MA1003 Cálculo III
Tema 03: Integrales múltiples
Parte 01: Integrales dobles

Profesor Jesús Sánchez Guevara

U.C.R.

I Semestre 2020

En esta clase

1. Definición de integral doble.
2. Integración sobre rectángulos.
3. Regiones horizontalmente simples.
4. Regiones verticalmente simples.
5. Integración sobre regiones generales.
6. Cambio de orden de integración.

Introducción

¿Qué es una integral doble?

1. Es una extensión al plano de la interpretación geométrica de las integrales de una variable.
2. Se pueden calcular expresándolas en términos de integrales de una varible.

Nota

En cálculo I, se tiene que

$$\int_a^b f(x)$$

es el área debajo del gráfico de $y = f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$.

En el caso de integrales dobles, tiene que

$$\iint\limits_R f(x, y)dA$$

es el volúmen debajo del gráfico $z = f(x, y)$ sobre la región del plano R.

❑ Hacer un dibujo.

Para calcular aproximar este volúmen, se puede cortar R en pequeñas piezas ΔA_i, y se toma la suma

$$\sum f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

El límite de estas sumas cuando el tamaño de las piezas tiende a cero, da $\iint_R f(x, y)dA$

❑ **¿Cómo se calcula una integral doble?**
R/ Por iteración de integrales de una variable.
El volúmen se puede cortar por planos paralelos al plano xz, y al sumar tenemos:

$$\text{volúmen} = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} S(y)dy$$

El volúmen de cada trozo es $S(y)dy$ y $S(y)$ es el área bajo la curva $\int f(x, y)dx$.

Note que también se pudo haber empezado por cortes paralelos la plano yz. Explicar.

El resultado de este proceso se va a estudiar primero para tres tipos de regiones especiales:

1. Rectángulos con lados paralelos a los ejes.
2. Regiones verticalmente simples.
3. Regiones horizontalmente simples.

Así, cuando se quiere integrar sobre una región cualquiera, la técnica será buscar dividirla en regiones no sobrepuestas de estos tipos.

Nota: $R = [a,b] \times [c,d]$ representa el rectángulo de $\mathbb{R}^2$ con esquinas (a,c), (a,d), (b,c) y (b,d). Hacer un dibujo.

Teorema de Fubini

Si $f(x,y)$ continua sobre $R = [a,b] \times [c,d]$, entonces

$$\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$
$$= \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Propiedad

Si $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$, entonces

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_a^b g(x) \cdot h(y)dxdy$$
$$= \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

Nota: En general, no necesariamente es fácil cambiar **el orden de integración** de $dxdy$ a $dydx$

Ejemplo

Sea $R = [1,3] \times [4,6]$ y $f(x,y) = x^2y$. Calcule $\iint_R fdA$ usando el orden $dydx$ y luego el orden $dxdy$.

1. Orden $dydx$:

$$\iint\limits_R fdA = \iint\limits_{[1,3]\times[4,6]} x^2ydydx = \int_1^3 \int_4^6 x^2ydydx$$
$$= \int_1^3 \left(\int_4^6 x^2ydy\right) dx = \int_1^3 x^2 \left(\int_4^6 ydy\right) dx$$
$$= \int_1^3 x^2 \left(\frac{y^2}{2}\Big|_4^6\right) dx = 10\int_1^3 x^2dx = \frac{260}{3}$$

2. Orden $dxdy$:

$$\iint\limits_R fdA = \int_4^6 \int_1^3 x^2ydxdy = \int_4^6 \left(y\frac{x^3}{3}\Big|_1^3\right) dy$$
$$= \int_4^6 \frac{26}{3}ydx = \frac{26y^2}{6}\Big|_4^6 = \frac{260}{3}$$

Ejemplo

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$ y $f(x,y) = 1$. Calcule $\iint_R f dA$.

$$\iint\limits_R f dA = \iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} 1 dydx = \int_a^b \int_c^d 1 dydx$$
$$= \int_a^b (d-c)dx = (d-c)(b-a)$$
$$= \text{Área de } R$$

Ejemplo

Sea $R = [0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ y $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$. Calcule $\iint_R f dA$.

$$\iint\limits_{[0,\pi]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \cos(x)\cos(y) dydx = \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(y) dydx$$
$$= \int_0^{\pi} \cos(x)dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)dy = 0$$

Ejemplo

Sea $R = [a,b] \times [a,b]$ y $f(x,y) = h(x)h(y)$, donde h satisface $\int_a^b h(x)dx = 1$. Calcule $\iint_R f dA$.

$$\iint\limits_R f dA = \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} h(x)h(y)dydx$$
$$= \int_a^b \int_a^b h(x)h(y)dydx$$
$$= \int_a^b h(x)dx \cdot \int_a^b h(y)dy$$
$$= \left(\int_a^b h(x)dx\right)^2 = 1$$

Definición

Una región R del plano se llama **verticalmente simple** si es de la forma:

$$R = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b \text{ y } g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$$

Es decir, R es el área sobre un intervalo entre dos curvas.

❏ Hacer un dibujo.

Propiedad

Si R es verticalmente simple,

$$R = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b \text{ y } g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\},$$

entonces:

$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dydx$$

❏ **Nota**: Así, verticalmente simple está asociada a resolver una integral doble con el orden $dydx$.

Ejemplo

La región R limitada por una elipse de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-l)^2}{b^2} = 1$$

se puede ver como **v.s**.

Se despeja y:

$$\Rightarrow \frac{(y-l)^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow (y-l)^2 = b^2\left(1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow y = l \pm b\sqrt{1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}}$$

Los valores extremos de x se obtienen haciendo $y = l$, así $x = h \pm a$. Por lo tanto:

$$R = \left\{(x, y) : h - a \leqslant x \leqslant h + a \text{ y } l - b\sqrt{1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}} \leqslant y \leqslant l + b\sqrt{1 - \frac{(x-h)^2}{a^2}}\right\}$$

Ejemplo

Sea R el semicírculo en el primer cuadrante de centro $(3,0)$ y radio 3. Si $f(x,y)=y$ calcule $\iint_R f dA$.

La ecuación del círculo es $(x-3)^2+y^2=3^2$.
Se expresa R como verticalmente simple:

$$R=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 6 \text{ y } \\ 0\leqslant y\leqslant 3\sqrt{1-\frac{(x-3)^2}{3^2}}\}$$

Se calcula la integral:

$$\iint\limits_R f dA=\int_0^6\int_0^{3\sqrt{1-\frac{(x-3)^2}{3^2}}} ydydx$$
$$=\frac{9}{2}\int_0^6\left(1-\frac{(x-3)^2}{3^2}\right)dx$$
$$=\frac{9}{2}\left(x-\frac{(x-3)^3}{3^3}\right)\Big|_0^6=18$$

Ejemplo

Explique porqué $\iint_R xdA=0$ cuando R es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, sin hacer el cálculo de la integral.

❑ Se debe a que el volúmen bajo $z=x$ es simétrico, en partes iguales, una mitad es negativa y la otra positiva. Hacer el dibujo.

Ejemplo

Calcule el área A entre las gráficas de $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$, cuando $x\in[0,1]$.

Si $x\in[0,1]$, entonces $x^3\leqslant x^2$, por lo tanto A es el área de la región:

$$R=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1 \text{ y } \ x^3\leqslant y\leqslant x^2\}$$

$$A=\int_0^1\int_{x^3}^{x^2} 1dydx=\int_0^1(x^2-x^3)dydx$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

Definición

Una región R del plano se llama **horizontalmente simple** si es de la forma:

$$R = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d \text{ y } s(y) \leqslant x \leqslant t(y)\}$$

Es decir, R es el área sobre un intervalo entre dos curvas.

❏ Explicar gráficas del tipo $x = g(y)$.

Propiedad

Si R es horizontalmente simple,

$$R = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d \text{ y } s(y) \leqslant x \leqslant t(y)\}$$

entonces:

$$\iint\limits_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_{s(y)}^{t(y)} f(x, y)dxdy$$

❏ **Nota**: Así, horizontalmente simple está asociada a resolver una integral doble con el orden $dxdy$.

Ejemplo

La región R limitada por una elipse de la forma

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-l)^2}{b^2} = 1$$

se puede ver como **h.s**.

Se despeja x:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 - \frac{(y-l)^2}{b^2} \\
&\Rightarrow (x-h)^2 = a^2\left(1 - \frac{(y-l)^2}{b^2}\right) \\
&\Rightarrow x = h \pm a\sqrt{1 - \frac{(y-l)^2}{b^2}}
\end{aligned}$$

Los valores extremos de y se obtienen haciendo $x = h$, así $y = l \pm b$. Por lo tanto:

$$R = \left\{(x, y) : l - b \leqslant y \leqslant l + b \text{ y } \right.$$

$$\left. h - a\sqrt{1 - \frac{(y-l)^2}{b^2}} \leqslant x \leqslant h + a\sqrt{1 - \frac{(y-l)^2}{b^2}} \right\}$$

Ejemplo

Plantee la integral de una función $f(x, y)$ sobre la región R entre los brazos de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, dentro del cuadrado de centro $(0, 1)$ y lado 2.

`Geogebra: x^2-y^2=1`

R es una región **h.s.**, la variación de las y está determinada por los extremos del cuadrado:
$1 - 2 = -1 \leqslant y \leqslant 3 = 1 + 2$.
Para la variación de las x, se despeja x de $x^2 - y^2 = 1$, para obtener las ecuaciones de los brazos de la hipérbola, $x = \pm\sqrt{1 + y^2}$.
Finalmente,

$$\iint_R f dA = \int_{-1}^{3} \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x, y) dx dy$$

Ejemplo

Exprese como una integral doble el área A entre el eje y y la gráfica de $y = \cos(x)$, cuando $x \in [0, \pi]$.

❑ Hacer el dibujo.

La integral se hace interpretanto la región como **h.s.** Cuando $x \in [0, \pi]$ entonces y varía desde 1 hasta -1. Y al despejar x de $y = \cos(x)$ tenemos que $x = \arccos(y)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} A = \iint_R 1 dA &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{\arccos(y)} 1 dx dy \\ &= \int_{-1}^{1} \arccos(y) dy \\ &= \left(y \arccos(y) - \sqrt{1 - y^2} \right) \Big|_{-1}^{1} \\ &= \arccos(1) + \arccos(-1) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Para analizar integrales dobles sobre regiones (acotadas) más generales, tenemos:

Propiedades

1. Los rectángulos $R = [a, b] \times [c, d]$ son regiones vertical y horizontalmente simples.
2. $$\iint_R (\alpha f(x,y) + \beta g(x,y))dA = \alpha \iint_R f(x,y)dA + \beta \iint_R g(x,y)dA$$
3. Si $R = R_1 \bigcup R_2$, donde R_1 y R_2 son regiones del plano que a lo más, solo comparten bordes, entonces:
$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1 \bigcup R_2} f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

Proceso para calcular una integral doble

Se quiere calcular

$$\iint_R f(x,y)dA$$

1. Estudie la región R y determine si es vertical u horizontalmente simple.
2. Si R está en alguna de estas categorías, calcule la integral iterada resultante según la propiedad respectiva.
3. Si R no es **v.s** ni **h.s.**, entonces
   1. Si se quiere resolver usando el orden $dxdy$, divida R en regiones **v.s**, y calcule la suma de integrales iteradas respectivas.
   2. Si se quiere resolver usando el orden $dydx$, divida R en regiones **h.s**, y calcule la suma de integrales iteradas respectivas.

Nota: Aunque depende de la región R y la función a integrar f, a veces, calcular la integral con un orden es más ventajoso que con el otro.

Ejemplo

Calcule $\iint_D e^{x+y}\, dA$ donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leqslant 1\}$$

❏ Se divide D en dos regiones **v.s.** D_1 y D_2. Hacer el proceso de descripción en la pizarra.

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_D e^{x+y}\, dA \\
=&\iint\limits_{D_1} e^{x+y}\, dA + \iint\limits_{D_2} e^{x+y}\, dA \\
=&\int_{-1}^{0} \int_{-x-1}^{x+1} e^{x+y}\, dydx + \int_{0}^{1} \int_{x-1}^{-x+1} e^{x+y}\, dydx \\
=&\int_{-1}^{0} (e^{2x+1} - e^{-1}) dx + \int_{0}^{1} (e - e^{2x-1}) dx \\
=&(\frac{e^{2x+1}}{2} - e^{-1} x)\Big|_{-1}^{0} + (ex - \frac{e^{2x-1}}{2})\Big|_{0}^{1} \\
=&\frac{e}{2} - (\frac{e^{-1}}{2} + e^{-1}) + e - \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} = e - e^{-1}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Considere R la región del plano obtenida al desprender del disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$, el disco $(x-1)^2 + y^2 \leqslant 1$. Usando regiones **h.s.** plantee la integral $\iint_R f(x, y) dA$.

❏ R se divide en 4 regiones **h.s.** Explicar en pizarra. Y la integral queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R f(x, y) dA = &\int_{-2}^{-1} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dxdy \\
&+ \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dxdy \\
&+ \int_{-1}^{1} \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dxdy \\
&+ \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dxdy
\end{aligned}$$

Ejemplo

Divida la región P **(hacer en pizarra)** en regiones verticalmente simples y plantee la integral $\iint_R f dA$.

1. Se dibuja la región P.
2. Se trazan línea verticales para identificar las regiones **v.s.** en que se divide.
3. $$P = R_1 \bigcup R_2 \bigcup \cdots \bigcup R_n$$
4. $$\iint\limits_R f dA = \iint\limits_{R_1} f dy dx + \iint\limits_{R_2} f dy dx + \cdots + \iint\limits_{R_n} f dy dx$$

Ejemplo

Calcule la integral

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin|x+y| dy dx$$

Para calcularla se analiza cuando $x+y$ es positiva o negativa en el rectángulo $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.
La región se divide en dos **v.s.**

```
Wolfram Alpha:
int_{-pi/2}^{pi/2}int_{-pi/2}^{pi/2}
sin|x+y|dydx
```

Resultado: 2π

❑Como $x+y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant -x$, tenemos:

$$R_1 = \{(x,y) : -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2, \text{ y } -\pi/2 \leqslant y \leqslant -x\}$$

En R_1, $x+y \leqslant 0$, entonces
$\sin|x+y| = -\sin(x+y)$.

$$R_2 = \{(x,y) : -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2, \text{ y } -x \leqslant y \leqslant \pi/2\}$$

En R_2, $x+y \geqslant 0$, entonces
$\sin|x+y| = \sin(x+y)$.

Como $[-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2] = R_1 \bigcup R_2$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin|x+y| dydx \\ &= \iint_{R_1} \sin|x+y| dydx + \iint_{R_2} \sin|x+y| dydx \\ &= -\iint_{R_1} \sin(x+y) dydx + \iint_{R_2} \sin(x+y) dydx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I = &-\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{-x} \sin(x+y) dydx \\ &+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-x}^{\pi/2} \sin(x+y) dydx \\ = &-\int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos(x+y)\Big|_{-\pi/2}^{-x} dx \\ &+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -\cos(x+y)\Big|_{-x}^{\pi/2} dx \\ = &-\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-1+\cos(x-\pi/2)) dx \\ &+ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-\cos(x+\pi/2)+1) dx \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Ejemplo

Calcule la integral

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} |\cos(x+y)|dydx$$

Para calcularla se analiza cuando $\cos(x+y)$ es positivo o negativo en el cuadrado $[0,\pi]\times[0,\pi]$. La región se divide en cuatro **v.s.**

```
Wolfram Alpha:
int_{0}^{pi}int_{0}^{pi}
|cos(x+y)|dydx
```

Resultado: 2π

Cuando $(x,y)\in[0,\pi]\times[0,\pi]$, $0\leqslant x+y\leqslant 2\pi$. La función coseno, es negativa en $[0,2\pi]$ cuando se evalúa entre $\pi/2$ y $3\pi/2$, entonces:

1. $\cos(x+y)\leqslant 0 \Leftrightarrow$

$$\pi/2\leqslant x+y\leqslant 3\pi/2$$

2. $\cos(x+y)\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$$0\leqslant x+y\leqslant \pi/2 \text{ y } \leqslant 3\pi/2\leqslant x+y\leqslant \pi$$

Esto nos da cuatro regiones **v.s** y tenemos:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{-x+\pi/2}\cos(x+y)dydx\\
&+\int_0^{\pi/2}\int_{-x+\pi/2}^{\pi}-\cos(x+y)dydx\\
&+\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{-x+3\pi/2}-\cos(x+y)dydx\\
&+\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{-x+3\pi/2}^{\pi}\cos(x+y)dydx\\
&=\int_0^{\pi/2}1-\sin(x)dx\\
&+\int_0^{\pi/2}-\sin(x+\pi)+1dx\\
&+\int_{\pi/2}^{\pi}1+\sin(x)dx\\
&+\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(x+\pi)+1dx\\
&=2\pi
\end{aligned}$$

Ejemplo

Evaluar la integral doble

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_x^{\sqrt{\pi}} \sin(y^2)\,dydx$$

❑ Es ese estado I no se puede calcular. Se debe de reinterpretar la región de integración R como **h.s**. Hacer dibujo.

$$\Rightarrow R = \left\{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{\pi},\ \text{y} \quad 0 \leqslant x \leqslant y\right\}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{y} \sin(y^2)\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}} y\sin(y^2)\,dy$$

$$= \frac{-\cos y^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{\pi}} = 1$$

Nota: Este proceso se le llama cambio de orden de integración.

Ejemplo

Considere la integral

$$I = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dxdy$$

Dibuje la región de integración, reinterprétela como **v.s.** y calcule la integral.

❑ En la integral I la región está como **h.s.** Hacer un dibujo.

$$R = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant 1,\ \text{y} \quad y \leqslant x \leqslant 1\}$$

Al reescribir la región como **v.s.** obtenemos: (Explicar)

$$\Rightarrow R = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant x\}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dydx = \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \frac{e^{x^2}}{2}\bigg|_0^1$$

$$= \frac{e-1}{2}$$

Cambio de orden de integración

Se quiere cambiar el orden de integración de *dydx* a *dxdy*:

$$\int_{a_1}^{a_2}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx + \int_{b_1}^{b_2}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dydx$$

1. Se estudia la región sobre la cual se está integrando f, en este caso f se está integrando sobre una región R formada por dos regiones R_1, R_2 **v.s.**:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x,y) : a_1 \leqslant x \leqslant a_2 \text{ y} \\ &\quad g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\} \\ R_2 &= \{(x,y) : b_1 \leqslant x \leqslant b_2 \text{ y} \\ &\quad h_1(x) \leqslant y \leqslant h_2(x)\} \end{aligned}$$

2. Se divide $R = R_1 \bigcup R_2$ en regiones **h.s** y se calcula la suma de integrales iteradas respectivas.

Cambio de orden de integración

Se quiere cambiar el orden de integración de *dxdy* a *dydx*:

$$\int_{c_1}^{c_2}\int_{t_1(y)}^{t_2(y)} f(x,y)dxdy + \int_{d_1}^{d_2}\int_{s_1(y)}^{s_2(y)} f(x,y)dxdy$$

1. Se estudia la región sobre la cual se está integrando f, en este caso f se está integrando sobre una región R formada por dos regiones R_1, R_2 **h.s.**:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x,y) : c_1 \leqslant y \leqslant c_2 \text{ y} \\ &\quad t_1(y) \leqslant x \leqslant t_2(y)\} \\ R_2 &= \{(x,y) : d_1 \leqslant y \leqslant d_2 \text{ y} \\ &\quad s_1(y) \leqslant x \leqslant s_2(y)\} \end{aligned}$$

2. Se divide $R = R_1 \bigcup R_2$ en regiones **v.s** y se calcula la suma de integrales iteradas respectivas.

Nota: En ambos casos, se procede de forma similar si R estuviera formada por más regiones.

Ejercicio

Cambie el orden de integración de

$$I = \int_0^{\pi} \int_{3-\frac{12}{\pi^2}(x-\frac{\pi}{2})^2}^{4+\sin(x)} f(x,y)dydx$$

La región de integración R es el área sobre el intevalo $[0,\pi]$ entre las gráficas de:

1. La parábola concava hacia abajo de vértice $(\pi/2, 3)$:

$$(y-3) = -\frac{12}{\pi^2}(x-\frac{\pi}{2})^2$$

2. La función trigonométrica:

$$y = 4 + \sin(x)$$

❏ Hacer el dibujo.

Para cambiar el orden de integración a *dxdy* hay dividir R en regiones horizontalmente simples. En este caso R está formada por 4 de ellas.

1. Se despeja x:

$$(y-3) = -\frac{12}{\pi^2}(x-\frac{\pi}{2})^2$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{12}(3-y)}$$

2. Se despeja x:

$$y = 4 + \sin(x)$$
$$\Rightarrow x = \arcsin(y-4)$$
$$\text{y } x = \pi - \arcsin(y-4)$$

$$I = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\sqrt{\frac{\pi^2}{12}(3-y)}} f(x,y)dxdy$$
$$+ \int_0^3 \int_{\frac{\pi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^2}{12}(3-y)}}^{\pi} f(x,y)dxdy$$
$$+ \int_3^4 \int_0^{\pi} f(x,y)dxdy$$
$$+ \int_4^5 \int_{\arcsin(y-4)}^{\pi-\arcsin(y-4)} f(x,y)dxdy$$

Ejercicio

Cambie el orden de integración de

$$I = \int_0^4 \int_{-\sqrt{\frac{8-y}{2}}}^{-\sqrt{4-y}} f(x,y)dxdy$$
$$+ \int_4^8 \int_{-\sqrt{\frac{8-y}{2}}}^{\sqrt{\frac{8-y}{2}}} f(x,y)dxdy$$
$$+ \int_0^4 \int_{\sqrt{4-y}}^{\sqrt{\frac{8-y}{2}}} f(x,y)dxdy$$

La región de integración está dada por la unión de tres regiones **h.s.**, las cuales está limitadas por las parábolas:

1. $x = \pm\sqrt{\frac{8-y}{2}} \Rightarrow (y-8) = -2x^2$
   Vértice en $(0,8)$ y cóncava hacia abajo.
2. $x = \pm\sqrt{4-y} \Rightarrow (y-4) = -x^2$
   Vértice en $(0,4)$ y cóncava hacia abajo.

❏ Hacer el dibujo.

Finalmente, como la región entera es **v.s.** entonces:

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{4-x^2}^{8-2x^2} f(x,y)dydx$$

F I N