## GUÍA PRÁCTICA TEMA II: INTEGRALES DE LÍNEA

***1.*** Calcule las integrales de línea de los *campos vectoriales* $\vec{F}$. Graficar la región de integración $C$.

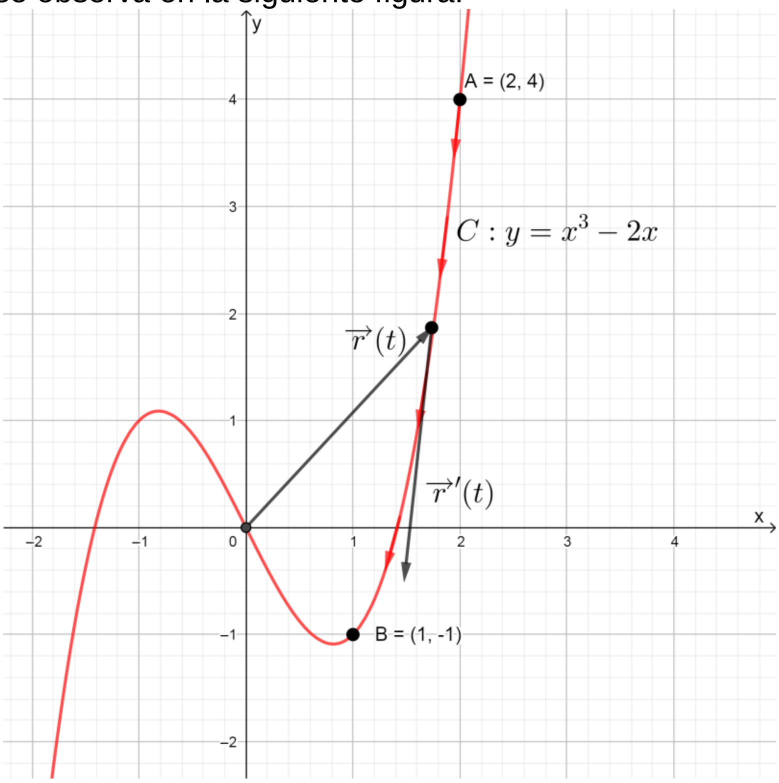
a. $\vec{F}(x,y) = x^2\hat{\imath} - x\,y\,\hat{\jmath}$, a lo largo de la curva $C: x^2 + y^2 = 1$, comenzando por el punto $(0,1)$ hasta el punto $(1,0)$.

b. $\vec{F}(x,y,z) = x\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} - (xy - zx)\hat{k}$, a lo largo del segmento de recta de extremos$(0,0,0)$ y $(1,2,2)$.

c. $\vec{F}(x,y) = xy\,\hat{\imath} - (x-2)\hat{\jmath}$, a lo largo de la curva $C: y = x^3 - 2x$, desde el punto (2,4) al punto (1,-1).

***Solución.*** (Ejercicio 1 c.)

- La curva $C$ se observa en la siguiente figura:




Debido a que la curva está dada en forma explícita (esto es, una función del tipo $y = f(x)$), la parametrización, mediante el vector posición $\vec{r}(t)$, más adecuada es:

$$\vec{r}(t)\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^3 - 2t \end{cases}$$

El vector tangente a la curva, obtenido al derivar las componentes del vector posición con respecto al parámetro $t$, resulta:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = (3t^2 - 2)dt \end{cases}$$

Por lo tanto, el vector tangente resulta:

$$\vec{r}'(t) = [1\hat{\imath} + (3t^2 - 2)\hat{\jmath}]\, dt$$

- El vector posición $\vec{r}(t)$ se utiliza para parametrizar el campo vectorial (llevarlo a una única variable $t$). Por lo tanto, se tiene:

$$\vec{F}(x,y) = xy\,\hat{\imath} - (x-2)\hat{\jmath} \rightarrow \vec{F}[\vec{r}(t)] = t(t^3 - 2t)\hat{\imath} - (t-2)\hat{\jmath}$$

Operando:

$$\vec{F}[\vec{r}(t)] = (t^4 - 2t^2)\hat{\imath} + (2-t)\hat{\jmath}$$

- La integral de línea se calcula como:

$$w = \int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t)]\cdot\vec{r}'(t)\, dt$$

Como el parámetro $t$ se ha escogido igual a $x$, los límites de este serán iguales a los valores de abscisa de los puntos A y B de la curva $C$. Por lo tanto:

$$2 \le x = t \le 1$$

La integral de línea resulta:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}[\vec{r}(t)]\cdot\vec{r}'(t)\, dt = \int_2^1 [(t^4 - 2t^2)\hat{\imath} + (2-t)\hat{\jmath}]\cdot[1\hat{\imath} + (3t^2 - 2)\hat{\jmath}]\, dt$$

Debe resolverse el producto escalar componente a componente antes de integrar:

$$w = \int_2^1 [(t^4 - 2t^2) + (-3t^3 + 6t^2 + 2t - 4)]\, dt = \int_2^1 (t^4 - 3t^3 + 4t^2 + 2t - 4)\, dt$$

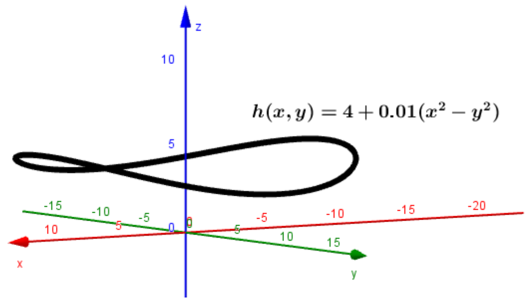
$$w = \int_2^1 (t^4 - 3t^3 + 4t^2 + 2t - 4)\, dt = \frac{t^5}{5} - \frac{3t^4}{4} + \frac{4t^3}{3} + t^2 - 4t\Bigg|_2^1$$

$$\boxed{w = \frac{1}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{3} + 1 - 4 - \left(\frac{2^5}{5} - \frac{3\ 2^4}{4} + \frac{4\ 2^3}{3} + 2^2 - 4\ 2\right) = -\frac{197}{60}}$$

**2.** Calcule las integrales de línea de los siguientes *campos escalares* $f(x,y)$. Graficar la región de integración.

a. $\int_C x\,ds$ y $C: y = x^2 - 1$ entre los puntos (-1,-2) y (2,7).

b. La base de un vallado circular de $10\,m$ de radio, puede describirse en forma paramétrica como $\vec{r}(t) = 10\cos t\,\hat{\imath} + 10\,\mathrm{sen}\,t\,\hat{\jmath}$. La altura del vallado en un punto genérico $(x,y)$ está dada por la función $h(x,y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$ (Ver gráfica)




Suponga que un litro de pintura alcanza para pintar $10\,m^2$ de vallado. ¿Cuántos litros de pintura harán falta para pintar ambos lados del vallado?

***Solución.***

Se debe comenzar planteando la siguiente integral:

$$\int_c \left(4 + 0.01\left(x^2 - y^2\right)\right) ds$$

La parametrización de la curca C sería:

$$\bar{r}(t)\begin{cases} x = 10\cos t \\ y = 10 sent \end{cases} \rightarrow \quad \bar{r}\,'(t)\begin{cases} x' = -10 sent \\ y' = 10\cos t \end{cases} \rightarrow \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Luego:

$$\int_c h(x,y)ds = \int_c h(\bar{r}(t))\|\bar{r}\,'(t)\|dt$$

Calculamos las partes de la integral de la siguiente manera:

$$\|\bar{r}\,'(t)\| = \sqrt{(-10sent)^2 + (10\cos t)^2} = \sqrt{100sen^2 t + 100\cos^2 t} = \sqrt{100\left(sen^2 t + \cos^2 t\right)} = \sqrt{100} = 10$$

$$h(\bar{r}(t)) = 4 + 0.01\left(100\cos^2 t - 100sen^2 t\right) = 4 + \left(\cos^2 t - sen^2 t\right)$$

$$h(\bar{r}(t))\|\bar{r}\,'(t)\| = \left(4 + \left(\cos^2 t - sen^2 t\right)\right)10 = 40 + 10\left(\cos^2 t - sen^2 t\right)$$

Reemplazando en la integral y resolviendo:

$$\int_c h(x,y)ds = \int_c h(\bar{r}(t))\|\bar{r}\,'(t)\|dt = \int_0^{2\pi}\left(40 + 10\left(\cos^2 t - sen^2 t\right)\right)dt = \left(40t + 5sen(2t)\right)\Big|_0^{2\pi} = 80\pi$$

El resultado de la integral revela los metros cuadrados de un lado del vallado, por lo tanto, considerando ambos lados se tendría un total de *160π m²* de superficie para pintar. Como *1 litro* de pintura alcanza para pintar *10 m²*, para este caso serían necesarios ***16π = 50.26*** *litros* de pintura.

***3.*** Dado el campo $\vec{F}(x,y) = x\hat{\imath} + (y+2)\hat{\jmath}$,

a. Calcule la integral del campo $\vec{F}$ a lo largo de.

  i. $C: y = x$ desde (0,0) hasta (1,1).

  ii. $C: x = y^3$ desde (0,0) hasta (1,1).

  iii. $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ desde (0,0) hasta (1,1).

b. Observe los resultados obtenidos en el inciso a, ¿qué concluye? Justifique.

c. Si cambia la trayectoria e integra entre (0,0) hasta (1,1) el mismo campo vectorial $\vec{F}$ ¿qué valor obtiene? Justifique.

***Solución.***

**a. i.**

Se plantea la siguiente integral:

$$\int_c \overline{F}(x,y)dr$$

La parametrización de la curca C sería:

$$\overline{r}(t)\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \overline{r}'(t)\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 \le t \le 1$$

Luego:

$$\int_c \overline{F}(x,y)dr = \int_c \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\,dt$$

Calculamos las partes de la integral de la siguiente manera:

$$\overline{r}'(t) = 1\vec{i} + 1\vec{j}$$

$$\overline{F}(\overline{r}(t)) = t\vec{i} + (t+2)\vec{j}$$

$$\overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t) = \left(t\vec{i} + (t+2)\vec{j}\right)\left(1\vec{i} + 1\vec{j}\right) = t + t + 2 = 2t + 2$$

Reemplazando en la integral y resolviendo:

$$\int_c \overline{F}(x,y)dr = \int_c \overline{F}(\overline{r}(t)) \cdot \overline{r}'(t)\,dt = \int_0^1 (2t+2)\,dt = \left(t^2 + 2t\right)\Big|_0^1 = 3$$

**ii.**

La parametrización de la curca C sería:

$$\bar{r}(t)\begin{cases} y = t \\ x = t^3 \end{cases} \rightarrow \quad \bar{r}'(t)\begin{cases} y' = 1 \\ x' = 3t^2 \end{cases} \rightarrow \quad 0 \le t \le 1$$

Calculamos las partes de la integral de la siguiente manera:

$$\bar{r}'(t) = 3t^2\vec{i} + 1\vec{j}$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = t^3\vec{i} + (t+2)\vec{j}$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t) = \left(t^3\vec{i} + (t+2)\vec{j}\right)\left(3t^2\vec{i} + 1\vec{j}\right) = 3t^5 + t + 2$$

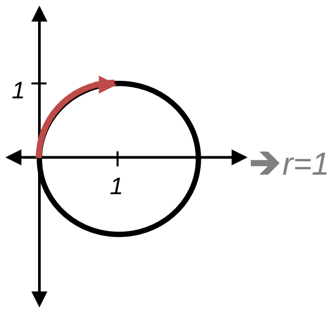
Reemplazando en la integral y resolviendo:

$$\int_c \bar{F}(x,y)dr = \int_c \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t)dt = \int_0^1 \left(3t^5 + t + 2\right)dt = \left(\frac{t^6}{2} + \frac{t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_0^1 = 3$$

**iii.**

La parametrización de la curca C sería:

$$\bar{r}(t)\begin{cases} x - 1 = r\cos t \rightarrow x = r\cos t + 1 \\ y = rsent \end{cases} \rightarrow \quad \bar{r}'(t)\begin{cases} x' = -rsent \\ y' = r\cos t \end{cases} \rightarrow \quad \pi \le t \le \frac{\pi}{2}$$




Calculamos las partes de la integral de la siguiente manera:

$$\bar{r}'(t) = (-sent)\vec{i} + (\cos t)\vec{j}$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t)) = (1+\cos t)\vec{i} + (2+sent)\vec{j}$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t) = \left((1+\cos t)\vec{i} + (2+sent)\vec{j}\right)\left(-sent\vec{i} + \cos t\vec{j}\right) = -sent - sent\cos t + 2\cos t + sent\cos t$$

$$\bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t) = -sent + 2\cos t$$

Reemplazando en la integral y resolviendo:

$$\int_c \bar{F}(x,y)dr = \int_c \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t)dt = \int_\pi^{\frac{\pi}{2}} (-sent + 2\cos t)dt = (\cos t + 2sent)\Big|_\pi^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_c \bar{F}(\bar{r}(t))\cdot\bar{r}'(t)dt = \cos\frac{\pi}{2} + 2sen\frac{\pi}{2} - \cos\pi - 2sen\pi = 0 + 2 - (-1) - 0 = 3$$

b. Se observa que todos los resultados son iguales, es decir que $\int_c \bar{F}(x,y)dr$ es independiente de la trayectoria, esto se debe a que el campo vectorial $\bar{F}$ es conservativo. Lo que se demuestra con $P_y = Q_x = 0$

c. Siempre se obtendrá como resultado 3, independientemente de la trayectoria que se tome, siempre y cuando los límites de integración vayan de (0,0) a (1,1). Esto se debe a que el campo es conservativo, es decir, existe función potencial y se calcula de la siguiente manera:

$$\phi = \int_a^x P(x,b)dx + \int_b^y Q(x,y)dy$$

$$\phi = \int_a^x xdx + \int_b^y (y+2)dy = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^x + \left.\left(\frac{y^2}{2} + 2y\right)\right|_b^y = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2y - \frac{b^2}{2} + 2b$$

$$\phi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2y + C$$

Luego,

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \bar{F}(x,y)dr = \phi(1,1) - \phi(0,0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 2 - 0 - 0 - 0 = 3$$

***4.*** Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz)\hat{\imath} + (xz - e^x \operatorname{sen} y)\hat{\jmath} + xy\hat{k}$, determine si el campo es conservativo. Halle la función potencial, en caso de existir.

***5.*** Dada el campo escalar $f(x,y,z) = xyz^2 - x \operatorname{sen} y + 8z$, calcule $\int_{(2,3,4)}^{(-1,5,-8)} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$. Justifique.

***6.*** La fuerza gravitacional de la Tierra sobre un objeto de masa $m$ está dada por el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = -mg\hat{k}$ (válido solamente en las cercanías de la superficie), siendo $g$ la aceleración de la gravedad. Determine la función potencial $\emptyset(x,y,z)$ y utilícela para mostrar que el trabajo realizado por $\vec{F}$ al mover un objeto desde el punto de coordenadas $(x_1, y_1, z_1)$ a otro punto cercano de coordenadas $(x_2, y_2, z_2)$ resulta $mg(z_1 - z_2)$.

***7.*** Calcule el trabajo que realiza un objeto, al aplicar una fuerza $\vec{F}$,. Para recorrer un camino $C$ aplicando el teorema de Green. Graficar la curva $C$ e indicar la región de integración $R$.

a. $\vec{F}(x,y) = (e^x + 2y)\,\hat{\imath} + (x^2 + \operatorname{sen} y)\hat{\jmath}$ y $C$ el rectángulo de vértices $(2{,}1);\ (6{,}1);\ (6{,}4)\ y\ (2{,}4)$

b. $\vec{F}(x,y) = (y - x)\hat{\imath} + (y^2 - x)\hat{\jmath}$ y $C$ la frontera de la región $2 \leq x^2 + y^2 \leq 3$, con $x \geq 0,\ y \geq 0.$

***Solución***

La región $R$ se presenta en la siguiente figura. Como las componentes del campo vectorial $\vec{F}$ admiten derivadas parciales primeras y además la región es cerrada, simplemente conexa, y sus fronteras son regulares a trozos, es posible aplicar el teorema de Green para resolver la integral curvilínea. Esto es:

$$w = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Siendo $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ las componentes del campo vectorial $\vec{F}(x,y)$ según las direcciones $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$, respectivamente.

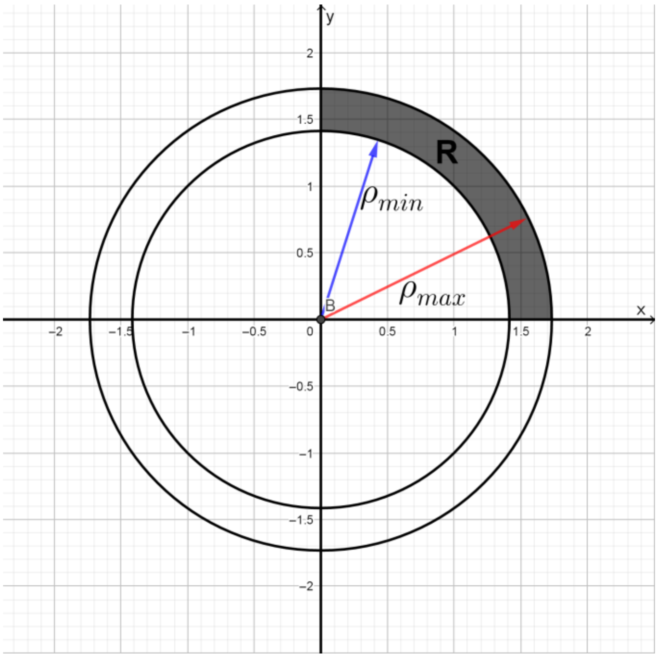
En este caso, se tiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(y^2 - x)}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(y - x)}{\partial y} = 1$$

Por lo tanto, la integral de línea resulta:

$$w = \iint_R (-1 - 1)\,dx\,dy = \iint_R -2\,dx\,dy$$



El siguiente paso es determinar los límites de la región $R$, que como se aprecia en la figura, es una corona circular, por lo que será más sencillo el cálculo si se realiza un cambio de coordenadas.

Se plantea el cambio de coordenadas desde las cartesianas a polares:

$$\text{Cambio de coord.}\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\theta \end{cases}$$

El factor de proporcionalidad entre ambos sistemas (Jacobiano) es:

$$J = \rho$$

Los límites de $\rho$ se obtendrán al reemplazar las ecuaciones del cambio de coordenadas en las ecuaciones de la figura:

$$2 \le x^2 + y^2 \le 3 \to 2 \le \rho^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) \le 3$$

$$2 \le \rho^2 \le 3 \to \sqrt{2} \le \rho \le \sqrt{3}$$

Para determinar los límites del ángulo $\theta$, se observa la figura. Es claro que:

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la integral de línea a resolver es:

$$w = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} -2\rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\rho^2|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -(3-2)\, d\theta$$

$$\boxed{w = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -1\, d\theta = -\theta|_0^{\pi/2} = -\frac{\pi}{2}}$$

c. $\oint_C (x^3 + 2y)dx + (4x - 3y^2)dy$ y $C: x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

***8.*** Calcule las integrales de línea de los campos dados a continuación:

a. $\vec{F}(x,y) = (y - x)\hat{\imath} + \sqrt{x}\hat{\jmath}$ y $C$ el segmento de recta que une los puntos $(5{,}45)$ y $(10,-22)$.

b. $\vec{F}(x,y) = (3 + 2xy)\hat{\imath} + (x^2 - 3y^2)\hat{\jmath}$ y $C$ se encuentra dada en forma paramétrica por el vector $\vec{r}(t)$: $\begin{cases} x(t) = e^t\,\text{sen}\,t \\ y(t) = e^t\cos t \end{cases}$, con $0 \le t \le \pi$.

c. $\vec{F}(x,y,z) = y^2\,\hat{\imath} + (2xy + e^{3z})\,\hat{\jmath} + 3ye^{3z}\hat{k}$, siendo $C$ el triángulo de vértices $(0{,}0);\ (0{,}1)\ y\ (1{,}1)$.

d. Utilizando el campo vectorial del apartado c. calcule el trabajo realizado por el mismo a través de la curva $C: z = \ln(x^2 + y^2) - 4\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ entre los puntos $P_1(2, 2, 2.08)$ y $P_2(4, 4, 3.46)$.

**Ejercicio Resuelto**

***b.*** $\vec{F}(x,y) = (3+2xy)\hat{\imath} + (x^2 - 3y^2)\hat{\jmath}$ y $C$ se encuentra dada en forma paramétrica por el vector $\vec{r}(t)$: $\begin{cases} x(t) = e^t \operatorname{sen} t \\ y(t) = e^t \cos t \end{cases}$, con $0 \leq t \leq \pi$.

***Solución.***

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(3+2xy)}{\partial y} = 2x$$

$$Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2-3y^2)}{\partial x} = 2x$$

Se tiene que $P_y = Q_x$ , entonces $\vec{F}$ es conservativo.

Luego, existe la función potencial y se calcula como,

$$\phi = \int_a^x P(x,b)dx + \int_b^y Q(x,y)dy$$

$$\phi = \int_a^x (3+2xb)dx + \int_b^y (x^2-3y^2)dy$$

$$\phi = (3x + x^2 b)|_a^x + (x^2 y - y^3)|_b^y$$

$$\phi = (3x + x^2 b) - (3a + a^2 b) + (x^2 y - y^3) - (x^2 b - b^3)$$

$$\phi = 3x + x^2 b - 3a - a^2 b + x^2 y - y^3 - x^2 b + b^3$$

$$\phi = 3x + x^2 y - y^3 - 3a - a^2 b + b^3$$

$$\phi = 3x + x^2 y - y^3 + C \quad ; \quad C\ constante$$

Ahora se calcula la integral de línea pedida,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

$$A = \big(x(0); y(0)\big) = (e^0 \operatorname{sen} 0\, ; e^0 \cos 0) = (0;1)$$

$$B = \big(x(\pi); y(\pi)\big) = (e^\pi \operatorname{sen} \pi\, ; e^\pi \cos \pi) = (0;-e^\pi)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A) = \phi(0;-e^\pi) - \phi(0;1)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 3 \cdot 0 + 0^2(-e^\pi) - (-e^\pi)^3 + C - (3 \cdot 0 + 0^2 \cdot 1 - 1^3 + C \quad )$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = e^{3\pi} + 1 \cong 12392{,}65$$