

Tema: Integrales Dobles y Triples

1. Calcule $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ siendo
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$

2. Calcule $\iint_D f(x, y) dx dy$ siendo
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

3. Calcule $\iint_D (4x + 7y) dx dy$ donde
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^3 \leq y \leq x\}$
4. Considere la aplicación T definida por las ecuaciones

$$x = u + v, \quad y = v - u^2.$$

- a) Calcule el Jacobiano $J_T(u, v)$
- b) Un triángulo Q en el plano UV tiene vértices $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$.
Represente, mediante un dibujo, la imagen $T(Q) = D$ en el plano XY .
- c) Calcule el área de D mediante una integral doble sobre D y también otra integral doble sobre Q .
5. Calcular el volumen bajo la superficie

$$z = e^{x^2 + y^2}$$

limitado por la curva $x^2 + y^2 = 4$ y el plano XY .

6. Calcular el volumen, en el primer octante, del sólido limitado por los cilindros

$$y^2 = x, \quad x^2 = y$$

y que queda debajo del plano $z = x + y$

7. Evaluar

$$\int_R \int 48xy dx dy$$

utilizando el cambio de variables

$$x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v)$$

donde la región R es el cuadrado con vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$ y $(1,-1)$ 8. Las integrales iteradas que siguen corresponden a integrales dobles de f sobre ciertos dominios. Dibujar esos dominios y expresarlas como integrales iteradas en el orden inverso de integración.

a)
$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx$$

b)
$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy$$

c)
$$\int_1^e dx \int_0^{\log(x)} dy$$

9. Calcular el volumen del sólido del primer octante, limitado por las superficies

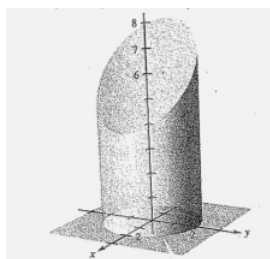
$$x^2 + y^2 = z, \quad x^2 + y^2 = 2y$$

10. Calcular el volumen de la región limitada por los plano

$$z = 2x + y, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad x + 2y = 2$$

11. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, siendo E el sólido formado por la hoja superior de cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$ 12. Utilizando integrales triples, encontrar el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.13. Evaluar $\iiint_E (z^2 x^2 + z^2 y^2) dx dy dz$ donde E es el sólido determinado por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y $-1 \leq z \leq 1$

14. Calcular el volumen limitado por los planos $4x + 2y + 2z - 18 = 0$, $2x + 3y + z - 3 = 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ en el primer octante.
15. Evaluar $\iiint_Q 3xdV$ donde Q es el sólido acotado por $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 6$, y el plano XY .



16. Evaluar $\iiint_Q 2(xz + 1)dV$ donde Q es el sólido acotado por las superficies $y^2 + z^2 = 4$; $x = 1$; $x = 8 - y$

Respuestas

1. **Rpta:**

$$\frac{\pi}{2}$$

2. **Rpta:**

$$\frac{21}{40} - \frac{2}{5\sqrt{2}}$$

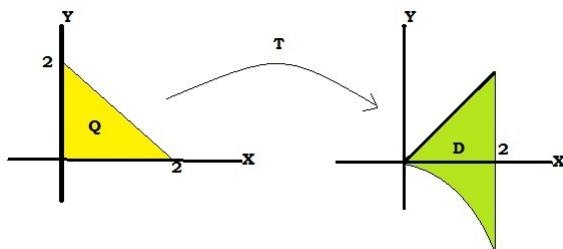
3. **Rpta:**

$$\frac{6}{5}$$

4. **Rpta:**

a) $J_T(u, v) = 1 + 2u$

b)



c) $\frac{14}{3}$

5. **Rpta:**

$$V = \pi(e^4 - 1)$$

6. **Rpta:**

$$\frac{3}{10}$$

7. **Rpta:**

$$0$$

8. **Rpta:**

9. **Rpta:**

$$V = \frac{3}{4}\pi$$

10. **Rpta:**

$$V = \frac{5}{3}$$

11. **Rpta:**

$$\frac{\pi}{6}$$

12. **Rpta:**

$$\frac{32\pi}{3}$$

13. **Rpta:**

$$\frac{\pi}{3}$$

14. **Rpta:**

$$24\pi + \frac{16}{3}$$

15. **Rpta:**

$$-12\pi$$

16. **Rpta:**

$$28\pi$$