MA1003 Cálculo III
Tema 03: Integrales múltiples

Parte 02: Cambios de variables en integrales dobles y aplicaciones

Profesor Jesús Sánchez Guevara

U.C.R.

I Semestre 2020

En esta clase

1. Cambio de variables en integrales dobles.
2. Coordenadas polares y elipticas.
3. Aplicaciones de integrales dobles.

Introducción

¿Cuál es la importancia de las integrales dobles?

1. Son herramientas para resolver problemas de aplicación complejos.
2. Exponen la noción de integral en un marco más general.

Ejemplo

Calcule el área de una elipse con semiejes a y b.

Se transforman las dimensiones para ver a la elipse como un círculo de radio 1 al hacer el cambio de variables $u = x/a$ y $v = y/b$:

$$
\begin{aligned}
\text{Área} &= \iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1} dxdy \\
&= \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} abdudv \\
&= ab \iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} 1dudv = ab\pi
\end{aligned}
$$

En **este caso** vea que el cambio de variable funciona como en Cálculo I:

$$
\begin{aligned}
dx &= adu \\
dy &= adv \\
\Rightarrow dxdy &= abdudv
\end{aligned}
$$

❏ **¿Cómo se procede con un cambio de variables más general?**

R/ Hay que encontrar el factor de proporción entre las áreas (de cuadrados infinitesimales) de ambos sistemas coordenados:

1. $dxdy$ (ejes coordenados x y y a sustituir) y
2. $dudv$ (nuevo sistema de ejes u y v).

Ejemplo

Si se hace el cambio de coordenadas

$$\begin{cases} u = & 3x - 2y \\ v = & x + y \end{cases}$$

¿Cuál es la relación entre las áreas $dxdy$ y $dudv$?

Un cuadrado de área 1 en el sistema xy está determinado por $\vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{e}_2 = (0,1)$. La relación entre las coordenadas en el sistema xy y el sistema uv está dada por la multiplicación de matrices:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Así el cuadrado de lados $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ es enviado al paralelogramo de lados $\vec{r}_1 = (3,1)$ y $\vec{r}_2 = (1,1)$. El área de este paralelogramo es

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 5$$

por lo tanto $5dxdy = dudv$. O en otras palabras $5dA$ es igual dA' (diferencial de área del nuevo sistema).

De esta forma $\iint f dxdy = \iint f \frac{1}{5} dudv$.

En general: Si $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$:

$$\begin{cases} du = & u_x dx + u_y dy \\ dv = & v_x dx + v_y dy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Así un cuadrado infinitesimal de lados $(dx, 0)$ y $(0, dy)$ es transformado en un paralelogramo infinitesimal con lados $(u_x dx, v_x dx)$ y $(u_y dy, v_y dy)$, cuya área es:

$$dudv = \det \begin{pmatrix} u_x dx & u_y dy \\ v_x dx & v_y dy \end{pmatrix} = |u_x v_y - v_x u_y| dxdy$$

(el área es el valor absoluto del determinante)

$$dudv = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dxdy = |J| dxdy$$

El término dentro del valor absoluto es el **Jacobiano** del cambio de variable.

❑ Calcular esto para los dos ejemplos anteriores.

Propiedad

Si se hace el cambio de variable

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

Entonces,

$$dudv = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy = |J(u,v)|dxdy$$

$$\text{o, } dxdy = \frac{1}{|J(u,v)|} dudv$$

Propiedad

Si se hace el cambio de variable

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Entonces,

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dxdy = |J(x,y)|dxdy$$

❏ Recuerde que $J(u,v) = 1/J(x,y)$.

Ejemplo

En cada caso calcule el Jacobiano.

1. Cambio de variables lineal

$$\begin{cases} u = a_1 x + b_1 y \\ v = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

2. Cambio hiperbolas-rectas

$$\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$$

3. Cambio de variables lineal

$$\begin{cases} x = \alpha_1 u + \beta_1 v \\ y = \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases}$$

4. Cambio parábolas-parábolas

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{v^2} \\ y = u - 2v^2 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} u = a_1 x + b_1 y \\ v = a_2 x + b_2 y \end{cases}$

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$
$$\Rightarrow dxdy = \frac{1}{|J(u,v)|} dudv = \frac{1}{|a_1 b_2 - a_2 b_1|} dudv$$

2) $\begin{cases} u = xy \\ v = y/x \end{cases}$

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{y} \end{vmatrix} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + v$$
$$\Rightarrow dxdy = \frac{1}{|J(u,v)|} dudv = \frac{1}{|1+v|} dudv$$

Nota: Para eliminar el valor absoluto hay que dividir la región de integración según $v > -1$ ($|1+v| = 1+v$) o $v < -1$ ($|1+v| = -(1+v)$).

3) $\begin{cases} x = \alpha_1 u + \beta_1 v \\ y = \alpha_2 u + \beta_2 v \end{cases}$

$$J(x,y) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$
$$\Rightarrow dxdy = |J(x,y)| dudv = |\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1| dudv$$

4) $\begin{cases} x = \dfrac{u}{v^2} \\ y = u - 2v^2 \end{cases}$

$$J(x,y) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v^2} & \frac{-2u}{v^3} \\ 1 & -4v \end{vmatrix} = \frac{-4}{v} + \frac{2u}{v^3}$$
$$\Rightarrow dxdy = |J(x,y)| dudv$$
$$= \left| \frac{-4}{v} + \frac{2u}{v^3} \right| dudv$$

Proceso de cambio de variables

Se quiere calcular

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy$$

mediante el cambio de variable:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$$

1. Se calcula el jacobiano del cambio y se reemplaza $dxdy = \frac{1}{|J(u,v)|}dudv$.
2. Se expresa $f(x,y)$ en las nuevas variables u y v, usando manipulaciones adecuadas.
3. Se reemplaza R por la nueva región de integración $R*$ en el plano uv. **Explicar** más adelante el significado de este paso.

Finalmente,

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R*} \frac{F(u,v)}{|J(u,v)|}dudv$$

Proceso de cambio de variables

Se quiere calcular

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy$$

mediante el cambio de variable:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

1. Se calcula el jacobiano del cambio y se reemplaza $dxdy = |J(x,y)|dudv$.
2. Se expresa $f(x,y)$ en las nuevas variables u y v, usando manipulaciones adecuadas.
3. Se reemplaza R por la nueva región de integración $R*$ en el plano uv. **Explicar** más adelante el significado de este paso.

Finalmente,

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \iint\limits_{R*} f(x(u,v),y(u,v))|J(x,y)|dudv$$

Manipulación de un región

Cuando estamos calculando una integral doble con un cambio de variables:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

la región de integración R en el plano xy se convierte en una nueva región $R*$ en el plano uv.

$R*$ se puede determinar con el siguiente proceso:

1. Se identifican las curvas que determinan los bordes de R en el plano xy.
2. Se expresan las ecuaciones de estas curvas en las nuevas variables u y v, con las manipulaciones adecuadas.
3. En el plano uv, la nueva región de integración $R*$ es la que tiene como borde a las curvas del paso anterior.

Ejemplo

Determine $R*$ en el plano uv, luego de aplicar a R el cambio de variables dado.

1. La región R en el primer cuadrante limitada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 2$ y las rectas $\frac{x}{y} = 2$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. Con el cambio $u = xy$ y $v = x/y$.
2. La región R del plano limitada por las rectas $2x + y = 1$, $2x + y = -1$ y las rectas $y - 3x = 6$, $y - 3x = -6$. Con el cambio $u = 2x + y$ y $v = y - 3x$.

```
Geogebra: x*y=1 x*y=2 x/y=1  x/y=1/2
2x+y=1 2x+y=-1 y-3x=6 y-3x=-6
```

En el plano uv:

1. $R*$ es el rectángulo $[1,2] \times [\frac{1}{2}, 2]$.
2. $R*$ es el rectángulo $[-1,1] \times [-6,6]$.

Ejemplo

Sea R la región limitada por las curvas $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 3$, $xy = 1$, $xy = 3$. Utilice un cambio de variables para calcular:

$$\iint\limits_R xy(y + 2x^2)dxdy$$

```
Geogebra: y-x^2=1 y-x^2=3 xy=1 xy=3
```

1. Usamos el cambio de variable $\begin{cases} u = y - x^2 \\ v = xy \end{cases}$

$$J(u, v) = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -2x & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = -(y + 2x^2)$$

$$\Rightarrow dxdy = \frac{1}{|J(u, v)|}dudv = \frac{1}{(y + 2x^2)}dudv$$

2.

$$\begin{aligned} f(x, y)dxdy &= xy(y + 2x^2)dxdy \\ &= xy(y + 2x^2)\frac{1}{(y + 2x^2)}dudv \\ &= xydudv \\ &= vdudv \end{aligned}$$

3. Como R la región limitada por las curvas $y - x^2 = 1$, $y - x^2 = 3$, $xy = 1$, $xy = 3$. Entonces $R*$ en el plano uv está limitada por las curvas:

$$u = 1 \qquad u = 3 \qquad v = 1 \qquad v = 3$$

Es decir $R* = [1, 3] \times [1, 3]$

4. Finalmente se calcula la integral:

$$\begin{aligned} \iint\limits_R xy(y + 2x^2)dxdy &= \iint\limits_{[1,3]\times[1,3]} vdudv \\ &= \int_1^3 \int_1^3 vdudv \\ &= \int_1^3 2vdv = 8 \end{aligned}$$

Ejemplo

Sea R la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$, $x = 4y^2$. Utilice un cambio de variables adecuado para calcular

$$\text{Área}(R) = \iint_R 1dxdy$$

Geogebra: y=x^2 y=2x^2 x=y^2 x=4y^2

1. Usamos el cambio de variable $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = \dfrac{x}{y^2} \end{cases}$

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{-2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{1}{y^2} & \dfrac{-2x}{y^3} \end{vmatrix} = \frac{3}{x^2y^2}$$

$$= \frac{3}{u^2v^2}$$

$$\Rightarrow dxdy = \frac{1}{|J(u,v)|}dudv = \frac{1}{3/u^2v^2}dudv = \frac{u^2v^2}{3}dudv$$

2. Como R la región limitada por las curvas $y/x^2 = 1$, $y/x^2 = 2$, $x/y^2 = 1$, $x/y^2 = 4$. Entonces R^* en el plano uv está limitada por las curvas:

$$u = 1 \qquad u = 2 \qquad v = 1 \qquad v = 4$$

Es decir $R^* = [1,2] \times [1,4]$

3. Finalmente se calcula la integral:

$$\iint_R 1dxdy = \iint_{[1,2]\times[1,4]} \frac{u^2v^2}{3}dudv$$
$$= \int_1^2 \int_1^4 \frac{u^2v^2}{3}dvdu$$
$$= \frac{49}{3}$$

Otros cambios de variables

1. Coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$

$$J(x,y) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r$$

$$\Rightarrow dxdy = |J(x,y)|drd\theta = rdrd\theta$$

Es recomendable cuando la región de integración tiene simetrías circulares alrededor del origen.

2. Coordenadas elípticas $\begin{cases} x = ar\cos(\theta) \\ y = br\sin(\theta) \end{cases}$

$$J(x,y) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos(\theta) & -ar\sin(\theta) \\ b\sin(\theta) & br\cos(\theta) \end{vmatrix} = abr$$

$$\Rightarrow dxdy = |J(x,y)|drd\theta = abrdrd\theta$$

Es recomendable cuando la región de integración tiene simetrías elípticas con respecto a la elipse centrada en el origen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Ejemplo

Calcule el área de un disco D de radio a.

Para facilitar los cálculos se supone D centrado en $(0,0)$ y se aplica el cambio a coordenadas polares: $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.

$$\text{Área}(D) = \iint_D 1dA = \iint_{D*} rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} d\theta = \pi a^2$$

Nota: en este caso la región D en el plano xy:

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

pasa a ser la región D^* en el plano $r\theta$:

$$D^* = \{(r,\theta) : 0 \leqslant r \leqslant a \text{ y } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} = [0,a]\times[0,2\pi]$$

Ejemplo

Calcule el área de un segmento S circular de ángulo α en un círculo de radio a.

$$\text{Área}(S) = \iint_S 1 dA = \iint_{S*} r dr d\theta = \int_0^{\alpha}\int_0^a r dr d\theta$$
$$= \int_0^{\alpha} \frac{a^2}{2} d\theta = \frac{a^2\alpha}{2}$$

Ejemplo

Calcule el área de la región R entre dos círculos concéntricos de radio b y de radio a.

$$\text{Área}(R) = \iint_R 1 dA = \iint_{R*} r dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_b^a r dr d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - b^2}{2} d\theta = \pi(a^2 - b^2)$$

Ejemplo

Sea D el área encerrada entre $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y los ejes x^+ y y^+. Calcule $\iint_D f dA$, donde $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$.

$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2.$
$y = g(x) = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1.$
$x^+ \Rightarrow \theta = 0$ y $y^+ \Rightarrow \theta = \pi/2.$
$\Rightarrow D* = [1, 2] \times [0, \pi/2]$
$f(x, y) dxdt \Rightarrow f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r dr d\theta$
$= \frac{1}{r} r dr d\theta = dr d\theta$

$$\iint_D f dA = \iint_{D*} dr d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 dr d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo

Expresar en coordenadas polares $\iint_D f dA$ donde $D = \{(x, y) : (x-a)^2 + y^2 \leqslant a^2\}$

`Geogebra: (x-3)^2+y^2= 3^2`

El borde la región está dado por:

$$\begin{aligned}(x-a)^2 + y^2 = a^2 &\Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = a^2 \\ &\Rightarrow r^2 - 2ar\cos(\theta) = 0 \\ &\Rightarrow r = 2a\cos(\theta)\end{aligned}$$

La variación de los ángulos es: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

❏**Explicar** en pizarra la región $D*$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f dA &= \iint\limits_{D*} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2a\cos(\theta)} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r dr d\theta\end{aligned}$$

Ejemplo

Expresar en coordenadas polares $\iint_D 1 dA$ donde D es el área dentro de $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ y fuera de $x^2 + y^2 = a^2$.

`Geogebra: (x-3)^2+y^2=3^2 x^2+y^2=3^2`

$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r = 2a\cos(\theta)$
$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r = a$
Los círculos se intersecan en
$a = 2a\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = 1/2 \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$

❏**Explicar** en pizarra la región $D*$.

$$\begin{aligned}\iint\limits_D 1 dA &= \iint\limits_{D*} r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_a^{2a\cos(\theta)} r dr d\theta\end{aligned}$$

Ejemplo

Expresar en coordenadas polares $\iint_D 1dA$ donde D es el área de intersección de $(x-a)^2+y^2=a^2$ y $x^2+y^2=a^2$.

Estos son los mismos círculos del ejemplo anterior. Hacer dibujo. D^* se divide entonces en tres regiones:

1. $D_1^* = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant -\frac{\pi}{3} \text{ y } 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos(\theta)\}$
2. $D_2^* = \{(r,\theta) : -\frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ y } 0 \leqslant r \leqslant a\}$
3. $D_3^* = \{(r,\theta) : \frac{\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ y } 0 \leqslant r \leqslant 2a\cos(\theta)\}$

$$\iint_D 1dA = \iint_{D_1^*} rdrd\theta + \iint_{D_2^*} rdrd\theta + \iint_{D_3^*} rdrd\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{-\pi/3}\int_0^{2a\cos(\theta)} rdrd\theta + \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_0^{a} rdrd\theta + \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos(\theta)} rdrd\theta$$

Ejemplo

Use un cambio de coordenadas elípticas para calcular $\iint_D \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dA$, donde D es el área entre las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$.

Se hace el cambio $x = ar\cos(\theta)$, $y = br\sin(\theta)$. Se sabe que en tal caso $dA = abrdrd\theta$.

$f(x,y) = \sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \Rightarrow f(r,\theta) = \sqrt{4-r^2}$.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow r=1$. $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1 \Rightarrow r=2$.

La variación del ángulo sería $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

$$\iint_D fdA = \iint_{D*} \sqrt{4-r^2}abrdrd\theta$$
$$= ab\int_0^{2\pi}\int_1^2 \sqrt{4-r^2}rdrd\theta$$
$$= 2ab\pi\int_1^2 \sqrt{4-r^2}rdr$$
$$= ab\pi\int_0^3 \sqrt{u}du = 2ab\pi\sqrt{3}$$

Aplicaciones de integrales dobles

Cálculo de áreas

Si R es una región del plano, entonces:

$$\text{Área}(R) = \iint\limits_R 1 dxdy$$

Cálculo de volúmenes

Si S es el sólido limitado por la región R del plano xy y la superficie $z = f(x, y)$, entonces

$$\text{Volúmen}(S) = \iint\limits_R f(x, y) dxdy$$

Nota: Si $z = f(x, y) = 1$, entonces numéricamente, $\text{Volúmen}(S) = \text{Área}(R)$.

Valor promedio

Si f definida sobre una región R del plano, entonces su valor promedio está dado por:

$$\bar{f} = \frac{\iint_R f(x, y) dxdy}{\text{Área}(R)}$$

Masa de un objeto plano

Sea R una lámina plana con densidad $\delta = \delta(x, y) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$ (masa por unidad de área). Si el material es uniforme δ sería constante. Así, la masa de R es:

$$\text{Masa}(R) = \iint\limits_R \delta(x, y) dxdy$$

El centro de masa de R o centroide, tiene coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ dadas por:

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{Masa}(R)} \iint\limits_R x\delta(x, y) dxdy$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\text{Masa}(R)} \iint\limits_R y\delta(x, y) dxdy$$

❏ La **masa** de un objeto indica qué tan difícil es *empujarlo* o darle un movimiento de traslación. El **momento de inercia** indica qué tan difícil es *rotarlo* o darle un movimiento rotacional con respecto a un eje. **(Hacer un dibujo)**
Se calcula la energía cinética de un objeto de masa m a una distancia r del origen, con una velocidad angular $w = d\theta/dt$. Así la velocidad es $v = rw$ y se tiene:

$$\textbf{Energía cinética} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(rw)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)w^2$$

El momento de inercia es el factor $I_0 = mr^2$. Si se tiene una masa pequeña Δm su momento de inercia es $I_0(\Delta m) = \Delta m r^2 = \delta \Delta A r^2$. Por lo tanto,

Momento de inercia

El momento de inercia de una placa plana R es,

$$I_0(R) = \iint_R r^2 \delta dA$$

Así, **Energía cinética rotacional** $= \frac{1}{2} I_0(R) w^2$.

Momento de inercia, otro eje

Con respecto a otros ejes el momento de inercia sería,

$$I_0(R) = \iint_R (\text{distancia al eje})^2 \delta dA$$

Con respecto al eje x:

$$I_0(R) = \iint_R y^2 \delta dA$$

Con respecto al eje y:

$$I_0(R) = \iint_R x^2 \delta dA$$

Ejemplo

Calcule I_0 para un disco de radio a y densidad $\delta = 1$, primero cuando se gira sobre su centro y luego cuando se gira en un punto de su circunferencia.

$$\textbf{(1)}\ I_0 = \iint_D r^2 dA = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}$$

Para el segundo caso se toma D como la región $(x-a)^2 + y^2 \leqslant a^2$

$$\textbf{(2)}\ I_0 = \iint_D r^2 dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos(\theta)} r^3 dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2a\cos(\theta))^4}{4} d\theta = 4a^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4(\theta) d\theta$$

$$= \frac{3\pi a^4}{2}$$

Nota: Para girar el disco desde su borde se usa tres veces más energía que desde su centro.

Se usó la integral

$$\int \cos^4(\theta) d\theta = \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{1}{32}\sin(4\theta) + C$$


FIN