

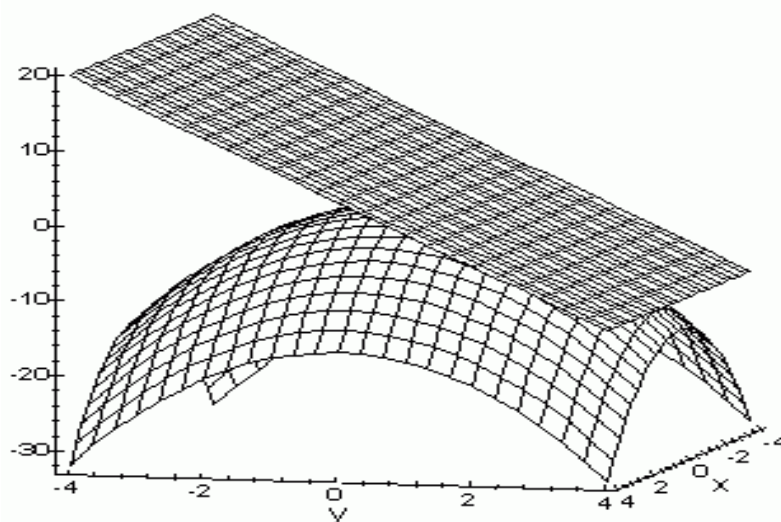
## Tema 2

# Derivadas parciales. Diferenciales. Derivadas direccionales

---

### Introducción.

Una de las ideas fundamentales del Cálculo Diferencial es la de *aproximación*, esto es, reemplazar una función dada en el entorno de un punto por una función polinómica de primer grado, de modo que ésta sea la mejor aproximación posible. Las funciones numéricas para las cuales esta aproximación es posible forman la clase de las funciones *diferenciables*.



### Derivadas parciales.

El concepto de *función derivable* no se puede extender de una forma sencilla para funciones de varias variables. Aquí se emplea el concepto de *diferencial* de una función en un punto para describir el comportamiento de una función en dicho punto, jugando un papel análogo al de la derivada en el caso de una variable. Para funciones de una variable ser derivable equivale a ser diferenciable. En el caso de varias variables la definición de derivada se restringe al caso de *derivadas parciales*.

En adelante consideraremos funciones definidas en *conjuntos abiertos*, esto es, conjuntos que tienen la propiedad de que dado cualquier punto del mismo existe un entorno suyo (un disco sin borde) contenido en dicho conjunto.

En  $\mathbb{R}^2$  los entornos de un punto  $(x_0, y_0)$  son los discos de centro en dicho punto y radio arbitrario  $r$ . En general, uno estos discos se denominan *bolas de centro*  $(x_0, y_0)$  *y radio*  $r$ :

$$B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x_0, y_0), (x, y)) < r\}$$

o bien,

$$B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2} < r\}$$

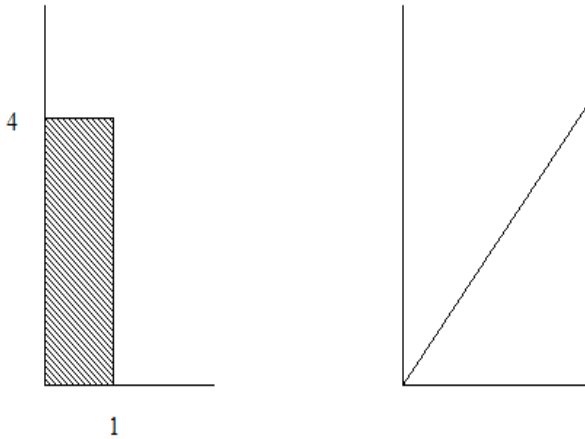
En  $\mathbb{R}^3$  los entornos de un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  son las *bolas de centro*  $(x_0, y_0, z_0)$  *y radio*  $r$ :

$$B((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid d((x_0, y_0, z_0), (x, y, z)) < r\}$$

o bien,

$$B((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2} < r\}$$

Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$ ,  $(0, 1) \times (0, 4)$  es un conjunto abierto y la recta  $x = y$  no lo es.



De la misma forma el disco  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  no es un conjunto abierto y el interior del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  sí lo es.

En  $\mathbb{R}^3$ , el conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$  es abierto y el plano  $z = y$  no lo es.

Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida en él y sea  $(x_0, y_0) \in D$ . Se denominan *derivadas parciales* de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  respecto a  $x$  y a  $y$  a los siguientes límites

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

en el caso de que existan.

Se observa que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  es la derivada de  $f$  en el sentido de funciones de una variable, manteniendo  $y$  fija, en el punto  $(x_0, y_0)$  y lo mismo ocurre con  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  manteniendo  $x$  fija.

Para funciones de tres variables la definición es análoga.

En algunos libros se utiliza la siguiente notación para las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

La diferencia entre una definición y otra está en que, en la primera se ha particularizado al punto  $(x_0, y_0)$  la derivada parcial y en el segundo caso se ha tomado un punto genérico  $(x, y)$ . Además, en el segundo caso se ha sustituido  $h$  por  $\Delta x$  y  $k$  por  $\Delta y$  con el fin de hacer patente que en la derivada parcial hay una *variación*, ya sea de  $x$  o de  $y$ .

### Ejemplo 1

Si  $f(x, y) = x^2 \tan(xy)$  se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \tan(xy) + x^2 \frac{y}{\cos^2(xy)} = 2x \tan(xy) + \frac{x^2 y}{\cos^2(xy)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{\cos^2(xy)}$$

para un punto cualquiera  $(x, y)$  del dominio de  $f$ . Si, en particular, se nos piden las derivadas parciales en el punto  $(0, 0)$  basta con sustituir  $x$  e  $y$  por las coordenadas de dicho punto como ocurre con las funciones de una variable. En el caso del punto  $(0, 0)$  ambas derivadas parciales serían nulas.

### Ejemplo 2

Para

$$g(x, y, z) = x^2 e^{\frac{y}{z}}$$

tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = 2x e^{\frac{y}{z}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x^2}{z} e^{\frac{y}{z}}, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{x^2 y}{z^2} e^{\frac{y}{z}}.$$

### Otra notación.

Para abreviar la escritura de fórmulas en las que intervienen derivadas parciales se suele utilizar la siguiente notación:

- Si  $z = f(x, y)$ , las derivadas parciales en un punto cualquiera de coordenadas  $(x, y)$  se denotan por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = z_x(x, y)$$

o para abreviar, simplemente  $z_x$ .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = z_y(x, y)$$

o para abreviar,  $z_y$ .

- Si  $u = f(x, y, z)$ , las derivadas parciales en un punto cualquiera de coordenadas  $(x, y, z)$  se denotan por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = f_x(x, y, z) = u_x(x, y, z)$$

o bien de forma abreviada  $u_x$ .

■

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = f_y(x, y, z) = u_y(x, y, z)$$

■

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = f_z(x, y, z) = u_z(x, y, z)$$

o abreviando  $u_y$  y  $u_z$  respectivamente.

### Ejemplo 3

Sea  $z = Ax^4 + 2Bx^2y^2 + Cy^4$ . Probar que  $xz_x + yz_y = 4z$ .

Se tiene que

$$z_x = 4Ax^3 + 4Bxy^2, \quad z_y = 4Bx^2y + 4Cy^3.$$

Con lo cual

$$xz_x + yz_y = 4Ax^4 + 4Bx^2y^2 + 4Bx^2y^2 + 4Cy^4 = 4Ax^4 + 8Bx^2y^2 + 4Cy^4 = 4z$$

Las derivadas parciales de una función  $z = f(x, y)$  definen a su vez nuevas funciones que

tienen su propio dominio. En los puntos en los que existan derivadas parciales de las derivadas parciales primeras se definen las *derivadas parciales segundas*:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x, y)$$

las cuales, para abreviar, se suelen denotar por

$$z_{xx} \quad z_{xy} \quad z_{yy} \quad z_{yx}$$

respectivamente, o bien por

$$f_{xx} \quad f_{xy} \quad f_{yy} \quad f_{yx}$$

De manera análoga se definen las derivadas parciales de orden superior para funciones de dos variables y para funciones de tres o más variables.

#### Ejemplo 4

Si  $z = e^{xy}$  se tiene:

$$\begin{aligned} z_x &= ye^{xy} \\ z_y &= xe^{xy} \\ z_{xx} &= y^2 e^{xy} \\ z_{xy} &= e^{xy} + xye^{xy} \\ z_{yy} &= x^2 e^{xy} \\ z_{yx} &= e^{xy} + xye^{xy} \end{aligned}$$

#### Ejercicio.

Si  $z = e^{-t}(\sin x + \cos y)$  demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

De la misma forma se definen las derivadas parciales de orden superior:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$$

que también se escribe  $z_{xxx}$ .

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)$$

bien  $z_{xxy}$ .

Para funciones de tres o más variables el proceso es análogo.

### *Teorema de Schwartz*

Hemos visto en los ejemplos anteriores que  $z_{xy} = z_{yx}$ . Pero esto no siempre es así. Esta igualdad es cierta bajo ciertas condiciones que se recogen en el siguiente teorema:

#### Teorema de Schwartz

Si  $z = f(x, y)$  es una función que en un punto  $(x_0, y_0)$  tiene continuas las derivadas parciales primeras y al menos  $z_{xy}$  ó  $z_{yx}$  es continua en dicho punto entonces

$$z_{xy}(x_0, y_0) = z_{yx}(x_0, y_0).$$

Este teorema es válido, también, para funciones de tres variables, teniéndose que, bajo las condiciones anteriores, si  $u = f(x, y, z)$  entonces

$$u_{xy} = u_{yx}, \quad u_{yz} = u_{zy}, \quad u_{xz} = u_{zx}.$$

en los puntos en los cuales se pueda aplicar el Teorema de Schwartz.

Además, para las derivadas parciales de orden superior, suponiendo válidas las condiciones anteriores sobre la función  $z = f(x, y)$  y sus derivadas parciales, se tiene:

$$z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}$$

$$z_{xxyy} = z_{xyxy} = z_{yyxx} = z_{yxyx} = z_{xyyx} = z_{yxyx}$$

### Ejemplo 1

Dada la función

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z$$

probar que  $f_{xz} = f_{zx}$  y que  $f_{zzz} = f_{zzx}$ .

Se tiene que

$$\begin{aligned} f_x &= ye^x + \ln z \\ f_z &= \frac{x}{z} \end{aligned}$$

De donde sigue que

$$\begin{aligned} f_{xz} &= \frac{1}{z} \\ f_{zx} &= \frac{1}{z} \\ f_{zz} &= -\frac{x}{z^2} \end{aligned}$$

y, finalmente

$$\begin{aligned} f_{xzz} &= -\frac{1}{z^2} \\ f_{zxx} &= -\frac{1}{z^2} \\ f_{zzx} &= -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

### Ejemplo 2

Si  $z = \ln(x^2 + y)$  comprobar que  $z_{xy} = z_{yx}$  en los puntos en los que tenga sentido.

En efecto, comenzamos calculando

$$z_x = \frac{2x}{x^2 + y}$$

y, ahora

$$z_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{2x}{x^2 + y} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}$$

Por otra parte,

$$z_y = \frac{1}{x^2 + y}$$

y si ahora derivamos respecto a  $x$  obtenemos

$$z_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x^2 + y} \right) = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}$$

## *Diferencial de una función. Aplicaciones.*

Si  $z = f(x, y)$  es una función definida en un conjunto abierto  $D$ , siendo  $(x_0, y_0) \in D$  y existen en este punto las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  entonces se dirá que  $f$  es *diferenciable* en  $(x_0, y_0)$  si

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Para una función de tres variables la definición sería análoga.

Como se observa fácilmente no es inmediato aplicar esta definición para saber si una función es diferenciable en un punto. Sin embargo, utilizando el siguiente teorema se simplifica algo la cuestión.

### **Teorema**

*Si la función  $f$  posee derivadas parciales continuas en un punto entonces es diferenciable en ese punto.*

Aplicando este teorema nos encontramos con que muchas de las funciones que manejamos habitualmente son diferenciables en determinados puntos.

## *La diferencial de una función.*

Dada la función  $z = f(x, y)$  diferenciable en el punto  $(x_0, y_0)$ , se denomina diferencial de  $f$  en dicho punto a la *aplicación lineal* dada por

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longrightarrow & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y \end{array}$$

### **Ejemplo 1**

Si  $z = x^4 - y^3$  su diferencial en el punto  $(1, -1)$  es

$$[dz(1, -1)](x, y) = 4x - 3y.$$

En el punto  $(-1, 0)$  es

$$[dz(-1, 0)](x, y) = -4x.$$

Es importante fijar la idea de que es una *aplicación lineal*.

### Aplicaciones.

Si volvemos al límite que nos da la definición de función diferenciable y tenemos en cuenta que la diferencial de  $f$  en el punto  $(h, k)$  está dada por

$$[df(x_0, y_0)](h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

observamos que dicho límite se puede escribir como

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - [df(x_0, y_0)](h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

y puesto que, tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  pero el resultado del límite es cero, el numerador está más cerca de cero que  $\sqrt{h^2 + k^2}$  cuando  $(h, k)$  se aproxima a  $(0, 0)$ . Con lo cual podemos escribir

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - [df(x_0, y_0)](h, k) \approx 0, \quad (h, k) \rightarrow (0, 0)$$

o lo que es lo mismo

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx [df(x_0, y_0)](h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k, \quad (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

Esta relación pone de manifiesto que **la diferencial de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  es una buena aproximación de**

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

**para  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .**

Esto se verá más claro en el

### Ejemplo 2

Demostrar que la función  $f(x, y) = xe^{xy}$  es diferenciable en el punto  $(1, 0)$ . Encontrar su diferencial en dicho punto y calcular aproximadamente  $f(1'1, -0'1)$ .

Solución:

Sus derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} f_x &= e^{xy} + xye^{xy} \\ f_y &= x^2 e^{xy} \end{aligned}$$



Estas funciones son continuas en  $\mathbb{R}^2$ , por tanto  $f$  es diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ . En el punto  $(1, 0)$  se tiene:

$$\begin{aligned}f_x(1, 0) &= 1 \\f_y(1, 0) &= 1\end{aligned}$$

de lo que sigue que la diferencial de  $f$  en  $(1, 0)$  es

$$[df(1, 0)](x, y) = x + y$$

El punto  $(1, 0)$  juega el papel de  $(x_0, y_0)$ . El punto  $(1'1, -0'1)$  representa  $(x_0 + h, y_0 + k)$ , esto es, un punto próximo. De aquí sigue que  $h = 0'1$  y  $k = -0'1$ , de modo que la diferencial en  $(1, 0)$  evaluada para  $(0'1, -0'1)$  es 0 por tanto

$$f(1'1, -0'1) - 1 \approx 0 \Rightarrow f(1'1, -0'1) \approx 1.$$

El valor que nos proporciona la calculadora es  $1'1e^{-0'11} = 0'98542$ .

### Ejemplo 3

Si  $z = \frac{x^3}{y^2}$  y queremos calcular valores de  $z$  cerca del punto  $(2, 1)$  podemos hacer uso de la diferencial ya que esta función es diferenciable en dicho punto. Se tiene que

$$[dz(2, 1)](x, y) = 12x - 16y$$

Si queremos obtener un valor aproximado de

$$\frac{(2'01)^3}{(0'999)^2}$$

haciendo uso de la diferencial, tomamos como punto  $(x_0, y_0)$  el  $(2, 1)$  ya que en éste es un punto donde se conoce el valor de la función. El punto  $(2'01, 0'999)$  jugará el papel de  $(x_0 + h, y_0 + k)$  que es el punto donde se pretende obtener el valor aproximado. Por tanto,  $h = 0'01$  y  $k = -0'001$ , con lo cual podemos escribir

$$\frac{(2'01)^3}{(0'999)^2} - 8 \approx 12 \cdot 0'01 - 16 \cdot (-0'001)$$

o lo que es equivalente

$$\frac{(2'01)^3}{(0'999)^2} \approx 8 + 0'12 + 0'016 = 8'136$$

Con la calculadora se obtiene el valor  $8'136886$  lo que pone de manifiesto el grado de aproximación de este valor.

Tenemos así que la diferencial de una función permite aproximar los valores de dicha función cerca de un punto.

Este razonamiento es igualmente válido para funciones de tres variables.

### *Diferencial total.*

La expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k$$

recibe el nombre, como hemos visto, de diferencial de la función  $f$  en un punto concreto, digamos  $(x_0, y_0)$ , para los valores  $(h, k)$ . Por tradición y razones rigurosamente justificadas, en las que no vamos a entrar se escribe

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

expresión que lleva el nombre de *diferencial total* de la función  $f$ , a partir de la cual se puede determinar la diferencial de  $f$  en cualquier punto.

En el caso de una función de tres variables, si  $u = f(x, y, z)$  entonces su diferencial total será

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

#### **Ejemplo 4**

Si  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ , su diferencial total es

$$dz = 2xdx + 2ydy$$

y la diferencial en el punto  $(1, 4)$  será

$$[dz(1, 4)](h, k) = 2h + 8k.$$

o bien

$$[dz(1, 4)](x, y) = 2x + 8y.$$

Veamos ahora otra aplicación del concepto de diferencial de una función.

#### **Ejemplo 5**

El radio de la base y la altura de un cono circular recto se han medido dando como resultado 10 cm y 25 cm respectivamente, con un posible error en la medida de 0'1 cm como máximo en cada uno. Utilizar la diferencial para estimar el error que se produce en el cálculo del volumen del cono.

Solución:

Si un cono tiene por radio de la base  $x$  y por altura  $y$ , su volumen es

$$V = \frac{\pi}{3}x^2y$$

El error cometido es la diferencia entre el valor del volumen en  $(10, 25)$  y el valor del mismo en  $(10 + 0'1, 25 + 0'1)$ :

$$V(10 + 0'1, 25 + 0'1) - V(10, 25)$$

que, aproximadamente, es la diferencial de  $V$  en  $(10, 25)$ . Como la diferencial es

$$dV = \frac{2\pi}{3}xydx + \frac{\pi}{3}x^2dy.$$

En el punto  $(10, 25)$  la diferencial es

$$[dV(10, 25)](h, k) = \frac{500\pi}{3}h + \frac{100\pi}{3}k$$

Al ser cada error menor que 0'1 se tiene  $h \leq 0'1$  y  $k \leq 0'1$  y, por tanto, la diferencial vale

$$[dV(10, 25)](0'1, 0'1) = \frac{500\pi}{3}0'1 + \frac{100\pi}{3}0'1 = 20\pi \approx 63\text{cm}^3$$

Un caso con tres variables:

### Ejemplo 6

Se han medido las dimensiones de una caja en forma de paralelepípedo dando como resultado 75 cm, 60 cm y 40 cm respectivamente para el largo, ancho y alto. Sin embargo, se ha cometido un error de 0'2 cm en cada medición. Estimar el error cometido al calcular el volumen de la caja.

Solución:

El volumen de una caja en forma de paralelepípedo de dimensiones  $x$ ,  $y$  y  $z$  es  $V = xyz$ .

Razonando como en el caso anterior, la diferencial nos permite determinar un valor aproximado de la diferencia entre el volumen calculado tomando como dimensiones  $75 \times 60 \times 40$  y el volumen calculado teniendo en cuenta el error.

La diferencial total de  $V$  es

$$dV = yzdx + xzdy + xydz$$

En el punto  $(75, 60, 40)$  se tiene:

$$[dV(75, 60, 40)](h, k, l) = 2400h + 3000k + 4500l$$

Si tomamos  $h = k = l = 0'2$  se tiene que  $dV = 1980$  que es el error cometido al calcular el volumen con las dimensiones dadas y el error dado. A pesar de que parezca mucho  $1980 \text{ cm}^3$  sólo representa el 1 % del volumen de la caja.

Consideremos ahora otro problema: si tenemos una expresión del tipo

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

¿representa la diferencial de alguna función? Esto es, ¿existe alguna función  $f$  tal que  $\frac{\partial f}{\partial x} = P$  y  $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ ?. La respuesta es afirmativa siempre que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

### Ejemplo 7

La expresión  $xydx + \frac{x^2}{2}dy$  cumple la igualdad anterior. Para determinar la función  $f$  de la cual esta expresión es su diferencial planteemos la siguiente ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy$$

de aquí se deduce que  $f(x, y) = \frac{x^2}{2}y + \varphi(y)$  donde  $\varphi$  representa una función de  $y$  a determinar. Pero como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2}$$

se tendrá

$$\frac{x^2}{2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{2}$$

de donde sigue que  $\varphi'(y) = 0$ , es decir,  $\varphi$  es una función constante, con lo cual la función buscada es  $f(x, y) = \frac{x^2}{2}y + C$  donde  $C$  es una constante arbitraria.

## *Derivada direccional. Gradiente.*

Sea  $f$  una función de dos variables y  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  un vector unitario. La derivada direccional de  $f$  en  $(a, b)$  con respecto a  $\mathbf{v}$  es

$$D_{\mathbf{v}}f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((a, b) + t(v_1, v_2)) - f(a, b)}{t}$$

si existe.

Está claro que si  $\mathbf{v} = (1, 0)$  se tendría la derivada parcial de  $f$  respecto de  $x$  y si  $\mathbf{v} = (0, 1)$ , la derivada parcial de  $f$  respecto de  $y$ .

La derivada direccional de una función mide la tasa de variación de la función en la dirección dada.

La definición de derivada direccional para funciones de tres variables es análoga.

Dada una función  $z = f(x, y)$  diferenciable en un punto  $(a, b)$  se define su *gradiente* en dicho punto como el vector

$$\nabla f(a, b) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right).$$

Para una función  $f$  de tres variables, diferenciable en el punto  $(a, b, c)$ , el gradiente en ese punto es

$$\nabla f(a, b, c) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \right).$$

El gradiente de una función facilita enormemente el cálculo de derivadas direccionales como vemos a continuación.

### **Teorema**

Si  $\mathbf{v}$  es un vector unitario, la derivada direccional de la función  $f$  en el punto  $(a, b)$  en la dirección de  $\mathbf{v}$  es el producto escalar

$$\nabla f(a, b) \cdot \mathbf{v}$$

Para funciones de tres variables se verifica igualmente esta propiedad.

Como se sabe, el producto escalar es máximo cuando estos vectores son paralelos. Es decir que la derivada direccional es máxima en la dirección  $\nabla f(a, b)$ .

En este sentido tenemos que si  $f$  es diferenciable en el punto  $(a, b)$  y se tiene que  $\nabla f(a, b) \neq 0$  entonces:

- (a) El máximo valor de la derivada direccional  $D_{\mathbf{u}}f$  es  $\|\nabla f(a, b)\|$  y el vector  $\mathbf{u}$  es entonces el vector unitario asociado a  $\nabla f(a, b)$ .
- (b) El mínimo valor de la derivada direccional  $D_{\mathbf{u}}f$  es  $-\|\nabla f(a, b)\|$  y el vector  $\mathbf{u}$  es entonces el vector unitario asociado a  $-\nabla f(a, b)$ .

Esto quiere decir que en el punto  $(a, b)$  la función crece más rápidamente en el sentido del gradiente  $\nabla f(a, b)$  y decrece más rápidamente en el opuesto.

### Ejemplo 1

La derivada direccional de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

en  $(1, 2)$  y en la dirección  $\mathbf{v} = (2, -3)$  se calcula de la siguiente forma:

En primer lugar se observa que  $|\mathbf{v}| = \sqrt{13}$ , por lo tanto tomamos el vector unitario

$$\mathbf{u} = \left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13} \right)$$

En segundo lugar se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

con lo cual

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 4.$$

a partir de esto, la derivada direccional pedida vale

$$\nabla f(1, 2) \cdot \left( \frac{2\sqrt{13}}{13}, -\frac{3\sqrt{13}}{13} \right) = -\frac{8}{13}\sqrt{13}.$$

### Ejemplo 2

La derivada direccional de

$$f(x, y, z) = x \cos y \sin z$$

en el punto  $(1, \pi, \frac{1}{4}\pi)$  en la dirección  $\mathbf{v} = (2, -1, 4)$  se calcula como sigue:

El módulo de  $\mathbf{v}$  vale  $\sqrt{21}$ . Por lo tanto un vector unitario de la misma dirección y sentido es  $(\frac{2\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{4\sqrt{21}}{21})$ .

Las derivadas parciales de  $f$  valen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \cos y \sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -x \sin y \sin z, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = x \cos y \cos z$$

ahora bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \pi, \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \pi, \frac{1}{4}\pi\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}\left(1, \pi, \frac{1}{4}\pi\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

de donde sigue que la derivada direccional pedida vale

$$\nabla f\left(1, \pi, \frac{1}{4}\pi\right) \cdot \left(\frac{2\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{4\sqrt{21}}{21}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{21}}.$$

### Ejemplo 3

Dada la función  $z = xe^y$  se pide:

1. Encontrar la tasa de cambio en el punto  $P(2, 0)$  en la dirección que va hacia el punto  $Q(\frac{1}{2}, 2)$ .
2. ¿En qué dirección máxima esta tasa de cambio?. Encontrar el valor máximo.

Solución:

1. En primer lugar determinamos el gradiente de la función:

$$\nabla z(x, y) = (e^y, xe^y)$$

en el punto  $P$

$$\nabla z(2, 0) = (1, 2)$$

El vector unitario en la dirección  $\overrightarrow{PQ} = (-\frac{3}{2}, 2)$  es  $\mathbf{u} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ . Por tanto, la tasa de cambio o derivada dirección de  $z$  en  $P$  en la dirección  $\overrightarrow{PQ}$  vale

$$D_{\mathbf{u}}z(2, 0) = \nabla z(2, 0) \cdot \mathbf{u} = (1, 2) \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 1 \left(-\frac{3}{5}\right) + 2 \left(\frac{4}{5}\right) = 1$$

2. La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente, esto es, en la dirección del vector  $(1, 2)$  y el valor máximo de esta derivada direccional en el punto  $(2, 0)$  es

$$\|\nabla z(2, 0)\| = \|(1, 2)\| = \sqrt{5}$$

### Ejemplo 4

La temperatura en grados centígrados en la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde  $x$  e  $y$  se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir del punto  $(2, -3)$  crece más rápidamente la temperatura? ¿Cuál es el ritmo de ese crecimiento?

Solución:

El gradiente de  $T$  es

$$\nabla T(x, y) = (-8x, -2y)$$

De donde se deduce que la dirección de crecimiento máximo viene dada por

$$\nabla T(2, -3) = (-16, 6)$$

El ritmo de crecimiento máximo es

$$\|\nabla T(2, -3)\| = \sqrt{256 + 36} = \sqrt{292} \approx 17,09^\circ$$

Hay que tener en cuenta que el gradiente apunta en la dirección de máximo crecimiento de la temperatura. No tiene por qué apuntar al punto más caliente de la placa. Esto quiere decir que la idea de gradiente es *local*. El gradiente apunta la dirección de máximo crecimiento de la temperatura desde el punto  $(2, -3)$ . Una vez abandonada esta posición, la dirección de máximo crecimiento puede cambiar.

## Problemas

1. Calcular las derivadas parciales  $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ , siendo

$$\begin{aligned} z &= \frac{x+y}{x-y} & z &= \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \\ z &= y \sin xy & z &= \sqrt{e^{x+2y} - y^2} \\ z &= (x^2 y + y^2 x)^{-3} & z &= \arctan \frac{x}{y} - \arctan \frac{y}{x} \\ \rho &= \sin 2\theta \cos 3\phi & \rho &= e^{\theta+\phi} \cos(\theta - \phi) \end{aligned}$$

2. Si  $z = (ax + by)^2 + e^{ax+by} + \sin(ax + by)$ , comprobar que  $bz_x = az_y$ .

3. Dada la función

$$z = \frac{x^2}{2y(x+y)}$$

calcular  $xz_x + yz_y$ .

4. Si  $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ , para  $(x, y) \neq (0, 0)$  y  $z(0, 0) = 0$ , ¿existen  $z_x(0, 0)$  y  $z_y(0, 0)$ ? Probar que esta función es discontinua en  $(0, 0)$

5. Si  $f(x, y) = \frac{x^2 - xy}{x + y}$ , para  $(x, y) \neq (0, 0)$  y  $f(0, 0) = 0$  calcular  $f_x(0, 0)$  y  $f_y(0, 0)$ .

6. Si  $u = x^2y + y^2z + z^2x$ , demostrar que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = (x + y + z)^2$$

7. Si  $z = x^3 + \frac{y^5}{x^2}$  demostrar que  $xz_x + yz_y = 3z$ .

8. Si  $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$  demostrar que  $xu_x + yu_y + zu_z = -u$ .

9. Probar que la función  $U(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  satisface la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

para  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

10. Demostrar que si  $w = \left( \frac{x - y + z}{x + y - z} \right)^n$ , siendo  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  y  $w(0, 0, 0) = 0$  entonces

$$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

indicar los posibles puntos excepcionales. Calcular  $w_x(0, 0, 0)$ ,  $w_y(0, 0, 0)$  y  $w_z(0, 0, 0)$ .

11. Identificar las superficies siguientes:

a)  $x^2 + 4y^2 - 16z^2 = 0$

b)  $5x^2 + 2y^2 - 6z^2 - 10 = 0$

c)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$

d)  $5x^2 + 2y^2 - 6z^2 + 10 = 0$

e)  $x^2 - y^2 - z^2 = 0$

12. Hallar las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a)  $\rho = \tan 2\theta \cot 4\phi$

b)  $\rho = e^{-\theta} \cos \frac{\phi}{\theta}$

13. Si  $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + 2y)$ , demostrar que

$$f_x(0, \frac{\pi}{4}) = -1, \quad f_y(0, \frac{\pi}{4}) = 0$$

14. Si  $z = \frac{xy}{x - y}$ , demostrar que

$$x^2 z_{xx} + 2xy z_{xy} + y^2 z_{yy} = 0$$



15. Si  $z = \sin ax \sin by \sin kt\sqrt{a^2 + b^2}$ , demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

16. Si

$$u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

probar que

$$xu_{yz} = yu_{zx} = zu_{xy}$$

17. Probar que la función  $u = (x - at)^2 + (x + at)^3$  satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

llamada *ecuación del calor*.

18. Dada la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + \frac{y}{x + y}$$

hallar  $a$  y  $b$  para que se verifique la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

para cualquier punto  $(x, y)$  con  $x + y \neq 0$ .

19. Demostrar que la función  $f(x, y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})\sin x$  satisface la *ecuación de Laplace*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

20. Si  $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ , demostrar que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 2e^{x+y+z-3u}$$

21. Evaluar  $dw$  en  $(1, 2, 3)$  siendo  $w = xy - xz + 2yz$ .

22. Si  $w = 2x - y^2 + xz$ , calcular el valor exacto de  $\Delta w = w(1'01, 0'98, 2'04) - w(1, 1, 2)$  y el aproximado por  $dw(1, 1, 2)$ .

23. La temperatura  $T$  en el punto  $(x, y, z)$  de una cierta región del espacio está dada por  $T(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$ . Utilizando la diferencial calcular la temperatura aproximada en el punto  $(2'014, 2'15, 1'06)$ .

24. Si  $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$  encontrar la diferencial de esta función en el punto  $(1, -1)$

25. Determinar la diferencial de la función  $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$  en el punto  $(0, 0, 0)$ .
26. Si  $z = x^2y^3$ , utilizar la diferencial para dar un valor aproximado de  $(1'01)^2(0'98)^3$ .
27. Al medir el diámetro y la altura de un cilindro circular recto se obtiene 12 cm y 8 cm, respectivamente. Si en cada medida hay un error probable de 0'2 cm ¿cuál es aproximadamente el mayor error posible en el volumen calculado?
28. El peso específico de un sólido se da por la fórmula

$$s = \frac{P}{w},$$

en donde,  $P$  es el peso en el vacío y  $w$  es el peso de un volumen igual de agua. ¿Cómo afecta al peso específico calculado un error de 0'1 en el valor de  $P$  y 0'05 en el valor de  $w$ , suponiendo  $P = 8$  y  $w = 1$  en el experimento: a) si ambos errores son positivos; b) si un error es negativo?

29. La resistencia de un circuito se halló empleando la fórmula

$$C = \frac{E}{R},$$

siendo  $C$  la intensidad de la corriente y  $E$  la fuerza electromotriz. Si hay un error de  $\frac{1}{10}$  de amperio en  $C$  y  $\frac{1}{20}$  de voltio en  $E$ , ¿cuál es el valor aproximado del error de  $R$  si las lecturas son  $C = 15$  amperios y  $E = 110$  voltios?

30. El período de oscilación de un péndulo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

¿Cuál es el error mayor aproximado en el período si hay un error de  $\pm 3$  cm en la medida de una longitud de 3 m, y si  $g$  se toma como  $9'80$  m/s<sup>2</sup>, puede tener un error de 15 mm/s<sup>2</sup>?

31. Las dimensiones de un cono son: radio de la base = 4m, altura = 6m. ¿Cuál es el error aproximado del volumen y de la superficie total si la medida empleada se ha acortado un 1 %?
32. Un sólido tiene la forma de un cilindro coronado en cada extremidad con un hemisferio cuyo radio es el del cilindro. Sus dimensiones medidas son: circunferencia = 20 cm y altura 25 cm. ¿cuál es aproximadamente, el error cometido en la medida del volumen y de la superficie total, si la cinta que se empleó en la medición se ha alargado uniformemente un 0'5 %?
33. La potencia calorífica disipada en una resistencia eléctrica viene dada por

$$P = \frac{E^2}{R}$$

vatios. Siendo  $E = 200$  voltios y  $R = 8$  ohmios, hallar la disminución que experimenta la potencia cuando  $E$  disminuye en 5 voltios y  $R$  lo hace en 0'2 ohmios.

34. Utilizar la noción de diferencial de una función para calcular, aproximadamente:

a)  $(5'01)^2 + (11'94)^2$

b)  $8'02\sqrt{9'05}$

c)  $\arctan \frac{0'99}{1'001}$

d)  $(0'99e^{0'02})^8$

e)  $(0'99)^3 + (2'01)^3 - 6(0'99)(2'01)$

35. La resistencia total  $R$  que producen dos resistencias conectadas en paralelo es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Estimar el cambio en  $R$  cuando  $R_1$  pasa de 10 a 10,5 ohmios y  $R_2$  de 13 a 15 ohmios.

36. La inductancia  $L$  (en microhenrios) de un hilo recto no magnético en el espacio libre es

$$L = 0,00021\left(\ln \frac{2h}{r} - 0,75\right)$$

donde  $h$  es la longitud del hilo en mm y  $r$  el radio de su sección circular. Estimar  $L$  para  $r = 2 + \frac{1}{16}$  mm y  $h = 100 + \frac{1}{100}$  mm.

37. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son diferenciales de funciones?

a)  $(2xy + y^3)dx + (x^2 + 3x^2y)dy$

b)  $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy$

c)  $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy$

d)  $ydx - xdy$

38. La distribución de temperatura en una placa metálica viene dada por la función

$$T(x, y) = k(x^2e^y + y^2e^x)$$

donde  $k$  es una constante positiva.

a) ¿En qué dirección aumenta la temperatura más rápidamente en el punto  $(1, 0)$ ?

b) ¿En qué dirección decrece la temperatura más rápidamente?

39. Calcular  $\nabla h(1, 1, 1)$  si  $h(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$ .

40. Hallar la derivada direccional de las siguientes funciones en los puntos y en las direcciones indicadas:

a)  $z = x^2 + 3y^2$ , en  $(1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, -1)$

b)  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$  en  $(1, -1, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$

c)  $z = (x - 1)y^2e^{xy}$  en  $(0, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 3)$

41. Hallar la derivada direccional de

$$f(x, y, z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$$

en  $(2, -1, 1)$  en la dirección del máximo aumento de  $f$ .

42. Hallar la derivada de la función  $z = ye^x$  en el punto  $(0, 3)$  según la dirección que forma  $30^\circ$  con el eje  $OX$ .

43. El potencial eléctrico  $V$  en un punto  $(x, y)$  viene dado por

$$V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hallar la variación de  $V$  en el punto  $(3, 4)$  según la dirección del punto  $(2, 6)$ .

44. Hallar la derivada de  $F(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$  en el punto  $(1, -2, 1)$  a lo largo de la curva  $x = t$ ,  $y = t - 3$ ,  $z = t^2$  en la dirección creciente de  $z$ .

45. Dada la superficie  $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$  hallar la dirección de la máxima pendiente en el punto  $(1, 1, 2)$ .

46. Dado el potencial de fuerzas  $z = x^2 + xy + y^2$  calcular en el punto  $(3, 2)$  la fuerza máxima; la que corresponde a la dirección de  $30^\circ$  con el eje  $X$  y las direcciones en que es nula.