Elementos de Cálculo II
8. Integrales Dobles y Triples.

La bibliografía que utilizaremos para este tema es:

- Principal: Capítulo 8 de las Notas de clase.
- Principal: Capítulo 5, 6, Marsden-Tromba , "Cálculo vectorial", 5 ed. Perason Addison-Wesley.
- Complementario: Capítulo 15, G. Thomas, "Cálculo. Varias variables." 11ed. Pearson Educación.

1 Integrales dobles.

1. Resuelva las siguientes integrales iteradas.

$$\text{(a) } \int_2^3 \int_{-1}^1 \left(3x^2y + 2x\right)\, dx\, dy \qquad \text{(b) } \int_0^1 \int_{-1}^2 \frac{x^2+2}{x^3+6x+1}\, 3y^2 dy\, dx$$

2. Para cada una de las integrales dobles:
   (a) dibuje la región de integración,
   (b) escriba los límites de integración $\int\int_D f(x,y)\, dxdy$ y calcule su valor
   (c) invierta el orden de integración y calcule su valor
      i. $\int\int_D \left(x^2 + 3xy\right)\, dA,\ \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 4x + 5\right\}$
      ii. $\int\int_D y\, dA,\ \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \ \wedge\ 2 - x \leq y\right\}$
      iii. $\int\int_D e^{x/y}\, dA,\ \ D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \leq y^3 \ \wedge\ 1 \leq y \leq 2\right\}$
      iv. $\int\int_D \frac{x-y}{(x+y)^2}\, dA, D = [0,1] \times [0,1]$
      v. $\int\int \frac{e^{tx/y}}{y^3} dA,\ D = [0,t] \times [1,t]\,,\ t > 0$

3. Evalue la integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{\sqrt{x+y^2}} dydx$$

4. Para cada una de las siguientes funciones $f(x,y)$ definida sobre el cuadrado $D = [0,1] \times [0,1]$, se pide determinar el conjunto

$$C = \{(x,y) \in D : \ f \ \text{ no es continua en } \ (x,y)\}$$

y calcular la integral $\int\int_D f(x,y)\, dA$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - (x+y) & x + y \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

5. Dibuje la región de integración, estudie la existencia de la integral y calcule su valor en cada uno de los siguientes casos. Piense una estrategia para resolver estas integrales de la manera más sencilla posible.
   (a) $\int\int_D x\cos(x+y)\, dxdy$ donde D es el triángulo de vértices $(0,0)\,, (\pi,0)\,, (\pi,\pi)\,.$
   (b) $\int\int_D e^{x+y}$ donde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\|_1 \leq 1\right\}$.

(c) $\int\int_D x^2y^2dxdy$ siendo D la porción acotada del primer cuadrante situada entre las dos hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 2$ y las líneas rectas $y = x$ e $y = 4x$.

(d) $\int\int_D (x-y)^2 .sen\,(x+y)\; dx\,dy$ donde D es el paralelogramo de vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, (π, π) y $(2\pi, 2\pi)$.

(e) $\int\int_D (x+y)^2\; dx\,dy$, $\; D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$

(f) $\int\int_D \log\left(x^2 + y^2\right)\; dx\,dy$, donde D es la región en el primer cuadrante comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = a^2$, con $0 < a < b$.

6. Graficar las siguientes regiones y calcular sus áreas por doble integración.

(a) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x + 2\right\}$

(b) $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge 9 - x^2 \leq 6y\right\}$

2 Integrales triples

1. Calcule las siguientes integrales triples.

(a) $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} 6e^x\,(y + 2z)\; dz\,dy\,dx$

(b) $\int_1^2 \int_0^z \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{2x}{x^2+y^2}\; dy\,dx\,dz$

2. Encuentre el volumen bajo el gráfico de $f(x, y) = |x + y|$ sobre el disco de centro en $(0, 0)$ y radio 1.

3. Grafique los siguientes sólidos y calcule su volumen.

(a) D es la región limitada por los planos coordenados y el plano π que contiene al punto $(0, 0, 1)$ y es generado por los vectores $(1, 0, 2)$ y $(3, 2, 0)$.

(b) D es el interior del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

(c) $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x + z \leq 2 \wedge 0 \leq z\right\}$

(d) $D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 8 - x^2 - y^2\right\}$

(e) D es el interior de la esfera de centro en $(0, 0, 0)$ y radio R.

(f) El volumen común de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

3 Aplicaciones

1. La temperatura en los puntos del cubo $Q = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

(a) ¿Cuál es la temperatura media? sabiendo que el valor medio está definido por

$$[T]_m = \frac{\int\int\int_Q T(x, y, z)\, dV}{\int\int\int_Q dV}$$

(b) ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

2. (Tercer parcial 2019) Sea una lámina ubicada sobre el plano XY dada por $D = A - B$, donde

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 + 1 \leq y \leq 5 - x, 0 \leq x \leq 3\right\} \\ B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (2,1)\|_\infty \leq r\right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la lámina tiene una densidad de masa $\delta(x,y) = x + 1$, calcule

(a) Si $r = 1/2$, la masa total de D

$$m(D) = \int\int_D \delta(x,y)\, dxdy$$

(b) Si $r = 1/2$, calcule el centro de masa o de gravedad de $D : (\overline{x}, \overline{y})$

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{m(D)} \int\int_D x.\delta(x,y)\, dxdy \\ \overline{y} &= \frac{1}{m(D)} \int\int_D y.\delta(x,y)\, dxdy \end{aligned}$$

2020,FCEN, UNCuyo