

Capítulo 9

Derivadas Parciales de Orden Superior

La extensión a funciones de varias variables del concepto de derivada de orden superior, aunque teóricamente no ofrece ninguna dificultad, presenta ciertas complicaciones de naturaleza formal que se hacen especialmente patentes a la hora de establecer las reglas habituales de cálculo. Las complicaciones (al menos las pedagógicas) son algo menores cuando se trabaja en dimensión finita, ya que entonces el uso de derivadas parciales permite considerar a las derivadas de orden superior como objetos más “tangibles”.

Comenzaremos, pues, estableciendo en esta lección el concepto de derivada parcial de orden superior.

Definiciones

Conviene tener presente en todo lo que sigue que para que una función f sea derivable (aunque sea parcialmente) en un punto a es preciso que esté definida en un entorno de a . Recordemos también que la derivada parcial $\partial f / \partial x_j(a)$, coincide con la derivada en el punto a_j de la aplicación:

$$x_j \rightarrow f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$, $a \in \overset{\circ}{A}$. Llamaremos derivada parcial segunda de f respecto a x_i y x_j en el punto a , a la derivada respecto x_i de la función $\partial f / \partial x_j$ en el punto a . Abreviadamente

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a).$$

Se deduce, pues, que la función f es derivable respecto a las variables x_i y x_j en el punto a , si y sólo si la aplicación

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

está definida en algún entorno de a y admite derivada parcial respecto a x_i en el punto a .

Más generalmente, si j_1, j_2, \dots, j_r son números naturales (independientes entre sí) comprendido entre 1 y n , definiremos inductivamente

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r}}(a) = \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_r}} \right)(a).$$

Cuando el resultado final de una derivación parcial sólo dependa del número de veces que se deriva respecto a cada variable, y no del orden en que se realiza tal proceso (esto no sucederá siempre), cabe utilizar una notación abreviada para designar a las derivadas parciales de orden superior. Así mediante la expresión

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}}(a),$$

denotaremos al resultado de efectuar r derivaciones parciales: i_n respecto a x_n , i_{n-1} respecto a x_{n-1} , etc. y por último i_1 derivaciones respecto a x_1 . Por tanto $i_1 + i_2 + \dots + i_n = r$. Algunos de los i_k pueden ser iguales a 0, lo que expresará que no se realiza derivación alguna respecto a la variable x_k (en cuyo caso omitiremos en la expresión anterior el término $\partial x_k^{i_k}$).

El teorema de Schwartz

El teorema más clásico en relación al problema de la permutabilidad de las derivadas es el conocido como teorema de Schwartz o de las derivadas parciales segundas cruzadas.

Teorema 9.1 *Sea f una función escalar de dos variables. Supongamos que para cada (x, y) de algún entorno V de un punto (x_0, y_0) , existen*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y),$$

y que la aplicación $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ es continua en (x_0, y_0) . Entonces también existe la otra derivada cruzada en (x_0, y_0) , y se verifica que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Demostración. De la definición se deduce fácilmente que

$$(9.1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)} \right).$$

Denotemos por $G(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)$. Vamos a probar que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{G(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

La existencia de este límite doble implicará, por tanto, la del límite iterado 9.1 que es lo que buscamos.

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $|y - y_0| < \delta$, entonces

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon;$$

además podemos suponer que en este entorno, es decir en la bola de centro (x_0, y_0) y radio δ , las tres funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

están bien definidas.

Sea (x, y) un punto cualquiera de ese entorno, que lo supondremos fijo en adelante. Consideremos entonces la función de una variable $\varphi(z) = f(x, z) - f(x_0, z)$. Es inmediato comprobar que

$$G(x, y) = \varphi(y) - \varphi(y_0).$$

Por otra parte, la existencia de derivada parcial respecto de y en ese entorno implica que φ es derivable, siendo su derivada

$$\varphi'(z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, z).$$

Aplicando entonces el teorema del valor medio a φ en el intervalo $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, se deduce que existe un punto ξ_y intermedio entre y_0 e y tal que

$$\varphi(y) - \varphi(y_0) = \varphi'(\xi_y)(y - y_0),$$

luego,

$$G(x, y) = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y) \right] (y - y_0),$$

que implica

$$\frac{G(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \xi_y)}{x - x_0}.$$

Consideremos ahora la aplicación

$$g: z \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(z, \xi_y).$$

Esta aplicación es derivable en cada punto del intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, precisamente

$$g'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (z, \xi_y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z, \xi_y).$$

Aplicando entonces el teorema del valor medio resulta

$$g(x) - g(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_x, \xi_y)(x - x_0),$$

donde ξ_x es algún punto comprendido entre x y x_0 .

Se deduce pues que

$$\frac{G(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi_x, \xi_y)$$

y por tanto

$$\left| \frac{G(x, y)}{(x - x_0)(y - y_0)} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

9.2 El teorema de Schwartz puede formularse para funciones de más de dos variables. En efecto si f es una función de las variables x_1, x_2, \dots, x_n , que satisface respecto a las coordenadas x_i y x_j , las condiciones del teorema anterior, entonces también satisface estas condiciones la función de dos variables

$$g(x_i, x_j) = f(a_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, a_n).$$

Se deduce, por tanto, que las derivadas parciales cruzadas de la función g coinciden en (a_i, a_j) , pero es fácil comprobar que éstas coinciden con las derivadas parciales segundas de f respecto a las coordenadas x_i y x_j en a .

El corolario siguiente es una extensión útil del teorema anterior para derivadas de orden mayor que 2:

Corolario 9.3 *Supongamos que todas las derivadas parciales de orden r de la función escalar f son continuas en un punto a . Entonces cada derivada parcial de orden r de f en a es independiente del orden en que se efectúen las derivaciones.*

Demostración. Observemos, en primer lugar, que de la hipótesis se deduce que cada derivada parcial de orden $r-1$ de la función f debe ser una función continua en algún entorno del punto a . En efecto, sea $g = \partial^{r-1} f$ una de estas derivadas. Se tiene entonces que, para cada j , $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ es una función continua en a , luego g es estrictamente diferenciable en a y, en particular, continua en algún entorno de a (ver nota posterior al teorema 7.3) Razonemos por inducción sobre r . Para $r = 2$, tenemos hipótesis sobradas para poder aplicar el teorema de Schwartz. Supongamos entonces, como hipótesis de inducción, que si una función escalar admite derivadas parciales de orden $r-1$ continuas en un punto, el cálculo de estas derivadas de orden $r-1$ en ese punto no depende del orden en que se efectúen las derivaciones.

Sea la derivada de orden r en a

$$\frac{\partial^r f}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_r}(a), \quad y_k \in \{x_1, \dots, x_n\},$$

y consideremos, mediante una permutación de y_1, y_2, \dots, y_r , la derivada de orden r

$$\frac{\partial^r f}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \dots \partial y_{i_r}}(a).$$

Supongamos en primer lugar que $y_{i_1} = y_1$. Puesto que, por hipótesis de inducción, en las derivadas de orden $r-1$ de f se puede cambiar el orden de derivación (en todos los puntos de algún entorno de a), podemos escribir

$$\frac{\partial^r f}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_r}(a) = \frac{\partial}{\partial y_{i_1}} \left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial y_2 \dots \partial y_r} \right) (a) = \frac{\partial^r f}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \dots \partial y_{i_r}}(a).$$

Supongamos ahora que $y_1 \neq y_{i_1}$, por tanto $y_1 = y_{i_k}$ con $k \neq 1$. Entonces $\{y_{i_1}, \dots, \widehat{y_{i_k}}, \dots, y_{i_r}\}$ es una permutación de $\{y_2, \dots, y_r\}$. Por inducción

se deduce que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^r f}{\partial y_1 \partial y_2 \dots \partial y_r}(a) &= \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial^{r-1} f}{\partial y_2 \dots \partial y_r} \right)(a) \\
 &= \frac{\partial^r f}{\partial y_1 \partial y_{i_1} \dots \partial \widehat{y_{i_k}} \dots \partial y_{i_r}}(a) \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_{i_1}} \left(\frac{\partial^{r-2} f}{\partial y_{i_2} \dots \partial \widehat{y_{i_k}} \dots \partial y_{i_r}} \right)(a) \\
 &= \frac{\partial^2}{\partial y_{i_1} \partial y_1} \left(\frac{\partial^{r-2} f}{\partial y_{i_2} \dots \partial \widehat{y_{i_k}} \dots \partial y_{i_r}} \right)(a) \\
 &= \frac{\partial^r f}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \dots \partial y_{i_r}}(a).
 \end{aligned}$$

■

Ejercicios

9A Comprobar si en las funciones siguientes se da la igualdad entre las derivadas parciales cruzadas en $(0,0)$. Estudiar en cada caso si se satisfacen las condiciones del teorema de Schwartz.

1. $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; $f(0,0) = 0$.
2. $f(x, y) = x^2 y^2 \cos 1/x$; $f(0, y) = 0$.
3. $f(x, y) = x^2 y^2 \sin \frac{1}{xy^2}$; $f(x, 0) = f(0, y) = 0$.

9B Consideremos los operadores diferenciales

$$\begin{aligned}
 \nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right); & \Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \\
 H f &= x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}; & \operatorname{div}(F_1, \dots, F_n) &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \\
 \operatorname{rot}(F_1, F_2, F_3) &= \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)
 \end{aligned}$$

A los operadores anteriores se les conoce, en el orden en que han sido definido, como operador: Gradiente, Laplaciano, Hamiltoniano, Divergencia y Rotacional.

Supuesto que se pueden permutar las derivaciones, demostrar que

1. $\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$
2. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.
3. $H \Delta - \Delta H = -2 \Delta$
4. $\Delta f = 0 \Rightarrow \Delta \Delta((x_1^2 + \dots + x_n^2)f) = 0$.