Diapositivas: Curso de Cálculo Vectorial con GeoGebra. Integrales triples

Presentation · July 2020

DOI: 10.13140/RG.2.2.26737.10082

Jeovanny De Jesus Muentes Acevedo
Universidad Tecnológica de Bolívar

Integrales triples

Jeovanny Muentes Acevedo

Universidad Tecnológica de Bolívar

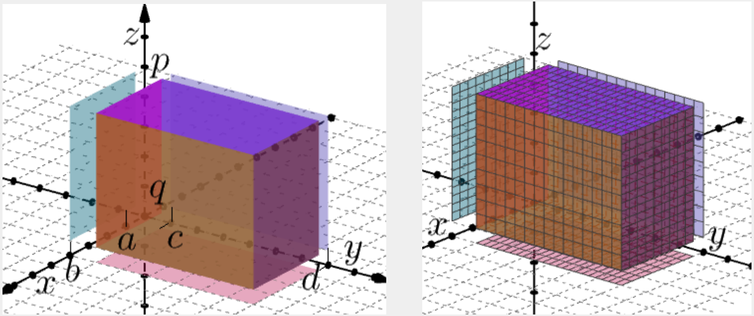
23 de abril de 2023

Definición (**Caja rectangular**)

Sean a, b, c, d, p, q números reales tales que $a < b$, $c < d$ y $p < q$. El conjunto

$$\boxed{[a, b] \times [c, d] \times [p, q] = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q\}}$$

se refiere a la caja rectangular mostrado en la siguiente figura.



(a) Caja rectangular **(b)** División

Figura 1: Caja rectangular

Sea $f : E = [a, b] \times [c, d] \times [p, q] \to \mathbb{R}$ una función continua en E.

- Divida el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos de igual longitud $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots,$ $[x_{m-1}, x_m]$, donde $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$ y llamemos por Δx la longitud de estos subintervalos ($\Delta x = \frac{b-a}{m}$).
- Divida el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos de igual longitud $[y_0, y_1], [y_1, y_2], \ldots,$ $[y_{n-1}, y_n]$, donde $c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$ y llamemos por Δy la longitud de estos subintervalos ($\Delta y = \frac{d-c}{n}$).
- Divida el intervalo $[p, q]$ en s subintervalos de igual longitud $[z_0, z_1], [z_1, z_2], \ldots,$ $[z_{s-1}, z_s]$, donde $p = z_0 < z_1 < z_2 < \cdots < z_{s-1} < z_s = q$ y llamemos por Δz la longitud de estos subintervalos ($\Delta z = \frac{q-p}{s}$).

Considere las cajas rectangulares $E_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, para cada i, j, k. Cada caja E_{ijk} tiene volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Para cada i, j, k, escoja cualquier $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in E_{ijk}$.

Tome la suma $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta x \Delta y \Delta z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{s} f(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\Delta V.$

Definición

Definimos

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)dV = \lim_{m,n,s\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} f(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)\Delta V}$$

y es llamada ***integral triple de*** f *en* $E = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$.

Teorema (**Teorema de Fubini**)

Suponga que $f(x,y,z)$ *es una función continua en una caja rectangular* $E = [a,b]\times[c,d]\times[p,q]$. *Entonces*

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)dxdydz.}$$

La integral triple nos permite hallar el volumen de un sólido E:

$$\boxed{V(E) = \iiint_E 1dV.}$$

Ejemplo (11.1.4)

Calcular $\iiint_E 24x^2yz^3dV$, *donde* $E = [-1,1] \times [0,3] \times [0,1]$.

Solución: *Tenemos que* $E = \{(x,y,z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq 1\}$. *Luego, por el Teorema de Fubini tenemos que*

$$\begin{aligned}\iiint_E 24x^2yz^3dV &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{3}\int_{0}^{1} 24x^2yz^3dzdydx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{3} 6x^2yz^4|_0^1dydx \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} 6x^2y(1)^4dydx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{3} 6x^2ydydx = \int_{-1}^{1} 3x^2y^2|_0^3dx \\ &= \int_{-1}^{1} 27x^2dx = 9x^3|_{-1}^{1} = 18.\end{aligned}$$

Integrales triples en sólidos más generales

Definición (**Sólido tipo I**)

*Decimos que E es un **sólido tipo I** si se encuentra limitado por dos gráficas de funciones que dependen de x y de y, esto es,*

$$\boxed{E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},}$$

donde g y h son funciones continuas en una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

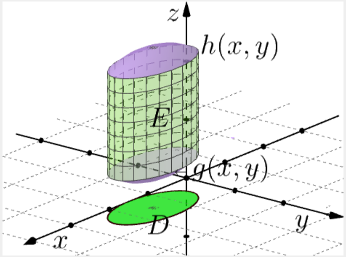


Figura 2: Sólido tipo I

Definición (**Sólidos tipo II**)

*Decimos que E es un **sólido tipo II** si es de la forma*

$$\boxed{E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, g(y, z) \leq x \leq h(y, z)\},}$$

donde g y h son funciones continuas en $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

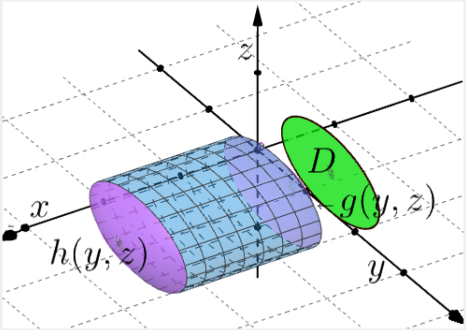


Figura 3: Sólido tipo II

Definición (**Sólidos tipo III**)

*Decimos que E es un **sólido tipo III** si es de la forma*

$$\boxed{E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, g(x, z) \le y \le h(x, z)\},}$$

donde g y h son funciones continuas en $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

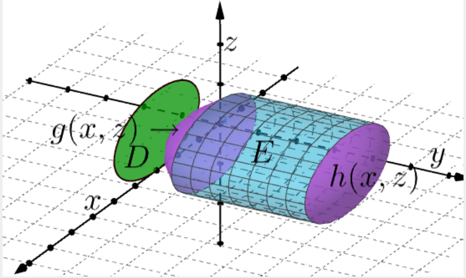


Figura 4: Sólido tipo III

Proposición (**11.2.4**)

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función continua de tres variables.

- *Si $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$ un sólido tipo I, entonces*

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z)dzdA.}$$

- *Si $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, z) \in D, g(y, z) \leq x \leq h(y, z)\}$ un sólido tipo II, entonces*

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x, y, z)dxdA.}$$

- *Si $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \in D, g(x, z) \leq y \leq h(x, z)\}$ un sólido tipo III, entonces*

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)dV = \iint_D \int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x, y, z)dydA.}$$

Ejemplo (11.2.5)

Calcular $\iiint_E x dV$, *donde* E *es el sólido que se encuentra limitado por los planos coordenados y el plano* $12x + 10y + 15z = 60$.

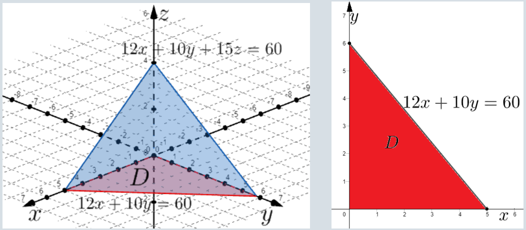


Figura 5: Sólido E

Solución: *Para graficar el plano obtenemos los puntos de intersección con cada uno de los ejes, las cuales son:* $(5, 0, 0)$, $(0, 6, 0)$ *y* $(0, 0, 4)$ *(ver Figura 5). Veamos que* E *es tipo I: note que* z *está limitada por debajo por el plano* $z = 0$ *y arriba está limitado por el plano* $12x + 10y + 15z = 60$, *esto es,* $0 \leq z \leq 4 - \frac{4x}{5} - \frac{2y}{3}$ *(el límite superior de* z *se obtiene al despejarla de la ecuación* $12x + 10y + 15z = 60$*). Veamos los límites para* x *y para* y*: considere la región* D *que se obtiene de la proyección de* E *en el plano* xy. *Entonces* D *es la región triangular que tiene como vértices los puntos* $(0, 0)$, $(5, 0)$ *y* $(0, 6)$ *(ver Figura 5).*

Ejemplo

Una ecuación para el segmento que va de $(5,0)$ *a* $(0,6)$ *es obtenida haciendo* $z=0$ *en* $12x+10y+15z=60$ *(ya que se obtiene de la intersección de los planos* $z=0$ *y* $12x+10y+15z=60$*):* $12x+10y=60$*. Como tipo I:* $D=\left\{(x,y):0\leq x\leq 5, 0\leq y\leq 6-\frac{6x}{5}\right\}$ *y así*

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in D, 0\leq z\leq 4-\frac{4x}{5}-\frac{2y}{3}\right\}.$$

Del primer ítem de la Proposición 0.8, se sigue que

$$\begin{aligned}\iiint_E xdV &= \int_0^5\int_0^{6-\frac{6x}{5}}\int_0^{4-\frac{4x}{5}-\frac{2y}{3}} xdzdydx = \int_0^5\int_0^{6-\frac{6x}{5}} x\left[z\right]_0^{4-\frac{4x}{5}-\frac{2y}{3}} dydx\\ &= \int_0^5\int_0^{6-\frac{6x}{5}} x\left(4-\frac{4x}{5}-\frac{2y}{3}\right)dydx = \int_0^5\int_0^{6-\frac{6x}{5}}\left(4x-\frac{4x^2}{5}-\frac{2xy}{3}\right)dydx\\ &= \int_0^5\left[4xy-\frac{4x^2y}{5}-\frac{xy^2}{3}\right]_0^{6-\frac{6x}{5}}dx = \int_0^5\left[12x-\frac{24x^2}{5}+\frac{12x^3}{25}\right]dx\\ &= \left[6x^2-\frac{8x^3}{5}+\frac{3x^4}{25}\right]_0^5 = 25.\end{aligned}$$

Método de sustitución para integrales triples

Supongamos que queremos calcular la integral triple de una función $f(x,y,z)$ de tres variables en un sólido E de $\mathbb{R}^3$. Sean E y B dos sólidos tal que exista una aplicación biyectiva $T : B \to E$, dada por

$$T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \quad \text{para todo } (u,v,w) \in B,$$

donde $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ y $z(u,v,w)$ son funciones de tres variables con derivadas parciales continuas. Definimos el **determinante jacobiano** de T como

$$\boxed{J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.}$$

Teorema (Método de sustitución para integrales triples)

Si $f : E \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces con las condiciones dadas anteriormente tenemos que

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)dV = \iiint_B f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))|J(u,v,w)|dudvdw.}$$

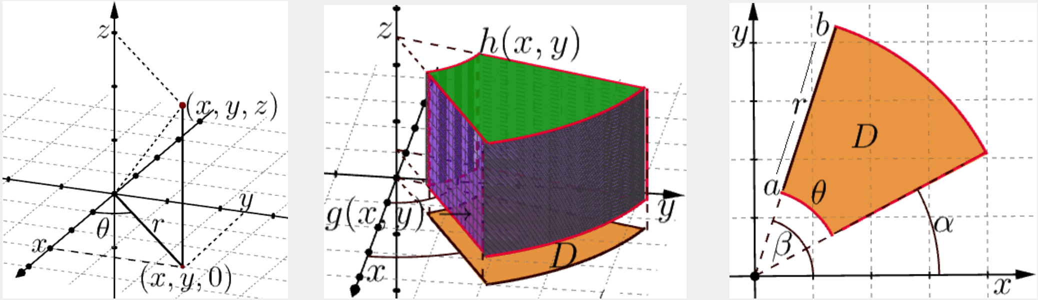
Integrales triples en sólidos en coordenadas cilíndricas

Definición (**Coordenadas cilíndricas**)

Dado $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, *tome* $r = \sqrt{x^2+y^2}$ *y* $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. *Con las sustituciones*

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\operatorname{sen}\theta \qquad z = z,}$$

la terna (r,θ,z) *es llamada* ***coordenadas cilíndricas*** *del punto* (x,y,z).



(a) Coord. cilíndricas

(b) Sólido E

(c) Región polar D

Figura 6: Sólido en coordenadas cilíndricas

Usaremos coordenadas cilíndricas si E es un sólido limitado por el gráfico de dos funciones cuyo dominio sea una región polar (Figuras 6b y 6c). Por ejemplo, si E es tipo I:

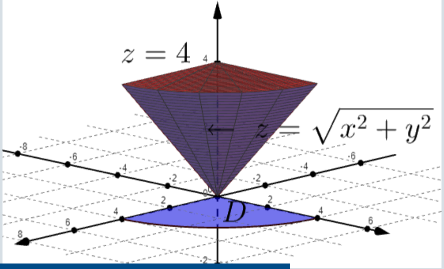
$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\},$$

donde g y h son continuas en una región polar $D = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, a \leq r \leq b\}$, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, por integración con coordenadas polares tenemos

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)dV = \int_\alpha^\beta \int_a^b \left[\int_{g(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{h(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} r f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)dz\right] drd\theta.} \tag{0.1}$$

Ejemplo (11.5.3)

Hallar el volumen del sólido que se encuentra en el primer octante limitado por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *y el plano* $z = 4$.



Ejemplo

Solución: *La intersección entre el cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *y el plano* $z = 4$ *la obtenemos igualando estas dos expresiones de* z*, esto es,* $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$*, de donde* $x^2 + y^2 = 16$*, la cual es una circunferencia de radio 4 en el plano* $z = 4$*. La proyección del sólido* E *en el plano* xy *es la región polar (por lo tanto podemos usar coordenadas cilíndricas)*

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 16\} = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq \pi/2\},$$

donde $x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta$*.* E *es tipo I: el cono* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *limita al sólido por debajo y el plano* $z = 4$ *lo limita por arriba. Así,*

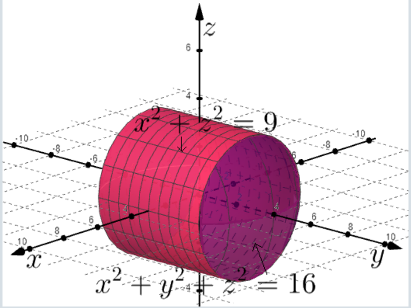
$$E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4\} = \{(r, \theta, z) : (r, \theta) \in D, r \leq z \leq 4\}.$$

De (0.1) *se sigue que*

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E 1 dV = \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_r^4 r dz d\theta dr = \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\left[z\right]_r^4 d\theta dr \\ &= \int_0^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(4 - r) d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^4 (4r - r^2) dr = \frac{\pi}{2}\left[2r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_0^4 = \frac{16}{3}\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo (11.5.4)

Hallar el volumen del sólido E que está limitado por la superficie cilíndrica $x^2 + z^2 = 9$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.



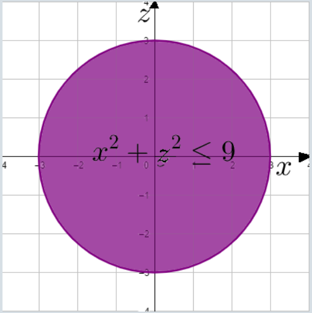


Figura 7

Solución: *E es un sólido tipo III (no es ni tipo I ni II). La proyección de E en el plano xz es la región polar (por lo tanto podemos usar coordenadas cilíndricas) $D = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 9\}$ y*

$$E = \{(x, y, z) : (x, z) \in D, -\sqrt{16 - x^2 - z^2} \leq y \leq \sqrt{16 - x^2 - z^2}\}.$$

Ejemplo

Tomando $x = r\cos\theta$, $z = r\operatorname{sen}\theta$, *tenemos que* $D = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 3, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ *y*

$$E = \{(r,\theta,z) : (r,\theta,y) \in D, -\sqrt{16-r^2} \le y \le \sqrt{16-r^2}\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E 1dV = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} r dy d\theta dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} ry|_{-\sqrt{16-r^2}}^{\sqrt{16-r^2}} d\theta dr \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 2r\sqrt{16-r^2} d\theta dr = -\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}|_0^3 dr \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{2\pi} \left[(16-3^2)^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right] dr = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} (64-7\sqrt{7}) dr = \frac{4}{3}(64-7\sqrt{7})\pi. \end{aligned}$$

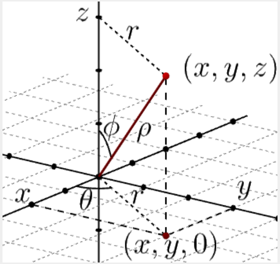
Integrales triples en sólidos en coordenadas esféricas

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sea $\phi \in [0, \pi]$ el ángulo entre $\langle x, y, z\rangle$ y el semieje positivo de z, $\theta \in [0, 2\pi]$ el ángulo entre $\langle x, y, 0\rangle$ y el semieje positivo de x, y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Note que

$$z = \rho \cos \phi.$$

Tome $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Entonces $\operatorname{sen} \phi = \frac{r}{\rho}$, y así

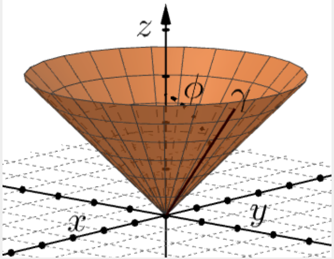
$$x = r \cos \theta = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta.$$



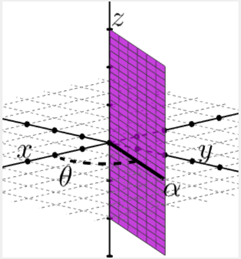
Definición (Coordenadas esféricas)

La terna (ρ, θ, ϕ) es llamada ***coordenadas esféricas*** *de (x, y, z), donde*

$$\boxed{x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \qquad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \qquad z = \rho \cos \phi.}$$



(a) Cono $\phi = \gamma$



(b) Semiplano $\theta = \alpha$

Figura 8: Coordenadas esféricas

La ecuación $\rho = a$ representa la esfera $a^2 = \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Luego, $a \leq \rho \leq b$ es el sólido comprendido entre las esferas de radio a y radio b.

Por otro lado, la ecuación $\phi = \gamma$ es el conjunto formado por los puntos cuyo vector posición forma un ángulo γ con la parte positiva del eje z. Este conjunto es la parte superior de un cono (Figura 8a): por ejemplo, $\phi = \frac{\pi}{4}$ es el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, pues de $z = \rho \cos \phi$, tenemos

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (0.2)$$

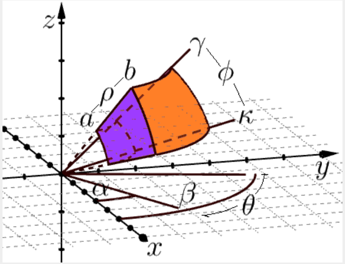
En consecuencia, $\gamma \leq \phi \leq \kappa$ es la región comprendida entre los dos conos $\phi = \gamma$ y $\phi = \kappa$.

θ es definido de la misma forma en las coordenadas esféricas que en las cilíndricas, así, la ecuación $\theta = \alpha$ representa un semiplano vertical que pasa por el origen (Figura 8b).

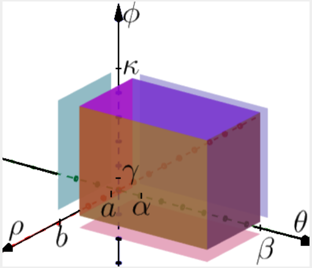
En los tres casos anteriores podemos utilizar coordenadas esféricas. Ahora, en la Figura 9a se muestra un sólido que, en coordenadas esféricas, se puede escribir como

$$\boxed{E = \{(\rho, \theta, \phi) : a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, \gamma \leq \phi \leq \kappa\}.}$$

Este sólido es una **caja rectangular en coordenadas esféricas** (ver Figura 9b).



(a) Sólido E



(b) Caja esférica

Figura 9: Sólidos en coordenadas esféricas

El determinante jacobiano de las sustituciones en coordenadas esféricas es

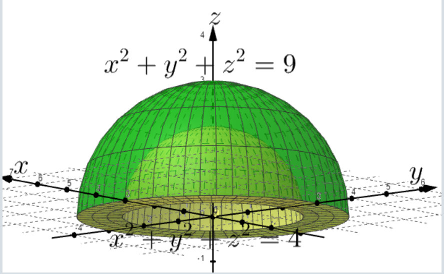
$$\boxed{J(\rho,\theta,\phi)=\rho^2\operatorname{sen}\phi.}$$

Si $f(x,y,z)$ es continua en E, entonces

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)dV=\int_\gamma^\kappa\int_\alpha^\beta\int_a^b f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta,\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\theta d\phi.}$$

Ejemplo (**11.6.3**)

Calcular $\iiint_E(x^2+y^2)dV$, donde E es el sólido que está en la parte superior del plano xy, limitado por las esferas de radio 2 y radio 3 con centro en el origen.



Ejemplo

Solución: *Tenemos que* $f(x,y,z) = x^2 + y^2$. *Podemos usar coordenadas esféricas dado que* E *está limitado por esferas* $\rho = 2$ *y* $\rho = 3$. *Al realizar el gráfico, podemos ver que* θ *da la vuelta completa:* $0 \leq \theta \leq 2\pi$. *Además,* $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, *pues el sólido va desde el eje* z *(*$\rho = 0$*) hasta el plano* $z = 0$ *(*$\rho = \frac{\pi}{4}$*). Luego, si* $x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta$, $y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$, $z = \rho\cos\phi$, *tenemos que*

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) : 2 \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

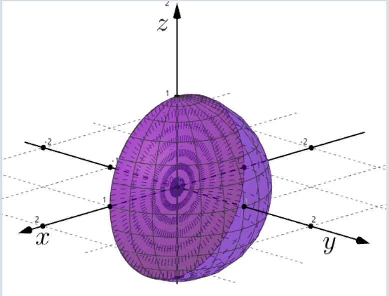
Ahora, $f(\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi) = (\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta)^2 + (\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)^2 = \rho^2\operatorname{sen}^2\phi$.

Así,

$$\begin{aligned}\iiint_E (x^2+y^2)dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_2^3 \rho^2\operatorname{sen}^2\phi\rho^2\operatorname{sen}\phi d\rho d\theta d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_2^3 \rho^4\operatorname{sen}^3\phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\frac{\rho^5}{5}\Big|_2^3 \operatorname{sen}^3\phi d\theta d\phi = \frac{211}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^3\phi d\theta d\phi \\ &= \frac{422\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^3\phi d\phi = \frac{422\pi}{5}\left[-\cos\phi + \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{844\pi}{15}.\end{aligned}$$

Ejemplo (11.6.4)

Calcular $\iiint_E (z+1)dV$, *donde* E *es el sólido limitado por la esfera* $x^2+y^2+z^2=1$ *y además* $y \geq 0$.



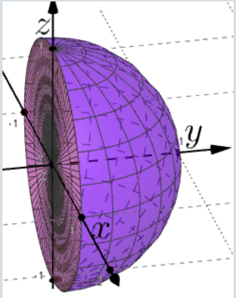


Figura 10: Sólido E

Solución: *Podemos usar coordenadas esféricas pues* E *está limitado por la esfera* $\rho = 1$. *Al realizar el gráfico, podemos ver que en coordenadas esféricas* (ρ, θ, ϕ), *donde* $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = \rho \cos \phi$, *tenemos que*

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi\},$$

pues θ *da media vuelta, comenzando desde el semieje positivo de las* x *hasta el negativo, y* ϕ *comienza desde el semieje positivo de las* z *hasta el negativo.*

Ejemplo

Tenemos que $f(x,y,z) = z+1$, *luego*

$$f(\rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi) = \rho\cos\phi + 1.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\iiint_E (z+1)dV &= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} (\rho\cos\phi + 1)\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} (\rho^3\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \rho^2\operatorname{sen}\phi) d\rho d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\phi\right]_0^1 d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4}\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\phi\right) d\theta d\phi \\
&= \pi\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4}\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\phi\right) d\phi = \pi\left[\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{8} - \frac{\cos\phi}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$