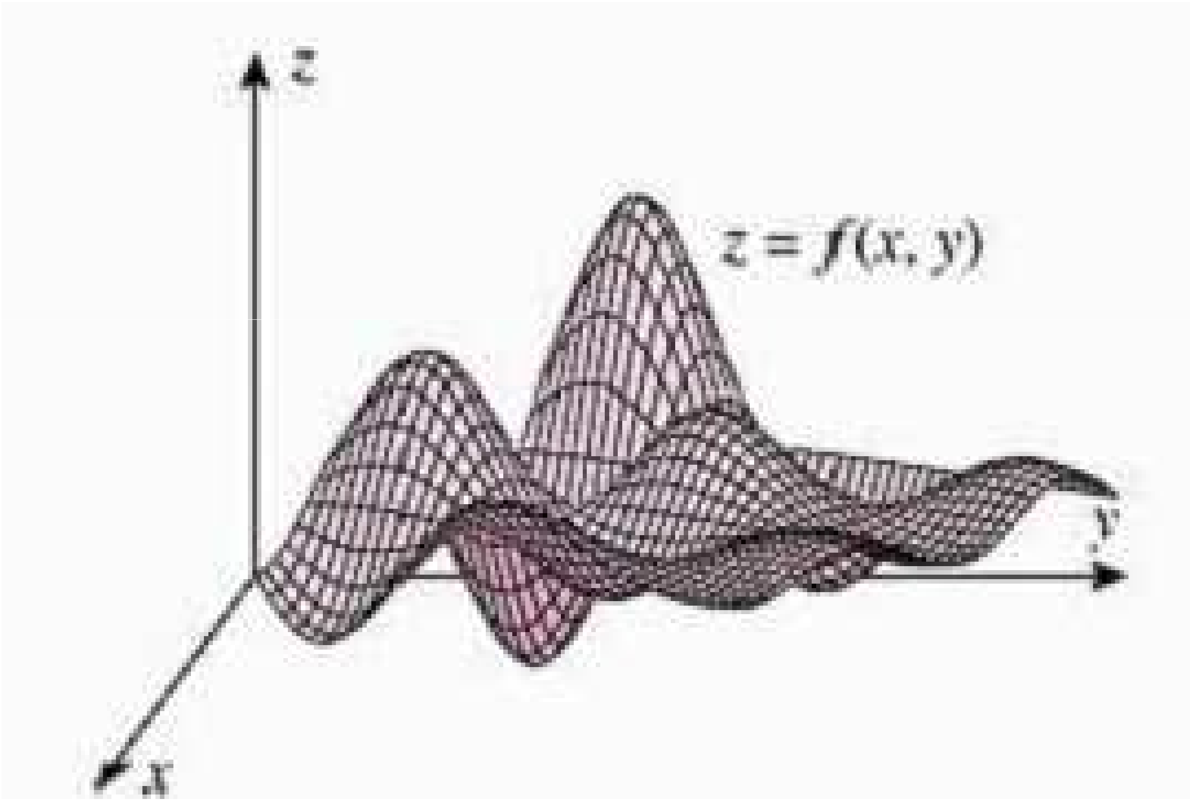
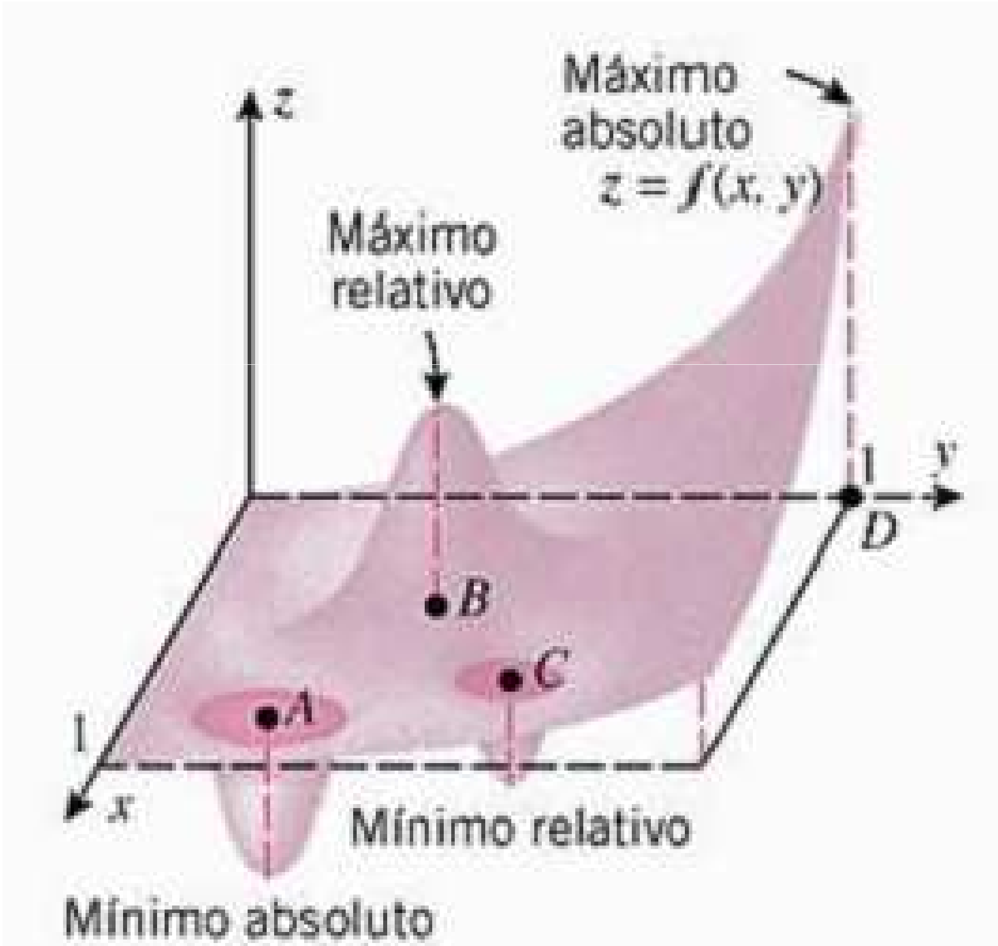
Máximos e mínimos

Cálculo 3

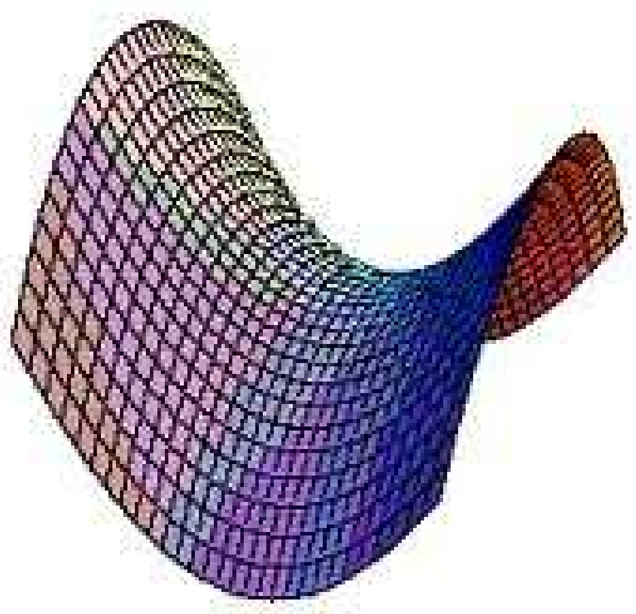
Máximos e mínimos



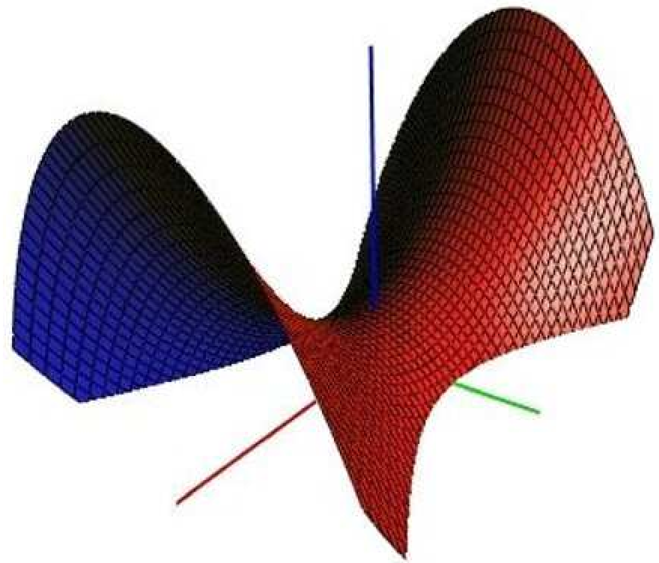
Máximos e mínimos absolutos e relativos



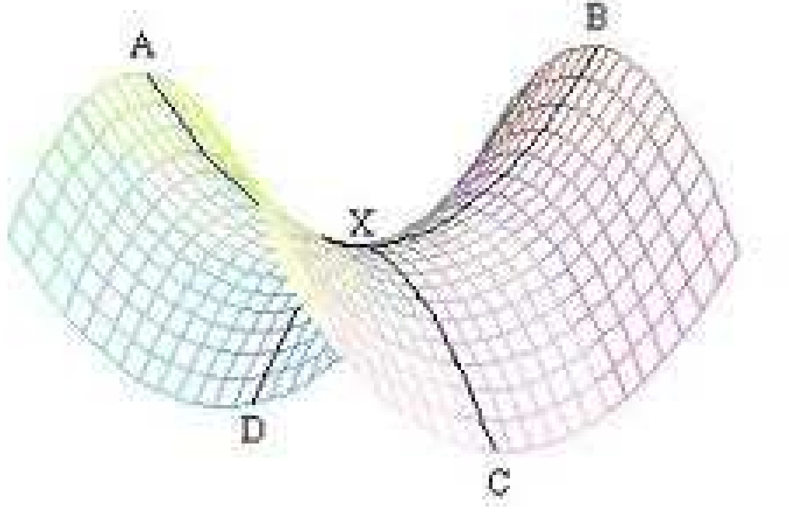
Ponto de sela



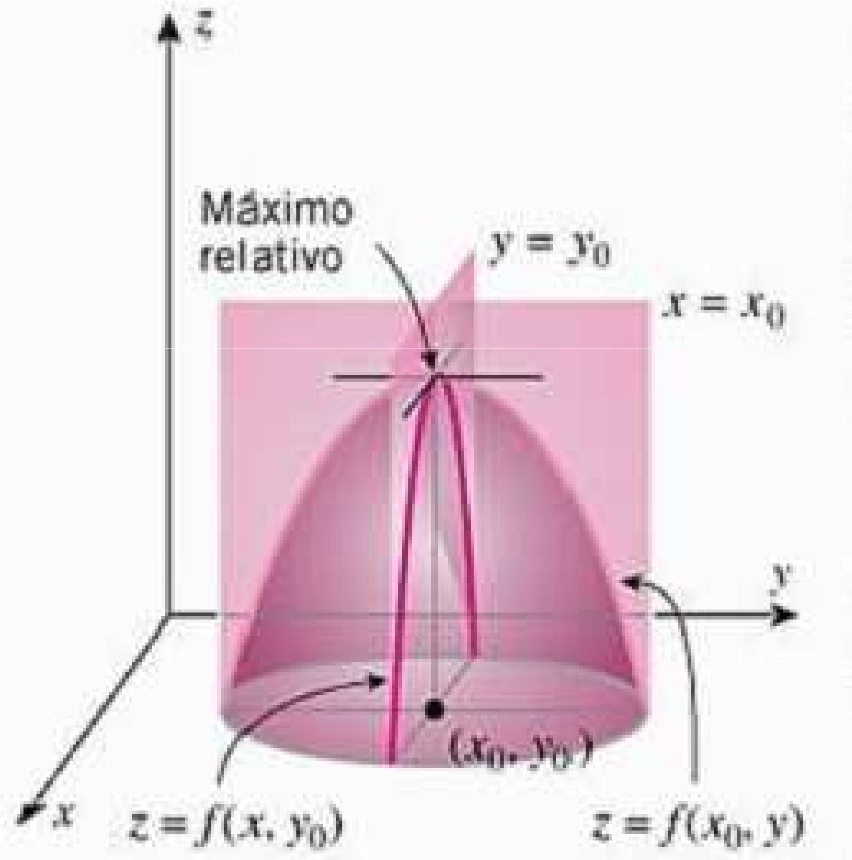
Parabolóide Hiperbólico



Fonte: Banco Internacional de Objetos Educacionais - MEC


A
B
X
D
C

Pontos críticos



$$f_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

Teste da derivada segunda

14.8.6 TEOREMA ***(Teste da Derivada Segunda)*** *Seja f uma função de duas variáveis com derivadas parciais de segunda ordem contínuas em algum círculo centrado em um ponto crítico (x_0, y_0) e seja*

$$D = f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0)$$

(*a*) *Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então f tem um mínimo relativo em (x_0, y_0).*

(*b*) *Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então f tem um máximo relativo em (x_0, y_0).*

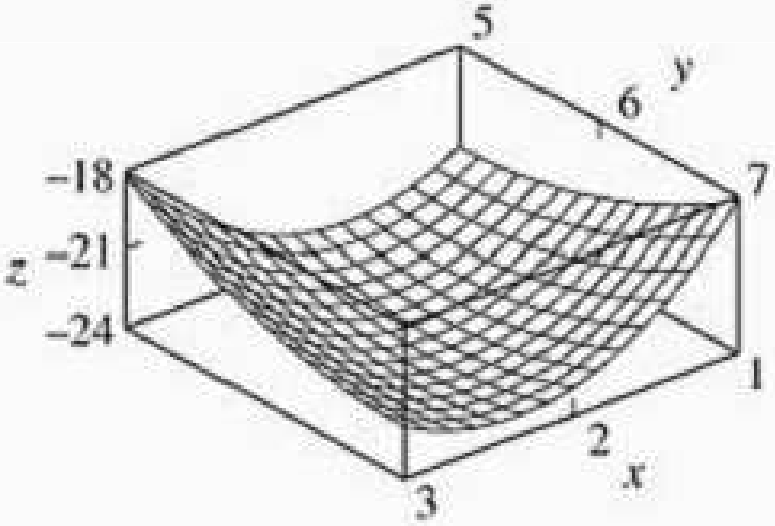
(*c*) *Se $D < 0$, então f tem um ponto de sela em (x_0, y_0).*

(*d*) *Se $D = 0$, então nenhuma conclusão pode ser tirada.*

Exemplo

► **Exemplo 3** Localize todos os extremos relativos e pontos de sela de

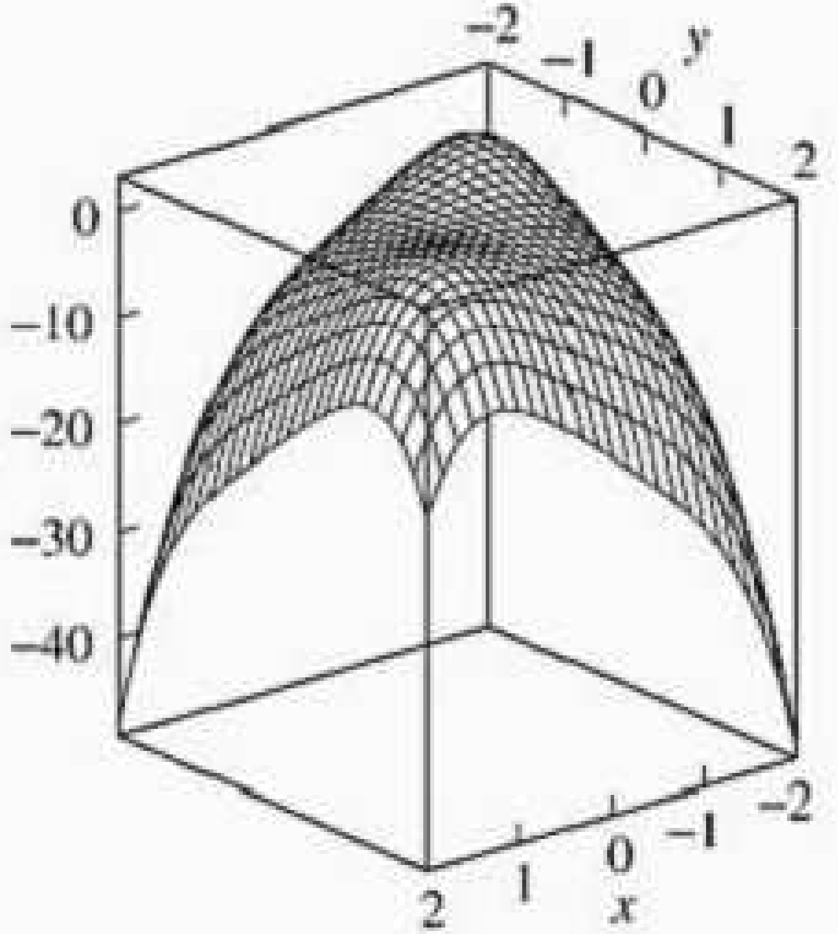
$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$



$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$

► Exemplo 4 Localize todos os extremos relativos e os pontos de sela de

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$



Solução Como

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4y - 4x^3 \\ f_y(x, y) &= 4x - 4y^3 \end{aligned} \qquad (1)$$

os pontos críticos de f têm coordenadas que satisfazem as equações

$$\begin{aligned} 4y - 4x^3 &= 0 \\ 4x - 4y^3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{aligned} y &= x^3 \\ x &= y^3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Substituindo a equação de cima na equação de baixo obtemos $x = (x^3)^3$ ou, equivalentemente, $x^9 - x = 0$ ou $x(x^8 - 1) = 0$, a qual tem soluções $x = 0, x = 1, x = -1$. Substituindo esses valores na equação (2) de cima, obtemos os valores y correspondentes $y = 0, y = 1, y = -1$. Assim, os pontos críticos de f são $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$.

De (1)

$$f_{xx}(x, y) = -12x^2, \quad f_{yy}(x, y) = -12y^2, \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

e obtemos a seguinte tabela:

PONTO CRÍTICO (x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$
$(0, 0)$	0	0	4	−16
$(1, 1)$	−12	−12	4	128
$(-1, -1)$	−12	−12	4	128

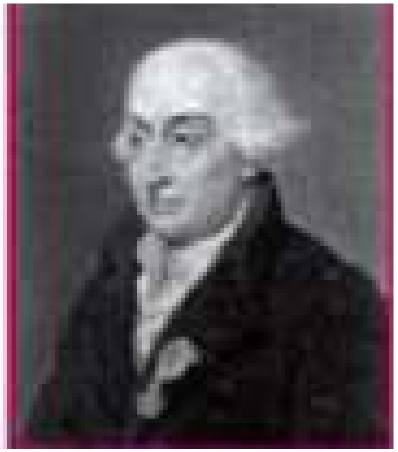
Multiplicadores de Lagrange

- Problemas de otimização → maximizar ou minimizar.
- Como? Resolvendo a eq. de restrição para uma das variáveis em termos das outras e substituir o resultado em f. Isso produz uma nova função que incorpora a restrição e pode ser maximizada ou minimizada.

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

- Contudo, isso depende de nossa habilidade para resolver a eq.
- Para isso, temos os multiplicadores de Lagrange.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$



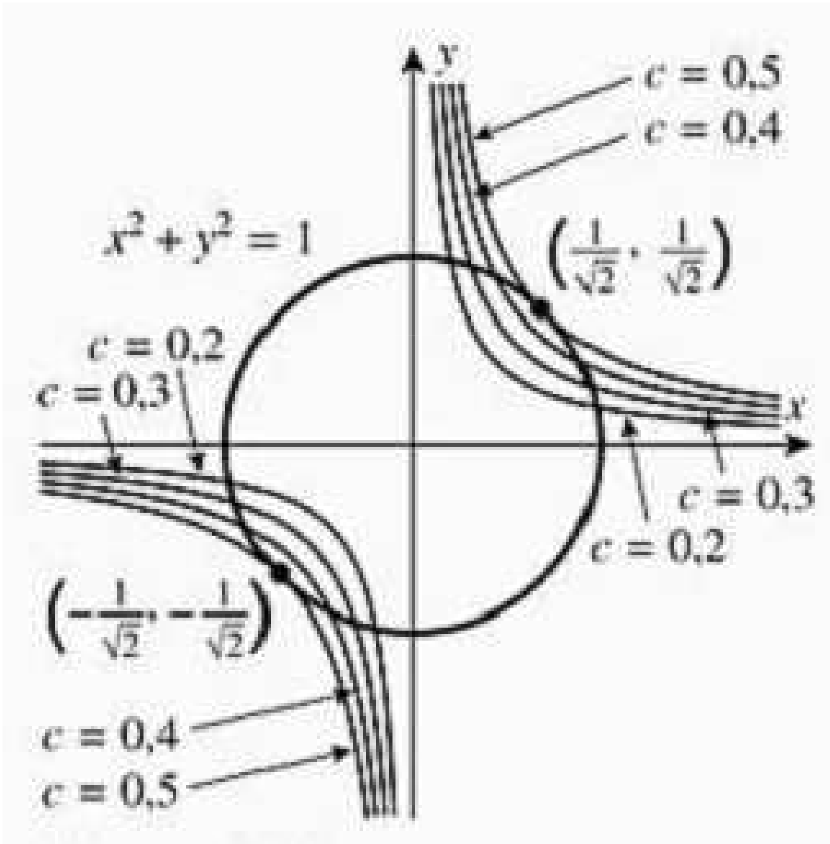
14.9.3 TEOREMA ***Princípio do Extremo Restrito para Duas Variáveis e Uma Restrição*** *Sejam f e g funções de duas variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo a curva de restrição $g\ x, y\ = 0$ e suponha que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto da curva. Se f tiver um extremo relativo restrito, então esse extremo ocorre em um ponto x_0, y_0 da curva de restrição no qual os vetores gradientes $\nabla f\ x_0, y_0$ e $\nabla g\ x_0, y_0$ são paralelos; isto é, existe algum número λ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

14.9.4 TEOREMA ***Princípio do Extremo Restrito para Três Variáveis e Uma Restrição*** *Sejam f e g funções de três variáveis com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em algum conjunto aberto contendo a superfície de restrição $g\ x, y, z\ = 0$ e suponha que $\nabla g \neq \mathbf{0}$ em qualquer ponto dessa superfície. Se f tiver um extremo relativo restrito, então este extremo ocorre em um ponto x_0, y_0, z_0 da superfície de restrição no qual os vetores gradientes $\nabla f\ x_0, y_0, z_0$ e $\nabla g\ x_0, y_0, z_0$ são paralelos isto é, existe algum número λ tal que*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Exemplo 1



y
$c = 0,5$
$c = 0,4$
$x^2 + y^2 = 1$
$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$c = 0,2$
$c = 0,3$
x
$c = 0,3$
$c = 0,2$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
$c = 0,4$
$c = 0,5$

Passo a passo

- Escrever as funções g e f;
- Calcular as derivadas parciais (gradientes);
- Colocar na “fórmula”;
- Isolar o lâmbda;
- Substituir na restrição g;
- Resolver e encontrar o valor de uma das variáveis;
- Encontrar o valor da outra variável substituindo o resultado na relação encontrada.

Exemplo 2