Cálculo de Varias Variables - Examen Parcial 1

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

Nombre: ____

1. (2 points) **Producto escalar de funciones vectoriales:**

   - Encuentre el producto escalar $\mathbf{r}_1(x, y) \cdot \mathbf{r}_2(x, y)$ y evalúa el producto escalar en el punto $(1, 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(x, y) &= (e^{x+y}, \cos(x), \ln(y)) \\ \mathbf{r}_2(x, y) &= (x^2, y^2, xy) \end{aligned}$$

Solución: El producto escalar de los vectores $\mathbf{r}_1(x, y)$ y $\mathbf{r}_2(x, y)$ es:

$$\mathbf{r}_1(x, y) \cdot \mathbf{r}_2(x, y) = e^{x+y} \cdot x^2 + \cos(x) \cdot y^2 + \ln(y) \cdot xy$$

Ahora, evaluamos en el punto $(1, 1)$:

$$\mathbf{r}_1(1, 1) \cdot \mathbf{r}_2(1, 1) = e^{1+1} \cdot 1^2 + \cos(1) \cdot 1^2 + \ln(1) \cdot 1 \cdot 1 = e^2 + \cos(1) + \ln(1)$$

$\ln(1) = 0$. Por lo tanto:

$$\mathbf{r}_1(1, 1) \cdot \mathbf{r}_2(1, 1) = e^2 + \cos(1)$$

2. (2 points) **Producto vectorial de funciones vectoriales:**

   - Calcule el producto vectorial $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$ y evalúa el producto vectorial en el punto $(1, 2, 3)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(x, y, z) &= (x + y, yz, z^2) \\ \mathbf{r}_2(x, y, z) &= (xy, z, x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Solución:

Paso 1: Fórmula para el producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores $\mathbf{r}_1 = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ se calcula como:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x+y & yz & z^2 \\ xy & z & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

Calculamos el determinante:

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{i} \begin{vmatrix} yz & z^2 \\ z & x^2+y^2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} x+y & z^2 \\ xy & x^2+y^2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} x+y & yz \\ xy & z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \mathbf{i}\left(yz(x^2+y^2) - z^3\right) - \mathbf{j}\left((x+y)(x^2+y^2) - z^2xy\right) + \mathbf{k}\left((x+y)z - yz \cdot xy\right)$$

Paso 2: Sustituyendo $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ en las expresiones obtenidas:

$$\mathbf{i}\left(2 \cdot 3(1^2 + 2^2) - 3^3\right) = \mathbf{i}\,(6 \cdot 5 - 27) = 3\mathbf{i}$$

$$-\mathbf{j}\left((1+2)(1^2+2^2) - 3^2(1 \cdot 2)\right) = -\mathbf{j}\,(3(1+4) - 9 \cdot 2) = -\mathbf{j}(15 - 18) = 3\mathbf{j}$$

$$\mathbf{k}\,((1+2)3 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2) = \mathbf{k}\,(9 - 12) = -3\mathbf{k}$$

Resultado final:

$$\mathbf{r}_1(1, 2, 3) \times \mathbf{r}_2(1, 2, 3) = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

3. (2 points) **Derivadas de funciones vectoriales:**

   - Encuentre la derivadas de funciones vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{1+t}, \frac{t}{1+t}, \frac{t^2}{1+t} \rangle$$

Solución: Para encontrar la derivada de la función vectorial, derivamos cada componente de $\mathbf{r}(t)$ con respecto a t:

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{1+t}\right), \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{1+t}\right) \right\rangle$$

Derivamos cada componente usando la regla del cociente:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1+t}\right) = \frac{0(1+t) - 1(1)}{(1+t)^2} = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{1+t}\right) = \frac{(1)(1+t) - t(1)}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{1+t}\right) = \frac{(2t)(1+t) - t^2(1)}{(1+t)^2} = \frac{2t + 2t^2 - t^2}{(1+t)^2} = \frac{t(2+t)}{(1+t)^2}$$

Por lo tanto, la derivada de la función vectorial es:

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle -\frac{1}{(1+t)^2}, \frac{1}{(1+t)^2}, \frac{t(2+t)}{(1+t)^2} \right\rangle$$

4. (2 points) **Integrales de funciones vectoriales:**

   - Encuentre la integral de funciones vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \int_0^1 \langle \frac{1}{1+t}, \frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2} \rangle dt$$

Solución: La integral de una función vectorial se puede resolver integrando cada componente de manera independiente.

1. Primera componente:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \ln(1+t)\Big|_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$

2. Segunda componente:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan(t)\Big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

3. Tercera componente:

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln(2) - \ln(1)\right) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Por lo tanto, la solución completa de la integral de la función vectorial es:

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln(2), \frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\ln(2) \right\rangle$$

5. (3 points) **Vectores tangente unitario, normal y binormal:**

(A) Encuentre los vectores tangente unitario $\mathbf{T}(t)$, normal unitario $\mathbf{N}(t)$ y binormal $\mathbf{B}(t)$.

$$\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2}t, e^t, e^{-t} \rangle$$

(B) Encuentre los vectores tangente unitario $\mathbf{T}(t)$, normal unitario $\mathbf{N}(t)$ y binormal $\mathbf{B}(t)$.

$$\mathbf{r}(t) = \langle t, 3\cos t, 3\sin t \rangle$$

Solución:

(A) Encuentre $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$

(a) **Vector tangente:** Para encontrar el vector tangente unitario, primero necesitamos calcular la derivada de la posición:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\langle \sqrt{2}t, e^t, e^{-t} \rangle = \langle \sqrt{2}, e^t, -e^{-t} \rangle$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\langle \sqrt{2}, e^t, -e^{-t} \rangle}{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}} = \langle \sqrt{2}, e^t, -e^{-t} \rangle \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}}}_{\alpha} = \langle \sqrt{2}\alpha, \alpha e^t, -\alpha e^{-t} \rangle$$

(b) **Vector normal:** El siguiente paso es calcular la derivada del vector tangente:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\langle \sqrt{2}, e^t, -e^{-t} \rangle}{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}}\right)$$

Utilizamos la regla del cociente para derivar:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}} \cdot \langle 0, e^t, e^{-t} \rangle - \langle \sqrt{2}, e^t, -e^{-t} \rangle \cdot \frac{d}{dt}\left(\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}\right)}{\left(\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}\right)^2}$$

Derivamos el denominador:

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}\right) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}}$$

Reemplazamos esta derivada en la expresión del vector tangente derivado:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}} \cdot \langle 0, e^t, e^{-t} \rangle}{\left(\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}\right)^2} - \frac{\langle \sqrt{2}, e^t, -e^{-t} \rangle \cdot \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}}\right)}{\left(\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}\right)^2}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \langle 0, e^t, e^{-t} \rangle \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}}}_{\alpha} - \langle \sqrt{2}, e^t, -e^{-t} \rangle \cdot \underbrace{\frac{(e^{2t} - e^{-2t})}{\left(\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}\right)^3}}_{\beta}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \langle 0, e^t, e^{-t} \rangle \cdot \alpha - \langle \sqrt{2}, e^t, -e^{-t} \rangle \cdot \beta = \langle -\sqrt{2}\beta, (\alpha - \beta)e^t, (\alpha + \beta)e^{-t} \rangle$$

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{2\beta^2 + (\alpha - \beta)^2 e^{2t} + (\alpha + \beta)^2 e^{-2t}}$$

Finalmente, simplificamos el resultado para obtener el vector normal:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{\langle -\sqrt{2}\beta, (\alpha - \beta)e^t, (\alpha + \beta)e^{-t} \rangle}{\sqrt{2\beta^2 + (\alpha - \beta)^2 e^{2t} + (\alpha + \beta)^2 e^{-2t}}}$$

$$\mathbf{N}(t) = \langle -\sqrt{2}\beta, (\alpha - \beta)e^t, (\alpha + \beta)e^{-t} \rangle \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\beta^2 + (\alpha - \beta)^2 e^{2t} + (\alpha + \beta)^2 e^{-2t}}}}_{\gamma}$$

$$\mathbf{N}(t) = \langle -\sqrt{2}\beta\gamma, (\alpha - \beta)\gamma e^t, (\alpha + \beta)\gamma e^{-t} \rangle$$

(c) **Vector binormal:** El vector binormal se encuentra tomando el producto cruzado entre $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \sqrt{2}\alpha & \alpha e^t & -\alpha e^{-t} \\ -\sqrt{2}\beta\gamma & (\alpha-\beta)\gamma e^t & (\alpha+\beta)\gamma e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \alpha e^t & -\alpha e^{-t} \\ (\alpha-\beta)\gamma e^t & (\alpha+\beta)\gamma e^{-t} \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \sqrt{2}\alpha & -\alpha e^{-t} \\ -\sqrt{2}\beta\gamma & (\alpha+\beta)\gamma e^{-t} \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \sqrt{2}\alpha & \alpha e^t \\ -\sqrt{2}\beta\gamma & (\alpha-\beta)\gamma e^t \end{vmatrix}$$

(B) Encuentre $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$

(a) **Vector tangente:** Para encontrar el vector tangente unitario, primero necesitamos calcular la derivada de la posición:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d}{dt}\langle t, 3\cos t, 3\sin t\rangle = \langle 1, -3\sin t, 3\cos t\rangle$$

Luego, calculamos la magnitud de $\mathbf{r}'(t)$:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1^2 + (-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} = \sqrt{1 + 9\sin^2 t + 9\cos^2 t} = \sqrt{10}$$

Ahora, el vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle 1, -3\sin t, 3\cos t\rangle$$

(b) **Vector normal:** El siguiente paso es calcular la derivada del vector tangente:

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\langle 1, -3\sin t, 3\cos t\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle 0, -3\cos t, -3\sin t\rangle$$

La magnitud de $\mathbf{T}'(t)$ es:

$$|\mathbf{T}'(t)| = \sqrt{(-3\cos t)^2 + (-3\sin t)^2} = \sqrt{9\cos^2 t + 9\sin^2 t} = 3$$

El vector normal unitario es:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{1}{3}\langle 0, -3\cos t, -3\sin t\rangle = \langle 0, -\cos t, -\sin t\rangle$$

(c) **Vector binormal:** El vector binormal se encuentra tomando el producto cruzado entre $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Calculamos el producto cruzado:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle 1, -3\sin t, 3\cos t\rangle, \quad \mathbf{N}(t) = \langle 0, -\cos t, -\sin t\rangle$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3\sin t}{\sqrt{10}} & \frac{3\cos t}{\sqrt{10}} \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\langle 3, \sin t, \cos t\rangle$$

6. (3 points) **Planos normal, osculador y rectificante:**

- Encuentre las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en $(1, 0, 0)$.

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln\cos(t) \rangle$$

Solución:
Para hallar los planos, necesitamos los vectores tangente unitario $\mathbf{T}(t)$, normal $\mathbf{N}(t)$, y binormal $\mathbf{B}(t)$. La curva parametrizada $\mathbf{r}(t)$ es:

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln\cos(t) \rangle$$

Encontrar t tal que $\mathbf{r}(t) = (1, 0, 0)$.

$$\cos(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 0.$$

La primera derivada $\mathbf{r}'(t)$.

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle -\sin(t), \cos(t), \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \right\rangle$$

Evaluando en $t = 0$:

$$\mathbf{r}'(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

La segunda derivada $\mathbf{r}''(t)$.

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -\cos(t), -\sin(t), -\frac{1}{\cos^2(t)} \rangle$$

Evaluando en $t = 0$:

$$\mathbf{r}''(0) = \langle -1, 0, -1 \rangle$$

El vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\left\langle -\sin(t), \cos(t), \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \right\rangle}{\sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + \left(\frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2}} = \frac{\left\langle -\sin(t), \cos(t), \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \right\rangle .}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}}$$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\left\langle -\sin(t), \cos(t), \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \right\rangle .}{\sqrt{\frac{\cos^2(t)+\sin^2(t)}{\cos^2(t)}}} = \frac{\left\langle -\sin(t), \cos(t), \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \right\rangle .}{\frac{1}{\cos(t)}} = \left\langle -\sin(t), \cos(t), \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \right\rangle . \cos(t)$$

Evaluamos en $t = 0$:

$$\mathbf{T}(t) = \langle 0, 1, 0 \rangle \cdot (1) = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

El vector normal unitario es:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}''(t)|} = \frac{\langle -\cos(t), -\sin(t), -\frac{1}{\cos(t)} \rangle}{\sqrt{(-\cos(t))^2 + (-\sin(t))^2 + \left(-\frac{1}{\cos(t)}\right)^2}} = \frac{\langle -\cos(t), -\sin(t), -\frac{1}{\cos(t)} \rangle}{\sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2(t)}}}$$

Evaluamos en $t = 0$:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\langle -1, 0, -1 \rangle}{\sqrt{1+1}} = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

El vector binormal se obtiene como el producto vectorial de los vectores tangente y normal unitarios:

$$\mathbf{B}(0) = \mathbf{T}(0) \times \mathbf{N}(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

- **Plano osculador:** Formado por los vectores $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, en $t=0$:

$$B(0)\cdot(r-r(0))=0$$

$$\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle\cdot((x,y,z)-(1,0,0))=\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle\cdot(x-1,y,z)=0$$

$$\langle -1,0,1\rangle\cdot(x-1,y,z)=-x+1+z=0$$

- **Plano normal:** Formado por los vectores $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ en $t=0$:

$$T(0)\cdot(r-r(0))=0$$

$$\langle 0,1,0\rangle\cdot(x-1,y,z)=y=0$$

- **Plano rectificante:** Formado por los vectores $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ en $t=0$:

$$N(0)\cdot(r-r(0))=0$$

$$\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle\cdot(x-1,y,z)=-x+1-z=0$$

Conclusión:

- Ecuación del plano osculador: $-x+z=1$
- Ecuación del plano normal: $y=0$
- Ecuación del plano rectificante: $x+z=1$

7. (2 points) **Funciones de varias variables:**

- Determine y trace el dominio de la función.

$$\mathbf{f}(x,y)=\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}$$

Solución: Para que la función $\mathbf{f}(x,y)$ esté bien definida, debemos asegurarnos de que las expresiones dentro de las raíces cuadradas sean no negativas, es decir:

$$x-2\geq 0 \quad \text{y} \quad y-1\geq 0$$

Esto nos lleva a las siguientes desigualdades:

$$x\geq 2 \quad \text{y} \quad y\geq 1$$

En otras palabras, el dominio es la región en el plano xy que satisface estas condiciones.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 2 \text{ y } y\geq 1\}$$

8. (2 points) **Limites y continuidad:**

- Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-4y^2}{x^2+2y^2}$$

Solución:

Para analizar el límite, evaluamos por diferentes trayectorias hacia el punto $(0,0)$.

A lo largo del eje x (cuando $y = 0$):

$$\frac{x^4 - 4(0)^2}{x^2 + 2(0)^2} = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

A lo largo del eje y (cuando $x = 0$):

$$\frac{0^4 - 4y^2}{0^2 + 2y^2} = \frac{-4y^2}{2y^2} = -2$$

Entonces,

$$\lim_{y\to 0} -2 = -2.$$

Como obtenemos diferentes resultados en distintas trayectorias (0 y -2), podemos concluir que: **El límite no existe.**

9. (2 points) **Derivadas Parciales:**

- Determine las derivadas parciales $(F_x, F_y, F_{xx}, F_{yy}, F_{xy}, F_{xy})$ de la función.

$$F(x,y) = x^2y - 3y^4$$

Solución:

- Derivada parcial con respecto a x:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - 3y^4) = 2xy$$

- Derivada parcial con respecto a y:

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y - 3y^4) = x^2 - 12y^3$$

- Derivada parcial segunda con respecto a x (segunda derivada parcial):

$$F_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) = 2y$$

- Derivada parcial segunda con respecto a y (segunda derivada parcial):

$$F_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 12y^3) = -36y^2$$

- Derivada parcial mixta con respecto a x y luego y:

$$F_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x$$

- Derivada parcial mixta con respecto a y y luego x:

$$F_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 12y^3) = 2x = F_{xy}$$

Por lo tanto, las derivadas parciales de la función $F(x,y)$ son:

$$F_x = 2xy, \quad F_y = x^2 - 12y^3, \quad F_{xx} = 2y, \quad F_{yy} = -36y^2, \quad F_{xy} = F_{yx} = 2x$$