INTEGRALES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

[Versión preliminar]

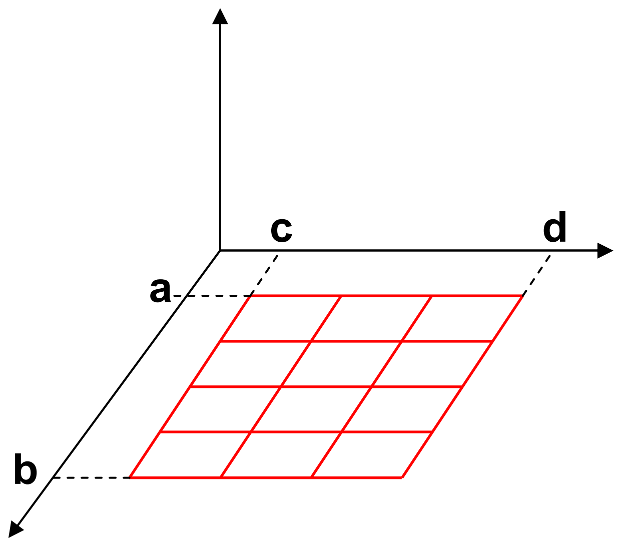
Prof. Isabel Arratia Z.

Integrales dobles sobre rectángulos

La integral de Riemann para una función f de dos variables se define de manera similar a la integral de una función de una variable:

Consideremos el rectángulo R de lados paralelos a los ejes coordenados:

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\}$$



Formemos una partición P de la región R mediante rectas paralelas a los ejes. Esto divide a R en subrectángulos R_k.

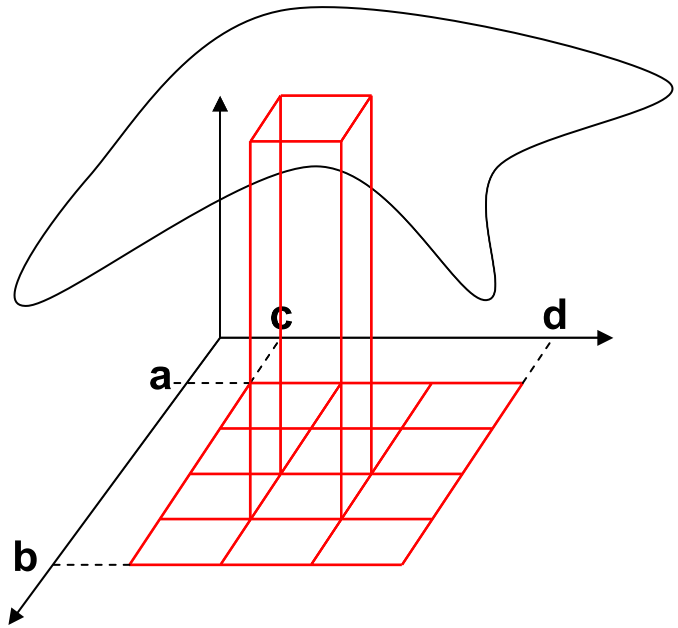
Si Δ_k es el área del rectángulo R_k y escogemos en R_k un punto (x_k, y_k), podemos formar la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, \Delta_k$$

Haciendo cada vez más fina la partición P llegamos a definir la integral de f sobre la región R: $\iint_R f(x,y)\,dA$

Definición: Si el siguiente límite

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k$$



existe, decimos que la función f es integrable en R, su valor se denota

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k = \iint_R f(x,y)dA$$

y se llama integral doble de f sobre R.

Como $\Delta_k = \Delta x_i \Delta y_j$ es el área de un rectángulo, otra notación para la integral doble es

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)dxdy$$

Así como $\int_a^b f(x)\,dx$, con $f(x) \geq 0$, representa el área de la región bajo la curva y = f(x) entre a y b, de manera semejante, si $f(x,y) \geq 0$, la integral $\iint_R f(x,y)\,dA$ representa el **volumen** del sólido bajo la superficie z = f(x, y) y arriba del rectángulo R.

Observaciones:

(1) No toda función z = f(x, y) de dos variables es integrable sobre un rectángulo R. Si f es acotada en el rectángulo R y continua en R con excepción, quizás, en un número finito de curvas suaves, entonces f es **integrable** en R.

(2) Si f es continua en R, entonces f es integrable en R.

(3) La integral doble hereda la mayoría de las propiedades de la integral simple, a saber,

$$\iint_R k\, f(x,y)\, dA = k \iint_R f(x,y)\, dA, \quad k \in \Re$$

$$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)\, dA \pm \iint_R g(x,y)\, dA$$

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$

donde R_1 y R_2 son subrectángulos de R que se sobreponen sólo en un segmento de recta.

(5) Si $f(x,y) \geq 0,\ \forall (x,y) \in R$, entonces $\iint_R f(x,y)\, dA \geq 0$

(6) Si $f(x,y) \leq g(x,y),\ \forall (x,y) \in R$, entonces $\iint_R f(x,y)\, dA \leq \iint_R g(x,y)\, dA$

(7) Si $m \leq f(x,y) \leq M,\ \forall (x,y) \in R$, entonces $mA_R \leq \iint_R f(x,y)\, dA \leq MA_R$

donde A_R es el área de R.

(8) Las propiedades anteriores son válidas también para integrales sobre conjuntos más generales que los rectángulos.

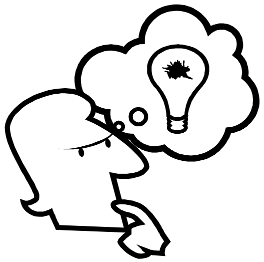
Evaluación de integrales dobles – Integrales iteradas

Teorema de Fubini: Si f es integrable en el rectángulo R, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

Ejemplo:

$$\int_0^\pi \int_0^1 x\ \mathrm{sen}(y)\ dxdy = \int_0^\pi \left. \frac{x^2 \mathrm{sen}(y)}{2} \right|_0^1 dy = \int_0^\pi \frac{1}{2}\mathrm{sen}(y)dy = -\frac{1}{2}\cos(y)\Big|_0^\pi = 1$$



$$\int_0^1 \int_0^\pi x\ \mathrm{sen}(y)\ dydx = \int_0^1 x(-\cos(y))\Big|_0^\pi dx = \int_0^1 2xdx = x^2\Big|_0^1 = 1$$

Ejercicio: Calcule las integrales iteradas

a) $\displaystyle\int_0^{\ln(3)}\int_0^{\ln(2)} e^{x+y}\,dydx$ b) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)}\int_{-1}^{0} 2x\, e^{y}\,dxdy$

c) $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{1} x^2 e^{xy}\,dxdy$ d) $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{1} \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy$

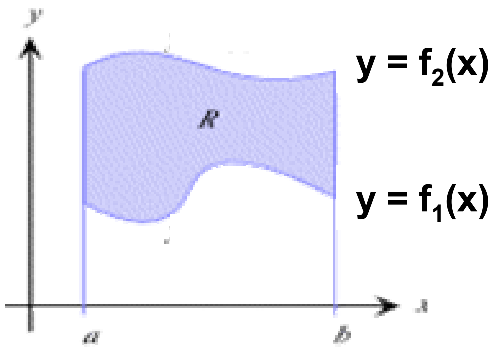
Ejercicio: Calcule la integral de f(x, y) sobre el rectángulo R si:

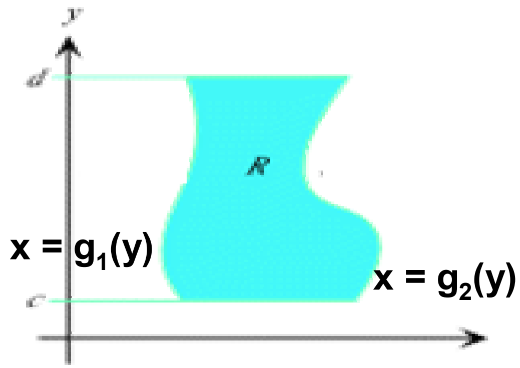
a) $f(x,y)=\mathrm{sen}(x+4y),\quad R=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{4}]$

b) $f(x,y)=xy\sqrt{1+x^2},\quad R=[0,\sqrt{3}]\times[1,2]$

Ejercicio: Calcule el volumen del sólido que está bajo el plano z = 2x + 5y + 1 y encima del rectángulo R = [-1, 0] x [1, 4].

Área de una región en el plano





El área de la región R viene dada, respectivamente, por:

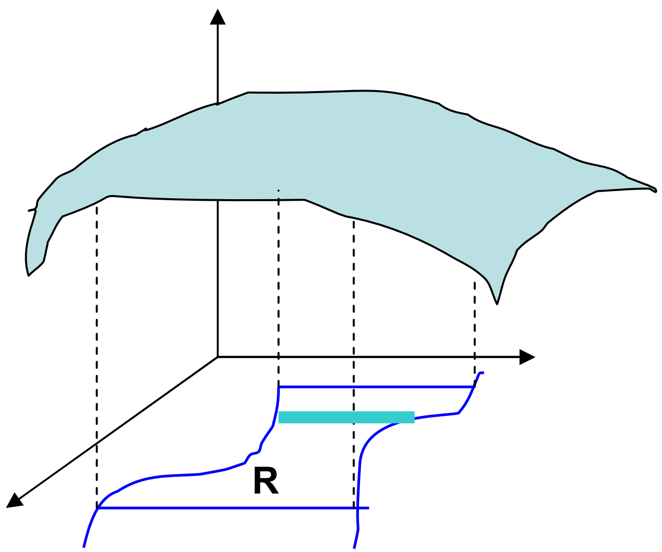
$$\text{Área} \quad A = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dydx \qquad\qquad \text{Área} \quad A = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} dxdy$$

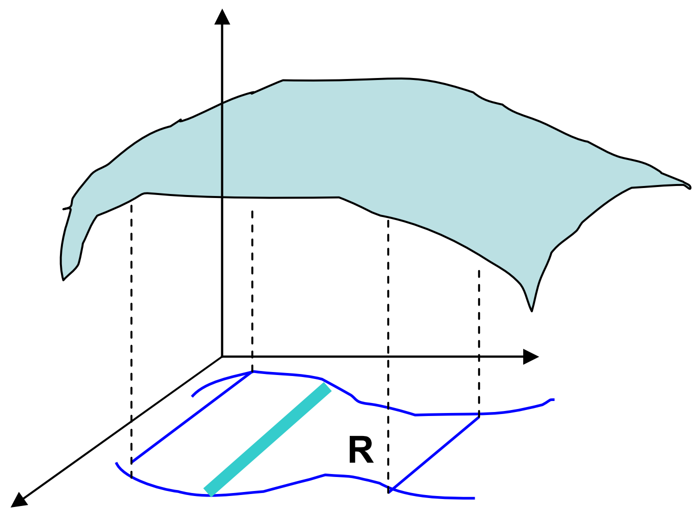
Ejercicio: Dibuje la región cuya área está dada por

$$\text{(a)} \quad \int_0^2 \int_{y^2}^{4} dxdy \qquad\qquad \text{(b)} \quad \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dydx$$

Integrales dobles sobre regiones generales

Las integrales dobles sobre regiones R no rectangulares pueden ser complicadas. Para nuestro objetivo bastará considerar regiones R llamadas verticalmente simples, horizontalmente simples o uniones finitas de tales conjuntos.





Teorema de Fubini: Sea f función continua en una región plana R.

(1) Si R está definida por $a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ con f_1 y f_2 funciones continuas en [a, b], entonces:

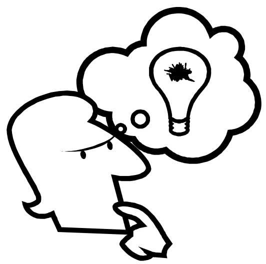
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dydx$$

(2) Si R está definida por $c \leq y \leq d,\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$ con g_1 y g_2 funciones continuas en [c, d], entonces:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dydx$$

Ejercicio: Calcule (a) $\iint_S (x^2 + y)\, dA$ (b) $\iint_D (x + 2y) dA$ si S es la región acotada por $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ y D es la región limitada por $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Ejercicio: Calcule las siguientes integrales invirtiendo el orden de integración: (a) $\int_0^1 \int_{2y}^2 \cos x^2 dxdy$ (b) $\int_0^2 \int_x^2 y^2 \operatorname{sen} xy\, dydx$



Ejercicio: Calcule

(a) El volumen del tetraedro acotado por los planos coordenados y el plano $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

(b) El volumen del sólido acotado por el cilindro $x^2 + z^2 = 9$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 2$ en el primer octante.

(c) El volumen en el primer octante entre los planos $z = 0$, $z = x + y + 2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

Cambio de variable para integrales dobles

Para integrales simples sabemos que:

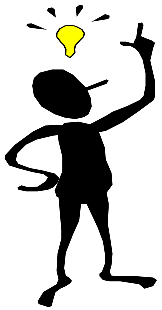
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,g'(u)\,du,$$

donde $x = g(u)$, $dx = g'(u)du$, $a = g(c)$, $b = g(d)$.

Para integrales dobles se tiene el siguiente teorema:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f\big(g(u,v),h(u,v)\big)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

donde f es continua en R, g y h tienen derivadas parciales continuas en S y $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ es no nulo en S.



El cambio de variables $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$) introduce el factor $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ llamado Jacobiano de x, y respecto de u, v, y cuya definición es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}$$

Ejemplo: Calcule $\displaystyle\iint_R 4(x+y)e^{x-y}\,dydx$ donde R es el triángulo formado por y = 1, y = x e y = -x.

Si u = x + y, v = x – y, entonces $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$ y $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\dfrac{1}{2}$.

Además, $y=1 \Rightarrow u-v=2 \Rightarrow v=u-2$

$y=x \Rightarrow u+v=u-v \Rightarrow v=0$

$y=-x \Rightarrow u+v=v-u \Rightarrow u=0$

Es decir, mediante el cambio de variables, la región R del plano XY se transforma en la región S del plano UV limitada por las rectas v = u – 2, v = o y u = 0. Y la integral se calcula así:

$$\iint_R 4(x+y)e^{x-y}dydx = \iint_S 4u\,e^{v}\left(\tfrac{1}{2}\right) dvdu = \int_0^2 \int_{u-2}^{0} 2u\,e^{v}dvdu = 2(1-e^{-2})$$

O bien,

$$\iint_R 4(x+y)e^{x-y}dydx = \iint_S 4u\,e^{v}\left(\tfrac{1}{2}\right) dudv = \int_{-2}^{0} \int_{0}^{v+2} 2u\,e^{v}dvdu = 2(1-e^{-2})$$

Ejercicio: Sea R la región acotada por las rectas x – 2y = 0, x + y = 4, x + y = 1, x – 2y = - 4. Calcule

$$\iint_R xy\, dA$$

Integrales dobles en coordenadas polares

El Jacobiano para el cambio de variables de coordenadas rectangulares a coordenadas polares es:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Por lo tanto, si R es la región de los puntos $(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ tales que $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, con $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, g_1, g_2 continuas en $[\alpha, \beta]$ y f continua en R, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta,\ r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

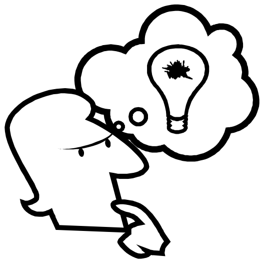
Ejercicio: Calcule usando coordenadas polares las integrales

(a) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\,dx\,dy$ (b) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$

Ejercicio: Calcule utilizando coordenadas polares las integrales

(a) $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA$ si R es la región encerrada por $x^2 + y^2 = 4$.

(b) $\iint_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,dA$ si S es el sector del primer cuadrante de la círculo $x^2 + y^2 = 1$ entre $y = 0$ e $y = x$.



Ejercicio: Calcule el volumen del sólido acotado por el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Observe la conveniencia de cambiar a coordenadas polares.

Aplicaciones de las integrales dobles

(1) Masa – Centro de masa

Supongamos que una lámina ocupa una región D del plano XY y su densidad (variable) en unidades de masa por unidad de área en un punto (x, y) en D está dada por $\rho(x,y)$, donde ρ es una función continua sobre D. La masa total m de la lámina es:

$$m = \iint_D \rho(x,y)\, dA$$

Las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa de la lámina son:

$$\overline{x} = \frac{1}{m}\iint_D x\,\rho(x,y)\, dA\,, \qquad \overline{y} = \frac{1}{m}\iint_D y\,\rho(x,y)\, dA$$

Ejercicio: Determine la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región D del primer cuadrante acotada por $y = x^2$ y la recta $y = 1$ y que tiene función densidad $\rho(x,y) = xy$.

Las integrales $M_x = \iint\limits_D y\,\rho(x, y)\, dA$ y $M_y = \iint\limits_D x\,\rho(x, y)\, dA$

corresponden al “momento (de toda la lámina) alrededor del eje X y al momento alrededor del eje Y respectivamente. Es decir,

$$\bar{x} = \frac{1}{m} M_y \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{1}{m} M_x$$

Ejercicio: La densidad en cualquier punto de una lámina semicircular es proporcional a la distancia desde el centro del círculo. Determine el centro de la lámina.

Ejercicio: Determine la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región $D = \{(x, y) \;/\; 0 \le x \le \pi,\;\; 0 \le y \le \operatorname{sen} x\}$ y que tiene función densidad $\rho(x, y) = y.$

(2) Momento de inercia

Si una lámina tiene función de densidad $\rho(x, y)$ y ocupa una región D del plano XY, las integrales

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dA \quad \text{e} \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dA$$

corresponden a los momentos de inercia (2° momento) de la lámina alrededor del eje X y del eje Y respectivamente. El momento de inercia alrededor del origen, también llamado momento polar de inercia es:

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2)\, \rho(x, y)\, dA$$

Ejercicio: Determine el momento de inercia alrededor del eje X de la lámina correspondiente a la región parabólica $0 \le y \le 4 - x^2$ si la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia de (x, y) al eje X.

(2) Área de una superficie

Consideremos la superficie S dada por z = f(x, y) definida sobre una región cerrada y acotada D del plano XY. Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en D, el área de la superficie S es:

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2}\, dA$$

Ejercicios: Calcule el área de

(a) La porción del plano z = 2 – x – y que está situada encima del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante.

(b) La parte de la superficie $z = x^2 + 2y$ que está encima de la región triangular T del plano XY con vértices (0,0), (1,0) y (1,1).

(c) La parte del paraboloide $z = x^2 - y^2$ que está entre los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.