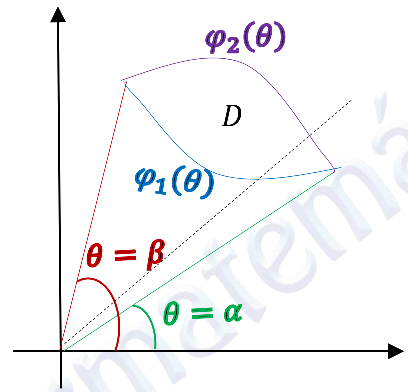
# Sesión 22: Integrales dobles y triples (III)

Vamos a revisar el concepto de la integral doble en coordenadas polares.

El dominio $D$ esta limitado por:

Las curvas $r = \varphi_2(\theta)$ y $r = \varphi_1(\theta)$, donde $\varphi_2(\theta) \geq \varphi_1(\theta)$

Y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$,donde $\alpha < \beta$.




Supongamos además que el dominio $D$ es tal que:

Todo rayo (recta que parte del origen) corta el dominio a lo más en dos puntos.

Un dominio tal diremos que es regular, y en ese caso, si está definida una función continua $f(\theta, r)$ en ese dominio, entonces la integral doble de la función $f(\theta, r)$ en ese dominio $D$ es:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\theta, r) r dr d\theta$$

Considera el siguiente dominio $D$ y la función $f(x,y,z)$ continua en $D$:

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \quad a \leq x \leq b, \quad g_1 \leq y \leq g_2, \quad h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y)\}$$

Donde:

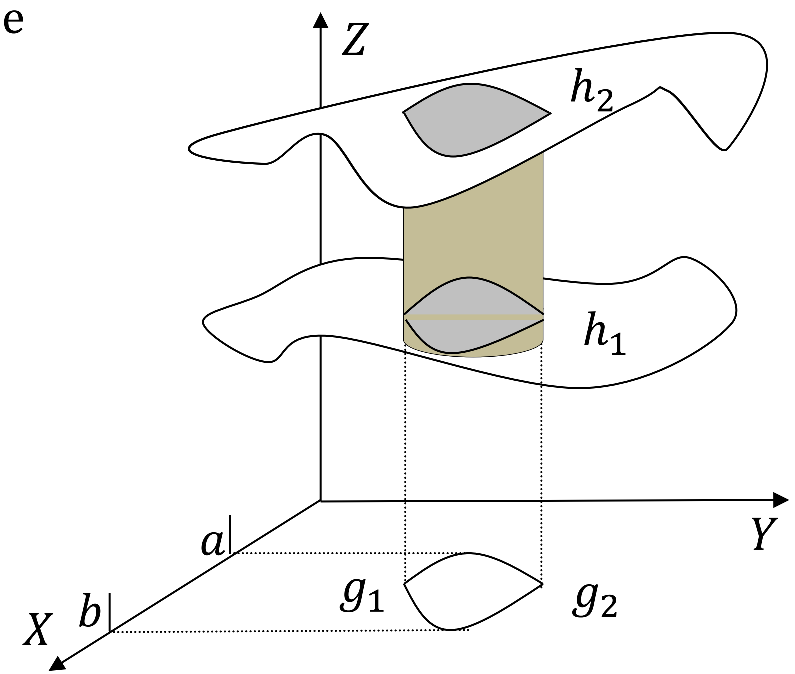
$g_1, g_2$: $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones con derivada continua tales que $g_1 \leq g_2 \ \forall x \in [a,b]$.

$h_1(x,y), h_2(x,y)$ son funciones de dos variables con derivadas parciales continuas.

Entonces la integral triple en el dominio $D$ de la función $f(x,y,z)$ es:

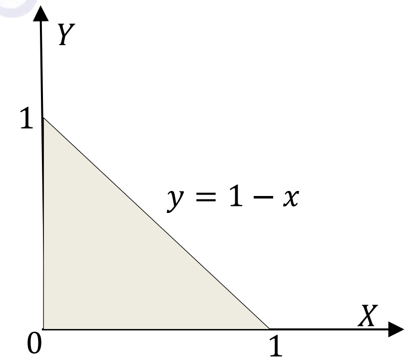
$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left( \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx.$$

**Si hacemos $f(x,y,z) = 1$,** la integral anterior proporciona el volumen del dominio $D$ donde $\boldsymbol{h_1(x,y)}$ y $\boldsymbol{h_2(x,y)}$ son superficies en $\mathbb{R}^3$.



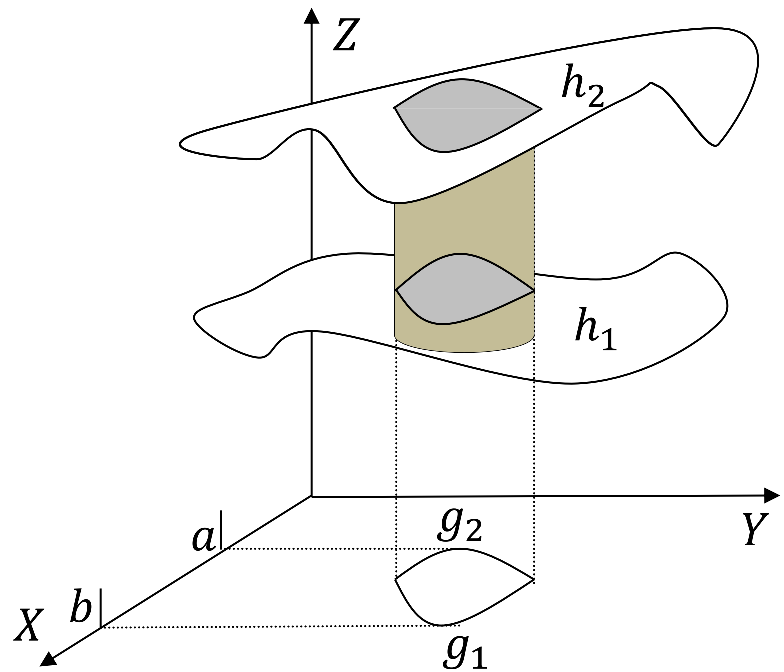
**Ejemplo** Vamos a plantear sin resolver la integral triple de la región $D$ del espacio encerrada por la superficie $z = 8 - x^2 - y^2$ y los planos $x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

$$D = \{(x, y, z): \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1 - x, \qquad 0 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\}$$




$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \left( \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right) dy \right) dx$$

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{8-x^2-y^2} 1 * dz \right) dy \right) dx$$



**P1)** Calcula el volumen de la región interior al cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ limitada inferiormente por el plano $z = 0$ , y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

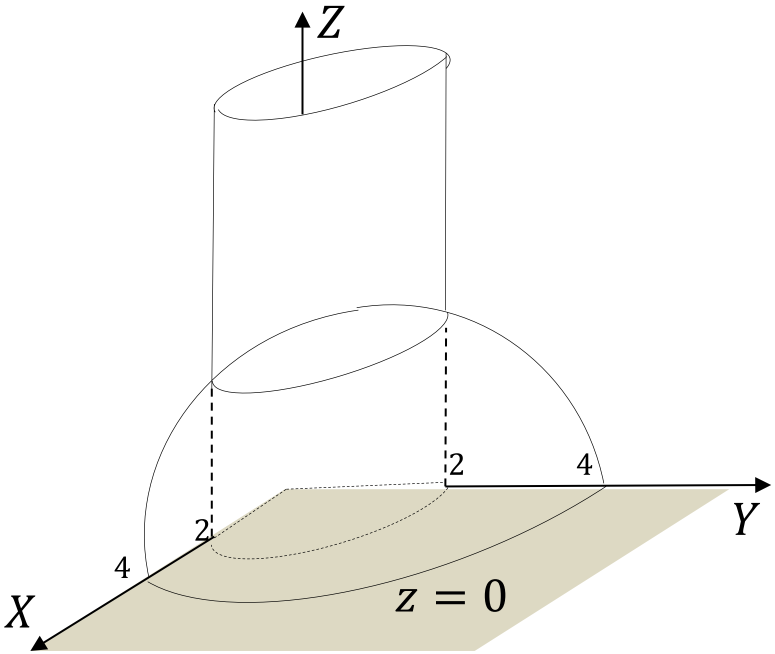
**Solución**

Hay que calcular $\iiint_D 1dxdydz$, siendo $D$ la parte interior del cilindro comprendida entre el plano $OXY$ y la esfera.

$$\iiint_D 1 * dxdydz = \int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{0}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz\right) dy\right) dx$$

**Muy complicada!!**

Utilizaremos coordenadas cilíndricas:




$$\begin{Bmatrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\text{sen}(\theta) \\ z = z \end{Bmatrix} \Longrightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

$D = \{(r,\theta,z)\}$:

$0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le r \le 2, \qquad 0 \le z \le \sqrt{16 - r^2}$

$$\iiint\limits_D 1dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta =$$

$$\int_0^{\sqrt{16-r^2}} dz = [z]_0^{\sqrt{16-r^2}} = \sqrt{16-r^2}$$

$$\int_0^2 \sqrt{16-r^2}rdr = -\frac{1}{2}\int_0^2 (16-r^2)^{\frac{1}{2}}(-2rdr) = -\frac{1}{2}\left[\frac{(16-r^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^2 = -\frac{1}{3}\left[(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2$$

$$= -\frac{1}{3}\left[12^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left(64-24\sqrt{3}\right)$$

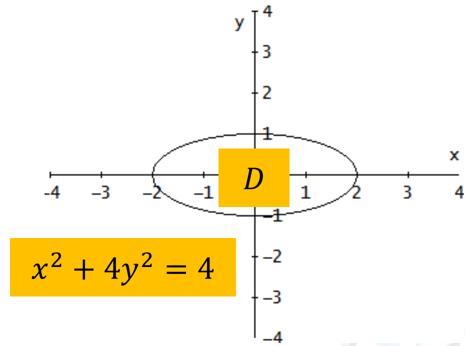
$$V = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\left(64-24\sqrt{3}\right)d\theta = \frac{1}{3}\left(64-24\sqrt{3}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{16\pi}{3}\left(8-3\sqrt{3}\right)$$

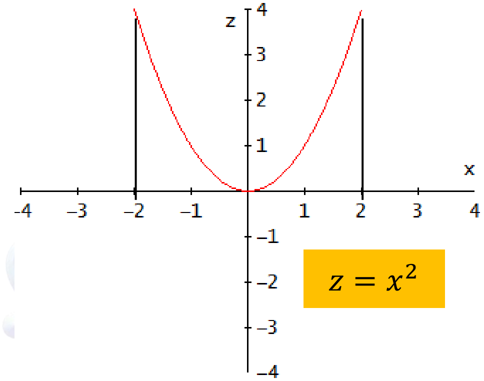
**P2)** Halla el volumen del sólido encerrado por:

La superficie $z = x^2 + 6y^2$,

El plano $z = 0$, y

El cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.




## Solución

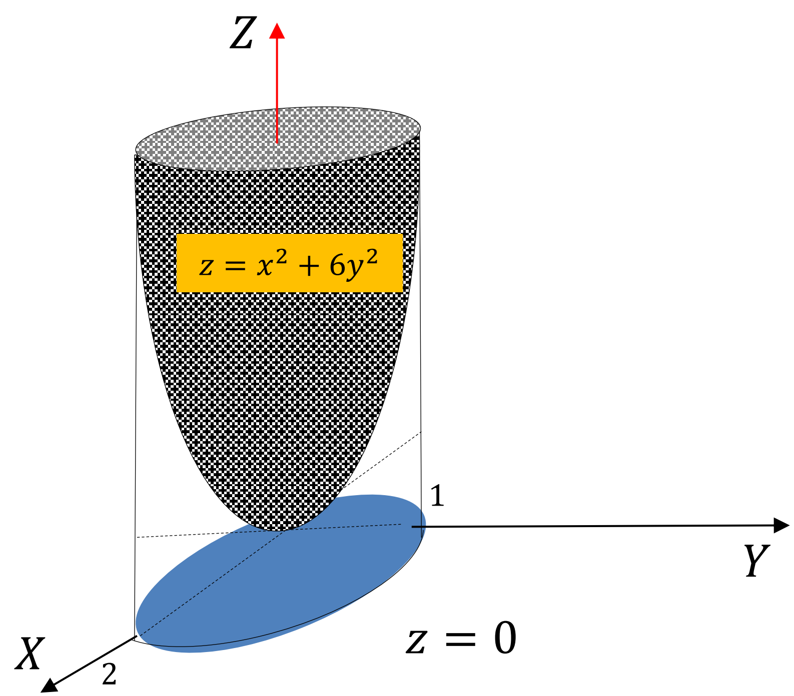
La superficie $z = x^2 + 6y^2$ es un paraboloide.

El cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$ es una elipse en el plano $OXY$: $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$

Queremos el volumen con base la elipse y altura el paraboloide.

$$V = \iint_D (x^2 + 6y^2)\,dydx$$

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} (x^2 + 6y^2)\,dydx$$




**Muy complicado!!** Mejor usamos coordenadas elípticas (como el dominio)

Coordenadas elípticas:

Si tengo la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ utilizo: $\begin{Bmatrix} x = a\,r\cos(\theta) \\ y = b\,r\operatorname{sen}(\theta) \end{Bmatrix}$ con: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=rab$

Como tengo la elipse $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$ utilizaré: $\begin{Bmatrix} x = 2\,r\cos(\theta) \\ y = r\operatorname{sen}(\theta) \end{Bmatrix}$ con: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=2r$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+4y^2\leq 4\}$$

$$D=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2: 4r^2\cos^2(\theta)+4r^2\operatorname{sen}^2(\theta)\leq 4\}\Longrightarrow$$

$$D=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2: 4r^2\leq 4\}\Longrightarrow$$

$$D=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2: r^2\leq 1\}\Longrightarrow\ 0\leq r\leq 1,\qquad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

$$V=\iint_D (x^2+6y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(4r^2\cos^2(\theta)+6r^2\operatorname{sen}^2(\theta)\right)2rdrd\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(8r^3\cos^2(\theta)+12r^3\operatorname{sen}^2(\theta)\right)drd\theta=\int_0^{2\pi}\left[2r^4\cos^2(\theta)+6r^4\operatorname{sen}^2(\theta)\right]_0^1$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta[2r^4\cos^2(\theta)+6r^4\operatorname{sen}^2(\theta)]_0^1=\int_0^{2\pi}\left(2\cos^2(\theta)+3\operatorname{sen}^2(\theta)\right)d\theta$$

$$\boxed{\operatorname{sen}^2(\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(2+\operatorname{sen}^2(\theta)\right)d\theta$$

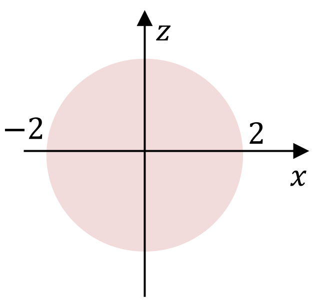
$$V=\int_0^{2\pi}\left(2+\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)d\theta=\frac{5}{2}\int_0^{2\pi}d\theta-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2\theta)\,d\theta=5\pi-\frac{1}{4}[\operatorname{sen}(2\theta)]_0^{2\pi}=5\pi$$

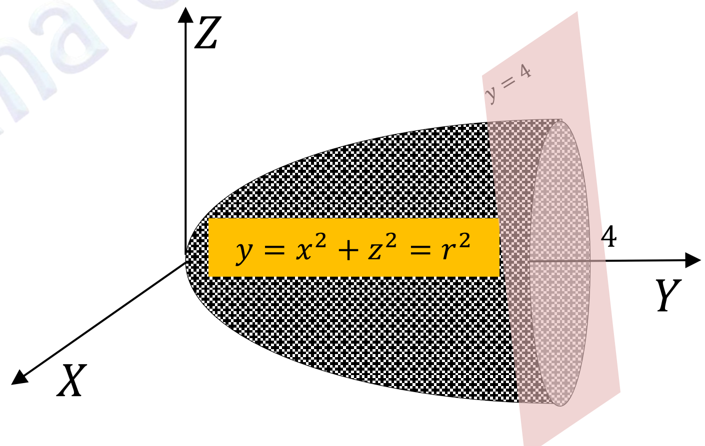
**P4)** Calcula $\iiint_D \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz$ siendo $D$ la región delimitada por el plano $y=4$ y el paraboloide $y=x^2+z^2$

**Solución**

La sección de integración es el paraboloide de sección transversal circular paralela al plano $OXZ$.

Si proyectamos la región de la integración en el plano $OXZ$ obtenemos una circunferencia de radio 2 y centro en el origen: $x^2+z^2=4$




$$\iiint_D \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{x^2+z^2}\sqrt{x^2+z^2}\,dydzdx$$

**Muy complicado!!**

Utilizaremos coordenadas cilíndricas

$$\begin{Bmatrix} x = r\cos(\theta) \\ y = y \\ z = r\mathrm{sen}(\theta) \end{Bmatrix} \text{con } \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \Longrightarrow D = \left\{(r, y, \theta):\ \ 0 \le y \le 4, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{y}\right\}$$

$$I = \iiint_D \sqrt{x^2 + z^2}\, dxdydz = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{r^2} r dr d\theta dy$$

$$I = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{y}} d\theta dy = \int_0^4 \int_0^{2\pi} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} d\theta dy = 2\pi \int_0^4 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} dy = 2\pi \left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{15}{2}}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{15}$$