Objetivos de aprendizaje

4.3.1 Calcular las derivadas parciales de una función de dos variables.
4.3.2 Calcular las derivadas parciales de una función de más de dos variables.
4.3.3 Determinar las derivadas de orden superior de una función de dos variables.
4.3.4 Explicar el significado de una ecuación diferencial parcial y dar un ejemplo.

Ahora que hemos examinado los límites y la continuidad de las funciones de dos variables, podemos pasar a estudiar las derivadas. Calcular derivadas de funciones de dos variables es el concepto clave de este capítulo, con tantas aplicaciones en matemáticas, ciencia e ingeniería como la diferenciación de funciones de una sola variable. Sin embargo, ya hemos visto que los límites y la continuidad de las funciones multivariables presentan nuevos problemas y requieren una nueva terminología e ideas para tratarlos. Esto se traslada también a la diferenciación.

Derivadas de una función de dos variables

Al estudiar las derivadas de funciones de una variable, hallamos que una interpretación de la derivada es una tasa instantánea de cambio de y en función de x. La notación de Leibniz para la derivada es dy/dx, lo que implica que y es la variable dependiente y x es la variable independiente. Para una función $z = f(x, y)$ de dos variables, x como y son las variables independientes y z es la variable dependiente. Esto plantea de inmediato dos preguntas: ¿Cómo adaptamos la notación de Leibniz a las funciones de dos variables? Además, ¿qué es una interpretación de la derivada? La respuesta está en las derivadas parciales.

DEFINICIÓN

Supongamos que $f(x, y)$ es una función de dos variables. Entonces la **derivada parcial** de f con respecto a x, escrita como $\partial f/\partial x$, o f_x, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}. \tag{4.12}$$

La derivada parcial de f con respecto a y, escrita como $\partial f/\partial y$, o f_y, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k}. \tag{4.13}$$

Esta definición muestra ya dos diferencias. Primero, la notación cambia, en el sentido de que seguimos utilizando una versión de la notación de Leibniz, pero la d en la notación original se sustituye por el símbolo ∂. (Esta "d" redondeada suele llamarse "parcial", por lo que $\partial f/\partial x$ se expresa como el "parcial de f con respecto a x".) Este es el primer indicio de que se trata de derivadas parciales. En segundo lugar, ahora tenemos dos derivadas diferentes que podemos tomar, ya que hay dos variables independientes diferentes. Dependiendo de la variable que elijamos, podemos obtener diferentes derivadas parciales en conjunto, y a menudo lo hacemos.

EJEMPLO 4.14

Calcular las derivadas parciales a partir de la definición

Utilice la definición de la derivada parcial como límite para calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ para la función

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 12.$$

[Show/Hide Solution]

PUNTO DE CONTROL 4.12

Utilice la definición de la derivada parcial como límite para calcular $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$ para la función

$$f(x, y) = 4x^2 + 2xy – y^2 + 3x - 2y + 5.$$

La idea que se debe tener en cuenta cuando se calculan derivadas parciales es tratar todas las variables independientes, distintas de la variable con respecto a la cual estamos diferenciando, como constantes. Luego se procede a diferenciar como con una función de una sola variable. Para ver por qué esto es cierto, primero hay que fijar y y definir $g(x) = f(x, y)$ en función de x. Entonces

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Lo mismo ocurre con el cálculo de la derivada parcial de f con respecto a y. Esta vez, fije x y definir $h(y) = f(x, y)$ en función de y. Entonces

$$h'(x) = \lim_{k \to 0} \frac{h(x+k) - h(x)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Se aplican todas las reglas de diferenciación de Introducción a las derivadas.

EJEMPLO 4.15

Calcular derivadas parciales

Calcule $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$ para las siguientes funciones manteniendo constante la variable opuesta y luego diferenciando:

a. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 12$
b. $g(x, y) = \operatorname{sen}\left(x^2 y - 2x + 4\right)$

[Show/Hide Solution]

Solución

a. Para calcular $\partial f / \partial x$, trate la variable y como constante. Luego diferencie $f(x, y)$ con respecto a x utilizando las reglas de suma, diferencia y potencia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 12\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\right] - \frac{\partial}{\partial x}[3xy] + \frac{\partial}{\partial x}\left[2y^2\right] - \frac{\partial}{\partial x}[4x] + \frac{\partial}{\partial x}[5y] - \frac{\partial}{\partial x}[12] \\ &= 2x - 3y + 0 - 4 + 0 - 0 \\ &= 2x - 3y - 4.\end{aligned}$$

Las derivadas de los términos tercero, quinto y sexto son todas cero porque no contienen la variable x, por lo que se tratan como términos constantes. La derivada del segundo término es igual al coeficiente de x, que es $-3y$. Si calculamos $\partial f/\partial y$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - 3xy + 2y^2 - 4x + 5y - 12\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}[3xy] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2y^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}[4x] + \frac{\partial}{\partial y}[5y] - \frac{\partial}{\partial y}[12] \\ &= -3x + 4y - 0 + 5 - 0 \\ &= -3x + 4y + 5.\end{aligned}$$

Estas son las mismas respuestas obtenidas en el Ejemplo 4.14.

b. Para calcular $\partial g/\partial x$, trate la variable *y* como una constante. Luego diferencie $g(x, y)$ con respecto a *x* utilizando la regla de la cadena y la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{sen}\left(x^2y - 2x + 4\right)\right] \\ &= \cos\left(x^2y - 2x + 4\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2y - 2x + 4\right] \\ &= (2xy - 2)\cos\left(x^2y - 2x + 4\right).\end{aligned}$$

Para calcular $\partial g/\partial y$, trate la variable x como constante. Luego diferencie $g(x, y)$ con respecto a y utilizando la regla de la cadena y la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{sen}\left(x^2y - 2x + 4\right)\right] \\ &= \cos\left(x^2y - 2x + 4\right)\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2y - 2x + 4\right] \\ &= x^2\cos\left(x^2y - 2x + 4\right).\end{aligned}$$

PUNTO DE CONTROL 4.13

Calcule $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ para la función $f(x, y) = \tan\left(x^3 - 3x^2y^2 + 2y^4\right)$ manteniendo constante la variable opuesta, y luego diferenciando.

¿Cómo podemos interpretar estas derivadas parciales? Recordemos que el gráfico de una función de dos variables es una superficie en $\mathbb{R}^3$. Si eliminamos el límite de la definición de la derivada parcial con respecto a x, el cociente de diferencia se mantiene:

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Se parece al cociente de diferencia para la derivada de una función de una variable, excepto por la presencia de la variable y. La Figura 4.21 ilustra una superficie descrita por una función arbitraria $z = f(x, y)$.

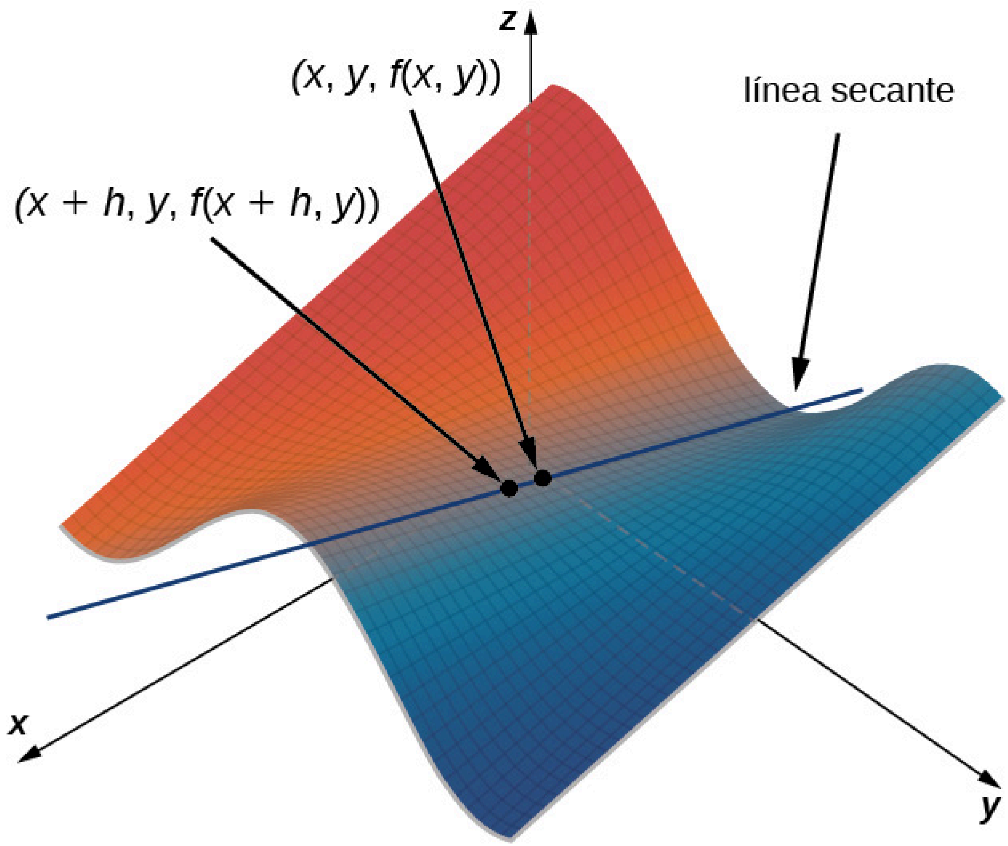


Figura 4.21 Línea secante que pasa por los puntos $(x, y, f(x, y))$ y $(x + h, y, f(x + h, y))$.

En la Figura 4.21, el valor de h es positivo. Si graficamos $f(x, y)$ y $f(x + h, y)$ para un punto arbitrario (x, y), entonces la pendiente de la línea secante que pasa por estos dos puntos está dada por

$$\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}.$$

Esta línea es paralela al eje x. Por lo tanto, la pendiente de la línea secante representa una tasa media de cambio de la función f mientras nos trasladamos en paralelo al eje x. A medida que h se acerca a cero, la pendiente de la línea secante se acerca a la pendiente de la línea tangente.

Si elegimos cambiar y en vez de x por el mismo valor progresivo h, entonces la línea secante es paralela al eje y y también lo es la línea tangente. Por lo tanto, $\partial f/\partial x$ representa la pendiente de la línea tangente que pasa por el punto $(x, y, f(x, y))$ paralelo al eje x y $\partial f/\partial y$ representa la pendiente de la línea tangente que pasa por el punto $(x, y, f(x, y))$ paralelo al eje y. Si deseamos calcular la pendiente de una línea tangente que pasa por el mismo punto en cualquier otra dirección, entonces necesitamos lo que se llama *derivadas direccionales*, lo cual estudiamos en la sección Derivadas direccionales y el gradiente.

Volvemos ahora a la idea de las líneas de contorno, que introdujimos en la sección Funciones de varias variables. Podemos utilizar líneas de contorno para estimar las derivadas parciales de una función $g(x, y)$.

EJEMPLO 4.16

Derivadas parciales a partir de líneas de contorno

Utilice líneas de contorno para estimar $\partial g/\partial x$ en el punto $\left(\sqrt{5}, 0\right)$ para la función $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

[Show/Hide Solution]

Solución

El siguiente gráfico representa unas líneas de contorno para la función $g\left(x,y\right)=\sqrt{9-x^2-y^2}$.

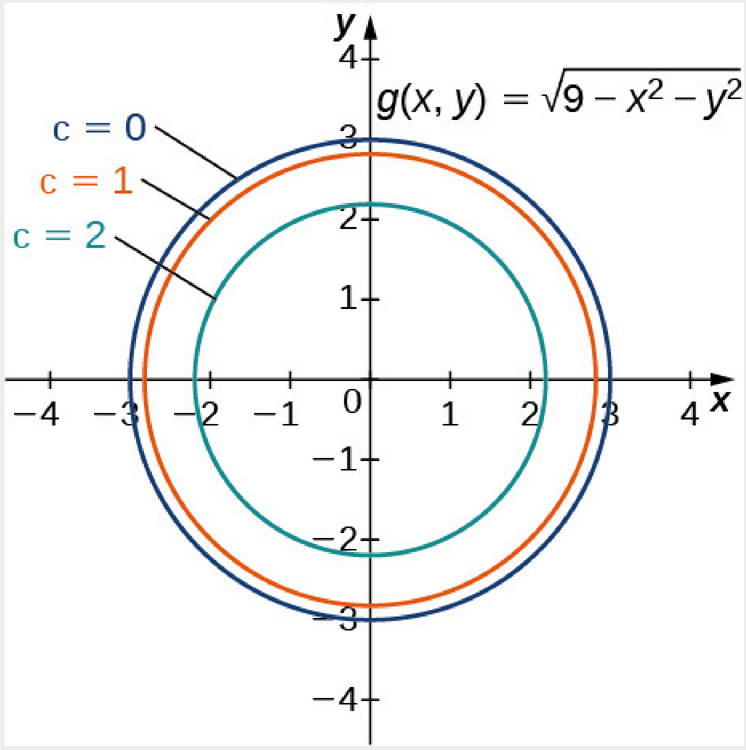


Figura 4.22 Líneas de contorno de la función $g\left(x,y\right)=\sqrt{9-x^2-y^2}$, utilizando c $=0,1,2$, y 3 ($c=3$ corresponde al origen).

El círculo interior de las líneas de contorno corresponde a $c=2$ y el siguiente círculo fuera corresponde a $c=1$. El primer círculo está dado por la ecuación $2=\sqrt{9-x^2-y^2}$; el segundo círculo está dado por la ecuación $1=\sqrt{9-x^2-y^2}$. La primera ecuación se simplifica a $x^2+y^2=5$ y la segunda ecuación se simplifica a $x^2+y^2=8$. La intersección en x del primer círculo es $\left(\sqrt{5},0\right)$ y la intersección en eje x del segundo círculo es $\left(2\sqrt{2},0\right)$. Podemos estimar el valor de $\partial g/\partial x$ evaluado en el punto $\left(\sqrt{5},0\right)$ utilizando la fórmula de la pendiente:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y)=(\sqrt{5},0)}\approx\frac{g\left(\sqrt{5},0\right)-g\left(2\sqrt{2},0\right)}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}=\frac{2–1}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}\approx-1{,}688.$$

Para calcular el valor exacto de $\partial g/\partial x$ evaluado en el punto $\left(\sqrt{5},0\right)$, empezamos por hallar $\partial g/\partial x$ utilizando la regla de la cadena. Primero, reescribimos la función como $g\left(x,y\right)=\sqrt{9-x^2-y^2}=\left(9-x^2-y^2\right)^{1/2}$ y luego diferenciamos con respecto a x mientras se mantiene y constante:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(9-x^2-y^2\right)^{-1/2}\left(-2x\right)=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}}.$$

A continuación, evaluamos esta expresión con $x=\sqrt{5}$ y la intersección $y=0$:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x,y)=(\sqrt{5},0)}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9-\left(\sqrt{5}\right)^2-(0)^2}}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}\approx-1{,}118.$$

La estimación de la derivada parcial corresponde a la pendiente de la línea secante que pasa por los puntos $\left(\sqrt{5}, 0, g\left(\sqrt{5}, 0\right)\right)$ y $\left(2\sqrt{2}, 0, g\left(2\sqrt{2}, 0\right)\right)$. Representa una aproximación a la pendiente de la línea tangente a la superficie que pasa por el punto $\left(\sqrt{5}, 0, g\left(\sqrt{5}, 0\right)\right)$, que es paralelo al eje x.

PUNTO DE CONTROL 4.14

Utilice líneas de contorno para estimar $\partial f/\partial y$ en el punto $\left(0, \sqrt{2}\right)$ para la función

$$f\left(x, y\right) = x^2 - y^2.$$

Compare esto con la respuesta exacta.

Funciones de más de dos variables

Supongamos que tenemos una función de tres variables, como $w = f\left(x, y, z\right)$. Podemos calcular las derivadas parciales de w con respecto a cualquiera de las variables independientes, simplemente como extensiones de las definiciones de las derivadas parciales de funciones de dos variables.

DEFINICIÓN

Supongamos que $f\left(x, y, z\right)$ sea una función de tres variables. Entonces, la *derivada parcial de* f *con respecto a x,* escrita como $\partial f/\partial x$, o f_x , se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x + h, y, z\right) - f\left(x, y, z\right)}{h}. \tag{4.14}$$

La *derivada parcial de* f *con respecto a* y, escrita como $\partial f/\partial y$, o f_y , se define como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f\left(x, y + k, z\right) - f\left(x, y, z\right)}{k}. \tag{4.15}$$

La *derivada parcial de* f *con respecto a* z, escrita como $\partial f/\partial z$, o f_z, se define como

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{m \to 0} \frac{f\left(x, y, z + m\right) - f\left(x, y, z\right)}{m}. \tag{4.16}$$

Podemos calcular una derivada parcial de una función de tres variables usando la misma idea que usamos para una función de dos variables. Por ejemplo, si tenemos una función f de $x, y,$ y $z,$ y queremos calcular $\partial f/\partial x,$ entonces tratamos las otras dos variables independientes como si fueran constantes, luego diferenciamos con respecto a x.

EJEMPLO 4.17

Calcular las derivadas parciales de una función de tres variables

Utilice la definición de límite de las derivadas parciales para calcular $\partial f/\partial x$ para la función

$$f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4xz + 5yz^2 - 12x + 4y - 3z.$$

Luego, calcule $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ estableciendo las otras dos variables constantes y diferenciando como corresponda.

[Show/Hide Solution]

Solución

Primero calculamos $\partial f/\partial x$ utilizando la [Ecuación 4.14](), luego calculamos las otras dos derivadas parciales manteniendo constantes las variables restantes. Para utilizar la ecuación para calcular $\partial f/\partial x$, primero tenemos que calcular $f(x+h, y, z)$:

$$\begin{aligned} f(x+h, y, z) &= (x+h)^2 - 3(x+h)y + 2y^2 - 4(x+h)z + 5yz^2 - 12(x+h) + 4y - 3z \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - 3xy - 3xh + 2y^2 - 4xz - 4hz + 5yz^2 - 12x - 12h + 4y - 3z \end{aligned}$$

y recuerde que $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 4zx + 5yz^2 - 12x + 4y - 3z$. Luego, sustituimos estas dos expresiones en la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{h \to 0} \Big[\frac{x^2+2xh+h^2-3xy-3hy+2y^2-4xz-4hz+5yz^2-12x-12h+4y-3z}{h} \\ &\quad - \frac{x^2-3xy+2y^2-4xz+5yz^2-12x+4y-3z}{h} \Big] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{2xh+h^2-3hy-4hz-12h}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{h(2x+h-3y-4z-12)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h - 3y - 4z - 12) \\ &= 2x - 3y - 4z - 12. \end{aligned}$$

Luego calculamos $\partial f/\partial y$ manteniendo x y z constantes. Por lo tanto, cualquier término que no incluya la variable y es constante, y su derivada es cero. Podemos aplicar las reglas de la suma, la diferencia y la potencia para funciones de una variable:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 - 3xy + 2y^2 - 4xz + 5yz^2 - 12x + 4y - 3z\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[x^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}[3xy] + \frac{\partial}{\partial y}\left[2y^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}[4xz] + \frac{\partial}{\partial y}\left[5yz^2\right] - \frac{\partial}{\partial y}[12x] + \frac{\partial}{\partial y}[4y] - \frac{\partial}{\partial y}[3z] \\ &= 0 - 3x + 4y - 0 + 5z^2 - 0 + 4 - 0 \\ &= -3x + 4y + 5z^2 + 4. \end{aligned}$$

Para calcular $\partial f/\partial z$, mantenemos *x* y *y* constantes y aplicamos las reglas de suma, diferencia y potencia para funciones de una variable:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\left[x^2-3xy+2y^2-4xz+5yz^2-12x+4y-3z\right]\\
&=\frac{\partial}{\partial z}\left[x^2\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[3xy\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[2y^2\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[4xz\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[5yz^2\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[12x\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[4y\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[3z\right]\\
&=0-0+0-4x+10yz-0+0-3\\
&=-4x+10yz-3,
\end{aligned}$$

PUNTO DE CONTROL 4.15

Utilice la definición de límite de las derivadas parciales para calcular $\partial f/\partial x$ para la función

$$f\left(x,y,z\right)=2x^2-4x^2y+2y^2+5xz^2-6x+3z-8.$$

Luego calcule $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ estableciendo las otras dos variables constantes y diferenciando como corresponda.

EJEMPLO 4.18

Calcular las derivadas parciales de una función de tres variables

Calcule las tres derivadas parciales de las siguientes funciones.

a. $f\left(x,y,z\right)=\frac{x^2y-4xz+y^2}{x-3yz}$
b. $g\left(x,y,z\right)=\operatorname{sen}\left(x^2y-z\right)+\cos\left(x^2-yz\right)$

[Show/Hide Solution]

Solución

En cada caso, trate todas las variables como constantes excepto aquella cuya derivada parcial está calculando.

a.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2y-4xz+y^2}{x-3yz}\right] \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y-4xz+y^2\right)(x-3yz)-\left(x^2y-4xz+y^2\right)\frac{\partial}{\partial x}(x-3yz)}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{(2xy-4z)(x-3yz)-\left(x^2y-4xz+y^2\right)(1)}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{2x^2y-6xy^2z-4xz+12yz^2-x^2y+4xz-y^2}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{x^2y-6xy^2z-4xz+12yz^2+4xz-y^2}{(x-3yz)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2y-4xz+y^2}{x-3yz}\right] \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y-4xz+y^2\right)(x-3yz)-\left(x^2y-4xz+y^2\right)\frac{\partial}{\partial y}(x-3yz)}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{\left(x^2+2y\right)(x-3yz)-\left(x^2y-4xz+y^2\right)(-3z)}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{x^3-3x^2yz+2xy-6y^2z+3x^2yz-12xz^2+3y^2z}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{x^3+2xy-3y^2z-12xz^2}{(x-3yz)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{x^2y-4xz+y^2}{x-3yz}\right] \\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y-4xz+y^2\right)(x-3yz)-\left(x^2y-4xz+y^2\right)\frac{\partial}{\partial z}(x-3yz)}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{(-4x)(x-3yz)-\left(x^2y-4xz+y^2\right)(-3y)}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{-4x^2+12xyz+3x^2y^2-12xyz+3y^3}{(x-3yz)^2} \\
&= \frac{-4x^2+3x^2y^2+3y^3}{(x-3yz)^2}
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{sen}\left(x^2y-z\right)+\cos\left(x^2-yz\right)\right] \\
&= \left(\cos\left(x^2y-z\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y-z\right)-\left(\operatorname{sen}\left(x^2-yz\right)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-yz\right) \\
&= 2xy\cos\left(x^2y-z\right)-2x\operatorname{sen}\left(x^2-yz\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\operatorname{sen}\left(x^2y-z\right)+\cos\left(x^2-yz\right)\right] \\
&= \left(\cos\left(x^2y-z\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y-z\right)-\left(\operatorname{sen}\left(x^2-yz\right)\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-yz\right) \\
&= x^2\cos\left(x^2y-z\right)+z\operatorname{sen}\left(x^2-yz\right) \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\operatorname{sen}\left(x^2y-z\right)+\cos\left(x^2-yz\right)\right] \\
&= \left(\cos\left(x^2y-z\right)\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2y-z\right)-\left(\operatorname{sen}\left(x^2-yz\right)\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2-yz\right) \\
&= -\cos\left(x^2y-z\right)+y\operatorname{sen}\left(x^2-yz\right)
\end{aligned}$$

PUNTO DE CONTROL 4.16

Calcule $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, y $\partial f/\partial z$ para la función $f(x,y,z)=\sec\left(x^2y\right)-\tan\left(x^3yz^2\right)$.

Derivadas parciales de orden superior

Considere la función

$$f(x,y) = 2x^3 - 4xy^2 + 5y^3 - 6xy + 5x - 4y + 12.$$

Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 4y^2 - 6y + 5 \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = -8xy + 15y^2 - 6x - 4.$$

Cada una de estas derivadas parciales es una función de dos variables, por lo que podemos calcular las derivadas parciales de estas funciones. Al igual que con las derivadas de funciones de una sola variable, podemos llamarlas *derivadas de segundo orden, de tercer orden*, etc. En general, se denominan **derivadas parciales de orden superior**. Hay cuatro derivadas parciales de segundo orden para cualquier función (siempre que existan todas):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right], \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right].$$

Una notación alternativa para cada una es f_{xx}, f_{yx}, f_{xy}, y f_{yy}, respectivamente. Las derivadas parciales de orden superior calculadas con respecto a diferentes variables, como f_{xy} y f_{yx}, se denominan comúnmente **derivadas parciales mixtas**.

EJEMPLO 4.19

Calcular derivadas parciales de segundo orden

Calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden de la función

$$f(x,y) = xe^{-3y} + \operatorname{sen}(2x - 5y).$$

[Show/Hide Solution]

Solución

Para calcular $\partial^2 f/dx^2$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x$, primero calculamos $\partial f/\partial x$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-3y} + 2\cos(2x - 5y).$$

Para calcular $\partial^2 f/dx^2$, diferencie $\partial f/\partial x$ con respecto a x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-3y} + 2\cos(2x - 5y)\right] \\ &= -4\operatorname{sen}(2x - 5y).\end{aligned}$$

Para calcular $\partial^2 f/\partial y \partial x$, diferencie $\partial f/\partial x$ con respecto a y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-3y} + 2\cos(2x - 5y)\right] \\ &= -3e^{-3y} + 10\operatorname{sen}(2x - 5y).\end{aligned}$$

Para calcular $\partial^2 f/\partial x \partial y$ y $\partial^2 f/dy^2$, calcule primero $\partial f/\partial y$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -3xe^{-3y} - 5\cos(2x - 5y).$$

Para calcular $\partial^2 f/\partial x \partial y$, diferencie $\partial f/\partial y$ con respecto a x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[-3xe^{-3y} - 5\cos(2x - 5y)\right] \\ &= -3e^{-3y} + 10\,\mathrm{sen}\,(2x - 5y).\end{aligned}$$

Para calcular $\partial^2 f/\partial y^2$, diferencie $\partial f/\partial y$ con respecto a y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[-3xe^{-3y} - 5\cos(2x - 5y)\right] \\ &= 9xe^{-3y} - 25\,\mathrm{sen}\,(2x - 5y).\end{aligned}$$

PUNTO DE CONTROL 4.17

Calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden de la función

$$f(x, y) = \mathrm{sen}\,(3x - 2y) + \cos(x + 4y).$$

En este punto debemos observar que, tanto en el Ejemplo 4.19 como en el punto de control, era cierto que $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$. En ciertas condiciones, esto es siempre cierto. De hecho, es una consecuencia directa del siguiente teorema.

TEOREMA 4.5

Igualdad de las derivadas parciales mixtas (teorema de Clairaut)

Supongamos que $f(x, y)$ se define en un disco abierto D que contiene el punto (a, b). Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son continuas en D, entonces $f_{xy} = f_{yx}$.

El teorema de Clairaut garantiza que mientras las derivadas mixtas de segundo orden sean continuas, no importa el orden en el que elijamos diferenciar las funciones (es decir, qué variable va primero, luego de segunda, y así sucesivamente). También puede extenderse a las derivadas de orden superior. La demostración del teorema de Clairaut se puede encontrar en la mayoría de los libros de cálculo avanzado.

Se pueden calcular otras dos derivadas parciales de segundo orden para cualquier función $f(x, y)$. La derivada parcial f_{xx} es igual a la derivada parcial de f_x con respecto a x, y f_{yy} es igual a la derivada parcial de f_y con respecto a y.

Ecuaciones diferenciales parciales

En Introducción a las ecuaciones diferenciales, estudiamos las ecuaciones diferenciales en las que la función desconocida tenía una variable independiente. Una **ecuación diferencial parcial** es una ecuación que implica una función desconocida de más de una variable independiente y una o más de sus derivadas parciales. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales parciales son

$$u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) \tag{4.17}$$

(ecuación del calor en dos dimensiones)

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) \tag{4.18}$$

(ecuación de onda en dos dimensiones)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{4.19}$$

(ecuación de Laplace en dos dimensiones)

En las dos primeras ecuaciones, la función desconocida u tiene tres variables independientes,$t, x,$ y y, y c es una constante arbitraria. Las variables independientes x y y se consideran variables espaciales, y la variable t representa el tiempo. En la ecuación de Laplace, la función desconocida u tiene dos variables independientes x y y.

EJEMPLO 4.20

Una solución a la ecuación de onda

Verifique que

$$u(x, y, t) = 5 \operatorname{sen}(3\pi x) \operatorname{sen}(4\pi y) \cos(10\pi t)$$

es una solución a la ecuación de onda

$$u_{tt} = 4 (u_{xx} + u_{yy}) .$$ (4.

[Show/Hide Solution]

Solución

En primer lugar, calculamos $u_{tt}, u_{xx},$ y u_{yy}:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[5 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\left(-10\pi \operatorname{sen}(10\pi t)\right)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[-50\pi \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\operatorname{sen}(10\pi t)\right] \\
&= -500\pi^2 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\cos(10\pi t) \\
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[15\pi \cos(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\cos(10\pi t)\right] \\
&= -45\pi^2 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\cos(10\pi t) \\
u_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[5 \operatorname{sen}(3\pi x)\left(4\pi \cos(4\pi y)\right)\cos(10\pi t)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[20\pi \operatorname{sen}(3\pi x)\cos(4\pi y)\cos(10\pi t)\right] \\
&= -80\pi^2 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\cos(10\pi t)\,.
\end{aligned}
$$

A continuación, sustituimos cada uno de ellos en el lado derecho de la Ecuación 4.20 y simplificamos:

$$
\begin{aligned}
4\left(u_{xx}+u_{yy}\right) &= 4\left(-45\pi^2 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\cos(10\pi t) + -80\pi^2 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\cos(10\pi t)\right) \\
&= 4\left(-125\pi^2 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\cos(10\pi t)\right) \\
&= -500\pi^2 \operatorname{sen}(3\pi x)\operatorname{sen}(4\pi y)\cos(10\pi t) \\
&= u_{tt}.
\end{aligned}
$$

Esto verifica la solución.

PUNTO DE CONTROL 4.18

Verifique que $u(x,y,t) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{y}{4}\right)e^{-25t/16}$ es una solución a la ecuación del calor

$$
u_t = 9\left(u_{xx}+u_{yy}\right). \tag{4.21}
$$

Dado que la solución de la ecuación del calor bidimensional es una función de tres variables, no es fácil crear una representación visual de la solución. Podemos graficar la solución para valores fijos de *t*, lo que equivale a cantidades de imágenes instantáneas de las distribuciones de calor en tiempos fijos. Estas imágenes instantáneas muestran cómo se distribuye el calor en una superficie bidimensional a medida que avanza el tiempo. El gráfico de la solución anterior en el tiempo $t = 0$ aparece en la siguiente figura. A medida que avanza el tiempo, los extremos se nivelan, acercándose a cero cuando *t* se acerca al infinito.

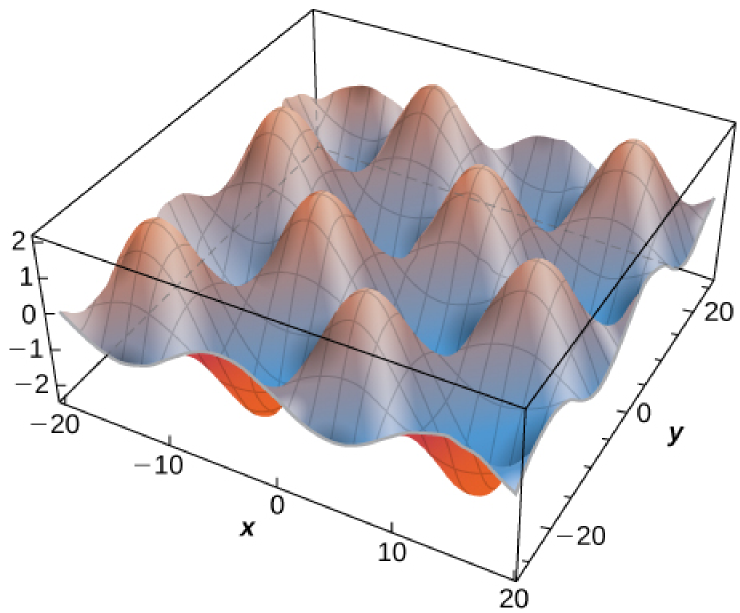


Figura 4.23

Si consideramos la ecuación del calor en una dimensión, es posible graficar la solución en el tiempo. La ecuación del calor en una dimensión se convierte en

$$u_t = c^2 u_{xx},$$

donde c^2 representa la difusividad térmica del material en cuestión. La solución de esta ecuación diferencial se puede escribir de la forma

$$u_{\text{ma}}(x, t) = e^{-\pi^2 m^2 c^2 t} \operatorname{sen}(m\pi x) \tag{4.22}$$

donde m es cualquier número entero positivo. Un gráfico de esta solución utilizando $m = 1$ aparece en la Figura 4.24, donde la distribución inicial de la temperatura sobre un cable de longitud 1 viene dada por $u(x, 0) = \operatorname{sen} \pi x$. Observe que, a medida que avanza el tiempo, el cable se enfría. Esto se ve porque, de izquierda a derecha, la temperatura más alta (que se produce en el centro del cable) disminuye y cambia de color de rojo a azul.

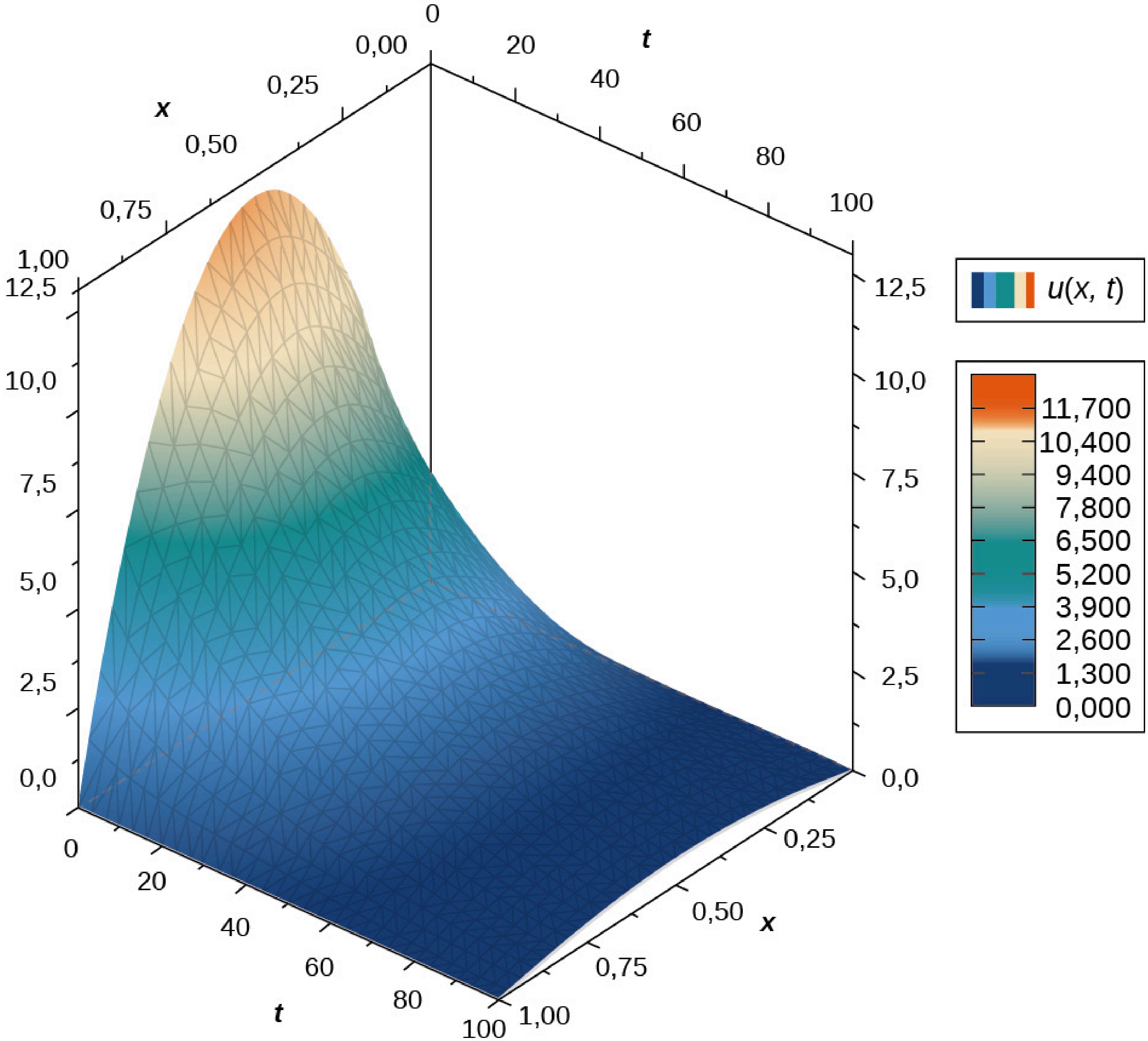


Figura 4.24 Gráfico de una solución de la ecuación del calor en una dimensión a lo largo del tiempo.

PROYECTO DE ESTUDIANTE

Lord Kelvin y la edad de la Tierra

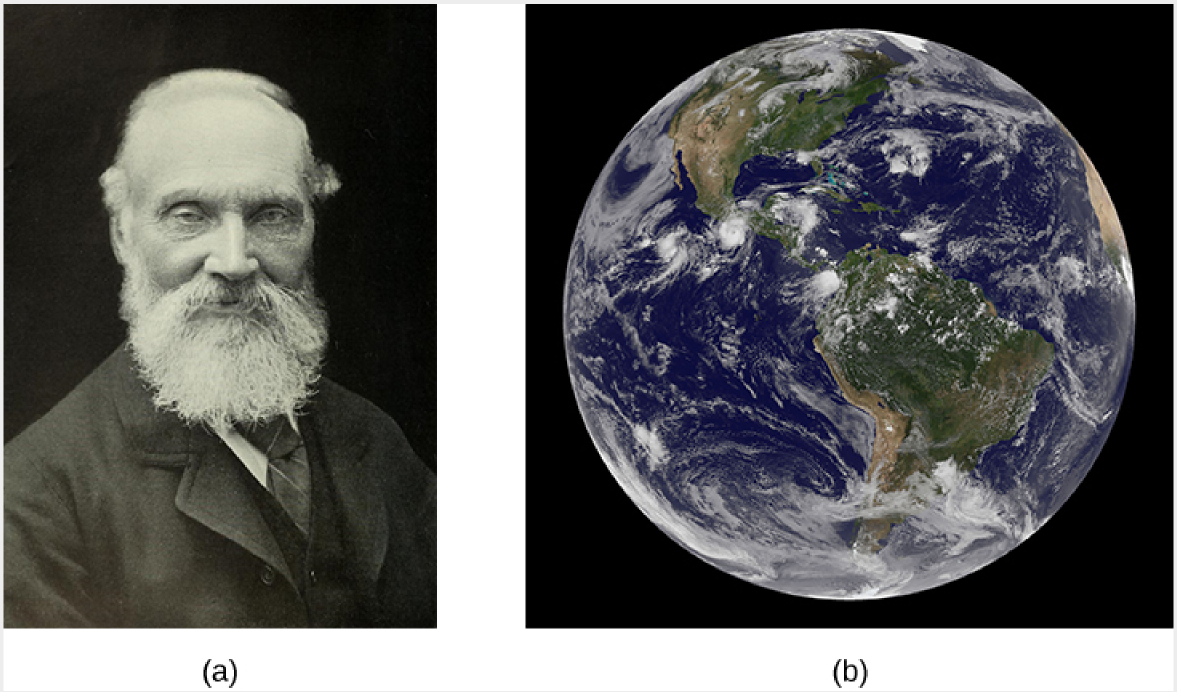


Figura 4.25 (a) William Thomson (Lord Kelvin), 1824-1907, fue un físico e ingeniero eléctrico británico; (b) Kelvin utilizó la ecuación de difusión del calor para estimar la edad de la Tierra (créditos: modificación del trabajo de la NASA).

A finales del siglo XIX, los científicos del nuevo campo de la geología llegaron a la conclusión de que la Tierra debía tener "millones y millones" de años. Más o menos al mismo tiempo, Charles Darwin había publicado su tratado sobre la evolución. La opinión de Darwin era que la evolución necesitaba muchos millones de años para producirse, e hizo la audaz afirmación de que los campos de tiza del Weald, donde se encontraron importantes fósiles, eran el resultado de 300 millones de años de erosión.

En aquella época, el eminente físico William Thomson (Lord Kelvin) utilizó una importante ecuación diferencial parcial, conocida como *ecuación de difusión del calor*, para estimar la edad de la Tierra determinando el tiempo que tardaría la Tierra en enfriarse desde la roca fundida hasta lo que teníamos en ese momento. Su conclusión fue un rango de $20 \text{ para } 400$ millones de años, pero lo más probable es que 50 millones de años. Durante muchas décadas, las proclamas de este ícono irrefutable de la ciencia no sentaron bien a los geólogos ni a Darwin.

MEDIOS

Lea el artículo de Kelvin sobre la estimación de la edad de la Tierra.

Kelvin hizo suposiciones razonables basadas en lo que se sabía en su época, pero también hizo varias suposiciones que resultaron ser erróneas. Una de las suposiciones incorrectas era que la Tierra es sólida y que, por tanto, el enfriamiento se producía únicamente por conducción, lo que justificaba el uso de la ecuación de difusión. Pero el error más grave fue uno perdonable: la omisión del hecho de que la Tierra contiene elementos radioactivos que suministran continuamente calor bajo el manto terrestre. El descubrimiento de la radioactividad llegó casi al final de la vida de Kelvin y este reconoció que su cálculo tendría que ser modificado.

Kelvin utilizó el sencillo modelo unidimensional aplicado solo a la capa exterior de la Tierra, y derivó la edad a partir de gráficos y del gradiente de temperatura aproximadamente conocido cerca de la superficie terrestre. Veamos una versión más adecuada de la ecuación de difusión en coordenadas radiales, que tiene la forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\left[\frac{\partial^2 T}{\partial^2 r} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right]. \tag{4.23}$$

Aquí, $T\,(r,t)$ es la temperatura como una función de r (medido desde el centro de la Tierra) y el tiempo t. K es la conductividad térmica, en este caso de la roca fundida. El método estándar para resolver una ecuación diferencial parcial de este tipo es por separación de variables, donde expresamos la solución como el producto de funciones que contienen cada variable por separado. En este caso, escribiríamos la temperatura como

$$T\,(r,t) = R\,(r)\,f\,(t)\,.$$

1. Sustituya esta forma en la Ecuación 4.13 y, observando que $f(t)$ es constante con respecto a la distancia (r) y $R(r)$ es constante con respecto al tiempo (t), demuestre que

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{K}{R}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\right].$$

2. Esta ecuación representa la separación de variables que queremos. El lado izquierdo es solo una función de t y el lado derecho es solo una función de r, y deben ser iguales para todos los valores de r y t. Por lo tanto, ambos deben ser iguales a una constante. Llamemos a esa constante $-\lambda^2$. (La conveniencia de esta elección se ve en la sustitución). Por lo tanto, tenemos

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial t} = -\lambda^2 \quad \text{y} \quad \frac{K}{R}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\right] = -\lambda^2.$$

   Ahora, podemos verificar mediante la sustitución directa de cada ecuación que las soluciones son $f(t) = Ae^{-\lambda^2 t}$ y $R(r) = B\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha r}{r}\right) + C\left(\frac{\cos\alpha r}{r}\right)$, donde $\alpha = \lambda/\sqrt{K}$. Observe que $f(t) = Ae^{+\lambda n^2 t}$ también es una solución válida, por lo que podríamos elegir $+\lambda^2$ para nuestra constante. ¿Puede ver por qué no sería válido para este caso al aumentar el tiempo?
3. Apliquemos ahora las condiciones de frontera.
   a. La temperatura debe ser finita en el centro de la Tierra, $r = 0$. ¿Cuál de las dos constantes, B o C, debe ser, por tanto, cero para mantener R finito en $r = 0$? (Recordemos que $\operatorname{sen}(\alpha r)/r \to \alpha =$ a medida que $r \to 0$, pero $\cos(\alpha r)/r$ se comporta de manera muy diferente).
   b. Kelvin argumentó que cuando el magma llega a la superficie de la Tierra, se enfría muy rápidamente. A menudo, una persona puede tocar la superficie a las pocas semanas del flujo. Por lo tanto, la superficie alcanzó una temperatura moderada muy pronto y se mantuvo casi constante a una temperatura superficial T_s. Para simplificar, supongamos que $T = 0$ a $r = R_E$ y halle α de tal manera que esta es la temperatura allí para todo el tiempo t. (Kelvin tomó el valor como $300\ \mathrm{K} \approx 80\ ^\circ\mathrm{F}$. Podemos añadir esta constante de $300\ \mathrm{K}$ a nuestra solución más adelante). Para que esto sea cierto, el argumento del seno debe ser cero en $r = R_E$. Observe que α tiene una serie infinita de valores que satisfacen esta condición. Cada valor de α representa una solución válida (cada una con su propio valor para A). La solución total o general es la suma de todas estas soluciones.
   c. A $t = 0$, suponemos que toda la Tierra estaba a una temperatura inicial caliente T_0 (Kelvin consideró que se trataba de $7.000\ \mathrm{K}.$) La aplicación de esta condición de frontera implica la aplicación más avanzada de los coeficientes de Fourier. Como se indica en la parte b. cada valor de α_n representa una solución válida, y la solución general es una suma de todas estas soluciones. El resultado es una solución en serie:

$$T(r,t) = \left(\frac{T_0 R_\mathrm{E}}{\pi}\right)\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-\lambda n^2 t}\frac{\operatorname{sen}(\alpha_n r)}{r}, \text{donde } \alpha_n = n\pi/R_\mathrm{E}.$$

Observe cómo los valores de α_n provienen de la condición de frontera aplicada en la parte b. El término $\frac{-1^{n-1}}{n}$ es la constante A_n para cada término de la serie, determinado a partir de la aplicación del método de Fourier. Suponiendo que $\beta = \frac{\pi}{R_{\mathrm{E}}}$, examine los primeros términos de esta solución que se muestra aquí y observe cómo λ^2 en la exponencial hace que los términos superiores disminuyan rápidamente a medida que avanza el tiempo:

$$T(r,t) = \frac{T_0 R_{\mathrm{E}}}{\pi r}\left(\begin{array}{r} e^{-K\beta^2 t}\left(\operatorname{sen}\beta r\right) - \frac{1}{2}e^{-4K\beta^2 t}\left(\operatorname{sen}2\beta r\right) + \frac{1}{3}e^{-9K\beta^2 t}\left(\operatorname{sen}3\beta r\right) \\ -\frac{1}{4}e^{-16K\beta^2 t}\left(\operatorname{sen}4\beta r\right) + \frac{1}{5}e^{-25K\beta^2 t}\left(\operatorname{sen}5\beta r\right)\ldots \end{array}\right).$$

Cerca al tiempo $t = 0$, muchos términos de la solución son necesarios para la exactitud. Insertar los valores de la conductividad K y $\beta = \pi / R_{\mathrm{E}}$ para el tiempo que se aproxima meramente a los miles de años, solo los primeros términos hacen una contribución significativa. Kelvin solo tuvo que observar la solución cerca de la superficie de la Tierra (Figura 4.26) y, después de mucho tiempo, determinar qué tiempo daba mejor resultado que el gradiente de temperatura estimado conocido durante su época $(1\,^{\circ}\mathrm{F}$ por 50 $\mathrm{pies})$. Simplemente eligió un rango de tiempos con un gradiente cercano a este valor. En la Figura 4.26, las soluciones se trazan y escalan, con $300 - \mathrm{K}$, la temperatura de la superficie añadida. Observe que el centro de la Tierra estaría relativamente frío. En ese momento, se pensaba que la Tierra debía ser sólida.

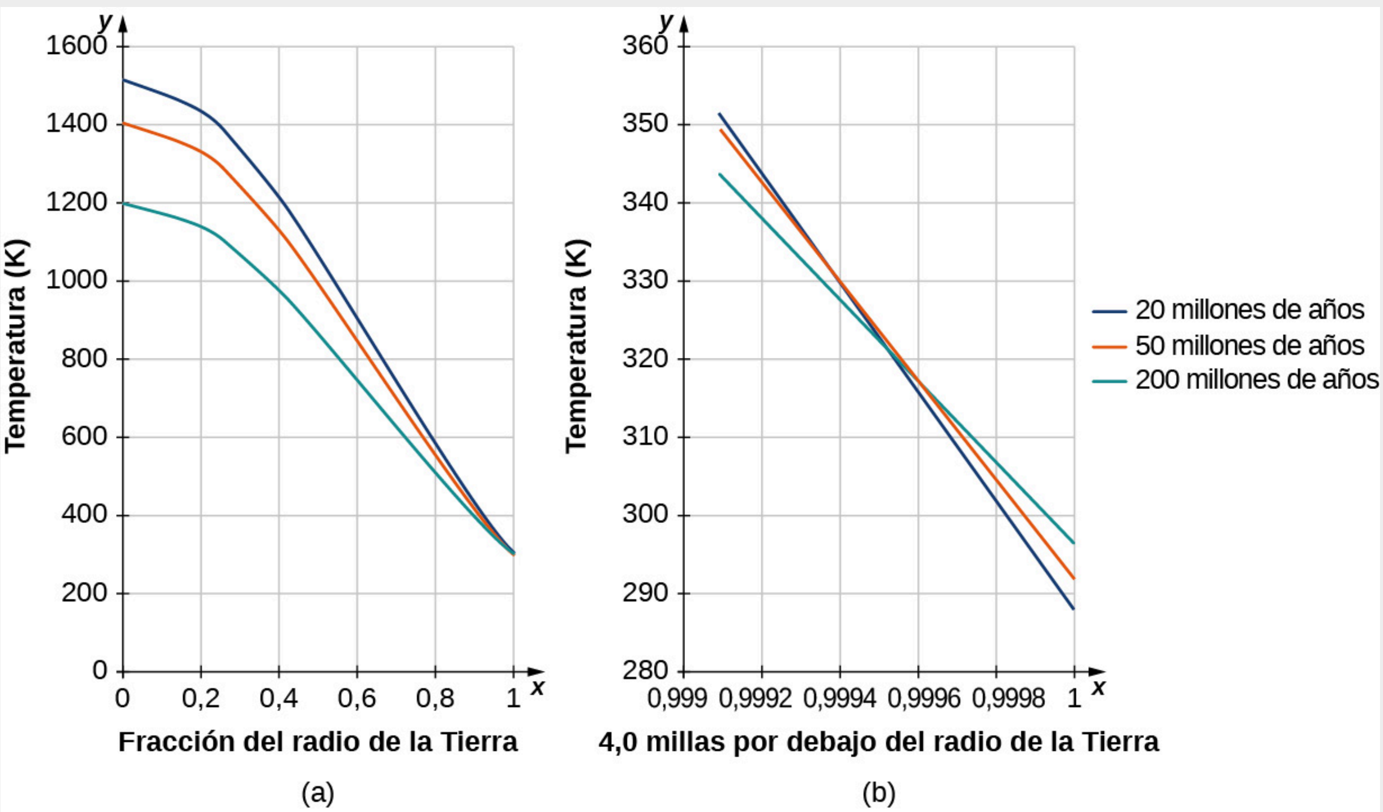


Figura 4.26 Temperatura versus distancia radial desde el centro de la Tierra. (a) Resultados de Kelvin, trazados a escala. (b) Un acercamiento de los resultados a una profundidad de $4{,}0$ mi debajo de la superficie de la Tierra.

Epílogo

El 20 de mayo de 1904, el físico Ernest Rutherford habló en la Royal Institution para anunciar un cálculo revisado que incluía la contribución de la radioactividad como fuente de calor de la Tierra. En palabras del propio Rutherford:

"Entré en la sala, que estaba medio oscura, y enseguida vi a Lord Kelvin entre el público, y me di cuenta de que me iba a meter en un lío en la última parte de mi discurso sobre la edad de la Tierra, en la que mis opiniones entraban en conflicto con las suyas. Para mi alivio, Kelvin se quedó profundamente dormido, pero cuando llegué al punto importante, vi que el viejo pájaro se incorporaba, abría un ojo y me lanzaba una mirada funesta.

Entonces llegó una inspiración repentina y dije que Lord Kelvin había limitado la edad de la Tierra, *siempre que no se descubriera una nueva fuente* [*de calor*]. Esa expresión profética se refería a lo que estamos considerando esta noche, ¡el radio! ¡Contemplen! El anciano me sonrió".

Rutherford calculó una edad para la Tierra de aproximadamente 500 millones de años. El valor aceptado hoy en día de la edad de la Tierra es de aproximadamente $4{,}6$ mil millones de años.

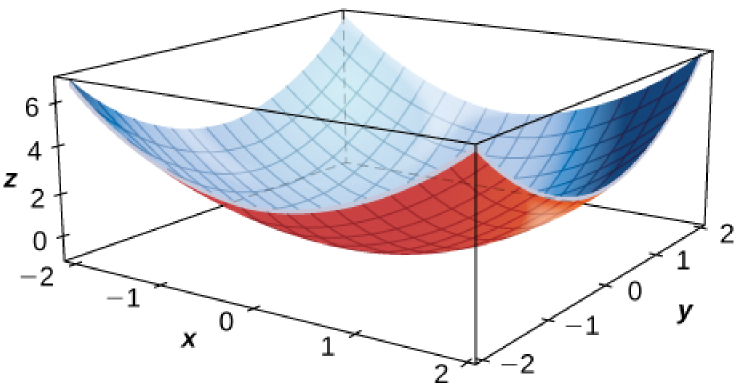
Sección 4.3 ejercicios

En los siguientes ejercicios, calcule la derivada parcial utilizando únicamente las definiciones de límite.

112. $\frac{\partial z}{\partial x}$ por $z = x^2 - 3xy + y^2$

113. $\frac{\partial z}{\partial y}$ por $z = x^2 - 3xy + y^2$

En los siguientes ejercicios, calcule el signo de la derivada parcial utilizando el gráfico de la superficie.



114. $f_x(1, 1)$ grandes.

115. $f_x(-1, 1)$

116. $f_y(1, 1)$ grandes.

117. $f_x(0, 0)$

En los siguientes ejercicios, calcule las derivadas parciales.

118. $\frac{\partial z}{\partial x}$ por $z = \operatorname{sen}(3x)\cos(3y)$ grandes.

119. $\frac{\partial z}{\partial y}$ por $z = \operatorname{sen}(3x)\cos(3y)$ grandes.

120. $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ por $z = x^8 e^{3y}$

121. $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ por $z = \ln\left(x^6 + y^4\right)$ grandes.

122. Calcule $f_y(x, y)$ por $f(x, y) = e^{xy}\cos(x)\operatorname{sen}(y)$.

123. Supongamos que $z = e^{xy}$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

124. Supongamos que $z = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

125. Supongamos que $z = \tan(2x - y)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

126. Supongamos que $z = \operatorname{senoh}(2x + 3y)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

127. Supongamos que $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Evalúe $f_x(2, -2)$ y $f_y(2, -2)$.

128. Supongamos que $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$. Calcule $f_x(2, -2)$ y $f_y(2, -2)$.

Evalúe las derivadas parciales en el punto $P(0, 1)$.

129. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ a las $(0, 1)$ por $z = e^{-x}\cos(y)$.

130. Dado que $f(x, y, z) = x^3yz^2$, calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $f_z(1, 1, 1)$.

131. Dado que $f(x, y, z) = 2\operatorname{sen}(x + y)$, calcule $f_x\left(0, \frac{\pi}{2}, -4\right)$, $f_y\left(0, \frac{\pi}{2}, -4\right)$, y $f_z\left(0, \frac{\pi}{2}, -4\right)$.

132. El área de un paralelogramo con longitudes laterales adyacentes que son a y b, y en el que el ángulo entre estos dos lados es θ, viene dada por la función $A(a, b, \theta) = ba\operatorname{sen}(\theta)$. Calcule la tasa de cambio del área del paralelogramo con respecto a lo siguiente:

a. Lado *a*
b. Lado *b*
c. Ángulo θ

133. Exprese el volumen de un cilindro circular recto en función de dos variables:

a. su radio r y su altura h.
b. Demuestre que la tasa de cambio del volumen del cilindro con respecto a su radio es el producto de su circunferencia por su altura.
c. Demuestre que la tasa de cambio del volumen del cilindro con respecto a su altura es igual al área de la base circular.

134. Calcule $\frac{\partial w}{\partial z}$ por $w = z\operatorname{sen}(xy^2 + 2z)$.

Halle las derivadas parciales de orden superior indicadas.

135. f_{xy} por $z = \ln(x - y)$ grandes.

136. f_{yx} por $z = \ln(x - y)$

137. Supongamos que $z = x^2 + 3xy + 2y^2$. Calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

138. Dados $z = e^x \tan y$, calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

139. Dado que $f(x, y, z) = xyz$, calcule f_{xyy}, f_{yxy}, y f_{yyx}.

140. Dado que $f(x, y, z) = e^{-2x}\operatorname{sen}\left(z^2y\right)$, demuestre que $f_{xyy} = f_{yxy}$.

141. Demuestre que $z = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\operatorname{sen} x$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

142. Calcule $f_{xx}(x, y)$ por $f(x, y) = \frac{4x^2}{y} + \frac{y^2}{2x}$.

143. Supongamos que $f(x, y, z) = x^2y^3z - 3xy^2z^3 + 5x^2z - y^3z$. Calcule f_{xyz}.

144. Supongamos que $F(x, y, z) = x^3yz^2 - 2x^2yz + 3xz - 2y^3z$. Calcule F_{xyz}.

145. Dado que $f(x, y) = x^2 + x - 3xy + y^3 - 5$, calcule todos los puntos en los que $f_x = f_y = 0$ simultáneamente.

146. Dado que $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$, calcule todos los puntos en los que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ simultáneamente.

147. Dados $f(x, y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$, calcule todos los puntos en f en los que $f_x = f_y = 0$ simultáneamente.

148. Dado que $f(x, y) = 15x^3 - 3xy + 15y^3$, calcule todos los puntos en los que $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

149. Demuestre que $z = e^x \operatorname{sen} y$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

150. Demuestre que $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ resuelve la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

151. Demuestre que $z = e^{-t} \cos\left(\frac{x}{c}\right)$ satisface la ecuación del calor $\frac{\partial z}{\partial t} = -e^{-t} \cos\left(\frac{x}{c}\right)$.

152. Halle $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x,y)}{\Delta x}$ por $f(x, y) = -7x - 2xy + 7y$.

153. Halle $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$ por $f(x, y) = -7x - 2xy + 7y$.

154. Halle $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$ por $f(x, y) = x^2 y^2 + xy + y$.

155. Halle $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$ por $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$.

156. La función $P(T, V) = \frac{nRT}{V}$ da la presión en un punto de un gas en función de la temperatura T y el volumen V. Las letras n y R son constantes. Calcule $\frac{\partial P}{\partial V}$ y $\frac{\partial P}{\partial T}$, y explique lo que representan estas cantidades.

157. La ecuación del flujo de calor en el plano xy es $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Demuestre que $f(x, y, t) = e^{-2t} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ es una solución.

158. La ecuación de onda básica es $f_{tt} = f_{xx}$. Verifique que $f(x, t) = \operatorname{sen}(x + t)$ y $f(x, t) = \operatorname{sen}(x - t)$ son soluciones.

159. La ley de los cosenos se puede considerar como una función de tres variables. Supongamos que $x, y,$ y θ sean dos lados de cualquier triángulo en el que el ángulo θ es el ángulo incluido entre los dos lados. Entonces, $F(x, y, \theta) = x^2 + y^2 - 2xy \cos\theta$ da el cuadrado del tercer lado del triángulo. Calcule $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial F}{\partial x}$ cuando $x = 2, y = 3,$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.

160. Supongamos que los lados de un rectángulo cambian con respecto al tiempo. El primer lado está cambiando a un ritmo de 2 in/s mientras que el segundo lado está cambiando a la velocidad de 4 in/s. ¿Qué tan rápido cambia la diagonal del rectángulo cuando el primer lado mide 16 in y el segundo lado mide 20 in? (Redondee la respuesta a tres decimales).

161. Una función de producción Cobb-Douglas es $f(x, y) = 200x^{0,7}y^{0,3}$, donde x y y representan la cantidad de mano de obra y capital disponibles. Supongamos que $x = 500$ y $y = 1.000$. Calcule $\frac{\delta f}{\delta x}$ y $\frac{\delta f}{\delta y}$ para estos valores, que representan la productividad marginal del trabajo y del capital, respectivamente.

162. El índice de temperatura aparente es una medida de cómo se siente la temperatura, y se basa en dos variables h, que es la humedad relativa y t, que es la temperatura del aire.

$A = 0{,}885t - 22{,}4h + 1{,}20th - 0{,}544$. Calcule $\frac{\partial A}{\partial t}$ y $\frac{\partial A}{\partial h}$ cuando $t = 20^\circ\mathrm{F}$ y $h = 0{,}90$.