Cálculo de Varias Variables
Práctica Calificada 3

15 de Noviembre 2024

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

1. (4 points) **Planos tangentes y aproximaciones lineales:** Determine una ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

   (A) $\mathbf{z} = 2x^2 + y^2 - 5y, \quad (1, 2, -4)$

   (B) $\mathbf{z} = e^{x-y}, \quad (2, 2, 1)$

   Solución:

   (A) $z = 2x^2 + y^2 - 5y, \quad (1, 2, -4)$

   Encontrar las derivadas parciales en x y y.

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= 2x^2 + y^2 - 5y \\
f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y^2 - 5y) = 4x \\
f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y^2 - 5y) = 2y - 5
\end{aligned}
$$

   Evaluar las derivadas parciales en el punto $(1, 2)$.

$$
\begin{aligned}
f_x(1, 2) &= 4 \cdot 1 = 4 \\
f_y(1, 2) &= 2 \cdot 2 - 5 = -1
\end{aligned}
$$

   Usar la fórmula del plano tangente:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

   Sustituyendo $f(1, 2) = -4$, $f_x(1, 2) = 4$, y $f_y(1, 2) = -1$:

$$z = -4 + 4(x - 1) - (y - 2) = 4x - y - 6$$

   La ecuación del plano tangente es:

$$z = 4x - y - 6$$

   (B) $z = e^{x-y}, \quad (2, 2, 1)$

   Encontrar las derivadas parciales en x y y.

$$
\begin{aligned}
f(x, y) &= e^{x-y} \\
f_x(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{x-y}) = e^{x-y} \\
f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{x-y}) = -e^{x-y}
\end{aligned}
$$

   Evaluar las derivadas parciales en el punto $(2, 2)$.

$$
\begin{aligned}
f_x(2, 2) &= e^{2-2} = 1 \\
f_y(2, 2) &= -e^{2-2} = -1
\end{aligned}
$$

Usar la fórmula del plano tangente:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Sustituyendo $f(2,2) = 1$, $f_x(2,2) = 1$, y $f_y(2,2) = -1$:

$$z = 1 + 1(x - 2) - 1(y - 2) = x - y + 1$$

La ecuación del plano tangente es:

$$z = x - y + 1$$

2. (4 points) **La regla de la cadena:** Use la regla de la cadena para determinar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$.

(A) $\mathbf{z} = (x - y)^5, \quad x = s^2 t, \quad y = st^2$

(B) $\mathbf{z} = \ln(3x + 2y), \quad x = s \sin t, \quad y = t \cos s$

Solución:

(A) Para calcular $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$, utilizaremos la regla de la cadena. Primero, hallamos las derivadas parciales de z con respecto a x y y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5(x - y)^4 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -5(x - y)^4$$

Ahora, calculemos las derivadas parciales de x y y con respecto a s y t:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2st, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = s^2$$
$$\frac{\partial y}{\partial s} = t^2, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 2st$$

Luego, aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = 5(x - y)^4 \cdot (2st) - 5(x - y)^4 \cdot (t^2) = 5(x - y)^4(2st - t^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 5(x - y)^4 \cdot (s^2) - 5(x - y)^4 \cdot (2st) = 5(x - y)^4(s^2 - 2st)$$

(B) Primero, derivamos z con respecto a x y y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{3x + 2y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{3x + 2y}$$

Ahora, derivamos x y y con respecto a s y t:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sin t, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = s \cos t$$
$$\frac{\partial y}{\partial s} = -t \sin s, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \cos s$$

Aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{3}{3x+2y} \cdot (\sin t) + \frac{2}{3x+2y} \cdot (-t \sin s)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Sustituyendo:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{3}{3x+2y} \cdot (s \cos t) + \frac{2}{3x+2y} \cdot (\cos s)$$

3. (4 points) **Derivadas direccionales y el vector gradiente :**

1. Determine el gradiente de $\mathbf{f}$.
2. Evalúe el gradiente en el punto $\mathbf{P}$.
3. Determine la razón de cambio de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{P}$ en la dirección del vector $\mathbf{u}$.

(A) $\mathbf{f(x, y)} = \frac{x}{y}, \quad \mathbf{P}(2, 1), \quad \mathbf{u} = \frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath},$

(B) $\mathbf{f(x, y)} = xe^{2yz}, \quad \mathbf{P}(3, 0, 2), \quad \mathbf{u} = \langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle$

Solución:

(A) $\mathbf{f(x, y)} = \frac{x}{y}, \quad \mathbf{P}(2, 1), \quad \mathbf{u} = \frac{3}{5}\hat{\imath} + \frac{4}{5}\hat{\jmath}$

(a) **Cálculo del gradiente $\nabla \mathbf{f}$:**

$$\mathbf{f}(x, y) = \frac{x}{y}$$

Derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

Entonces, el gradiente es:

$$\nabla \mathbf{f} = \left\langle \frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right\rangle$$

(b) **Evaluación del gradiente en $\mathbf{P}(2, 1)$:**

$$\nabla \mathbf{f}(2, 1) = \left\langle \frac{1}{1}, -\frac{2}{1^2} \right\rangle = \langle 1, -2 \rangle$$

(c) **Razón de cambio de f en la dirección de u**:

$$D_{\mathbf{u}}\mathbf{f} = \nabla \mathbf{f}(2, 1) \cdot \mathbf{u} = \langle 1, -2 \rangle \cdot \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle = 1 \cdot \frac{3}{5} + (-2) \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -\frac{5}{5} = -1$$

(B) $\mathbf{f(x, y, z)} = xe^{2yz}, \quad \mathbf{P}(3, 0, 2), \quad \mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

(a) **Cálculo del gradiente $\nabla \mathbf{f}$:**

$$\mathbf{f}(x, y, z) = xe^{2yz}$$

Derivadas parciales:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = e^{2yz}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = 2xze^{2yz}, \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z} = 2xye^{2yz}$$

Entonces, el gradiente es:

$$\nabla \mathbf{f} = \left\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz} \right\rangle$$

(b) **Evaluación del gradiente en $\mathbf{P}(3,0,2)$:**

$$\nabla \mathbf{f}(3,0,2) = \left\langle e^{2\cdot 0\cdot 2}, 2\cdot 3\cdot 2\cdot e^{2\cdot 0\cdot 2}, 2\cdot 3\cdot 0\cdot e^{2\cdot 0\cdot 2}\right\rangle = \langle 1,12,0\rangle$$

(c) **Razón de cambio de f en la dirección de u:**

$$D_{\mathbf{u}}\mathbf{f} = \nabla \mathbf{f}(3,0,2)\cdot \mathbf{u} = \langle 1,12,0\rangle \cdot \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle = 1\cdot \frac{2}{3} + 12\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 0\cdot \frac{1}{3} = -\frac{22}{3}$$

4. (4 points) **Valores máximos y mínimos:** Determine los valores máximos y mínimos locales y el punto o puntos silla de la función. Graficación tridimensional, grafique la función con un dominio y punto de vista que revelen todos los aspectos importantes de la función.

(A) $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x^3y + 12x^2 - 8y$,

(B) $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = y(e^x - 1)$,

Solución:

(A) Para hallar los puntos críticos, calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$ con respecto a x e y y las igualamos a cero. Para la función (A):

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3y + 12x^2 - 8y) = 3x^2y + 24x = 0 \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3y + 12x^2 - 8y) = x^3 - 8 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$, obtenemos los posibles puntos críticos.

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= 0 \Rightarrow x = 2 \\ 3x^2y + 24x &= 0 \Rightarrow y = -4 \end{aligned}$$

el posible puntos crítico $(x,y) = (2,-4)$. Utilizamos la prueba de la derivada segunda para determinar la naturaleza de cada punto crítico. Para cada función, calculamos las segundas derivadas parciales:

$$f_{xx}(x,y), \quad f_{yy}(x,y), \quad f_{xy}(x,y)$$

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^3y + 12x^2 - 8y) = 6xy + 24 \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^3y + 12x^2 - 8y) = 0 \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(x^3y + 12x^2 - 8y) = 3x^2 \\ f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x^3y + 12x^2 - 8y) = 3x^2 \end{aligned}$$

Luego evaluamos el determinante de la matriz Hessiana:

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

- Si $D(x,y) > 0$ y $f_{xx}(x,y) > 0$, entonces (x,y) es un punto de mínimo local.
- Si $D(x,y) > 0$ y $f_{xx}(x,y) < 0$, entonces (x,y) es un punto de máximo local.
- Si $D(x,y) < 0$, entonces (x,y) es un punto silla.
- Si $D(x,y) = 0$, la prueba es inconclusa.

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 6xy+24 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix}_{(x,y)=(2,-4)} = 0 - (3x^2)^2 = -9x^4\Big|_{(x,y)=(2,-4)} = -9(2)^4 = -144 < 0$$

$$f_{xx}(x,y) = 6xy + 24|_{(x,y)=(2,-4)} = 6(2)(-4) + 24 = -24 < 0$$

Por lo tanto, $D(x,y) < 0$, entonces $(x,y) = (2,-4)$ es un punto silla.

(B) Para hallar los puntos críticos, calculamos las derivadas parciales de $f(x,y)$ con respecto a x e y y las igualamos a cero. Para la función (B):

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y(e^x-1)\right) = ye^x = 0 \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y(e^x-1)\right) = e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones $f_x(x,y) = 0$ y $f_y(x,y) = 0$, obtenemos los posibles puntos críticos.

$$\begin{aligned} ye^x &= 0 \Rightarrow y = 0 \\ e^x - 1 &= 0 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

el posible puntos crítico $(x,y) = (0,0)$. Utilizamos la prueba de la derivada segunda para determinar la naturaleza de cada punto crítico. Para cada función, calculamos las segundas derivadas parciales:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(y(e^x-1)\right) = ye^x \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y(e^x-1)\right) = 0 \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(y(e^x-1)\right) = e^x \\ f_{yx}(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(y(e^x-1)\right) = e^x \end{aligned}$$

Luego evaluamos el determinante de la matriz Hessiana:

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} ye^x & e^x \\ e^x & 0 \end{vmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = 0 - (e^x)^2 = -e^{2x}\Big|_{(x,y)=(0,0)} = -1$$

$$f_{xx}(x,y) = ye^x|_{(x,y)=(0,0)} = 0$$

Por lo tanto, $D(x,y) < 0$, entonces $(x,y) = (0,0)$ es un punto silla.

Interpretación gráfica : Si tienes acceso a software de graficación tridimensional, grafica la función sobre un dominio adecuado que revele todos los aspectos importantes de la función, como los máximos, mínimos y puntos silla.

5. (4 points) **Multiplicadores de Lagrange:** Cada uno de estos problemas de valores extremos tiene una solución tanto con un valor máximo como con un valor mínimo. Use los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores extremos de la función sujeta a la restricción dada.

(A) $\mathbf{f(x,y,z)} = xy^2z; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4,$

(B) $\mathbf{f(x,y,z)} = x^2 + y^2 + z^2; \quad x^4 + y^4 + z^4 = 1,$

Solución:

(A) La función de Lagrange se define como:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = xy^2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4).$$

Calcular las derivadas parciales e igualarlas a cero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= y^2z - 2\lambda x = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2xyz - 2\lambda y = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= xy^2 - 2\lambda z = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= -(x^2 + y^2 + z^2 - 4) = 0
\end{aligned}$$

Resolver el sistema de ecuaciones. De las ecuaciones anteriores, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
y^2z - 2\lambda x &= 0 \\
2xyz - 2\lambda y &= 0 \\
xy^2 - 2\lambda z &= 0 \\
-(x^2 + y^2 + z^2 - 4) &= 0
\end{aligned}$$

$$2xyz - 2\lambda y = 2y(xz - \lambda) = 0 \Rightarrow y = 0, \quad xz = \lambda$$

Aquí procedemos a encontrar los posibles valores de x, y, z, y λ.

- Si $y = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
y^2z - 2\lambda x &= (0)^2z - 2\lambda x = 2\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0 \\
xy^2 - 2\lambda z &= x(0)^2 - 2\lambda z = -2\lambda z = 0 \Rightarrow z = 0
\end{aligned}$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

- Si $xz = \lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
y^2z - 2\lambda x &= y^2z - 2(xz)x = (y^2 - 2x^2)z = 0 \Rightarrow z = 0 \\
xy^2 - 2\lambda z &= xy^2 - 2(xz)z = x(y^2 - 2z^2) = 0 \Rightarrow x = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^2 - 2x^2 &= 0 \Rightarrow y^2 = 2x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2x^2} \\
y^2 - 2z^2 &= 0 \Rightarrow z^2 = \frac{y^2}{2} = x^2 \Rightarrow z = \pm x \\
x^2 + y^2 + z^2 - 4 &= 0 \Rightarrow x^2 + 2x^2 + x^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 1
\end{aligned}$$

$$(x, y, z) = (0, 0, 0), (1, \sqrt{2}, 1), (-1, -\sqrt{2}, -1)$$

Los valores extremos se determinan evaluando $f(x, y, z)$ en los puntos obtenidos en el paso anterior.

- Punto mínimo $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ con $f(x, y, z) = 0$
- Punto máximo: $(x, y, z) = (1, \sqrt{2}, 1)$ con $f(x, y, z) = 2$
- Punto máximo:: $(x, y, z) = (-1, -\sqrt{2}, -1)$ con $f(x, y, z) = 2$

(B) La función de Lagrange se define como:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(1 - x^4 - y^4 - z^4)$$

Calcular las derivadas parciales e igualarlas a cero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2x - 4\lambda x^3 = 0\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2y - 4\lambda y^3 = 0\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 2z - 4\lambda z^3 = 0\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 1 - x^4 - y^4 - z^4 = 0.
\end{aligned}$$

Resolver el sistema de ecuaciones. De las ecuaciones anteriores, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
2x - 4\lambda x^3 &= 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2x^2}\\
2y - 4\lambda y^3 &= 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2y^2}\\
2z - 4\lambda z^3 &= 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2z^2}\\
1 - x^4 - y^4 - z^4 &= 0
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que:

$$\lambda = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2y^2} = \frac{1}{2z^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2} \implies x^2 = y^2 = z^2.$$

Si $x = y = z$, sustituimos en la restricción:

$$1 - x^4 - y^4 - z^4 = 0 \Rightarrow 3x^4 = 1 \implies x^4 = \frac{1}{3} \implies x = \pm\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

$$(x, y, z) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$$

Aquí procedemos a encontrar los posibles valores de x, y, z, y λ. Los valores extremos se determinan evaluando $f(x, y, z)$ en los puntos obtenidos en el paso anterior. Sustituimos cada caso en $f(x, y, z)$ para calcular los valores máximos y mínimos.

- $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ con $f(x, y, z) = \frac{3}{\sqrt{3}}$
- $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ con $f(x, y, z) = \frac{3}{\sqrt{3}}$