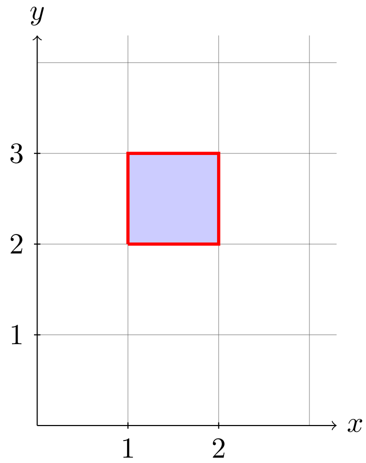
Hoja de Prácticas tema 4: Integrales múltiples

1. Calcular
$$\iint_D (xy + x^2 + y^2)\, dA$$
en la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x \le 2,\ 2 \le y \le 3\}$.

Solución:



$$\iint_D (xy + x^2 + y^2)\, dA = \int_1^2 \int_2^3 (xy + x^2 + y^2)\, dy\, dx = \int_0^2 \left(\frac{xy^2}{2} + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right|_{y=2}^{y=3} dx$$

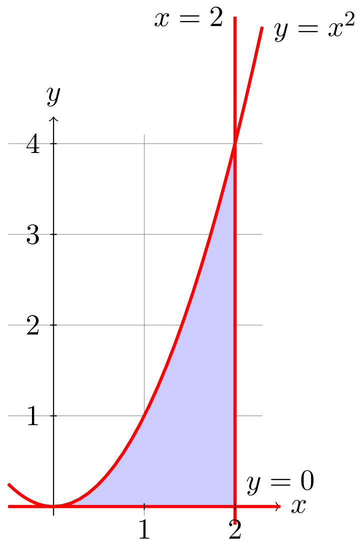
$$= \int_1^2 \frac{5x}{2} + x^2 + \frac{19}{3}\, dx = \frac{149}{12}.$$

2. Calcular

$$\iint_D x^3 \cos(xy)\, dx\, dy$$

donde D es la región del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$.

Solución:



$$\iint_D x^3 \cos(xy)\, dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} x^3 \cos(xy)\, dy\, dx = \int_0^2 \left(x^3 \frac{\sin(xy)}{x} \bigg|_{y=0}^{y=x^2} \right. dx$$

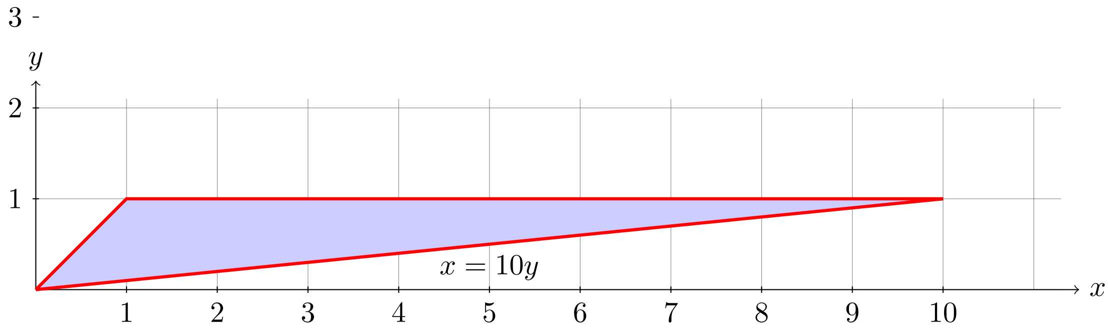
$$= \int_0^2 x^2 \sin(x^3)\, dx = \left(-\frac{1}{3} \cos(x^3) \bigg|_{x=0}^{x=2} \right. = \frac{1 - \cos 8}{3}.$$

3. Calcular

$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy,$$

siendo D el triángulo de vértices $(0,0)$, $(10,1)$, y $(1,1)$.

Solución:

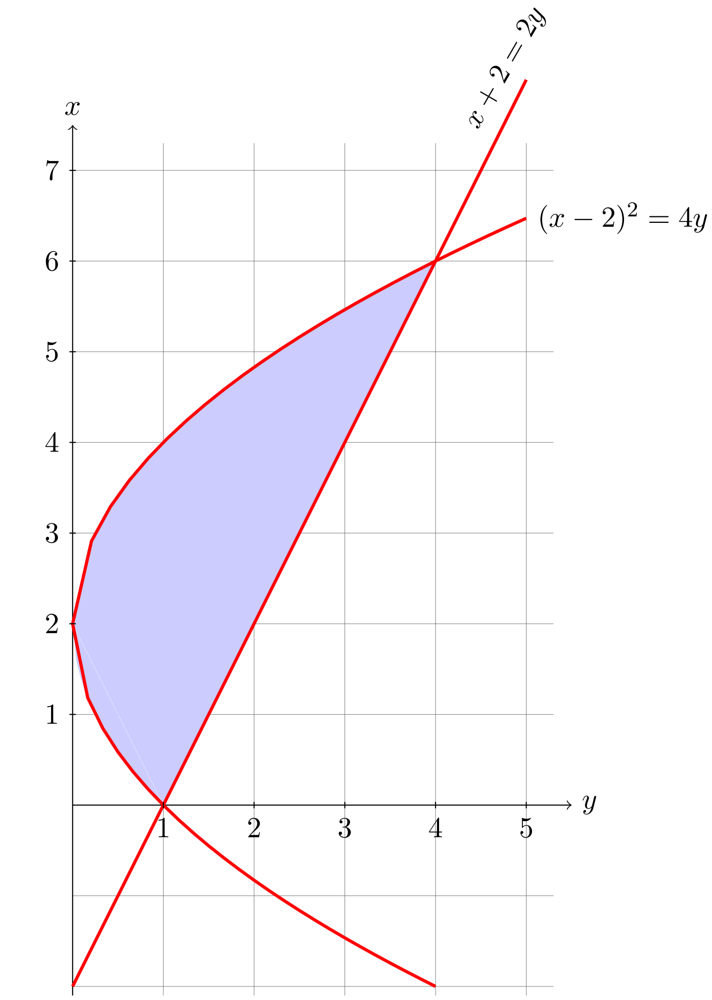


$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\frac{3(xy-y)^{3/2}}{2y} \Bigg|_{x=y}^{x=10y} \right. dy$$

$$= \int_0^1 18y^2\, dy = 6.$$

4. Calcular el área encerrada entre las curvas $(y-2)^2 = 4x$ y $y + 2 = 2x$.

Solución:



Dado que si intercambiamos las variables x e y en el problema no tenemos problemas en definir una integral directamente pues cada curva representa una función, lo haremos así como se ve en la figura ya intercambiamos las variables x e y. Aún así este problema sin intercambiar las variables se puede resolver de distintas formas, pero yo he elegido esta forma por ser original.

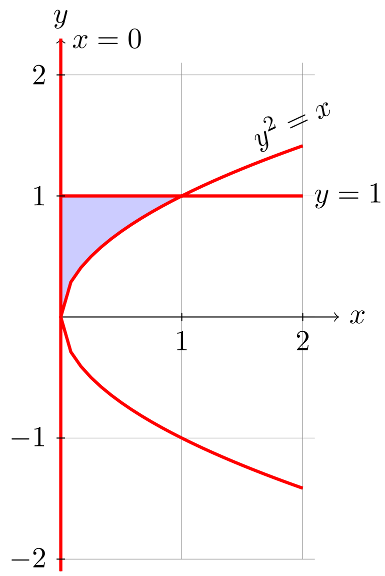
$$\iint_D 1\, dA = \int_0^6 \int_{(x-2)^2/4}^{x/2+1} 1\, dy\, dx = \int_0^6 \left(\frac{3x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 9.$$

5. Calcular

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy,$$

donde D es la región limitada por las gráficas $y^2 = x$, $x = 0$ e $y = 1$.

Solución:



$$\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(y e^{\frac{x}{y}} \Big|_{x=0}^{x=y^2} \right) dy$$

$$= \int_0^1 y(e^y - 1)\,dy = 1.$$

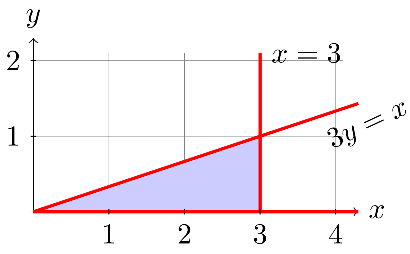
6. Evaluar las siguientes integrales, invirtiendo previamente el ordende integración:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\, dx\, dy$

Solución:

(a) Teniendo en cuenta que la región que estamos integrando es:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3y \le x \le 3,\ 0 \le y \le 1\}$$



Por lo tanto si invertimos el orden de integración nos resulta:

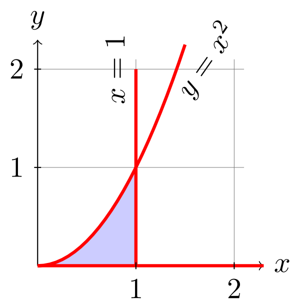
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x/3,\ 0 \le x \le 3\}.$$

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^3 \frac{x}{3} e^{x^2}\, dx = \frac{e^9 - 1}{6}.$$

(b) Teniendo en cuenta que la región que estamos integrando es:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$



Por lo tanto si invertimos el orden de integración nos resulta:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x^2,\ 0 \le x \le 1\}$$

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\, dy\, dx = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3+1}\, dx$$

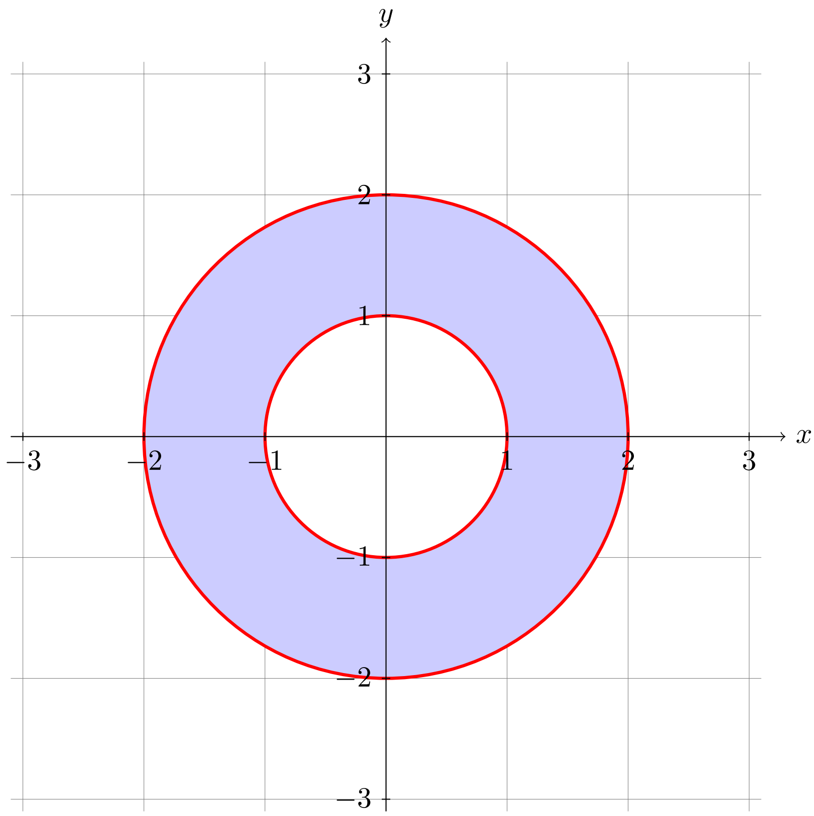
$$= \left(\frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{2(\sqrt{8}-1)}{9}.$$

7. Calcular

$$\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dA,$$

donde D es la región del plano limitada por $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$.

Solución:



En este caso lo más adecuado, debido a la geometría de la figura, es realizar un cambio a coordenadas polares, siendo

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{array} \right. \qquad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

así

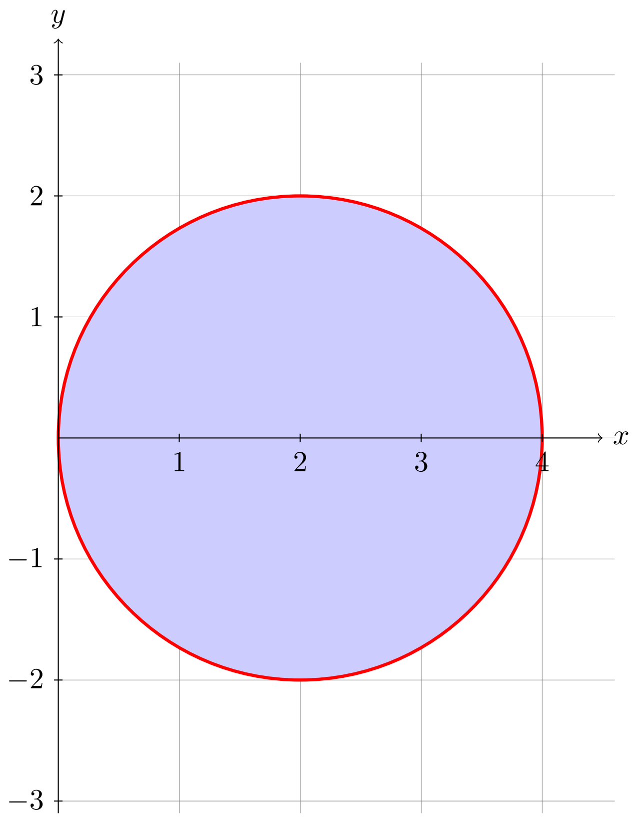
$$\iint_D \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dA = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} \left| \begin{array}{cc} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{array} \right| dr\, d\theta = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r\cos^2\theta\, dr\, d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

8. Calcular

$$\iint_D ((x-2)^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

donde D es el interior del círculo $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

Solución:



En este caso lo más adecuado, debido a la geometría de la figura, es realizar un cambio a coordenadas polares, siendo

$$\begin{cases} x = 2 + r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

así

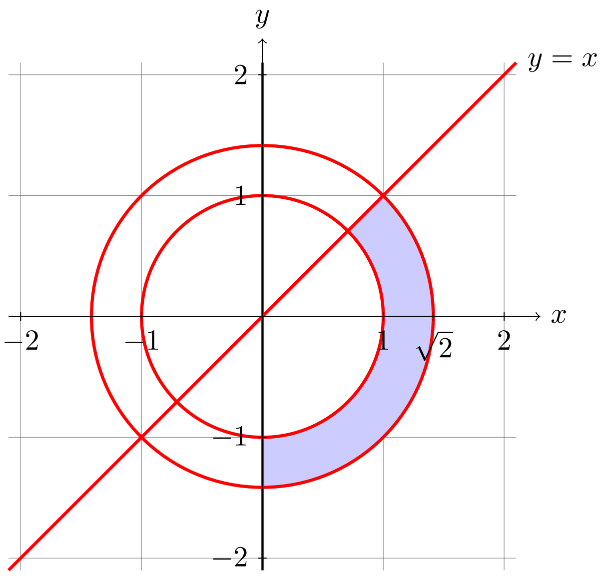
$$\iint_D ((x-2)^2 + y^2)\, dx\, dy, = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\, d\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^3\, dr\, d\theta = 8\pi.$$

9. Calcular

$$\iint_D \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

h donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$.

Solución:



En este caso lo más adecuado, debido a la geometría de la figura, es realizar un cambio a coordenadas polares, siendo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \qquad 1 \leq r \leq \sqrt{2},\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

así

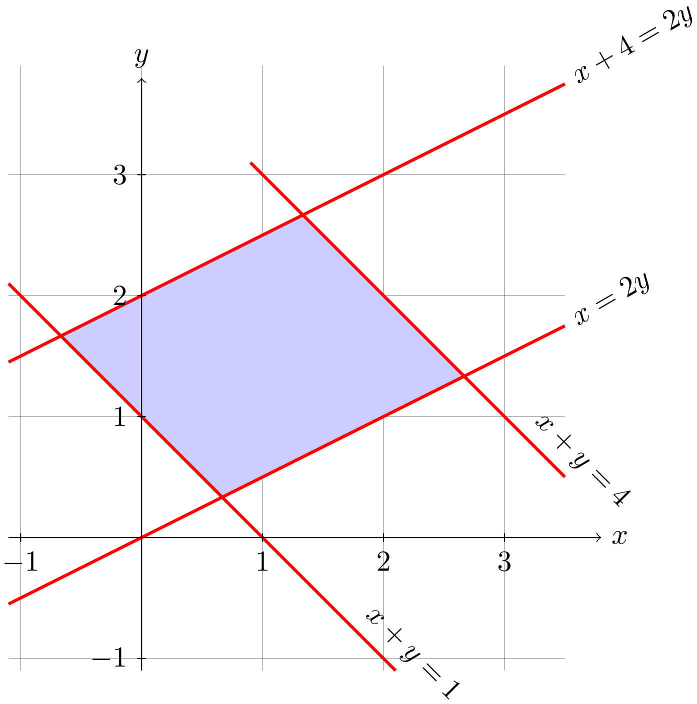
$$\iint_D \frac{2xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\, r\,d\theta\,dr = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} r\sin(2\theta)\,d\theta\,dr = -\frac{1}{4}.$$

10. Calcular, utilizando un cambio de variable apropiado, la integral

$$\iint_D 3xy\,dx\,dy,$$

donde D es la región del plano limitada por las curvas $x-2y=0$, $x-2y=-4$, $x+y=4$, $x+y=1$.

Solución:



En este caso lo más adecuado, debido a la geometría de la figura, es realizar un cambio de coordenadas, siendo

$$\left\{\begin{array}{l} u = x+y, \\ v = x-2y, \end{array}\right. \qquad 1 \le u \le 4,\ -4 \le v \le 0, \qquad \Rightarrow \qquad 3y = u-v,\ 3x = 2u+v,$$

luego

$$\iint_D 3xy\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_0^{-4}\int_1^4 (u-v)(2u+v)\begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} du\,dv$$

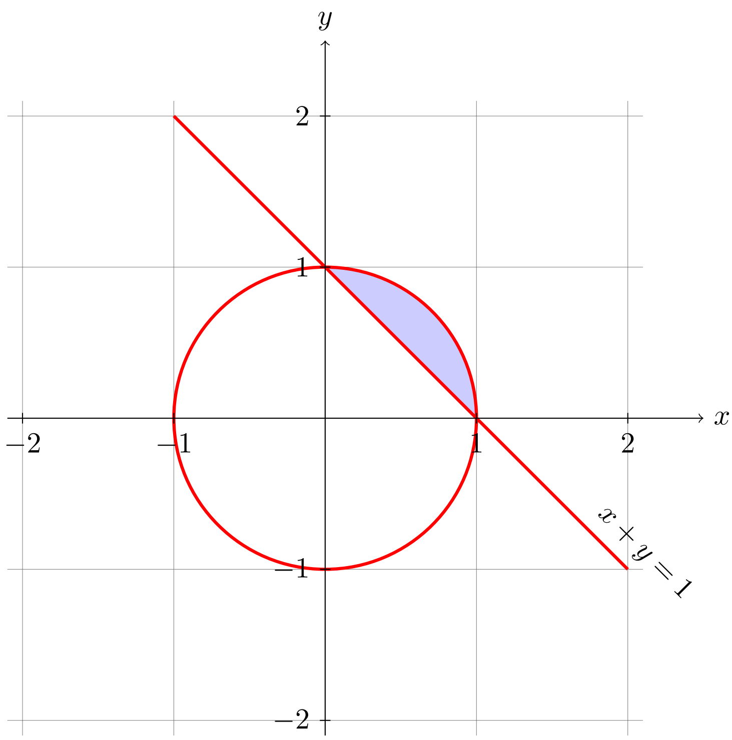
$$=\frac{1}{9}\int_{-4}^0\int_1^4 (2u^2-uv-v^2)\,du\,dv = \frac{164}{9}.$$

11. Calcular

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} dxdy,$$

donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 1, x^2+y^2 \leq 1\}$.

Solución:



En este caso lo más adecuado, debido a la geometría de la figura, es realizar un cambio a coordenadas polares, siendo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \qquad \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta} \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

así

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^1 \frac{1}{r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1+\cos\theta+\sin\theta) d\theta = 2-\frac{\pi}{2}.$$

12. Demostrar que:

   (a) El área de una elipse de semiejes a y b es πab.

   (b) El volumen de un elipsoide de semiejes a, b, c es $4/3\pi abc$.

Solución: En estos casos no merece la pena representar las figuras por ser bien conocidas:

(a) En este caso lo más adecuado, debido a la geometría de la figura, es realizar un cambio a coordenadas polares, siendo

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta, \\ y = br\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

así

$$\iint_{\text{elipse}} 1dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \pi ab.$$

(b) En este caso lo más adecuado, debido a la geometría de la figura, es realizar un cambio a coordenadas esféricas, siendo

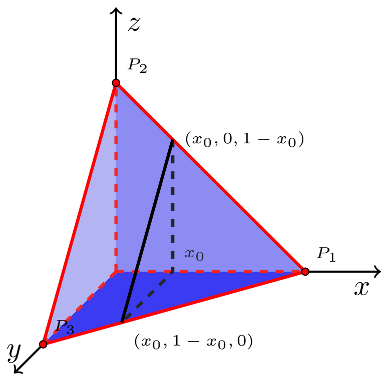
$$\begin{cases} x = ar\cos\theta\cos\varphi, \\ y = br\sin\theta\cos\varphi, \\ z = cr\sin\varphi \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\varphi \le \frac{\pi}{2},$$

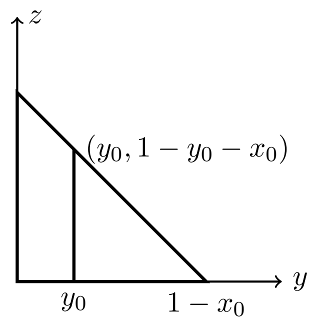
así

$$\iiint_{\text{elipsoide}} 1dV = abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = 4\pi\frac{abc}{3}.$$

13. Calcular
$$I=\iiint_T x^2yz\,dx\,dy\,dz,$$
siendo T el recinto determinado por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $x+y+z=1$.

Solución:

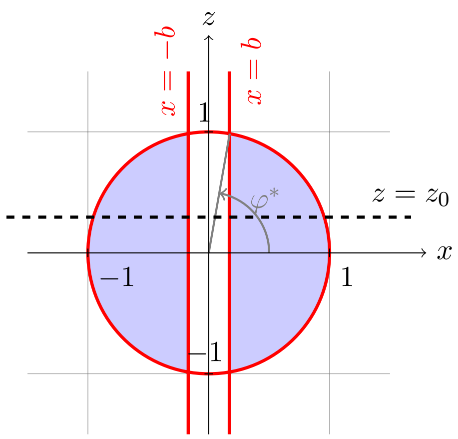


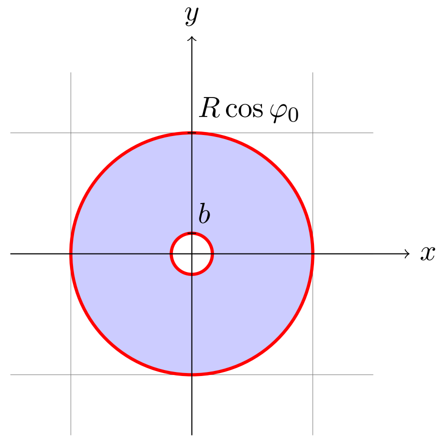


En este caso utilizaremos coordenadas cartesianas, siendo:
$$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1-x,\quad 0\le z\le 1-x-y.$$
Por tanto
$$I=\iiint_T x^2yz\,dx\,dy\,dz=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}x^2yz\,dz\,dy\,dx$$
$$=\frac{1}{24}\int_0^1 x^2(1-x)^4\,dx=\frac{1}{2520}.$$

14. Hallar el volumen del sólido que queda tras taladrar un agujero de radio b a través del centro de una esfera de radio R, con $b < R$.

Solución: Debido a la simetría podemos suponer que dicho agujero (de radio b) se ha realizado a través del eje z quedando la siguiente sección en el plano XZ (idéntica a la sección en el plano YZ) (Izqda.) y la sección del plano $z = z_0 = R\sin\varphi_0$ que produce sobre la figura (drcha.)





Por tanto, parametrizaremos en coordenadas cilíndricas, siendo

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = R\sin\varphi, \end{array}\right. \qquad b \le r \le R\cos\varphi,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\varphi^* \le \varphi \le \varphi^*,$$

siendo $R\cos\varphi^* = b$; luego

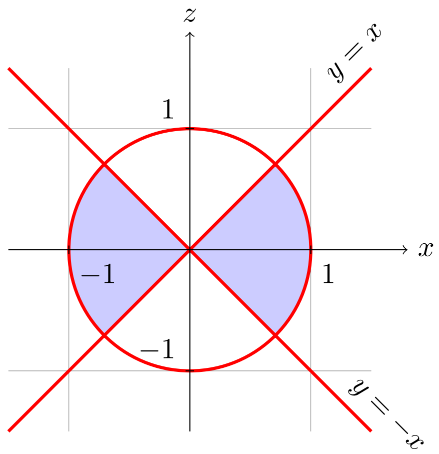
$$\iiint_{\text{Figura}} 1dV = R\int_{-\varphi^*}^{\varphi^*}\int_0^{2\pi}\int_b^{R\cos\varphi} r\cos\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi = \pi R\int_{-\varphi^*}^{\varphi^*}(R^2\cos^2\varphi - b^2)\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{\pi R^3}{6}\left((-\sin^3\varphi^* + 9\sin\varphi^* - 9\sin\varphi^*\cos^2\varphi^*)\right) = \frac{4}{3}\pi(R^2 - b^2)^{3/2}.$$

Aplicando el Teorema de Pitagoras se deduce que $R\sin\varphi^* = \sqrt{R^2 - b^2}$.

15. Calcular el volumen exterior a $z^2 = x^2 + y^2$ e interior a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución:



i

En este caso lo más adecuado, debido a la geometría de la figura, es realizar un cambio a coordenadas esféricas, siendo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\cos\varphi, \\ z = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4},$$

así

$$\iiint_{\text{Figura}} 1 dV = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \cos\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

16. Calcular el volumen limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2 + 2x + 2y$.

Solución: Debido a la geometría de la figura [la intersección de las dos superficies es un círculo de radio 2 centrado en el punto $(x, y) = (1, 1)$] conviene aplicar un cambio a coordenadas cilíndricas, siendo

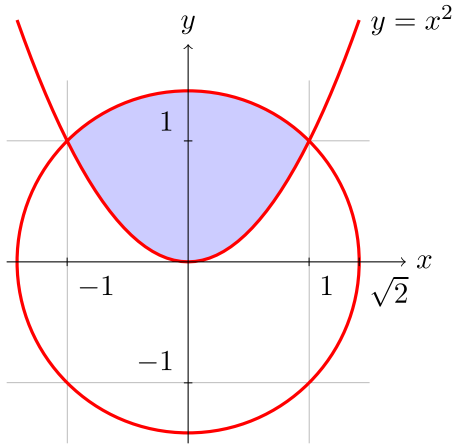
$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + r\cos\theta, \\ y = 1 + r\sin\theta, \\ \quad z = z, \end{array}\right. \qquad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 2+r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta) \le z \le 6+2r(\cos\theta+\sin\theta),$$

por tanto

$$\iiint_{\text{Figura}} 1dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{2+r^2+2r(\cos\theta+\sin\theta)}^{6+2r(\cos\theta+\sin\theta)} r\,dz\,d\theta\,dr = 2\pi \int_0^2 r(4-r^2)\,dr = 8\pi.$$

17. Determinar el volumen del sólido situado en la región $z \geq 0$ que es interior a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 2$ y al paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Solución: Una sección en el plano XZ (o en el plano YZ) es, debido a la simetría de la figura:



En este caso

$$\left\{\begin{array}{c} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{array}\right. \qquad 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r^2 \leq z \leq \sqrt{2-r^2},$$

así

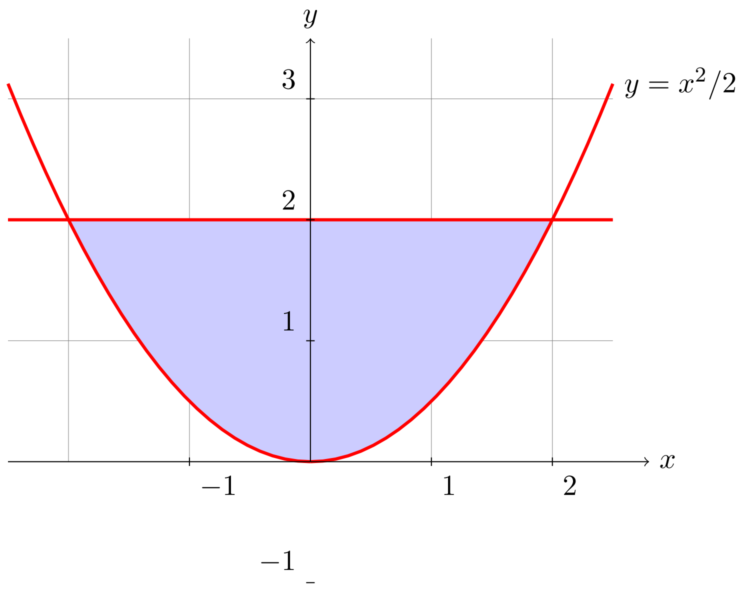
$$\iiint_{\text{Figura}} 1dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} r\,dz\,d\theta\,dr = 2\pi \int_0^1 r(\sqrt{2-r^2} - r^2)\,dr = \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8} - \frac{7}{4}\right).$$

18. Calcular

$$I = \iiint_T (x^2+y^2)^2\,dx\,dy\,dz,$$

siendo T la región comprendida entre $z = 2$ y $x^2+y^2 = 2z$.

Solución:



En este caso

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \frac{r^2}{2} \le z \le 2,$$

así

$$I = \iiint_T (x^2+y^2)^2\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^4 r\,dz\,d\theta\,dr = 2\pi \int_0^2 r^5(2-r^2/2)\,dr = \frac{32\pi}{3}.$$

19. Calcular

$$I = \iiint_T \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

siendo T el recinto determinado por las esferas: $x^2+y^2+z^2 = 1$ y $x^2+y^2+z^2 = 4$.

Solución: En este caso, obviamente, emplearemos coordenadas esféricas, siendo:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = r\cos\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\cos\varphi, \\ z = r\sin\varphi, \end{array} \right. \qquad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

luego

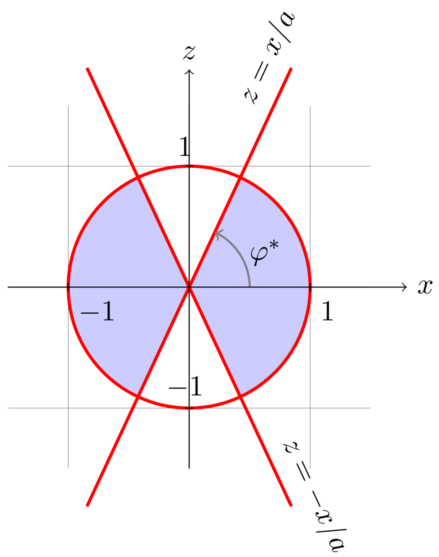
$$I = \iiint_T \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2\cos\varphi}{r^3}\, d\varphi\, d\theta\, dr = 2\pi \int_1^2 r^5(2-r^2/2)\, dr = 4\pi\log 2.$$

20. Calcular

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$$

donde T es el sólido exterior al cono de ecuación $a^2z^2 = x^2 + y^2$ (con $a > 0$) e interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución:



En este caso, obviamente, emplearemos coordenadas esféricas, siendo:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= r\cos\theta\cos\varphi, \\ y &= r\sin\theta\cos\varphi, \\ z &= r\sin\varphi, \end{aligned} \right. \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\varphi^* \le \varphi \le \varphi^*,$$

siendo $\tan\varphi^* = 1/a$ $[\sin^2\varphi^* = 1/(1+a^2)]$; luego

$$I = \iiint_T (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\varphi^*}^{\varphi^*} r^2\cos^2\varphi\, r^2\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi\frac{1}{5}\int_{-\varphi^*}^{\varphi^*} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{5}\left(2\sin\varphi^* - \frac{2\sin^3\varphi^*}{3}\right) = \frac{4\pi\sin\varphi^*}{5}\left(1 - \frac{1}{3(1+a^2)}\right) = \frac{4\pi(3a^2+2)}{15(1+a^2)^{3/2}}.$$

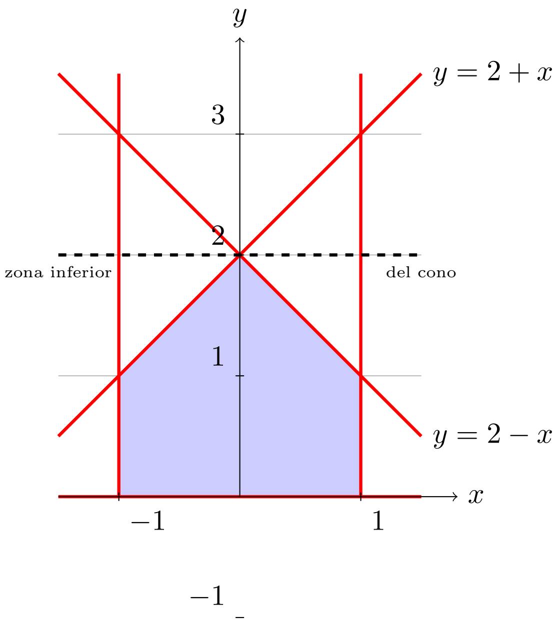
21. Calcular
$$I = \iiint_T (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy\, dz,$$
siendo T la región interior al elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución: En este caso, obviamente, emplearemos coordenadas esféricas, siendo:
$$\begin{cases} x = ar\cos\theta\cos\varphi, \\ y = br\sin\theta\cos\varphi, \\ z = cr\sin\varphi, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$
así
$$I = \iiint_T (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy\, dz = abc \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - r^2)^{3/2}\, r^2 \cos\varphi\, d\varphi\, d\theta\, dr$$
$$= 4\pi abc \int_0^1 r^2 (1 - r^2)^{3/2}\, dr = \frac{1}{8}\pi^2 abc.$$

22. Calcular la temperatura media en el interior del recinto limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la rama inferior del cono $(z-2)^2 = x^2 + y^2$ si la temperatura en cada punto es proporcional a su altura (distancia al plano $z = 0$).

Solución: En este caso,

$$T_m(x, y, z) = \frac{1}{V} \iiint_{Figura} kz\, dx\, dy\, dz.$$



En este caso emplearemos coordenadas cilíndricas, siendo:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases} \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le z \le 2 - r,$$

como

$$V_{Figura} = \iiint_{Figura} 1\, dV = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r} r\, dz\, d\theta\, dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Así

$$\frac{4\pi}{3} T_m = k \iiint_{Figura} z\, dx\, dy\, dz = k \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2-r} zr\, dz\, d\theta\, dr = k\pi \int_0^1 (2 - r^2)^2 r\, dr = \frac{11\pi}{12} k,$$

y por tanto

$$T_m = \frac{33}{48} k.$$

23. Calcular

$$I_r = \iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}}\, dV,$$

donde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, r^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.
Determinar para qué valores de n existe $\lim\limits_{r\to 0^+} I_r$.

Solución: En este caso, obviamente, emplearemos coordenadas esféricas, siendo:

$$\left\{\begin{array}{r} x = t\cos\theta\cos\varphi, \\ y = t\sin\theta\cos\varphi, \\ z = t\sin\varphi, \end{array}\right. \qquad r \leq t \leq R,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

luego

$$I_r = \iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{n/2}}\, dV = \int_r^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2\cos\varphi}{t^n}\, d\varphi\, d\theta\, dt = 4\pi \int_r^R t^{2-n}\, dt$$

$$\stackrel{(*)}{=} \frac{4\pi}{3-n}(R^{3-n} - r^{3-n}).$$

Por tanto dicho límite existe para $3-n > 0$, o sea, $n < 3$.

(*) Se ha asumido que $n-2 \neq 1$ para hacer así la integral, y en ese caso particular

$$4\pi\log(R/r) \to \infty, \qquad \text{si} \quad r \to 0^+.$$