

Cálculo I

4.1. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS: A RAZONES DE CAMBIO INSTANTÁNEAS

Julio C. Carrillo E.*

Índice

1. Introducción	1
2. Movimiento rectilíneo	1
3. Razones de cambio relacionadas	6

*Profesor Escuela de Matemáticas, UIS.

1. Introducción

Las dos razones de cambio que se estudian son la de la velocidad y la aceleración en movimiento rectilíneo y las razones de cambio relacionadas.

2. Movimiento rectilíneo

Definición de movimiento rectilíneo

Recordar que:

1. El movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta, horizontal o vertical, es un *movimiento rectilíneo*.
2. Una función $s = s(t)$ que proporciona la coordenada del objeto sobre una recta horizontal o vertical se denomina *función posición*.
3. La variable t representa el *tiempo* y el valor de la función $s(t)$ representa una *distancia dirigida*, que se mide en centímetros, metros, pies, millas, etc., a partir de un punto de referencia $s = 0$ sobre la recta.
4. La *velocidad media* de un objeto en movimiento sobre una recta en un intervalo de tiempo Δt se define como

$$\frac{\text{cambio de la posición}}{\text{cambio en el tiempo}} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

La razón de cambio instantánea, o *velocidad* del cuerpo, en el tiempo t se define como

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

si tal límite existe.

Velocidad, rapidez y aceleración

Sea $s(t)$ la función posición de un objeto en movimiento rectilíneo en un tiempo t .

1. La función *velocidad* $v(t)$ del objeto en el instante t es

$$v(t) = \frac{ds}{dt},$$

la cual *mide el cambio en la posición* del objeto por unidad de cambio en el tiempo.

2. La *rapidez* del objeto en el instante t es $|v(t)|$.

3. La función *aceleración* $a(t)$ en el instante t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2},$$

la cual *mide el cambio en la velocidad* del objeto por unidad de cambio en el tiempo.

Las unidades de velocidad y de la aceleración son, respectivamente,

$$[v(t)] = \left[\frac{ds}{dt} \right] = \frac{L}{T} = LT^{-1}, \quad [a(t)] = \left[\frac{d^2s}{dt^2} \right] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}.$$

Recordemos que:

1. Si $f'(x) > 0$ en I entonces f es *creciente* en I ; es decir, la gráfica de la función *sube* cuando x crece en I ;
2. Si $f'(x) < 0$ en I entonces f es *decreciente* en I ; es decir, la gráfica de la función *baja* cuando x crece en I .

Entonces,

1. Si en un intervalo de tiempo $v(t) = s'(t) > 0$ entonces $s(t)$ es *creciente*. Por tanto, el objeto se mueve *hacia la derecha* sobre una recta horizontal;
2. Si en un intervalo de tiempo $v(t) = s'(t) < 0$ entonces $s(t)$ es *decreciente*. Por tanto, el objeto se mueve *hacia la izquierda* sobre una recta horizontal;
3. Si $a(t) = v'(t) > 0$ sobre un intervalo de tiempo, entonces la velocidad $v(t)$ del objeto es *creciente*;
4. Si $a(t) = v'(t) < 0$ sobre un intervalo de tiempo, entonces la velocidad $v(t)$ del objeto es *decreciente*.
5. Si $v(t)$ y $a(t)$ tienen signos algebraicos opuestos, el objeto *desacelera*.
6. Si $v(t)$ y $a(t)$ tienen el mismo signo algebraico, el objeto *acelera*.

7. De manera alterna, un objeto *desacelera* cuando su rapidez $|v(t)|$ es *decreciente*, y *acelera* cuando su rapidez es *creciente*.

Por ejemplo, cuando $s(t)$ representa la altura de un objeto en caída libre, desde una altura h , su aceleración $a(t)$ se debe a la acción de la gravedad y además $a(t) = -g < 0$. Por otro lado, la altura $s(t)$ del objeto decrece rápidamente, o sea, $v(t) < 0$. En tal caso, se tiene que el objeto acelera durante todo el tiempo que dura su movimiento de caída.

Ejemplo 1. Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, donde s se mide en centímetros y t en segundos.

1. Encuentre e interprete $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ para $t = 0, 2, 6$.
2. Estudie el comportamiento de la aceleración o desaceleración de la partícula.

Solución. Las funciones velocidad y aceleración de la partícula son, respectivamente,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4, \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2.$$

1. En este caso, el punto de referencia en la recta es $s = 0$. Así,

a) $s(0) = 3$, $v(0) = 4$, $a(0) = -2$: significa que a los 0 segundos el objeto:

- se encuentra a 3 centímetros a la derecha del punto de referencia;
- allí se desplaza hacia la derecha de la recta a una velocidad de 4 cm/s,
- y su velocidad decrece a razón de 2 cm/s².

b) $s(2) = 7$, $v(2) = 0$, $a(2) = -2$: significa que a los 6 segundos el objeto:

- se encuentra a 7 centímetros a la derecha del punto de referencia;
- allí no se desplaza, ni a la izquierda ni a la derecha,
- y su velocidad decrece a razón de 2 centímetros por segundo cuadrado ($a = -2$).

c) $s(6) = -9$, $v(6) = -8$, $a(6) = -2$: significa que a los 6 segundos el objeto:

- se encuentra a 9 centímetros a la izquierda del punto de referencia en la recta;
- allí se desplaza hacia la izquierda a una velocidad de 8 cm/s y su velocidad decrece a razón de 2 cm/s².

2. Tenemos que $v(t) > 0$ si $-2t > 4$ o sea, si $t < 2$. De igual modo, $v(t) < 0$ cuando $t > 2$. La aceleración es negativa para todo t . Tenemos entonces la siguiente tabla.

t	$(-\infty, 2)$	2	$(2, \infty)$
$v(t)$	+	0	—
Movimiento s	a la derecha		izquierda
$a(t)$	—	—2	—
Velocidad v	decrece		decrece
El objeto	desacelera		acelera

□

Ejemplo 2. Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - t$. Determine los intervalos de tiempo sobre los cuales la partícula desacelera y los intervalos de tiempo sobre los cuales acelera.

Solución. De las funciones de velocidad y aceleración

$$v(t) = t^2 - 1 = (t - 1)(t + 1), \quad a(t) = 2t,$$

se obtienen sus signos, los cuales se analizan en la siguiente tabla.

t	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$v(t)$	+	0	−	−1	−	0	+
Dirección del movimiento s	a la derecha		a la izquierda		a la izquierda		a la derecha
$a(t)$	−	−2	−	0	+	2	+
Velocidad v	decrece		decrece		crece		crece
El objeto	desacelera		acelera		desacelera		acelera

□

3. Razones de cambio relacionadas

Sea y una cantidad escalar que depende de la cantidad escalar x , lo cual se denota como $y = f(x)$, siendo f una función. En este caso se estudia la tasa de variación instantánea de y con respecto a x , la cuales se llaman *razones de cambio relacionadas*. En particular, cuando x es el tiempo t y $y = s(t)$ es la posición de un objeto, la razón de cambio $dy/dt = s'(t)$ se interpreta como su velocidad. En general, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ representa la razón a la cambia la cantidad y por unidad de cambio en x . Si para un valor de x se tiene que $dy/dx > 0$ entonces la cantidad aumenta o crece en tal valor de x , y si $dy/dx < 0$ entonces la cantidad disminuye o decrece en tal valor de x .

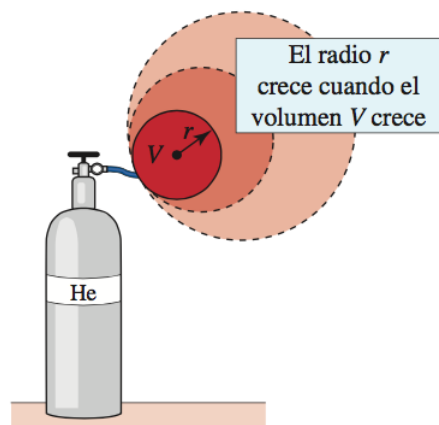
Directrices para resolver problemas de razones de cambio relacionadas

1. Lea varias veces con cuidado el problema. Si le es posible, trace un esquema.
2. Identifique con símbolos todas las cantidades que cambian con el tiempo.
3. Escriba todas las razones que se proporcionan. Use notación de derivadas para escribir la razón que desea encontrar.
4. Escriba una ecuación o una función que relacione todas las variables que haya introducido.
5. Diferencie con respecto al tiempo t la ecuación o la función encontrada en el cuarto paso. Este paso puede requerir el uso de diferenciación implícita. La ecuación resultante después de la diferenciación relaciona las razones de cambio con el tiempo de la variable

Recuerde que para cualquier variable, digamos w , que dependa de t ,

$$\frac{d}{dt}w^n = nw^{n-1}\frac{dw}{dt}.$$

Ejemplo 3. Si V representa el volumen de un objeto el cual cambia con el tiempo, entonces $\frac{dV}{dt}$ es la razón de cambio que mide cuán rápido cambia el volumen con (respecto al cambio en) el tiempo t . Si $\frac{dV}{dt} = 5\text{pies}^3/\text{s}$ significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo.



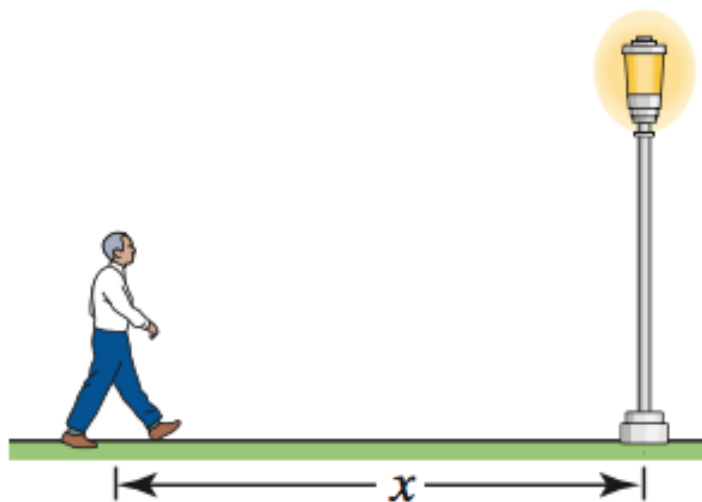
$$\begin{aligned} V &= V(r), \quad r = f(t) \\ V &= V(f(t)) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = V'(f(t))f'(t) \end{aligned}$$

Si el objeto es un globo esférico, entonces su volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, es decir, su volumen depende del radio del globo. Si el globo se expande, su volumen cambia con el tiempo. Como en el tiempo t , el volumen V del globo depende de su radio r entonces se tiene que V depende de r y que r depende del tiempo t . Por lo tanto, como $V = V(r)$ y $r = f(t)$ entonces

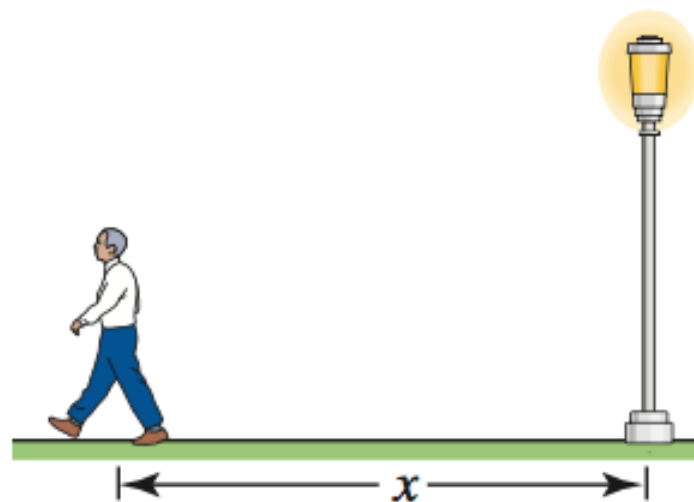
$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dr} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt},$$

fórmula en la cual $\frac{dV}{dr}$ y $\frac{dr}{dt}$ son relaciones relacionadas, y que relaciona la razón a la cual se expande el volumen del balón con la razón a la cual aumenta su radio.

Ejemplo 4. La distancia x de una persona a un poste cambia en función del tiempo (ver figura).



$$a) \, dx/dt < 0$$



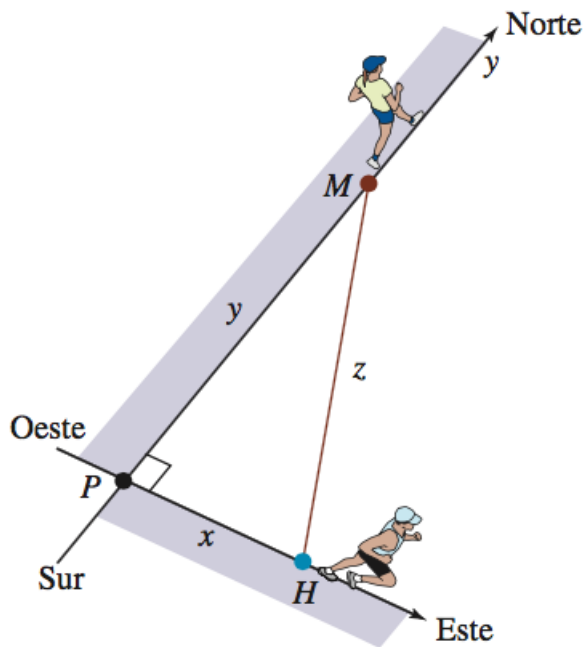
$$b) \, dx/dt > 0$$

La distancia x de la persona al poste *decrece* en a) y *crece* en b).

- Si la persona se *acerca* al poste a razón constante de 5 pies/s, entonces $\frac{dx}{dt} = -5$ pies/s; el signo negativo se toma en consideración a que la distancia x de la persona al poste *decrece* o *disminuye* a medida que ella se *acerca* al poste.
- Si la persona se *aleja* al poste a razón constante de 3 pies/s, entonces $\frac{dx}{dt} = 3$ pies/s; el signo positivo se toma en consideración a que la distancia x de la persona al poste *crece* o *aumenta* a medida que ella se *aleja* al poste.

Ejemplo 5. Una mujer que corre a razón constante de 10 km/h cruza un punto P en dirección al norte. Diez minutos después, un hombre que corre a razón constante de 9 km/h cruza por el mismo punto P en dirección al este. ¿Cuán rápido cambia la distancia entre los corredores 20 minutos después de que el hombre cruza por el punto P ?

Solución. Sean t el tiempo (en horas), x la distancia entre el hombre y el punto P , y la distancia entre la mujer y el punto P y z la distancia entre el hombre y la mujer; todas las distancias se miden en kilómetros. Evidentemente todas estas distancias dependen y crecen en función del tiempo.



Se busca $\frac{dz}{dt}$ a los $20 \text{ min} = \frac{1}{3} h$, o sea,

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=\frac{1}{3}}.$$

Dado que el triángulo HPM en la figura es rectángulo, por el teorema de Pitágoras se tiene que

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Al derivar esta relación implícitamente con respecto a t se tiene que

$$\begin{aligned} \text{De acuerdo con los datos del problema se tiene que} \quad 2z \frac{dz}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} \implies z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= 9 \text{ km/h}, \quad \frac{dy}{dt} = 10 \text{ km/h}. \implies \frac{dz}{dt} = \frac{9x + 10y}{z} \end{aligned}$$

El hombre y la mujer se mueven a velocidad constante, por lo cual su movimiento es rectilíneo uniforme: *distancia = velocidad \times tiempo*. Cuando han transcurrido $t = 20 \text{ min} = \frac{1}{3} \text{ h}$ el hombre ha recorrido entre los puntos P y H una distancia de

$$x \Big|_{t=\frac{1}{3}} = \frac{dx}{dt} t \Big|_{t=\frac{1}{3}} = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3 \text{ km}.$$

Debido a que la mujer ha recorrido $t = 10 \text{ min} = \frac{1}{6} \text{ h}$ más que el hombre, ella ha recorrido entre los puntos P y M una distancia de

$$y = \frac{dy}{dt} t \Big|_{t=\frac{1}{6}} + \frac{dy}{dt} t \Big|_{t=\frac{1}{3}} = 10 \cdot \frac{1}{6} + 10 \cdot \frac{1}{3} = 10 \cdot \frac{3}{6} = 5 \text{ km}.$$

Entonces, en $t = \frac{1}{3} \text{ h}$ la distancia entre el hombre y la mujer es de

$$z = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \text{ km}.$$

Por lo tanto, a las $t = \frac{1}{3} \text{ h}$ la distancia entre el hombre y la mujer aumenta a razón de

$$\frac{dz}{dt} \Big|_{t=\frac{1}{3}} = \frac{9x + 10y}{z} \Big|_{t=\frac{1}{3}} = \frac{9 \cdot 3 + 10 \cdot 5}{\sqrt{34}} = \frac{77}{\sqrt{34}} \approx 13,21 \text{ km/h}.$$

□

Ejemplo 6. Desde la parte superior del reloj de arena, ver la figura, la arena cae a razón constante de $4 \text{ cm}^3/\text{s}$. Exprese la razón a que crece la altura de la pila inferior en términos de la altura de la arena.

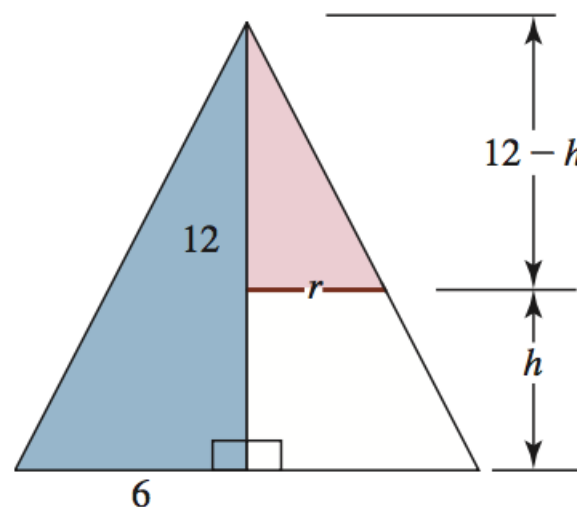
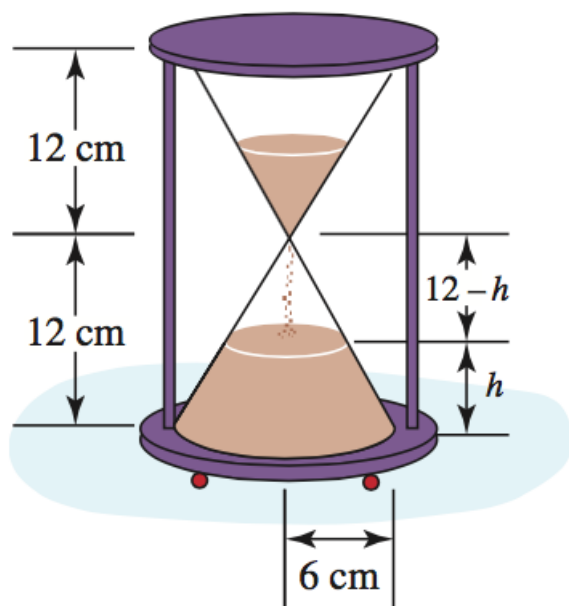
Solución. Sean r el radio y h la altura de la pila inferior de arena en el reloj, las cuales se miden en centímetros. La forma de esta pila de arena es la de un cono truncado, el cual tiene un volumen V , el cual depende de r y h . Evidentemente, el radio y la altura de la pila de arena dependen del tiempo, por lo cual el volumen de la pila de arena depende también del tiempo. \square

El dato de este problema es que

$$\frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Se busca

$$\frac{dh}{dt}.$$



El volumen V de la pila de arena, en el instante $t > 0$, es

$$\begin{aligned}
 V &= \text{volumen del cono truncado} \\
 &= \text{volumen de cono inferior} - \text{volumen del cono que no es arena} \\
 &= \frac{1}{3}\pi 6^2(12) - \frac{1}{3}\pi r^2(12-h) \\
 &= \frac{1}{3}\pi(432 - r^2(12-h)).
 \end{aligned}$$

Se puede eliminar la variable h del problema de la siguiente manera. Como lo muestra la figura, el triángulo rojo es semejante al triángulo azul, siendo las proporciones iguales,

$$\frac{12-h}{r} = \frac{12}{6} \implies 12-h = 2r \implies r = \frac{12-h}{2}.$$

Por lo tanto,

$$V = \frac{\pi}{3} \left(432 - \left(\frac{12-h}{2} \right)^2 (12-h) \right) \implies V = \frac{\pi}{3} \left(432 - \frac{1}{4}(12-h)^3 \right).$$

Al derivar con respecto a t se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{3} \left(-\frac{3}{4}(12-h)^2 \left(-\frac{dh}{dt} \right) \right) \implies \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}(12-h)^2 \frac{dh}{dt}, & \frac{dV}{dt} &= 4 \\
 &\implies 4 = \frac{\pi}{4}(12-h)^2 \frac{dh}{dt} \\
 &\implies \boxed{\frac{dh}{dt} = \frac{16}{\pi(12-h)^2}}
 \end{aligned}$$