Tarea 1: Cálculo de Varias Variables

Facultad de Ingeniería Sistemas

Fecha de entrega: 20 de Setiembre de 2024

Instrucciones

Resuelve los siguientes problemas de manera clara y completa. Asegúrate de incluir todos los pasos necesarios para llegar a la solución. Aplica los conceptos aprendidos en clase y justifica tus respuestas cuando sea necesario.

Dominio y Rango de Funciones Vectoriales

Determina el dominio y el rango de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, donde:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

Para determinar el **dominio** de la función $\mathbf{r}(t)$, analizamos las funciones componentes $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$. El dominio de $\mathbf{r}(t)$ será la intersección de los dominios de estas funciones.

$$\begin{aligned} \text{Dominio de } f_1(t) &: \quad \text{(describir)} \\ \text{Dominio de } f_2(t) &: \quad \text{(describir)} \\ \text{Dominio de } f_3(t) &: \quad \text{(describir)} \\ \text{Dominio de } \mathbf{r}(t) &: \quad \text{Intersección de los anteriores} \end{aligned}$$

El **rango** de $\mathbf{r}(t)$ se obtiene analizando el comportamiento de las componentes en función de t:

$$\text{Rango de } \mathbf{r}(t) = \{\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \text{Dominio de } \mathbf{r}(t)\}$$

1. Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$. Determine su dominio y rango.
   Solución:
   El dominio de la función es $t \in \mathbb{R}$, ya que las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores reales de t.
   El rango está dado por $\mathbf{r}(t)$ que describe un círculo unitario en el plano xy, es decir, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

2. Sea $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$. Determine el dominio y rango de esta función.
   Solución:
   El dominio de la función está restringido por la raíz cuadrada, por lo tanto $t \geq 0$.
   El rango es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, ya que $t^2 \geq 0$ y $\sqrt{t} \geq 0$.

3. Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \ln(t) \end{pmatrix}$. Encuentre su dominio y rango.
   Solución:
   El dominio está restringido por $\ln(t)$, por lo que $t > 0$.
   El rango es $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^2$, ya que $e^t \in (0, \infty)$ y $\ln(t) \in (-\infty, \infty)$ para $t > 0$.

4. Sea $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ t^3 \end{pmatrix}$. Determine el dominio y rango de esta función.
   Solución:
   El dominio es $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, debido a la división por cero.
   El rango es $\mathbb{R}^2$, ya que $\frac{1}{t}$ toma todos los valores reales menos cero y t^3 también cubre todos los reales.

5. Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \arctan(t) \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$. Encuentre su dominio y rango.
Solución:
El dominio está limitado por la raíz cuadrada, por lo tanto $-1 \leq t \leq 1$.
El rango es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\pi/2, \pi/2), 0 \leq y \leq 1\}$.

6. Sea $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}$. Determine el dominio y rango de esta función.
Solución:
El dominio es $t > 0$, debido a la función logaritmo.
El rango es $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (-\infty, \infty), y \geq -4\}$.

7. Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2-1}{t+1} \\ t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$. Encuentre su dominio y rango.
Solución:
El dominio es $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ debido a la indeterminación en $t = -1$.
El rango depende de la función cuadrática y la fracción racional, pero para $t \neq -1$, cubre $\mathbb{R}^2$.

8. Sea $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$. Determine el dominio y rango de esta función.
Solución:
El dominio es $t \in \mathbb{R}$, ya que tanto e^{-t} como $\cosh(t)$ están definidas para todos los reales.
El rango es $(0, 1] \times [1, \infty)$, ya que $e^{-t} \in (0, 1]$ y $\cosh(t) \geq 1$.

Operaciones con Funciones Vectoriales

Considera las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$, define y calcula:

- **Suma:**

$$\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + g_1(t) \\ f_2(t) + g_2(t) \\ f_3(t) + g_3(t) \end{pmatrix}$$

- **Producto por un escalar:**

$$c \cdot \mathbf{r}_1(t) = c \cdot \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot f_1(t) \\ c \cdot f_2(t) \\ c \cdot f_3(t) \end{pmatrix}$$

- **Producto escalar:**

$$\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)$$

- **Producto vectorial:**

$$\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

9. Dados los vectores $\mathbf{u}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle \sin t, \cos t, e^t \rangle$, encuentra $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$.
Solución:
Sumamos componente por componente:

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle t + \sin t, t^2 + \cos t, t^3 + e^t \rangle.$$

10. Si $\mathbf{a}(t) = \langle 3t^2, t, 2t \rangle$ y $\mathbf{b}(t) = \langle 2, t^2, \ln t \rangle$, calcula $\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$.
Solución:
Sumamos componente por componente:

$$\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t) = \langle 3t^2 + 2, t + t^2, 2t + \ln t \rangle.$$

11. Para el vector $\mathbf{w}(t) = \langle t, t^2, 1 \rangle$ y el escalar $k(t) = 2t$, encuentra $k(t)\mathbf{w}(t)$.
Solución:
Multiplicamos cada componente de $\mathbf{w}(t)$ por $k(t)$:

$$k(t)\mathbf{w}(t) = \langle 2t^2, 2t^3, 2t \rangle.$$

12. Dado $\mathbf{c}(t) = \langle e^t, \cos t, \sin t \rangle$ y $k = 3$, calcula $k\mathbf{c}(t)$.
Solución:
Multiplicamos cada componente de $\mathbf{c}(t)$ por k:

$$3\mathbf{c}(t) = \langle 3e^t, 3\cos t, 3\sin t \rangle.$$

13. Si $\mathbf{p}(t) = \langle 1, t, t^2 \rangle$ y $\mathbf{q}(t) = \langle 2, t^2, t^3 \rangle$, halla $\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}(t)$.
Solución:
Calculamos el producto punto:

$$\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}(t) = 1(2) + t(t^2) + t^2(t^3) = 2 + t^3 + t^5 = 2 + t^3 + t^5.$$

14. Dado $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ y $\mathbf{s}(t) = \langle t^2, e^t, t^3 \rangle$, calcula $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)$.
Solución:
El producto punto es:

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t) = \cos t(t^2) + \sin t(e^t) + t(t^3) = t^2 \cos t + e^t \sin t + t^4.$$

15. Para los vectores $\mathbf{u}(t) = \langle t, 1, t^2 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle 1, t, t^3 \rangle$, encuentra $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$.
Solución:
Calculamos el producto cruzado:

$$\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & 1 & t^2 \\ 1 & t & t^3 \end{vmatrix}.$$

Resolviendo este determinante:

$$\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t) = \langle t^3 - t^2, t^2 - t^3, t - t \rangle = \langle t^3 - t^2, t^2 - t^3, 0 \rangle.$$

16. Dados $\mathbf{a}(t) = \langle t^2, t, 1 \rangle$ y $\mathbf{b}(t) = \langle \sin t, \cos t, e^t \rangle$, calcula $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$.
Solución:
Usamos el determinante para el producto cruzado:

$$\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & t & 1 \\ \sin t & \cos t & e^t \end{vmatrix}$$

Expandiendo el determinante, encontramos:

$$\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t) = \langle te^t - \cos t, e^t t^2 - \sin t, t^2 \cos t - t \sin t \rangle.$$

17. Dados los vectores $\mathbf{f}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{g}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, calcula la expresión $(\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{f}(t)$.
Solución:
Primero sumamos los vectores:

$$\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \langle t + \cos t, t^2 + \sin t, t^3 + t \rangle.$$

Luego, calculamos el producto punto:

$$(\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{f}(t) = (t + \cos t)t + (t^2 + \sin t)t^2 + (t^3 + t)t^3.$$

Simplificando:

$$= t^2 + t \cos t + t^4 + t^2 \sin t + t^6 + t^4.$$

18. Para $\mathbf{h}(t) = \langle e^t, t, t^2 \rangle$ y $\mathbf{k}(t) = \langle t, \sin t, \cos t \rangle$, encuentra $\mathbf{h}(t) \times (\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{h}(t))$.
Solución:
Primero calculamos el producto punto:

$$\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{h}(t) = te^t + t \sin t + t^2 \cos t.$$

Luego, realizamos el producto cruzado:

$$\mathbf{h}(t) \times (\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{h}(t)) = \langle e^t, t, t^2 \rangle \times (te^t + t \sin t + t^2 \cos t).$$

Aquí, el resultado será un vector que depende del producto escalar obtenido.

19. Si $\mathbf{m}(t) = \langle t^3, \cos t, t \rangle$ y $\mathbf{n}(t) = \langle t^2, \sin t, t^4 \rangle$, calcula $\mathbf{m}(t) \cdot (\mathbf{m}(t) \times \mathbf{n}(t))$.
Solución:
Primero calculamos el producto cruzado:

$$\mathbf{m}(t) \times \mathbf{n}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^3 & \cos t & t \\ t^2 & \sin t & t^4 \end{vmatrix}.$$

Luego, calculamos el producto punto:

$$\mathbf{m}(t) \cdot (\mathbf{m}(t) \times \mathbf{n}(t)).$$

20. Dado el vector $\mathbf{v}(t) = \langle t, e^t, t^2 \rangle$, calcula $(2\mathbf{v}(t)) \times \mathbf{v}(t)$.
Solución:
Sabemos que:

$$(2\mathbf{v}(t)) = \langle 2t, 2e^t, 2t^2 \rangle.$$

Calculamos el producto cruzado:

$$(2\mathbf{v}(t)) \times \mathbf{v}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2e^t & 2t^2 \\ t & e^t & t^2 \end{vmatrix}.$$

21. Calcula $(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) \cdot (\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t))$ para $\mathbf{u}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle \sin t, \cos t, e^t \rangle$.
Solución:
Calculamos el producto cruzado:

$$\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t),$$

y luego el producto punto con $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$.

22. Si $\mathbf{f}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{g}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, encuentra la derivada de $(\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t))$ con respecto a t.
Solución:
Primero calculamos el producto punto:

$$\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = t \cos t + t^2 \sin t + t^3 t,$$

luego derivamos con respecto a t.