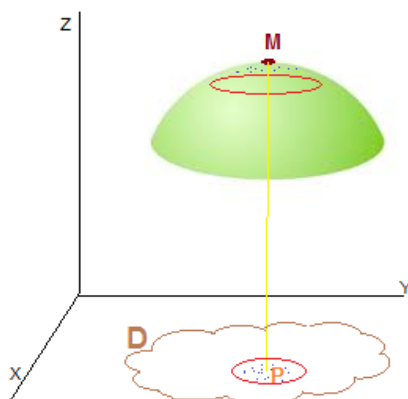


Definición

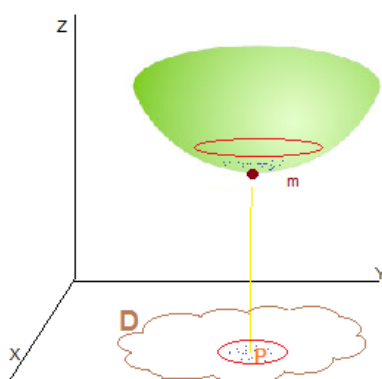
Sea D una región del plano. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

- Se dice que f alcanza su valor **máximo absoluto** M en un punto $P = (x_0, y_0) \in D$ cuando $M = f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$.
- Se dice que f tiene un **máximo relativo** en un punto $P = (x_0, y_0) \in D$ cuando $f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y)$ perteneciente a un entorno de (x_0, y_0) .



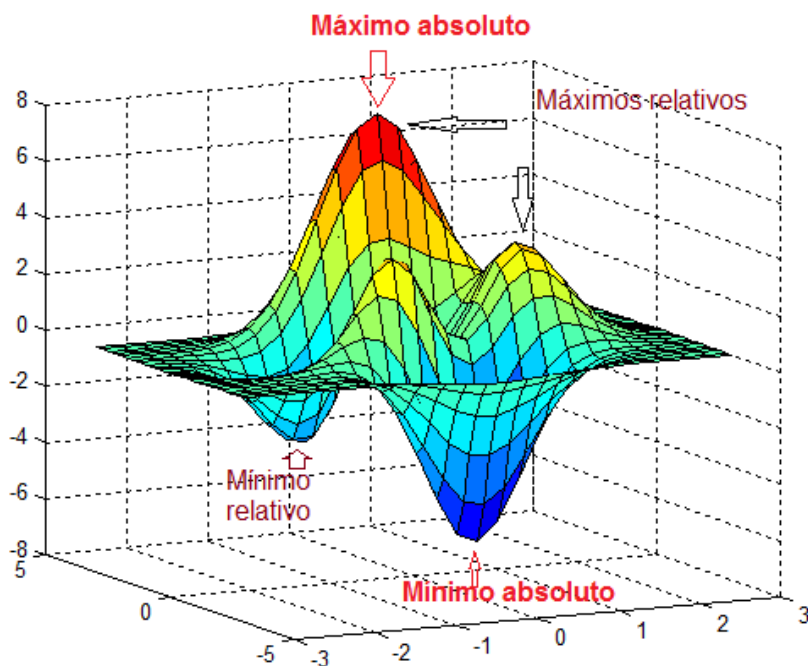
Existe un entorno de P donde la función toma valores menores que en P

- Se dice que f alcanza su valor **mínimo absoluto** m en un punto $P = (x_0, y_0) \in D$ cuando $m = f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$.
- Se dice que f tiene un **mínimo relativo** en un punto $P = (x_0, y_0) \in D$ cuando $f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y)$ perteneciente a un entorno de (x_0, y_0) .

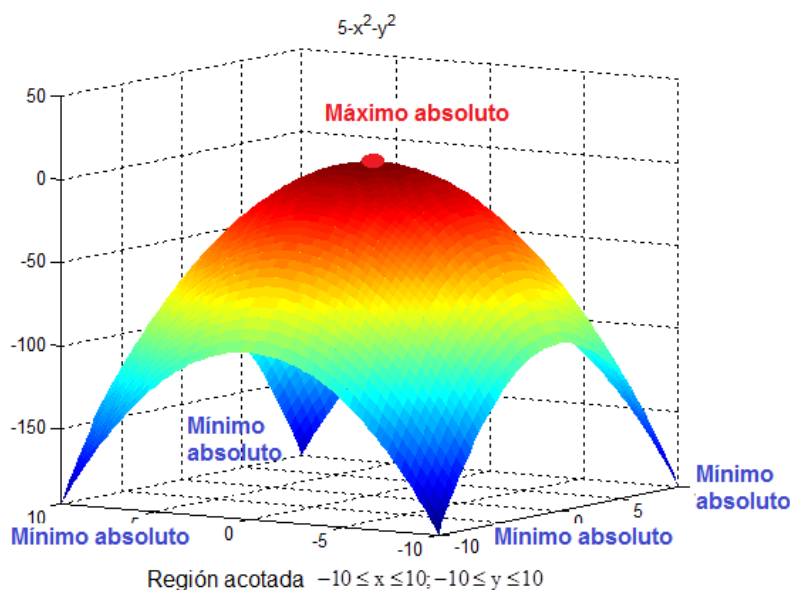


Existe un entorno de P donde la función toma valores mayores que P .

Máximos y mínimos de una función real de dos variables reales



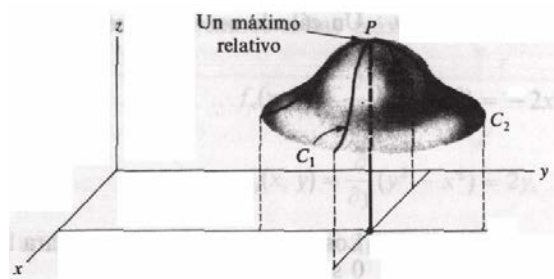
Geométricamente: Los máximos y mínimos de una función de dos variables miden altitudes máximas y mínimas sobre la superficie que constituye la gráfica de la función (son como las cotas del punto más elevado de una colina ó del punto más profundo de una hondonada). No tienen porqué existir, sin embargo, lo mismo que el **teorema de Weierstrass** nos garantizaba la existencia de máximo y mínimo absolutos de una función $y = f(x)$ continua en $[a, b] \subset \mathbb{R}$, puede demostrarse que $z = f(x, y)$ continua alcanza su valor máximo y su valor mínimo absolutos en una región D cerrada (incluye el borde) y acotada del plano.



Teorema 1. Condiciones necesarias para la existencia de extremos relativos

Supongamos que $z = f(x,y)$ tiene un valor extremo (máximo ó mínimo relativo) en un punto $f(x_0,y_0)$ en el entorno del cual f está definida y que existen f_x y f_y en dicho punto, entonces $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

Demostración:



Sean r_1 y r_2 las rectas $y = y_0$ y $x = x_0$ respectivamente, en el plano $x y$.

Sea c_1 la curva en la superficie cuya proyección sobre el plano $x y$ es la recta r_1 .

Sea análogamente c_2 la curva en la superficie cuya proyección sobre el plano $x y$ es la recta r_2 .

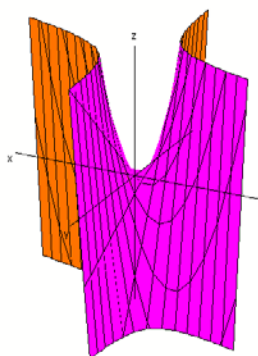
Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ el punto de la superficie cuya proyección es (x_0, y_0) .

Supongamos que f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) , entonces, P es el punto más alto sobre la superficie en un entorno suyo, luego P es el punto más alto sobre la curva c_1 y sobre la curva c_2 (para puntos próximos a P). Por tanto, por la teoría de máximos relativos para funciones de una variable, se tiene que $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Conclusión: Si buscamos los extremos relativos de una función hay que analizar los puntos donde las derivadas parciales valen cero ó no existen. Dichos puntos se llaman **puntos críticos ó estacionarios de f** .

El teorema anterior no es suficiente para estudiar el problema de la existencia de los valores extremos de la función. Sin embargo, si estamos seguros de que existen, este teorema nos permite hallar sus valores. En caso contrario es preciso hacer un estudio más detallado: Analizando los valores de la función en un entorno del punto crítico ó bien recurriendo a las derivadas parciales de orden superior al primero en el punto en cuestión.

Para funciones de una variable, $y = f(x)$, si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en x_0 . Vamos a tratar de buscar un criterio análogo para funciones de dos variables. Es preciso decir (¡y es una pena!) que si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, aunque f_{xx} y f_{yy} sean positivas en (x_0, y_0) , no podemos garantizar que f tenga un mínimo relativo en (x_0, y_0) . (Contraejemplo: $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ en $(x_0, y_0) = (0, 0)$).





Máximos y mínimos de una función real de dos variables reales



Fórmula de Taylor para una función de dos variables

Sea una función $z=f(x,y)$ continua con derivadas parciales continuas hasta el orden, $n+1$, inclusive, en un entorno del punto $P(a,b)$. Entonces f se puede representar, al igual que en el caso de una variable, como la suma de un polinomio de grado n en dos variables y un resto.

Para **$n=2$** la fórmula de Taylor sería: $f(x,y)=f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

$$+ \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left[f_{xxx}(c_1,b)(x-a)^3 + 3f_{xxy}(c_2,b)(x-a)^2(y-b) + 3f_{xyy}(c_3,b)(x-a)(y-b)^2 + f_{yyy}(a,d)(y-b)^3 \right]$$

siendo $\begin{cases} c_1, c_2, c_3 \in (a,x), \text{ o bien, } (x,a) \\ d \in (b,y), \text{ o bien, } (y,b) \end{cases}$.

1. La expresión $f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$ es la **aproximación lineal** de f
2. $\frac{1}{2!} \left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right]$ es **el término cuadrático** y sumada a la anterior constituye la aproximación cuadrática, o de orden 2.
3. $\frac{1}{3!} \left[f_{xxx}(c_1,b) + 3f_{xxy}(c_2,b)(x-a)^2(y-b) + 3f_{xyy}(c_3,b)(x-a)(y-b)^2 + f_{yyy}(a,d)(y-b)^3 \right]$ es el **término complementario o resto** y lo designaremos **R_2** .

- Para **$n \geq 2$** la fórmula de Taylor sería totalmente análoga.

Demostración:

Desarrollaremos, en primer lugar, $f(x,y)$ por Taylor considerando x constante.

$$f(x,y)=f(x,b)+f_y(x,b)(y-b)+\frac{f_{yy}(x,b)}{2!}(y-b)^2+\frac{f_{yyy}(x,d)}{3!}(y-b)^3 \text{ siendo } d \in (y,b) \text{ ó } (b,y) \text{ (1)}.$$

Consideramos ahora los desarrollos de Taylor en $x=a$ de $f(x,b)$, $f_y(x,b)$, $f_{yy}(x,b)$, $f_{yyy}(x,d)$.

$$f(x,b)=f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+\frac{f_{xx}(a,b)}{2!}(x-a)^2+\frac{f_{xxx}(c_1,b)}{3!}(x-a)^3 \text{ con } c_1 \in (a,x) \text{ ó } (x,a).$$

$$f_y(x,b)=f_y(a,b)+f_{xy}(a,b)(x-a)+\frac{f_{xxy}(c_2,b)}{2!}(x-a)^2 \text{ con } c_2 \in (a,x) \text{ ó } (x,a).$$

$$f_{yy}(x,b)=f_{yy}(a,b)+f_{yyx}(c_3,b)(x-a) \text{ con } c_3 \in (a,x) \text{ ó } (x,a).$$

$$f_{yyy}(x,d)=f_{yyy}(a,d). \text{ Sustituyendo en (1):}$$

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + \frac{f_{xx}(a,b)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f_{xxx}(c_1,b)}{3!}(x-a)^3 + \left[f_y(a,b) + f_{xy}(a,b)(x-a) + \frac{f_{xxy}(c_2,b)}{2!}(x-a)^2 \right] (y-b) + \left[f_{yy}(a,b) + f_{yyx}(c_3,b)(x-a) \right] (y-b)^2 + f_{yyy}(a,d)(y-b)^3.$$

Desarrollando y agrupando por el orden de las derivadas: $f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a)$

$$+ f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2!} [f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2]$$

$$+ \frac{1}{3!} [f_{xxx}(c_1,b)(x-a)^3 + 3f_{xxy}(c_2,b)(x-a)^2(y-b) + 3f_{xyy}(c_3,b)(x-a)(y-b)^2 + f_{yyy}(a,d)(y-b)^3]$$

siendo $\begin{cases} c_1, c_2, c_3 \in (a,x), \text{ o bien, } (x,a) \\ d \in (b,y), \text{ o bien, } (y,b) \end{cases}$.

Teorema 2. Condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos. Criterio de la derivada segunda

Sea $z=f(x,y)$ una función definida en $D \subset \mathbb{R}^2$ y $P(x_0,y_0) \in D$. Supongamos que f tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas en D y que $P(x_0,y_0)$ es un punto crítico de f , es decir $f_x(x_0,y_0)=0$ y $f_y(x_0,y_0)=0$, entonces se verifica que:

1º) f tiene un **máximo** en $P(x_0,y_0)$ si:

$$f_{xx}(x_0,y_0) < 0 \text{ y } \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

2º) f tiene un **mínimo** en $P(x_0,y_0)$ si:

$$f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \text{ y } \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0.$$

3º) f no tiene ni máximo ni mínimo en $P(x_0,y_0)$ pues crece en unas direcciones y decrece en otras, diremos que f presenta un **punto de silla**, si:

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} < 0$$

4º) Si $\begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0$, entonces no podemos asegurar que exista o no extremo

en f . Será preciso realizar un estudio más detallado.

Demostración:

Para analizar si f presenta, o no, un extremo en $P(x_0,y_0)$ debemos estudiar si permanece constante, o no, el signo de $f(x,y) - f(x_0,y_0)$, siendo $(x,y) \in E(x_0,y_0) \subset D$.

Designamos $(x,y)=(x_0+h,y_0+k)$, entonces $x-x_0=h$, $y-y_0=k$.



Máximos y mínimos de una función real de dos variables reales



Consideramos la aproximación lineal en la fórmula de Taylor, teniendo en cuenta que

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ y } f_y(x_0, y_0) = 0 :$$

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} [f_{xx}(c_1, y_0)h^2 + 2f_{xy}(c_2, y_0)hk + f_{yy}(x_0, d)k^2]$$

$$\begin{cases} c_1, c_2 \in (x_0, x_0 + h) \\ d \in (y_0, y_0 + k) \end{cases}, \text{ entonces al ser } f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} \text{ continuas en } E(x_0, y_0), \text{ si tomamos } h \text{ y } k$$

suficientemente pequeños, el signo que toma la expresión

$$\frac{1}{2!} [f_{xx}(c_1, y_0)h^2 + 2f_{xy}(c_2, y_0)hk + f_{yy}(x_0, d)k^2] \text{ es igual al que toma}$$

$$[f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2].$$

$$\text{Es decir } \text{signo}(f(x, y) - f(x_0, y_0)) = \text{signo} [f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2].$$

Multiplicando ambos miembros por $f_{xx}(x_0, y_0)$ y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, y_0) [f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2] = \\ (f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 + (f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2)k^2 = \\ (f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k)^2 + \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} k^2, \text{ entonces:} \end{aligned}$$

$$1^\circ) \text{ Si } f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \text{ y } \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0, \text{ entonces ha de ser}$$

$\text{signo}(f(x, y) - f(x_0, y_0)) < 0$, luego f tiene un **máximo relativo en P**.

$$2^\circ) \text{ Si } f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \text{ y } \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0, \text{ ha de ser } \text{signo}(f(x, y) - f(x_0, y_0)) > 0, \text{ luego } f$$

tiene un **mínimo relativo en P**.

$$3^\circ) \text{ Si } \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0, \text{ la función crece en unas direcciones y decrece en otras.}$$

Por ejemplo si $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, la función f crece a lo largo de la recta $k=0$, y decrece a lo largo de la recta $f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k = 0$, (análogamente si $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$).

$$4^\circ) \text{ Si } \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0, \text{ no podemos obtener conclusiones generales acerca del}$$

signo de f pues en este caso, por ser el signo de $f_{xx}(x_0, y_0)$ ($f(x, y) - f(x_0, y_0)$) igual al signo de

Máximos y mínimos de una función real de dos variables reales

$$f_{xx}(x_0, y_0) \left[f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 \right] = \left(f_{xx}(x_0, y_0)h + f_{xy}(x_0, y_0)k \right)^2 \geq 0,$$

cabe la posibilidad de que la expresión $f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 = 0$ y no se puede deducir nada acerca del signo($f(x, y) - f(x_0, y_0)$)

Nota

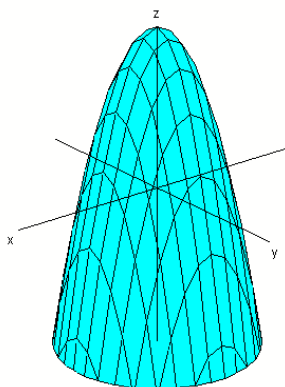
En el teorema anterior $f_{xy} = f_{yx}$ en D y $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$. Éste último determinante recibe el

nombre de **Hessiano de f** .

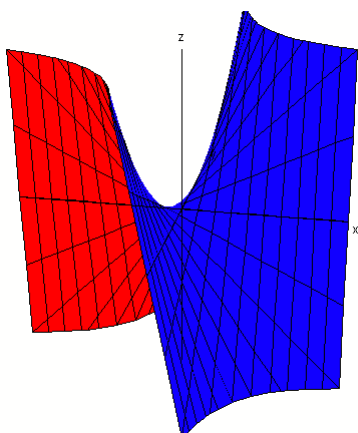
El número $f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ se denomina, a veces, **discriminante de f** .

Ejemplos:

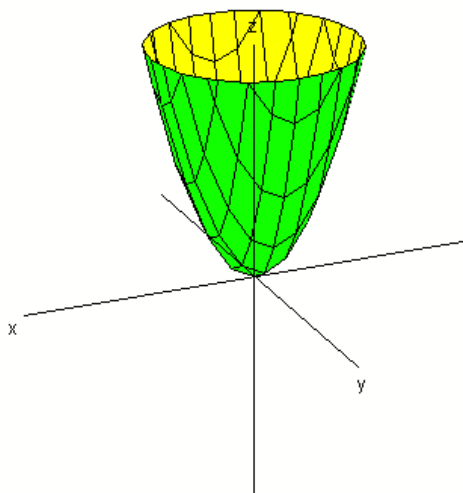
$$f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$$



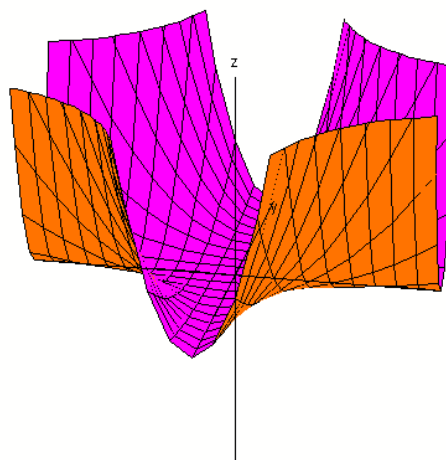
$$f(x, y) = xy$$



$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



$$f(x, y) = x^2 y^2$$





Máximos y mínimos de una función real de dos variables reales



Cálculo de máximos y mínimos absolutos de una función

Si $z=f(x,y)$ es una función continua en una región D cerrada y acotada, ya hemos dicho que f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.

Según lo que acabamos de ver, estos valores se alcanzarán en:

• **Puntos frontera de D**

• **Puntos críticos de f** (puntos interiores de D en los que $f_x = f_y = 0$, o alguna de ellas no exista).

Calculando f en todos ellos y eligiendo los valores mayor y menor tendremos los valores máximo y mínimo absoluto respectivamente.



MÁXIMOS Y MÍNIMOS CONDICIONADOS DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES.

Proposición

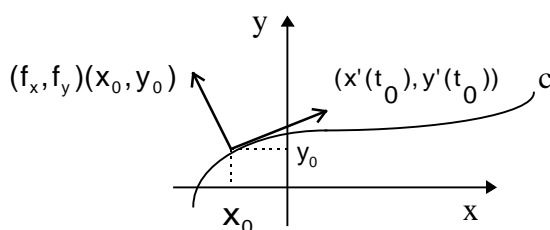
Sea $z = f(x,y)$ una función continuamente diferenciable en un abierto U de \mathbb{R}^2 .

Sea $\vec{r}(t) = ((x(t), y(t)))$ la ecuación de una curva plana C enteramente contenida en U que posee en cada punto vector tangente $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$.

Si el punto $(x_0, y_0) \in C$ hace máxima ó mínima $f(x,y)$ sobre C , entonces

$\vec{\nabla}f(x_0, y_0) = (f_x, f_y)_{(x_0, y_0)}$ es perpendicular a dicha curva en (x_0, y_0) .

Demostración:



Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r}(t_0) = (x_0, y_0)$.

La función compuesta:

$z = f(\vec{r}(t)) \begin{cases} x \rightarrow t \\ y \rightarrow t \end{cases}$, que tiene como

gráfica la curva sobre la superficie, posee un máximo (ó mínimo) en t_0 . Por tanto,

$$\frac{d}{dt}[f(\vec{r}(t))] = 0 \text{ en } t = t_0.$$

Aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{df}{dt} = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \vec{\nabla}f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0 \text{ en } t = t_0. \text{ Luego } \vec{\nabla}f(x_0, y_0) \perp \vec{r}'(t_0).$$

Como $\vec{r}'(t_0)$ es tangente a C en (x_0, y_0) , se tiene que $\vec{\nabla}f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva en (x_0, y_0) .

Método de los multiplicadores de Lagrange

Sea g una función de dos variables continuamente diferenciable en un subconjunto del dominio de f .

Si (x_0, y_0) hace máxima (ó mínima) a $f(x, y)$, sujeta a la condición extra $g(x, y) = 0$, entonces

$\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ y $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ son colineales, es decir, de igual dirección. En consecuencia, existe un escalar λ tal que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda \vec{\nabla} g(x_0, y_0)$.

Demostración geométrica:

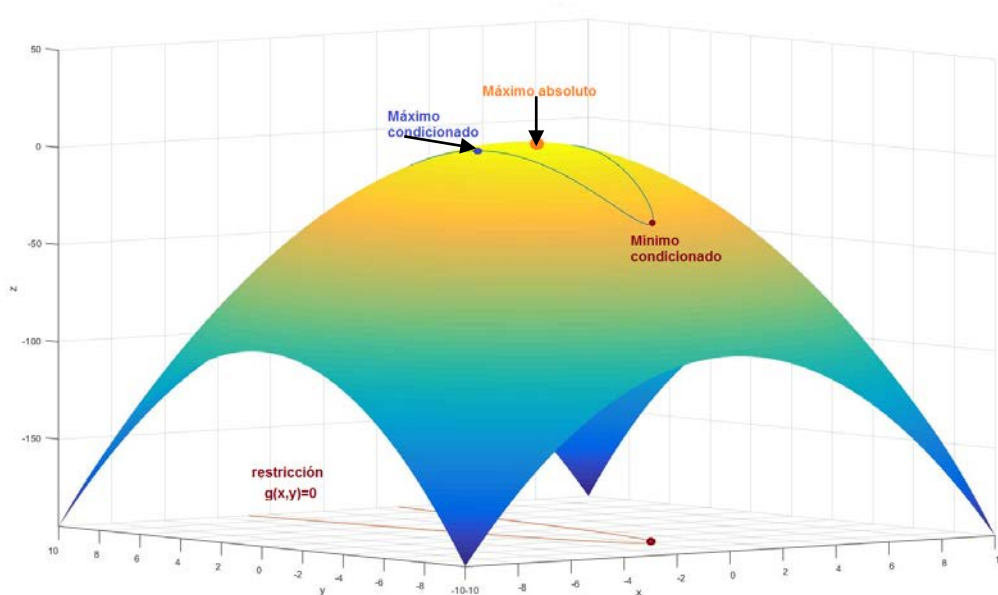
La ecuación $g(x, y) = 0$ define una curva C que vamos a suponer que posee en cada punto un vector tangente no nulo.

Como (x_0, y_0) hace máxima (ó mínima) a $f(x, y)$ sobre C , sabemos que $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ es perpendicular a C en (x_0, y_0) .

Puesto que $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ es también perpendicular a C en (x_0, y_0) (ya que en todo punto el gradiente es perpendicular a la curva de nivel que pasa por dicho punto), los dos gradientes han de ser colineales.

Nota

El recíproco no es cierto. Hay que estudiar lo que ocurre en un entorno del punto.



Forma práctica de cálculo en el método de los multiplicadores de Lagrange

Para maximizar ó minimizar una función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$, se construye la función auxiliar $H(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$.

Luego se hallan los valores x, y, λ para los cuales son nulas las derivadas parciales de H : $H_x = 0$, $H_y = 0$, $H_\lambda = 0$.



Máximos y mínimos de una función real de dos variables reales



Estos requisitos son equivalentes a los formulados anteriormente ya que:

$$H_x = f_x - \lambda g_x = 0 \quad \text{ó bien} \quad f_x = \lambda g_x$$

$$H_y = f_y - \lambda g_y = 0 \quad \text{ó bien} \quad f_y = \lambda g_y$$

$$H_\lambda = -g(x, y) = 0 \quad \text{ó bien} \quad g(x, y) = 0$$

Las primeras dos ecuaciones dan $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g$, y la última $g(x, y) = 0$.

Nota

Toda la teoría anterior puede extenderse (sin más que añadir una coordenada) a funciones de tres variables $f(x, y, z)$.

En este caso, tiene sentido plantearse el problema de hallar máximos ó mínimos de f condicionados por dos restricciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$.

Se localizan los puntos $P(x, y, z)$ que satisfagan simultáneamente las ecuaciones :

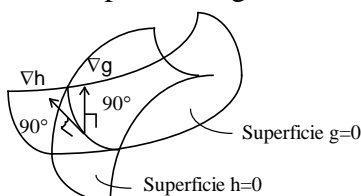
$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g + \mu \vec{\nabla} h$$

$$g(x, y, z) = 0$$

$$h(x, y, z) = 0$$

Se requiere que las funciones f , g y h tengan derivadas parciales primeras continuas.

La interpretación geométrica de las ecuaciones anteriores es sencilla:



Sea C la curva diferenciable intersección de las dos superficies $g = 0$ y $h = 0$.

A lo largo de esta curva buscamos los puntos donde f alcanza máximos ó mínimos relativos respecto a sus otros valores sobre la curva.

Estos son los puntos donde $\vec{\nabla} f$ es perpendicular a C , como vimos anteriormente. Pero también $\vec{\nabla} g$ y $\vec{\nabla} h$ son perpendiculares a C en estos puntos, ya que C está en las superficies $g = 0$ y $h = 0$. Por tanto, $\vec{\nabla} f$ está en el plano determinado por $\vec{\nabla} g$ y $\vec{\nabla} h$, es decir, $\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g + \mu \vec{\nabla} h$ para ciertos λ y μ .

Como los puntos que buscamos están además en ambas superficies, sus coordenadas han de satisfacer las ecuaciones $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, que son los dos últimos requisitos que habíamos escrito.

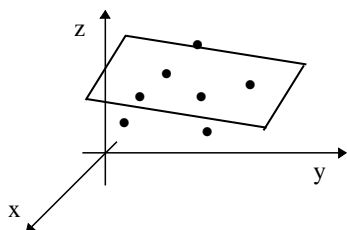


OBTENCIÓN DE UNA FUNCIÓN A BASE DE DATOS EXPERIMENTALES SEGÚN EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Supongamos que se quiere establecer una relación funcional, $y = f(x)$, entre dos variables x e y (ó bien $z = f(x,y)$), y que se conocen experimentalmente n valores de la función y (y_1, y_2, \dots, y_n) para los valores correspondientes de x (x_1, x_2, \dots, x_n). (ó bien se conocen (z_1, z_2, \dots, z_n) para los correspondientes ($(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$)).

Estos puntos experimentales (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, se disponen en el plano (ó bien (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, n$ en el espacio) de coordenadas y , a la vista de su disposición, se deducirá de qué forma ha de ser la función f buscada.

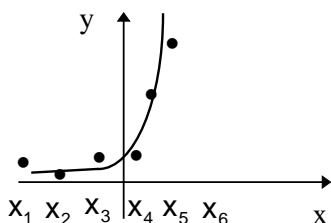
Por ejemplo, si la disposición fuera:



parece lógico pensar que la relación entre x , y , z ha de ser lineal, es decir:

$$z = f(x,y) = ax + by + c$$

En cambio, si la situación fuera la siguiente:



sería natural buscar una función de la forma

$$z = f(x) = ae^{bx} + c.$$

Una vez que, a la vista del gráfico, se ha elegido la forma de la función $y = f(x, a, b, c, \dots)$ (ó bien $z = f(x, y, a, b, c, \dots)$), el **método de los mínimos cuadrados** consiste en buscar los parámetros a , b , c , ... de forma que sea mínima la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores y_i experimentales y los valores $f(x_i, a, b, c, \dots)$ (ó bien entre los valores z_i y los valores $f(x_i, y_i, a, b, c, \dots)$) de la función en los puntos $f(x_i)$ correspondientes (ó bien en $f(x_i, y_i)$).

Es decir, han de elegirse a , b , c , ... para los cuales la función de varias variables

$$S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b, c, \dots)]^2 \text{ tenga un mínimo.}$$

Por el teorema 1, se ha de cumplir:



Máximos y mínimos de una función real de dos variables reales



$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = 0, \dots$$

Es decir, desarrollando dichas derivadas parciales:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b, c, \dots)] \frac{\partial f(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial a} = 0 \\ \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a, b, c, \dots)] \frac{\partial f(x_i, a, b, c, \dots)}{\partial b} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

Se obtiene así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas (los parámetros) que habrá que estudiar en cada caso.

Del mismo modo se procedería para el caso $S(a, b, c, \dots) = \sum_{i=1}^n [z_i - f(x_i, y_i, a, b, c, \dots)]^2$.