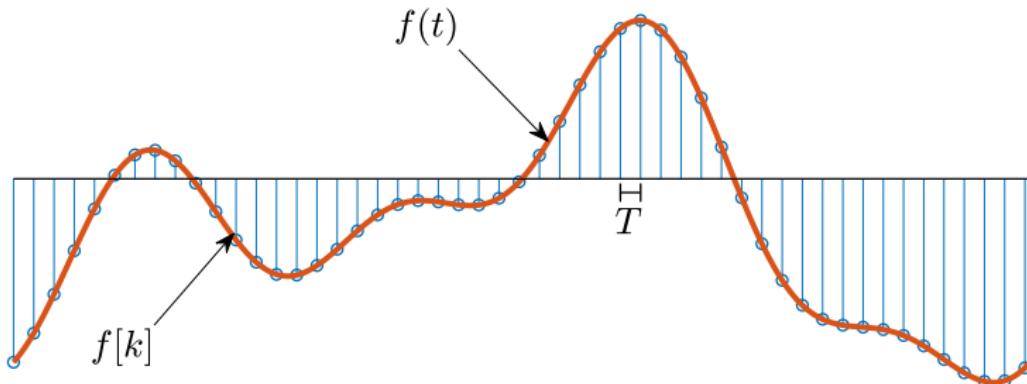
Pulso rectangular 2D y su magnitud del espectro. 

Transformada de Fourier discreta

La transformada de Fourier discreta (DFT) se utiliza para señales discretas con N puntos y un número finito de frecuencias:

$$\mathcal{F}[f(k)] = F(u) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{j2\pi uk}{N}}, \text{ para } u = 0, 1, \dots, N-1 \quad (13)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u)] = f(k) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) e^{\frac{j2\pi uk}{N}}, \text{ para } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (14)$$



Transformada de Fourier discreta

Propiedad	Función en tiempo	Función en frecuencia
Linealidad	$a_1 f_1(k) + a_2 f_2(k)$	$a_1 F_1(u) + a_2 F_2(u)$
Periodicidad	$f(k) = f(k + N)$	$F(u) = F(u + N)$
Escalamiento	$f(ak)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{u}{a}\right)$
Desplazamiento en tiempo	$f(k - k_0)$	$F(u)e^{-\frac{j2\pi u k_0}{N}}$
Desplazamiento en frecuencia	$f(k)e^{\frac{j2\pi u_0 k}{N}}$	$F(u - u_0)$
Desplazamiento al origen	$f(k)(-1)^k$	$F(u - \frac{N}{2})$
Inversión	$f(-k)$	$F(-u)$
Diferenciación	$\frac{d^n[f(k)]}{dk^n}$	$(ju)^n F(u)$
Relación de Parseval	$\sum_{k=0}^{N-1} f(k) ^2$	$\frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F(u) ^2$
Teorema de convolución	$f(k) * h(k)$	$F(u)H(u)$

Transformada de Fourier discreta

En general, el espectro $F(u)$ es una función compleja y se tiene:

$$F(u) = |F(u)| e^{j\phi(u)} \quad (15)$$

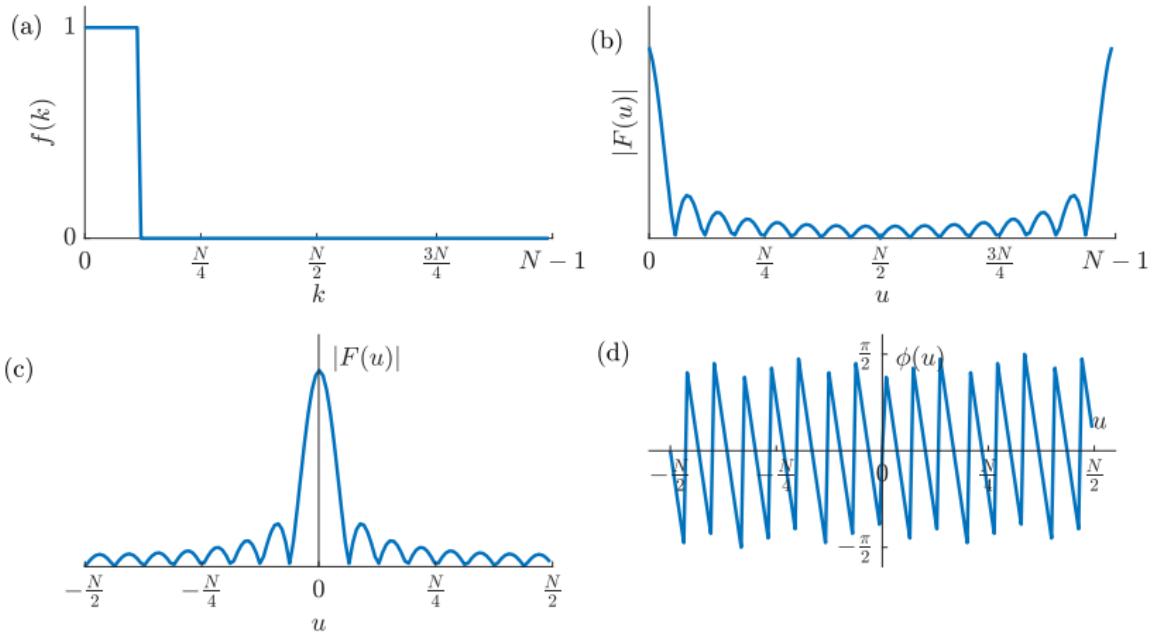
donde $|F(u)|$ y $\phi(u)$ son la magnitud y la fase del espectro:

$$|F(u)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[F(u)] + \operatorname{Im}^2[F(u)]} \quad (16)$$

$$\phi(u) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[F(u)]}{\operatorname{Re}[F(u)]} \right\} \quad (17)$$

donde $\operatorname{Re}(\cdot)$ y $\operatorname{Im}(\cdot)$ son la parte real e imaginaria del espectro, respectivamente.

Transformada de Fourier discreta



- (a) Pulso rectangular con N puntos. (b) Espectro de magnitud con N puntos. (c) Simetría par del espectro de magnitud: $|F(u)| = |F(-u)|$.
(d) Simetría impar del espectro de fase: $-\phi(u) = \phi(-u)$

DFT en dos dimensiones

- La DFT en dos dimensiones (2D-DFT) es muy utilizada en el procesamiento de imágenes digitales y se define como:

$$\mathcal{F}[f(x, y)] = F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}, \quad (18)$$

donde $f(x, y)$ es una imagen digital de tamaño $M \times N$ y las variables discretas $u = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ y $v = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

- La inversa DFT en dos dimensiones (2D-IDFT) se define como:

$$\mathcal{F}^{-1}[F(u, v)] = f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}, \quad (19)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ y $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

DFT en dos dimensiones

La DFT en dos dimensiones se puede expresar en forma polar:

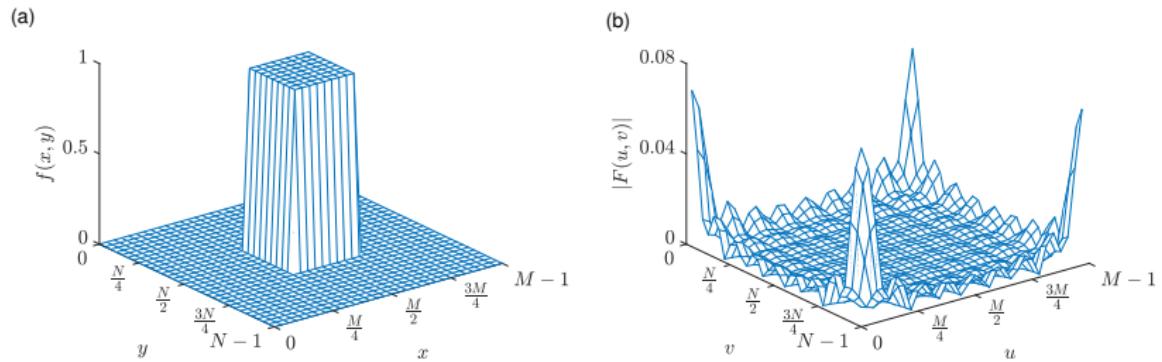
$$\begin{aligned} F(u, v) &= \operatorname{Re}[F(u, v)] + \operatorname{Im}[F(u, v)] \\ &= |F(u, v)| e^{j\phi(u, v)} \end{aligned} \quad (20)$$

donde la magnitud y el ángulo de fase son:

$$|F(u, v)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[F(u, v)] + \operatorname{Im}^2[F(u, v)]} \quad (21)$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[F(u, v)]}{\operatorname{Re}[F(u, v)]} \right\} \quad (22)$$

DFT en dos dimensiones



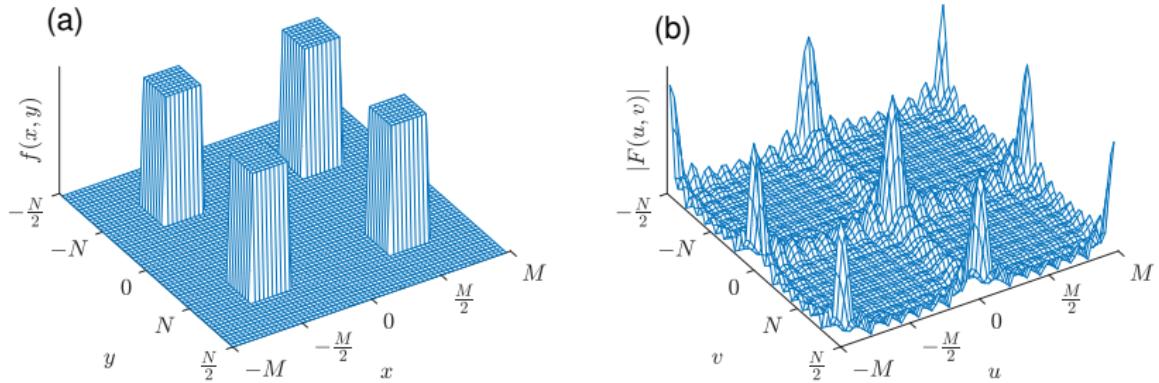
(a) Función de un pulso rectangular 2D. (b) Magnitud del espectro de Fourier.

Propiedades

Periodicidad. Sean k_1 y k_2 son enteros:

$$F(u, v) = F(u+k_1M, v) = F(u, v+k_2N) = F(u+k_1M, v+k_2N) \quad (23)$$

$$f(x, y) = f(x+k_1M, y) = f(x, y+k_2N) = f(x+k_1M, y+k_2N) \quad (24)$$



Periodicidad: (a) espacial y (b) espectral.

Propiedades

Traslación en frecuencia. Sea (u_0, v_0) un punto en el dominio de la frecuencia:

$$f(x, y) e^{j2\pi \left(\frac{u_0 x}{M} + \frac{v_0 y}{N} \right)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (25)$$

Espectro de un pulso rectangular 2D trasladado en frecuencia. 

Propiedades

Traslación espacial. Sea (x_0, y_0) un punto en el dominio espacial:

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(\frac{ux_0}{M} + \frac{vy_0}{N})} \quad (26)$$

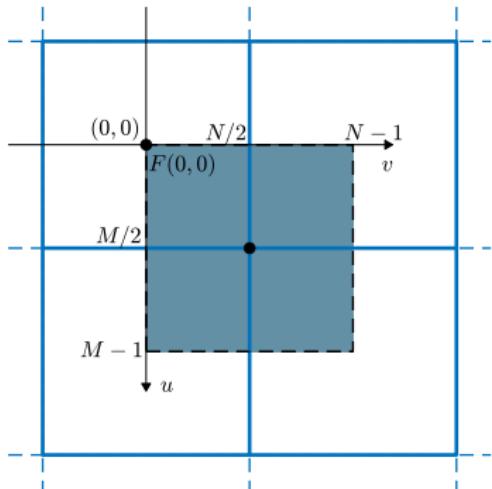
Pulso rectangular 2D trasladado en el espacio. 

Propiedades

- Para propósitos de visualización y procesamiento, es más conveniente tener el origen del espectro en el punto $(u_0, v_0) = (M/2, N/2)$.
- Traslación del origen al punto $(M/2, N/2)$:

$$f(x, y) (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2) \quad (27)$$

- El origen $F(0, 0)$ se traslada al centro del plano de frecuencias, es decir, el rectángulo definido en los intervalos $[0, M - 1]$ y $[0, N - 1]$.



Propiedades

Rotación. Sean (r, θ) y (ω, φ) coordenadas polares y θ_0 un ángulo de rotación:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0), \quad (28)$$

lo cual indica que rotar $f(x, y)$ por un ángulo θ_0 , también se rota $F(u, v)$ por el mismo ángulo, y viceversa.

Rotación de un pulso rectangular 2D. 

Magnitud y fase

La 2D-DFT de una función real es conjugada simétrica:

$$F(u, v)^* = F(-u, -v) \quad (29)$$

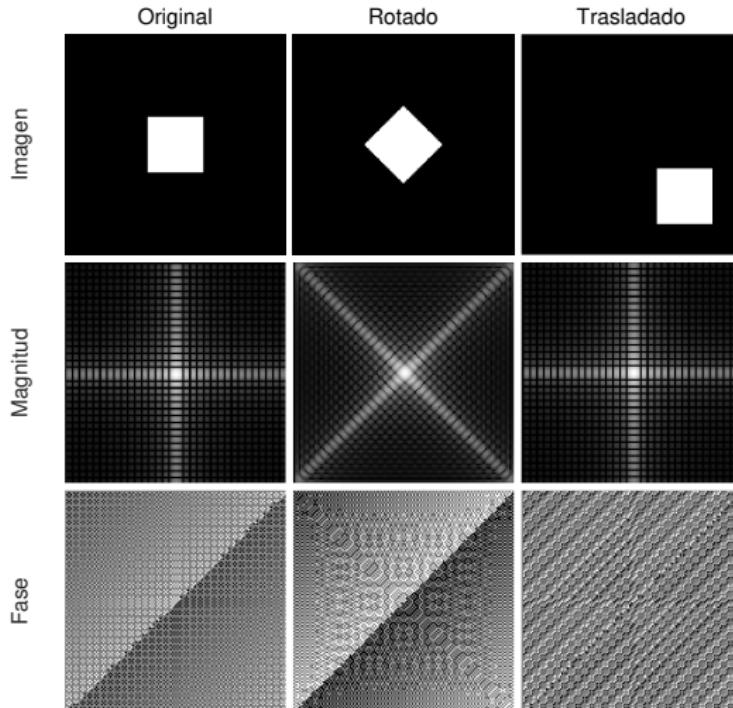
esto implica que el espectro de magnitud tiene simetría par con respecto al origen:

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (30)$$

mientras que el ángulo de fase tiene simetría impar con respecto al origen:

$$-\phi(u, v) = \phi(-u, -v) \quad (31)$$

Magnitud y fase



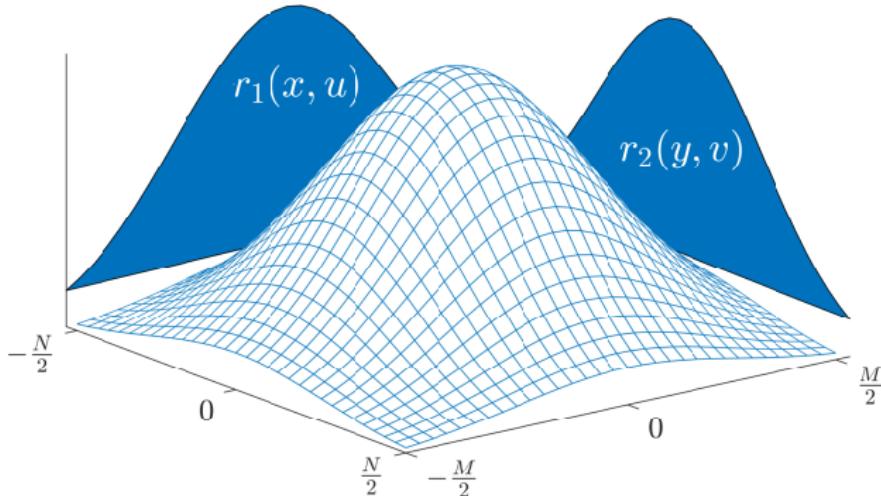
El espectro no es sensible a la traslación, aunque la rotación afecta su orientación.
Por otro lado, la fase se ve afectada por la traslación y rotación.

Magnitud y fase

Separabilidad y simetría

Sea $r(x, y, u, v) = e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$ el núcleo de transformación de 2D:

- **Separable:** $r(x, y, u, v) = r_1(x, u)r_2(y, v)$
- **Simétrico:** $r(x, y, u, v) = r_1(x, u)r_1(y, v)$



Ejemplo de núcleo Gaussiano simétrico y separable.

Separabilidad y simetría

El par de transformadas de Fourier pueden obtenerse en dos pasos aplicando sucesivamente la DFT unidimensional y su inversa:

$$F(u, v) = \sum_{y=0}^{N-1} F(u, y) e^{-j2\pi \frac{vy}{N}},$$

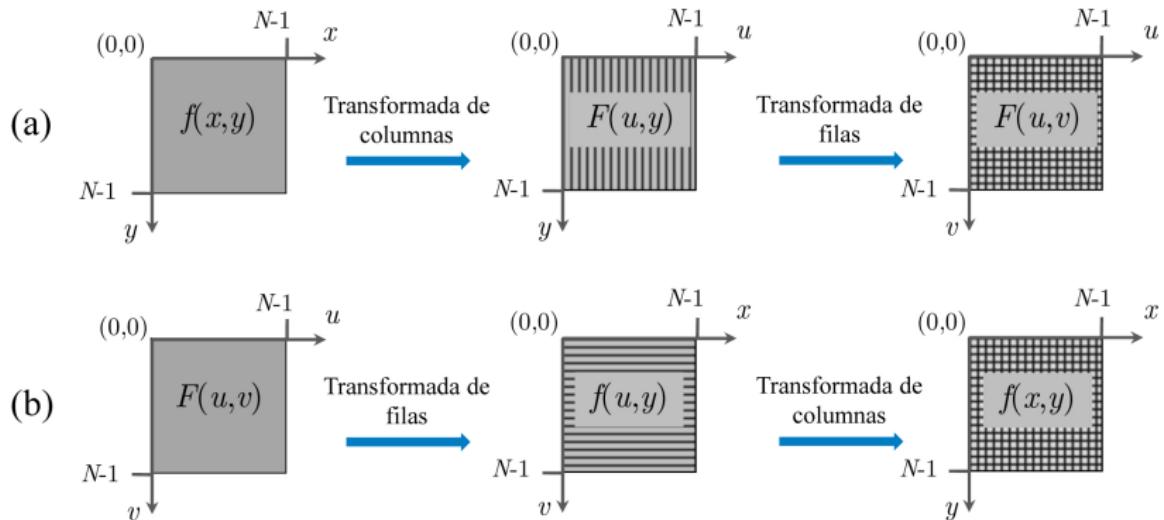
$$\text{donde } F(u, y) = \sum_{x=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \frac{ux}{N}} \quad (32)$$

y

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} f(u, y) e^{j2\pi \frac{ux}{N}},$$

$$\text{donde } f(u, y) = \frac{1}{N} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \frac{vy}{N}} \quad (33)$$

Separabilidad y simetría

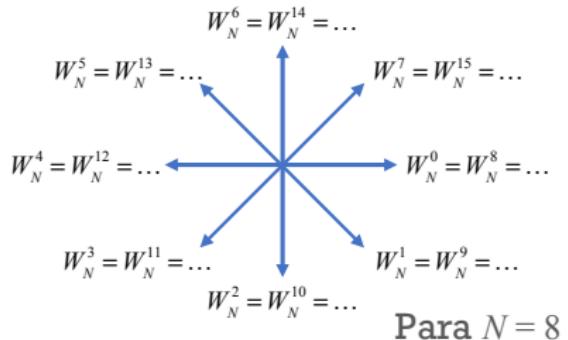


(a) Transformada 2D-DFT a partir de DFT unidimensionales. (b) Transformada 2D-IDFT a partir de IDFT unidimensionales. La DFT y su inversa se implementan utilizando el algoritmo FFT.

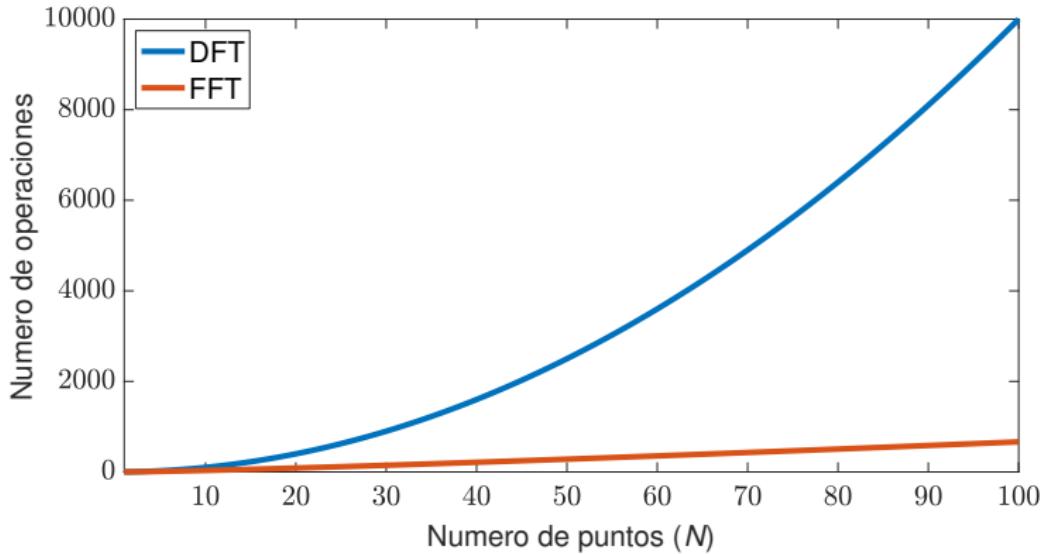
Transformada rápida de Fourier

La FFT aprovecha las propiedades de simetría y periodicidad del factor $W_N^a = e^{-j2\pi a/N}$ para reducir el número de operaciones.

$$\begin{aligned} W_N^{a+N} &= W_N^a & W_N^N &= 1 \\ W_N^{a+N/2} &= -W_N^a & W_N^2 &= W_{N/2} \end{aligned}$$

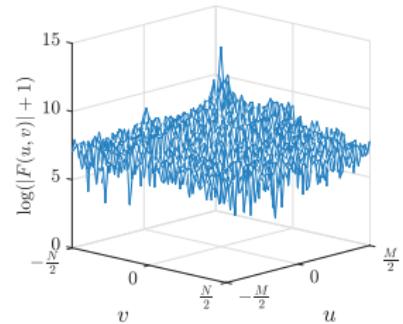
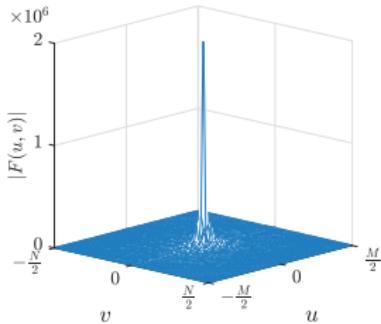


Transformada rápida de Fourier



La DFT realiza N^2 operaciones, mientras que la *transformada rápida de Fourier* (FFT) reduce a $N \log_2 N$ operaciones.

Visualización del espectro



Para propósitos de visualización del espectro de magnitud, se comprime su rango dinámico usando la función logarítmica para observar las componentes de frecuencia que tienen mucho menor energía que la componente $F(0,0)$; por tanto, $F(u,v) \rightarrow \log(|F(u,v)| + 1)$. Nótese que el procesamiento del espectro de Fourier se realiza sobre las componentes complejas y no sobre el espectro comprimido.