MA1003 Cálculo III
Tema 03: Integrales múltiples
Parte 03: Integrales triples

Profesor Jesús Sánchez Guevara

U.C.R.

I Semestre 2020

En esta clase

1. Definición de integral triple.
2. Integración sobre paralelepípedos.
3. Regiones x-simples, y-simples y z-simples.
4. Integración sobre regiones generales.
5. Cambio de orden de integración.

Introducción

¿Qué es una integral triple?

1. Es una extensión al espacio de la interpretación geométrica de las integrales de una variable o dos variables.
2. Se pueden calcular expresándolas en términos de integrales de una varible.

Vimos que

$$\iint_R f(x,y)dA$$

es el volúmen debajo de la superficie de $z = f(x,y)$ sobre la región R del plano.

En el caso de integrales triples, tiene que

$$\iiint_S f(x,y,z)dV$$

es el hipervolúmen debajo del gráfico $w = f(x,y,z)$ sobre la región S del espacio.

❑ Hacer un dibujo.

Para calcular aproximar este hipervolúmen, se puede cortar S en pequeñas piezas ΔV_i, y se toma la suma

$$\sum f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$$

El límite de estas sumas cuando el tamaño de las piezas tiende a cero, da $\iiint_S f(x,y,z)dV$

❑ **¿Cómo se calcula una integral triple?**

R/ Por iteración de integrales de una variable. El hipervolúmen se puede cortar por planos paralelos al hiperplano $z = 0$. y al sumar tenemos:

$$\text{hipervolúmen} = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} T(x,y)dz$$

$T(x,y)$ es el volúmen debajo la superficie $f(x,y,z)$ sobre el área al cortar T con a la altura dz, lo cual da una integral doble $\iint f(x,y,z)dA$.

Note que también se pudo haber empezado por cortes del tipo $x = 0$ o $y = 0$. Explicar.

El resultado de este proceso se va a estudiar primero para tres tipos de regiones especiales:

1. Paralelepípedos con lados paralelos a los planos xy, yz y xz.
2. Regiones x-simples, regiones y-simples y regiones z-simples.

Así, cuando se quiere integrar sobre un volúmen cualquiera, la técnica será buscar dividirlo en regiones no sobrepuestas de estos tipos.

Nota:

$$R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$$

representa el paralelepípedo de $\mathbb{R}^3$ con vértices (a_1, b_1, c_1), (a_1, b_2, c_1), (a_2, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_1), (a_1, b_1, c_2), (a_1, b_2, c_2), (a_2, b_1, c_2), (a_2, b_2, c_2).

❏ Hacer un dibujo.

Teorema de Fubini

Si $f(x, y, z)$ continua sobre $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$, entonces

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dV$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \int_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \int_{[a_1,a_2]\times[c_1,c_2]} f(x,y,z)dxdzdy$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \int_{[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]} f(x,y,z)dydzdx$$

Lo cual nos las combinaciones:

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dV =$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x,y,z)dydxdz$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dzdxdy$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)dxdzdy$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \int_{b_1}^{b_2} \int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)dzdydx$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} \int_{c_1}^{c_2} \int_{b_1}^{b_2} f(x,y,z)dydzdx$$

Observación

En integrales triples hay 6 posibles ordenes de integración: *dydxdz*, *dxdydz*, *dzdxdy*, *dxdzdy*, *dzdydx*, *dydzdx*.

Ejemplo

Calcule la masa de un cubo $[a, b] \times [a, b] \times [a, b]$ con densidad constante $\delta(x, y, z) = c$.

$$\text{Masa} = \iiint\limits_{[a,b]^3} \delta dV = \int_a^b \int_a^b \int_a^b c dx dy dz = c(b-a)^3$$

Ejemplo

Calcule las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ del centro de masa de un bloque de dimensiones $a \times b \times c$ y densidad uniforme $\delta = 1$.

Usamos el sólido $R = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$.

$$\text{Masa}(R) = \iiint\limits_{[0,a]\times[0,b]\times[0,c]} \delta dV = \int_0^a \int_0^b \int_0^c 1 dz dy dx = abc$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\text{Masa}(R)} \iiint\limits_R x \delta dV = \frac{1}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c x dz dy dx = \frac{1}{abc} bc \int_0^a x dz dy dx = \frac{a}{2}$$

Similarmente se obtiene $\bar{y} = \frac{b}{2}$ y $\bar{z} = \frac{c}{2}$. Por lo tanto su centro de masa se ubica en:

$$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

Definición

Una región R del espacio se llama z-**simple** si es de la forma:

$$R = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ y } g_1(x, y) \leqslant z \leqslant g_2(x, y)\}$$

Es decir, R es el volúmen sobre la región D del plano xy y encerrado entre las superficies $z = g_1(x, y)$ y $z = g_2(x, y)$.

Propiedad

Si R es z-simple, como la definición anterior, entonces:

$$\iiint_R f(x, y, z)dV = \int_D \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dzdydx$$

❑ **Nota**: el orden puede ser *dzdydx* o *dzdxdy* dependiendo de cómo se integre la región D.

Ejemplo

Exprese mediante una integral triple el volúmen de la región R del espacio $z \geqslant 0$ encerrado entre los paraboloides $1 - z = x^2 + y^2$ y $2 - z = 2x^2 + 2y^2$.

`Geogebra: 1-z=x^2+y^2 2-z=2x^2+2y^2`

R es z-simple:

$$R = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ y } 1 - x^2 - y^2 \leqslant z \leqslant 2 - 2x^2 - 2y^2\}$$

Donde D es el disco unidad $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

$$\begin{aligned}\text{Volúmen}(R) &= \iiint_R 1dV = \iint_D \int_{1-x^2-y^2}^{2-2x^2-2y^2} 1dzdydx \\ &= \iint_D 1 - x^2 - y^2 dydx \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2)rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Definición

Una región R del espacio se llama y-**simple** si es de la forma:

$$R = \{(x, y, z) : [x, z] \in D \text{ y } \\ g_1(x, z) \leqslant y \leqslant g_2(x, z)\}$$

Es decir, R es el volúmen sobre la región D del plano xz y encerrado entre las superficies $y = g_1(x, z)$ y $y = g_2(x, z)$.

Propiedad

Si R es y-simple, como la definición anterior, entonces:

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)dV = \int_D \int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x, y, z)dydzdx$$

❏ **Nota**: el orden puede ser *dydzdx* o *dydxdz* dependiendo de cómo se integre la región D.

Ejemplo

Calcule $I = \iiint_R ydV$, donde R es la región R del espacio $y \geqslant 0$ encerrada entre la esfera unidad y el paraboloide $2 - y = 2x^2 + 2z^2$.

```
Geogebra: 1=x^2+y^2+z^2 2-y=2x^2+2z^2
```

R es y-simple:

$$R = \{(x, y, z) : (x, z) \in D \text{ y } \\ \sqrt{1 - x^2 - z^2} \leqslant y \leqslant 2 - 2x^2 - 2z^2\}$$

Donde D es el disco unidad $x^2 + z^2 \leqslant 1$.

$$I = \iiint\limits_R ydV = \iint\limits_D \int_{\sqrt{1-x^2-z^2}}^{2-2x^2-2z^2} ydydzdx$$

$$= \iint\limits_D 2(1 - x^2 - z^2)^2 - \frac{1}{2}(1 - x^2 - z^2)dxdz$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2(1 - r^2)^2 - \frac{1}{2}(1 - r^2))rdrd\theta = \frac{5\pi}{12}$$

Definición

Una región R del espacio se llama x-**simple** si es de la forma:

$$R = \{(x,y,z) : [y,z] \in D \text{ y } g_1(y,z) \leqslant x \leqslant g_2(y,z)\}$$

Es decir, R es el volúmen sobre la región D del plano yz y encerrado entre las superficies $x = g_1(y,z)$ y $x = g_2(y,z)$.

Propiedad

Si R es x-simple, como la definición anterior, entonces:

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dV = \int_D \int_{g_1(y,z)}^{g_2(y,z)} f(x,y,z)dxdzdy$$

❑ **Nota**: el orden puede ser *dxdzdy* o *dxdydz* dependiendo de cómo se integre la región D.

Ejemplo

Considere la integral

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)dzdydx$$

Dibuje la región de integración y reescriba esta integral en el orden *dxdzdy*.

La región es un cilindro de altura 1 y base el disco $y^2 + z^2 \leqslant 1$, por lo que al verla como x-simple tenemos:

$$R = \{(x,y,z) : (y,z) \in D \text{ y } \ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$$

Donde D es el disco unidad $y^2 + z^2 \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D \int_0^1 f(x,y,z)dxdzdy \\ &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^1 f(x,y,z)dxdzdy \end{aligned}$$

❑ **Nota:** este nuevo orden es preferible para usar coordenas polares.

Para analizar integrales triples sobre regiones (acotadas) más generales, tenemos:

Propiedades

1. Los paralelepípedos $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ son regiones x-simples, y-simples y z-simples.

2. $$\iiint_R (\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z))dV$$ $$= \alpha \iiint_R f(x,y,z)dV + \beta \iiint_R g(x,y,z)dV$$

3. Si $R = R_1 \bigcup R_2$, donde R_1 y R_2 son regiones del espacio que a lo más, solo comparten bordes, entonces:
$$\iiint_R f(x,y,z)dV = \iiint_{R_1 \bigcup R_2} f(x,y,z)dV$$ $$= \iiint_{R_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{R_2} f(x,y,z)dV$$

Proceso para calcular una integral triple

Se quiere calcular

$$\iiint_R f(x,y,z)dV$$

1. Estudie la región R y determine si es z-simples, y-simples o x-simple.
2. Si R está en alguna de estas categorías, calcule la integral iterada resultante según la propiedad respectiva.
3. Si R no entra en estas categorías, entonces
    1. Si se quiere resolver usando el orden $dxdydz$ o $dydxdz$, divida R en regiones z-simples, y calcule la suma de integrales iteradas respectivas.
    2. Si se quiere resolver usando el orden $dxdzdy$ o $dzdxdy$, divida R en regiones y-simples, y calcule la suma de integrales iteradas respectivas.
    3. Si se quiere resolver usando el orden $dzdydx$ o $dydzdx$, divida R en regiones x-simples, y calcule la suma de integrales iteradas respectivas.

Ejemplo

Use una integral triple para expresar el volúmen del sólido limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 20$, $z = 0$, $x - y^2 = 0$; con $z \geqslant 0$, $x \geqslant y^2$.

(1) Se grafica las superficies y se identifica que el sólido está limitado por una región R z-simple.

```
Geogebra: x^2+y^2+z^2=20 x-y^2=0
```

$$R = \{(x, y, z) : (x, z) \in D \text{ y } 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{20 - x^2 - y^2}\}$$

donde D es la sombra en el plano xy de la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 20$, que se encuentra dentro de $x \geqslant y^2$.

(2) En el plano xy, la región D está limitada por las curvas $x^2 + y^2 = 20$ y $x - y^2 = 0$. Para expresarla como horizontalmente simple, primero se encuetra los puntos donde se intersecan.

Para esto se resuelve $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$

Al sumarlas se obtiene $x^2 + x - 20 = 0$, lo cual da $x = -5$ y $x = 4$, pero por la segunda ecuación solo es posible $x = 4$, de lo cual se obtiene que $y = \pm 2$. Así, las curvas se cortan en $(4, 2)$ y $(4, -2)$. Entonces,

$$D = \{(x, y) : -2 \leqslant y \leqslant 2 \text{ y } \ y^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{20 - y^2}\}$$

(3)

$$\text{Volúmen} = \iiint_R 1 dV = \iint_D \int_0^{\sqrt{20-x^2-y^2}} 1 dzdxdy$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{\sqrt{20-y^2}} \int_0^{\sqrt{20-x^2-y^2}} 1 dzdxdy$$

Ejemplo

Plantear como suma de integrales iteradas, en cualquier orden de integración, la integral triple $I = \iiint_T x^2 dV$, donde T es la pirámide limitada por la superficie $|x| + |y| + z = 4$ y por el plano $z = 0$.

La pirámide está limitada por los planos:

1. 1er octante $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$:
$$x + y + z = 4$$
2. 2er octante $(x \leqslant 0, y \geqslant 0)$:
$$-x + y + z = 4$$
3. 3er octante $(x \leqslant 0, y \leqslant 0)$:
$$-x - y + z = 4$$
4. 4er octante $(x \geqslant 0, y \leqslant 0)$:
$$x - y + z = 4$$

```
Geogebra: x+y+z=4 -x+y+z=4
-x-y+z=4 x-y+z=4
```

La pirámide está formada por cuatro regiones z-simples, R_1, R_2, R_3 y R_4, una por cada octante. Las sombras de estas regiones D_1, D_2, D_3 y D_4 (respectivamente), sobre el plano xy forman un cuadrado limitado por las rectas $x + y = 4$, $-x + y = 4$, $-x - y = 4$ y $x - y = 4$, con vértices son $(4, 0)$, $(0, 4)$, $(-4, 0)$ y $(0, -4)$.

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_T x^2 dV \\
&= \iiint\limits_{R_1} x^2 dV + \iiint\limits_{R_2} x^2 dV + \iiint\limits_{R_3} x^2 dV + \iiint\limits_{R_4} x^2 dV \\
&= \iint\limits_{D_1} \int_0^{4-x-y} x^2 dzdydx + \iint\limits_{D_2} \int_0^{4+x-y} x^2 dzdydx \\
&\quad + \iint\limits_{D_3} \int_0^{4+x+y} x^2 dzdydx + \iint\limits_{D_4} \int_0^{4-x+y} x^2 dzdydx \\
&= \int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} x^2 dzdydx + \int_{-4}^0 \int_0^{4+x} \int_0^{4+x-y} x^2 dzdydx \\
&\quad + \int_{-4}^0 \int_{-4-x}^0 \int_0^{4+x+y} x^2 dzdydx + \int_0^4 \int_{-4+x}^0 \int_0^{4-x+y} x^2 dzdydx
\end{aligned}$$

Ejemplo

En la integral triple

$$I = \int_0^a \int_0^y \int_0^z e^{(a-x)^3} dxdzdy$$

con $a > 0$, cambiar el orden de integración *dxdzdy* al orden *dzdydx* y evaluar I en el nuevo orden.

Escrita como *dxdzdy* la región de integración R es x-simple.

$$R = \{(x, y, z) : (y, z) \in D \text{ y } \ 0 \leqslant x \leqslant z\}$$

donde la sombra D sobre el plano yz es la región:

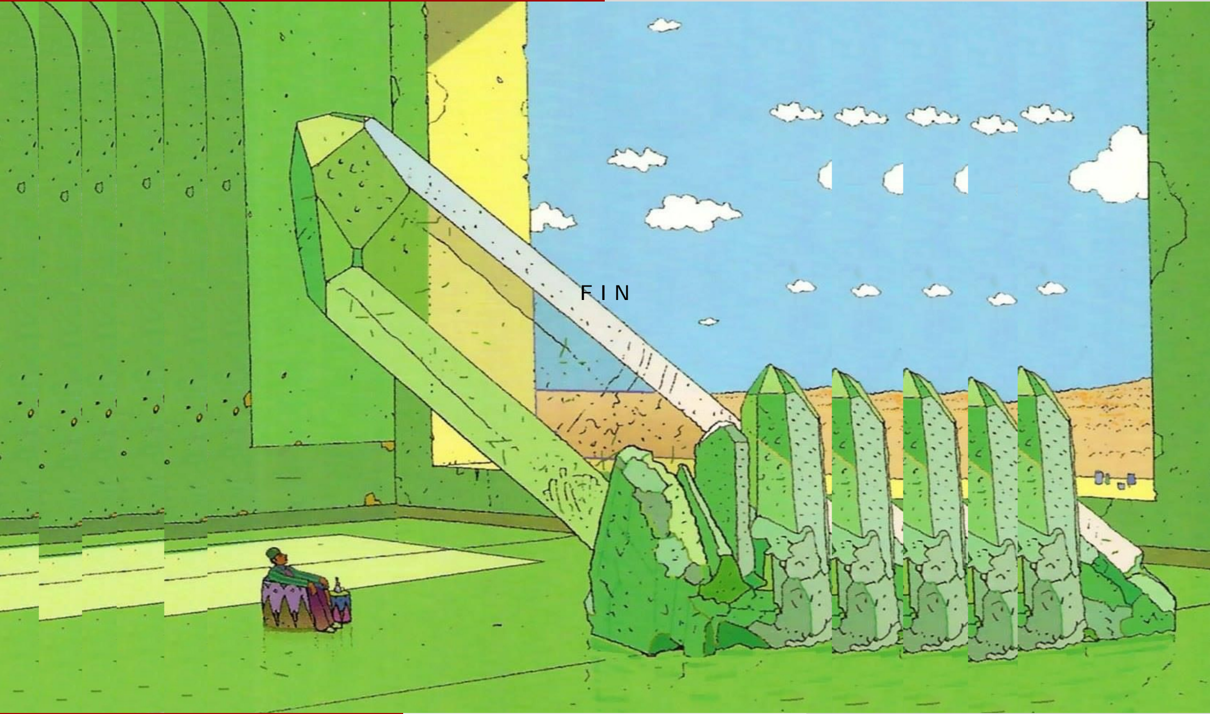
$$D = \{(y, z) : 0 \leqslant y \leqslant a \text{ y } \ 0 \leqslant z \leqslant y\}$$

la cual es un triángulo rectágulo con hipotenusa sobre $z = y$ y catetos sobre el eje y^+ y la recta $y = a$

Para tener el orden *dzdydx* hay que ver a R con verticalmente simple. Del dibujo se observa que R es un tetrahedro limitado por los planos $z = y$, $z = x$, $y = a$ y $x = 0$. Entonces,

$$R = \{(x, y, z) : (x, y) \in D' \text{ y } \ x \leqslant z \leqslant y\}$$
$$D' = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant a \text{ y } \ x \leqslant y \leqslant a\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int_0^a \int_x^a \int_x^y e^{(a-x)^3} dzdydx \\
&= \int_0^a \int_x^a (y-x) e^{(a-x)^3} dydx \\
&= \int_0^a \frac{a^2 - x^2}{2} e^{(a-x)^3} - x(a-x) e^{(a-x)^3} dx \\
&= \int_0^a \frac{(a-x)^2}{2} e^{(a-x)^3} dx = \left. \frac{-e^{(a-x)^3}}{6} \right|_0^a \\
&= \frac{e^{a^3} - 1}{6}
\end{aligned}$$



F I N