Tema 7. Integración de funciones de varias variables

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Integrales dobles

Integración en rectángulos

Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant b\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. La integral de f en el rectángulo A viene dada por

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)d(x,y) &= \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy \right) dx \\ &= \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx \right) dy\end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular el volumen encerrado por la función $f(x, y) = 2x + 4y$ en el rectángulo $A = [0, 2] \times [0, 1]$.

Integración en conjuntos más generales

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Trabajaremos en tres casos distintos

Caso 1: A está limitado por dos rectas y dos funciones de la variable x

Es decir, existen funciones $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ de modo que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \leqslant x \leqslant b,\; g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\}.$$

Entonces podemos calcular la integral de f mediante la fórmula

$$\iint_A f(x, y)d(x, y) = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y)dy \right) dx$$

Ejemplo

Calcular $\iint_A x^2 d(x, y)$ donde A es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$

Integración en conjuntos más generales

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Trabajaremos en tres casos distintos

Caso 2: A está limitado por dos rectas y dos funciones de la variable y

Es decir, existen funciones $g_1, g_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ de modo que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y), \ c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Entonces podemos calcular la integral de f mediante la fórmula

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=g_1(x)}^{x=g_2(x)} f(x, y) dx \right) dy$$

Ejemplos

- Calcular $\iint_A x^2 d(x, y)$ si A es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(0, 1)$
- Calcular $\iint_A \frac{\mathrm{sen}(y)}{y} d(x, y)$ para el mismo A

Integración en conjuntos más generales

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Trabajaremos en tres casos distintos

Caso 3: A es unión finita de conjuntos de los tipos anteriores

Es decir, existen conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ de los tipos 1 y 2 de modo que

$$A = A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

Entonces podemos calcular la integral de f mediante la fórmula

$$\iint_A f(x,y)d(x,y) = \iint_{A_1} f(x,y)d(x,y) + \cdots + \iint_{A_n} f(x,y)d(x,y)$$

Ejemplo

Calcular $\iint_A (x + \mathrm{e}^y)d(x,y)$ donde A es el cuadrado de vértices $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$

Cambio a coordenadas polares

Un punto cualquiera $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lo podemos describir mediante una longitud (la norma de (x, y)) y un ángulo (el argumento o fase de (x, y)):

$$x = \rho\cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad y = \rho\operatorname{sen}(\theta) \qquad \text{con } \rho \geqslant 0, \theta \in [-\pi, \pi]$$

Si definimos $\Phi :]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\to \mathbb{R}^2$ por $\Phi(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta))$, podemos calcular la integral de $f : A \to \mathbb{R}$ como

$$\iint_A f(x, y)d(x, y) = \iint_{\Phi^{-1}(A)} (f \circ \Phi)(\rho, \theta)|J|d(\rho, \theta)$$

$$\text{donde } |J| = \left|\det\left(Jac(\Phi(\rho, \theta))\right)\right| = \rho$$

Cambio a cooordenadas polares

Ejemplos

- $\displaystyle\iint_A (x^2+y^2)d(x,y)$ donde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\leqslant 1\}$
- $\displaystyle\iint_{B((0,0),1)} \sqrt{1-x^2-y^2}\,d(x,y)$
- $\displaystyle\iint_A \sqrt{4-x^2-y^2}\,d(x,y)$ donde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2\leqslant 2y\}$
- $\displaystyle\iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,d(x,y)$ donde $A=[0,1]\times[0,1]$

Integrales triples

Integración en ortoedros

Sea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a_1 \leqslant x \leqslant b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2, a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. La integral de f en A viene dada por

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$$

Ejemplo

Calcular $\iiint_A (2x + 4y + 8z) d(x, y, z)$ donde $A = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$

Integración en conjuntos más generales

Sea $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \in B \subset \mathbb{R}^2, \ g_1(x, y) \leqslant z \leqslant g_2(x, y)\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. La integral de f en A viene dada por

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_B \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y)$$

Ejemplo

Calcular $\iiint_A d(x, y, z)$ donde
$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leqslant 1, \ 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\}$

Aplicaciones de la integral

Área Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, el área de A viene dada por

$$\iint_A 1 d(x,y)$$

Volumen Sea $B \subset \mathbb{R}^3$, el volumen de B viene dado por

$$\iiint_B 1 d(x,y,z)$$

Masa Supongamos que $f : B \to \mathbb{R}$ proporciona la densidad en cada punto de B. Entonces la masa de B viene dada por

$$\iiint_B f(x,y,z) d(x,y,z)$$

Cambio a coordenadas esféricas

Un punto cualquiera $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lo podemos describir mediante una longitud (la norma de (x, y, z)) y dos ángulos:

$$x = \rho\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \qquad z = \rho\cos(\phi)$$

con $\rho \geqslant 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\phi \in [0, \pi]$

Si definimos $\Psi :]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[\times]0, \pi[\to \mathbb{R}^3$ por $\Psi(\rho, \theta, \phi) = (\rho\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi), \rho\cos(\phi))$, podemos calcular la integral de $f : A \to \mathbb{R}$ como

$$\iiint_A f(x, y, z)d(x, y, z) = \iiint_{\Psi^{-1}(A)} (f \circ \Psi)(\rho, \theta, \phi)|J|d(\rho, \theta, \phi)$$

$$\text{donde } |J| = \left|\det\left(Jac(\Psi(\rho, \theta, \phi))\right)\right| = \rho^2\,\mathrm{sen}(\phi)$$