Derivadas e Integrales de funciones vectoriales
Vectores Tangente, Unitario, Normal y Binomial

Henry R Moncada

universidad nacional tecnológica de lima sur

September 3, 2024

Outline

Derivadas de Funciones Vectoriales

Consideremos una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$

La derivada $\mathbf{r}'(t)$ se define como:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

Ejemplo

Para calcular $\mathbf{r}'(t)$, derivamos cada componente:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \sin(t) \\ e^t \end{bmatrix}$$

Derivadas de Funciones Vectoriales

Consideremos una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$

La derivada $\mathbf{r}'(t)$ se define como:

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

Ejemplo

Para calcular $\mathbf{r}'(t)$, derivamos cada componente:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \sin(t) \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} x'(t) = \dfrac{d}{dt}(t^2) = 2t, \\ y'(t) = \dfrac{d}{dt}(\sin(t)) = \cos(t), \\ z'(t) = \dfrac{d}{dt}(e^t) = e^t. \end{cases}$$

Por lo tanto, la derivada es:

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ \cos(t) \\ e^t \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1

Problema: Encuentra la derivada de $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3, t^4 \rangle$.
Solución:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, 3t^2, 4t^3 \rangle.$$

Ejemplo 2

Problema: Encuentra la derivada de $\mathbf{r}(t) = \langle \sin(t), \cos(t), e^t \rangle$.
Solución:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle \cos(t), -\sin(t), e^t \rangle.$$

Ejemplo 3

Problema: Encuentra la derivada de $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, \ln(t), t^{-1} \rangle$.
Solución:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 2e^{2t}, \frac{1}{t}, -t^{-2} \rangle.$$

Ejemplo 4

Problema: Encuentra la derivada de $\mathbf{r}(t) = \langle \tan(t), \sec(t), t^5 \rangle$.
Solución:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle \sec^2(t), \sec(t)\tan(t), 5t^4 \rangle.$$

Ejemplo 5

Problema: Encuentra la derivada de $\mathbf{r}(t) = \langle t\sin(t), t^2\cos(t), t^3 \rangle$.
Solución:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle \sin(t) + t\cos(t), 2t\cos(t) - t^2\sin(t), 3t^2 \rangle.$$

Ejemplo 6

Problema: Encuentra la derivada de $\mathbf{r}(t) = \langle \ln(t), t^2e^t, \arctan(t) \rangle$.
Solución:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle \frac{1}{t}, 2te^t + t^2e^t, \frac{1}{1+t^2} \rangle.$$

Integrales de Funciones Vectoriales

Definición: La integral de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt, \int_a^b z(t)\,dt \right)$$

La integral de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int x(t)\,dt \\ \int y(t)\,dt \\ \int z(t)\,dt \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \sin(t) \\ e^t \end{bmatrix}$$

Integrales de Funciones Vectoriales

Definición: La integral de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ en el intervalo $[a, b]$ es:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt, \int_a^b y(t)\,dt, \int_a^b z(t)\,dt\right)$$

La integral de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int x(t)\,dt \\ \int y(t)\,dt \\ \int z(t)\,dt \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ \sin(t) \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \frac{t^3}{3} + C_1 \\ -\cos(t) + C_2 \\ e^t + C_3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle t^2, \sin(t), e^t \rangle$ en el intervalo $[0, 1]$.
Solución:

Ejemplos

Ejemplo 1

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle t^2, \sin(t), e^t \rangle$ en el intervalo $[0, 1]$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbf{F}(t)\, dt &= \int_0^1 \langle t^2, \sin(t), e^t \rangle\, dt \\
&= \left\langle \int_0^1 t^2\, dt, \int_0^1 \sin(t)\, dt, \int_0^1 e^t\, dt \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{3}, 1 - \cos(1), e - 1 \right\rangle
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle 3t, \cos(2t), \ln(t+1) \rangle$ en el intervalo $[0, 2]$.
Solución:

Ejemplos

Ejemplo 1

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle t^2, \sin(t), e^t \rangle$ en el intervalo $[0, 1]$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mathbf{F}(t)\, dt &= \int_0^1 \langle t^2, \sin(t), e^t \rangle\, dt \\
&= \left\langle \int_0^1 t^2\, dt, \int_0^1 \sin(t)\, dt, \int_0^1 e^t\, dt \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{3}, 1 - \cos(1), e - 1 \right\rangle
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle 3t, \cos(2t), \ln(t+1) \rangle$ en el intervalo $[0, 2]$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \mathbf{F}(t)\, dt &= \int_0^2 \langle 3t, \cos(2t), \ln(t+1) \rangle\, dt \\
&= \left\langle \int_0^2 3t\, dt, \int_0^2 \cos(2t)\, dt, \int_0^2 \ln(t+1)\, dt \right\rangle \\
&= \left\langle 6, \frac{\sin(4)}{2}, 2\ln(3) - 2 \right\rangle
\end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo 3

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle t^3, \tan(t), \sqrt{t+1} \rangle$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.
Solución:

Ejemplos

Ejemplo 3

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle t^3, \tan(t), \sqrt{t+1}\rangle$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.
Solución:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \mathbf{F}(t)\,dt &= \int_0^{\pi/4} \langle t^3, \tan(t), \sqrt{t+1}\rangle\,dt \\ &= \left\langle \int_0^{\pi/4} t^3\,dt, \int_0^{\pi/4} \tan(t)\,dt, \int_0^{\pi/4} \sqrt{t+1}\,dt \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\pi^4}{1024}, \ln(\sqrt{2}), \frac{4(\sqrt{5}-1)}{3} - \frac{\pi}{6} \right\rangle\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle e^{-t}, \sin(3t), \cosh(t)\rangle$ en el intervalo $[0, 1]$.
Solución:

Ejemplos

Ejemplo 3

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle t^3, \tan(t), \sqrt{t+1}\rangle$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.
Solución:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \mathbf{F}(t)\,dt &= \int_0^{\pi/4} \langle t^3, \tan(t), \sqrt{t+1}\rangle\,dt \\ &= \left\langle \int_0^{\pi/4} t^3\,dt, \int_0^{\pi/4} \tan(t)\,dt, \int_0^{\pi/4} \sqrt{t+1}\,dt \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\pi^4}{1024}, \ln(\sqrt{2}), \frac{4(\sqrt{5}-1)}{3} - \frac{\pi}{6} \right\rangle\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle e^{-t}, \sin(3t), \cosh(t)\rangle$ en el intervalo $[0, 1]$.
Solución:

$$\begin{aligned}\int_0^{1} \mathbf{F}(t)\,dt &= \int_0^{1} \langle e^{-t}, \sin(3t), \cosh(t)\rangle\,dt \\ &= \left\langle \int_0^{1} e^{-t}\,dt, \int_0^{1} \sin(3t)\,dt, \int_0^{1} \cosh(t)\,dt \right\rangle \\ &= \left\langle 1 - \frac{1}{e}, \frac{1-\cos(3)}{3}, \sinh(1) \right\rangle\end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo 5

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle \sin^2(t), \cos^2(t), t^2 \rangle$ en el intervalo $[0, \pi]$.
Solución:

Ejemplos

Ejemplo 5

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle \sin^2(t), \cos^2(t), t^2 \rangle$ en el intervalo $[0, \pi]$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \mathbf{F}(t)\, dt &= \int_0^\pi \langle \sin^2(t), \cos^2(t), t^2 \rangle \, dt \\
&= \left\langle \int_0^\pi \sin^2(t)\, dt, \int_0^\pi \cos^2(t)\, dt, \int_0^\pi t^2 \, dt \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi^3}{3} \right\rangle
\end{aligned}$$

Ejemplo 6

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle \frac{1}{t+1}, \sqrt{t}, t^5 \rangle$ en el intervalo $[1, 2]$.
Solución:

Ejemplos

Ejemplo 5

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle \sin^2(t), \cos^2(t), t^2 \rangle$ en el intervalo $[0, \pi]$.
Solución:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \mathbf{F}(t)\,dt &= \int_0^\pi \langle \sin^2(t), \cos^2(t), t^2 \rangle\,dt \\ &= \left\langle \int_0^\pi \sin^2(t)\,dt, \int_0^\pi \cos^2(t)\,dt, \int_0^\pi t^2\,dt \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi^3}{3} \right\rangle\end{aligned}$$

Ejemplo 6

Calcular la integral de la función vectorial $\mathbf{F}(t) = \langle \frac{1}{t+1}, \sqrt{t}, t^5 \rangle$ en el intervalo $[1, 2]$.
Solución:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \mathbf{F}(t)\,dt &= \int_1^2 \langle \frac{1}{t+1}, \sqrt{t}, t^5 \rangle\,dt \\ &= \left\langle \int_1^2 \frac{1}{t+1}\,dt, \int_1^2 \sqrt{t}\,dt, \int_1^2 t^5\,dt \right\rangle \\ &= \left\langle \ln(3/2), \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1), \frac{31}{6} \right\rangle\end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo 7

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \sin(t) \rangle$$

Calcular $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\, dt$.
Solución:

Ejemplos

Ejemplo 7

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \sin(t) \rangle$$

Calcular $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\, dt$.

Solución:
Para calcular $\int_0^1 \mathbf{r}(t)\, dt$, integramos cada componente:

$$\int_0^1 t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 t^2\, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int_0^1 \sin(t)\, dt = [-\cos(t)]_0^1 = -\cos(1) + 1.$$

Por lo tanto, la integral es:

$$\int_0^1 \mathbf{r}(t)\, dt = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\cos(1) + 1\right).$$

Vectores Unitarios

Dado un espacio tridimensional y una curva $\mathbf{r}(t)$, definimos los siguientes vectores unitarios:

- **Vector Tangente:** Dado un vector de posición $\mathbf{r}(t)$, el vector tangente $\mathbf{T}(t)$ es $\mathbf{r}'(t)$.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

- **Vector Unitario Tangente:** $(\mathbf{T}(t))$: Es el vector tangente a la curva en un punto dado, normalizado. Se define como:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

- **Vector Normal Unitario** $(\mathbf{N}(t))$: Es el vector normal a la curva, que señala hacia el cambio de la dirección del vector tangente. Se define como:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

- **Vector Binormal Unitario** $(\mathbf{B}(t))$: Es el vector perpendicular tanto a $\mathbf{T}(t)$ como a $\mathbf{N}(t)$, y se obtiene mediante el producto cruzado:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Ejemplos

Ejemplo 2

Para $\mathbf{r}(t) = (t, \sin(t), \cos(t))$, tenemos:

$$\mathbf{r}'(t) = (1, \cos(t), -\sin(t))$$

Solución: La magnitud de $\mathbf{r}'(t)$ es:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1^2 + \cos^2(t) + (-\sin(t))^2} = \sqrt{1 + \cos^2(t) + \sin^2(t)} = \sqrt{2}$$

Así, el vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \cos(t), -\sin(t))$$

El vector normal unitario $\mathbf{N}(t)$ es:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\sin(t), -\cos(t))$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \sqrt{0^2 + (-\sin(t))^2 + (-\cos(t))^2} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\sin(t), -\cos(t))$$

El vector binormal unitario $\mathbf{B}(t)$ se obtiene mediante el producto cruz de $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Ejemplos

Ejemplo 3

Sea la curva paramétrica

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3, t \rangle$$

Solución:

- **Calcular el vector tangente :** $\mathbf{T}(t)$.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left\langle 2t, 3t^2, 1 \right\rangle$$

- **Cálculo del Vector Unitario Tangente :** Calcular el vector unitario tangente $\mathbf{T}_u(t)$.

$$\mathbf{T}_u(t) = \frac{\mathbf{T}(t)}{|\mathbf{T}(t)|} = \frac{\left\langle 2t, 3t^2, 1 \right\rangle}{\sqrt{4t^2 + 9t^4 + 1}}$$

- **Cálculo del Vector Normal :** Utilizando el resultado del ejemplo anterior, calcular el vector normal $\mathbf{N}(t)$.

$$\mathbf{N}(t) = \frac{d\mathbf{T}_u(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\left\langle 2t, 3t^2, 1 \right\rangle}{\sqrt{4t^2 + 9t^4 + 1}}\right)$$

- **Cálculo del Vector Binomial :** Calcular el vector binomial $\mathbf{B}(t)$ como el producto cruzado de $\mathbf{T}_u(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

Solución:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}_u(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Ejemplos

Ejemplo 4: Cálculo de Vectores para una Parábola en el Espacio

Curva: $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, 0\rangle$

- **Vector Tangente:** $\mathbf{T}(t) = \langle 1, 2t, 0\rangle$
- **Vector Unitario Tangente:** $\mathbf{T_u}(t) = \frac{\langle 1,2t,0\rangle}{\sqrt{1+4t^2}}$
- **Vector Normal:** Deriva y normaliza $\mathbf{T_u}(t)$
- **Vector Binomial:** $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T_u}(t) \times \mathbf{N_u}(t)$

Ejemplo 5: Cálculo de Vectores para una Espiral

Curva: $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos(t), t\sin(t), t\rangle$

- **Vector Tangente:** $\mathbf{T}(t) = \langle \cos(t) - t\sin(t), \sin(t) + t\cos(t), 1\rangle$
- **Vector Unitario Tangente:** $\mathbf{T_u}(t) = \frac{\mathbf{T}(t)}{\|\mathbf{T}(t)\|}$
- **Vector Normal:** Deriva y normaliza $\mathbf{T_u}(t)$
- **Vector Binomial:** $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T_u}(t) \times \mathbf{N_u}(t)$

Ejemplos

Ejemplo 6: Cálculo de Vectores para una Curva en el Espacio

Curva: $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{-t}, t^2 \rangle$

- **Vector Tangente:** $\mathbf{T}(t) = \langle e^t, -e^{-t}, 2t \rangle$
- **Vector Unitario Tangente:** $\mathbf{T_u}(t) = \frac{\mathbf{T}(t)}{\|\mathbf{T}(t)\|}$
- **Vector Normal:** Deriva y normaliza $\mathbf{T_u}(t)$
- **Vector Binomial:** $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T_u}(t) \times \mathbf{N_u}(t)$

Ejemplo 7: Cálculo de Vectores para una Circunferencia

Curva: $\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), 0 \rangle$

- **Vector Tangente:** $\mathbf{T}(t) = \langle -\sin(t), \cos(t), 0 \rangle$
- **Vector Unitario Tangente:** $\mathbf{T_u}(t) = \frac{\mathbf{T}(t)}{\|\mathbf{T}(t)\|}$
- **Vector Normal:** Deriva y normaliza $\mathbf{T_u}(t)$
- **Vector Binomial:** $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T_u}(t) \times \mathbf{N_u}(t)$

Conclusión

Las derivadas e integral de funciones vectoriales son herramientas poderosas para analizar movimientos en el espacio. Cada componente de la función vectorial se deriva e integra de manera independiente.