Curvatura, Torsión
Longitud de arco de una curva

Henry R Moncada

UNIVERSIDAD NACIONAL TECNOLÓGICA DE LIMA SUR

September 20, 2024

Outline

Curvatura de una Curva

La curvatura κ mide cuánto cambia la dirección de una curva en un punto dado. Para una curva parametrizada $\mathbf{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, la curvatura se calcula como:

$$\kappa = \frac{\|T^{'}(t)\|}{\|r^{'}(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

Ejemplo 1

Comenzamos con la suposición de que la curva C está definida por la función $y = f(x)$. Entonces, podemos definir

$$r(t) = x\ \hat{i} + f(x)\ \hat{j} + 0\ \hat{k} = (x, f(x), 0)$$

$$r^{'}(t) = 1\ \hat{i} + f^{'}(x)\ \hat{j} + 0\ \hat{k} = (1, f^{'}(x), 0)$$

$$r^{''}(t) = 0\ \hat{i} + f^{''}(x)\ \hat{j} + 0\ \hat{k} = (0, f^{''}(x), 0)$$

Utilizando la fórmula anterior para la curvatura:

$$\mathbf{r}^{'}(t) \times \mathbf{r}^{''}(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & f^{'}(x) & 0 \\ 0 & f^{''}(x) & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, f^{''}(x))$$

$$\kappa = \frac{\|T^{'}(t)\|}{\|r^{'}(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}^{'}(t) \times \mathbf{r}^{''}(t)\|}{\|\mathbf{r}^{'}(t)\|^3} = \frac{f^{''}(t)}{\left(\sqrt{1 + [f^{'}(x)]^2}\right)^3}$$

Ejemplo 2: Curvatura de una Parábola

Consideremos la curva $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$. Calculamos la curvatura:

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 2t), \quad \mathbf{r}''(t) = (0, 2)$$

$$\kappa = \frac{|1 \cdot 2 - 0 \cdot 2t|}{(1^2 + (2t)^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

Ejemplo 3: Curvatura de un Círculo

Para la curva de un círculo de radio r, $\mathbf{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, la curvatura es: $\kappa = \dfrac{1}{r}$

Ejemplo 4: Curvatura de una Hélice

Para la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, la curvatura es: $\kappa = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ejemplo 5:

Halle la curvatura de cada una de las siguientes curvas en el punto dado:

(a) $r(t) = 4\cos t\,\hat{i} + 4\sin t\,\hat{j} + 3t\,\hat{k}, \quad t = \frac{4\pi}{3}$

(b) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}, \quad x = 2$

Solución:

(a) La curvatura de la hélice en $t = \frac{4\pi}{3}$ se puede hallar utilizando la ecuación curva.

$$r'(t) = \langle -4\sin t, 4\cos t, 3\rangle$$

$$r''(t) = \langle -4\cos t, -4\sin t, 0\rangle$$

En primer lugar, calcule $T(t)$:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{\langle -4\sin t, 4\cos t, 3\rangle}{\sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2 + 3^2}}$$

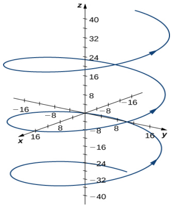
$$T'(t) = \langle -4\sin t, 4\cos t, 3\rangle$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|T'(t)\|}{\|r(t)\|} = \frac{\|\left\langle -\frac{4}{5}\cos t, \frac{4}{5}\sin t, 0\right\rangle\|}{\langle -4\sin t, 4\cos t, 3\rangle} \\ &= \frac{\sqrt{(-\frac{4}{5}\cos t)^2 + (\frac{4}{5}\sin t)^2 + 0^2}}{\sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2 + 3^2}} = \frac{4}{25} \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4\sin t & 4\cos t & 3 \\ -4\cos t & -4\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = (12\sin t, 12\cos t, 16)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \\ &= \frac{\sqrt{(12\sin t)^2 + (12\cos t)^2 + (16)^2}}{\left[\sqrt{(-4\sin t)^2 + (4\cos t)^2 + 3^2}\right]^3} = \frac{4}{25} \end{aligned}$$



Ejemplo 5:

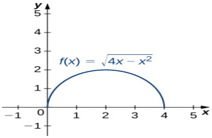
(b) En primer lugar, calculamos y' y y'', $x = 2$

$$\kappa = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{\|\mathbf{f}''(x)\|}{\left(1 + [\mathbf{f}'(x)]^2\right)^3}$$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{4x - x^2} \\ y' &= \frac{2 - x}{\sqrt{4x - x^2}} \\ y'' &= -\frac{4}{(4x - x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \left.\frac{|y''|}{\left(\sqrt{1 + (y')^2}\right)^3}\right|_{x=2} \\ &= \left.\frac{\left|-\frac{4}{(4x-x^2)^{3/2}}\right|}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}\right)^2}\right)^3}\right|_{x=2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \left.\frac{\left|-\frac{4}{(4x-x^2)^{3/2}}\right|}{\left(\sqrt{1 + \frac{(2-x)^2}{4x-x^2}}\right)^3}\right|_{x=2} \\ &= \left.\left|\frac{4}{(4x - x^2)^{3/2}}\right| \frac{(4x - x^2)^{3/2}}{8}\right|_{x=2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



(a)

Torsión de una Curva

La torsión τ mide cómo una curva se "retuerce" en el espacio. Para una curva parametrizada $\mathbf{r}(t)$, se calcula como:

$$\tau = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2}$$

Ejemplo 1: Torsión de una Hélice

Para la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, la torsión es: $\tau = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Ejemplo 2: Torsión de una Línea Recta

Para una línea recta $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 0)$, la torsión es cero, ya que la curva no se "retuerce".

Ejemplo 3: Torsión de una Parábola Espacial

Para $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, calculamos la torsión como: $\tau = \dfrac{6}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$

Longitud de Arco de una Curva

La longitud de arco s de una curva parametrizada $\mathbf{r}(t)$ entre $t = a$ y $t = b$ se calcula como:

$$s(t) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

Ejemplo 1: Longitud de Arco de una Línea Recta

Para una línea recta

$$\mathbf{r}(t) = (t, 0, 0)$$

$$\mathbf{r}'(t) = (1, 0, 0)$$

, la longitud de arco es simplemente: $s = \int_0^1 |1| dt = \int_0^1 |1| dt = 1$

Ejemplo 2: Longitud de Arco de un Círculo

Para el círculo $\mathbf{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, la longitud de arco es:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = 2\pi r$$

Ejemplo 3: Longitud de Arco de una Hélice

Para la hélice $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, la longitud de arco es:

$$s = \int_0^T \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1^2}\, dt = \sqrt{2}T$$

Ejemplo 4

Halle la parametrización por longitud de arco para cada una de las siguientes curvas:

(a) $r(t) = 4\cos t\hat{i} + 4\sin t\hat{j}, t \geq 0$

(b) $r(t) = \langle t+3, 2t-4, 2t\rangle, t \geq 3\rangle$

Solución:

$$s(t) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

(a) Primero hallamos la función de longitud de arco

$$s(t) = \int_0^t \| \langle 4\cos t, 4\sin t\rangle \| \, dt$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{16\cos^2 t, 16\sin^2 t} dt = 4t$$

que da la relación entre la longitud de arco s y el parámetro t como $s = 4t$; así que, $t = s/4$. A continuación, sustituimos la variable t en la función original

$$r(t) = 4\cos t\hat{i} + 4\sin t\hat{j}$$

con la expresión $s/4$ para obtener

$$r(s) = 4\cos(\frac{s}{4})\hat{i} + 4\sin(\frac{s}{4})\ \hat{j}$$

Esta es la parametrización de la longitud de arco de $r(t)$. Dado que la restricción original de t venía dada por $t \geq 0$, la restricción de s se convierte en $s/4 \geq 0$, o $s \geq 0$,

Ejemplo 4

(a) Primero hallamos la función de longitud de arco

$$s(t) = \int_3^t \| \langle 1, 2, 2 \rangle \| \, dt$$

$$s(t) = \int_3^t \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} dt = 3t - 9$$

Por lo tanto, la relación entre la longitud de arco s y el parámetro t es $s = 3t - 9$, por lo que $t = s3 + 3$. Al sustituir esto en la función original

$$r(t) = \langle t + 3, 2t - 4, 2t \rangle$$

se obtiene

$$r(s) = \left\langle \left(\frac{s}{3} + 3\right) + 3, 2\left(\frac{s}{3} + 3\right) - 4, 2\left(\frac{s}{3} + 3\right) \right\rangle = \left\langle \frac{s}{3} + 6, \frac{2s}{3} + 2, \frac{2s}{3} + 6 \right\rangle$$

Se trata de una parametrización por longitud de arco de $r(t)$. La restricción original del parámetro t era $t \geq 3$, por lo que la restricción de s es $(s/3) + 3 \geq 3$, o $s \geq 0$,

Ejemplo 4

La curva $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ parametriza la gráfica de la función $y = x^{2/3}$, y apesar de que en $(0,0)$ la curva no es suave (lo que se ve reflejado en que $\alpha^{'}(0) = (0,0)$, podemos calcular la longitud de la curva para, por ejemplo, $x \in [-1,1]$: se tiene $\alpha(t) = (3t^2, 2t)$, luego

Solución:

$$s(t) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|\, dt$$

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{9t^4 + 4t^2}dt \\
s(t) &= \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{9t^2 + 4}dt \\
&= \int_{-1}^{0} (-t)\sqrt{9t^2 + 4}dt + \int_{0}^{1} (t)\sqrt{9t^2 + 4}dt \\
&= 2\int_{0}^{1} t\sqrt{9t^2 + 4}dt = \frac{2}{27}\ (9t^2 + 4)^{3/2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2}{27}\left(13^{3/2} + 4^{3/2}\right)
\end{aligned}$$