Cálculo I

4.2. Aplicaciones de las Derivadas: A Extremos de Funciones

Julio C. Carrillo E.*

Índice

*Profesor Escuela de Matemáticas, UIS.

1. Introducción

En esta sección se aborda el problema de encontrar los valores máximo y mínimo de una función f en un intervalo I. Estos valores, llamados los extremos de f, tiene aplicaciones en el trazado de gráficas de funciones y en problemas de optimización.

2. Extremos absolutos, relativos y de frontera

Definición 1 (*Extremos absolutos*)**.** Sea f una función cuyo dominio es el conjunto D, y c un número en D.

1. Se dice que f tiene un *máximo absoluto* (o *máximo global*) en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en D. El número $f(c)$ se llama el (valor) *máximo* de f en D. En tal caso, $(c, f(c))$ es el *punto más alto* de la gráfica de f.

2. Se dice que f tiene un *mínimo absoluto* (o *mínimo global*) en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D. El número $f(c)$ se llama el (valor) *mínimo* de f en D. En tal caso, $(c, f(c))$ es el *punto más bajo* de la gráfica de f.

3. Los valores máximo y mínimo (absolutos) de f se conocen como los *extremos globales o absolutos* de f.

Las definiciones anteriores es posible que también se cumplan únicamente en *cercanías* o en la *localidad* o en la *vecindad* del punto c. Es decir, que las anteriores definiciones sean relativas a donde se encuentran localizados los números x con respecto a c. Estas noción de cercanía se define a continuación.

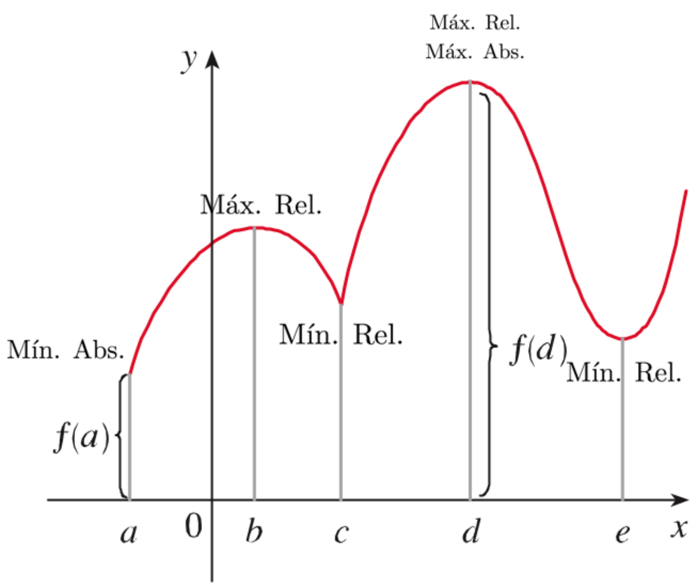
Definición 2 (*Vecindad de un punto*). Se dice que x *está cercano* a c si existe un intervalo abierto I que contiene a c y además I está contenido en D; es decir, x *está cercano* a c si existe un intervalo abierto I tal que $c \in I \subset D$. En este caso, se dice que I es una *vecindad* de c y que está en una vecindad de c.

Definición 3 (*Extremos relativos*). Sea f una función cuyo dominio es el conjunto D, y c un número en D.

1. Se dice que f tiene un *máximo relativo* (o *máximo local*) en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x cercano a c. El número $f(c)$ se llama un *máximo relativo o local* de f en D.

2. Se dice que f tiene un *mínimo relativo* (o *mínimo global*) en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x cercano a c. El número $f(c)$ se llama un *mínimo relativo o local* de f en D.

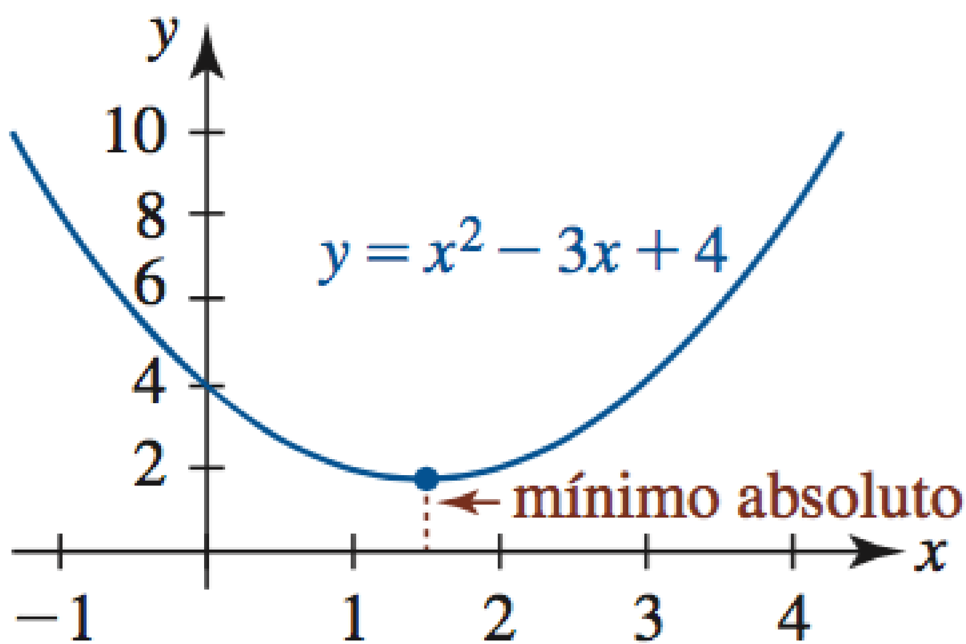
3. Los valores máximo y mínimo relativos o locales de f se conocen como los *extremos relativos o locales* de f.



$f(a)$ y $f(b)$ son extremos absolutos;
$f(a)$ es mínimo absoluto;
$f(d)$ es máximo absoluto;
$f(b)$, $f(c)$, $f(d)$ y $f(e)$ son extremos relativos;
$f(c)$ y $f(e)$ son mínimos relativos;
$f(b)$ y $f(d)$ son máximos relativos;
$f(d)$ es máximo absoluto y relativo.

Ejemplo 1 (*Extremos absolutos*).

1. $f(x) = x^2 - 3x + 4$ tiene un extremos absoluto $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{7}{4}$; tal valor es mínimo relativo y absoluto de la función.



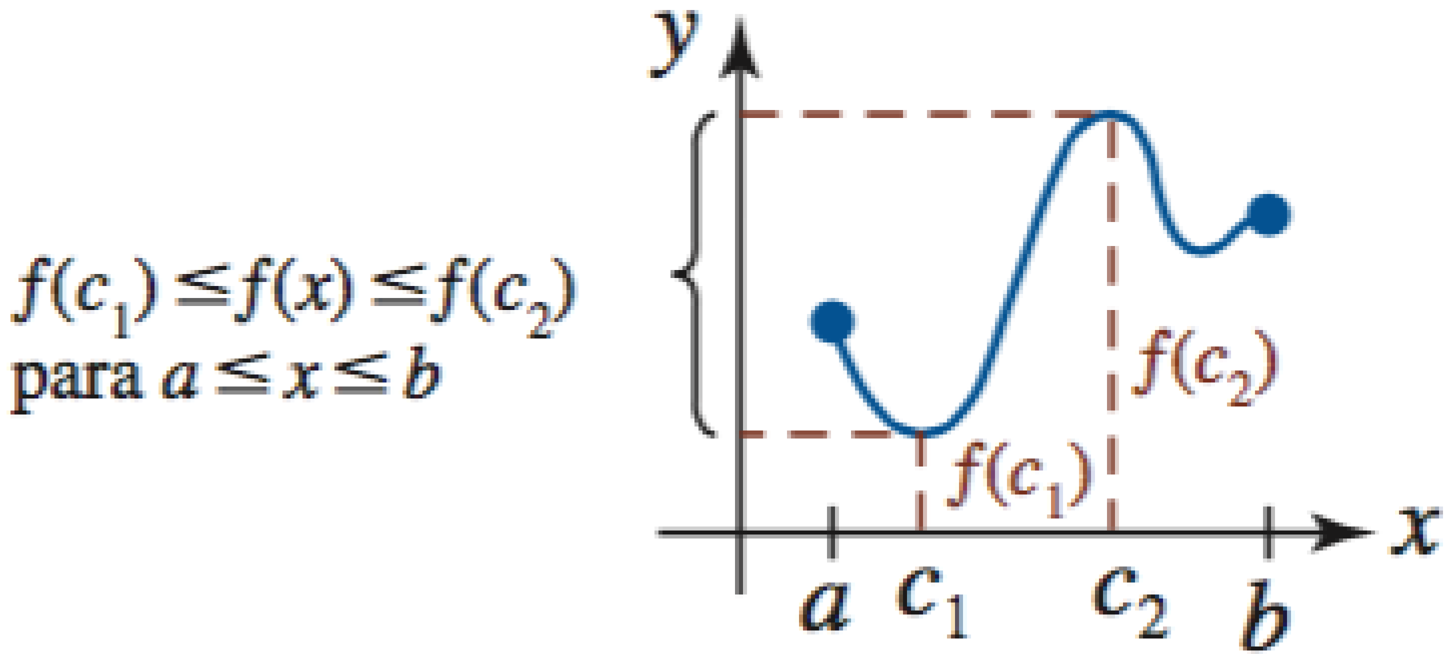
2. Para $f(x) = \operatorname{sen} x$, por periodicidad, sus valores máximo y mínimo absolutos ocurren en $x = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ y $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi$, con n un número entero, respectivamente.

3. Existencia de extremos absolutos

El siguiente teorema *garantiza la existencia de los extremos absolutos* de una función.

Teorema 1 (Teorema del valor extremo). *Una función f continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ siempre tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto sobre el intervalo. Es decir, existen dos números reales $c_1, c_2 \in [a, b]$ tales que $f(c_1)$ es el máximo absoluto de f y $f(c_2)$ es el mínimo absoluto de f:*

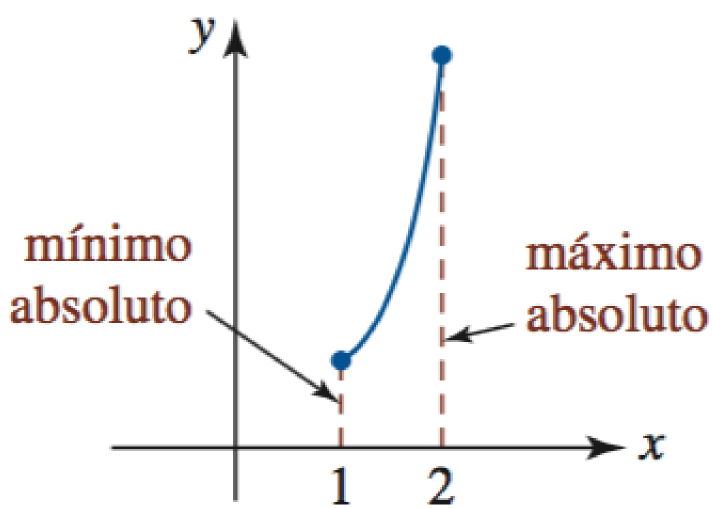
$$f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2).$$



En intervalos que no sean cerrados y aún la función sea continua, no se garantiza la existencia de extremos absolutos de la función.

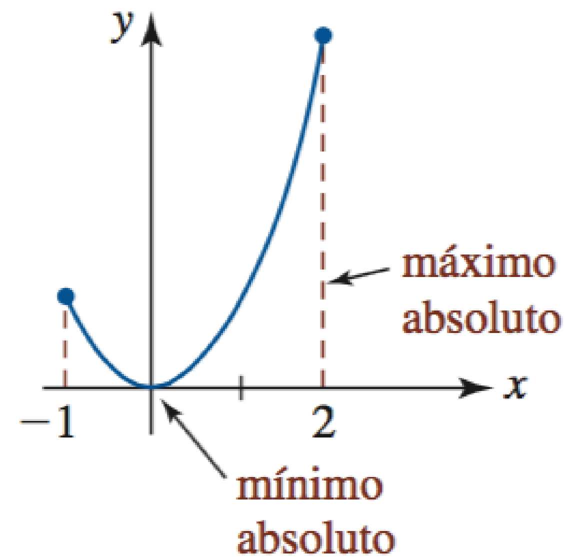
Ejemplo 2 (*Existencia de extremos absolutos en intervalos*)**.** Sea $f(x) = x^2$.

1. f en el intervalo $[1, 2]$ tiene un máximo absoluto en $f(2) = 4$ y un mínimo absoluto en $f(1) = 1$.



2. f en el intervalo abierto $(1, 2)$ no tiene extremos absolutos. En este caso $f(1)$ y $f(2)$ no están definidos.

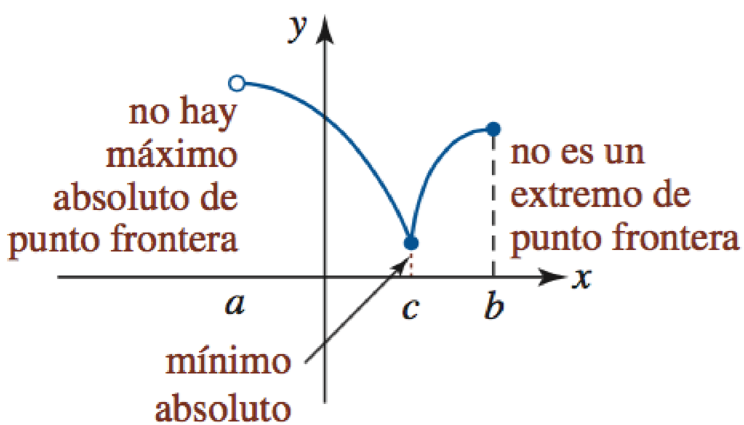
3. f en el intervalo cerrado $[-1, 2]$ tiene un máximo absoluto en $f(2) = 4$ y un mínimo absoluto $f(0) = 0$, el cual ocurre en un punto x del interior del intervalo $[-1, 2]$.



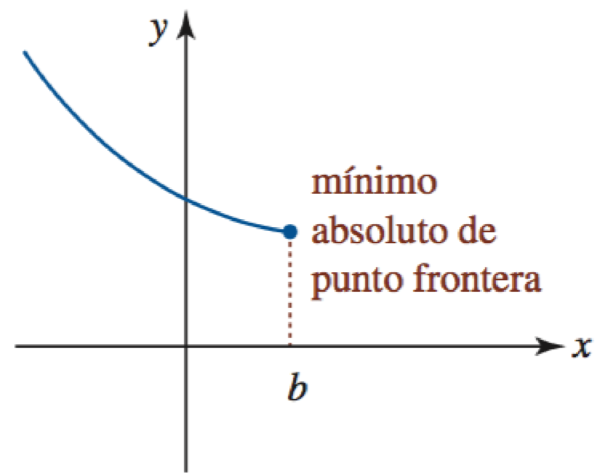
4. f en el intervalo abierto $(-1, 2)$ no tiene un máximo absoluto, pues $f(2)$ no existe, y un mínimo absoluto $f(0) = 0$.

Definición 4 (*Extremo en un punto frontera*)**.** Cuando un extremo absoluto de una función f ocurre en un punto frontera de un intervalo cerrado I, se dice que se trata de un *extremo de punto frontera*.

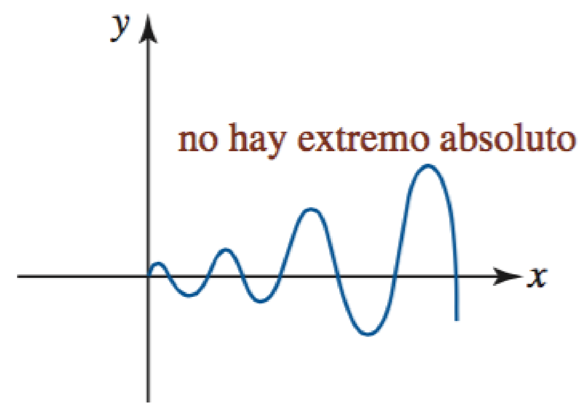
Cuando I no es un intervalo cerrado; es decir, cuando I es un intervalo como $(a, b]$, $(-\infty, b]$ o $[a, \infty)$, entonces aunque f sea continua en I no hay garantía de que f tenga un extremo absoluto.



a) *f* definida sobre (*a*, *b*]



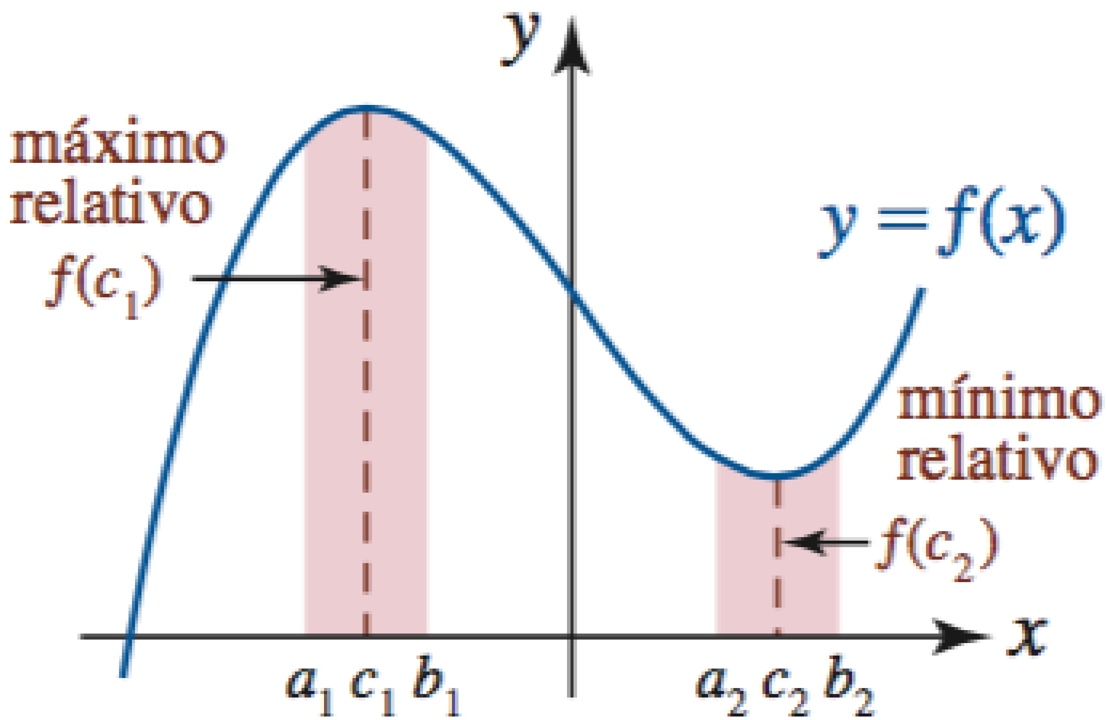
b) *f* definida sobre (−∞, *b*]



c) *f* definida sobre [0, ∞)

Ejemplo de una función f que es continua en un intervalo y que no tiene ningún extremo absoluto; no obstante tiene extremos relativos.

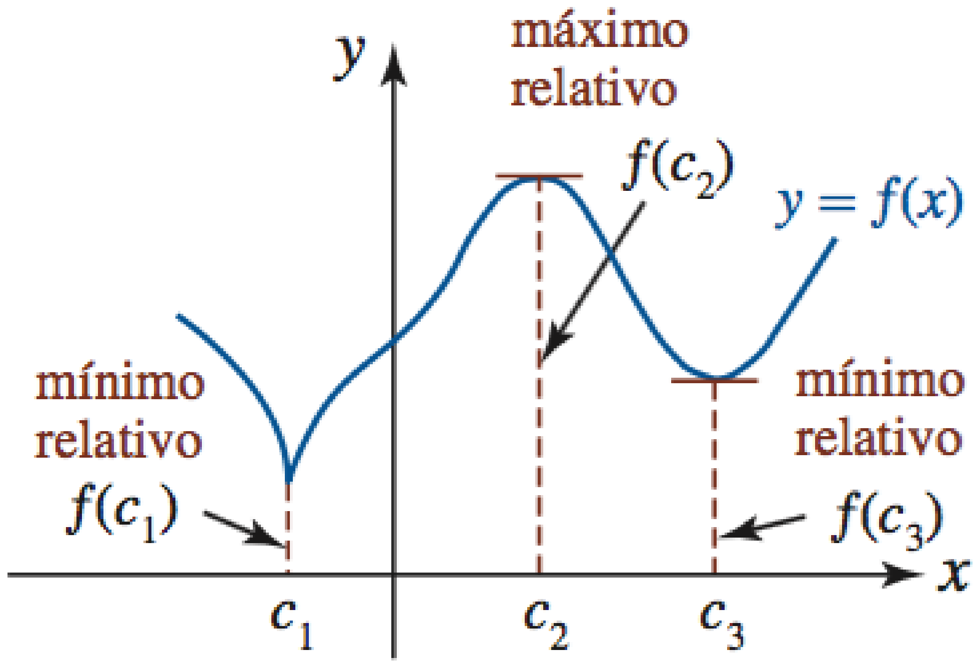
Ejemplo 3 (*Extremos relativos*)**.** Para la $f(x) = x^3 - 5x + 8$, se tiene que su comportamiento final es $\lim_{x\to\pm i\infty} f(x) = \pm\infty$, por lo cual f no tiene extremos absolutos. No obstante esta función tiene extremos relativos en $f(c_1)$ y $f(c_2)$. En este caso, $f(c_1)$ es un máximo relativo y $f(c_2)$ es un mínimo relativo.



Observación 1. *Si f es continua en todo su dominio* entonces todo extremo absoluto, con excepción de un extremo de un punto frontera, también es un extremo relativo.

4. Existencia de los extremos relativos

Veamos cómo se encuentra la ubicación exacta y el valor exacto de los extremos de una función, para lo cual es fundamental la noción de derivada. Las siguiente figura sugiere que un número c en el que la función f tiene un extremo relativo, entonces la tangente es horizontal en el punto $(c, f(c))$sucede una de las dos: $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. Este número c recibe un nombre especial.



f es continua en su dominio; $f'(c_1)$ no existe, $f'(c_2)$ y $f'(c_3)$ existen.

Definición 5 (*Número crítico*)**.** Se dice que c es un *número crítico* de una función f si c es un número de su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Ejemplo 4. Encuentre los números crítico de la función $f(x) = x \ln x$.

Solución. El domino de f está dado por todos los números $x > 0$. Entonces $f'(x) = x\dfrac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x = 0$ cuando $\ln x = -1$, es decir, cuando $x = e^{-1}$. Este número es el único punto crítico de f. $\square$

Ejemplo 5. Encuentre los puntos críticos de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Solución. El domino de f está dado por los números reales $x \neq 0$. Dado que

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2},$$

entonces,

1. $f'(x) = 0$ si $x(x-1) = 0$, es decir, si $x = 0$ o $x = 2$.

2. $f'(x)$ no existe cuando $(x-1)^2 = 0$, es decir, si $x = 1$.

Ahora bien, como de estos números $x = 1$ es el único que no está en el dominio de f entonces se tiene que los únicos números críticos de f son $x = 0, 2$. $\square$

Ejemplo 6. Encuentre los números críticos de la función $f(x) = |x|$.

Solución. El dominio de f esto todo $\mathbb{R}$. Ahora bien, para $x > 0$, $f'(x) = 1$ y para $x < 0$, $f'(x) = -1$. Esto hace que para $x \neq 0$ la derivada que f nunca se anule. Luego f no tiene ningún número crítico en los reales $x \neq 0$. Como $f'(0)$ no existe y $x = 0$ está en dominio de f entonces $x = 0$ es el único punto crítico de $f(x) = |x|$. $\square$

El siguiente teorema establece la primera relación entre extremos relativos de una función con sus números críticos.

Teorema 2 (*Teorema de Fermat: los extremos relativos ocurren en números críticos*)**.** *Si una función f tiene un extremo relativo en $x = c$ y $f'(c)$ existe, entonces $x = c$ es un número crítico de f. De hecho, será un número crítico de f en el cual $f'(c) = 0$.*

Ejemplo 7. La función $f(x) = x^2$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

Para el caso que la función sea continua sobre un intervalo cerrado, se ha visto que ella tiene tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. El siguiente teorema indica dónde ocurren estos extremos.

Teorema 3 (*Determinación de extremos absolutos*)**.** *Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces un extremo absoluto ocurre ya sea en un punto frontera del intervalo o en un número crítico c en el intervalo abierto (a, b).*

Según éste teorema, las directrices para encontrar los extremos de una función en un intervalo cerrado son las siguientes:

1. Verificar que f es continua en el intervalo $[a, b]$.
2. Evaluar f en los puntos frontera a y b del intervalo $[a, b]$.
3. Encontrar todos los números críticos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en el intervalo abierto (a, b).
4. Evaluar f en todos los números críticos.
5. El mayor y menor de los valores en la lista

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(b),$$

son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, de f sobre el intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 8. Encuentre los extremos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ en el intervalo $[-3, 1]$.

Solución. El dominio de f es el intervalo $[-3, 1]$.

1. Debido a que f es un polinomio entonces f es una función continua en todo $\mathbb{R}$, en particular es continua en el intervalo $[-3, 1]$, su dominio.
2. Al evaluar a f en los extremos del intervalo $[-3, 2]$ se tiene que $f(-3) = 20$ y $f(1) = -24$.

3. En este caso
$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4) = 0$$
si $x = -2$ y $x = 4$. Solo de estos dos valores, $x = -2$ está en el domino de f. Por lo tanto, $x = -2$ es el único punto crítico de f en el intervalo abierto $(-3, 2)$. Además, $f(-2) = 30$.

4. El mayor de los valores $f(-3), f(-2), f(1)$ es $f(1) = -24$, y el mayor valor es $f(-2) = 30$. Por lo tanto, $f(1) = -24$ es el mínimo absoluto de f en $[-3, 2]$ y $f(-2) = 30$ es el máximo absoluto de f en $[-3, 2]$. $\square$