



Extremos de funciones de varias variables

1.- Se va a construir un almacén de 500 m^3 de volumen con forma de paralelepípedo. El aire caliente que produzca su sistema de calefacción ascenderá, lo que supondrá una pérdida de calor por unidad de techo igual a 5 veces la que se produzca por el suelo. Si la pérdida de calor a través de las 4 paredes laterales es, por unidad de área, triple que en el suelo, determinar las dimensiones del almacén que **minimizan** las pérdidas de calor y en consecuencia el coste de calefacción.

Solución

2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(3,2,-1)$ y que corta a los semiejes coordenados OX^+ , OY^+ y OZ^- determinando un tetraedro de volumen **mínimo**.

Solución

3.- Hallar, si existen, los valores **máximo** y **mínimo** absolutos en \mathbb{R}^2 de la función:

$$f(x, y) = -x^2 + x - y^2 - 2y - 1$$

Solución

4.- Consideremos una placa circular de radio $2\sqrt{2}$ y centro en el origen. La temperatura en cada punto $P(x, y)$ de la placa viene dada por $T(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$; localizar el punto **más caliente** y el punto **más frío** de la placa.

Solución

5.- Un cuerpo está limitado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La densidad del cuerpo depende de cada punto: $D(x, y, z) = 6 + x + y + z + xy + xz + yz$. Hallar los puntos del cuerpo en los cuales es **máxima** o **mínima** la densidad así como el valor de ésta en ellos.

Solución

6.- Sea c la curva intersección de las dos superficies: $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. Hallar los puntos de c que están **más próximos** al origen.

Solución

7.- Hallar el **máximo** de la función $f(x, y) = 3x + 2y$ en la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$ bajo la restricción $xy + x + y = 5$.

Solución

8.- Estudiar los valores **extremos** de la función $z = 2x^3 + 9y^2 + 12x$ sometidos a la condición $x + y = 0$.

Solución

9.- Usar **multiplicadores de Lagrange** para calcular las dimensiones de un depósito cilíndrico circular recto de volumen $8\pi \text{ m}^3$ y área **mínima**.

Solución

10.- Encontrar los puntos donde la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ alcanza sus valores **máximo** y **mínimo** absolutos en el recinto: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

Solución

11.- Consideremos la función $f(x, y) = (\alpha x^2 + \beta y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ para $0 < |\alpha| < \beta$, se pide:

- Para $\alpha=1, \beta=2$, representarla con Derive e identificar sus **extremos** y puntos de silla.
- Lo mismo para $\alpha=-1, \beta=2$



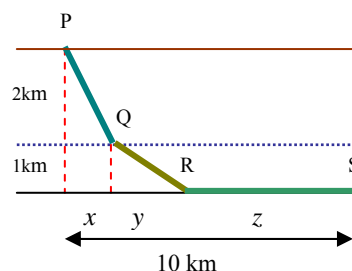
Extremos de funciones de varias variables



c) Lo mismo para α y β cualesquiera (que cumplan la condición)

Solución

12.- Se ha de construir una conducción de agua desde P hasta S. La construcción tiene coste diferente según la zona (ver figura 1). Usar **multiplicadores de Lagrange** para hallar x , y , z tales que el coste C sea **mínimo**, supuesto que el coste por km es 300€ entre P y Q, 200€ entre Q y R y 100€ entre R y S



Solución

13.- Usar **multiplicadores de Lagrange** para calcular:

- Las dimensiones r , h de un depósito cilíndrico circular recto de volumen 100 m^3 y área **mínima**.
- Las dimensiones r , h de un depósito como el de la figura 1, de volumen 100 m^3 y área **mínima**.
- Comenta los resultados anteriores



Figura 1

Solución

14.- Hallar los puntos críticos de la función $z = y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2$ y estudiarlos concluyendo cuáles corresponden a **extremos** relativos y cuáles son **puntos de silla**.

Solución

15.- Una sección cónica C se obtiene mediante la intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con el plano $z = 1+x+y$. Hallar los puntos de la cónica C que están más próximos y más lejanos del origen.

Solución

16.- A continuación se dan las derivadas de segundo orden de una función $z = f(x,y)$ diferenciable que verifica el **teorema de Swartz**. Se supone que en (x_0, y_0) las derivadas parciales se anulan, decidir, en cada caso, si en (x_0, y_0) hay un **máximo** relativo, un **mínimo** relativo, un **punto de silla** o si la información es insuficiente.

- $f_{xx}(x_0, y_0) = 5$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 5$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$
- $f_{xx}(x_0, y_0) = 9$, $f_{xy}(x_0, y_0) = -5$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 6$
- $f_{xx}(x_0, y_0) = -4$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 7$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -16$
- $f_{xx}(x_0, y_0) = -9$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 6$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$

Solución

17.- Una empresa fabrica dos productos. Los ingresos por la venta de x unidades del primer producto y de y unidades del segundo producto son $R(x, y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$. Hallar el número de unidades x e y que debe vender para que los ingresos obtenidos sean **máximos**.

Solución

18.- Usar **multiplicadores de Lagrange** para calcular la distancia **mínima** del punto $P(2,1,1)$:

- a la superficie $z^2 = x^2 + y^2$
- al plano $x + y + z = 1$

Solución



Extremos de funciones de varias variables



19.- Un contenedor (sin tapa) en forma de paralelepípedo ha de tener un volumen de 18m^3 . Se pide determinar, usando **multiplicadores de Lagrange**, las dimensiones que hacen **mínimo** su coste, sabiendo que la base cuestan 5€ el m^2 , y los laterales 3€ el m^2

Solución

20.- Una empresa fabrica dos productos. Los ingresos por la venta de x unidades del primer producto y de y unidades del segundo producto son $R(x, y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$. Hallar el número de unidades x y y que debe vender para que los ingresos obtenidos sean **máximos**.

Solución

21.- Usar **multiplicadores de Lagrange** para calcular la distancia **mínima** del punto $P(2, 2, 0)$:

- a) a la superficie $z = x^2 + y^2$
- b) al plano $4x + 4y + z = 1$

Solución

22.- El material de la base de una caja abierta cuesta $1,5\text{€ m}^2$ y el de los laterales 1€ m^2 . Se pide determinar, usando **multiplicadores de Lagrange**, las dimensiones de la caja de **mayor** volumen que puede construirse para un coste $C=100\text{€}$

Solución

23.- a) Razonar, sin hacer cálculos, si la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ alcanza sus valores **máximo** y **mínimo** absolutos en la región R limitada por el triángulo de vértices $P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 0)$ y $P_3(0, 1)$, incluyendo los lados del triángulo.

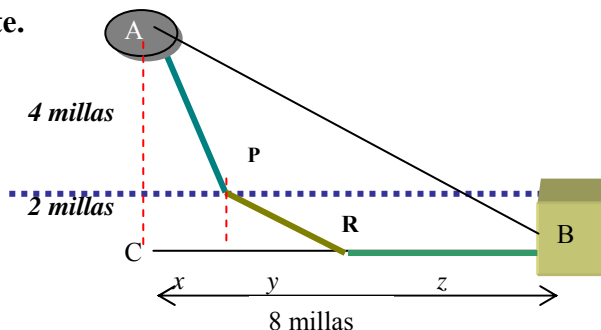
b) Calcular dichos valores **extremos**, caso de que existan, así como los puntos en donde se alcanzan.

Solución

24.- Una compañía petrolífera va a construir un oleoducto desde la plataforma petrolífera A, situada 4 millas mar adentro, hasta la refinería B, 2 millas tierra adentro, además entre la línea de playa y la línea de la refinería hay una zona de dunas (ver figura) y la distancia entre A y B son 10 millas.

Cada milla de oleoducto por el mar cuesta tres millones de euros, por la zona de dunas 5 millones y por la tierra 2 millones. Por tanto, el coste del oleoducto depende de los puntos P y R elegidos. Se pide:

- a) Hallar la ruta que hace **mínimo** el coste de construcción.
- b) Calcular dicho coste.



Solución

25.- Estudiar los valores **máximos** y **mínimos** relativos y absolutos de la función $f(x, y) = y^2x$, en el círculo cerrado de centro $(0, 0)$ y radio 2.



Extremos de funciones de varias variables



Solución

26.- Sea k una constante real y sea la superficie de ecuación $f(x, y) = x^2 + 3xy + ky^2$. Se pide:

- Probar que, para cualquier valor de k , el origen $(0,0)$ es un **punto crítico** de f .
- Hallar los valores de k para los que f presenta un **mínimo** relativo en $(0,0)$.

Solución

27.- a) Consideremos la función $g(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, sujeta a la restricción de que α, β, γ son los tres ángulos de un triángulo plano. Aplicar multiplicadores de Lagrange para hallar los valores de α, β, γ que hacen máximo el valor de g .

b) Hallar los **puntos críticos** de la función $z = y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2$ y estudiarlos concluyendo cuáles corresponden a extremos relativos y cuáles son **puntos de silla**.

Solución

28.- Una canaleta de desagüe con sección transversal en forma de trapecio se hace doblando hacia arriba las orillas de una hoja de aluminio de 60 cm de ancho. Hallar la sección transversal de **mayor** área.

Solución

29.- Estudiar los valores **máximos** y **mínimos** relativos y absolutos de la función $f(x, y) = y^2x$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución

30.- Aplicar el método de los **multiplicadores de Lagrange** para hallar las distancias **máxima** y **mínima** de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$.

Solución

31.- Hallar las dimensiones del recipiente de embalaje abierto por arriba **más** económico de 96 metros cúbicos de capacidad, sabiendo que la base cuesta 30 céntimos por metro cuadrado y los laterales 10 céntimos por metro cuadrado.

Nota: se supone que el embalaje tiene forma de prisma recto.

Solución

32.- Se considera la función $f(x, y) = xy - 2x - 3y$ definida en la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2x\}$. Se pide:

- Razonar si f alcanza sus valores **máximo** y **mínimo** absolutos en S .
- Calcular cuáles son esos valores, indicando también en qué puntos se alcanzan.

Solución

33.- Calcular el volumen de la caja rectangular **más** grande situada en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x+2y+3z = 6$.

Solución

34.- Se considera la función $f(x, y) = xy - 4x - y$.

- Estudiar la existencia de **máximos** y **mínimos** relativos de f en \mathbb{R}^2 .
- Estudiar la existencia de **máximos** y **mínimos** absolutos de f en \mathbb{R}^2 .
- Sea la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5x\}$. Se pide:

- Razonar si f alcanza sus valores **máximo** y **mínimo** absolutos en S .
- Calcular cuáles son esos valores, indicando también en qué puntos se alcanzan.

Solución



Extremos de funciones de varias variables



35.- Se quiere fabricar un depósito de almacenamiento con el **menor** coste posible.

a) Hallar las dimensiones que ha de tener el depósito si se quiere que su capacidad sea de 1000 metros cúbicos, sabiendo que el material para construir el suelo cuesta 40 euros por metro cuadrado y el de las paredes 10 euros por metro cuadrado.

b) Hallar dicho coste **mínimo**.

Nota: se supone que el depósito tiene forma de prisma recto sin tapa.

Solución

36.- Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una región D del plano con **derivadas parciales** continuas hasta el orden 2. Sea P_0 un punto del interior de la región. Para cada una de las afirmaciones siguientes, decir si son verdaderas o falsas:

a) Si f tiene en P_0 un **máximo o mínimo** relativo, entonces, $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$.

b) Si f tiene en P_0 un **máximo o mínimo** relativo, entonces necesariamente el **Hessiano** de f en P_0 es $H(P_0) \geq 0$.

c) Si f alcanza su **mínimo** absoluto “ m ” en un punto Q de la frontera de D , entonces $f_x(Q) = f_y(Q) = 0$

d) Si la región D es cerrada y acotada, entonces, f alcanza sus valores **máximo y mínimo** absolutos en la región.

Solución

37.- Se considera la función $f(x, y) = xy - 2x + 3y$ definida en la región:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -3 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq x + 3\}$$

a) Razonar si f alcanza sus valores **máximo y mínimo** absolutos en S .

b) Calcular cuáles son esos valores, indicando también en qué puntos se alcanzan.

Solución

38.- La temperatura en un punto (x, y) de una lámina metálica es $T(x, y) = \frac{3x}{x^2 + y^2}$.

a) Hallar la **curva de nivel** (isoterma) que pasa por el punto $P(2, -1)$.

b) Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en P .

c) Hallar el coeficiente de variación de la temperatura en P en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

d) Hallar, usando la **regla de la cadena**, el coeficiente de variación de la temperatura a lo largo de la curva $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sent} \\ y = \cos t \end{cases}$.

e) Si la cota de error en la medida de “ x ” es de $\pm 1\%$ y en la de “ y ” es de $\pm 2\%$, hallar el máximo error propagado de T en P .

Solución

39.- Calcular y clasificar los **puntos críticos** de la función $z = x^3 + 3xy^2 - 3x + 1$.

Solución

40.- Estudiar los **máximos y mínimos** relativos de la función $f(x, y) = x^3 - 3x + (y - 1)^2$

Solución

41.- Hallar los **extremos** relativos de $z = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

Solución



Extremos de funciones de varias variables



42.- Sea la función real $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2xy$. Hallar los **extremos** relativos de f en el plano.

Solución

43.- Sea la ecuación $2z^3 + x^3 + y^3 - 6xy + 2z + 4 = 0$. Hallar los **extremos** relativos de la función $F(x, y, z) = 0$ definida por la ecuación dada.

Solución

44.- Hallar el volumen **máximo** de un ortoedro sabiendo que la suma de las longitudes de sus aristas es 12.

Solución

45.- Hallar los **extremos** absolutos de la función $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2} (x^2 + 2y^2)$ en la región $x^2 + y^2 \leq 4$

Solución

46.- Hallar los **extremos** absolutos de la función $f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$ en la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

Solución

47.- Encontrar el **máximo** de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la curva intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Solución

48. Calcular los **máximos** y **mínimos** de : $z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

Solución



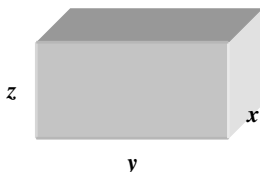
Extremos de funciones de varias variables



1.- Se va a construir un almacén de 500 m^3 de volumen con forma de paralelepípedo. El aire caliente que produzca su sistema de calefacción ascenderá, lo que supondrá una pérdida de calor por unidad de techo igual a 5 veces la que se produzca por el suelo. Si la pérdida de calor a través de las 4 paredes laterales es, por unidad de área, triple que en el suelo, determinar las dimensiones del almacén que minimizan las pérdidas de calor y en consecuencia el coste de calefacción.

Solución:

Llamemos x, y, z a las dimensiones del almacén (ancho, largo y alto, respectivamente), y “ p ” la pérdida de calor por unidad de suelo. La pérdida de calor del almacén $f(x, y, z)$ será la suma de la pérdida de calor por el suelo más pérdida de calor por el techo más pérdida de calor por las paredes:



$$\#1: f(x, y, z) := p \cdot x \cdot y + 5 \cdot p \cdot x \cdot y + 6 \cdot p \cdot z \cdot (x + y)$$

Como el volumen es $500 = x \cdot y \cdot z$, sustituimos z por $500/xy$:

$$\#2: f(x, y, z) := \frac{6 \cdot p \cdot (x^2 \cdot y^2 + 500 \cdot x + 500 \cdot y)}{x \cdot y}$$

$$\#3: \frac{d}{dx} \frac{6 \cdot p \cdot (x^2 \cdot y^2 + 500 \cdot x + 500 \cdot y)}{x \cdot y}$$

$$\#4: \frac{6 \cdot p \cdot (x^2 \cdot y^2 - 500)}{x^2}$$

$$\#5: \frac{d}{dy} \frac{6 \cdot p \cdot (x^2 \cdot y^2 + 500 \cdot x + 500 \cdot y)}{x \cdot y}$$

$$\#6: \frac{6 \cdot p \cdot (x \cdot y^2 - 500)}{y^2}$$

$$\#7: \text{SOLVE} \left[\left[\frac{6 \cdot p \cdot (x^2 \cdot y^2 - 500)}{x^2}, \frac{6 \cdot p \cdot (x \cdot y^2 - 500)}{y^2} \right], [x, y] \right]$$

Considerando sólo la solución real se obtiene:

$$\#8: x = 5 \cdot 2^{2/3} \wedge y = 5 \cdot 2^{2/3}$$



Extremos de funciones de varias variables



Segundo método, con multiplicadores de Lagrange:

$$\#10: H(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 500)$$

$$\#11: H(x, y, z, \lambda) := x \cdot (6 \cdot p \cdot z - y \cdot (\lambda \cdot z - 6 \cdot p)) + 6 \cdot p \cdot y \cdot z + 500 \cdot \lambda$$

$$\#12: \frac{d}{dx} (x \cdot (6 \cdot p \cdot z - y \cdot (\lambda \cdot z - 6 \cdot p)) + 6 \cdot p \cdot y \cdot z + 500 \cdot \lambda)$$

$$\#13: y \cdot (6 \cdot p - \lambda \cdot z) + 6 \cdot p \cdot z$$

$$\#14: \frac{d}{dy} (x \cdot (6 \cdot p \cdot z - y \cdot (\lambda \cdot z - 6 \cdot p)) + 6 \cdot p \cdot y \cdot z + 500 \cdot \lambda)$$

$$\#15: x \cdot (6 \cdot p - \lambda \cdot z) + 6 \cdot p \cdot z$$

$$\#16: \frac{d}{dz} (x \cdot (6 \cdot p \cdot z - y \cdot (\lambda \cdot z - 6 \cdot p)) + 6 \cdot p \cdot y \cdot z + 500 \cdot \lambda)$$

$$\#17: x \cdot (6 \cdot p - \lambda \cdot y) + 6 \cdot p \cdot y$$

$$\#18: \frac{d}{d\lambda} (x \cdot (6 \cdot p \cdot z - y \cdot (\lambda \cdot z - 6 \cdot p)) + 6 \cdot p \cdot y \cdot z + 500 \cdot \lambda)$$

$$\#19: 500 - x \cdot y \cdot z$$

$$\#20: \text{SOLVE}([y \cdot (6 \cdot p - \lambda \cdot z) + 6 \cdot p \cdot z, x \cdot (6 \cdot p - \lambda \cdot z) + 6 \cdot p \cdot z, x \cdot (6 \cdot p - \lambda \cdot y) + 6 \cdot p \cdot y, 500 - x \cdot y \cdot z], [y, z, x, \lambda])$$

Considerando sólo la solución real se obtiene:

$$\#21: \left[y = 5 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \wedge z = 5 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \wedge x = 5 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \wedge \lambda = \frac{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot p}{5} \right]$$



Extremos de funciones de varias variables



2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(3,2,-1)$ y que corta a los semiejes coordenados OX^+ , OY^+ y OZ^+ determinando un tetraedro de volumen mínimo.

Solución:

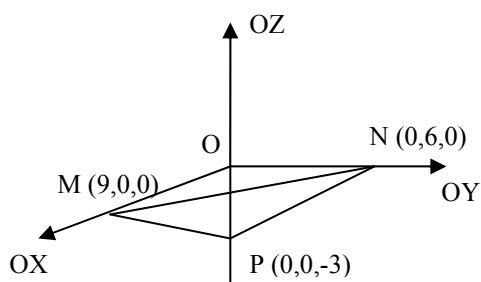
$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow 3a + 2b - c + d = 0 \Rightarrow d = -3a - 2b + c \Rightarrow \\ P_0(3,2,-1) \in \pi \end{array} \right\}$$

$$\pi \equiv ax + by + cz - 3a - 2b + c = 0.$$

$$\text{Corte con } OX: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ ax - 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3a + 2b - c}{a} \Rightarrow M\left(\frac{3a + 2b - c}{a}, 0, 0\right)$$

$$\text{Corte con } OY: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ by - 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3a + 2b - c}{b} \Rightarrow N\left(0, \frac{3a + 2b - c}{b}, 0\right)$$

$$\text{Corte con } OZ: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ cz - 3a - 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3a + 2b - c}{c} \Rightarrow P\left(0, 0, \frac{3a + 2b - c}{c}\right)$$



El volumen pedido es:

$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \cdot h$$

$$A_{\text{base}} = A_{\text{OMN}} = \frac{1}{2} |\text{OM}| \cdot |\text{ON}|$$

$$h = |\text{OP}|$$

$$V = \frac{1}{3} \frac{1}{2} |\text{OM}| \cdot |\text{ON}| \cdot |\text{OP}| = \frac{1}{6} \frac{3a + 2b - c}{a} \cdot \frac{3a + 2b - c}{b} \cdot \left(-\frac{3a + 2b - c}{c}\right) = -\frac{1}{6abc} (3a + 2b - c)^3$$

$$\frac{\partial V}{\partial a} = -\frac{1}{6bc} \left[\frac{1}{a} 3(3a + 2b - c)^2 + (3a + 2b - c)^3 \left(-\frac{1}{a^2}\right) \right] = -\frac{(3a + 2b - c)^2}{6abc} \cdot \frac{6a - 2b + c}{a} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial b} = -\frac{1}{6ac} \left[\frac{1}{b} 3(3a + 2b - c)^2 + (3a + 2b - c)^3 \left(-\frac{1}{b^2}\right) \right] = -\frac{(3a + 2b - c)^2}{6abc} \cdot \frac{-3a + 4b + c}{b} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = -\frac{1}{6ab} \left[\frac{1}{c} 3(3a + 2b - c)^2 + (3a + 2b - c)^3 \left(-\frac{1}{c^2}\right) \right] = -\frac{(3a + 2b - c)^2}{6abc} \cdot \frac{-3a - 2b - 2c}{c} = 0$$

Como $3a + 2b - c \neq 0$ (en caso contrario, sería $V = 0$), ha de ser:

$$\begin{cases} 6a - 2b + c = 0 \\ -3a + 4b + c = 0 \\ -3a - 2b - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}b \\ b = b \\ c = -2b \end{cases}$$

Haciendo, por ejemplo, $b = 3$, se obtiene: $a = 2$, $c = -6$, $d = -3a - 2b + c = -18$.

La ecuación del plano pedido es: $\pi \equiv 2x + 3y - 6z - 18 = 0$.



Extremos de funciones de varias variables



3.- Hallar, si existen, los valores máximo y mínimo absolutos en \mathbb{R}^2 de la función:

$$f(x, y) = -x^2 + x - y^2 - 2y - 1$$

Solución:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= -2x + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y - 2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = -1 \Rightarrow P = \left(\frac{1}{2}, -1 \right). \quad f\left(\frac{1}{2}, -1 \right) = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \Rightarrow H\left(\frac{1}{2}, -1 \right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Luego, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$ y $H(P) > 0$. Por tanto, f tiene un máximo relativo en P . ¿Es también máximo absoluto?

Completando cuadrados en la expresión de f , queda:

$$f(x, y) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - (y + 1)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} = f(P)$$

Luego, efectivamente f posee máximo absoluto en P y vale $\frac{1}{4}$.

¿Tiene f mínimo absoluto?

$f(0, y) = -y^2 - 2y - 1$ que tiende a $-\infty$ cuando $y \rightarrow \infty$. En consecuencia, **no existe mínimo absoluto de la función f .**



Extremos de funciones de varias variables



4.- Consideremos una placa circular de radio $2\sqrt{2}$ y centro en el origen. La temperatura en cada punto $P(x, y)$ de la placa viene dada por $T(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$; localizar el punto más caliente y el punto más frío de la placa.

Solución:

Extremos relativos en el interior:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 + 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_1 = (0,0), P_2 = (-1,-1)$$

Ambas soluciones (puntos críticos) son válidas por encontrarse en el interior del círculo de radio $2\sqrt{2}$.

Extremos de f en la frontera (circunferencia de radio $2\sqrt{2}$):

$$H(x, y, \lambda) = x^3 + y^3 + 3xy - \lambda(x^2 + y^2 - 8) \Rightarrow \left. \begin{aligned} H_x &= 3x^2 + 3y - 2\lambda x = 0 \\ H_y &= 3y^2 + 3x - 2\lambda y = 0 \\ H_\lambda &= -(x^2 + y^2 - 8) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$P_3 = (2, 2), P_4 = (-2, -2), P_5 = (\sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1) \text{ y } P_6 = (-\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1).$$

$$f(P_1) = 0, f(P_2) = 1, f(P_3) = 28, f(P_4) = -4, f(P_5) = -26 \text{ y } f(P_6) = -26.$$

Por tanto, el valor **máximo absoluto de f en C es 28** y lo alcanza en el punto **$P_3 = (2, 2)$** , mientras que valor **mínimo absoluto de f en C es - 26** y lo alcanza en los puntos **$P_5 = (\sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1)$ y $P_6 = (-\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-1)$** .



Extremos de funciones de varias variables



5.- Un cuerpo está limitado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La densidad del cuerpo depende de cada punto: $D(x, y, z) = 6 + x + y + z + xy + xz + yz$. Hallar los puntos del cuerpo en los cuales es máxima o mínima la densidad así como el valor de ésta en ellos.

Solución:

Máximos y mínimos de D en el interior del cuerpo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial x} &= 1 + y + z = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial y} &= 1 + x + z = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial z} &= 1 + x + y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \text{ es el único punto crítico de } D.$$

Este punto está en el interior del cuerpo por ser $\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} < 1$

Extremos de f en la frontera (superficie esférica de radio 1):

$$H(x, y, z, \lambda) = D(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) =$$

$$6 + x + y + z + xy + xz + yz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \Rightarrow \left. \begin{aligned} H_x &= 1 + y + z - 2\lambda x = 0 \\ H_y &= 1 + x + z - 2\lambda y = 0 \\ H_z &= 1 + x + y - 2\lambda z = 0 \\ H_\lambda &= -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$P_2 = (0, 0, -1), P_3 = (-1, 0, 0), P_4 = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3} \right), P_5 = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3} \right), P_6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

$$P_7 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \text{ y } P(x, y, z) \text{ tal que } x + y + z = 1, \quad y^2 + y(z+1) + z^2 + z = 0, \text{ que}$$

además han de cumplir la condición $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

La densidad en uno de estos puntos es $D(P) = 5$, ya que:

$$D(P) = 6 + (x + y + z) + \frac{1}{2}[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] = 6 - 1 + \frac{1}{2}[(-1)^2 - 1] = 5$$

En el resto de los puntos candidatos, la densidad vale:

$$D(P_1) = \frac{21}{4} = 5.25, \quad D(P_i) = 5, \quad i = 2, \dots, 5, \quad D(P_6) = 7 + \sqrt{3} \approx 8.7 \quad \text{y} \quad f(P_7) = 7 - \sqrt{3} \approx 5.3.$$

Por tanto, el **valor máximo** de la densidad en este cuerpo es **$7 + \sqrt{3}$** y lo alcanza en el punto

$$P_6 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \text{ mientras que la } \textbf{densidad mínima es } 5 \text{ y se alcanza en los puntos}$$

$$P_i, \quad i = 2, \dots, 5 \text{ y } P(x, y, z) \text{ tal que } x + y + z = 1, \quad y^2 + y(z+1) + z^2 + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$



Extremos de funciones de varias variables



6.- Sea c la curva intersección de las dos superficies: $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. Hallar los puntos de c que están más próximos al origen.

Solución:

Se trata de minimizar la función distancia de un punto (x, y, z) al origen $(0,0,0)$, o bien la distancia al cuadrado:

$$f(x, y, z) = d^2((x, y, z), (0, 0, 0)) = x^2 + y^2 + z^2$$

Con la condición de que el punto (x, y, z) pertenezca a la curva c , es decir, verifique las ecuaciones de las dos superficies (tenemos, entonces, dos restricciones). La función lagrangiana es:

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1) - \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

#3: $\frac{d}{dx} H(x, y, z, \lambda, \mu)$

#4: $\lambda \cdot y - 2 \cdot x \cdot (\lambda + \mu - 1)$

#5: $\frac{d}{dy} H(x, y, z, \lambda, \mu)$

#6: $\lambda \cdot x - 2 \cdot y \cdot (\lambda + \mu - 1)$

#7: $\frac{d}{dz} H(x, y, z, \lambda, \mu)$

#8: $2 \cdot z \cdot (\lambda + 1)$

#9: $\frac{d}{d\lambda} H(x, y, z, \lambda, \mu)$

#10: $-x^2 + x \cdot y - y^2 + z^2 + 1$

#11: $\frac{d}{d\mu} H(x, y, z, \lambda, \mu)$

#12: $-x^2 - y^2 + 1$

#13: $\text{SOLVE}([\lambda \cdot y - 2 \cdot x \cdot (\lambda + \mu - 1), \lambda \cdot x - 2 \cdot y \cdot (\lambda + \mu - 1), 2 \cdot z \cdot (\lambda + 1), -x^2 + x \cdot y - y^2 + z^2 + 1, -x^2 - y^2 + 1], [x, y, z, \lambda, \mu])$

Considerando sólo las soluciones reales, se obtiene:



Extremos de funciones de varias variables



$$\begin{aligned} \#15: \quad & \left[x = 0 \wedge y = 1 \wedge z = 0 \wedge \lambda = 0 \wedge \mu = 1, x = 0 \wedge y = -1 \wedge z = 0 \wedge \lambda \right. \\ & = 0 \wedge \mu = 1, x = 1 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge \lambda = 0 \wedge \mu = 1, x = -1 \wedge y = \\ & 0 \wedge z = 0 \wedge \lambda = 0 \wedge \mu = 1, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge z = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \lambda \\ & = -1 \wedge \mu = \frac{5}{2}, x = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \lambda = -1 \wedge \mu \\ & = \frac{5}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge z = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \lambda = -1 \wedge \mu = \frac{5}{2}, x = \\ & \left. -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \lambda = -1 \wedge \mu = \frac{5}{2} \right] \end{aligned}$$

Que corresponden a los puntos:

$$\begin{aligned} \#24: \quad & \left\{ P_1 := [0, 1, 0], P_2 := [0, -1, 0], P_3 := [1, 0, 0], P_4 := [-1, 0, 0], \right. \\ & P_5 := \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right], P_6 := \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right], \\ & \left. P_7 := \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right], P_8 := \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\#29: \quad f(P_1) = f(P_2) = f(P_3) = f(P_4) = 1$$

$$\#30: \quad f(P_5) = f(P_6) = f(P_7) = f(P_8) = \frac{3}{2} > 1$$

La mínima distancia se alcanza en los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 , y dicha **distancia vale 1**.



Extremos de funciones de varias variables



7.- Hallar el máximo de la función $f(x, y) = 3x + 2y$ en la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$ bajo la restricción $xy + x + y = 5$.

Solución:

La ecuación $xy + x + y = 5$ corresponde a una curva que, restringida al primer cuadrante S , constituye un conjunto cerrado y acotado del plano. Por tanto puede asegurarse que f alcanza sus valores máximo y mínimo en dicho arco de curva por ser continua en él.

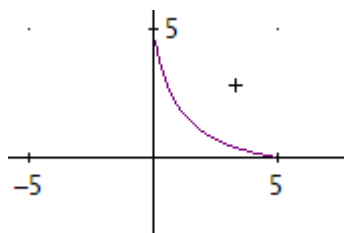
Función lagrangiana:

$$H(x, y, \lambda) = 3x + 2y - \lambda(xy + x + y - 5) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} H_x = 3 - \lambda y - \lambda = 0 \\ H_y = 2 - \lambda x - \lambda = 0 \\ H_\lambda = -(xy + x + y - 5) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_1 = (1, 2), P_2 = (-3, -4).$$

Solamente el punto P_1 se encuentra en la región S . Valor de f en dicho punto: $f(P_1) = 7$.

Parece que el valor máximo pedido fuera 7, al no obtener ningún otro resultado; sin embargo, $f(0, 5) = 10 > 7$ y $(0, 5)$ cumple la condición y pertenece a S . Luego, $P_1(1, 2)$ NO proporciona el máximo buscado.



La gráfica de la restricción es:

Los puntos $P_3 = (5, 0)$ y $P_4 = (0, 5)$ están en la frontera de S y, por tanto, no tenían por qué aparecer entre los puntos críticos de la función lagrangiana; pero, son también candidatos a estudiar:

$$f(P_3) = 15, \quad f(P_4) = 10$$

Luego, el **máximo de la función** $f(x, y) = 3x + 2y$ en la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$ bajo la restricción $xy + x + y = 5$ es

15 y se alcanza en el punto **$P_3 = (5, 0)$** .



Extremos de funciones de varias variables



8.- Estudiar los valores extremos de la función $z = 2x^3 + 9y^2 + 12x$ sometidos a la condición $x + y = 0$.

Solución:

Función lagrangiana:

$$H(x, y, \lambda) = 2x^3 + 9y^2 + 12x - \lambda(x + y) \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} H_x &= 6x^2 + 12 - \lambda = 0 \\ H_y &= 18y - \lambda = 0 \\ H_\lambda &= -(x + y) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$P_1 = (-1, 1), \quad P_2 = (-2, 2); \quad f(P_1) = -5, \quad f(P_2) = -4$$

Podría pensarse que en P_1 se alcanza el mínimo y en P_2 el máximo de f sobre la recta $x + y = 0$, pero, esto no es así ya que, sobre la recta, la función toma los valores:

$$x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow f(x, -x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x = x(2x^2 + 9x + 12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x(2x^2 + 9x + 12)] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [x(2x^2 + 9x + 12)] = \infty$$

Y, en consecuencia, puede afirmarse que **la función no posee máximo ni mínimo sobre la recta $x + y = 0$.**

Hay que observar que la recta $x + y = 0$ no es un conjunto compacto (cerrado y acotado) del plano y, por tanto, aunque f es continua, no podía asegurarse que la función fuera a alcanzar valores extremos en dicha recta.

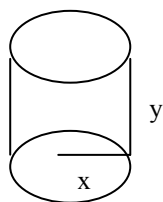


Extremos de funciones de varias variables



9.- Usar multiplicadores de Lagrange para calcular las dimensiones de un depósito cilíndrico circular recto de volumen $8\pi \text{ m}^3$ y área mínima.

Solución:



V = volumen, A = área, A_B = área de la base, A_L = área lateral

x = radio de la base, y = altura

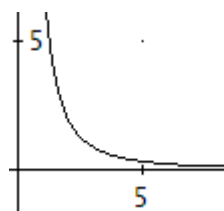
La función a minimizar es $A = A_B + A_L = \pi x^2 + 2\pi xy = f(x, y)$, con la condición $V = A_B \cdot y = \pi x^2 \cdot y = 8\pi$, es decir, $x^2 y - 8 = 0$.

Función lagrangiana:

$$H(x, y, \lambda) = 2xy + x^2 - \lambda(x^2 y - 8) \Rightarrow \begin{cases} H_x = 2y + 2x - 2\lambda xy = 0 \\ H_y = 2x - \lambda x^2 = 0 \\ H_\lambda = -(x^2 y - 8) = 0 \end{cases} \Rightarrow P = (2, 2); \quad f(P) = 12\pi$$

¿Realmente 12π es el valor del área mínima?

Tiene sentido la pregunta, pues la hipérbola $x^2 y - 8 = 0$, en su rama $x > 0, y > 0$, no es un conjunto compacto del plano.



Analicemos cuánto vale la función en los puntos de la hipérbola:

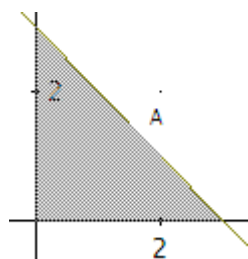
$$y = \frac{8}{x^2} \Rightarrow f\left(x, \frac{8}{x^2}\right) = \pi x^2 + 2\pi x \frac{8}{x^2} = \pi \frac{16 + x^3}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{16 + x^3}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16 + x^3}{x} = +\infty$$

Luego, efectivamente, **12 π es el valor del área mínima.**

10.- Encontrar los puntos donde la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en el recinto: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}$.

Solución:



Como f es continua en A , y éste es un conjunto compacto del plano, f alcanza sus valores extremos absolutos en A . Puede alcanzarlos en el interior o en la frontera.

Extremos relativos en el interior de A :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x - y - 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y - x - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_1 = (1,1) \text{ es el único punto crítico de } f \text{ en el}$$

interior de A ; $f(P_1) = -1$.

Extremos de f en la frontera (los tres lados del triángulo):

1) En el lado sobre el eje OX: $L_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0, 0 \leq x \leq 3\}$

Reduzcamos el problema al caso de una variable:

Si $(x, y) \in L_1$, $f(x, y) = f_1(x) = x^2 - x$, $x \in [0, 3]$. Se trata de buscar los extremos absolutos de esta función de una variable en el compacto $[0, 3]$.

Puntos críticos en el interior $(0, 3)$:

$$f'_1(x) = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow P_2 = \left(\frac{1}{2}, 0\right); \quad f_1\left(\frac{1}{2}\right) = f(P_2) = -\frac{1}{4}$$

En los puntos frontera $\{0, 3\}$: $P_3 = (0, 0)$, $P_4 = (3, 0)$

$$f_1(0) = f(P_3) = 0; \quad f_1(3) = f(P_4) = 6$$

2) En el lado sobre el eje OY: $L_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0, 0 \leq y \leq 3\}$

Reduzcamos el problema al caso de una variable:

Si $(x, y) \in L_2$, $f(x, y) = f_2(y) = y^2 - y$, $y \in [0, 3]$. Procedamos como en el lado anterior.

Puntos críticos en el interior $(0, 3)$:

$$f'_2(y) = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow P_5 = \left(0, \frac{1}{2}\right); \quad f_2\left(\frac{1}{2}\right) = f(P_5) = -\frac{1}{4}$$

En los puntos frontera $\{0, 3\}$: $P_3 = (0, 0)$, $P_6 = (0, 3)$

$$f_2(0) = f(P_3) = 0; \quad f_2(3) = f(P_6) = 6$$

3) En el lado $L_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y = 3\}$

Podría analizarse como en los dos lados anteriores, reduciendo el problema al caso de una variable, o bien, utilizando multiplicadores de Lagrange. Emplearemos este último método. Función lagrangiana:



Extremos de funciones de varias variables



$$H(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - xy - x - y - \lambda(x + y - 3) \Rightarrow \left. \begin{aligned} H_x &= 2x - y - 1 - \lambda = 0 \\ H_y &= 2y - x - 1 - \lambda = 0 \\ H_\lambda &= -(x + y - 3) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$P_7 = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right); \quad f(P_7) = -\frac{3}{4}.$$

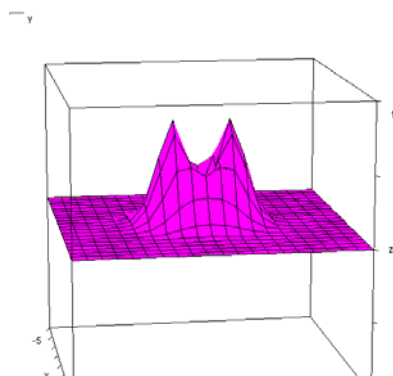
Los puntos frontera de este lado ya están considerados antes: $P_4 = (3, 0)$, $P_6 = (0, 3)$.

Por tanto, el valor **máximo absoluto de f en A** es $\max \left\{ -1, -\frac{1}{4}, 0, 6, -\frac{3}{4} \right\} = 6$ y lo alcanza en dos puntos de la frontera del recinto **$P_4 = (3, 0)$** y **$P_6 = (0, 3)$** , mientras que el **valor mínimo absoluto de f en A** es $\min \left\{ -1, -\frac{1}{4}, 0, 6, -\frac{3}{4} \right\} = -1$ y lo alcanza en el punto **$P_1 = (1, 1)$** del interior del recinto.

11.- Consideremos la función $f(x, y) = (\alpha x^2 + \beta y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ para $0 < |\alpha| < \beta$, se pide:

- Para $\alpha=1, \beta=2$, representarla con Derive e identificar sus extremos y puntos de silla.
- Lo mismo para $\alpha=-1, \beta=2$
- Lo mismo para α y β cualesquiera (que cumplan la condición)

Solución:



a) $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

f es una función diferenciable por ser producto de un polinomio y una exponencial, ambos funciones diferenciables, luego los extremos han de ser puntos críticos de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+y^2)}(x^2 + 2y^2 - 1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{-(x^2+y^2)}(x^2 + 2y^2 - 2) = 0$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones se obtienen los puntos:

$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$

Para discernir cuáles de ellos son extremos o puntos de silla aplicamos el criterio de la derivada segunda.

Hallamos las derivadas de segundo orden de f :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \left((x^2 + 2y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right) = 2 \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (2 \cdot x^2 + x \cdot (4 \cdot y^2 - 5) - 2 \cdot y^2 + 1)$$

$$\frac{d}{dy} \frac{d}{dx} \left((x^2 + 2y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right) = 4 \cdot x \cdot y \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (x^2 + 2y^2 - 3)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} \left((x^2 + 2y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right) = 4 \cdot x \cdot y \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (x^2 + 2y^2 - 3)$$

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^2 \left((x^2 + 2y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \right) = 2 \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (x^2 \cdot (2 \cdot y^2 - 1) + 2 \cdot (2 \cdot y^4 - 5 \cdot y^2 + 1))$$

Construimos el hessiano de f $Hessf = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ y hallamos su valor en cada punto crítico

- $Hessf(0,0) = 8 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$, luego f presenta en **(0,0) un mínimo relativo**

cuyo valor es $f(0,0) = 0$ (es mínimo absoluto pues $f(x, y) \geq 0$ para $cq (x, y) \in \mathbb{R}^2$).

- $Hessf(0,1) = \frac{16}{e^2} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{-2}{e} < 0$, luego f presenta en **(0,1) un máximo relativo**

cuyo valor es $f(0,1) = \frac{2}{e}$.

Extremos de funciones de varias variables

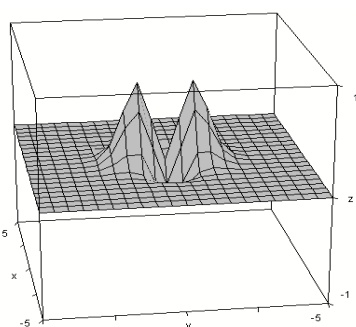
- $\text{Hess}f(0,-1) = \frac{16}{e^2} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = \frac{-2}{e} < 0$, luego f presenta en **$(0,-1)$ un máximo**

relativo cuyo valor es $f(0,-1) = \frac{2}{e}$.

- $\text{Hess}f(1,0) = \frac{-8}{e^2} < 0$, luego f presenta en **$(1,0)$ un punto de silla** y $f(0,0) = \frac{1}{e}$.

- $\text{Hess}f(-1,0) = \frac{-8}{e^2} < 0$, luego f presenta en **$(-1,0)$ un punto de silla** y $f(0,0) = \frac{1}{e}$.

b) $f(x,y) = (-x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ y, al igual que en el apartado anterior, f es una función diferenciable por ser producto de un polinomio y una exponencial, ambas funciones diferenciables, luego los extremos han de ser puntos críticos de f :



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-(x^2+y^2)}(x^2 - 2y^2 - 1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)}(x^2 - 2y^2 + 2) = 0$$

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones se obtienen los puntos:

$(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ que comprobamos son

los mismos que en el apartado a)

Siguiendo el mismo proceso hallamos las derivadas de segundo orden de f , construimos el

hessiano de f $\text{Hess}f = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ y hallamos su valor en cada punto crítico

- $\text{Hess}f(0,0) = -8 < 0$ luego f presenta en **$(1,0)$ un punto de silla** y $f(0,0) = 0$.

- $\text{Hess}f(0,1) = \frac{48}{e^2} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{-6}{e} < 0$, luego f presenta en **$(0,1)$ un máximo**

relativo cuyo valor es $f(0,1) = \frac{2}{e}$.

- $\text{Hess}f(0,-1) = \frac{48}{e^2} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = \frac{-6}{e} < 0$, luego f presenta en **$(0,-1)$ un máximo**

relativo cuyo valor es $f(0,-1) = \frac{2}{e}$.

- $\text{Hess}f(1,0) = \frac{24}{e^2} > 0$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = \frac{4}{e} > 0$, luego f presenta en **$(1,0)$ un mínimo**

relativo cuyo valor es $f(1,0) = -\frac{1}{e}$.

- $\text{Hess}f(-1,0) = \frac{24}{e^2} > 0$, y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = \frac{4}{e} > 0$, luego f presenta en **$(-1,0)$ un mínimo**

relativo cuyo valor es $f(-1,0) = -\frac{1}{e}$.



Extremos de funciones de varias variables



c) Para α y β tales que $0 < |\alpha| < \beta$, $f(x, y) = (\alpha x^2 + \beta y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$ sigue siendo una función diferenciable por ser producto de un polinomio y una exponencial, ambas funciones diferenciables, y los puntos críticos de f :

$$\frac{d}{dx} \left((\alpha x^2 + \beta y^2) e^{-(x^2 + y^2)} \right) = -2x \cdot e^{-(x^2 + y^2)} \cdot (\alpha x^2 + \beta y^2 - \alpha)$$

$$\frac{d}{dy} \left((\alpha x^2 + \beta y^2) e^{-(x^2 + y^2)} \right) = -2y \cdot e^{-(x^2 + y^2)} \cdot (\alpha x^2 + \beta y^2 - \beta)$$

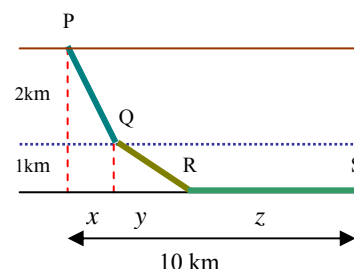
Resolviendo el sistema y eliminando aquéllas soluciones que contemplan $\alpha=0$, o bien, $\beta=0$, o bien $\alpha=\beta$, quedan como puntos críticos exactamente los mismos que los apartados anteriores

$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$

y aplicando el criterio de la derivada segunda identificaríamos los extremos igual que en los apartados a) y b)



12.- Se ha de construir una conducción de agua desde P hasta S. La construcción tiene coste diferente según la zona (ver figura 1). Usar multiplicadores de Lagrange para hallar x , y , z tales que el coste C sea mínimo, supuesto que el coste por km es 300€ entre P y Q, 200€ entre Q y R y 100€ entre R y S



Solución:

La función que proporciona el coste de la construcción entre P y Q es:

$$C(x, y, z) = 300\sqrt{x^2 + 4} + 200\sqrt{y^2 + 1} + 100z,$$

además x, y, z tienen la restricción $x + y + z = 10$, luego la función lagrangiana es:

$$H(x, y, \lambda) = 300\sqrt{x^2 + 4} + 200\sqrt{y^2 + 1} + 100z - \lambda(x + y + z - 10)$$

$$\frac{d}{dx} (300\sqrt{x^2 + 4} + 200\sqrt{y^2 + 1} + 100z - \lambda(x + y + z - 10)) = \frac{300 \cdot x - \lambda \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\frac{d}{dy} (300\sqrt{x^2 + 4} + 200\sqrt{y^2 + 1} + 100z - \lambda(x + y + z - 10)) = \frac{200 \cdot y - \lambda \cdot \sqrt{y^2 + 1}}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dz} (300\sqrt{x^2 + 4} + 200\sqrt{y^2 + 1} + 100z - \lambda(x + y + z - 10)) = 100 - \lambda$$

$$\frac{d}{d\lambda} (300\sqrt{x^2 + 4} + 200\sqrt{y^2 + 1} + 100z - \lambda(x + y + z - 10)) = -x - y - z + 10$$

$$\text{SOLVE} \left[\frac{300 \cdot x - \lambda \cdot \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{x^2 + 4}}, \frac{200 \cdot y - \lambda \cdot \sqrt{y^2 + 1}}{\sqrt{y^2 + 1}}, 100 - \lambda, -x - y - z + 10, [x, y, z, \lambda] \right]$$

$$\left[x = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge z = -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 10 \wedge \lambda = 100 \right]$$

Aproximando estos valores se obtiene:

$x \approx 0,70711 \text{ km} = 707,11 \text{ m}$, $y \approx 0,57735 \text{ km} = 577,35 \text{ m}$, $z \approx 8,71554 \text{ km} = 8715,4 \text{ m}$.

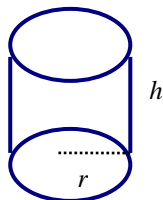
13.- Usar multiplicadores de Lagrange para calcular:

- a) Las dimensiones r , h de un depósito cilíndrico circular recto de volumen 100 m^3 y área mínima.
 b) Las dimensiones r , h de un depósito como el de la figura 1, de volumen 100 m^3 y área mínima.
 c) Comenta los resultados anteriores



Figura 1

Solución:



a) El área total del depósito es $A = A_B + A_L = \pi r^2 + 2\pi r h$, y su volumen $V = A_B \cdot h = \pi r^2 h = 100$

La función a minimizar es, por tanto, $f(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h$, sujeta a la restricción $\pi r^2 h - 100 = 0$

La función lagrangiana es $H(r, h, \lambda) = 2\pi r h + \pi r^2 - \lambda(\pi r^2 h - 100) \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 2\pi h + 2\pi r - 2\lambda\pi r h = 0 \\ H_h &= 2\pi r - \lambda\pi r^2 = 0 \\ H_\lambda &= -(\pi r^2 h - 100) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{tomando solo la solución con valores reales se obtiene}$$

$$r = h = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}} \text{ m} \approx 3,169 \text{ m}, \text{ y para estos valores el área es } A = 30 \sqrt[3]{10\pi} \text{ m}^2 \approx 94,66 \text{ m}^2.$$

Nota: al no ser la curva $\pi r^2 h - 100 = 0$ un conjunto compacto del plano (dibújala con Derive) podemos preguntarnos ¿realmente el valor obtenido corresponde a un mínimo absoluto?

Respuesta: No podemos asegurar que es el mínimo absoluto pero sí que es un mínimo relativo. Si utilizamos, para resolver el ejercicio, el procedimiento clásico, despejando la variable y en la ecuación de la condición $\pi r^2 h - 100 = 0 \Rightarrow h = \frac{100}{r^2} \Rightarrow$

$$f\left(r, \frac{100}{r^2}\right) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{100}{r^2} = \pi \frac{200 + r^3}{r}$$

Los puntos críticos de esta función son $\begin{cases} f'(r) = 0 \\ r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi r - \frac{200}{r^2} = 0 \\ r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{\frac{100}{\pi}} \\ r = 0 \end{cases}$ y para

estos valores $\begin{cases} A = 30 \sqrt[3]{10\pi} \text{ m}^2 \\ A = 0 \text{ m}^2 \end{cases}$, luego $r = 0$ no es válido en el contexto del problema.

Por otro lado, la segunda derivada en estos puntos $f''(r) = \frac{400}{r^3} + 2\pi$ no está definida en $r = 0$ y toma valor positivo en el valor que habíamos obtenido con el procedimiento de Lagrange.

b) La superficie de un depósito como el de la figura tiene por área $A = 2\pi rh + 4\pi r^2$



Figura 1

Su volumen es $V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3$

La función a minimizar es, por tanto,

$$f(r, h) = 2\pi rh + 4\pi r^2, \text{ sujeta a la restricción } \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 100$$

La función lagrangiana es $H(r, h, \lambda) = 2\pi rh + 4\pi r^2 - \lambda \left(\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 - 100 \right) \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 2\pi h + 8\pi r - 2\lambda\pi rh + 4\pi r^2 = 0 \\ H_h &= 2\pi r - \lambda\pi r^2 = 0 \\ H_\lambda &= -\left(\pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 - 100 \right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{tomando solo la solución con valores reales se}$$

obtiene

$$h = 0, r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}} \text{ m} \approx 2,88 \text{ m, y para estos valores el área es } A = 20\sqrt[3]{45\pi} \text{ m}^2 \approx 104,19 \text{ m}^2.$$

c) En el apartado a) se obtiene que el depósito de menor área es el de sección cuadrada y en el apartado b) el depósito de menor área es aquel en que la parte cilíndrica es nula quedando solo la esfera que como todos sabemos, y en este apartado se comprueba, es el cuerpo de mayor volumen con menor área.

En consecuencia, si a pesar de todo queremos construir un depósito con la forma de la figura 1 con cilindro y 2 semiesferas, hemos de tomar $r = h$ en el volumen

$$\pi r^2 r + \frac{4}{3}\pi r^3 = 100,$$

despejando r se obtiene $r = \frac{1}{7}\sqrt[3]{\frac{14700}{\pi}}$ y el área sería

$$A = \frac{60}{7}\sqrt[3]{630\pi} \approx 107,62 \text{ m}^2.$$



Extremos de funciones de varias variables



14.- Hallar los puntos críticos de la función $z = y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2$ y estudiarlos concluyendo cuáles corresponden a extremos relativos y cuáles son puntos de silla.

Solución:

Dada $z = y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2$, sus puntos críticos son aquellos donde sus derivadas parciales se anulan o no existen. En este caso, por tratarse de una función polinómica, z es diferenciable en todo \mathbf{R}^2 , y sus derivadas también son funciones polinómicas (diferenciables en \mathbf{R}^2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2) = 4x(y^2 + 4y + 8) - 2y^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} (y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2) = 2(2x^2(y+2) - 2xy + y) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P_1(0,0); P_2(1,-4); P_3\left(\frac{1}{2}, -2\right)$$

Tomando únicamente las soluciones reales, se obtienen los siguientes puntos críticos:

$$\mathbf{P_1(0,0), P_2(1,-4), P_3(1/2,-2)}$$

Para estudiar cuáles corresponder a extremos y cuáles a puntos de silla aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2) = 4(y^2 + 4y + 8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2) = 4(2x(y+2) - y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2) = 4(2x(y+2) - y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2) = 2(2x^2 - 2x + 1)$$

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 4(y^2 + 4x + 8) & 4(2x(y+2) - y) \\ 4(2x(y+2) - y) & 2(2x^2 - 2x + 1) \end{vmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 4(0^2 + 4 \cdot 0 + 8) & 4(2 \cdot 0(0+2) - 0) \\ 4(2 \cdot 0(0+2) - 0) & 2(2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 64$$

$$H(1,-4) = \begin{vmatrix} 4((-4)^2 + 4(-4) + 8) & 4(2 \cdot 1(-4+2) + 4) \\ 4(2 \cdot 1(-4+2) + 4) & 2(2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 64$$

$$H\left(\frac{1}{2}, -2\right) = \begin{vmatrix} 4((-2)^2 + 4(-2) + 8) & 4\left(2 \cdot \frac{1}{2}(-2+2) + 2\right) \\ 4\left(2 \cdot \frac{1}{2}(-2+2) + 2\right) & 2\left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -48$$



Extremos de funciones de varias variables



Observando el valor del hessiano y de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ en cada punto deducimos que:

$\text{Hess}(P_1)=64>0, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=32 > 0 \Rightarrow$ en **$P_1(0,0)$ la función presenta un mínimo relativo** cuyo valor es $f(0,0)=0$

$\text{Hess}(P_2)=64>0, \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_2}=32 > 0 \Rightarrow$ en **$P_2(1,-4)$ la función presenta un mínimo relativo** cuyo valor es $f(1,-4)=0$

$\text{Hess}(P_3)= - 48 < 0, \Rightarrow$ en **$P_3(1/2,-2)$ la función presenta un punto de silla** cuyo valor es $f\left(\frac{1}{2},-2\right)=2$



Extremos de funciones de varias variables



15.- Una sección cónica C se obtiene mediante la intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con el plano $z = 1 + x + y$. Hallar los puntos de la cónica C que están más próximos y más lejanos del origen.

Solución:

Aplicando el método de los Multiplicadores de Lagrange, se trata de hallar los extremos de la distancia de un punto (x, y, z) al origen sujeto a dos condiciones: pertenecer al cono y al plano

Como función a minimizar usamos el cuadrado de la distancia al origen:

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$\#59: x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \cdot (z^2 - x^2 - y^2) - \mu \cdot (x + y - z + 1)$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \cdot (z^2 - x^2 - y^2) - \mu \cdot (x + y - z + 1)) = 2 \cdot x \cdot (\lambda + 1) - \mu$$

$$\frac{d}{dy} (x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \cdot (z^2 - x^2 - y^2) - \mu \cdot (x + y - z + 1)) = 2 \cdot y \cdot (\lambda + 1) - \mu$$

$$\frac{d}{dz} (x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \cdot (z^2 - x^2 - y^2) - \mu \cdot (x + y - z + 1)) = 2 \cdot z \cdot (1 - \lambda) + \mu$$

$$\frac{d}{d\lambda} (x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \cdot (z^2 - x^2 - y^2) - \mu \cdot (x + y - z + 1)) = z^2 - x^2 - y^2$$

$$\frac{d}{d\mu} (x^2 + y^2 + z^2 - \lambda \cdot (z^2 - x^2 - y^2) - \mu \cdot (x + y - z + 1)) = -x - y + z - 1$$

$$\#65: \text{SOLVE}([2 \cdot x \cdot (\lambda + 1) - \mu, 2 \cdot y \cdot (\lambda + 1) - \mu, 2 \cdot z \cdot (1 - \lambda) + \mu, x^2 + y^2 - z^2, -x - y + z - 1], [x, y, z, \lambda, \mu])$$

$$\#66: \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \sqrt{2} - 1 \right] \wedge \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, -\sqrt{2} - 1 \right]$$

sustituimos en la función a minimizar

$$\#67: \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 6 - 4 \cdot \sqrt{2} = 0.3431457505$$

$$\#68: \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)^2 + (-\sqrt{2} - 1)^2 = 4 \cdot \sqrt{2} + 6 = 11.65685424$$

Luego el punto $(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1, \sqrt{2} - 1)$ es el más próximo al origen y $(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1, -\sqrt{2} - 1)$ es el más alejado.



Extremos de funciones de varias variables



16.- A continuación se dan las derivadas de segundo orden de una función $z = f(x,y)$ diferenciable que verifica el teorema de Swartz. Se supone que en (x_0, y_0) las derivadas parciales se anulan, decidir, en cada caso, si en (x_0, y_0) hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto de silla o si la información es insuficiente.

- a) $f_{xx}(x_0, y_0) = 5$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 5$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$
b) $f_{xx}(x_0, y_0) = 9$, $f_{xy}(x_0, y_0) = -5$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 6$
c) $f_{xx}(x_0, y_0) = -4$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 7$, $f_{yy}(x_0, y_0) = -16$
d) $f_{xx}(x_0, y_0) = -9$, $f_{xy}(x_0, y_0) = 6$, $f_{yy}(x_0, y_0) = 4$

Solución:

Construimos el hessiano de f $Hessf = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ y hallamos su valor en cada punto crítico

a)

#1: $DET \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = -5$

Luego **f presenta en dicho punto un punto de silla**

b)

#2: $DET \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = 29$

Luego **f presenta en dicho punto un mínimo relativo**

c)

#3: $DET \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 7 & -16 \end{bmatrix} = 15$

Luego **f presenta en dicho punto un máximo relativo**

d)

#4: $DET \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} = 0$

La información es insuficiente



Extremos de funciones de varias variables



17.- Una industria fabrica un determinado producto en dos factorías. El coste de producción de x unidades en la primera factoría es $C_1(x)=0.02x^2+4x+500$ mientras que el coste de producción de y unidades en la segunda factoría es $C_2(y)=0.05y^2+4y+275$.

El producto se vende a 15€ la unidad y el beneficio producido viene dado por la función

$$P(x,y)=15(x+y) - C_1(x) - C_2(y)$$

Se pide hallar las cantidades x , y que debe producir cada factoría con el fin de que el beneficio obtenido sea máximo.

Solución:

La función a maximizar es los ingresos obtenidos menos los costes de producción: hallamos los puntos críticos y comprobamos cuál es el máximo

$$\#4: \quad \frac{d}{dx} (15 \cdot (x + y) - 0.02 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 500 - 0.05 \cdot y^2 - 4 \cdot y - 275)$$

$$\#5: \quad \frac{d}{dy} (15 \cdot (x + y) - 0.02 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 500 - 0.05 \cdot y^2 - 4 \cdot y - 275)$$

$$\#6: \quad \frac{275 - x}{25}$$

$$\#7: \quad \frac{d}{dy} (15 \cdot (x + y) - 0.02 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 500 - 0.05 \cdot y^2 - 4 \cdot y - 275)$$

$$\#8: \quad \frac{110 - y}{10}$$

$$\#9: \quad \text{SOLVE} \left(\left[\frac{110 - y}{10}, \frac{275 - x}{25} \right], [x, y] \right)$$

$$\#10: \quad [x = 275 \wedge y = 110]$$

$$\#11: \quad \frac{d}{dx} \frac{275 - x}{25} = - \frac{1}{25}$$

$$\#12: \quad \frac{d}{dy} \frac{275 - x}{25} = 0$$

$$\#13: \quad \frac{d}{dy} \frac{110 - y}{10} = - \frac{1}{10}$$

$$\#14: \quad \text{DET} \begin{bmatrix} -\frac{1}{25} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} = \frac{1}{250}$$

Luego efectivamente para **$x=275$, $y=110$** unidades producidas en cada factoría, se produce un beneficio máximo



Extremos de funciones de varias variables



18.- Usar multiplicadores de Lagrange para calcular la distancia mínima del punto P(2,1,1):

a) a la superficie $z^2 = x^2 + y^2$

b) al plano $x + y + z = 1$

Solución:

La función a minimizar es la distancia entre dos puntos (o mejor su cuadrado) con la condición de que el punto desconocido pertenezca a la superficie dada

a)

$$\#15: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z^2)$$

$$\#16: \frac{d}{dx} ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z^2)) =$$

$$= 2 \cdot x \cdot (1 - \lambda) - 4$$

$$\#17: \frac{d}{dy} ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z^2)) =$$

$$= 2 \cdot y \cdot (1 - \lambda) - 2$$

$$\#18: \frac{d}{dz} ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z^2)) =$$

$$= 2 \cdot z \cdot (\lambda + 1) - 2$$

$$\#19: \frac{d}{d\lambda} ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z^2)) =$$

$$= -x^2 - y^2 + z^2$$

$$\#20: \text{SOLVE}([2 \cdot x \cdot (1 - \lambda) - 4, 2 \cdot y \cdot (1 - \lambda) - 2, 2 \cdot z \cdot (\lambda + 1) - 2, -x^2 - y^2 + z^2], [x, y, z, \lambda])$$

$$\#21: \left[x = \frac{\sqrt{5}}{5} + 1 \wedge y = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \wedge z = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \wedge \lambda = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2}, \right. \\ \left. x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \wedge y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \wedge z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \wedge \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2} \right]$$

$$\#22: \sqrt{\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{5} + 1\right) - 2\right)^2 + \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2}\right) - 1\right)^2 + \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.8740320488$$

$$\#23: \sqrt{\left(\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) - 2\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) - 1\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - 1\right)^2} =$$



Extremos de funciones de varias variables



$$\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.288245611$$

Luego la distancia mínima se obtiene para el primer punto obtenido y vale, aproximadamente, **0,847** unidades de longitud

b) El razonamiento para el apartado b es análogo

$$\#24: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x + y + z - 1)$$

$$\#25: \frac{d}{dx} ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x + y + z - 1)) = 2 \cdot x - \lambda$$

$$- 4$$

$$\#26: \frac{d}{dy} ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x + y + z - 1)) = 2 \cdot y - \lambda - 2$$

$$\#27: \frac{d}{dz} ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x + y + z - 1)) = 2 \cdot z - \lambda - 2$$

$$\#28: \frac{d}{d\lambda} ((x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 - \lambda \cdot (x + y + z - 1)) = -x - y - z + 1$$

$$\#29: \text{SOLVE}([2 \cdot x - \lambda - 4, 2 \cdot y - \lambda - 2, 2 \cdot z - \lambda - 2, -x - y - z + 1], [x, y, z, \lambda])$$

$$\#30: [x = 1 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \wedge \lambda = -2]$$

La distancia mínima a la superficie es, aproximadamente **$\sqrt{3}$** unidades de longitud como indica el cálculo siguiente

$$\#31: \sqrt{((1 - 2)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2)} = \sqrt{3}$$



Extremos de funciones de varias variables



19.- Un contenedor (sin tapa) en forma de paralelepípedo ha de tener un volumen de 18m^3 . Se pide determinar, usando multiplicadores de Lagrange, las dimensiones que hacen mínimo su coste, sabiendo que la base cuestan 5€ el m^2 , y los laterales 3€ el m^2 .

Solución:

La función a minimizar es es la función coste ($5xy + 6xz + 6yz$) y la condición es el volumen de la caja ($18 = xyz$), luego la función de Lagrange es:

$$\#32: \quad 5 \cdot x \cdot y + 6 \cdot y \cdot z + 6 \cdot x \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 18)$$

$$\#33: \quad \frac{d}{dx} (5 \cdot x \cdot y + 6 \cdot y \cdot z + 6 \cdot x \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 18)) = y \cdot (5 - \lambda \cdot z) + 6 \cdot z$$

$$\#34: \quad \frac{d}{dy} (5 \cdot x \cdot y + 6 \cdot y \cdot z + 6 \cdot x \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 18)) = x \cdot (5 - \lambda \cdot z) + 6 \cdot z$$

$$\#35: \quad \frac{d}{dz} (5 \cdot x \cdot y + 6 \cdot y \cdot z + 6 \cdot x \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 18)) = x \cdot (6 - \lambda \cdot y) + 6 \cdot y$$

$$\#36: \quad \frac{d}{d\lambda} (5 \cdot x \cdot y + 6 \cdot y \cdot z + 6 \cdot x \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 18)) = 18 - x \cdot y \cdot z$$

$$\#37: \quad \text{SOLVE}([y \cdot (5 - \lambda \cdot z) + 6 \cdot z, x \cdot (5 - \lambda \cdot z) + 6 \cdot z, x \cdot (6 - \lambda \cdot y) + 6 \cdot y, 18 - x \cdot y \cdot z], [x, y, z, \lambda])$$

$$\#38: \quad \left[\begin{aligned} x &= \frac{3 \cdot 10^{2/3}}{5} \wedge y = \frac{3 \cdot 10^{2/3}}{5} \wedge z = \frac{10^{2/3}}{2} \wedge \lambda = 2 \cdot 10^{1/3}, x = - \\ &\frac{3 \cdot 10^{2/3}}{10} + \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{2/3} \cdot i}{10} \wedge y = - \frac{3 \cdot 10^{2/3}}{10} + \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{2/3} \cdot i}{10} \wedge \\ z &= - \frac{10^{2/3}}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot 10^{2/3} \cdot i}{4} \wedge \lambda = - \frac{1^{1/3}}{10} - \sqrt{3} \cdot 10^{1/3} \cdot i, x = - \\ &\frac{3 \cdot 10^{2/3}}{10} - \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{2/3} \cdot i}{10} \wedge y = - \frac{3 \cdot 10^{2/3}}{10} - \frac{3 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{2/3} \cdot i}{10} \wedge \\ z &= - \frac{10^{2/3}}{4} - \frac{\sqrt{3} \cdot 10^{2/3} \cdot i}{4} \wedge \lambda = - \frac{1^{1/3}}{10} + \sqrt{3} \cdot 10^{1/3} \cdot i \end{aligned} \right]$$

Solo es válida la solución real

$$\#39: \quad \left[\begin{aligned} x &= \frac{3 \cdot 10^{2/3}}{5} \wedge y = \frac{3 \cdot 10^{2/3}}{5} \wedge z = \frac{10^{2/3}}{2} \wedge \lambda = 2 \cdot 10^{1/3} \end{aligned} \right]$$

$$\#40: \quad x = 2.7849533 \wedge y = 2.7849533 \wedge z = 2.320794416$$



Extremos de funciones de varias variables



20.- Una empresa fabrica dos productos. Los ingresos por la venta de x unidades del primer producto y de y unidades del segundo producto son $R(x, y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$. Hallar el número de unidades x e y que debe vender para que los ingresos obtenidos sean máximos.

Solución:

$$\#44: -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$

$$\#45: \frac{d}{dx} (-5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y) = -10x - 2y + 42$$

$$\#46: \frac{d}{dy} (-5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y) = -2x - 16y + 102$$

$$\#47: \text{SOLVE}([-10x - 2y + 42, -2x - 16y + 102], [x, y])$$

$$\#48: [x = 3 \wedge y = 6]$$

Solo hemos obtenido un punto crítico, comprobamos que se trata de un máximo relativo

$$\#49: \frac{d}{dx} (-10x - 2y + 42) = -10$$

$$\#50: \frac{d}{dy} (-10x - 2y + 42) = -2$$

$$\#51: \frac{d}{dy} (-2x - 16y + 102) = -16$$

$$\#52: \text{DET} \begin{bmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -16 \end{bmatrix} = 156$$

Luego efectivamente es un máximo relativo

$$x = 3 \wedge y = 6$$



Extremos de funciones de varias variables



21.- Usar multiplicadores de Lagrange para calcular la distancia mínima del punto $P(2,2,0)$:

a) la superficie $z = x^2 + y^2$

b) al plano $4x + 4y + z = 1$

Solución:

a)

$$\#53: \frac{d}{dx} ((x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z)) = 2 \cdot x \cdot (1 - \lambda) - 4$$

$$\#54: \frac{d}{dy} ((x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z)) = 2 \cdot y \cdot (1 - \lambda) - 4$$

$$\#55: \frac{d}{dz} ((x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z)) = 2 \cdot z + \lambda$$

$$\#56: \frac{d}{d\lambda} ((x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-0)^2 - \lambda \cdot (x^2 + y^2 - z)) = -x^2 - y^2 + z$$

$$\#57: \text{SOLVE}([2 \cdot x \cdot (1 - \lambda) - 4, 2 \cdot y \cdot (1 - \lambda) - 4, 2 \cdot z + \lambda, -x^2 - y^2 + z], [x, y, z, \lambda])$$

$$\#58: x = \frac{(3 \cdot \sqrt{327} + 54)^{1/3}}{6} - \frac{(3 \cdot \sqrt{327} - 54)^{1/3}}{6} \wedge y = \frac{(3 \cdot \sqrt{327} + 54)^{1/3}}{6} - \frac{(3 \cdot \sqrt{327} - 54)^{1/3}}{6} \wedge z = \frac{(217 - 12 \cdot \sqrt{327})^{1/3}}{6} + \frac{(12 \cdot \sqrt{327} + 217)^{1/3}}{6} - \frac{1}{3} \wedge \lambda = -\frac{(217 - 12 \cdot \sqrt{327})^{1/3}}{3} - \frac{(12 \cdot \sqrt{327} + 217)^{1/3}}{3} + \frac{2}{3}, x = \frac{(3 \cdot \sqrt{327} - 54)^{1/3}}{12} - \frac{(3 \cdot \sqrt{327} + 54)^{1/3}}{12} + i \cdot \left(\frac{(\sqrt{109} - 6 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{4} + \frac{(\sqrt{109} + 6 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{4} \right) \wedge y = \frac{(3 \cdot \sqrt{327} - 54)^{1/3}}{12} - \frac{(3 \cdot \sqrt{327} + 54)^{1/3}}{12} + i \cdot \left(\frac{(\sqrt{109} - 6 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{4} + \frac{(\sqrt{109} + 6 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{4} \right)$$

$$\begin{aligned} \wedge z = & - \frac{(217 - 12 \cdot \sqrt{327})^{1/3}}{12} - \frac{(12 \cdot \sqrt{327} + 217)^{1/3}}{12} - \frac{1}{3} + \\ & i \cdot \left(\frac{(651 \cdot \sqrt{3} - 108 \cdot \sqrt{109})^{1/3}}{12} - \frac{(108 \cdot \sqrt{109} + 651 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{12} \right) \wedge \lambda = \\ & \frac{(217 - 12 \cdot \sqrt{327})^{1/3}}{6} + \frac{(12 \cdot \sqrt{327} + 217)^{1/3}}{6} + \frac{2}{3} + \\ & i \cdot \left(\frac{(108 \cdot \sqrt{109} + 651 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{6} - \frac{(651 \cdot \sqrt{3} - 108 \cdot \sqrt{109})^{1/3}}{6} \right), x = \\ & \frac{(3 \cdot \sqrt{327} - 54)^{1/3}}{12} - \frac{(3 \cdot \sqrt{327} + 54)^{1/3}}{12} - i \cdot \left(\frac{(\sqrt{109} - 6 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{4} \right. \\ & \left. + \frac{(\sqrt{109} + 6 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{4} \right) \wedge y = \frac{(3 \cdot \sqrt{327} - 54)^{1/3}}{12} - \\ & \frac{(3 \cdot \sqrt{327} + 54)^{1/3}}{12} - i \cdot \left(\frac{(\sqrt{109} - 6 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{4} + \frac{(\sqrt{109} + 6 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{4} \right) \\ \wedge z = & - \frac{(217 - 12 \cdot \sqrt{327})^{1/3}}{12} - \frac{(12 \cdot \sqrt{327} + 217)^{1/3}}{12} - \frac{1}{3} + \\ & i \cdot \left(\frac{(108 \cdot \sqrt{109} + 651 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{12} - \frac{(651 \cdot \sqrt{3} - 108 \cdot \sqrt{109})^{1/3}}{12} \right) \wedge \lambda = \\ & \frac{(217 - 12 \cdot \sqrt{327})^{1/3}}{6} + \frac{(12 \cdot \sqrt{327} + 217)^{1/3}}{6} + \frac{2}{3} + \\ & i \cdot \left(\frac{(651 \cdot \sqrt{3} - 108 \cdot \sqrt{109})^{1/3}}{6} - \frac{(108 \cdot \sqrt{109} + 651 \cdot \sqrt{3})^{1/3}}{6} \right) \end{aligned}$$

#60: $[x = 0.68939835 \wedge y = 0.68939835 \wedge z = 0.9505401713 \wedge \lambda = -1.901080342, x = -0.344699175 + 0.7787506428 \cdot i \wedge y = -0.344699175 + 0.7787506428 \cdot i \wedge z = -0.9752700856 - 1.073738816 \cdot i \wedge \lambda = 1.950540171 + 2.147477632 \cdot i, x = -0.344699175 - 0.7787506428 \cdot i \wedge y = -0.344699175 - 0.7787506428 \cdot i \wedge z = -0.9752700856 + 1.073738816 \cdot i \wedge \lambda = 1.950540171 - 2.147477632 \cdot i]$

La distancia mínima a la superficie es, aproximadamente **1,6485** unidades de longitud como indica el cálculo siguiente

#61: $\sqrt{((0.68939835 - 2)^2 + (0.68939835 - 1)^2 + 0.9505401713^2)} = 1.64853774$



Extremos de funciones de varias variables



b) Con un razonamiento análogo, la función de Lagrange es:

$$\#62: (x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 - \lambda \cdot (4x + 4y + z - 1)$$

$$\#63: \frac{d}{dx} ((x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 - \lambda \cdot (4x + 4y + z - 1)) = 2x - 4\lambda$$

$$- 4$$

$$\#64: \frac{d}{dy} ((x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 - \lambda \cdot (4x + 4y + z - 1)) = 2y - 4\lambda - 4$$

$$\#65: \frac{d}{dz} ((x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 - \lambda \cdot (4x + 4y + z - 1)) = 2z - \lambda$$

$$\#66: \frac{d}{d\lambda} ((x-2)^2 + (y-2)^2 + z^2 - \lambda \cdot (4x + 4y + z - 1)) = -4x - 4y - z + 1$$

$$\#67: \text{SOLVE}([2x - 4\lambda - 4, 2y - 4\lambda - 4, 2z - \lambda, -4x - 4y - z + 1], [x, y, z, \lambda])$$

$$\#68: \left[x = \frac{2}{11} \wedge y = \frac{2}{11} \wedge z = -\frac{5}{11} \wedge \lambda = -\frac{10}{11} \right]$$

$$\#69: \sqrt{\left(\frac{2}{11} - 2\right)^2 + \left(\frac{2}{11} - 2\right)^2 + \left(-\frac{5}{11}\right)^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{33}}{11} = 2.611164839$$

La distancia mínima al plano es, aproximadamente **1,9149** unidades de longitud como indica el cálculo siguiente

$$\#70: \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3} = 1.914854215$$



Extremos de funciones de varias variables



22.- El material de la base de una caja abierta cuesta 1,5€ m² y el de los laterales 1€ m². Se pide determinar, usando multiplicadores de Lagrange, las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse para un coste C=100€

Solución:

La función a maximizar es el volumen de la caja ($V = xyz$) y la condición es la función coste ($1.5xy + 2xz + 2yz - 100$), luego la función de Lagrange es:

$$\#71: \quad x \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (1.5 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z - 100)$$

$$\#72: \quad \frac{d}{dx} (x \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (1.5 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z - 100)) =$$

$$\frac{y \cdot (2 \cdot z - 3 \cdot \lambda) - 4 \cdot \lambda \cdot z}{2}$$

$$\#73: \quad \frac{d}{dy} (x \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (1.5 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z - 100)) =$$

$$\frac{x \cdot (2 \cdot z - 3 \cdot \lambda) - 4 \cdot \lambda \cdot z}{2}$$

$$\#74: \quad \frac{d}{dz} (x \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (1.5 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z - 100)) = x \cdot (y - 2 \cdot \lambda) -$$

$$2 \cdot \lambda \cdot y$$

$$\#75: \quad \frac{d}{d\lambda} (x \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (1.5 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z + 2 \cdot y \cdot z - 100)) = -$$

$$\frac{x \cdot (3 \cdot y + 4 \cdot z) + 4 \cdot y \cdot z - 200}{2}$$

$$\#76: \quad \text{SOLVE} \left(\left[\frac{y \cdot (2 \cdot z - 3 \cdot \lambda) - 4 \cdot \lambda \cdot z}{2}, \frac{x \cdot (2 \cdot z - 3 \cdot \lambda) - 4 \cdot \lambda \cdot z}{2}, x \cdot (y - 2 \cdot \lambda) - 2 \cdot \lambda \cdot y, - \frac{x \cdot (3 \cdot y + 4 \cdot z) + 4 \cdot y \cdot z - 200}{2} \right], [x, y, z, \lambda] \right)$$

$$\#77: \quad \left[x = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{3} \wedge y = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{3} \wedge z = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \wedge \lambda = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{6}, x = - \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{3} \wedge y = - \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{3} \wedge z = - \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \wedge \lambda = - \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{6} \right]$$

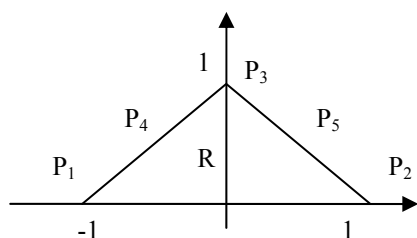
Solo es válida la solución donde x,y,z presentan valores positivos pues han de ser metros lineales.

$$\#78: \quad \left[x = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{3} \wedge y = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{3} \wedge z = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \right]$$

23.- a) Razonar, sin hacer cálculos, si la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en la región R limitada por el triángulo de vértices $P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 0)$ y $P_3(0, 1)$, incluyendo los lados del triángulo.
b) Calcular dichos valores extremos, caso de que existan, así como los puntos en donde se alcanzan.

Solución:

a) Como R es una región cerrada y acotada del plano y f es una función continua, f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en la región.



b) Estudio en el interior:

$$\begin{cases} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow O(0, 0) \text{ es el único punto crítico,}$$
 pero, no está en el interior de la región.

En la frontera (lados del triángulo):

En la base del triángulo:

$$y = 0, x \in [-1, 1] \Rightarrow f(x, 0) = g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0, 0)$$

Hay que considerar también los puntos frontera de la base: $x = -1 \Rightarrow P_1(-1, 0)$, $x = 1 \Rightarrow P_2(1, 0)$.

En el lado izquierdo:

Es el segmento de la recta que pasa por los puntos $P_1(-1, 0)$ y $P_3(0, 1)$:

$$y = x + 1, x \in [-1, 0]$$

$$f(x, x+1) = h(x) = x^2 + (x+1)^2 = 2x^2 + 2x + 1 \Rightarrow h'(x) = 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_4\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Los puntos frontera de este lado son: $P_1(-1, 0)$ y $P_3(0, 1)$.

En el lado derecho, empleamos, para variar, el método de los multiplicadores de Lagrange:

Es el trozo de recta que pasa por los puntos $P_2(1, 0)$ y $P_3(0, 1)$:

$$y = -x + 1, \text{ es decir } y + x - 1 = 0, x \in [0, 1]$$

$$H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda (y + x - 1)$$

$$\begin{cases} H_x = 2x - \lambda = 0 \\ H_y = 2y - \lambda = 0 \\ H_\lambda = -x - y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \Rightarrow P_5\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Los extremos de este lado ya han aparecido antes.

Calculamos el valor de f en cada uno de los puntos:

$$f(0, 0) = 0, f(P_1) = 1, f(P_2) = 1, f(P_3) = 1, f(P_4) = \frac{1}{2}, f(P_5) = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el valor **máximo absoluto de f en la región R es 1** y se alcanza en los puntos **$P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 0)$ y $P_3(0, 1)$** .

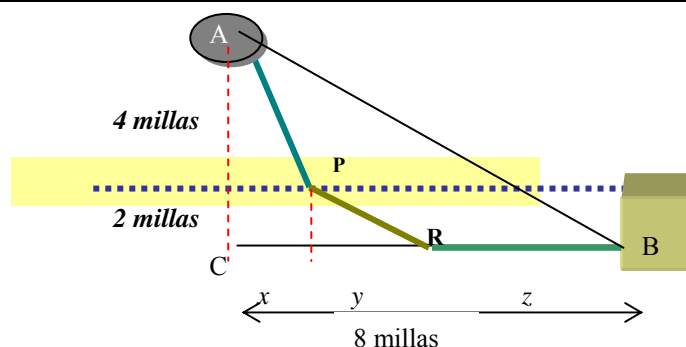
Y el valor **mínimo absoluto de f en la región R es 0** y se alcanza en **$O(0, 0)$** .

24.- Una compañía petrolífera va a construir un oleoducto desde la plataforma petrolífera A, situada 4 millas mar adentro, hasta la refinería B, 2 millas tierra adentro, además entre la línea de playa y la línea de la refinería hay una zona de dunas (ver figura) y la distancia entre A y B son 10 millas.

Cada milla de oleoducto por el mar cuesta tres millones de euros, por la zona de dunas 5 millones y por la tierra 2 millones. Por tanto, el coste del oleoducto depende de los puntos P y R elegidos. Se pide:

a) Hallar la ruta que hace mínimo el coste de construcción.

b) Calcular dicho coste.



Solución

a) Se trata de un problema de optimización (hallar los valores de las variables de una función para obtener un mínimo de la misma) para cuya solución podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange.

La función a minimizar es el coste de construcción $C(x, y, z)$:

$$C(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + 16} + 5\sqrt{y^2 + 4} + 2z$$

La condición es que $x + y + z = 8$

La función Lagrangiana es:

$$H(x, y, z, \lambda) = 3\sqrt{x^2 + 16} + 5\sqrt{y^2 + 4} + 2z - \lambda(x + y + z - 8)$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} H_x = 0 \\ H_y = 0 \\ H_z = 0 \\ H_\lambda = 0 \end{cases}, \text{ se obtiene: } \begin{matrix} x = \frac{8\sqrt{5}}{5} \\ y = \frac{4\sqrt{21}}{21} \\ z = -\frac{4\sqrt{21}}{21} - \frac{8\sqrt{5}}{5} + 8 \end{matrix} \text{ millas.}$$

b) Sustituyendo estos valores en la función coste: $c = 2\sqrt{21} + 4\sqrt{5} + 16 \approx \boxed{34.11 \text{ millones}}$ de euros.



Extremos de funciones de varias variables



25.- Estudiar los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $f(x, y) = y^2 x$, en el círculo cerrado de centro $(0, 0)$ y radio 2.

Solución:

Por ser el círculo cerrado una región cerrada y acotada del plano, y ser f una función continua, está garantizada la existencia de máximo y mínimo absolutos en la región. Estos valores extremos pueden alcanzarse en el interior del círculo o en la circunferencia frontera.

a) En el interior

$\begin{cases} f_x = y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_y = 2yx = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0 \end{cases}$, luego, todos los puntos de la forma $P(x, 0)$ son puntos

críticos, para $x \in (-2, 2)$.

$\begin{cases} f_{xx} = 0 \\ f_{xy} = 2y \Rightarrow f_{xy}(P) = 0 \Rightarrow H(P) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{El criterio de la derivada segunda no decide} \\ f_{yy} = 2x \end{cases}$

si hay valor extremo en P . Hay que estudiar cómo es la función en un entorno del punto $P(x, 0)$. Por la definición de f , es $f(x, 0) = 0$

- Si $x = 0 \Rightarrow P(0, 0)$

A lo largo de la recta $y = x$, $f(x, x) = x^3 \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Luego **$(0, 0)$ es un punto de silla.**

- Si $0 < x < 2$, existe un entorno E de $P(x, 0)$ tal que $\forall (x, y) \in E$ es $x > 0$.

$\forall (x, y) \in E$ se verifica que $f(x, y) = y^2 x \geq 0 = f(x, 0)$.

Luego f presenta un **mínimo relativo en los puntos $(x, 0)$** , con **$0 < x < 2$** ; el valor del mínimo relativo es 0.

- Si $-2 < x < 0$, existe un entorno E de $P(x, 0)$ tal que $\forall (x, y) \in E$ es $x < 0$.

$\forall (x, y) \in E$ se verifica que $f(x, y) = y^2 x \leq 0 = f(x, 0)$.

Luego f presenta un **máximo relativo en los puntos $(x, 0)$** , con **$-2 < x < 0$** ; el valor del máximo relativo es 0.

b) En la frontera:

La ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio 2 es: $x^2 + y^2 = 4$.

Aplicamos multiplicadores de Lagrange:

$$\#1: \frac{d}{dx} \left(y^2 \cdot x - \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \right)$$

$$\#2: \frac{d}{dy} \left(y^2 \cdot x - \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \right)$$

$$\#3: \frac{d}{d\lambda} \left(y^2 \cdot x - \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \right) = y^2 - 2 \cdot \lambda \cdot x$$

$$\#4: \frac{d}{dx} \left(y^2 \cdot x - \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \right)$$

$$\#5: \frac{d}{dy} \left(y^2 \cdot x - \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \right) = 2 \cdot y \cdot (x - \lambda)$$

$$\#6: \frac{d}{d\lambda} \left(y^2 \cdot x - \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 4 \right) \right)$$



Extremos de funciones de varias variables



#7:
$$-x^2 - y^2 + 4$$

#8:
$$\text{SOLVE}\left[y^2 - 2\lambda \cdot x, 2\lambda \cdot (x - \lambda), -x^2 - y^2 + 4\right], [x, y, \lambda]$$

#9:
$$\left[x = 2 \wedge y = 0 \wedge \lambda = 0, x = -2 \wedge y = 0 \wedge \lambda = 0, x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge y = \frac{2\sqrt{6}}{3} \wedge \lambda = \frac{2\sqrt{3}}{3}, x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge y = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \wedge \lambda = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right]$$

#10:
$$f(x, y) := y^2 \cdot x$$

#11:
$$f(0, 0)$$

#12:
$$0$$

#13:
$$f(x, 0)$$

#14:
$$0$$

#15:
$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

#16:
$$\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

#18:
$$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

#19:
$$\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

#20:
$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

#21:
$$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

#22:
$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$$

#23:
$$-\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

Máximo absoluto en la región: $16\sqrt{3}/9$, lo alcanza en los puntos: $(2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{6}/3)$ y $(2\sqrt{3}/3, -2\sqrt{6}/3)$.

Mínimo absoluto en la región: $-16\sqrt{3}/9$, lo alcanza en los puntos: $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{6}/3)$ y $(-2\sqrt{3}/3, -2\sqrt{6}/3)$.



Extremos de funciones de varias variables



26.- Sea k una constante real y sea la superficie de ecuación $f(x, y) = x^2 + 3xy + ky^2$. Se pide:

- a) Probar que, para cualquier valor de k , el origen $(0,0)$ es un punto crítico de f .
b) Hallar los valores de k para los que f presenta un mínimo relativo en $(0,0)$.

Solución:

- a) El origen es punto crítico de f :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + ky^2) = 2x + 3y = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy + ky^2) = 3x + 2ky = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 0; y = 0$$

- b) Valores de k para los que f presenta un mínimo relativo en $(0, 0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2 + 3xy + ky^2) = 2 \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2 + 3xy + ky^2) = 2k \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = (x^2 + 3xy + ky^2) = 3 \end{array} \right.$$

El valor del Hessiano es $H(f(x, y)) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2k \end{vmatrix} = 4k - 9$

Si $4k - 9 > 0 \Rightarrow k > 9/4 \Rightarrow H(f(x, y)) > 0$ y $f_{xx}'' > 0 \Rightarrow f(x, y)$ para $k > 9/4$, presenta un **mínimo relativo**.

Si $4k - 9 = 0 \Rightarrow k = 9/4$

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + ky^2 = x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 \geq 0$$

Luego, por ser $f(0, 0) = 0 \leq f(x, y)$ también para $k = 9/4$, f presenta un mínimo relativo por definición (en realidad, es **mínimo absoluto**).



Extremos de funciones de varias variables



27.- a) Consideremos la función $g(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, sujeta a la restricción de que α, β, γ son los tres ángulos de un triángulo plano. Aplicar multiplicadores de Lagrange para hallar los valores de α, β, γ que hacen máximo el valor de g .

b) Hallar los puntos críticos de la función $z = y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2$ y estudiarlos concluyendo cuáles corresponden a extremos relativos y cuáles son puntos de silla.

Solución:

a) $g(\alpha, \beta, \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$, es la función a maximizar y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ es la condición, luego la función de Lagrange es, en este caso:

$$H(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - \lambda(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha} &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \lambda = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \beta} &= \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma - \lambda = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \gamma} &= \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \lambda = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \lambda} &= -(\alpha + \beta + \gamma - \pi) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Despejando } \lambda \text{ en las 3 primeras ecuaciones e igualando las}$$

2 primeras ecuaciones y la primera con la tercera se obtiene el siguiente sistema equivalente al anterior:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma &= \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ -(\alpha + \beta + \gamma - \pi) &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi \end{aligned} \right.$$

Ahora bien, las tangentes son iguales cuando los ángulos son iguales o se diferencian en π , es decir,

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma \\ \alpha + \pi &= \beta = \gamma \end{aligned} \right., \text{ la segunda posibilidad no puede darse pues los ángulos de un triángulo}$$

plano son menores de 180° (también esto sucede en triángulos esféricos), por lo que ha de suceder:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma &= \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}}$$

b) Dada $z = y^2(x-1)^2 + x^2(y+4)^2$, sus puntos críticos son aquellos donde sus derivadas parciales se anulan o no existen. En este caso, por tratarse de una función polinómica, z es diferenciable en todo \mathbf{R}^2 , y sus derivadas también son funciones polinómicas (diferenciables en \mathbf{R}^2).

$$\frac{d}{dx} (y^2 \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot (y+4)^2) = 4 \cdot x \cdot (y^2 + 4 \cdot y + 8) - 2 \cdot y^2$$

$$\frac{d}{dy} (y^2 \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot (y+4)^2) = 2 \cdot (2 \cdot x \cdot (y+2) - 2 \cdot x \cdot y + y)$$

$$\text{SOLVE}([4 \cdot x \cdot (y^2 + 4 \cdot y + 8) - 2 \cdot y^2, 2 \cdot (2 \cdot x \cdot (y+2) - 2 \cdot x \cdot y + y)], [x, y])$$

Tomando únicamente las soluciones reales, se obtienen los siguientes puntos críticos:



Extremos de funciones de varias variables



$$P_1(0,0), P_2(1,-4), P_3(1/2,-2)$$

Para estudiar cuáles corresponden a extremos y cuáles a puntos de silla aplicamos el criterio de la segunda derivada.

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dx} (y^2 \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot (y+4)^2) = 4 \cdot (y^2 + 4 \cdot y + 8)$$

$$\frac{d}{dy} \frac{d}{dx} (y^2 \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot (y+4)^2) = 4 \cdot (2 \cdot x \cdot (y+2) - y)$$

$$\frac{d}{dx} \frac{d}{dy} (y^2 \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot (y+4)^2) = 4 \cdot (2 \cdot x \cdot (y+2) - y)$$

$$\frac{d}{dy} \frac{d}{dy} (y^2 \cdot (x-1)^2 + x^2 \cdot (y+4)^2) = 2 \cdot (2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1)$$

$$\text{DET} \begin{bmatrix} 4 \cdot (y^2 + 4 \cdot y + 8) & 4 \cdot (2 \cdot x \cdot (y+2) - y) \\ 4 \cdot (2 \cdot x \cdot (y+2) - y) & 2 \cdot (2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1) \end{bmatrix}$$

$$\text{DET} \begin{bmatrix} 4 \cdot (0^2 + 4 \cdot 0 + 8) & 4 \cdot (2 \cdot 0 \cdot (0+2) - 0) \\ 4 \cdot (2 \cdot 0 \cdot (0+2) - 0) & 2 \cdot (2 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 1) \end{bmatrix} = \text{DET} \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 64$$

$$\text{DET} \begin{bmatrix} 4 \cdot ((-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 8) & 4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot (-4+2) - (-4)) \\ 4 \cdot (2 \cdot 1 \cdot (-4+2) - (-4)) & 2 \cdot (2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1) \end{bmatrix} = \text{DET} \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 64$$

$$\text{DET} \begin{bmatrix} 4 \cdot ((-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 8) & 4 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2+2) - (-2)\right) \\ 4 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2+2) - (-2)\right) & 2 \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) \end{bmatrix} = \text{DET} \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} = -48$$

Observando el valor del hessiano y de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ en cada punto deducimos que:

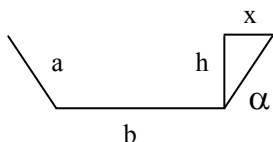
Hess(P₁)=64>0, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1}=32>0 \Rightarrow$ en **P₁(0,0) la función presenta un mínimo relativo** cuyo valor es f(0,0)=0

Hess(P₂)=64>0, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_2}=32>0 \Rightarrow$ en **P₂(1,-4) la función presenta un mínimo relativo** cuyo valor es f(1,-4)=0

Hess(P₃)= - 48>0, \Rightarrow en **P₃(1/2,-2) la función presenta un punto de silla** cuyo valor es $f\left(\frac{1}{2}, -2\right) = 2$

28.- Una canaleta de desagüe con sección transversal en forma de trapecio se hace doblando hacia arriba las orillas de una hoja de aluminio de 60 cm de ancho. Hallar la sección transversal de mayor área.

Solución:



Longitud de la hoja: $60 = b + 2a$

Área de la sección transversal: $A = b h + 2 (x h / 2) = (b + x) h = (60 - 2a + a \cos \alpha) a \sin \alpha$

Tenemos así expresada el área en función de las variables a (trozo de hoja que se dobla hacia arriba en cada lado) y α (ángulo que se eleva el trozo a).

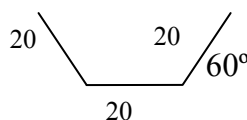
Se trata entonces de maximizar esta función de dos variables. Realizando los cálculos con DERIVE, se tiene que:

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \sin \alpha (60 - 4a + 2a \cos \alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ absurdo (pues } \alpha \neq 0, \pi) \\ 60 - 4a + 2a \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = a(60 \cos \alpha - 2a \cos \alpha + a \cos^2 \alpha - a \sin^2 \alpha) = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 60 - 4a + 2a \cos \alpha = 0 \\ 60 \cos \alpha - 2a \cos \alpha + a \cos^2 \alpha - a \sin^2 \alpha = 0 \end{cases}$$



Se obtiene: **$a = 20 \text{ cm}, \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$**



Extremos de funciones de varias variables



29.- Estudiar los valores máximos y mínimos relativos y absolutos de la función
 $f(x, y) = y^2 x, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

Extremos relativos

$$\begin{cases} f_x = y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \\ f_y = 2yx = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ó } y = 0 \end{cases}$$
 , luego, todos los puntos de la forma $P(x, 0)$ son puntos

críticos.

$$\begin{cases} f_{xx} = 0 \\ f_{xy} = 2y \Rightarrow f_{xy}(P) = 0 \Rightarrow H(P) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ f_{yy} = 2x \end{cases}$$

El criterio de la derivada segunda no decide si hay valor extremo en P . Hay que estudiar cómo es la función en un entorno del punto $P(x, 0)$. Por la definición de f , es $f(x, 0) = 0$

- Si $x = 0 \Rightarrow P(0, 0)$

A lo largo de la recta $y = x$, $f(x, x) = x^3 \begin{cases} > 0 & \text{si } x > 0 \\ < 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Luego **$(0, 0)$ es un punto de silla.**

- Si $x > 0$, existe un entorno E de $P(x, 0)$ tal que $\forall (x, y) \in E$ es $x > 0$.

$\forall (x, y) \in E$ se verifica que $f(x, y) = y^2 x \geq 0 = f(x, 0)$.

Luego **f presenta un mínimo relativo en los puntos $(x, 0)$, con $x > 0$** ; el valor del mínimo relativo es 0.

- Si $x < 0$, existe un entorno E de $P(x, 0)$ tal que $\forall (x, y) \in E$ es $x < 0$.

$\forall (x, y) \in E$ se verifica que $f(x, y) = y^2 x \leq 0 = f(x, 0)$.

Luego **f presenta un máximo relativo en los puntos $(x, 0)$, con $x < 0$** ; el valor del máximo relativo es 0.

Extremos absolutos

$f(x, y) = y^2 x$ puede hacerse tan grande ó tan pequeño como se quiera (por ejemplo, a lo largo

de la recta $y = x$, $f(x, y) = x^3 \begin{cases} \rightarrow \infty & \text{si } x \rightarrow \infty \\ \rightarrow -\infty & \text{si } x \rightarrow -\infty \end{cases}$)

Luego, **f no posee extremos absolutos.**



Extremos de funciones de varias variables



30.- Aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar las distancias máxima y mínima de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta $x + y = 4$.

Solución:

$$\#1: \frac{(x + y - 4)^2}{2} - \lambda \cdot (x^2 + 4y^2 - 4)$$

$$\#2: \frac{d}{dx} \left(\frac{(x + y - 4)^2}{2} - \lambda \cdot (x^2 + 4y^2 - 4) \right)$$

$$\#3: x \cdot (1 - 2 \cdot \lambda) + y - 4$$

$$\#4: \frac{d}{dy} \left(\frac{(x + y - 4)^2}{2} - \lambda \cdot (x^2 + 4y^2 - 4) \right)$$

$$\#5: x + y \cdot (1 - 8 \cdot \lambda) - 4$$

$$\#6: \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{(x + y - 4)^2}{2} - \lambda \cdot (x^2 + 4y^2 - 4) \right)$$

$$\#7: -x^2 - 4y^2 + 4$$

$$\#8: \text{SOLVE}([-x^2 - 4y^2 + 4, x \cdot (1 - 2 \cdot \lambda) + y - 4, x + y \cdot (1 - 8 \cdot \lambda) - 4], [x, y, \lambda])$$

$$\#9: \left[x = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5} \wedge y = \frac{\sqrt{5}}{5} \wedge \lambda = \frac{5}{8} - \frac{\sqrt{5}}{2}, x = -\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5} \wedge y = -\frac{\sqrt{5}}{5} \wedge \lambda = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{8}, x = \frac{16}{5} + \frac{2 \cdot \sqrt{11} \cdot i}{5} \wedge y = \frac{4}{5} - \frac{2 \cdot \sqrt{11} \cdot i}{5} \wedge \lambda = 0, x = \frac{16}{5} - \frac{2 \cdot \sqrt{11} \cdot i}{5} \wedge y = \frac{4}{5} + \frac{2 \cdot \sqrt{11} \cdot i}{5} \wedge \lambda = 0 \right]$$

$$\#10: \left[\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right]$$

$$\#11: \left[-\frac{4 \cdot \sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5} \right]$$

$$\#12: \sqrt{\frac{(x + y - 4)^2}{2}}$$

Distancia mínima:

$$\#13: 2 \cdot \sqrt{2} - \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Distancia máxima:

$$\#14: \frac{\sqrt{10}}{2} + 2 \cdot \sqrt{2}$$

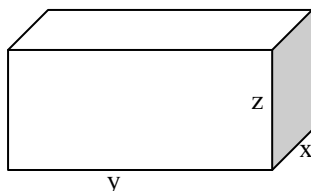
Al ser $f(x,y)$ (distancia al cuadrado) una función continua en la elipse que es un conjunto cerrado y acotado, podemos asegurar que esas distancias obtenidas son las buscadas.

31.- Hallar las dimensiones del recipiente de embalaje abierto por arriba más económico de 96 metros cúbicos de capacidad, sabiendo que la base cuesta 30 céntimos por metro cuadrado y los laterales 10 céntimos por metro cuadrado.

Nota: se supone que el embalaje tiene forma de prisma recto.

Solución:

Sean x , y , z las medidas del ancho, largo y alto del recipiente.



Superficie total = superficie base + superficie lateral = $xy + 2xz + 2yz$

Coste = superficie \times precio = $30 \times y + 10 (2xz + 2yz) = f(x, y, z)$

La capacidad del recipiente viene dada por su volumen: $xyz = 96$, es decir, $xyz - 96 = 0$.

Se trata, por tanto, de minimizar la función $f(x, y, z)$, bajo la condición $xyz - 96 = 0$

$H(x, y, z, \lambda) = 30xy + 10(2xz + 2yz) - \lambda(xyz - 96)$

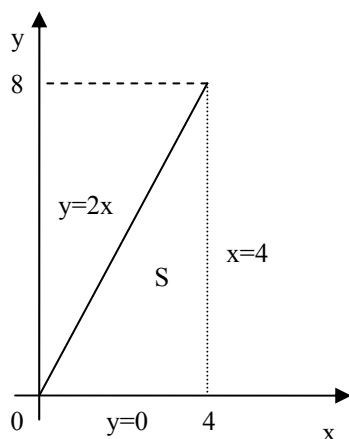
$$\left. \begin{aligned} H_x &= y(30 - \lambda z) + 20z = 0 \\ H_y &= x(30 - \lambda z) + 20z = 0 \\ H_z &= x(20 - \lambda y) + 20y = 0 \\ H_\lambda &= 96 - xyz = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 4, \quad y = 4, \quad z = 6$$

Luego, el más económico es un recipiente de base cuadrada de lado **4m y altura 6m**.

32.- Se considera la función $f(x, y) = xy - 2x - 3y$ definida en la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2x\}$. Se pide:

- Razonar si f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en S .
- Calcular cuáles son esos valores, indicando también en qué puntos se alcanzan.

Solución:



a) La función f es continua en la región S que es un conjunto compacto (cerrado y acotado), luego f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en S .

b) Puntos críticos en el interior de S :

$$\begin{cases} f_x = y - 2 = 0 \\ f_y = x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1(3, 2)$$

que está dentro de S .

En la frontera de S (formada por los tres lados del triángulo):

En el lado $y = 2x$, $x \in [0, 4]$:

$$z = f(x, y) = f(x, 2x) = 2x^2 - 8x \Rightarrow z' = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow P_2(2, 4)$$

Además, los dos puntos de los extremos del lado: $P_3(0, 0)$ y $P_4(4, 8)$.

En el lado $y = 0$, $x \in [0, 4]$:

$z = f(x, y) = f(x, 0) = -2x \Rightarrow z' = -2 \neq 0$; y el punto extremo del lado $P_5(4, 0)$, pues el otro punto extremo ya está considerado antes (es el origen).

En el lado $x = 4$, $y \in [0, 8]$:

$z = f(x, y) = f(4, y) = y - 8 \Rightarrow z' = 1 \neq 0$; los dos puntos extremos de este lado ya están considerados antes.

$$f(P_1) = -6, \quad f(P_2) = -8, \quad f(P_3) = 0, \quad f(P_4) = 0, \quad \text{y} \quad f(P_5) = -8$$

Luego, el máximo de f en S es 0 y se alcanza en P_3 y P_4 .

El mínimo de f en S es -8 y se alcanza en P_2 y P_5 .



Extremos de funciones de varias variables



33.- Calcular el volumen de la caja rectangular más grande situada en el primer octante con tres de sus caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x+2y+3z = 6$.

Solución:

#1: $x + 2 \cdot y + 3 \cdot z - 6 = 0$

#2: $\text{SOLVE}(x + 2 \cdot y + 3 \cdot z - 6 = 0, z)$

#3:
$$z = - \frac{x + 2 \cdot y - 6}{3}$$

#4: $x \cdot y \cdot z$

#5: $x \cdot y \cdot \left(- \frac{x + 2 \cdot y - 6}{3} \right)$

#6:
$$- \frac{x \cdot y \cdot (x + 2 \cdot y - 6)}{3}$$

#7:
$$\frac{d}{dx} \left(- \frac{x \cdot y \cdot (x + 2 \cdot y - 6)}{3} \right)$$

#8:
$$- \frac{2 \cdot y \cdot (x + y - 3)}{3}$$

#9:
$$\frac{d}{dy} \left(- \frac{x \cdot y \cdot (x + 2 \cdot y - 6)}{3} \right)$$

#10:
$$- \frac{x \cdot (x + 4 \cdot y - 6)}{3}$$

#11:
$$\text{SOLVE} \left(\left[- \frac{2 \cdot y \cdot (x + y - 3)}{3} = 0, - \frac{x \cdot (x + 4 \cdot y - 6)}{3} = 0 \right], [x, y] \right)$$

#12: $[x = 0 \wedge y = 0, x = 0 \wedge y = 3, x = 2 \wedge y = 1, x = 6 \wedge y = 0]$

#13:
$$z = \frac{2}{3}$$

Sustituyendo en el volumen:

#14: $x \cdot y \cdot z = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \mathbf{4/3 \text{ es el volumen máximo.}}$



Extremos de funciones de varias variables



34.- Se considera la función $f(x, y) = xy - 4x - y$.

a) Estudiar la existencia de máximos y mínimos relativos de f en \mathbb{R}^2 .

b) Estudiar la existencia de máximos y mínimos absolutos de f en \mathbb{R}^2 .

c) Sea la región $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5x\}$. Se pide:

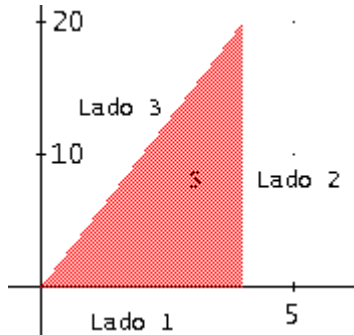
i) Razonar si f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en S .

ii) Calcular cuáles son esos valores, indicando también en qué puntos se alcanzan.

Solución:

#1: $f(x, y) := x \cdot y - 4 \cdot x - y$

#2: $0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq y \leq 5x$



a) Extremos relativos de f en todo el plano \mathbb{R}^2 :

#3: $\frac{d}{dx} (x \cdot y - 4 \cdot x - y)$

#4: $y - 4$

#5: $\frac{d}{dy} (x \cdot y - 4 \cdot x - y)$

#6: $x - 1$

#7: $\text{SOLVE}([y - 4 = 0, x - 1 = 0], [x, y])$

#8: $[x = 1 \wedge y = 4]$

#9: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 (x \cdot y - 4 \cdot x - y)$

#10: 0

#11: $\left(\frac{d}{dy}\right)^2 (x \cdot y - 4 \cdot x - y)$

#12: 0

#13: $\frac{d}{dy} \frac{d}{dx} (x \cdot y - 4 \cdot x - y)$

#14: 1

Hessiano en $P_1 (1,4)$

#15: $\text{DET} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$

Al ser $H(P) < 0$, se trata de un punto de silla. Por tanto, **f no tiene extremos relativos**.

b) Máximo y mínimo absolutos de f en \mathbb{R}^2 :

No se alcanzan, pues:

A lo largo del eje OY:

#16: $f(x, 0) = -4 \cdot x$

$\lim_{x \rightarrow \infty} -4 \cdot x = -\infty$

#17: $x \rightarrow \infty$



Extremos de funciones de varias variables



#18:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -4 \cdot x = \infty$$

c)

i) **f alcanza sus valores máximo y mínimo en S** por ser f una función continua y ser S una región cerrada y acotada del plano.

ii) Puntos críticos en el interior de S:

El punto $P_1(1, 4)$ está en el interior de S pues cumple sus ecuaciones.

En la frontera de S:

En el lado 1:

#19: $f(0, y) = -y$

#20: $\frac{d}{dy} (-y)$

#21: $\frac{-1}{0}$
No se anula. Puntos extremos $P_2(0,0)$, $P_3(4,0)$

En el lado 2:

#22: $f(4, y) = 3 \cdot y - 16$

#23: $\frac{d}{dy} (3 \cdot y - 16)$

#24: $\frac{3}{0}$
No se anula. Puntos extremos: $P_3(4,0)$, $P_4(4,20)$

En el lado 3: Multiplicadores de Lagrange:

#25: $H(x, y, \lambda) := x \cdot y - 4 \cdot x - y - \lambda \cdot (y - 5 \cdot x)$

#26: $\frac{d}{dx} (x \cdot y - 4 \cdot x - y - \lambda \cdot (y - 5 \cdot x))$

#27: $y + 5 \cdot \lambda - 4$

#28: $\frac{d}{dy} (x \cdot y - 4 \cdot x - y - \lambda \cdot (y - 5 \cdot x))$

#29: $x - \lambda - 1$

#30: $\frac{d}{d\lambda} (x \cdot y - 4 \cdot x - y - \lambda \cdot (y - 5 \cdot x))$

#31: $\frac{5 \cdot x - y}{9}$
#32: $\text{SOLVE}([y + 5 \cdot \lambda - 4, x - \lambda - 1, \frac{5 \cdot x - y}{9}], [x, y, \lambda])$

#33: $\left[x = \frac{9}{10} \wedge y = \frac{9}{2} \wedge \lambda = -\frac{1}{10} \right]$

Luego, otro punto a considerar es $P_5(9/10, 9/2)$.

Puntos extremos $P_2(0,0)$, $P_4(4,20)$.

Hallamos el valor de f en todos ellos:

Puntos extremos $P_2(0,0)$, $P_4(4,20)$.

Hallamos el valor de f en todos ellos:

#34: $f(1, 4) = -4$

#35: $f(0, 0) = 0$

#36: $f(4, 20) = 44$

#37: $f(4, 0) = -16$

#38: $f\left(\frac{9}{10}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{81}{20}$

Por tanto, **máximo de f en S: 44, se alcanza en $P_4(4,20)$.**

Mínimo de f en S: -4, se alcanza en $P_1(1,4)$.



Extremos de funciones de varias variables



35.- Se quiere fabricar un depósito de almacenamiento con el menor coste posible.
a) Hallar las dimensiones que ha de tener el depósito si se quiere que su capacidad sea de 1000 metros cúbicos, sabiendo que el material para construir el suelo cuesta 40 euros por metro cuadrado y el de las paredes 10 euros por metro cuadrado.
b) Hallar dicho coste mínimo.
Nota: se supone que el depósito tiene forma de prisma recto sin tapa.

Solución:

a) Condición: valor del volumen

#37: $x \cdot y \cdot z = 1000$

Función a minimizar: función coste

#38: $C(x, y, z) := 40 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot z + 2 \cdot 10 \cdot y \cdot z$

Función Lagrangiana:

#39: $H(x, y, z, \lambda) := 40 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot z + 2 \cdot 10 \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 1000)$

#40: $\frac{d}{dx} (40 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot z + 2 \cdot 10 \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 1000))$

#41: $y \cdot (40 - \lambda \cdot z) + 20 \cdot z$

#42: $\frac{d}{dy} (40 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot z + 2 \cdot 10 \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 1000))$

#43: $x \cdot (40 - \lambda \cdot z) + 20 \cdot z$

#44: $\frac{d}{dz} (40 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot z + 2 \cdot 10 \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 1000))$

#45: $x \cdot (20 - \lambda \cdot y) + 20 \cdot y$

#46: $\frac{d}{d\lambda} (40 \cdot x \cdot y + 2 \cdot 10 \cdot x \cdot z + 2 \cdot 10 \cdot y \cdot z - \lambda \cdot (x \cdot y \cdot z - 1000))$

#47: $1000 - x \cdot y \cdot z$

#48: $\text{SOLVE}([y \cdot (40 - \lambda \cdot z) + 20 \cdot z = 0, x \cdot (40 - \lambda \cdot z) + 20 \cdot z = 0, x \cdot (20 - \lambda \cdot y) + 20 \cdot y = 0, 1000 - x \cdot y \cdot z = 0], [x, y, z, \lambda])$

La única solución real es:

#50: $x = 5 \cdot 2^{2/3} \wedge y = 5 \cdot 2^{2/3} \wedge z = 10 \cdot 2^{2/3}$

b) El menor coste posible se consigue entonces con un depósito de estas dimensiones.
Dicho coste es:

#51: $C(5 \cdot 2^{2/3}, 5 \cdot 2^{2/3}, 10 \cdot 2^{2/3}) = 6000 \cdot 2^{1/3} \text{ Euros.}$



Extremos de funciones de varias variables



36.- Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una región D del plano con derivadas parciales continuas hasta el orden 2. Sea P_0 un punto del interior de la región. Para cada una de las afirmaciones siguientes, decir si son verdaderas o falsas:

a) Si f tiene en P_0 un máximo o mínimo relativo, entonces, $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$.

b) Si f tiene en P_0 un máximo o mínimo relativo, entonces necesariamente el Hessiano de f en P_0 es $H(P_0) \geq 0$.

c) Si f alcanza su mínimo absoluto “m” en un punto Q de la frontera de D , entonces $f_x(Q) = f_y(Q) = 0$

d) Si la región D es cerrada y acotada, entonces, f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en la región.

Solución:

a) Si f tiene en P_0 un máximo o mínimo relativo, entonces, $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$.

VERDADERA

b) Si f tiene en P_0 un máximo o mínimo relativo, entonces necesariamente el Hessiano de f en P_0 es $H(P_0) \geq 0$.

VERDADERA

c) Si f alcanza su mínimo absoluto “m” en un punto Q de la frontera de D , entonces $f_x(Q) = f_y(Q) = 0$

FALSA

d) Si la región D es cerrada y acotada, entonces, f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en la región.

VERDADERA

37.- Se considera la función $f(x, y) = xy - 2x + 3y$ definida en la región:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -3 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq x + 3\}$$

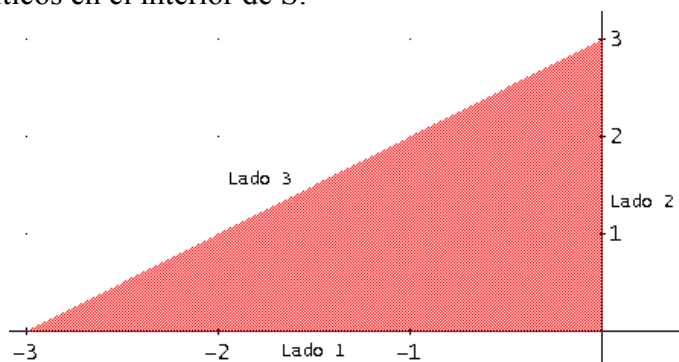
a) Razonar si f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos en S .

b) Calcular cuáles son esos valores, indicando también en qué puntos se alcanzan.

Solución:

a) **f alcanza sus valores máximo y mínimo en S** por ser f una función continua y ser S una región cerrada y acotada del plano.

b) Puntos críticos en el interior de S :



$$f(x, y) = x \cdot y - 2 \cdot x + 3 \cdot y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = y - 2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow [x = -3, y = 2] \text{ que no está en el interior de la región } S.$$

Estudio en la frontera:

En el lado 1:

$$f(x, 0) = -2x; \quad \frac{d}{dx}(-2x) = -2. \text{ No se anula. Puntos extremos } P_0(0, 0), P_1(-3, 0)$$

En el lado 2:

$$f(0, y) = 3y; \quad \frac{\partial}{\partial x}(3y) = 3. \text{ No se anula. Puntos extremos: } P_3(0, 3)$$

En el lado 3: Multiplicadores de Lagrange:



Extremos de funciones de varias variables

$$\left\{ \begin{array}{l} H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(y - x - 3) \\ \frac{\partial}{\partial x} H(x, y, \lambda) = y + \lambda - 2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} H(x, y, \lambda) = x - \lambda + 3 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} H(x, y, \lambda) = x - y + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -2; y = 1; \lambda = 1$$

$$f(0, 0) = 0; \quad f(-3, 0) = 6; \quad f(0, 3) = 9; \quad f(-2, 1) = 5$$

Luego, **el máximo valor de f en S es 9 y se alcanza en $(0,3)$.**

El mínimo valor de f en S es 0 y se alcanza en $(0,0)$.

Ambos valores se alcanzan en la frontera de S .

38.- La temperatura en un punto (x, y) de una lámina metálica es $T(x, y) = \frac{3x}{x^2 + y^2}$.

- Hallar la curva de nivel (isoterma) que pasa por el punto $P(2, -1)$.
- Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en P .
- Hallar el coeficiente de variación de la temperatura en P en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.
- Hallar, usando la regla de la cadena, el coeficiente de variación de la temperatura a lo largo de la curva $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sent} \\ y = \cos t \end{cases}$.
- Si la cota de error en la medida de “ x ” es de $\pm 1\%$ y en la de “ y ” es de $\pm 2\%$, hallar el máximo error propagado de T en P .

Solución:

a)

Para hallar la curva de nivel en $P(2, -1)$ calculamos previamente el valor de $T(P)$

$$\#1: \quad \frac{3 \cdot 2}{2^2 + (-1)^2} = \frac{6}{5}$$

La curva de nivel en P tiene por ecuación

$$\#2: \quad \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot x}{x^2 + y^2}$$

Operando obtenemos $x^2 + y^2 - 5/2x = 0$ que corresponde a una circunferencia de centro $(5/4, 0)$ y radio $5/4$.

b)

La dirección de máximo crecimiento sabemos, por teoría que es la del vector gradiente.

$$\#3: \quad \frac{d}{dx} \frac{3 \cdot x}{x^2 + y^2} = \frac{3 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\#4: \quad \frac{d}{dy} \frac{3 \cdot x}{x^2 + y^2} = - \frac{6 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2}$$

El vector gradiente en un punto (x, y) es:

$$\#5: \quad \left[\frac{3 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, - \frac{6 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

Y en P es:

$$\#6: \quad \left[\frac{3 \cdot ((-1)^2 - 2^2)}{(2^2 + (-1)^2)^2}, - \frac{6 \cdot 2 \cdot (-1)}{(2^2 + (-1)^2)^2} \right] = \left[-\frac{9}{25}, \frac{12}{25} \right]$$

c)

Se nos pide la derivada direccional de T en P y en la dirección $\alpha = \pi/4$



Extremos de funciones de varias variables



$$\#7: \left[-\frac{9}{25}, \frac{12}{25} \right] \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{50}$$

d)

Aplicamos la regla de la cadena a T a lo largo de la curva $x = \sin t$, $y = \cos t$, y sustituimos x e y por las funciones de t que definen x e y

$$\#8: \frac{3 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (2 \cdot \cos(t)) + \left(-\frac{6 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \cdot (-\sin(t)) =$$

$$\frac{6 \cdot (y^2 - x^2) \cdot \cos(t)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{6 \cdot x \cdot y \cdot \sin(t)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\#9: \frac{6 \cdot \cos(t) \cdot (1 - 3 \cdot \sin^2(t))}{(3 \cdot \sin^2(t) + 1)^2}$$

e)

El error propagado máximo (en la medición de T) se obtiene a partir de la fórmula de la diferencial total de T

$$\#10: dT = \left(\frac{d}{dx} \frac{3 \cdot x}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dx) + \left(\frac{d}{dy} \frac{3 \cdot x}{x^2 + y^2} \right) \cdot (dy)$$

$$\#11: dT = \frac{3 \cdot (y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \cdot (dx) + \left(-\frac{6 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} \right) \cdot (dy)$$

Ahora sustituimos $x=2$, $y=-1$, $dx=\pm 0.01$, $dy=\pm 0.02$ y se obtiene la cota de error que denominamos "error propagado máximo"

$$\#12: \text{error propagado máximo} = \frac{3 \cdot ((-1)^2 - 2^2)}{(2^2 + (-1)^2)^2} \cdot (\pm 0.01) + \left(-\frac{6 \cdot 2 \cdot (-1)}{(2^2 + (-1)^2)^2} \right) \cdot (\pm 0.02)$$

$$\#13: \text{error propagado máximo} = (-0.36) \cdot (\pm 0.01) + 0.48 \cdot (\pm 0.02)$$

$$\#14: \text{error propagado máximo} = \pm |0.36 \cdot 0.01 + 0.48 \cdot 0.02|$$

$$\#15: \text{error propagado máximo} = \pm 0.0132$$



Extremos de funciones de varias variables



39.- Calcular y clasificar los puntos críticos de la función $z = x^3 + 3xy^2 - 3x + 1$.

Solución:

Cálculo de los puntos críticos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 3 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \\ y = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Puntos críticos $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

$$H(f(0,1)) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} < 0; \quad (0,1) \text{ punto de silla}$$

$$H(f(0,-1)) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} < 0; \quad (0,-1) \text{ punto de silla}$$

$$H(f(1,0)) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} > 0; \quad (1,0) \text{ Mínimo}$$

$$H(f(-1,0)) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} > 0; \quad (-1,0) \text{ Máximo}$$



Extremos de funciones de varias variables



40.- Estudiar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x, y) = x^3 - 3x + (y - 1)^2$

Solución:

Para encontrar los posibles extremos relativos resolvemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ 2(y - 1) = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Entonces, los puntos críticos son $(1, 1)$ y $(-1, 1)$.

Como el dominio de f es el plano completo entonces los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ son interiores y son candidatos a ser extremos relativos o puntos de silla.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= 6x \Rightarrow \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x^2} = 6 \text{ y } \frac{\partial^2 f(-1, 1)}{\partial x^2} = -6. \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= 2 \quad \forall (x, y) \text{ y } \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 0 \quad \forall (x, y). \end{aligned}$$

$$H(1, 1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 f(1, 1)}{\partial x^2} = 6 > 0 \Rightarrow \boxed{(1, 1) \text{ es un mínimo local.}}$$

$$H(-1, 1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0 \Rightarrow \boxed{(-1, 1) \text{ es un punto de silla.}}$$



Extremos de funciones de varias variables



41.- Hallar los extremos relativos de $z = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$

Solución:

Buscaremos los puntos críticos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 2xe^{1-x^2-y^2} + (x^2 + 2y^2)(-2x)e^{1-x^2-y^2} = 0 \Rightarrow x(1 - x^2 - 2y^2) = 0 \\ 4ye^{1-x^2-y^2} + (x^2 + 2y^2)(-2y)e^{1-x^2-y^2} = 0 \Rightarrow y(2 - x^2 - 2y^2) = 0 \end{cases}$$

Obtenemos los valores:

$$(0, \pm 1); (0, 0); (\pm 1, 0)$$

Ahora las derivadas segundas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= e^{1-x^2-y^2} (2 - 10x^2 - 4y^2 + 4x^4 + 8x^2y^2) \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = e^{1-x^2-y^2} (2 - 12xy + 4x^3y + 8xy^3) \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} &= e^{1-x^2-y^2} (4 - 2x^2 - 20y^2 + 4x^2y^2 + 8y^2) \end{aligned}$$

Para cada uno de los cinco puntos construimos el hessiano de f : $H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ y

hallamos su valor:

- $H(f(0,0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4e \end{vmatrix} = 8e > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$, luego f presenta en **(0,0) un mínimo relativo** cuyo valor es $f(0,0) = 0$ (es mínimo absoluto pues $f(x, y) \geq 0$ en $(x, y) \in \mathbb{R}^2$).
- $H(f(0, \pm 1)) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = 16 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -2 < 0$, luego f presenta en **(0, ±1) un máximo relativo** cuyo valor es $f(0,1) = 2$ (máximo absoluto pues $f(x, y) \geq 0$).
- $H(f(\pm 1, 0)) = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 < 0$, luego f presenta en **(±1, 0) un punto de silla** y $f(0,0) = 1$.



Extremos de funciones de varias variables



42.- Sea la función real $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2xy$. Hallar los extremos relativos de f en el plano.

Solución:

Buscaremos los puntos críticos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \Rightarrow y = \left(-\frac{3}{2}x^2\right) \\ 3y^2 + 2x = 0 \Rightarrow 3\left(-\frac{3}{2}x^2\right)^2 + 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 0) \\ (x, y) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

Obtenemos los valores:

$$P_1(0, 0); P_2\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Ahora las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = 2; \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 6y$$

Para cada uno de los puntos construimos el hessiano de f : $H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 6y \end{vmatrix}$ y

hallamos su valor:

- $H(f(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0$ luego f presenta en **$(0, 0)$ un punto de silla** y $f(0,0) = 0$.
- $H\left(f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 12 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -2 < 0$, luego f presenta en **$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ un máximo relativo** cuyo valor es $f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$



Extremos de funciones de varias variables



43.- Sea la ecuación $2z^3 + x^3 + y^3 - 6xy + 2z + 4 = 0$. Hallar los extremos relativos de la función $F(x,y,z)=0$ definida por la ecuación dada.

Solución:

La función implícita $F(x,y,z)=0$ es polinómica en la variable z de tercer grado con al menos una raíz real y como $F'_z=6z^2+2$ positiva y en consecuencia $F(x,y,z)$ estrictamente creciente. Por lo tanto, existe un único $z=f(x,y)$.

Para encontrar los puntos críticos resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} F(x,y,z)=0 \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2z^3 + x^3 + y^3 - 6xy + 2z + 4 = 0 \\ 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_1(0,0) \\ P_2(2,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f(0,0) = -1 \\ f(2,2) = 1 \end{array} \right\}$$

Derivando $F(x,y,z(x,y))=0$, respecto de x e y

$$F'_x = 6z^2 z'_x + 3x^2 - 6y + 2z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{-3x^2 + 6y}{6z^2 + 2}$$

$$F'_y = 6z^2 z'_y + 3y^2 - 6x + 2z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = \frac{-3y^2 + 6x}{6z^2 + 2}$$

Las derivadas parciales segundas son:

$$z''_{xx} = \frac{-6x(6z^2 + 2) - (-3x^2 + 6y)12zz'_x}{(6z^2 + 2)^2} \Big|_{z'=0} = \frac{-6x}{6z^2 + 2}$$

$$z''_{xy} = \frac{6(6z^2 + 2) - (-3x^2 + 6y)12zz'_x}{(6z^2 + 2)^2} \Big|_{z'=0} = \frac{6}{6z^2 + 2}$$

$$z''_{yy} = \frac{-6y(6z^2 + 2) - (-3y^2 + 6x)12zz'_y}{(6z^2 + 2)^2} \Big|_{z'=0} = \frac{-6y}{6z^2 + 2}$$

Así pues, las matrices hessianas de $z(x,y)$ en los dos puntos críticos son:

$$H(z(0,0)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3/4 \\ 3/4 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{9}{16} < 0 \Rightarrow \text{un punto de silla}$$

$$H(z(2,2)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3/2 & 3/4 \\ 3/4 & -3/2 \end{vmatrix} = \frac{27}{16} > 0 \text{ y } z''_{xx} = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow$$

Máximo relativo ($z=1$) en el punto $(2,2)$



Extremos de funciones de varias variables



44.- Hallar el volumen máximo de un ortoedro sabiendo que la suma de las longitudes de sus aristas es 12.

Solución:

Sean x, y, z las aristas del ortoedro. El volumen es $V=xyz$ y la condición sobre las aristas $4(x+y+z)=12$, de donde resulta $z=3-x-y$, que sustituyendo en el volumen queda $V=xy(3-x-y)$.

Buscaremos los puntos críticos:

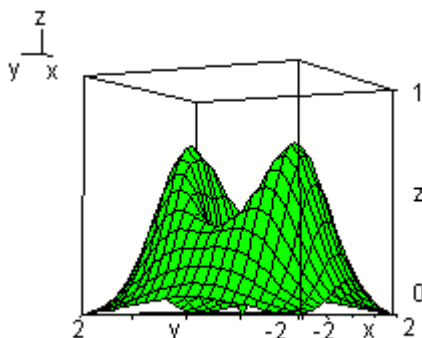
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3y - 2xy - y^2 = 0 \Rightarrow y(3 - 2x - y) = 0 \\ 3x - 2xy - x^2 = 0 \Rightarrow x(3 - 2y - x) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x, y) = (0, 0) \\ (x, y) = (1, 1) \end{array} \right.$$

Es evidente, que la solución $x=y=z=1$ nos dá el valor máximo, y por tanto el volumen será

$$\boxed{V=1}$$

45.- Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = e^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2)$ en la región $x^2 + y^2 \leq 4$.

Solución:



Estudiamos los puntos críticos de f que se encuentren dentro del recinto $x^2 + y^2 \leq 4$

Buscaremos los puntos críticos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} -2xe^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2 - 1) &= 0 \\ -2ye^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2 - 2) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x,y) = \begin{cases} (0,0) \\ (0,\pm 1) \\ (\pm 1,0) \end{cases}$$

Entonces los puntos críticos son: $P_1(0,0), P_2(0,1), P_3(0,-1), P_4(1,0), P_5(-1,0)$

Ahora las derivadas segundas:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2e^{-x^2-y^2} (2x^4 + 4x^2y^2 - 5x^2 - 2y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = 4xye^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2 - 3)$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2e^{-x^2-y^2} (4y^4 + 2x^2y^2 - x^2 - 10y^2 + 2)$$

Para cada uno de los puntos construimos el hessiano de f : $H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ y hallamos su

valor:

En $P_1(0,0)$

- $H(f(0,0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$, luego f presenta en **un mínimo**

relativo cuyo valor es $f(0,0) = 0$

En $P_2(0,1)$



Extremos de funciones de varias variables



- $H(f(0,1)) = \begin{vmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{vmatrix} = 16e^{-2} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = -2e^{-1} < 0$, luego f presenta en **un**
máximo relativo cuyo valor es $f(0,1) = 2e^{-1}$

En $P_3(0,-1)$

- $H(f(0,-1)) = \begin{vmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{vmatrix} = 16e^{-2} > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = -2e^{-1} < 0$, luego f presenta en
un máximo relativo cuyo valor es $f(0,-1) = 2e^{-1}$

En $P_4(1,0)$

- $H(f(1,0)) = \begin{vmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = -8e^{-2} < 0$, luego f presenta en **un punto de silla** y
 $f(1,0) = e^{-1}$.

En $P_5(-1,0)$

- $H(f(-1,0)) = \begin{vmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = -8e^{-2} < 0$, luego f presenta en **un punto de silla** y
 $f(-1,0) = e^{-1}$.

Observamos que en P_1 hay un mínimo relativo, en P_2 y P_3 sendos máximos relativos y en P_4 y P_5 sendos puntos de silla

Estudiamos los extremos absolutos de f en la frontera $x^2 + y^2 = 4$ aplicando extremos condicionados de Lagrange:

$$H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = e^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2) - \lambda (x^2 + y^2 - 4)$$

$$\begin{cases} H_x = -2xe^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2 - 1) - 2x\lambda = 0 \\ H_y = -2ye^{-x^2-y^2} (x^2 + 2y^2 - 2) - 2y\lambda = 0 \\ H_\lambda = -x^2 - y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\pm 2, 0) \Rightarrow f(\pm 2, 0) = 4e^{-4} \\ (0, \pm 2) \Rightarrow f(0, \pm 2) = 8e^{-4} \end{cases}$$

Tenemos como soluciones $P_6(0,2)$, $P_7(0,-2)$, $P_8(2,0)$, $P_9(-2,0)$

Comparando estos resultados con los anteriores podemos establecer que el valor **máximo absoluto es $2e^{-1}$** y se alcanza en P_2 y P_3 y el **mínimo absoluto es 0** y se alcanza en P_1

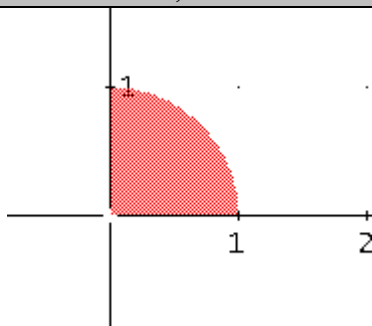
NOTA: obsérvese que para la determinación de los valores máximo y mínimo absoluto de la función en la región dada no necesitamos distinguir qué puntos críticos (obtenidos en el interior de la región) son extremos relativos, solo necesitamos calcular el valor de f en todos los puntos críticos y comparar dicho valor con el de los extremos en la frontera



Extremos de funciones de varias variables



46.- Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = \frac{4xy}{(x^2+1)(y^2+1)}$ en la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$



Estudio de extremos en el interior

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \frac{4y(1-x^2)}{(x^2+1)(y^2+1)} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= \frac{4x(1-y^2)}{(x^2+1)(y^2+1)} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} y(1-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \\ x(1-y^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \end{cases}$$

Salvo el (0,0) el resto de los puntos queda fuera del recinto

Estudiamos qué pasa en la frontera

En $x=0$ $f(0,y)=0$

En $y=0$ $f(x,0)=0$

En el cuadrante $x \geq 0, y \geq 0$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, despejamos y

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4(\pm\sqrt{1-x^2})(1-x^2)}{(x^2+1)((\pm\sqrt{1-x^2})^2+1)} \right) = \frac{4(2x^2-1)}{x^2(1-x^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Los puntos críticos de esta función son los que anulan a la derivada o donde ésta no existe.

Esto último ocurre en $x=\pm 1$, $x=0$ quedan fuera del recinto.

Y dentro del recinto solo está el punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Luego tenemos 3 puntos $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ y el valor de la función en ellos es:

$$f(0,0) = 0$$

$$f(1,0) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8$$

Por tanto, el **máximo de f** en la región es **8/9** y el **mínimo es 0**.



Extremos de funciones de varias variables



47.- Encontrar el máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la curva intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$

Solución:

Se trata de maximizar la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sometida a las condiciones

$$x - y + z = 1$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Construimos la función auxiliar

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = x + 2y + 3z + \lambda(x - y + z - 1) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

Si igualamos a cero las derivadas parciales de primer orden de esta función obtenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} 1 + \lambda + 2x\mu &= 0 \\ 2 - \lambda + 2y\mu &= 0 \\ 3 + \lambda &= 0 \\ x - y + z &= 1 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \right\}$$

De la tercera ecuación se obtiene $\lambda = -3$ que llevado a la primera da $2\mu x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\mu}$.

Análogamente, $5 - 2\mu y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2\mu}$

Llevado esto a la última ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{\mu^2} = 1 \Rightarrow \mu^2 = \frac{29}{4} \Rightarrow \mu = \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

De aquí $x = \mp \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow y = \pm \frac{5}{\sqrt{29}}$ y de la penúltima ecuación $z = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}$.

Los correspondientes valores de $f(x, y, z)$ son:

$$\mp \frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm \frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

De lo que se sigue, finalmente, que **el máximo de f en la curva es $3 + \sqrt{29}$**



Extremos de funciones de varias variables



48. Calcular los máximos y mínimos de : $z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

Solución

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x - 2y^2 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -4xy + 4y^3 - 5y^4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

De la primera se obtiene $x = y^2$ que sustituido en la segunda,

$-4y^3 + 4y^3 - 5y^4 = 0 \Rightarrow y = 0$. Luego $x = 0$ e $y = 0$ es la única solución del sistema.

Calculemos el Hessiano en $(0, 0)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x + 12y^2 - 20y^3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4y$$

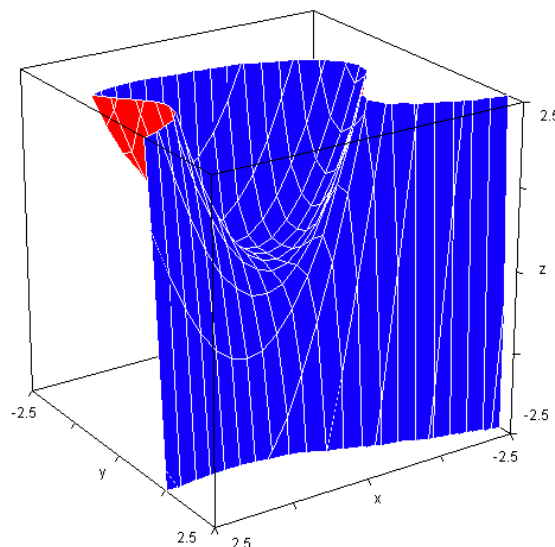
$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Caso dudoso.}$$

Incrementamos la función y estudiamos el signo del incremento en los alrededores del punto. Haciendo $\Delta x = h$, $\Delta y = k$, se tiene:

$$\Delta z = h^2 - 2hk^2 + k^4 - k^5 = (h - k^2)^2 - h^5$$

No mantiene el signo constante luego **no hay máximo ni mínimo**.

Se puede ver gráficamente lo anterior



Extremos

Valor máximo o mínimo de una función.

Máximos locales.

- La función f tiene en el punto $x=a$ un **máximo local o relativo** si existe un entorno $(a-h, a+h)$ de a tal que para todo $x \neq a$ del entorno se verifica:
$$f(x) < f(a) \text{ resulta } f(x-h) < f(a) > f(x+h).$$

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)<0$, entonces $(a, f(a))$ es un **máximo local**

También pueden existir **extremos** (máximos y mínimos) donde no es derivable la función.

- Se dice que f tiene un **máximo relativo** en un punto $(x_0, y_0) \in A$ cuando
$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \text{ perteneciente a un entorno de } (x_0, y_0).$$
- Máximo Absoluto** es el mayor de los máximos locales o relativos.

Mínimos locales

- La función $y=f(x)$ tiene en el punto $x=a$ un **mínimo relativo** si existe un entorno $(a-h, a+h)$ de a tal que para todo $x \neq a$ del entorno se verifica: $f(x) > f(a)$
$$\text{resulta } f(x-h) > f(a) < f(x+h).$$

Si $f'(a)=0$ y $f''(a)>0$, entonces $(a, f(a))$ es un **mínimo local**

- Se dice que $z=f(x, y)$ tiene un **mínimo relativo** en un punto $(x_0, y_0) \in A$ cuando
$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \text{ perteneciente a un entorno de } (x_0, y_0).$$

También pueden existir **extremos** (máximos y mínimos) donde no es derivable la función.

- Mínimo Absoluto** es el menor de los mínimos locales o relativos.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Sea g una función de dos variables continuamente diferenciable en un subconjunto del dominio de f .

Si (x_0, y_0) hace máxima (ó mínima) a $f(x, y)$, sujeta a la condición extra $g(x, y) = 0$, entonces

$\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ y $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ son colineales, es decir, de igual dirección. En consecuencia, existe un escalar λ tal que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0)$.

Forma práctica de cálculo en el método de los multiplicadores de Lagrange

Para maximizar ó minimizar una función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$, se construye la función auxiliar $H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$.

Luego se hallan los valores x , y , λ para los cuales son nulas las derivadas parciales de H :

$$H_x = 0, \quad H_y = 0, \quad H_\lambda = 0.$$

Estos requisitos son equivalentes a los formulados anteriormente ya que:

$$H_x = f_x - \lambda g_x = 0 \quad \text{ó bien} \quad f_x = \lambda g_x$$

$$H_y = f_y - \lambda g_y = 0 \quad \text{ó bien} \quad f_y = \lambda g_y$$

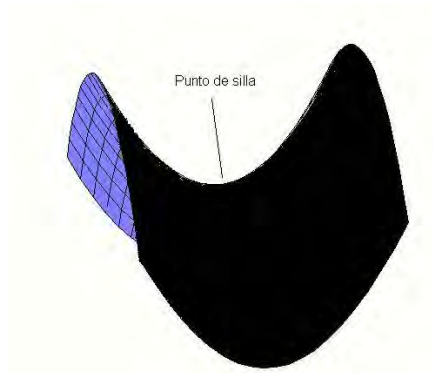
$$H_\lambda = -g(x, y) = 0 \quad \text{ó bien} \quad g(x, y) = 0$$

Las primeras dos ecuaciones dan $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, y la última $g(x, y) = 0$.

Punto de silla

Punto $P(x_0, y_0)$ de la función $z=f(x, y)$ que no corresponde ni a máximo ni a mínimo pues crece en unas direcciones y decrece en otras. Se cumple

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$$



Teorema de las derivadas mixtas, o de Schwarz.

Si la función $z=f(x,y)$ y sus derivadas parciales f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} , están definidas y son continuas en un entorno de un punto (x_0, y_0) , entonces se verifica que:

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)}$$

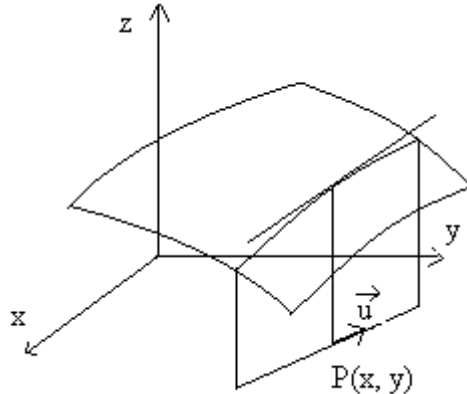
Punto crítico

En general son los valores que anulan la derivada o derivadas o simplemente no existen.

- Curva en forma paramétrica: valores del parámetro t que anulan al menos una de las derivadas $x'(t)$ o $y'(t)$, o bien alguna de ellas no está definida en t .
- En una función real de dos variables reales: puntos donde las derivadas parciales valen cero o no existen. Dichos puntos se llaman **puntos críticos o estacionarios de f** .

Derivadas parciales

Sea $z=f(x,y)$ una función definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{P}=(x,y) \in D$.



- Si $\vec{u}=(1,0)=\vec{i}$, se denomina simplemente *derivada parcial de f respecto de la variable x* . Se designa $\mathbf{f}_x(\mathbf{P})$, o bien, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(\mathbf{P})$. Es decir:

$$\mathbf{f}_x(\mathbf{P}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}(\mathbf{P}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{P} + h(1,0)) - \mathbf{f}(\mathbf{P})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(x+h, y) - \mathbf{f}(x, y)}{h}.$$

- Análogamente si $\vec{u}=(0,1)=\vec{j}$, se denomina *derivada parcial de f respecto de la variable y* . Se designa $\mathbf{f}_y(\mathbf{P})$, o bien, $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}(\mathbf{P})$. Es decir:

$$\mathbf{f}_y(\mathbf{P}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}(\mathbf{P}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{P} + h(0,1)) - \mathbf{f}(\mathbf{P})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(x, y+h) - \mathbf{f}(x, y)}{h}.$$

Derivadas parciales de orden superior

Sea la función $z=f(x,y)$. Si existen las derivadas parciales en todo su dominio, o al menos en una parte de él, pueden definirse las funciones $\mathbf{f}_x, \mathbf{f}_y$, donde existan, como funciones de x e y . Se obtienen así *cuatro derivadas parciales de segundo orden* que designaremos:

- $(\mathbf{f}_x)_x = \mathbf{f}_{xx}$, o bien, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2}$.
- $(\mathbf{f}_y)_x = \mathbf{f}_{yx}$, o bien, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x \partial y}$.
- $(\mathbf{f}_x)_y = \mathbf{f}_{xy}$, o bien, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y \partial x}$.
- $(\mathbf{f}_y)_y = \mathbf{f}_{yy}$, o bien, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2}$.

Hessiano de f

Sea $z=f(x,y)$ una función definida en $D \subset \mathbf{R}^2$ y $P(x_0, y_0) \in D$. Supongamos que f tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas en D y que $P(x_0, y_0)$ es un punto crítico de f , es decir $f'_x(x_0, y_0)=0$ y $f'_y(x_0, y_0)=0$, entonces se verifica que:

1º) f tiene un **máximo** en $P(x_0, y_0)$ si:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ y } \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

2º) f tiene un **mínimo** en $P(x_0, y_0)$ si:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ y } \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

3º) f no tiene ni máximo ni mínimo en $P(x_0, y_0)$ pues crece en unas direcciones y decrece en otras, diremos que f presenta **un punto de silla**, si:

$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$$

4º) Si $\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0$, entonces no podemos asegurar que exista o no extremo en

f . Será preciso realizar un estudio más detallado.

El **hessiano** es el determinante de la matriz hessiana:

$$H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ para la función } z=f(x,y)$$

También se dice **discriminante de f**.

Curva de nivel

Dada la función $z=f(x,y)$ y una constante c . Una curva de nivel es el lugar geométrico de los puntos del plano para los cuales $f(x,y)=c$.

Las reglas de la cadena

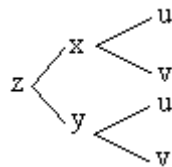
1. Sea una función $z=f(x,y)$ que tiene derivadas parciales continuas f_x, f_y , en (x,y) y sean dos funciones $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ diferenciables en t . Entonces la función compuesta

$z = f(x(t), y(t))$ es diferenciable en t y se verifica que:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \vec{\nabla} f(x(t), y(t)) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)}$$

2. Supongamos ahora una función $z=f(x,y)$ que tiene derivadas parciales continuas f_x, f_y , en (x,y) y sean dos funciones $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$. La función compuesta

$z = f(x(u, v), y(u, v))$ es una función de u y v en los puntos donde está definida, verificándose además que si x e y tienen derivadas parciales continuas respecto de u y v , entonces existen las derivadas parciales de f respecto de u y v que vienen dadas por las expresiones:



$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}}$$

De manera análoga se podrían definir las reglas de la cadena para funciones de tres o más variables.