Diapositivas: Curso de Cálculo Vectorial con GeoGebra. Integrales dobles

Presentation · July 2020

DOI: 10.13140/RG.2.2.17824.20480

Jeovanny De Jesus Muentes Acevedo
Universidad Tecnológica de Bolívar

Integrales dobles

Jeovanny Muentes Acevedo

Universidad Tecnológica de Bolívar

10 de abril de 2023

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

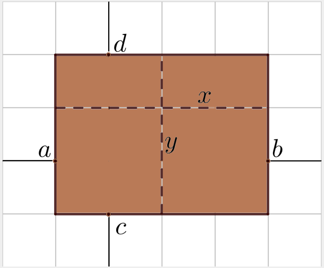
Universidad Tecnológica de Bolívar
CARTAGENA DE INDIAS

Definición (Región rectangular)

Sean a, b, c, d números reales tales que $a < b$ y $c < d$. El conjunto

$$\boxed{[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}}$$

se refiere al rectángulo mostrado en la Figura 1(a).



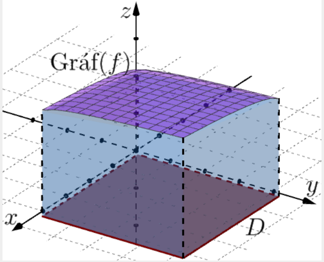


Figura 1: (a) Rectángulo [a,b] × [c,d]

Sea $f : D = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$. Sea S el sólido limitado por la región D, considerado como subconjunto de $\mathbb{R}^3$, y el gráfico de f

Dividamos el intervalo $[a,b]$ en m subintervalos de igual longitud $[a,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{m-1},b]$. Llamemos por Δx la longitud de estos subintervalos (note que $\Delta x = \frac{b-a}{m}$). De igual forma, dividamos el intervalo $[c,d]$ en n subintervalos de igual longitud $[c,y_1],[y_1,y_2],\ldots,[y_{n-1},d]$. Llamemos por Δy la longitud de estos subintervalos (note que $\Delta y = \frac{d-c}{n}$).

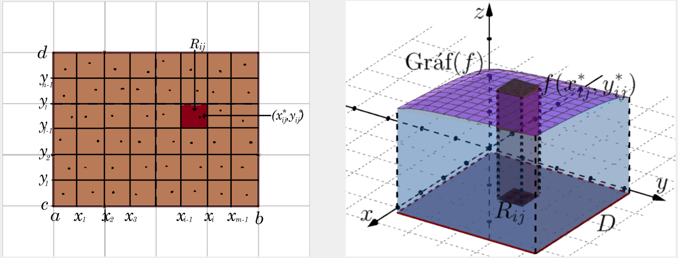


Figura 2: División del rectángulo D en subrectángulos

Sea $R_{ij} = [x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$. Cada R_{ij} tiene área $\Delta A = \Delta x\Delta y$. Tome $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$. La caja rectangular mostrada en la figura tiene base R_{ij} y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, por lo tanto su volumen es

$$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y = f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$

Si V es el volumen del sólido, tenemos:

$$V \approx \sum_{j=1}^{n} f(x_{1j}^*, y_{1j}^*)\Delta A + \cdots + \sum_{j=1}^{n} f(x_{mj}^*, y_{mj}^*)\Delta A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A.$$

Luego, $V = \lim\limits_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$.

Definición (10.1.1)

Definimos

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A}$$

y es llamada ***integral doble de*** f *en* $D = [a,b] \times [c,d]$.

Definición (10.1.4)

Si $f(x,y) \geq 0$ *para todo* $(x,y) \in D$, *sea* S *el sólido que tiene como base a la región* D *en el plano* xy *y está limitado por arriba por el gráfico de* $z = f(x,y)$. *Entonces el volumen* $V(S)$ *del sólido* S *es dado por*

$$\boxed{V(S) = \iint_D f(x,y)dA.}$$

Teorema (**Teorema de Fubini**)

Suponga que $f(x,y)$ *es una función continua en un rectángulo* $D=[a,b]\times[c,d]$. *Entonces*

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dA=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.}$$

Ejemplo (10.1.6)

Calcular la integral doble de $f(x,y)=6x^2y-2x-4y$ *en el rectángulo* $[0,1]\times[0,2]$.
Solución: *Tenemos que*

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^2(6x^2y-2x-4y)dydx&=\int_0^1[3x^2y^2-2xy-2y^2]|_0^2dx=\int_0^1[12x^2-4x-8]dx\\&=[4x^3-2x^2-8x]|_0^1=-6.\end{aligned}$$

El lector puede verificar que

$$\int_0^2\int_0^1(6x^2y-2x-4y)dxdy=-6.$$

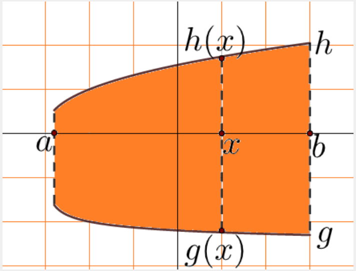
Integrales dobles en regiones tipo I y II

Definición (**Regiones tipo I**)

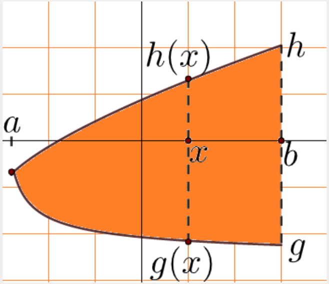
*Decimos que una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es **tipo I** si es de la forma*

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},}$$

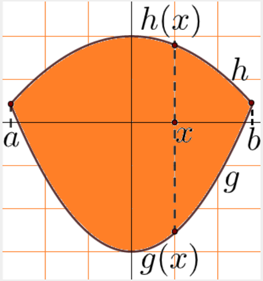
donde g y h son funciones continuas en $[a, b]$ con $g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in [a, b]$.



(a) Gráficos de g y h no se intersecan



(b) Gráficos de g y h se intersecan en un punto



(c) Gráficos de g y h se intersecan en dos puntos

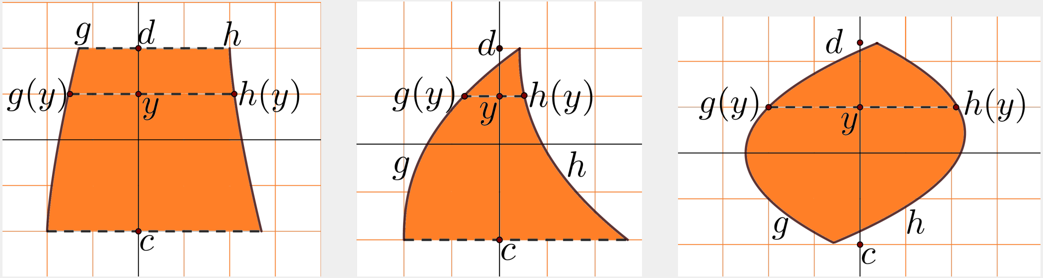
Figura 3: Regiones tipo I

Definición (**Regiones tipo II**)

*Decimos que una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es **tipo II** si es de la forma*

$$\boxed{D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\},}$$

donde g y h son funciones continuas en $[c, d]$ con $g(y) \leq h(y)$ para todo $y \in [c, d]$.



(a) Gráficos de g y h no se intersecan

(b) Gráficos de g y h se intersecan en un punto

(c) Gráficos de g y h se intersecan en dos puntos

Figura 4: Regiones tipo II

Proposición (10.2.3 y 10.2.5)

Sea $f : D \to \mathbb{R}$ *continua en una región* D *en* $\mathbb{R}^2$*.*

- *Si* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ *es una región tipo I, entonces*

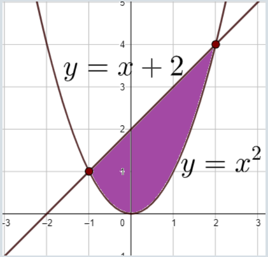
$$\boxed{\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx.}$$

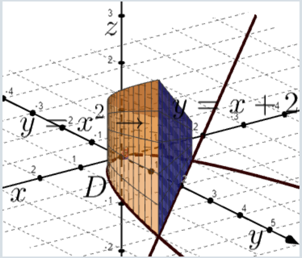
- *Si* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq h(y)\}$ *una región tipo II, entonces*

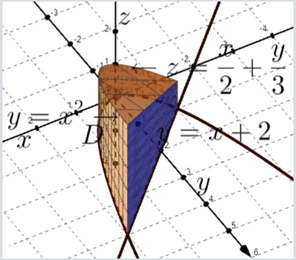
$$\boxed{\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)dxdy.}$$

Ejemplo (10.2.6)

Sea D la región limitada por las curvas $y = x + 2$ y $y = x^2$. Calcule $\iint_D (\frac{x}{2} + \frac{y}{3}) dA$.







Solución: *Hallemos las intersecciones de las dos curvas para determinar la región de integración D. Igualamos las dos ecuaciones $y = x + 2$ y $y = x^2$:*

$$x + 2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1 \text{ o } x = 2.$$

Note que $x^2 \leq x + 2$ para todo $x \in [-1, 2]$. Tomando $g(x) = x^2$ y $h(x) = x + 2$ como en la Definición 0.6, se sigue que D es una región tipo I:

$$D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x + 2\}.$$

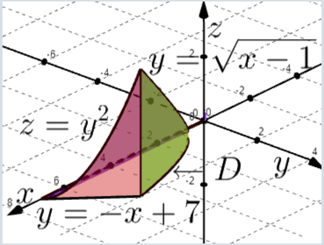
Ejemplo

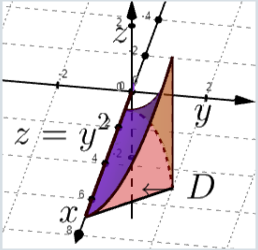
Por Proposición 10.2.3, tenemos

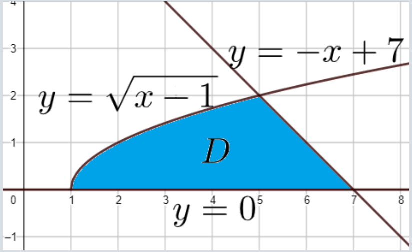
$$\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right) dA &= \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} \left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right) dydx = \int_{-1}^{2} \left[\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{6}\right]_{x^2}^{x+2} dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[\frac{x(x+2)}{2}+\frac{(x+2)^2}{6}\right] - \left[\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}\right] dx \\
&= \int_{-1}^{2} \left[\frac{2x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{2}{3}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{6}\right] dx \\
&= \left[\frac{2x^3}{9}+\frac{5x^2}{6}+\frac{2x}{3}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{30}\right]_{-1}^{2} = \frac{141}{40}.
\end{aligned}$$

Ejemplo (10.2.10)

Calcular el volumen del sólido S que se encuentra limitado por las superficies $y = \sqrt{x-1}$, $z = y^2$, y los planos $y = -x + 7$ y $z = 0$.







Solución: *La superficie $z = y^2$ limita por encima a S, así el volumen de S es dado por*

$$V(S) = \iint_D y^2 dA, \quad \textit{donde } D \textit{ es la base del sólido.}$$

Para describir D, hallemos la intersección entre $y = \sqrt{x-1}$ y $y = -x + 7$. Igualando:

$$\sqrt{x-1} = -x+7 \rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (-x+7)^2 \rightarrow x-1 = x^2-14x+49 \rightarrow x^2-15x+50 = 0,$$

Ejemplo

de donde $(x-5)(x-10)=0$ *y así* $x=5$ *o* $x=10$. *Descartamos la solución* $x=10$, *ya que en este caso la recta* $y=-x+7$ *pasa por el punto* $(10,-3)$, *sin embargo la curva* $y=\sqrt{x-1}$ *no toma valores negativos para* y. *La curva* $y=\sqrt{x-1}$ *se encuentra a la izquierda de la recta* $y=-x+7$, *por lo tanto* D *es una región tipo II, donde* y *varía entre 0 y 2. Para describir* D *como región tipo II, tenemos que despejar a* x *en función de* y *en las ecuaciones* $y=\sqrt{x-1}$ *y* $y=-x+7$:

$$x=y^2+1 \qquad \text{y} \qquad x=-y+7.$$

En consecuencia,

$$D=\{(x,y):0\leq y\leq 2, y^2+1\leq x\leq -y+7\}.$$

Luego,

$$V(S)=\iint_D y^2dA=\int_0^2\int_{y^2+1}^{-y+7}y^2dxdy\int_0^2 y^2x|_{y^2+1}^{-y+7}dy=\int_0^2 y^2[(-y+7)-(y^2+1)]dy$$

$$=\int_0^2(-y^3+6y^2-y^4)dy=\left[-\frac{y^4}{4}+2y^3-\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{28}{5}.$$

Ejemplo (10.2.8)

Calcular $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}dydx$.

Solución: *Note que el calculo de la integral* $\int \sqrt{1+y^3}dy$ *resulta complicada. En este caso tenemos que la región de integración* $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$ *está escrita como una región tipo I.*

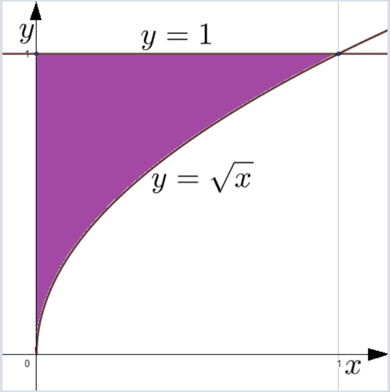


Figura 5: $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$

Ejemplo

En la Figura 5 podemos notar que D *es también tipo II: en este caso,* $0 \leq y \leq 1$ *y* x *está limitado a la izquierda por la recta* $x = 0$ *y a la derecha por la curva* $y = \sqrt{x}$*, de donde obtenemos que* $x = y^2$*, así* $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\}$*, como podemos ver en la figura. Luego*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}dydx = \iint_D \sqrt{1+y^3}dA &= \int_0^1 \int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\sqrt{1+y^3}x\right]_0^{y^2} dy = \int_0^1 \sqrt{1+y^3}y^2dy = \left[\frac{2}{9}(1+y^3)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{9}[2^{\frac{3}{2}} - 1] = \frac{2}{9}[2\sqrt{2} - 1],
\end{aligned}$$

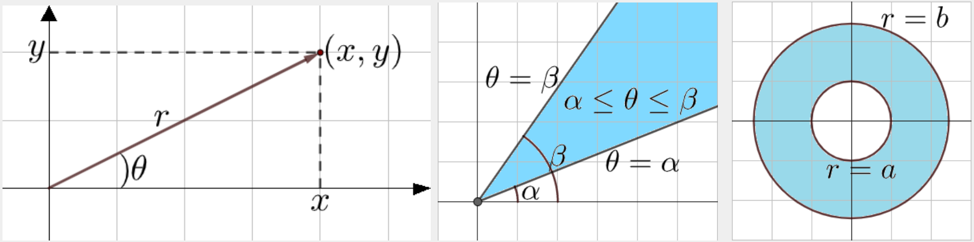
en donde hemos usado la sustitución $u = 1 + y^3$ *para calcular la última integral.*

Integrales dobles en regiones polares

Para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ (ver Figura 6a), tenemos que

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta.}$$

El par (r,θ) es llamado **coordenadas polares** del punto (x,y).



(a) Coordenadas polares

(b) $\alpha \leq \theta \leq \beta$

(c) $a \leq r \leq b$

Figura 6: Regiones polares

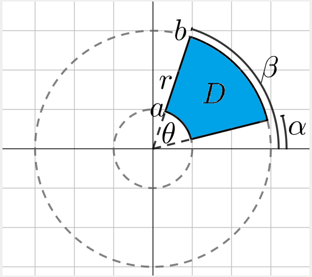
La ecuación $\theta = \alpha$, donde α es una constante en el intervalo $[0, 2\pi]$, representa una semirrecta en el plano que inicia desde el origen: $\theta = \alpha$ consiste de todos los puntos en el plano cuyo ángulo con el semieje x positivo es igual a α. Así, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ corresponde a una región en el plano limitada por dos semirrectas que inician desde el origen (ver Figura 6b).

Dado que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, la ecuación $r = a$, donde a es una constante positiva, representa la circunferencia de radio a y centro en el origen, $x^2 + y^2 = a$. En consecuencia, $a \leq r \leq b$, con $0 < a < b$, corresponde a la región anular en el plano que se encuentra entre las circunferencias de radio a y radio b (ver Figura 6c).

Definición (**Región polar**)

*Sean a, b números reales positivos con $a < b$ y α, β, con $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$. Tomando $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, una **región polar** D es aquella que podemos escribir en coordenadas polares como*

$$\boxed{D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.}$$



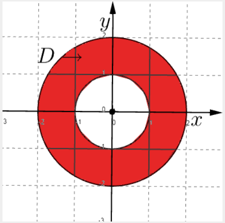
Corolario (**Integrales dobles con coordenadas polares**)

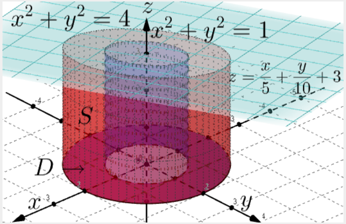
Si f es una función continua en una región polar $D = \{(r,\theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_\alpha^\beta r f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)d\theta dr = \int_\alpha^\beta \int_a^b r f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)drd\theta.}$$

Ejemplo (10.5.4)

Calcule el volumen del sólido S limitado por los cilindros $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ y los planos $z=0$, $z=\frac{x}{5}+\frac{y}{10}+3$.





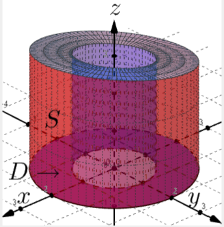


Figura 7: Sólido S

Solución: Las intersecciones de las superficies $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$ con el plano $z=0$ determinan la base del sólido. Así, la base de S es una región polar: $1\leq x^2+y^2\leq 4$. Tomando $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, tenemos que la base D del sólido es dada por

$$D=\{(r,\theta):1\leq r\leq 2, 0\leq\theta\leq 2\pi\}.$$

Sea $f(x,y)=\frac{x}{5}+\frac{y}{10}+3$. Entonces

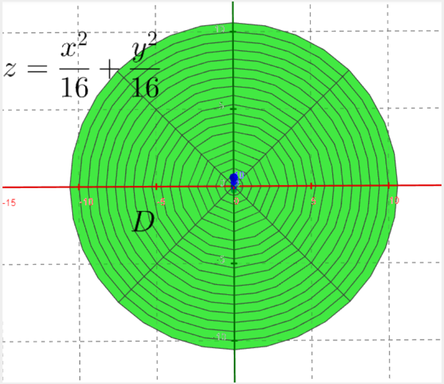
$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)=\frac{r}{5}\cos\theta+\frac{r}{10}\operatorname{sen}\theta+3.$$

Luego

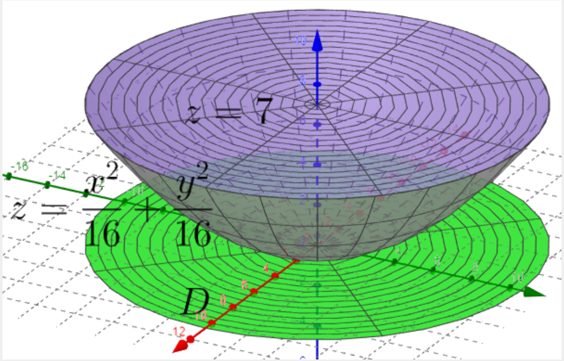
$$\begin{aligned}
V(S)=\iint_D f(x,y)dA &= \int_1^2\int_0^{2\pi} rf(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)d\theta dr\\
&=\int_1^2\int_0^{2\pi} r\left[\frac{r}{5}\cos\theta+\frac{r}{10}\operatorname{sen}\theta+3\right]d\theta dr\\
&=\int_1^2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{5}\cos\theta+\frac{r^2}{10}\operatorname{sen}\theta+3r\right]d\theta dr\\
&=\int_1^2\left[\frac{r^2}{5}\operatorname{sen}\theta-\frac{r^2}{10}\cos\theta+3r\theta\right]_0^{2\pi}dr=\int_1^2 6\pi r dr=3\pi r^2|_1^2=9\pi.
\end{aligned}$$

Ejemplo (10.5.5)

Calcule el volumen del sólido S limitado por el paraboloide $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16}$ y el plano $z = 7$.



(a) Región de integración



(b) Sólido limitado por $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16}$ y $z = 7$

Figura 8

Solución: La intersección del plano $z = 7$ y el paraboloide $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16}$ es la circunferencia de ecuación $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 7$, o bien, $x^2 + y^2 \leq 112$, en el plano $z = 7$. Por lo tanto, la proyección del sólido S en el plano xy (considerando esta como subconjunto de $\mathbb{R}^2$) es

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 112\} = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{112} = 4\sqrt{7}\},$$

donde $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Tenemos que el volumen de S es dado por

$$\begin{aligned}
V(S) &= \iint_D \left[7 - \left(\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16}\right)\right] dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{4\sqrt{7}} r\left[7 - \left(\frac{(r\cos\theta)^2}{16} + \frac{(r\operatorname{sen}\theta)^2}{16}\right)\right] drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{4\sqrt{7}} r\left[7 - \frac{r^2}{16}\right] drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{4\sqrt{7}} \left[7r - \frac{r^3}{16}\right] drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{7}{2}r^2 - \frac{r^4}{64}\right]_0^{4\sqrt{7}} d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{7}{2}(4\sqrt{7})^2 - \frac{(4\sqrt{7})^4}{64}\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} [392 - 196] d\theta = \int_0^{2\pi} 196 d\theta = 392\pi.
\end{aligned}$$