Concepto de Función Vectorial
Dominio y Rango
Operaciones con Funciones Vectoriales: Suma, Producto por un escalar, Producto escalar y Producto vectorial

Henry R Moncada

UNIVERSIDAD NACIONAL TECNOLÓGICA DE LIMA SUR

September 3, 2024

Outline

1. Objetivos
2. Concepto de Funciones Vectoriales
3. Concepto de Funciones Vectoriales
4. Rango y Dominio
5. Operaciones con Funciones Vectoriales
   - Suma
   - Multiplicación y División por un Escalar
   - Producto Escalar
   - Producto Vectorial

Objetivos

1. Distinguir las magnitudes escalares y las vectoriales.
2. Estudiar las operaciones con vectores.
3. Conocer los campos escalares y los vectoriales.

Concepto de Funciones Vectoriales

- **Magnitud escalar:** Una magnitud física es escalar cuando queda completamente determinada por el número que expresa su medida (escalar), expresado en alguna unidad conveniente.
  1. **Módulo (con unidad)**
  2. Ejemplos: temperatura, tiempo, masa, carga eléctrica, potencial eléctrico, energía, etc.
- **Magnitud vectorial:** Una magnitud física es vectorial cuando en su determinación necesitamos, además de un número (módulo), una dirección y un sentido. Esta clase de magnitud recibe el nombre de vector.
  1. **Módulo + Direccion + Sentido**
  2. Ejemplos: fuerza, velocidad, momento, intensidad del campo eléctrico, etc.

Concepto de Funciones Vectoriales

Definición de función vectorial : Una función vectorial (en $\mathbb{R}^n$) es una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y la imagen es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Las funciones vectoriales se designan mediante letras mayúsculas tales como F, G, etc., o como letras minúsculas en negrilla **f, g,** etc.
Componentes de una función vectorial: Toda function vectorial $F(t)$ definida para todo t en un intervalo I y con valores en $\mathbb{R}^n$ es un vector $F(t)$ al cual le corresponden n funciones reales componentes $F_1(t), \cdots, F_n(t)$ que también están definidas en I y permiten escribir

$$F(t) = (F_1(t), \cdots, F_n(t))$$

para todo t en I.

- Una función vectorial es una función que toma un número (o un vector) y devuelve un vector.
- Notación general: $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$.
- Ejemplo: $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ \sin(t) \end{pmatrix} = (2t,\ 3t^2,\ \sin(t))$, para todo t en $\mathbb{R}$

$$\| r(t) \| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2 + (\sin(t))^2}$$

Rango y Dominio

En general, el dominio D_F de una función vectorial F en $\mathbb{R}^n$ se define como el dominio común de todas las funciones escalares componentes de la función vectorial, el rango R_F como el conjunto de todos los vectores $F(t)$ para algún t en el dominio de F. Es decir,

$$\begin{aligned} D_F &= \{t \in R : F(t) \text{ esta definido}\} \\ R_F &= \{F(t) : t \in D_F\} \end{aligned}$$

- El dominio D_F de una función vectorial es el conjunto de todos los valores posibles de la variable independiente, t, para los cuales la función está definida. El conjunto de todos los valores de entrada permitidos.
- El rango R_F es el conjunto de todos los vectores de salida.
- Ejemplo: Para $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, el dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es $\mathbb{R}^3$.

$$\| f(t) \| = \sqrt{(\cos(t))^2 + (\sin(t))^2 + (t)^2} = \sqrt{1 + t^2}$$

Ejemplos Básicos de Funciones Vectoriales

Encuentre el Dominiom D_F y el Rango R_F de cada una de las funciónes vectoriales $F = \{f, g, h, p, q, r\}$

- $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{bmatrix}$
- $\vec{g}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{bmatrix}$
- $\vec{h}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ t^2 \end{bmatrix}$
- $\vec{p}(t) = \begin{bmatrix} \ln(t) \\ t^2 \sin(t) \\ \sqrt{t} \end{bmatrix}$
- $\vec{q}(t) = \begin{bmatrix} \tan(t) \\ \frac{1}{t} \\ \arcsin(t) \end{bmatrix}$
- $\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t^3 - 4t \\ t^3 + 2t^2 - t \end{bmatrix}$

Operaciones con Funciones Vectoriales

Sean F y G funciones vectoriales en $\mathbb{R}^n$ y f una función real, las cuales tienen el mismo dominio I. Entonces, para todo t en I se definen las siguientes funciones:

1. $(F+G)(t) = F(t) + G(t)$
2. $(F-G)(t) = F(t) - G(t)$
3. $(cF)(t) = cF(t)$ para toda constante c
4. $(fF)(t) = f(t)F(t)$
5. $(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$
6. $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$ cuando $n = 3$
7. Si el dominio de F contiene la imagen de una función real g entonces se define la función compuesta $F \circ g$ como
$$(F \circ g)(t) = F(g(t))$$
para todo t en el dominio de g.

Todas las funciones en esta definición son funciones vectoriales en $\mathbb{R}^n$, excepto la definida en 5 que representa una función real. La función vectorial definida en 6 representa una función vectorial en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Suma

- **Definición**: Si $\mathbf{u}(t) = \langle u_1(t), u_2(t), u_3(t)\rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle v_1(t), v_2(t), v_3(t)\rangle$, entonces

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle u_1(t) + v_1(t), u_2(t) + v_2(t), u_3(t) + v_3(t)\rangle$$

- La suma de dos funciones vectoriales $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ es:

$$\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + g_1(t) \\ f_2(t) + g_2(t) \\ f_3(t) + g_3(t) \end{pmatrix}$$

- Calcular : Si $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces:

Suma

- **Definición**: Si $\mathbf{u}(t) = \langle u_1(t), u_2(t), u_3(t)\rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle v_1(t), v_2(t), v_3(t)\rangle$, entonces

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle u_1(t) + v_1(t), u_2(t) + v_2(t), u_3(t) + v_3(t)\rangle$$

- La suma de dos funciones vectoriales $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ es:

$$\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + g_1(t) \\ f_2(t) + g_2(t) \\ f_3(t) + g_3(t) \end{pmatrix}$$

- Calcular : Si $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces:

Solution

$$\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t-t \\ t^2+3 \end{pmatrix} = (t+1,\ 2t-t,\ t^2+3)$$

- Calcular : $\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$ donde $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$

Suma

- **Definición**: Si $\mathbf{u}(t) = \langle u_1(t), u_2(t), u_3(t)\rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle v_1(t), v_2(t), v_3(t)\rangle$, entonces

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle u_1(t) + v_1(t), u_2(t) + v_2(t), u_3(t) + v_3(t)\rangle$$

- La suma de dos funciones vectoriales $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ es:

$$\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + g_1(t) \\ f_2(t) + g_2(t) \\ f_3(t) + g_3(t) \end{pmatrix}$$

- Calcular : Si $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces:

Solution

$$\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t-t \\ t^2+3 \end{pmatrix} = (t+1,\ 2t-t,\ t^2+3)$$

- Calcular : $\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$ donde $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$

Solution

$$\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ t+1 \\ t^2+t \end{pmatrix}$$

Ejemplos : Suma

Ejemplo 1

Sea $\mathbf{u}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Entonces:

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle t + 1, t^2 + 1, t^3 + 1 \rangle$$

Ejemplo 2

Sea $\mathbf{u}(t) = \langle \sin(t), \cos(t), t \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle t, t, t \rangle$. Entonces:

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle \sin(t) + t, \cos(t) + t, 2t \rangle$$

Ejemplo 3

Sea $\mathbf{u}(t) = \langle e^t, e^{-t}, 0 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle 0, 0, t^2 \rangle$. Entonces:

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle e^t, e^{-t}, t^2 \rangle$$

Ejemplos : Suma

Ejemplo 4

Sea $\mathbf{u}(t) = \langle t^2, t^3, t^4 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), t \rangle$. Entonces:

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle t^2 + \cos(t), t^3 + \sin(t), t^4 + t \rangle$$

Ejemplo 5

Sea $\mathbf{u}(t) = \langle \ln(t), t^2, e^t \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle t, 1/t, \cos(t) \rangle$. Entonces:

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle \ln(t) + t, t^2 + \frac{1}{t}, e^t + \cos(t) \rangle$$

Ejemplo 6

Sea $\mathbf{u}(t) = \langle t^5, e^t, \ln(t) \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle t^3, t^4, t^2 \rangle$. Entonces:

$$\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) = \langle t^5 + t^3, e^t + t^4, \ln(t) + t^2 \rangle$$

Multiplicación y División por un Escalar

- **Definición**: Si c es un escalar y $\mathbf{u}(t) = \langle u_1(t), u_2(t), u_3(t)\rangle$, entonces

$$c\mathbf{u}(t) = \langle cu_1(t), cu_2(t), cu_3(t)\rangle$$

- Multiplicación por un escalar: $c \cdot \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} cf_1(t) \\ cf_2(t) \\ cf_3(t) \end{pmatrix}$
- Ejemplo básico: Si $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $c = 3$, entonces $3\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t^2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- División por un escalar: $\frac{\mathbf{f}(t)}{c} = \begin{pmatrix} \frac{f_1(t)}{c} \\ \frac{f_2(t)}{c} \\ \frac{f_3(t)}{c} \end{pmatrix}$, $c \neq 0$
- Ejemplo básico: Si $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \\ 6t^3 \end{pmatrix}$ y $c = 2$, entonces $\frac{\mathbf{g}(t)}{2} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 3t^3 \end{pmatrix}$

Ejemplos : Multiplicación por un Escalar

Ejemplo 1

Sea $c = 2$ y $\mathbf{u}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$. Entonces:

$$2\mathbf{u}(t) = \langle 2t, 2t^2, 2t^3 \rangle$$

Ejemplo 2

Sea $c = -1$ y $\mathbf{u}(t) = \langle \sin(t), \cos(t), t \rangle$. Entonces:

$$-\mathbf{u}(t) = \langle -\sin(t), -\cos(t), -t \rangle$$

Ejemplo 3

Sea $c = \frac{1}{2}$ y $\mathbf{u}(t) = \langle e^t, e^{-t}, 0 \rangle$. Entonces:

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}(t) = \langle \frac{e^t}{2}, \frac{e^{-t}}{2}, 0 \rangle$$

Ejemplos : Multiplicación por un Escalar

Ejemplo 4

Sea $c = 3$ y $\mathbf{u}(t) = \langle t^2, t^3, t^4 \rangle$. Entonces:

$$3\mathbf{u}(t) = \langle 3t^2, 3t^3, 3t^4 \rangle$$

Ejemplo 5

Sea $c = -2$ y $\mathbf{u}(t) = \langle \ln(t), t^2, e^t \rangle$. Entonces:

$$-2\mathbf{u}(t) = \langle -2\ln(t), -2t^2, -2e^t \rangle$$

Producto Escalar

Definición

El producto escalar de dos funciones vectoriales $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ es una función escalar dada por:

$$\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) g_i(t)$$

donde n es la dimensión del espacio vectorial, $\mathbb{R}^n$.

El producto escalar de dos funciones vectoriales $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ en $\mathbb{R}^3$ es:

$$\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)$$

Ejemplo

El producto escalar de dos vectores, $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (4, 5, 6)$ entonces:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1, 2, 3) \cdot (4, 5, 6) = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$$

Ejemplo

El producto escalar de dos vectores, $\mathbf{a} = (-1, 0, 2), \mathbf{b} = (3, -5, 7)$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-1, 0, 2) \cdot (3, -5, 7) = -1 \cdot 3 + 0 \cdot (-5) + 2 \cdot 7$$

Producto Escalar:

Ejemplo

El producto escalar de dos funciones vectoriales. Si $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -t \\ 4t \end{pmatrix}$, entonces:

$$\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t) = t \cdot 3 + 2(-t) + 1(4t) = 3t - 2t + 4t = 5t$$

Ejemplo

El producto escalar de dos funciones vectoriales. Si $\mathbf{A}(\theta) = (\sin(\theta), \cos(\theta))$, $\mathbf{B}(\theta) = (\cos(\theta), -\sin(\theta))$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\theta) \cdot \mathbf{B}(\theta) &= (\sin(\theta), \cos(\theta)) \cdot (\cos(\theta), -\sin(\theta)) \\ &= \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo

El producto escalar de dos funciones vectoriales. Si $\mathbf{f}(t) = (t, t^2, t^3)$, $\mathbf{g}(t) = (2, -1, t)$
Producto escalar:

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = t \cdot 2 + t^2 \cdot (-1) + t^3 \cdot t$$

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = 2t - t^2 + t^4$$

Ejemplo

El producto escalar de dos funciones vectoriales. Si $\mathbf{f}(t) = (e^t, \sin(t), \cos(t))$, $\mathbf{g}(t) = (1, 0, 1)$
Producto escalar:

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = e^t \cdot 1 + \sin(t) \cdot 0 + \cos(t) \cdot 1$$

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = e^t + \cos(t)$$

Ejemplo

El producto escalar de dos funciones vectoriales. Si $\mathbf{f}(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$,
$\mathbf{g}(t) = (t, e^t, \ln(t))$
Producto escalar:

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = \sin(t) \cdot t + \cos(t) \cdot e^t + t^2 \cdot \ln(t)$$

$$\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t) \rangle = t \sin(t) + e^t \cos(t) + t^2 \ln(t)$$

Ejemplos : Producto Escalar

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = t + 2t^2 + 3t^3$$

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = t$$

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$$

Ejemplos : Producto Escalar

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ t^2 \\ \ln(t) \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ \frac{1}{t} \\ t \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = e^t \sin(t) + t + t \ln(t)$$

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 3t \\ t^3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = 3t^3 + 2t^4 + 3$$

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} \arctan(t) \\ t^2 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t) = \arctan(t)e^t + t^2 \cos(t) + e^{-t} \sin(t)$$

Producto Vectorial

El producto vectorial de dos funciones vectoriales $\vec{u}(t)$ y $\vec{v}(t)$ es:

$$\vec{u}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1(t) & u_2(t) & u_3(t) \\ v_1(t) & v_2(t) & v_3(t) \end{vmatrix}$$

- El producto vectorial de dos funciones vectoriales $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ es:

$$\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Si $\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & t^2 \\ t & t^2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(4t - t^3) - \mathbf{j}(2 - t^2) + \mathbf{k}(t - 2t^2)$$

Producto Vectorial:

Ejemplo

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

Ejemplo

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, 2, 3) \times (4, 5, 6)$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Ejemplo

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) \times (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

Ejemplos

Ejemplo

Consideremos las funciones vectoriales:

$$\mathbf{f}(t) = (t, t^2, t^3), \quad \mathbf{g}(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

Calculemos el producto vectorial $\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)$:

$$\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t & t^2 & t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante:

$$\mathbf{i}(t^2 \cdot 3t^2 - t^3 \cdot 2t) - \mathbf{j}(t \cdot 3t^2 - t^3 \cdot 1) + \mathbf{k}(t \cdot 2t - t^2 \cdot 1)$$

Simplificando cada componente:

$$\mathbf{i}(3t^4 - 2t^4) - \mathbf{j}(3t^3 - t^3) + \mathbf{k}(2t^2 - t^2)$$

$$\mathbf{i}t^4 - \mathbf{j}2t^3 + \mathbf{k}t^2$$

Entonces, el producto vectorial es:

$$\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t) = (t^4, -2t^3, t^2)$$

Ejemplo

Ejemplo

Para las funciones vectoriales:

$$\mathbf{f}(t) = (t^2, 2t, 1), \quad \mathbf{h}(t) = (t, t^3, t^4)$$

El producto vectorial $\mathbf{f}(t) \times \mathbf{h}(t)$ es:

$$\mathbf{f}(t) \times \mathbf{h}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & 2t & 1 \\ t & t^3 & t^4 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(2t \cdot t^4 - 1 \cdot t^3) - \mathbf{j}(t^2 \cdot t^4 - 1 \cdot t) + \mathbf{k}(t^2 \cdot t^3 - 2t \cdot t)$$

Simplificando cada componente:

$$\mathbf{i}(2t^5 - t^3) - \mathbf{j}(t^6 - t) + \mathbf{k}(t^5 - 2t^2)$$

$$= (2t^5 - t^3, -(t^6 - t), t^5 - 2t^2)$$

Entonces, el producto vectorial es:

$$\mathbf{f}(t) \times \mathbf{h}(t) = (2t^5 - t^3, -t^6 + t, t^5 - 2t^2)$$

Ejemplo

Ejemplo

Ahora consideremos:

$$\mathbf{g}(t) = (3t, t^2, t^3), \quad \mathbf{h}(t) = (1, 4t, 5t^2)$$

Calculamos $\mathbf{g}(t) \times \mathbf{h}(t)$:

$$\mathbf{g}(t) \times \mathbf{h}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3t & t^2 & t^3 \\ 1 & 4t & 5t^2 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(t^2 \cdot 5t^2 - t^3 \cdot 4t) - \mathbf{j}(3t \cdot 5t^2 - t^3 \cdot 1) + \mathbf{k}(3t \cdot 4t - t^2 \cdot 1)$$

Simplificando cada componente:

$$\mathbf{i}(5t^4 - 4t^4) - \mathbf{j}(15t^3 - t^3) + \mathbf{k}(12t^2 - t^2)$$

$$= (t^4, -14t^3, 11t^2)$$

Entonces, el producto vectorial es:

$$\mathbf{g}(t) \times \mathbf{h}(t) = (t^4, -14t^3, 11t^2)$$

Ejemplos:Producto Vectorial

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} t^2 - 2t^3 \\ t^3 - 3t \\ 2t^2 - t \end{bmatrix}$$

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} -t^2 \\ t^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplos:Producto Vectorial

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ t^2 \\ \sin(t) \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ e^{-t} \\ t \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} t^2 t - \sin(t) e^{-t} \\ \sin(t)\cos(t) - e^t t \\ e^t e^{-t} - t^2 \cos(t) \end{bmatrix}$$

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \sin(t) \\ \cos(t) \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ \ln(t) \\ t^2 \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) t^2 - \cos(t)\ln(t) \\ \cos(t) e^t - t t^2 \\ t\ln(t) - \sin(t) e^t \end{bmatrix}$$

- $\vec{u}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ \tan(t) \\ e^t \end{bmatrix}, \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \arcsin(t) \\ t^2 \\ \frac{1}{t} \end{bmatrix}$

$$\vec{u}(t) \times \vec{v}(t) = \begin{bmatrix} \tan(t) \cdot \frac{1}{t} - e^t t^2 \\ e^t \arcsin(t) - t^3 \cdot \frac{1}{t} \\ t^3 t^2 - \tan(t)\arcsin(t) \end{bmatrix}$$