Triedro de Frenet-Serret
Planos Normal, Osculador y Rectificante

Henry R Moncada

UNIVERSIDAD NACIONAL TECNOLÓGICA DE LIMA SUR

September 13, 2024

Outline

Introducción

En este trabajo, estudiaremos los planos asociados a una curva en el espacio tridimensional (Triedro de Frenet-Serret):

- Plano Osculador
- Plano Normal
- Plano Rectificante

Estos planos están determinados por la curvatura, la torsión y el vector tangente de la curva. Veremos cómo calcularlos a través de ejemplos resueltos.

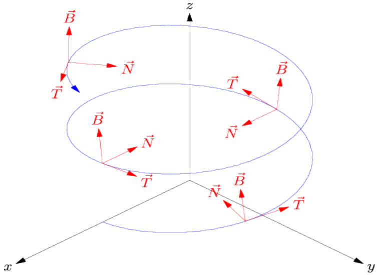


Figure 1: *

Triedro de Frenet-Serret

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $r : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2 :

- **El plano osculador** de una curva C en un punto A está definido por el vector tangente T y el vector normal N a la curva en ese punto (el plano que pasa por A y contiene los vectores T y N). $r - r(t) \perp B(t)$, así se tiene que la ecuación del plano osculador de $r(t)$ es

$$(r^{'}(t) \times r^{''}(t)) \cdot (r - r(t)) = (T(t) \times N(t)) \cdot (r - r(t)) = B(t) \cdot (r - r(t)) = 0 \tag{1}$$

  Donde $r(t)$ es la curva parametrizada.

- **El plano normal** está definido por los vectores normal N y binormal B de la curva en un punto A (el plano que pasa por A y contiene a losvvectores B y N).

$$(r^{''}(t) \times B(t)) \cdot (r - r(t)) = (N(t) \times B(t)) \cdot (r - r(t)) = T(t) \cdot (r - r(t)) = 0 \tag{2}$$

  Donde $B(t)$ es el vector binormal, que se calcula como:

$$B(t) = \frac{r^{'}(t) \times r^{''}(t)}{\|r^{'}(t) \times r^{''}(t)\|} = \frac{T(t) \times N(t)}{\|T(t) \times N(t)\|}$$

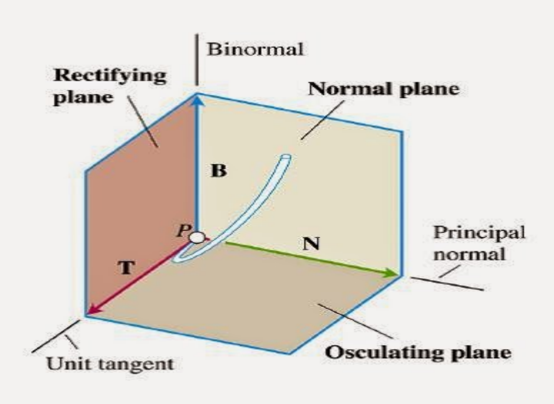
- **El plano rectificante** está definido por el vector tangente T y el vector binormal B (el plano que pasa por A y contiene a los vectores B y T):

$$(r^{'}(t) \cdot B(t)) \cdot (r - r(t)) = (T(t) \times B(t)) \cdot (r - r(t)) = N(t) \cdot (r - r(t)) = 0 \tag{3}$$

  Este plano contiene la dirección tangente de la curva y su binormal.

Tenemos entonces lo siguiente:

- Un vector normal al plano osculador es el vector B.
- Un vector normal al plano normal es el vector T.
- Un vector normal al plano rectificante es el vector N.



Ejemplo 1:

Sea C la curva obtenida de

$$r(t) = \left\langle \frac{4}{5}\cos t, \sin t - 1, -\frac{3}{5}\cos t \right\rangle \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Hallar ecuaciones lineales de los planos osculador, normal y rectificante de C en $t = 0$.
Solución:
Primero hallemos el triedro de Frenet-Serret. Tenemos que

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{\left\langle -\frac{4}{5}\sin t, \cos t, \frac{3}{5}\sin t \right\rangle}{\left\| \left\langle -\frac{4}{5}\sin t, \cos t, \frac{3}{5}\sin t \right\rangle \right\|} = \frac{\left\langle -\frac{4}{5}\sin t, \cos t, \frac{3}{5}\sin t \right\rangle}{\sqrt{\frac{16}{25}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25}\sin^2 t}}$$

$$T(t) = \left\langle -\frac{4}{5}\sin t, \cos t, \frac{3}{5}\sin t \right\rangle$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{\left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\sin t, \frac{3}{5}\cos t \right\rangle}{\left\| \left\langle \frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t \right\rangle \right\|} = \frac{\left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\sin t, \frac{3}{5}\cos t \right\rangle}{\sqrt{\frac{16}{25}\cos^2 t + \sin^2 t + \frac{9}{25}\cos^2 t}}$$

$$N(t) = \left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\sin t, \frac{3}{5}\cos t \right\rangle$$

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \left\langle -\frac{4}{5}\sin t, \cos t, \frac{3}{5}\sin t \right\rangle \times \left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\sin t, \frac{3}{5}\cos t \right\rangle$$

$$B(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{4}{5}\sin t & \cos t & \frac{3}{5}\sin t \\ -\frac{4}{5}\cos t & -\sin t & \frac{3}{5}\cos t \end{vmatrix} = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle$$

El vector binormal es constante, por lo tanto no cambia de dirección y así la curva se encuentra contenida en un plano.

Ejemplo 1:

Tomemos las ecuaciones paramétricas de la curva,

$$r(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle = \left\langle \frac{4}{5}\cos t, \sin t - 1, -\frac{3}{5}\cos t \right\rangle \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

$$z(t) = -\frac{3}{5}\cos t = -\frac{3}{5}\cos t \cdot \frac{4}{4} = -\frac{3}{4}x(t)$$

En $t = 0$ tenemos

$$r(0) = \left\langle \frac{4}{5}, -1, -\frac{3}{5} \right\rangle, \quad T(0) = \langle 0, -1, 0\rangle, \quad N(0) = \left\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle, \quad B(0) = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle$$

Ecuación del **plano osculador en $\mathbf{t = 0}$**:

$$B(t) \cdot (r - r(t)) = 0$$

$$B(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z = 0 \Rightarrow z = -\frac{3}{4}$$

de donde $z = -\frac{3}{4}x$, es el plano donde está contenida la curva.
Ecuación del **plano normal en $\mathbf{t = 0}$**:

$$T(t) \cdot (r - r(t)) = 0$$

$$T(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \langle 0, 1, 0\rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

de donde $y = -1$, es el plano donde está contenida la curva.
Ecuación del **plano rectificante en $\mathbf{t = 0}$**:

$$N(t) \cdot (r - r(t)) = 0$$

$$N(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \left\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = -\frac{4}{5}x + \frac{16}{25} + \frac{3}{5}z + \frac{9}{25} = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z + 1 = 0$$

esto es

$$-4x + 3z + 1 = 0$$

Ejemplo 2:

Probamos que el triedro de Frenet-Serret para la curva parametrizada por las ecuaciones $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $z = 3t$ es:
Solución:

$$r(t) = (4\cos t, 4\sin t, 3t)$$

$$T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{\langle -4\sin t, 4\cos t, 3\rangle}{\|\langle -4\sin t, 4\cos t, 3\rangle\|} = \frac{\langle -4\sin t, 4\cos t, 3\rangle}{\sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t + 9}} = \frac{\langle -4\sin t, 4\cos t, 3\rangle}{5}$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{\langle -4\cos t, -4\sin t, 0\rangle}{\|\langle -4\cos t, -4\sin t, 0\rangle\|} = \frac{\langle -4\cos t, -4\sin t, 0\rangle}{\sqrt{16\cos^2 t + 16\sin^2 t}} = \langle -\cos t, -\sin t, 0\rangle$$

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{4}{5}\sin t & \frac{4}{5}\cos t & \frac{3}{5} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{3}{5}\sin t, -\frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5}\right\rangle$$

En $t = \frac{\pi}{2}$ tenemos

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle 0, 4, \frac{3\pi}{2}\right\rangle, \quad T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right\rangle, \quad N\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 0, -1, 0\rangle, \quad B\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\rangle$$

- Ecuación del **plano osculador** en $t = \frac{\pi}{2}$:

$$B(t) \cdot (r - r(t)) = 0$$

$$B\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left\langle x, y-4, z-\frac{3\pi}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\rangle \cdot \left\langle x, y-4, z-\frac{3\pi}{2}\right\rangle = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - \frac{6\pi}{5} = 0$$

de donde

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - \frac{6\pi}{5} = 0 \Rightarrow 3x + 4z - 6\pi = 0$$

Ejemplo 2:

Ecuación del **plano normal en** $t = \frac{\pi}{2}$:

$$T(t) \cdot (r - r(t)) = 0$$

$$T(\frac{\pi}{2}) \cdot \left\langle x, y - 4, z - \frac{3\pi}{2} \right\rangle = \left\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle \cdot \left\langle x, y - 4, z - \frac{3\pi}{2} \right\rangle = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z - \frac{9\pi}{10} = 0$$

es el plano donde está contenida la curva.

$$-8x + 6z - 9\pi = 0$$

Ecuación del **plano rectificante en** $t = \frac{\pi}{2}$:

$$N(t) \cdot (r - r(t)) = 0$$

$$N(\frac{\pi}{2}) \cdot \left\langle x, y - 4, z - \frac{3\pi}{2} \right\rangle = \langle 0, -1, 0 \rangle \cdot \left\langle x, y - 4, z - \frac{3\pi}{2} \right\rangle = -y + 4 = 0$$

esto es

$$y = 4$$

Ejemplo 3:

Consideremos la curva $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$r(s) = \left\langle \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

el cual es dos veces diferenciable parametrizado por longitud de arco y que describe una hélice circular en $\mathbb{R}^3$. Obtenga la ecuación del plano osculador en el punto $P(\sqrt{2}\pi) = (-1, 0, \pi)$.

Solución:

Tenemos que:

$$T(s) = \frac{r'(s)}{\|r'(s)\|} = \frac{\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle}{\left\| \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \right\|}$$

$$T(s) = \frac{\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}}}$$

$$T(s) = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

y

$$T(\sqrt{2}\pi) = \left\langle 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{\left\langle -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right\rangle}{\left\| \left\langle -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right\rangle \right\|} = \frac{\left\langle -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0 \right\rangle}{\sqrt{\frac{1}{2} \cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)}}$$

Ejemplo 3:

$$N(s)=\left\langle -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),0\right\rangle \Rightarrow N(\sqrt{2}\pi)=\langle 1,0,0\rangle$$

Por lo que

$$B(s)=T(s)\times N(s)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & 0 \end{vmatrix}=\left\langle \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{-1}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\rangle$$

al evaluar en $s=\sqrt{2}\pi$ nos queda

$$B(\sqrt{2}\pi)=\left\langle 0,\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\rangle$$

Por lo tanto la ecuación del **plano osculador** en $P=(-1,0,\pi)$ es

$$(r-r(s))\cdot B(s)=B(s)\cdot(r-r(s))=0$$

$$[(x,y,z)-(x(s),y(s),z(s))]\cdot B(s)=B(s)\cdot[(x,y,z)-(x(s),y(s),z(s))]=0$$

$$\langle x+1,y,z-\pi\rangle\cdot\left\langle 0,\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\rangle=\frac{1}{2\sqrt{2}}y+\frac{1}{2\sqrt{2}}(z-\pi)=0\Rightarrow y+z=\pi$$

Se llama **plano normal** de $r(s)$ en el punto P, al plano que pasa por P y es paralelo a los vectores $N(s)$ y $B(s)$. Este plano tiene por ecuación

$$(r-r(s))\cdot T(s)=T(s)\cdot(r-r(s))=0$$

$$[(x,y,z)-(x(s),y(s),z(s))]\cdot T(s)=T(s)\cdot[(x,y,z)-(x(s),y(s),z(s))]=0$$

$$\langle x+1,y,z-\pi\rangle\cdot\left\langle 0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2}}y+\frac{1}{\sqrt{2}}(z-\pi)=0\Rightarrow -y+z=\pi$$

Ejemplo 4:

Sea la curva intersección de la superficie $z = xy$ con el cilindro parabólico $y = x^2$. Se pide:

a. En el punto P de coordenadas $(0,0,0)$, obtener la ecuación del plano osculador de la superficie en P y la recta normal a la superficie en V.
b. En el punto P de coordenadas $(0,0,0)$, obtener las proyecciones de la curva sobre los planos del Triedro de Frenet.

Solución:

a. En el punto P de coordenadas $(0,0,0)$, obtener la ecuación del plano osculador de la superficie en P y la recta normal a la superficie en V. Una parametrización de dicha curva es la siguiente:

$$\sigma(t) = (t, t^2, t^3) \quad t \in \mathbb{R}$$

Se tiene

$$\sigma'(t) = (1, 2t, 3t^2) \quad t \in \mathbb{R}$$
$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{14t^2 + 9t^4} \neq 1$$

luego no es la parametrización natural

b. En el punto P de coordenadas $(0,0,0)$, obtener las proyecciones de la curva sobre los planos del Triedro de Frenet.
Hallamos los planos del triedro de Frenet en P. Primero calculamos el vector tangente, el normal y el binormal en P. Tenemos

$$\sigma(t) = (t, t^2, t^3) = (0,0,0) \Rightarrow t = 0, \text{ luego } P = \sigma(0)$$

$$\sigma'(t) = (1, 2t, 3t^2) \quad \sigma''(t) = (0, 2, 6t)$$

Ejemplo 4:

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} = \frac{\left\langle 1, 2t, 3t^2 \right\rangle}{\left\| \left\langle 1, 2t, 3t^2 \right\rangle \right\|} = \frac{\left\langle 1, 2t, 3t^2 \right\rangle}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{\langle 0, 2, 6t \rangle}{\|\langle 0, 2, 6t \rangle\|} = \frac{\langle 0, 2, 6t \rangle}{\sqrt{4 + 36t^2}}$$

$$T(t) \times N(t) = \sigma'(t) \times \sigma''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = \left\langle 6t^2, -6t, 2 \right\rangle$$

al evaluar en $t = 0$ nos queda

$$T(0) = \frac{\langle 1, 0, 0 \rangle}{\sqrt{1}} = \langle 1, 0, 0 \rangle$$

$$N(0) = \frac{\langle 0, 2, 0 \rangle}{\sqrt{4}} = \langle 0, 1, 0 \rangle$$

Tomemos el vector unitario de $T(t) \times N(t)$

$$B(t) = \frac{T(t) \times N(t)}{\|T(t) \times N(t)\|} = \frac{\left\langle 6t^2, -6t, 2 \right\rangle}{\sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4}}$$

$$B(0) = \frac{\langle 0, 0, 2 \rangle}{\sqrt{4}} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

Por tanto, las ecuaciones de los planos del Triedro de Frenet en el punto $P = (0, 0, 0) = r(0)$ son

- Plano osculador: $(r - r(0)) \cdot B(0) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- Plano normal: $(r - r(0)) \cdot T(0) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Plano rectificante: $(r - r(0)) \cdot N(0) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0 \Leftrightarrow y = 0$.

Ejemplo 4:

Luego las proyecciones de la curva sobre los planos del triedro de Frenet son:

- Proyección sobre el **plano osculador**: $\sigma_1(t) = \left\langle t, t^2, 0 \right\rangle, \quad t \in \mathbb{R}$.
  Notese que es la parabola $y = x^2$ en el plano $z = 0$.
- Proyección sobre el **plano normal**: $\sigma_2(t) = \left\langle 0, t^2, t^3 \right\rangle, \quad t \in \mathbb{R}$
- Proyección sobre el **plano rectificante**: $\sigma_3(t) = \left\langle t, 0, t^3 \right\rangle, \quad t \in \mathbb{R}$

Conclusión

Hemos visto cómo calcular los planos osculador, normal y rectificante a través de ejemplos detallados de la curva $r(t) = (t, t^2, t^3)$. Estos planos nos proporcionan información clave sobre la geometría local de una curva en el espacio tridimensional.