Cálculo de Varias Variables
Práctica Calificada: Funciones Vectoriales

20 de Setiembre 2024

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

Nombre: ____________________________________

1. **Producto escalar de funciones vectoriales:** Dadas las funciones vectoriales

   - $\mathbf{r}_1(t) = \langle 2t^2, 3\sin(t), 4e^t \rangle$,
   - $\mathbf{r}_2(t) = \langle 5\cos(t), t, 3\ln(t+1) \rangle$,

   Encuentre el producto escalar $\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)$.

   Solución: El producto escalar de dos funciones vectoriales $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ se define como:

   $$\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = \left(2t^2\right) \cdot (5\cos(t)) + (3\sin(t)) \cdot (t) + \left(4e^t\right) \cdot (3\ln(t+1))$$

   Ahora, calculamos cada término del producto escalar:

   $$2t^2 \cdot 5\cos(t) = 10t^2\cos(t)$$

   $$3\sin(t) \cdot t = 3t\sin(t)$$

   $$4e^t \cdot 3\ln(t+1) = 12e^t\ln(t+1)$$

   Entonces, el producto escalar es:

   $$\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = 10t^2\cos(t) + 3t\sin(t) + 12e^t\ln(t+1)$$

   La solución final es:

   $$\boxed{10t^2\cos(t) + 3t\sin(t) + 12e^t\ln(t+1)}$$

2. **Producto vectorial de funciones vectoriales:** Dadas las funciones vectoriales

   - $\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 4t, 1 \rangle$,
   - $\mathbf{r}_2(t) = \langle 1, 2\cos(t), 2\sin(t) \rangle$,

   Calcule el producto vectorial $\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)$.

   Solución:

(a) Producto vectorial $r_1(t) \times r_2(t)$
Recordemos que el producto vectorial se calcula utilizando un determinante:

$$\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & 4t & 1 \\ 1 & 2\cos(t) & 2\sin(t) \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 4t & 1 \\ 2\cos(t) & 2\sin(t) \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 1 & 2\sin(t) \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} t^2 & 4t \\ 1 & 2\cos(t) \end{vmatrix}$$

Resolviendo los determinantes de 2×2:

$$\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{i}(8t\sin(t) - 2\cos(t)) - \mathbf{j}(2t^2\sin(t) - 1) + \mathbf{k}(2t^2\cos(t) - 4t)$$

Por lo tanto, el producto vectorial es:

$$\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) = \langle 8t\sin(t) - 2\cos(t), -2t^2\sin(t) + 1, 2t^2\cos(t) - 4t \rangle$$

(b) Producto escalar $r_1(t) \cdot r_2(t)$
El producto escalar se calcula como la suma de los productos de las componentes correspondientes:

$$\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = (t^2)(1) + (4t)(2\cos(t)) + (1)(2\sin(t)) = t^2 + 8t\cos(t) + 2\sin(t)$$

Respuesta final:

- Producto vectorial: $<8t\sin(t) - 2\cos(t), -2t^2\sin(t) + 1, 2t^2\cos(t) - 4t>$
- Producto escalar: $t^2 + 8t\cos(t) + 2\sin(t)$

3. **Derivadas e Integrales de funciones vectoriales:** Sea la función vectorial
   - $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, 3e^t, 3\sin(t) \rangle$,
   - $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{4}{5}\cos t, \sin t - 1, -\frac{3}{5}\cos t \rangle$

(a) Encuentre la derivada $\mathbf{r}'(t)$.
(b) Calcule la integral $\int \mathbf{r}(t)\,dt$.

Solución:

(a) **Derivada:**
La derivada de una función vectorial se realiza derivando cada componente por separado:

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle \frac{d}{dt}(t^3), \frac{d}{dt}(3e^t), \frac{d}{dt}(3\sin(t)) \right\rangle$$

Calculando cada derivada:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 3t^2, 3e^t, 3\cos(t) \rangle$$

(b) **Integral:**
Ahora, calculemos la integral de la función vectorial integrando cada componente:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \int \langle t^3, 3e^t, 3\sin(t) \rangle\,dt$$

Calculando cada integral por separado:

$$\int t^3\,dt = \frac{t^4}{4}, \quad \int 3e^t\,dt = 3e^t, \quad \int 3\sin(t)\,dt = -3\cos(t)$$

Entonces, la integral de la función vectorial es:

$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left\langle \frac{t^4}{4}, 3e^t, -3\cos(t) \right\rangle + \mathbf{C}$$

donde $\mathbf{C}$ es el vector constante de integración.

4. **Vectores tangente unitario, normal y binormal:** Para la función vectorial

   (a) $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, 2t^2, 3t^3 \rangle$,

   (b) $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{4}{5}\cos t, \sin t - 1, 0 \rangle$,

   Encuentre los vectores tangente unitario $\mathbf{T}(t)$, normal unitario $\mathbf{N}(t)$ y binormal $\mathbf{B}(t)$.

   (a) $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, 2t^2, 3t^3 \rangle$

   Solución: Calculando la primera y segunda derivada de la funcion vectorial

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle e^t, 4t, 9t^2 \right\rangle$$

$$\mathbf{r}''(t) = \left\langle e^t, 4, 18t \right\rangle$$

El módulo de $\mathbf{r}'(t)$ es:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(e^t)^2 + (4t)^2 + (9t^2)^2} = \sqrt{e^{2t} + 16t^2 + 81t^4}$$

$$|\mathbf{r}''(t)| = \sqrt{(e^t)^2 + (4)^2 + (18t)^2} = \sqrt{e^{2t} + 16 + 324t^2}$$

El vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\langle e^t, 4t, 9t^2 \rangle}{\underbrace{\sqrt{e^{2t} + 16t^2 + 81t^4}}_{A}}$$

El vector normal unitario es:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} == \frac{\mathbf{r}'(t) \times (\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'(t))}{|\mathbf{r}'(t)||\mathbf{r}''(t) \times \mathbf{r}'(t)|}$$

Finalmente, el vector binormal se obtiene como el producto vectorial de los vectores tangente y normal unitarios:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}$$

$$|\mathbf{B}(t)| = |\mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)| = |\mathbf{T}(t)||\mathbf{N}(t)| \sin\theta$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ e^t & 4t & 9t^2 \\ e^t & 4 & 18t \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 4t & 9t^2 \\ 4 & 18t \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} e^t & 9t^2 \\ e^t & 18t \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} e^t & 4t \\ e^t & 4 \end{vmatrix}$$

Resolviendo los determinantes de 2×2:

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \mathbf{i}(72t^2 - 36t^2) - \mathbf{j}(18te^t - 9t^2e^t) + \mathbf{k}(4e^t - 4te^t)$$

Por lo tanto, el producto vectorial es:

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \langle 36t^2, 18te^t - 9t^2e^t, 4e^t - 4te^t \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{(36t^2)^2 + (18te^t - 9t^2e^t)^2 + (4e^t - 4te^t)^2}$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|} = \frac{\langle 36t^2, 18te^t - 9t^2e^t, 4e^t - 4te^t\rangle}{\underbrace{\sqrt{(36t^2)^2 + (18te^t - 9t^2e^t)^2 + (4e^t - 4te^t)^2}}_{B}}$$

Sabemos el producto vectorial $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t)$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t)\times\mathbf{T}(t) = \frac{1}{(A\cdot B)}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 36t^2 & 18te^t - 9t^2e^t & 4e^t - 4te^t \\ e^t & 4t & 9t^2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(A\cdot B)}\left(\mathbf{i}\begin{vmatrix} 18te^t - 9t^2e^t & 4e^t - 4te^t \\ 4t & 9t^2 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} 36t^2 & 4e^t - 4te^t \\ e^t & 9t^2 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} 36t^2 & 18te^t - 9t^2e^t \\ e^t & 4t \end{vmatrix}\right)$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(A\cdot B)}\langle 162t^3e^t - 81t^4e^t - 16te^t + 16t^2e^t, 324t^4 - 4e^{2t} + 4te^{2t}, 144t^3 - 18te^{2t} + 9t^2e^{2t}\rangle$$

(b) $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{4}{5}\cos t, \sin t - 1, 0\rangle$

Solución:

Calculando la primera y segunda derivada de la funcion vectorial

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle -\frac{4}{5}\sin t, \cos t, 0\right\rangle$$

$$\mathbf{r}''(t) = \left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\sin t, 0\right\rangle$$

El módulo de $\mathbf{r}'(t)$ es:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\sin t\right)^2 + (\cos t)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{16 + 9\cos^2 t}$$

$$|\mathbf{r}''(t)| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\cos t\right)^2 + (-\sin t)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{16 + 9\sin^2 t}$$

El vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\langle -\frac{4}{5}\sin t, \cos t, 0\rangle}{\underbrace{\frac{1}{5}\sqrt{16 + 9\cos^2 t}}_{A}}$$

Siguiendo los mismos pasos que en la primera parte, se obtiene el vector normal unitario y el binormal de manera similar, el vector binormal se obtiene como el producto vectorial de los vectores tangente y normal unitarios:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}$$

$$\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{4}{5}\sin t & \cos t & 0 \\ -\frac{4}{5}\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -\frac{4}{5}\sin t & 0 \\ -\frac{4}{5}\cos t & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -\frac{4}{5}\sin t & \cos t \\ -\frac{4}{5}\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

Resolviendo los determinantes de 2×2:

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \mathbf{i}(0) - \mathbf{j}(0) + \mathbf{k}(\frac{4}{5}\sin^2 t + \frac{4}{5}\cos^2 t)$$

Por lo tanto, el producto vectorial es:

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \langle 0, 0, \frac{4}{5} \rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|} = \frac{\langle 0, 0, \frac{4}{5} \rangle}{\frac{4}{5}} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Sabemos el producto vectorial $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{5}\frac{\sin t}{A} & \frac{\cos t}{A} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{1}{(A \cdot B)} \left(\mathbf{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\cos t}{A} & 0 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{4}{5}\frac{\sin t}{A} & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{4}{5}\frac{\sin t}{A} & \frac{\cos t}{A} \end{vmatrix} \right)$$

$$\mathbf{N}(t) = \langle \frac{-\cos t}{A}, -\frac{4}{5}\frac{\sin t}{A}, 0 \rangle$$

5. **Planos normal, osculador y rectificante:** Dada la curva parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln(t+1) \rangle$$

Encuentre las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en $t = \frac{\pi}{2}$.
Solución:

(a) **Paso 1: Vectores importantes**
Para hallar los planos, necesitamos los vectores tangente unitario $\mathbf{T}(t)$, normal $\mathbf{N}(t)$, y binormal $\mathbf{B}(t)$. La curva parametrizada $\mathbf{r}(t)$ es:

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t), \sin(t), \ln(t+1) \rangle$$

Evaluamos en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 0, 1, \ln(\frac{\pi}{2} + 1) \rangle$$

La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin(t), \cos(t), \frac{1}{t+1} \rangle$$

Evaluamos en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle -1, 0, \frac{2}{\pi+2} \rangle$$

La segunda derivada de $\mathbf{r}(t)$ es:

$$\mathbf{r}''(t) = \langle -\cos(t), -\sin(t), -\frac{1}{(t+1)^2} \rangle$$

Evaluando en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{r}''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 0, -1, -\frac{4}{(\pi+2)^2}\rangle$$

El vector tangente unitario es:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$

Evaluamos en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\langle -1, 0, \frac{2}{\pi+2}\rangle}{\underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi+2}\right)^2}}_{A}} = \frac{\langle -1, 0, \frac{2}{\pi+2}\rangle}{A}$$

El vector binormal se obtiene como el producto vectorial de los vectores tangente y normal unitarios:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin(t) & \cos(t) & \frac{1}{t+1} \\ -\cos(t) & -\sin(t) & -\frac{1}{(t+1)^2} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \mathbf{i}\begin{vmatrix} \cos(t) & \frac{1}{t+1} \\ -\sin(t) & -\frac{1}{(t+1)^2} \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -\sin(t) & \frac{1}{t+1} \\ -\cos(t) & -\frac{1}{(t+1)^2} \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) \end{vmatrix}$$

Resolviendo los determinantes de 2×2:

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \mathbf{i}\left(\frac{\cos t}{(t+1)^2} + \frac{\sin t}{t+1}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\sin t}{(t+1)^2} + \frac{\cos t}{t+1}\right) + \mathbf{k}(1)$$

Evaluando en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{r}'(\frac{\pi}{2}) \times \mathbf{r}''(\frac{\pi}{2}) = \mathbf{i}\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}\right) + \mathbf{k}(1)$$

$$|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)| = \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}\right)^2 + \left(-\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}\right)^2 + (1)^2} = B$$

Evaluamos en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|} = \frac{\langle \frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}, -\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}, 1\rangle}{B}$$

Sabemos el producto vectorial $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{-1}{A} & 0 & \frac{2}{(\pi+2)A} \\ \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)B} & -\frac{1}{B(\frac{\pi}{2}+1)^2} & \frac{1}{B} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{i}\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{(\pi+2)A} \\ -\frac{1}{B(\frac{\pi}{2}+1)^2} & \frac{1}{B} \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{-1}{A} & \frac{2}{(\pi+2)A} \\ \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)B} & \frac{1}{B} \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{-1}{A} & 0 \\ \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)B} & -\frac{1}{B(\frac{\pi}{2}+1)^2} \end{vmatrix}$$

Evaluamos en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle \frac{2}{A \cdot B(\pi+2)} \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}, -\frac{1}{A \cdot B} - \frac{2}{A \cdot B(\pi+2)} \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)B}, \frac{1}{A \cdot B} \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}\rangle$$

(b) **Paso 2: Ecuaciones de los planos**

Las ecuaciones de los planos se encuentran a partir de los vectores.

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 0, 1, \ln(\frac{\pi}{2}+1)\rangle$$

$$\mathbf{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\langle -1, 0, \frac{2}{\pi+2}\rangle}{\underbrace{\sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi+2}\right)^2}}_{A}} = \frac{\langle -1, 0, \frac{2}{\pi+2}\rangle}{A}$$

$$\mathbf{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle \frac{2}{A\cdot B(\pi+2)}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}, -\frac{1}{A\cdot B} - \frac{2}{A\cdot B(\pi+2)}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)B}, \frac{1}{A\cdot B}\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}\rangle$$

$$\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\langle \frac{1}{\frac{\pi}{2}+1}, -\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+1)^2}, 1\rangle}{B}$$

- **Plano osculador:** Formado por los vectores $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$B\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(r - r\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

- **Plano normal:** Formado por los vectores $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(r - r\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$

- **Plano rectificante:** Formado por los vectores $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$ en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$N\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(r - r\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0$$