

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/380877705>

CONTINUIDAD EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Presentation · January 2022

DOI: 10.13140/RG.2.2.34491.22560

CITATIONS

0

READS

150

2 authors:



Kelvin Antonio Florimon de Jesus
Universidad Autónoma de Santo Domingo
3 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Juan Toribio Milane
Universidad Autónoma de Santo Domingo
152 PUBLICATIONS 5 CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



Universidad Autónoma de Santo Domingo

CONTINUIDAD EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. DADA LA FUNCIÓN

$$f(x,y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

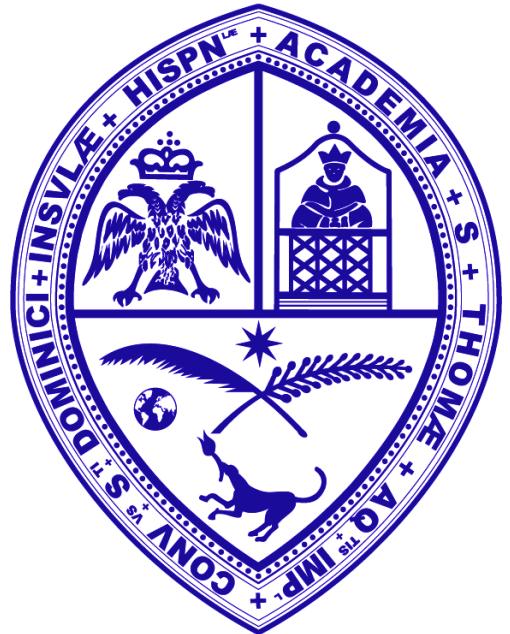
DEFINIR $f(0,0)$ DE MANERA QUE f SEA CONTINUA EN EL ORIGEN.

Kelvin Antonio Florimon de Jesus.

Juan Toribio Milane.

jtoribio34@uasd.edu.do

(26 de enero de 2022)



Continuidad En Funciones De Varias Variables

Analizar, Definir y Representar



ANÁLISIS REAL II

KELVIN A. FLORIMON

Contenido





Contenido

- 1 **Objetivos**
- 2 **Preguntas**
- 3 **Definición de continuidad en funciones de dos o más variables**
- 4 **Criterios de continuidad**
- 5 **Resolución de ejercicios propuestos**
- 6 **Conclusión**
- 7 **Recursos**
- 8 **Bibliografía**
- 9 **Frase reflexiva**





Objetivos

Objetivos General:

- Analizar y definir la continuidad en funciones de varias variables.

Objetivos Específicos:

- Entender el concepto de continuidad a una función de dos o más variables.
- Redefinir una función que sea continua en un punto indeterminado.
- Utilizar gráfico de computadora para representar la continuidad.





Preguntas

¿Qué es una función de dos o más variables?





Preguntas

- ¿Qué es una función de dos o más variables? ¿Qué es el límite de una función?





Preguntas

- ¿Qué es una función de dos o más variables?
 - ¿Qué es el límite de una función?
- ¿Cuál es la diferencia entre el límite de una función de una variable y una función de dos variables?





Preguntas

- ¿Qué es una función de dos o más variables?
 - ¿Qué es el límite de una función?
 - ¿Cuál es la diferencia entre el límite de una función de una variable y una función de dos variables?
- ¿Qué es una función continua?





Preguntas

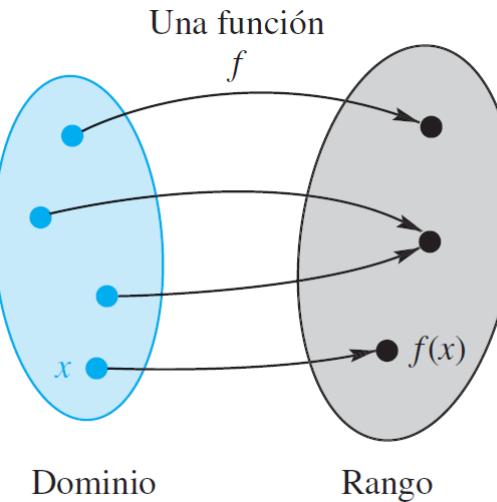
- ¿Qué es una función de dos o más variables?
- ¿Qué es el límite de una función?
- ¿Cuál es la diferencia entre el límite de una función de una variable y una función de dos variables?
- ¿Qué es una función continua?





Definición de función

Una **función** f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x en un conjunto —denominado **dominio**— un solo valor $f(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de todos los valores así obtenidos se denomina **rango** de la función.

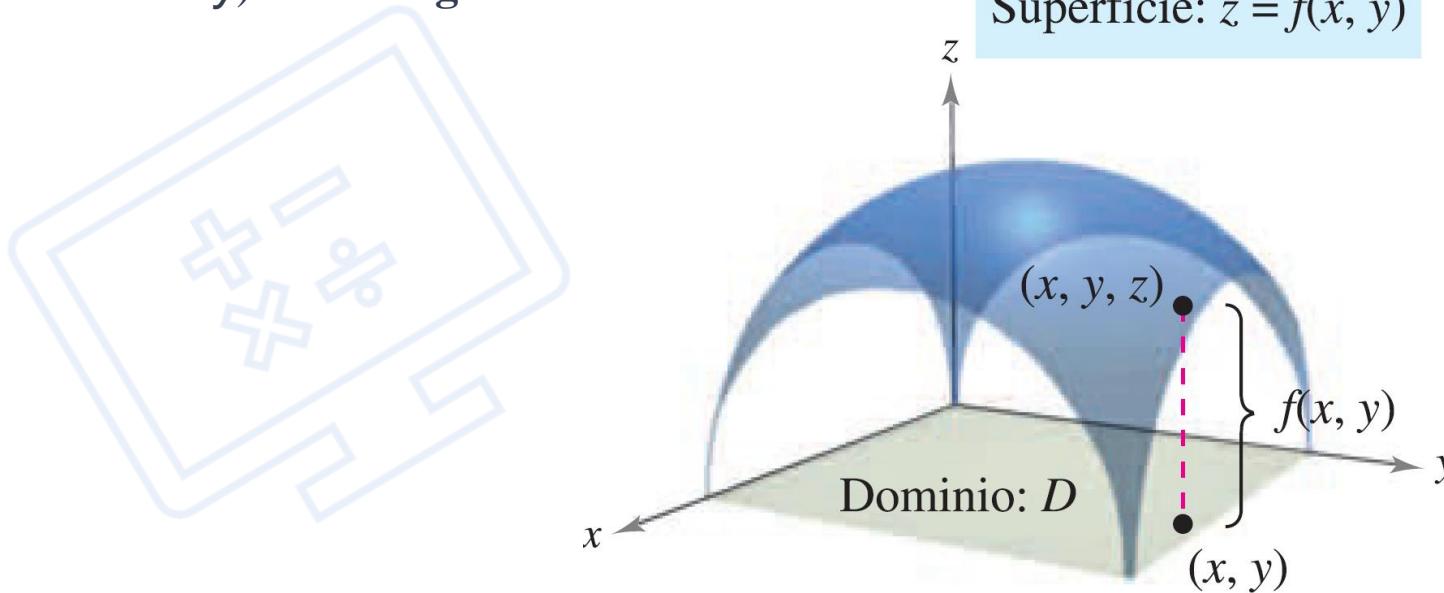




Definición de función

Función de dos variables.

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una **función de x y y** . El conjunto D es el **dominio** de f , y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **rango** de f .



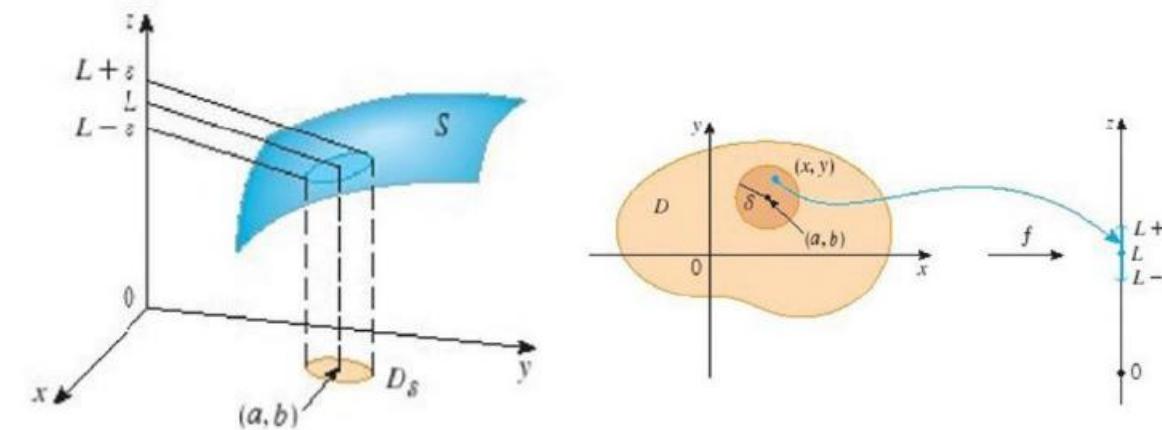


Límite de una función

Límite de función de dos variables.

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables definida en el interior de un círculo con centro en (a, b) , excepto posiblemente en (a, b) .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \left\{ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon \right\}$$





Límite de una función

Diferencia

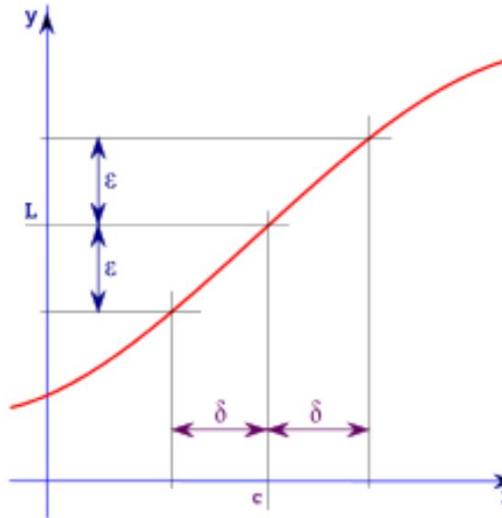




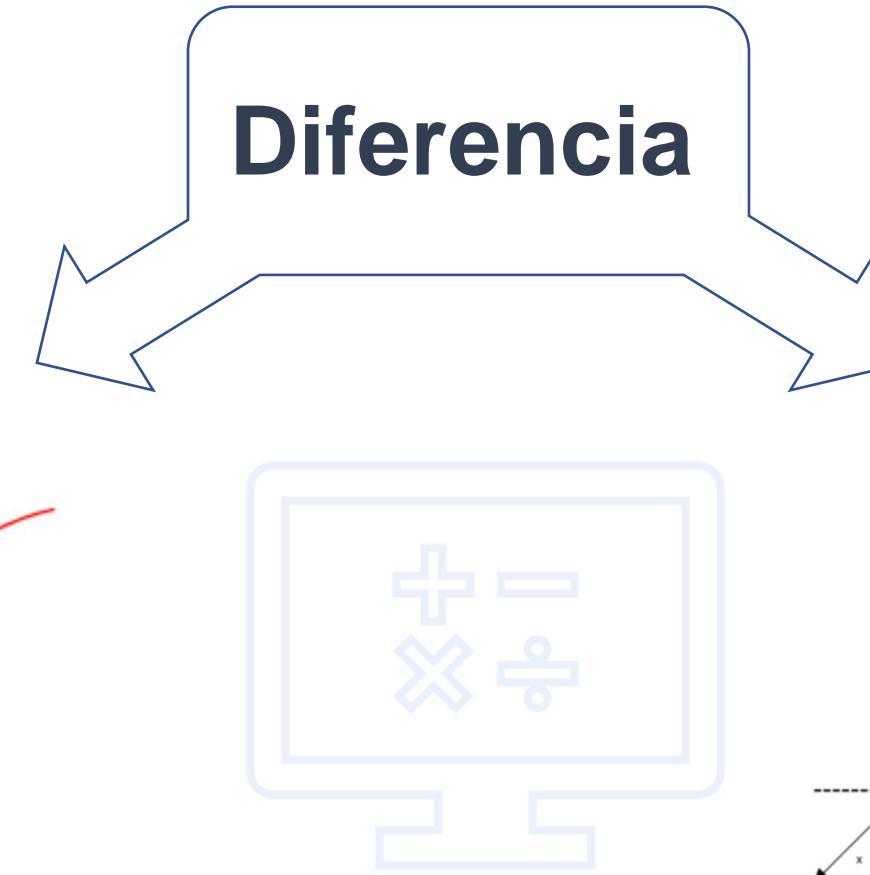
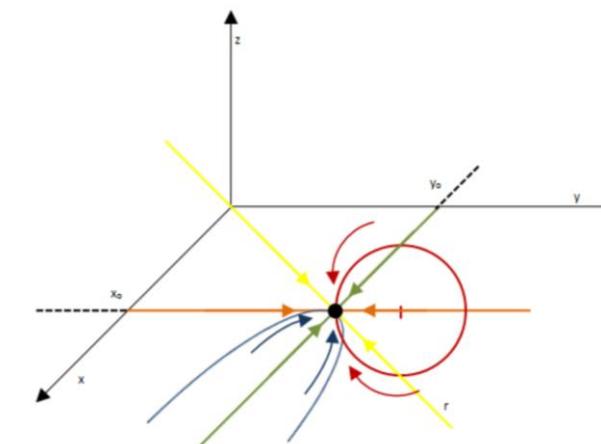
Límite de una función

Diferencia

Función de una



Función de dos
variables





ANÁLISIS REAL II

KELVIN A. FLORIMON

Continuidad





Continuidad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Función
de
una variable

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Función
de
dos o más
variables





Continuidad

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$f(x_0) = L$$

Función
de
una variable

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

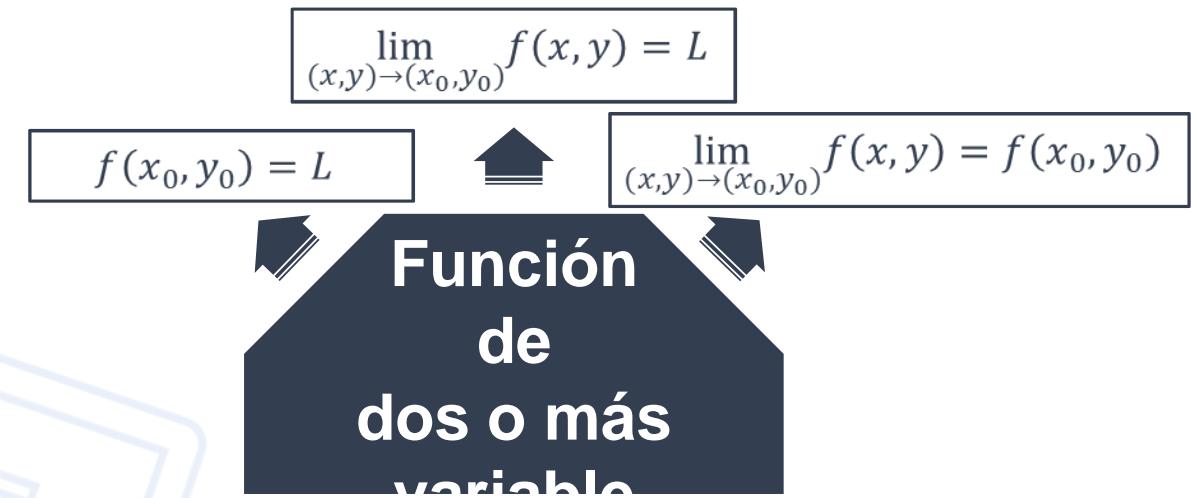
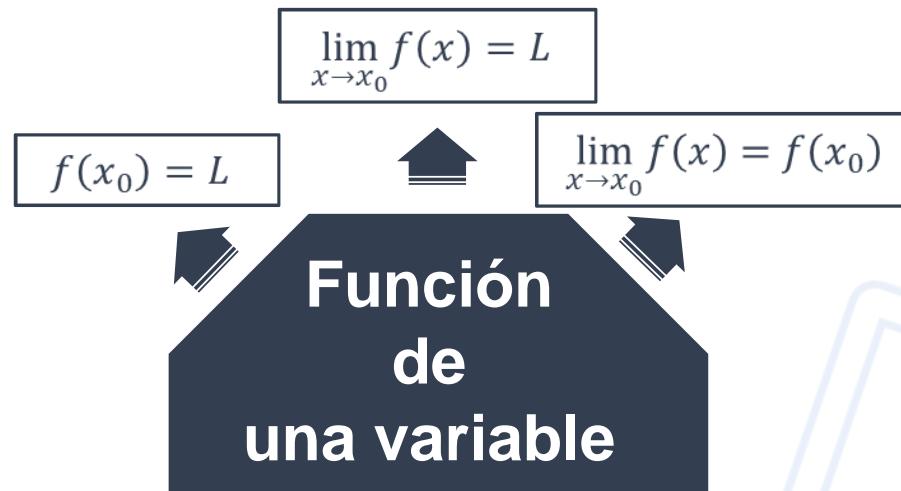
$$f(x_0, y_0) = L$$

Función
de
dos o más
variables





Continuidad





Continuidad

Tipos de
discontinuidad

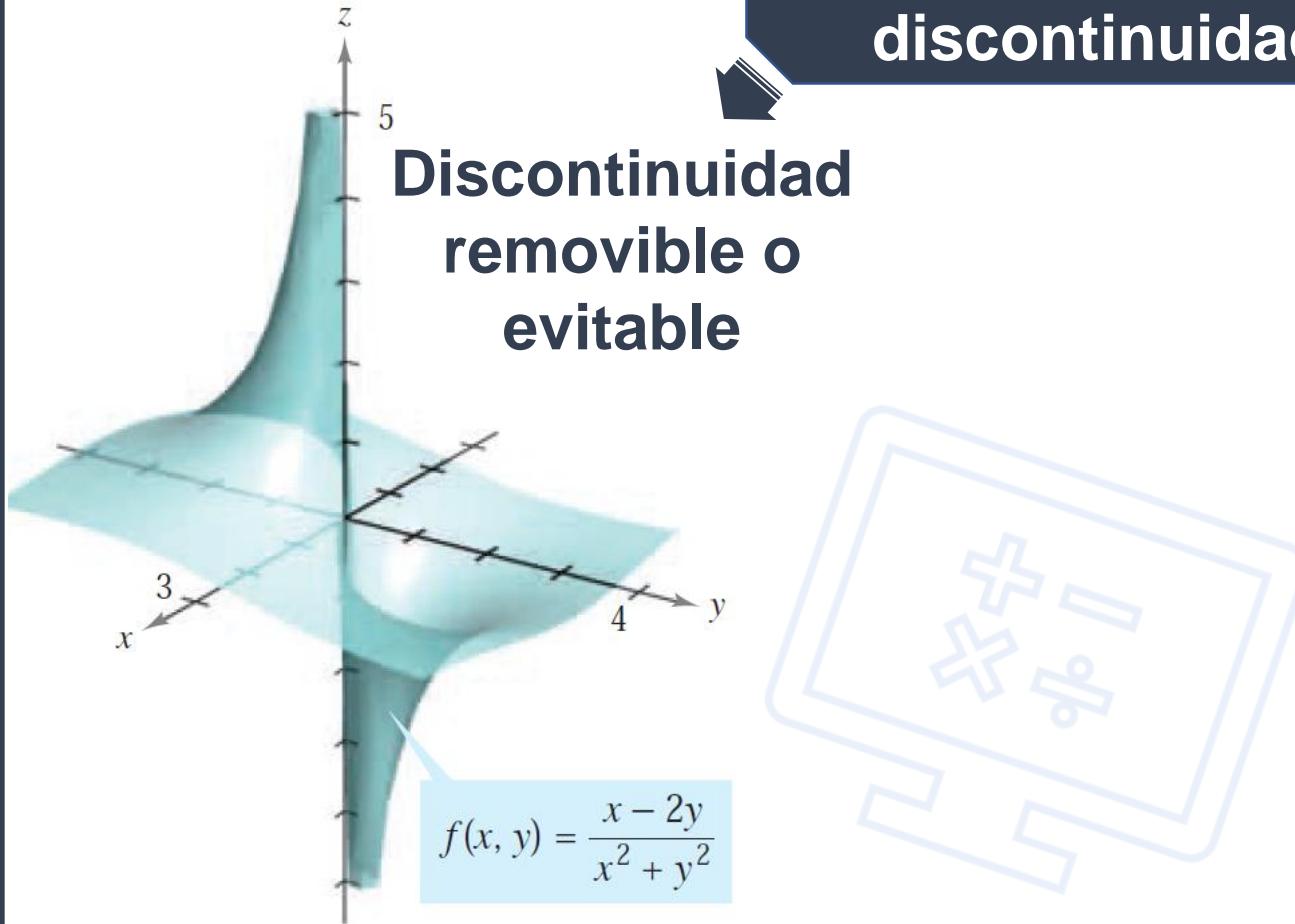




Continuidad

Tipos de
discontinuidad

Discontinuidad
removible o
evitable



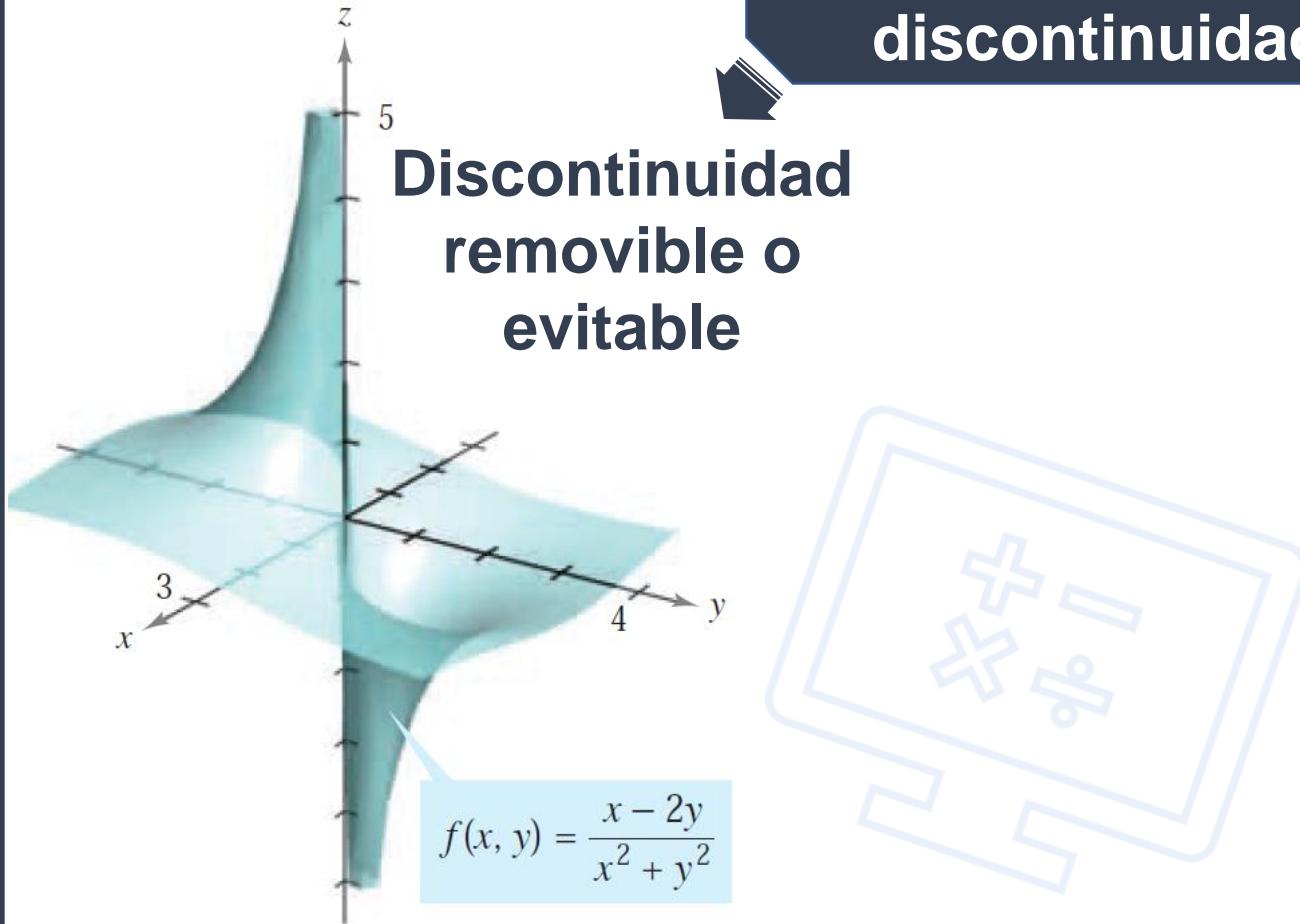


$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y): \text{ existe}$$

Continuidad

Tipos de
discontinuidad

Discontinuidad
removible o
evitable





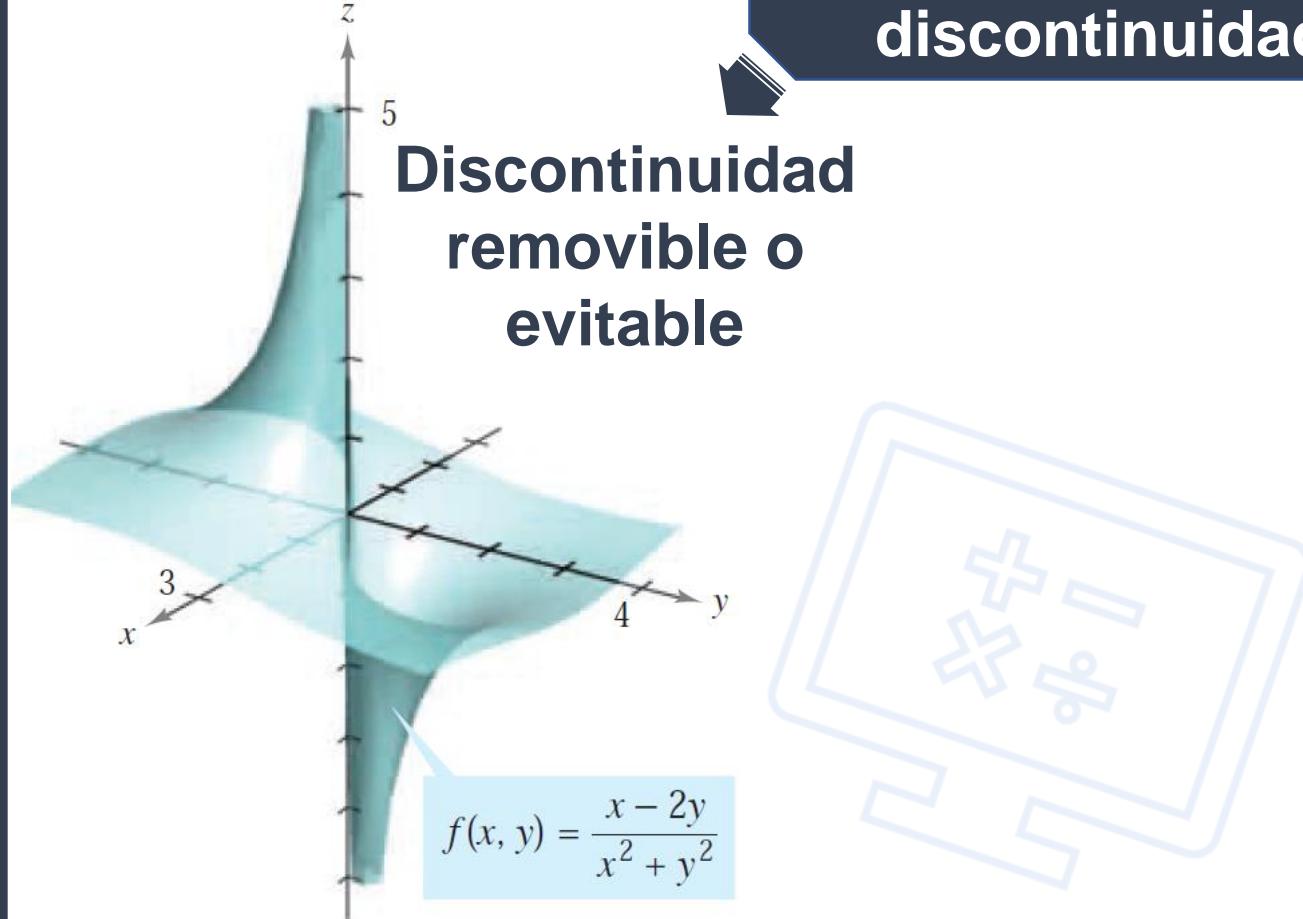
$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$: existe

$f(0,0)$: no definida

Continuidad

Tipos de
discontinuidad

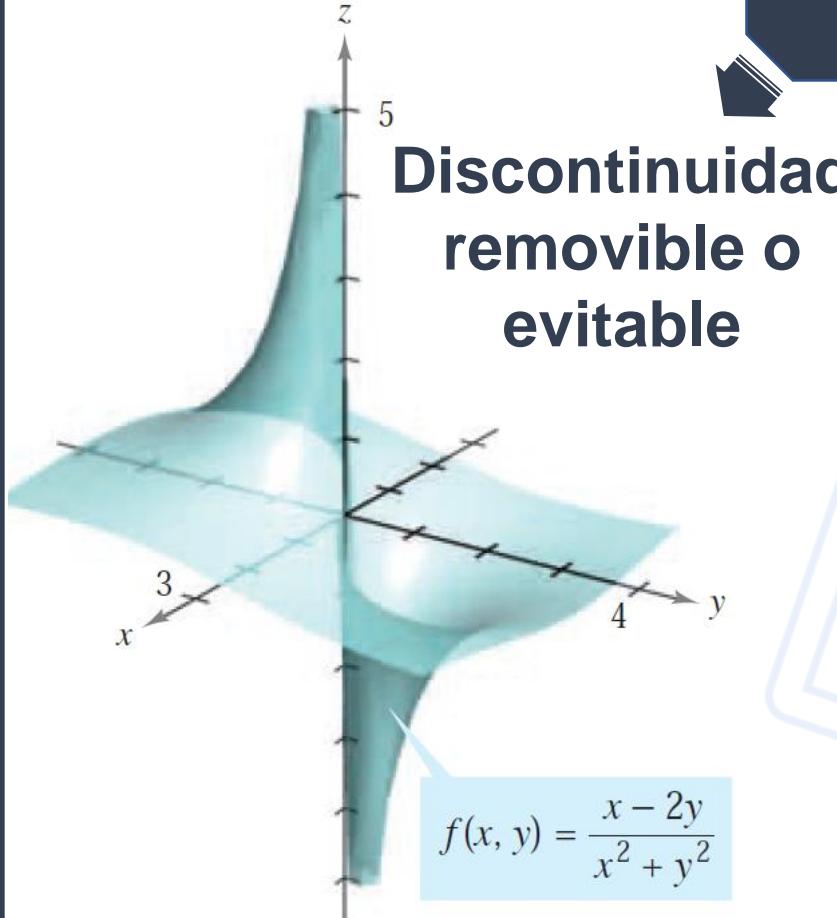
Discontinuidad
removible o
evitable





$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$: existe

$f(0,0)$: no definida



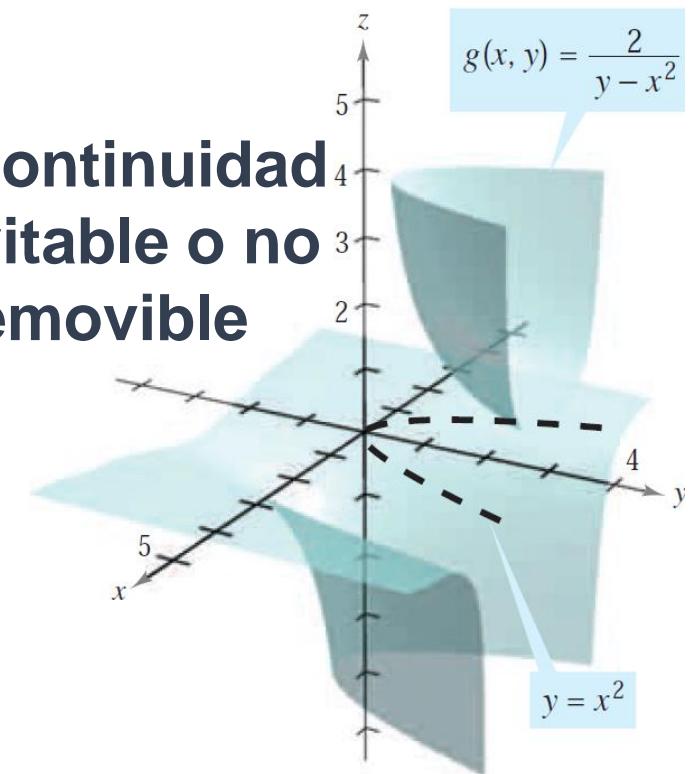
Continuidad

Tipos de
discontinuidad

Discontinuidad
removible o
evitable



Discontinuidad
inevitable o no
removible

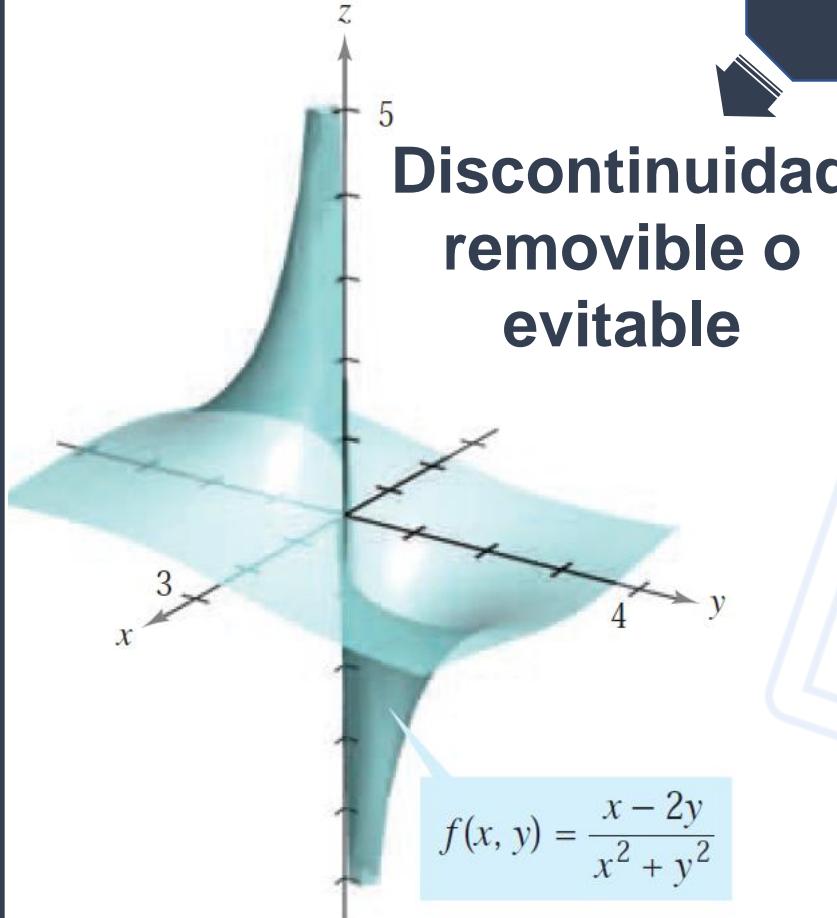


La función g no es continua en la parábola $y = x^2$



$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$: existe

$f(0,0)$: no definida

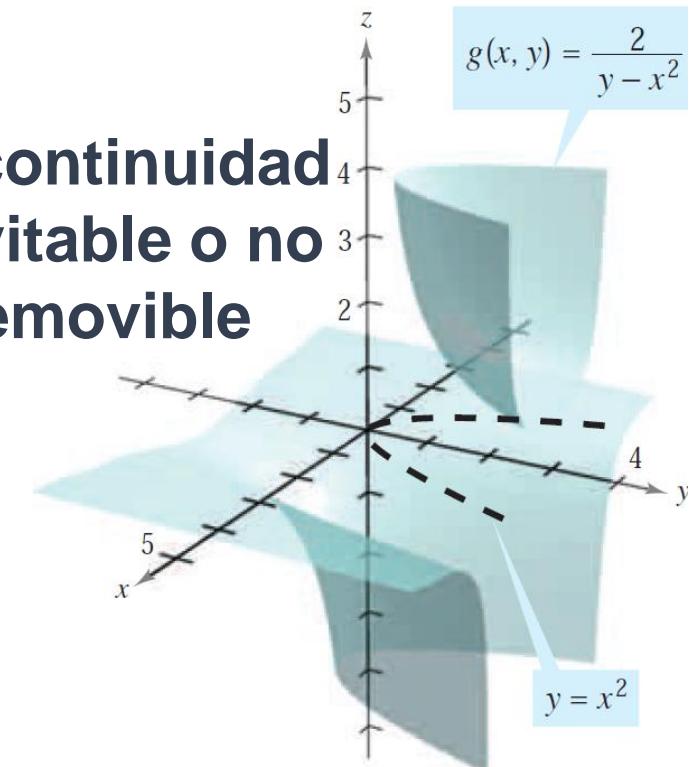


Continuidad

Tipos de discontinuidad

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$: no existe

Discontinuidad inevitable o no removable

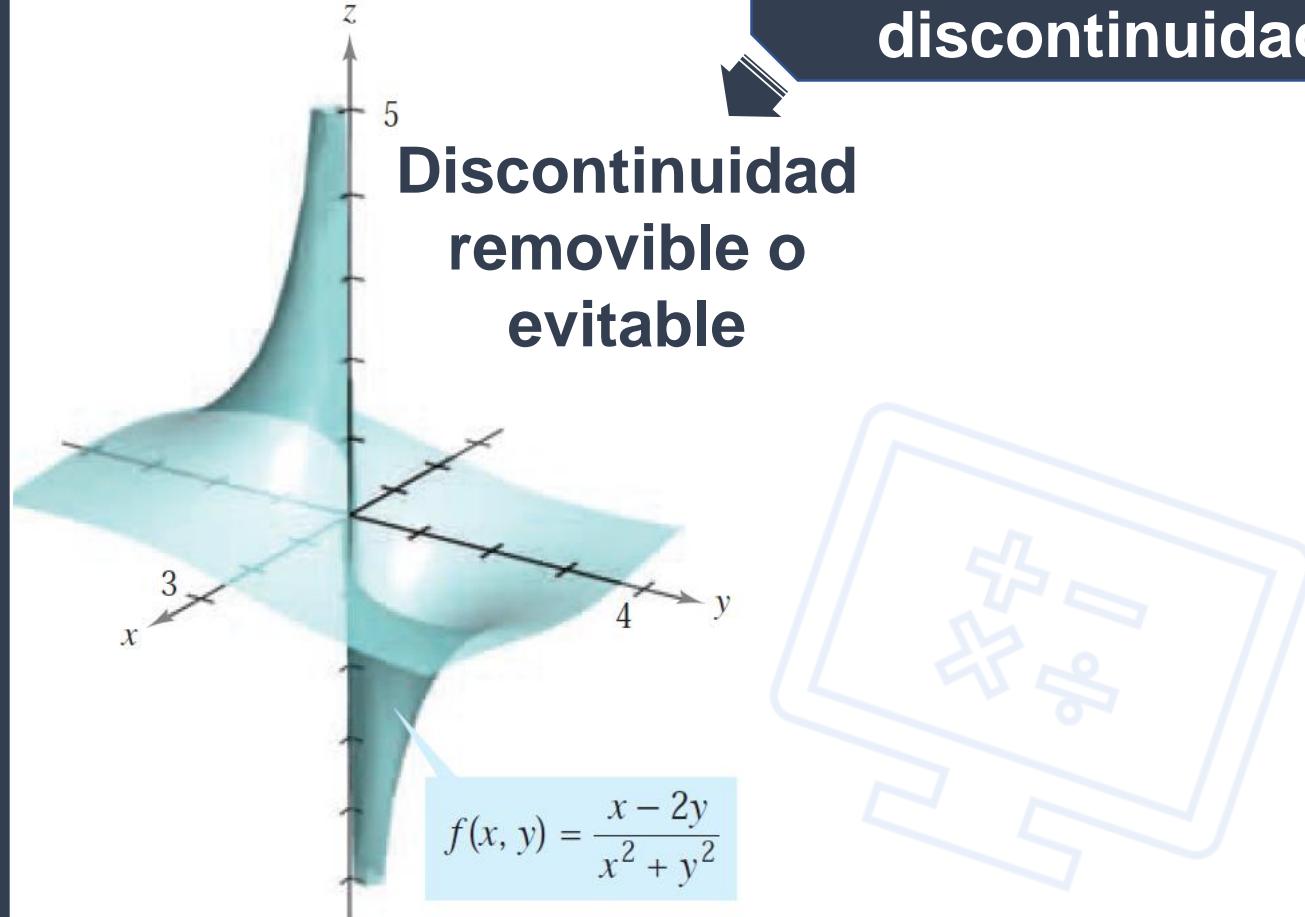


La función g no es continua en la parábola $y = x^2$



$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$: existe

$f(0,0)$: no definida



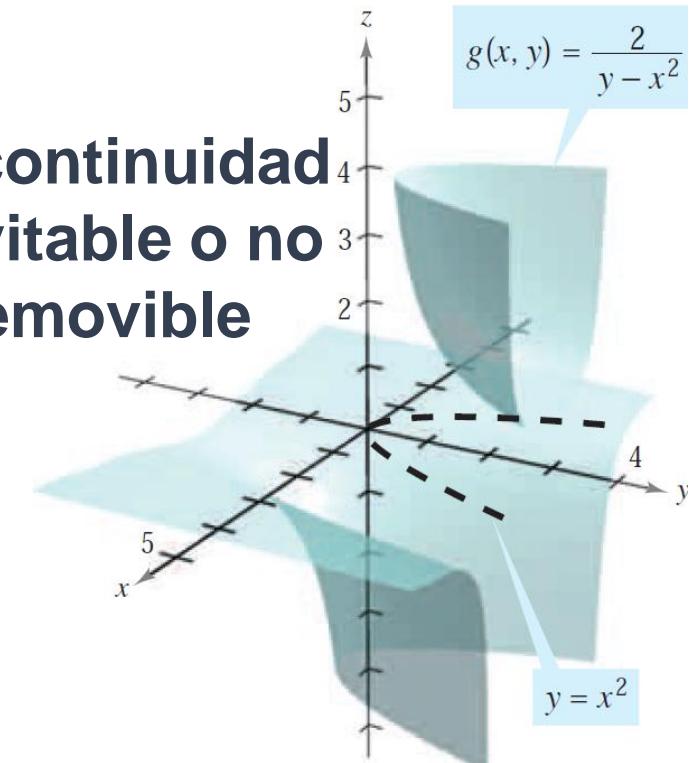
Continuidad

Tipos de
discontinuidad

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$: no existe

$f(x_0, y_0)$: no definida

**Discontinuidad
inevitable o no
removable**



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$



Criterios de continuidad

Las funciones polinómicas son continuas en todas las regiones.

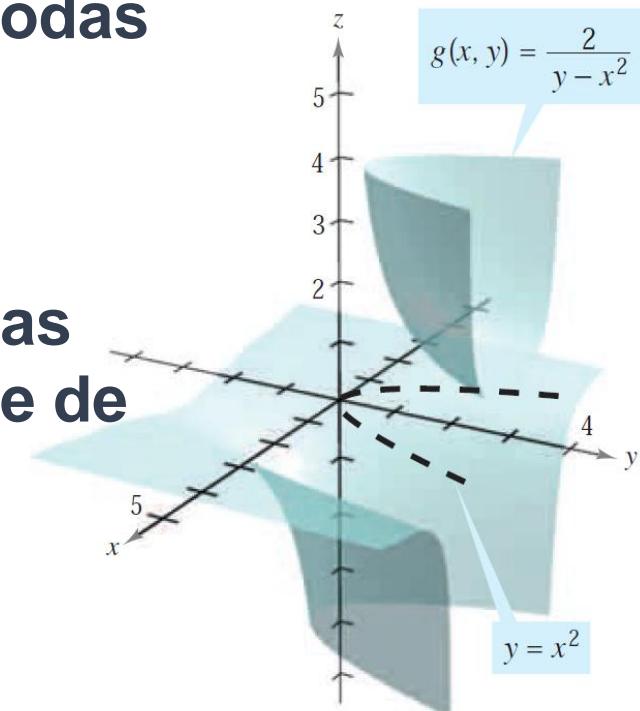




Criterios de continuidad

Las funciones polinómicas son continuas en todas las regiones.

Las funciones racionales son continuas para las regiones en donde el denominador es diferente de cero.



La función g no es continua en la parábola
 $y = x^2$



Operaciones con funciones continuas.

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0) , entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0) .

Múltiplo escalar: kf

Producto: fg

Suma y diferencia: $f \pm g$

Cociente: f/g , si $g(x_0, y_0) \neq 0$



I

Ejercicios propuestos

Analizar la continuidad de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$, explique cualquier diferencia.





I

1

Analizar la continuidad de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$, explique cualquier diferencia.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$





I

1

Analizar la continuidad de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$, explique cualquier diferencia.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Analizando puntos distintos del origen $(x, y) \neq (0, 0)$

$f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = g(x, y)$, es una función racional donde $x^2 + y^2 \neq 0$ en $(x, y) = (0, 0)$.



I

1

Analizar la continuidad de las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$, explique cualquier diferencia.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



Analizando puntos distintos del origen $(x, y) \neq (0, 0)$

$f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = g(x, y)$, es una función racional donde $x^2 + y^2 \neq 0$ en $(x, y) = (0, 0)$.

$f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continua en $(x, y) \neq (0, 0)$.



1

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 1$





1

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$





1

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$
- si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ entonces $(x, y) \neq (0, 0)$
- $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = g(x, y)$





1

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$
- si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ entonces $(x, y) \neq (0, 0)$
- $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = g(x, y)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$





1

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$$



Evaluando el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \text{ ind}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 = 0$$



1

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0)$, la función $f(x, y)$ es continua en R^2

Evaluando el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \text{ ind}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 = 0$$





1

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = 0$$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0)$, la función $f(x, y)$ es continua en R^2

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) \neq g(0,0)$, la función $g(x, y)$ es continua

en $R^2 - \{(0,0)\}$. Tiene una discontinuidad evitable.



Evaluando el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \text{ ind}$$

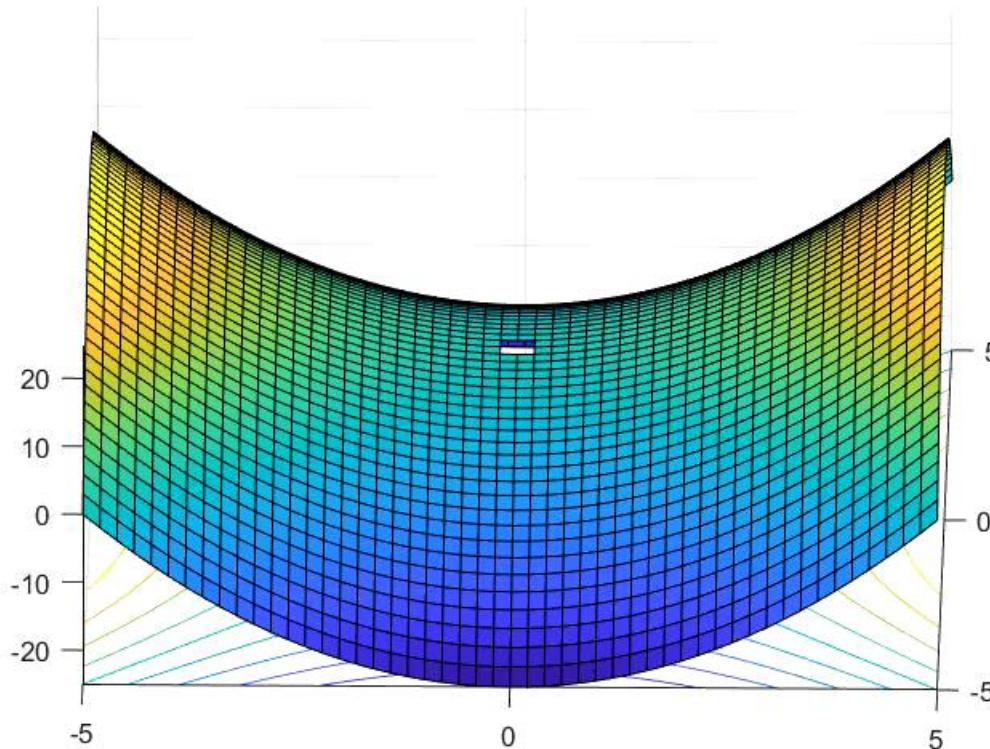
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 - y^2 = 0$$



1

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

 **WolframAlpha** computational intelligence.

The screenshot shows the WolframAlpha interface with the following input:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

The interface includes a "NATURAL LANGUAGE" button, a "MATH INPUT" button, and a toolbar with various mathematical operators like square root, derivative, integral, and summation.

POPULAR

Input

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

Result

0
(assuming variables are real-valued)



2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando puntos distintos del origen $(x, y) \neq (0, 0)$

$f(x, y) = \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = g(x, y)$, es una función racional donde $x^2 + y^2 \neq 0$ en $(x, y) = (0, 0)$.



2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

Analizando puntos distintos del origen $(x, y) \neq (0, 0)$

$f(x, y) = \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = g(x, y)$, es una función racional donde $x^2 + y^2 \neq 0$ en $(x, y) = (0, 0)$.

$f(x, y)$ y $g(x, y)$ son continua en $(x, y) \neq (0, 0)$.





2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 2$





2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 2$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$





2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 2$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$
- si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ entonces $(x, y) \neq (0, 0)$
- $f(x, y) = \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = g(x, y)$





2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 2$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y)$
- si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ entonces $(x, y) \neq (0, 0)$
- $f(x, y) = \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = g(x, y)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$





2

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2x^2}{x^2(1+m^2)} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2}{(1+m^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$



2

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2x^2}{x^2(1+m^2)} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2}{(1+m^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mediante coordenadas polar
 $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^2 \sin^2 \theta r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^2 (\sin^4 \theta - \cos^4 \theta)}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$



Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0)$, la función $f(x, y)$ es continua en R^2

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2x^2}{x^2(1+m^2)} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2}{(1+m^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mediante coordenadas polar
 $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^2 \sin^2 \theta r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^2 (\sin^4 \theta - \cos^4 \theta)}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$



2

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0,0)$, la función $f(x, y)$ es continua en R^2
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) \neq g(0,0)$, la función $g(x, y)$ es continua en $R^2 - \{(0,0)\}$. Tiene una discontinuidad evitable.

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2x^2}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2x^2}{x^2(1+m^2)} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m^2}{(1+m^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mediante coordenadas polar
 $x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$

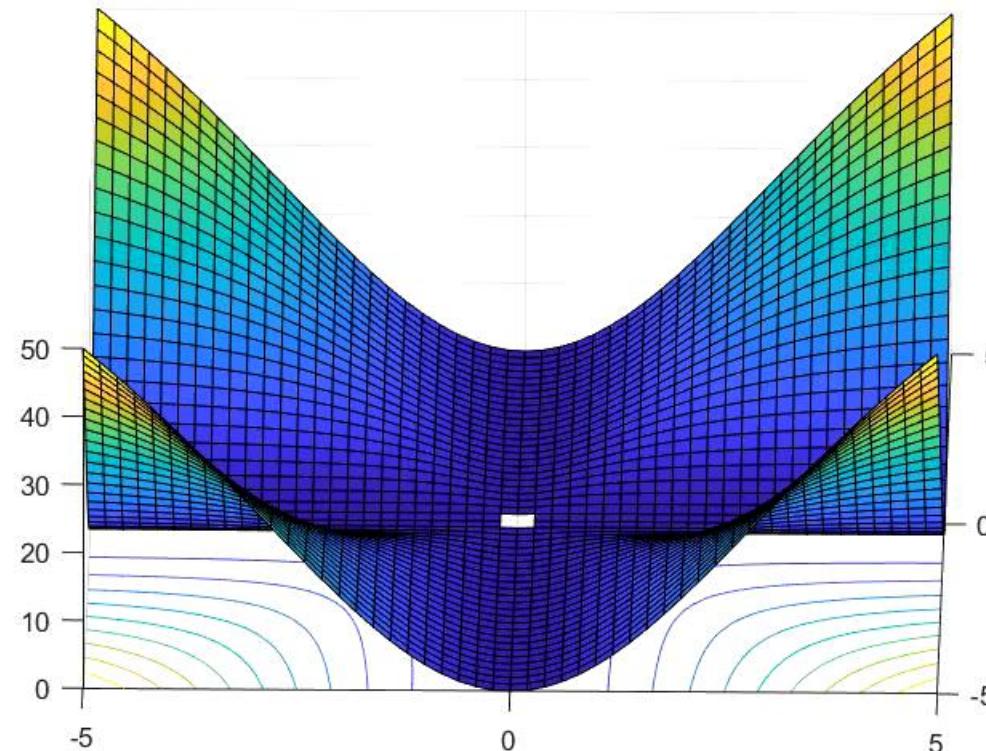
$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^2 \sin^2 \theta r^2 \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{4r^2 (\sin^4 \theta - \cos^4 \theta)}{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$



2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



 **WolframAlpha** computational intelligence

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(4x)^2y^2}{x^2+y^2}$$

NATURAL LANGUAGE

POPULAR



Input

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{16x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Result

0

(assuming variables are real-valued)



Ejercicios propuestos

II

Analizar la continuidad de la función

1

$$f(x, y, z) = \frac{\sin z}{e^x + e^y}$$

Analizando



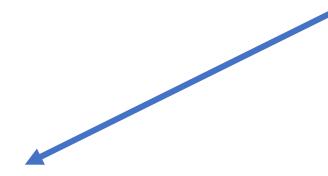


Ejercicios propuestos

II

Analizar la continuidad de la función

$$f(x, y, z) = \frac{\sin z}{e^x + e^y}$$

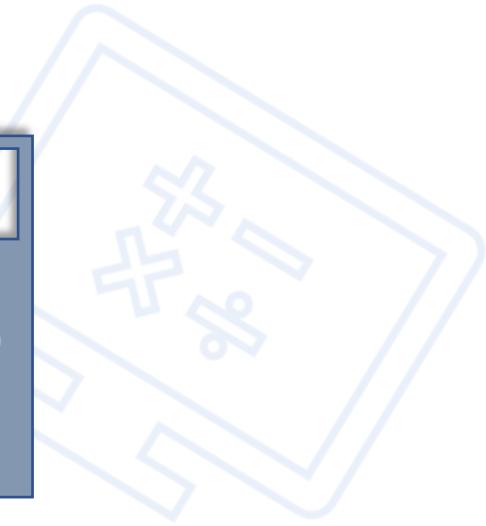


Operaciones con funciones continuas.

Cociente: f/g , si $g(x_0, y_0) \neq 0$

1

Analizando





II

1

Analizar la continuidad de la función

$$f(x, y, z) = \frac{\sin z}{e^x + e^y}$$

Ejercicios propuestos

Operaciones con funciones continuas.

Cociente: f/g , si $g(x_0, y_0) \neq 0$

Analizando

- $\sin(z)$ está definida en $z \in R$.



Ejercicios propuestos

II

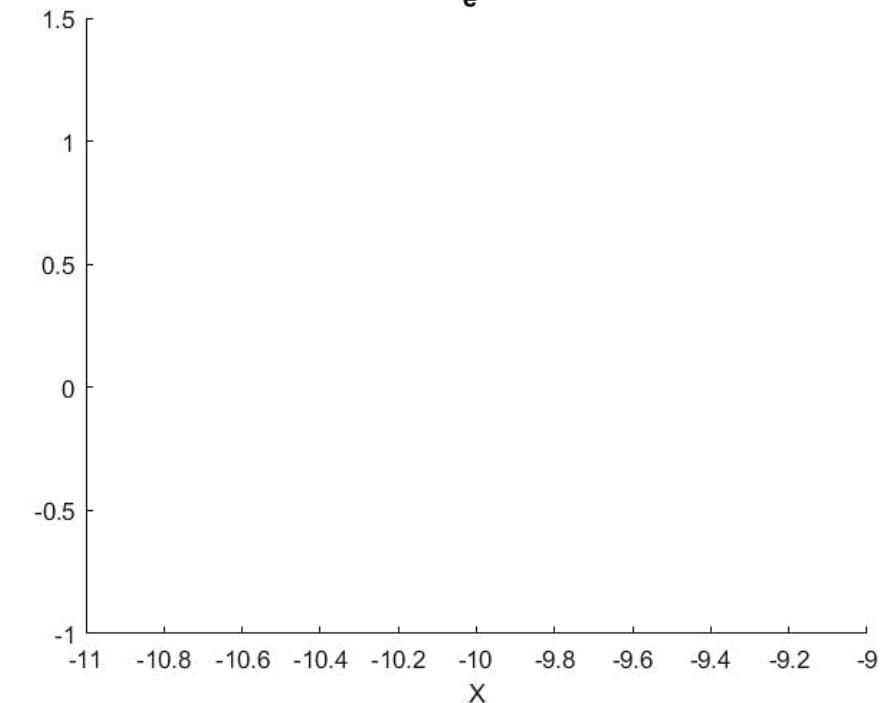
Analizar la continuidad de la función

1

$$f(x, y, z) = \frac{\sin z}{e^x + e^y}$$

Analizando

- $\sin(z)$ está definida en $z \in \mathbb{R}$.
- $e^x + e^y \neq 0$.





II

1

Ejercicios propuestos

Analizar la continuidad de la función

$$f(x, y, z) = \frac{\sin z}{e^x + e^y}$$

Analizando

- $\sin(z)$ está definida en $z \in \mathbb{R}$.
- $e^x + e^y \neq 0$.
- En consecuencia $f(x, y, z)$ es continua en \mathbb{R}^3 .





$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

Operaciones con funciones continuas.

Cociente: f/g , si $g(x_0, y_0) \neq 0$



Analizando en $x^2 \neq y^2$

- $\sin(x^2 - y^2)$ está definida en $(x, y) \in R^2$.
- $x^2 - y^2 \neq 0$
- En consecuencia $f(x, y)$ es continua en R^2 .



2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Analizando en $x^2 = y^2 = \pm a$

- $f(\pm a, \pm a) = 1$





2

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Analizando en $x^2 = y^2 = \pm a$

- $f(\pm a, \pm a) = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pm a, \pm a)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\pm a, \pm a)} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} = 1$





2

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Analizando en $x^2 = y^2 = \pm a$

- $f(\pm a, \pm a) = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pm a, \pm a)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\pm a, \pm a)} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} = 1$

Límite especial

$$\lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



2

Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Analizando en $x^2 = y^2 = \pm a$

- $f(\pm a, \pm a) = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pm a, \pm a)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\pm a, \pm a)} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pm a, \pm a)} f(x, y) = f(\pm a, \pm a)$, la función $f(x, y)$ es continua en R^2 .



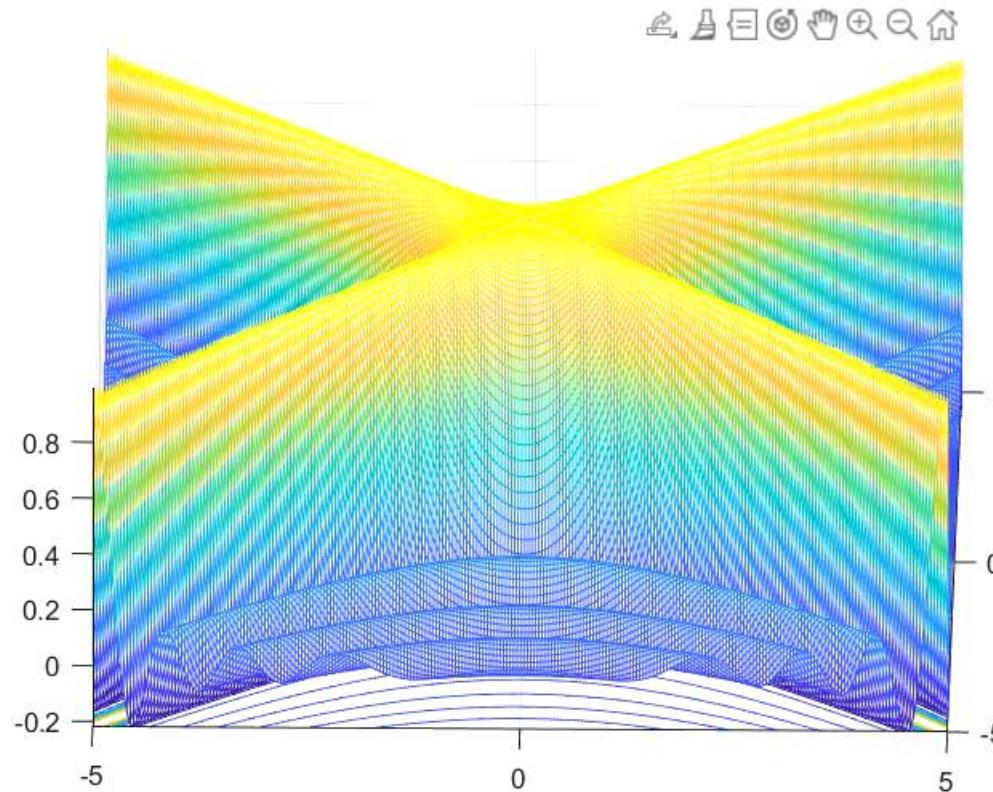
Límite especial

$$\lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



2

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$



Ejercicios propuestos

 **WolframAlpha** computational intelligence

$$\lim_{(x) \rightarrow (y)} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)}$$

NATURAL LANGUAGE

★ √ ∂f (:) √v aω ...

Limit

$$\lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} = 1$$

Series expansion at x=y

Step-by-step solution

$$1 - \frac{2}{3} y^2 (x - y)^2 - \frac{2}{3} y (x - y)^3 + \frac{1}{30} (4 y^4 - 5) (x - y)^4 + \frac{4}{15} y^3 (x - y)^5 + O((x - y)^6)$$

(Taylor series)



Ejercicios propuestos

III

Dada la función

$$f(x, y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right),$$

definir $f(0,0)$ de manera que $f(x,y)$ sea continua en el origen.



Analizando puntos distintos del origen $(x, y) \neq (0,0)$

$$f(x, y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$$

- $x^2 + y^2 \neq 0$

$f(x, y)$ es continua en R^2 .



Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0,0)$

$$f(x, y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}$$



Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0,0)$

$$f(x, y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$$

- $f(0,0)$ no está definida.



Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$f(x, y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$$

- $f(0,0)$ no está definida.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} = 0$

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2(mx) - x(x^3m^3)}{x^2 + m^2x^2} \\&= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^4m(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} \\&= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m(1-m^2)}{(1+m^2)} \\&= 0\end{aligned}$$



Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$f(x, y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$$

- $f(0,0)$ no está definida.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} = 0$

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2(mx) - x(x^3m^3)}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^4m(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m(1-m^2)}{(1+m^2)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Mediante coordenadas polar

$$x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{r^3 \cos^3 \theta}{r} r \sin\theta - r \cos\theta \frac{r^3 \sin^3 \theta}{r}}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{r^4 (\cos^3 \theta \sin\theta - \cos\theta \sin^3 \theta)}{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{r^2 (\cos^3 \theta \sin\theta - \cos\theta \sin^3 \theta)}{1} \\ &= 0\end{aligned}$$



Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0, 0)$

$$f(x, y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$$

- $f(0,0)$ no está definida.
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} = 0$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0,0)$, la función $f(x, y)$ es continua en $R^2 - \{(0,0)\}$. Tiene una discontinuidad evitable.

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2(mx) - x(x^3m^3)}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^4m(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} \\ &= \lim_{(x) \rightarrow (0)} \frac{x^2m(1-m^2)}{(1+m^2)} \\ &= 0\end{aligned}$$

Mediante coordenadas polar

$$x = r \cos\theta, y = r \sin\theta$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{r^3 \cos^3 \theta}{r} r \sin\theta - r \cos\theta \frac{r^3 \sin^3 \theta}{r}}{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{r^4 (\cos^3 \theta \sin\theta - \cos\theta \sin^3 \theta)}{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} \\ &= \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \frac{r^2 (\cos^3 \theta \sin\theta - \cos\theta \sin^3 \theta)}{1} \\ &= 0\end{aligned}$$



Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En este caso la función $f(x, y)$ es continua en \mathbb{R}^2 .





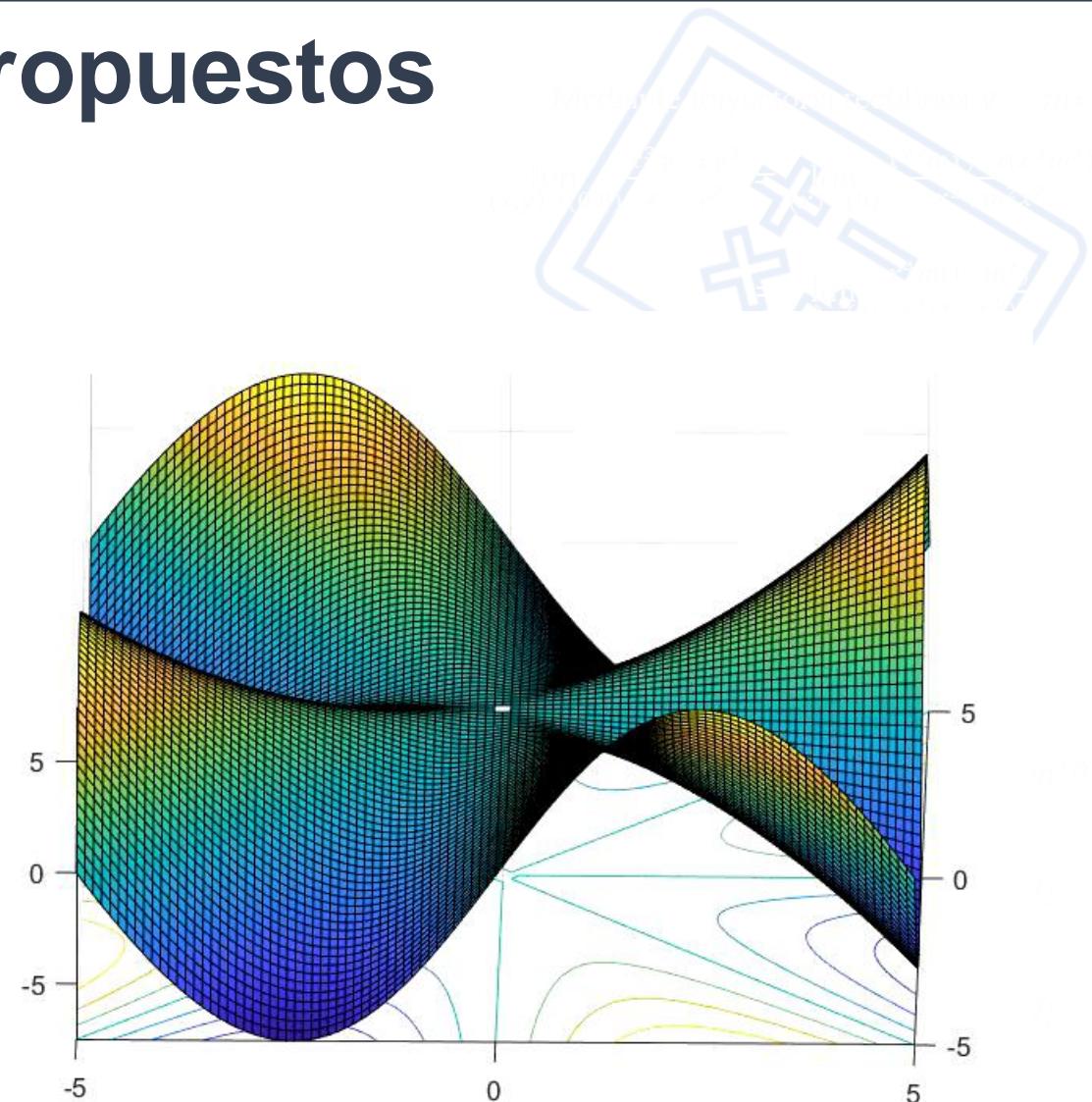
Ejercicios propuestos

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

En este caso la función $f(x, y)$ es continua en \mathbb{R}^2 .

WolframAlpha computational intelligence.

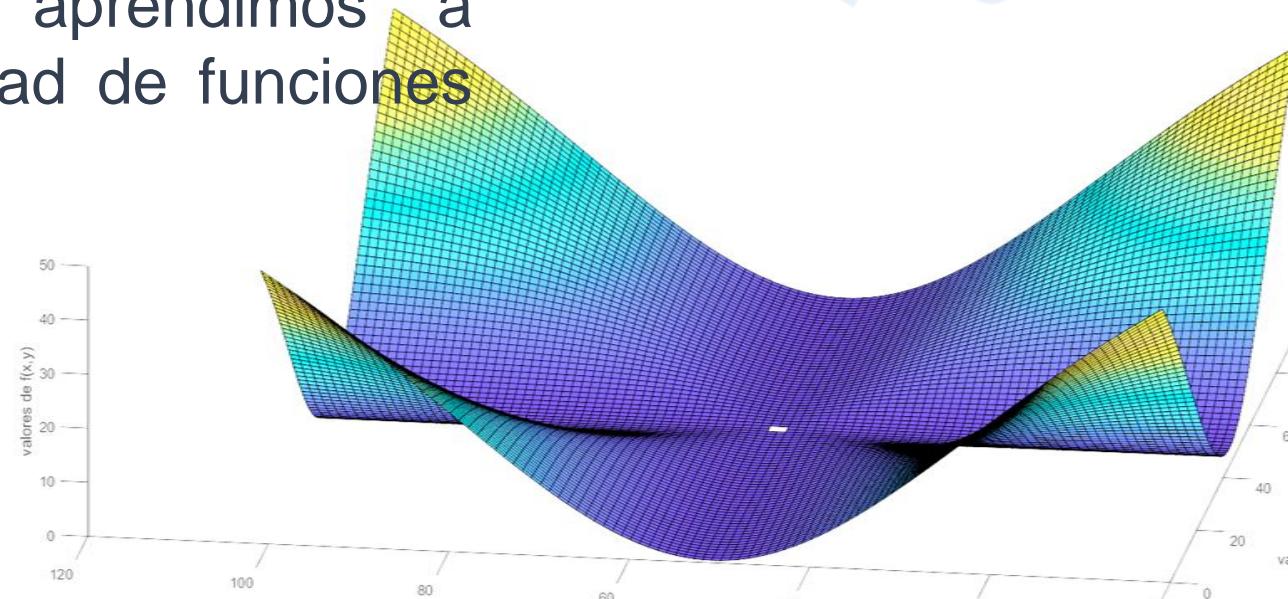
The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top, there is a search bar containing the mathematical expression $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$. Below the search bar, there are buttons for "NATURAL LANGUAGE" and "MATH INPUT". The "POPULAR" section includes buttons for various mathematical operations like division, square root, cube root, derivatives, integrals, summation, and limits. In the "Input" section, the same limit expression is shown. In the "Result" section, the value "0" is displayed, with the note "(assuming variables are real-valued)". At the bottom, there are links for "Enlarge", "Data", "Customize", and "Plain Text".





Conclusión

Pudimos entender que es una función de un o más variables, la similitudes entre la continuidad de función de una variables y varias variables. También aprendimos a analizar y definir la continuidad de funciones de varias variables.

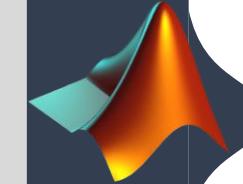




Recursos

P

Microsoft PowerPoint



MATLAB



Wolfram Alpha



Libros de texto



DemoCreator





Bibliografía

Larson, R., & Edward, B. (2010). Calculo 2 de Varias Variables

(9th ed.)

Purcell, Varberg, Rigdon. (2007). Calculo (9th ed.).

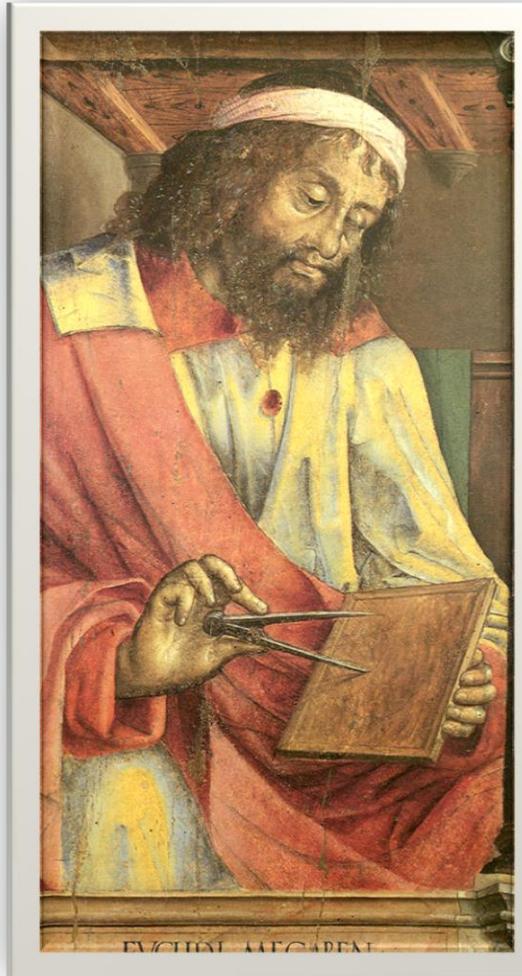
Milane, J. (2022). Funciones Reales de Variables Reales.





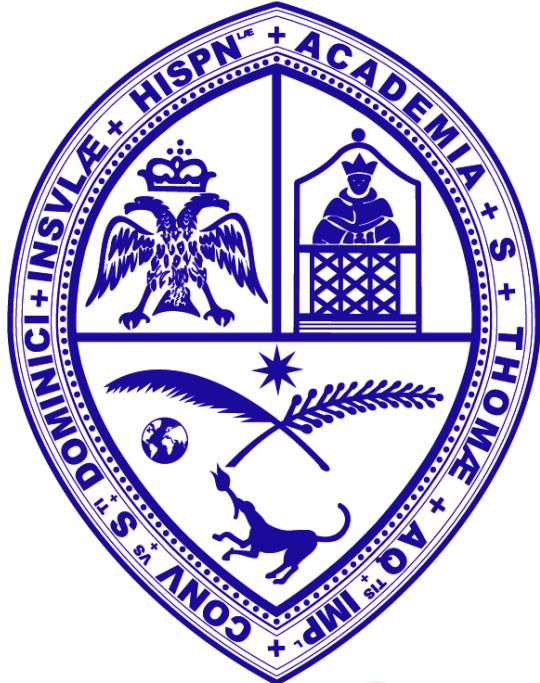
Frase reflexiva

“Las leyes de la naturaleza no son más que los pensamientos matemáticos de Dios.”
Euclides (325 a. C. - 265 a. C.).



ANÁLISIS REAL II

KELVIN A. FLORIMON



iMuchas gracias!