Teorema fundamental de la teoría local de curvas

Presentation · May 2021

DOI: 10.13140/RG.2.2.29787.49442

Jeovanny De Jesus Muentes Acevedo
Universidad Tecnológica de Bolívar

Funciones Vectoriales y curvas en el espacio

Jeovanny Muentes Acevedo

Universidad Tecnológica de Bolívar

15 de mayo de 2021

Dale click al siguiente link para accesar a la lista de videos de este capítulo en el canal de Youtube **Curso de Cálculo Vectorial con Geogebra:**

«Funciones vectoriales y curvas»

Longitud de arco

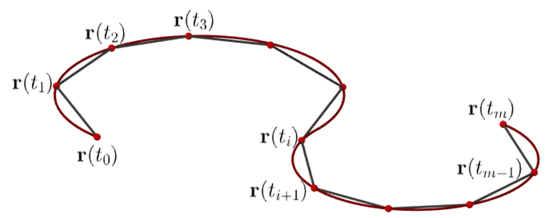


Figura 0.1: Longitud de curva

Definición (**Longitud de arco**)

Si $\mathbf{r}(t) = \langle x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\rangle$*, con* $t \in I = [a,b]$*, es una parametrización de la curva* C *tal que las derivadas de las funciones componentes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *existen y son continuas en todo el intervalo* $[a,b]$*, entonces la* ***longitud*** *de la curva* C *es dada por*

$$\boxed{L(C) = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}dt.}$$

Ejemplo

Obtenga la distancia recorrida por una partícula que se desplaza en forma de la hélice obtenida de $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, t\rangle$, *para* $t \in [0, 4\pi]$.

Ejemplo

Obtenga la distancia recorrida por una partícula que se desplaza en forma de la hélice obtenida de $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\,t, t\rangle$, *para* $t \in [0, 4\pi]$.

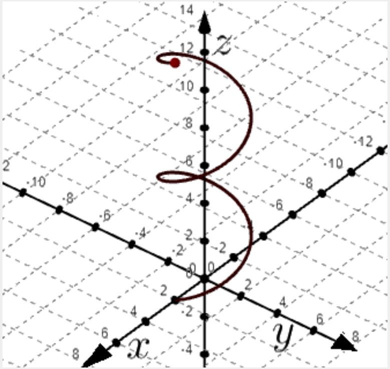


Figura 0.2

Ejemplo

Solución: *Dado que*

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\operatorname{sen} t \quad \text{y} \quad z(t) = t,$$

Ejemplo

Solución: *Dado que*

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\,\mathrm{sen}\, t \quad \text{y} \quad z(t) = t,$$

tenemos

$$x'(t) = -2\,\mathrm{sen}\, t, \quad y'(t) = 2\cos t \quad \text{y} \quad z'(t) = 1.$$

Ejemplo

Solución: *Dado que*

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = 2\,\mathrm{sen}\, t \quad \text{y} \quad z(t) = t,$$

tenemos

$$x'(t) = -2\,\mathrm{sen}\, t, \quad y'(t) = 2\cos t \quad \text{y} \quad z'(t) = 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{[-2\,\mathrm{sen}\, t]^2 + [2\cos t]^2 + [1]^2}dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2 t + 4\cos^2 t + 1}dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{4(\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t) + 1}dt \\ &= \int_0^{4\pi} \sqrt{4+1}dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{5}dt = \sqrt{5}t|_0^{4\pi} = \sqrt{5}(4\pi) = 4\sqrt{5}\pi. \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean a y b números reales positivos. Calcular la longitud de la espiral obtenida de $\mathbf{r}(t) = \langle ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\operatorname{sen} t\rangle$, con $t \in [0, 4\pi]$.

Ejemplo

Sean a y b números reales positivos. Calcular la longitud de la espiral obtenida de $\mathbf{r}(t) = \langle ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\operatorname{sen} t\rangle$, con $t \in [0, 4\pi]$.

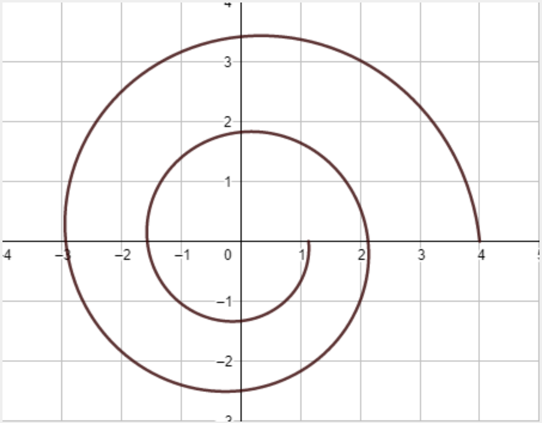


Figura 0.3: $\langle ae^{-bt}\cos t, ae^{-bt}\operatorname{sen} t\rangle$, $a = 4$ $b = 0.1$

Ejemplo

Solución: *Tenemos que* $x(t) = ae^{-bt}\cos t$ *y* $y(t) = ae^{-bt}\operatorname{sen} t$, *luego*

$$x'(t) = -ae^{-bt}(b\cos t + \operatorname{sen} t) \qquad \text{y} \qquad y'(t) = ae^{-bt}(\cos t - b\operatorname{sen} t).$$

Ejemplo

Solución: *Tenemos que* $x(t) = ae^{-bt}\cos t$ *y* $y(t) = ae^{-bt}\operatorname{sen} t$*, luego*

$$x'(t) = -ae^{-bt}(b\cos t + \operatorname{sen} t) \qquad y \qquad y'(t) = ae^{-bt}(\cos t - b\operatorname{sen} t).$$

Así,

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{4\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \\
&= \int_0^{4\pi} \sqrt{[-ae^{-bt}(b\cos t + \operatorname{sen} t)]^2 + [ae^{-bt}(\cos t - b\operatorname{sen} t)]^2}dt \\
&= \int_0^{4\pi} ae^{-bt}\sqrt{(b\cos t + \operatorname{sen} t)^2 + (\cos t - b\operatorname{sen} t)^2}dt \\
&= \int_0^{4\pi} ae^{-bt}\sqrt{b^2\cos^2 t + 2b\cos t\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - 2b\cos t\operatorname{sen} t + b^2\operatorname{sen}^2 t}dt \\
&= \int_0^{4\pi} ae^{-bt}\sqrt{b^2+1}dt = a\sqrt{b^2+1}\int_0^{4\pi} e^{-bt}dt = -\frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}e^{-bt}\Big|_0^{4\pi} \\
&= \frac{a}{b}\sqrt{b^2+1}(1 - e^{-4\pi b}).
\end{aligned}$$

Si C es el gráfico de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces una parametrización de C es $\mathbf{r}(t) = \langle t, f(t)\rangle$ para $t \in [a, b]$. Si la derivada $f'(t)$ existe y es continua en todo $t \in [a, b]$, entonces

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt,$$

esto es,

$$\boxed{L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2}dt.}$$

Ejemplo

Calcular la longitud de la curva C obtenida del gráfico de $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ con $x \in [0,4]$.

Solución: *En este caso una parametrización de C es $\mathbf{r}(t) = \langle t, \sqrt{t} \rangle$ con $t \in [0,4]$. Luego,*

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}\right)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9t}{4}} dt$$

$$= \left[\frac{8}{27}(1 + \frac{9t}{4})^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[(1+9)^{3/2} - 1\right] = \frac{8}{27}\left[10\sqrt{10} - 1\right].$$

Definición

Sea $\mathbf{r}(t) = \langle x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t) \rangle$ una función vectorial tal que las derivadas de sus funciones componentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existen y son continuas en $I = [a, b]$. La función

$$\boxed{s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{x_1'(u)^2 + x_2'(u)^2 + \cdots + x_n'(u)^2} du}$$

es llamada ***función longitud de arco.***

Definición

Decimos que una curva está ***parametrizada por longitud de arco*** *cuando la rapidez es constante igual a 1 en cualquier instante de tiempo.*

Ejemplo

Hallar la parametrización por longitud de arco de la curva obtenida de la función vectorial $\boldsymbol{r}(t) = \langle a\cos\omega t, a\,\mathrm{sen}\,\omega t, ct\rangle$, *donde* a, c, ω *son constantes positivas y* $t \geq 0$.

Ejemplo

Hallar la parametrización por longitud de arco de la curva obtenida de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos\omega t, a\,\mathrm{sen}\,\omega t, ct\rangle$, *donde* a, c, ω *son constantes positivas y* $t \geq 0$.

Solución: *Tenemos que*

$$x(t) = a\cos\omega t, \qquad y(t) = a\,\mathrm{sen}\,\omega t, \qquad z(t) = ct.$$

Ejemplo

Hallar la parametrización por longitud de arco de la curva obtenida de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos\omega t, a\,\mathrm{sen}\,\omega t, ct\rangle$, *donde* a, c, ω *son constantes positivas y* $t \geq 0$.

Solución: *Tenemos que*

$$x(t) = a\cos\omega t, \qquad y(t) = a\,\mathrm{sen}\,\omega t, \qquad z(t) = ct.$$

Luego

$$x'(t) = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t, \qquad y'(t) = a\omega\cos\omega t, \qquad z'(t) = c.$$

Ejemplo

Hallar la parametrización por longitud de arco de la curva obtenida de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos\omega t, a\operatorname{sen}\omega t, ct\rangle$, *donde* a, c, ω *son constantes positivas y* $t \geq 0$.

Solución: *Tenemos que*

$$x(t) = a\cos\omega t, \qquad y(t) = a\operatorname{sen}\omega t, \qquad z(t) = ct.$$

Luego

$$x'(t) = -a\omega\operatorname{sen}\omega t, \qquad y'(t) = a\omega\cos\omega t, \qquad z'(t) = c.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}du = \int_0^t \sqrt{a^2\omega^2\operatorname{sen}^2 u + a^2\omega^2\cos^2 u + c^2}du \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2\omega^2 + c^2}du = t\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Hallar la parametrización por longitud de arco de la curva obtenida de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos\omega t, a\,\mathrm{sen}\,\omega t, ct\rangle$, *donde* a, c, ω *son constantes positivas y* $t \geq 0$.

Solución: *Tenemos que*

$$x(t) = a\cos\omega t, \qquad y(t) = a\,\mathrm{sen}\,\omega t, \qquad z(t) = ct.$$

Luego

$$x'(t) = -a\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t, \qquad y'(t) = a\omega\cos\omega t, \qquad z'(t) = c.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2}du = \int_0^t \sqrt{a^2\omega^2\,\mathrm{sen}^2\,u + a^2\omega^2\cos^2 u + c^2}du \\ &= \int_0^t \sqrt{a^2\omega^2 + c^2}du = t\sqrt{a^2\omega^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Luego $t = \frac{s}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}$.

Ejemplo

La parametrización por longitud de arco de la curva es dada por

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(t(s)) = \left\langle a\cos\frac{\omega s}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}, a\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega s}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}, \frac{cs}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}} \right\rangle.$$

Ejemplo

La parametrización por longitud de arco de la curva es dada por

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(t(s)) = \left\langle a\cos\frac{\omega s}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}, a\,\mathrm{sen}\,\frac{\omega s}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}, \frac{cs}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}\right\rangle.$$

El lector puede verificar que $\|\tilde{\mathbf{r}}'(s)\| = 1$ *para todo* s.

Ejemplo

La parametrización por longitud de arco de la curva es dada por

$$\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{r}(t(s)) = \left\langle a\cos\frac{\omega s}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}, a\operatorname{sen}\frac{\omega s}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}, \frac{cs}{\sqrt{a^2\omega^2+c^2}}\right\rangle.$$

El lector puede verificar que $\|\tilde{\boldsymbol{r}}'(s)\| = 1$ *para todo* s.

Por otro lado, note que, para todo t,

$$\|\boldsymbol{r}'(t)\| = \|\langle -a\omega\operatorname{sen}\omega t, a\omega\cos\omega t, c\rangle\| = \sqrt{a^2\omega^2\operatorname{sen}^2 t + a^2\omega^2\cos^2 t + c^2} = \sqrt{a^2\omega^2+c^2}.$$

Triedro de Frenet-Serret

Definición (**Curvas de clase C^k**)

Decimos que una función vectorial regular $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ *es de* ***clase*** C^k *si la* k*-ésima derivada* $\mathbf{r}^k(t)$ *existe para cada* $t \in I$.

Definición (**Curvas de clase** C^k)

Decimos que una función vectorial regular $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ *es de* ***clase*** C^k *si la* k*-ésima derivada* $\mathbf{r}^k(t)$ *existe para cada* $t \in I$.

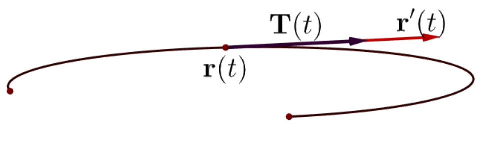


Figura 0.4: Vector tangente unitario.

Definición (**Curvas de clase C^k**)

Decimos que una función vectorial regular $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ *es de* ***clase*** C^k *si la* k*-ésima derivada* $\mathbf{r}^k(t)$ *existe para cada* $t \in I$.

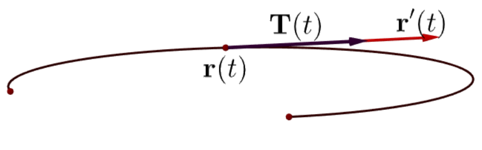


Figura 0.4: Vector tangente unitario.

Definición (**Vector tangente unitario**)

Sea $\mathbf{r}(t)$ *una función vectorial regular. Definimos el* ***vector tangente unitario*** *en el punto* $\mathbf{r}(t)$ *(o en el instante* t*) como*

$$\boxed{\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.}$$

Ejemplo

Sea $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos 2\pi t, t^2 + t - 1, \sqrt{t+1}\rangle$. *Hallar el vector tangente unitario en el punto cuando* $t = 0$.

Ejemplo

Sea $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos 2\pi t, t^2 + t - 1, \sqrt{t+1}\rangle$. *Hallar el vector tangente unitario en el punto cuando* $t = 0$.

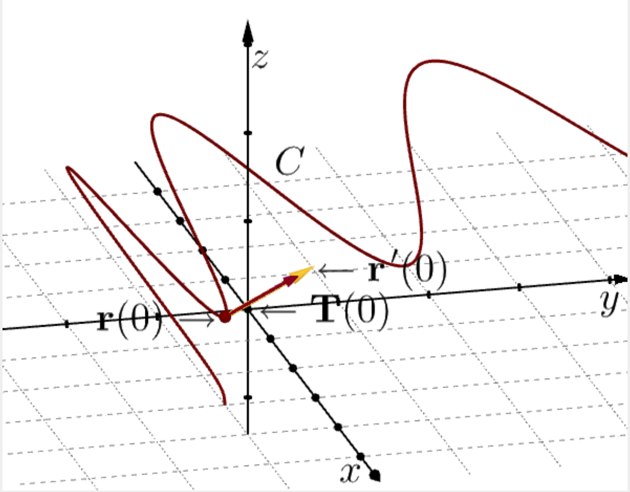


Figura 0.5: $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos 2\pi t, t^2 + t - 1, \sqrt{t+1}\rangle$.

Ejemplo

Solución: *Primero, tenemos que* $\mathbf{r}(0) = \langle 3, -1, 1\rangle$. *Observe que*

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -6\pi \operatorname{sen} 2\pi t, 2t+1, \frac{1}{2}(t+1)^{-1/2}\rangle.$$

Ejemplo

Solución: *Primero, tenemos que* $\mathbf{r}(0) = \langle 3, -1, 1 \rangle$. *Observe que*

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -6\pi \operatorname{sen} 2\pi t, 2t + 1, \frac{1}{2}(t+1)^{-1/2} \rangle.$$

Así, $\mathbf{r}'(0) = \langle 0, 1, \frac{1}{2} \rangle$.

Ejemplo

Solución: *Primero, tenemos que* $\mathbf{r}(0) = \langle 3, -1, 1 \rangle$. *Observe que*

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -6\pi \operatorname{sen} 2\pi t, 2t + 1, \frac{1}{2}(t+1)^{-1/2} \rangle.$$

Así, $\mathbf{r}'(0) = \langle 0, 1, \frac{1}{2} \rangle$.

Por lo tanto, el vector tangente unitario en $\mathbf{r}(0) = \langle 3, -1, 1 \rangle$ *es*

$$\boldsymbol{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{\|\mathbf{r}'(0)\|} = \frac{\langle 0, 1, \frac{1}{2} \rangle}{\|\langle 0, 1, \frac{1}{2} \rangle\|} = \frac{\langle 0, 1, \frac{1}{2} \rangle}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = \frac{\langle 0, 1, \frac{1}{2} \rangle}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \langle 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \rangle.$$

Definición (**Vector normal unitario**)

Supongamos que $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ *sea de clase* C^2 *y que* $\mathbf{T}'(t) \neq \vec{0}$. *El* ***vector normal unitario*** $\mathbf{N}(t)$ *en el tiempo* t *es definido como*

$$\boxed{\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.}$$

Definición (**Vector binormal**)

Supongamos que $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ *sea de clase* C^2 *y que* $\boldsymbol{T}'(t) \neq \vec{0}$. *Definimos el* ***vector binormal*** $\boldsymbol{B}(t)$ *como*

$$\boxed{\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t).}$$

Definición (**Vector binormal**)

Supongamos que $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ *sea de clase* C^2 *y que* $\boldsymbol{T}'(t) \neq \vec{0}$*. Definimos el* ***vector binormal*** $\boldsymbol{B}(t)$ *como*

$$\boxed{\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t).}$$

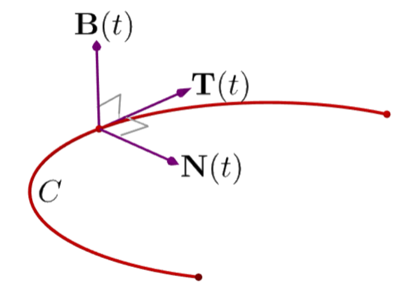


Figura 0.6: Vectores $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$

Definición

La base $\{\boldsymbol{T}(t), \boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{B}(t)\}$ *es llamada* ***triedro de Frenet-Serret***.

Definición

La base $\{\boldsymbol{T}(t), \boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{B}(t)\}$ *es llamada* ***triedro de Frenet-Serret***.

Ejemplo

Hallar el triedro de Frenet-Serret para la curva parametrizada por las ecuaciones $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$, $z = 3t$.

Definición

La base $\{\boldsymbol{T}(t), \boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{B}(t)\}$ *es llamada* ***triedro de Frenet-Serret***.

Ejemplo

Hallar el triedro de Frenet-Serret para la curva parametrizada por las ecuaciones $x = 4\cos t$, $y = 4\,\mathrm{sen}\, t$, $z = 3t$.

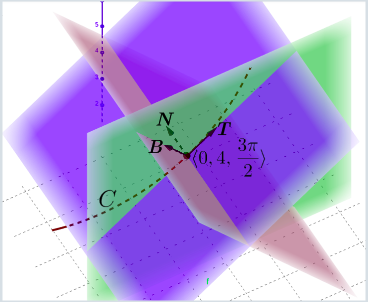


Figura 0.7: Triedro de Frenet-Serret

Ejemplo

Solución: *En este caso,* $\mathbf{r}(t) = \langle 4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 3t\rangle$.

Ejemplo

***Solución**: En este caso,* $\mathbf{r}(t) = \langle 4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 3t\rangle$*. Entonces*

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{\sqrt{16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 9}} = \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{\sqrt{16(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + 9}}$$
$$= \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{5}.$$

Ejemplo

***Solución**: En este caso,* $\mathbf{r}(t) = \langle 4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 3t\rangle$. *Entonces*

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{\sqrt{16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 9}} = \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{\sqrt{16(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + 9}}$$

$$= \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{5}.$$

Ahora,

$$\boldsymbol{T}'(t) = \frac{\langle -4\cos t, -4\operatorname{sen} t, 0\rangle}{5} \quad \text{y} \quad \|\boldsymbol{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{16\cos^2 t + 16\operatorname{sen}^2 t}}{5} = \frac{4}{5}.$$

Ejemplo

***Solución**: En este caso,* $\mathbf{r}(t) = \langle 4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 3t\rangle$*. Entonces*

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{\sqrt{16\operatorname{sen}^2 t + 16\cos^2 t + 9}} = \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{\sqrt{16(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) + 9}}$$
$$= \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{5}.$$

Ahora,

$$\boldsymbol{T}'(t) = \frac{\langle -4\cos t, -4\operatorname{sen} t, 0\rangle}{5} \quad y \quad \|\boldsymbol{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{16\cos^2 t + 16\operatorname{sen}^2 t}}{5} = \frac{4}{5}.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|} = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle$$

Ejemplo

y

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t) &= \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{5} \times \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t & \frac{4}{5}\cos t & \frac{3}{5} \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{3}{5}\operatorname{sen} t, -\frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5} \right\rangle.\end{aligned}$$

Ejemplo

y

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t) = \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{5} \times \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t & \frac{4}{5}\cos t & \frac{3}{5} \\ -\cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} = \left\langle \frac{3}{5}\operatorname{sen} t, -\frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5} \right\rangle .$$

En la Figura 0.7 mostraremos el triedro de Frenet-Serret de la curva en $t = \pi/2$.

Planos osculador, normal y binormal

Definición

Sea C *una curva en el espacio tridimensional con parametrización* $\mathbf{r}: I \to \mathbb{R}^3$ *de clase* C^2*:*

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.*

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$.*

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores **T** y **N**.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **N**.*
- *El **Plano Rectificante** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **T**.*

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores **T** y **N**.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **N**.*
- *El **Plano Rectificante** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **T**.*

Tenemos entonces lo siguiente:

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$.*
- *El **Plano Rectificante** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{T}$.*

Tenemos entonces lo siguiente:

- Un vector normal al plano osculador es el vector

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores **T** y **N**.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **N**.*
- *El **Plano Rectificante** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **T**.*

Tenemos entonces lo siguiente:

- Un vector normal al plano osculador es el vector **B**.

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores **T** y **N**.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **N**.*
- *El **Plano Rectificante** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **T**.*

Tenemos entonces lo siguiente:

- Un vector normal al plano osculador es el vector **B**.
- Un vector normal al plano normal es el vector

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$.*
- *El **Plano Rectificante** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{T}$.*

Tenemos entonces lo siguiente:

- Un vector normal al plano osculador es el vector $\mathbf{B}$.
- Un vector normal al plano normal es el vector $\mathbf{T}$.

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{N}$.*
- *El **Plano Rectificante** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores $\mathbf{B}$ y $\mathbf{T}$.*

Tenemos entonces lo siguiente:

- Un vector normal al plano osculador es el vector $\mathbf{B}$.
- Un vector normal al plano normal es el vector $\mathbf{T}$.
- Un vector normal al plano rectificante es el vector

Definición

Sea C una curva en el espacio tridimensional con parametrización $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ de clase C^2:

- *El **Plano Osculador** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene los vectores **T** y **N**.*
- *El **Plano Normal** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **N**.*
- *El **Plano Rectificante** de C en el punto A es el plano que pasa por A y contiene a los vectores **B** y **T**.*

Tenemos entonces lo siguiente:

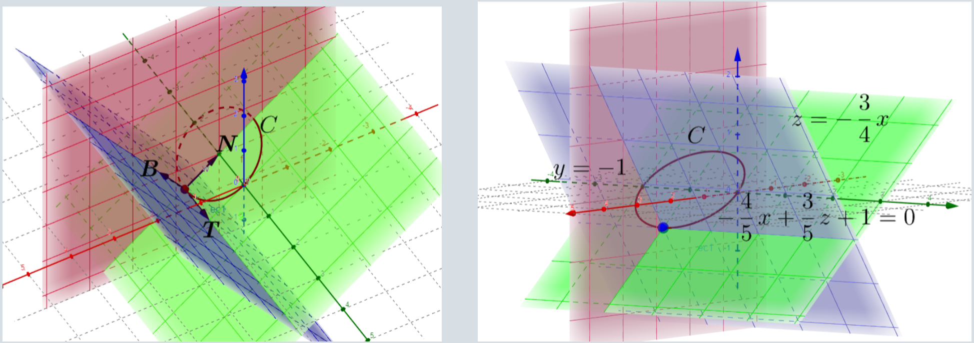
- Un vector normal al plano osculador es el vector **B**.
- Un vector normal al plano normal es el vector **T**.
- Un vector normal al plano rectificante es el vector **N**.

Ejemplo

Sea C la curva obtenida de

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{4}{5}\cos t, \operatorname{sen} t - 1, -\frac{3}{5}\cos t \right\rangle \quad \textit{con } t \in \mathbb{R}.$$

Hallar ecuaciones lineales de los planos osculador, normal y rectificante de C en $t = 0$.



(a) ***(b)***

Figura 0.8

Ejemplo

Solución: *Primero hallemos el triedro de Frenet-Serret. Tenemos que*

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\boldsymbol{r}'(t)}{\|\boldsymbol{r}'(t)\|} = \frac{\langle -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, \cos t, \frac{3}{5}\operatorname{sen} t\rangle}{\|\langle -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, \cos t, \frac{3}{5}\operatorname{sen} t\rangle\|} = \frac{\langle -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, \cos t, \frac{3}{5}\operatorname{sen} t\rangle}{\sqrt{\frac{16}{25}\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25}\operatorname{sen}^2 t}}$$

$$= \left\langle -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, \cos t, \frac{3}{5}\operatorname{sen} t\right\rangle.$$

Ahora,

$$\boldsymbol{T}'(t) = \left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\operatorname{sen} t, \frac{3}{5}\cos t\right\rangle \quad y \quad \|\boldsymbol{T}'(t)\| = \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + \frac{9}{25}\cos^2 t} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{N}(t) = \frac{\boldsymbol{T}'(t)}{\|\boldsymbol{T}'(t)\|} = \left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\operatorname{sen} t, \frac{3}{5}\cos t\right\rangle$$

Ejemplo

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t) = \left\langle -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, \cos t, \frac{3}{5}\operatorname{sen} t \right\rangle \times \left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\operatorname{sen} t, \frac{3}{5}\cos t \right\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t & \cos t & \frac{3}{5}\operatorname{sen} t \\ -\frac{4}{5}\cos t & -\operatorname{sen} t & \frac{3}{5}\cos t \end{vmatrix} = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle.$$

Ejemplo

$$\boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T}(t) \times \boldsymbol{N}(t) = \left\langle -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t, \cos t, \frac{3}{5}\operatorname{sen} t \right\rangle \times \left\langle -\frac{4}{5}\cos t, -\operatorname{sen} t, \frac{3}{5}\cos t \right\rangle$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{4}{5}\operatorname{sen} t & \cos t & \frac{3}{5}\operatorname{sen} t \\ -\frac{4}{5}\cos t & -\operatorname{sen} t & \frac{3}{5}\cos t \end{vmatrix} = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle .$$

El vector binormal es constante, por lo tanto no cambia de dirección y así la curva se encuentra contenida en un plano. Tomemos las ecuaciones paramétricas de la curva,

$$x = \frac{4}{5}\cos t \qquad y = \operatorname{sen} t - 1 \qquad z = -\frac{3}{5}\cos t.$$

Entonces $z = -\frac{3}{4}x$, de donde tenemos que la curva se encuentra en el plano $z = -\frac{3}{4}x$. En $t = 0$ tenemos

$$\boldsymbol{r}(0) = \left\langle \frac{4}{5}, -1, -\frac{3}{5} \right\rangle \qquad \boldsymbol{T}(0) = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \boldsymbol{N}(0) = \left\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle \qquad \boldsymbol{B}(0) = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle .$$

Ejemplo

- *Ecuación del plano osculador en $t = 0$:*

$$0 = \boldsymbol{B}(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z,$$

de donde $z = -\frac{3}{4}x$, el cual es el plano donde está contenida la curva.

Ejemplo

- *Ecuación del plano osculador en $t = 0$:*

$$0 = \boldsymbol{B}(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z,$$

de donde $z = -\frac{3}{4}x$, el cual es el plano donde está contenida la curva.

- *Ecuación del plano normal:*

$$0 = \boldsymbol{T}(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y + 1, z + \frac{3}{5} \right\rangle = y + 1,$$

de donde $y = -1$.

Ejemplo

- *Ecuación del plano osculador en $t = 0$:*

$$0 = \boldsymbol{B}(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y+1, z+\frac{3}{5} \right\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5} \right\rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y+1, z+\frac{3}{5} \right\rangle = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z,$$

de donde $z = -\frac{3}{4}x$, el cual es el plano donde está contenida la curva.

- *Ecuación del plano normal:*

$$0 = \boldsymbol{T}(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y+1, z+\frac{3}{5} \right\rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y+1, z+\frac{3}{5} \right\rangle = y + 1,$$

de donde $y = -1$.

- *Ecuación del plano rectificante:*

$$0 = \boldsymbol{N}(0) \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y+1, z+\frac{3}{5} \right\rangle = \left\langle -\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5} \right\rangle \cdot \left\langle x - \frac{4}{5}, y+1, z+\frac{3}{5} \right\rangle$$
$$= -\frac{4}{5}x + \frac{16}{25} + \frac{3}{5}z + \frac{9}{25} = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z + 1 \Rightarrow \textit{esto es, } -4x + 3z + 5 = 0.$$

Ejemplo

En el Ejemplo 0.18 probamos que el triedro de Frenet-Serret para la curva parametrizada por las ecuaciones $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$, $z = 3t$ *es:*

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\langle -4\operatorname{sen} t, 4\cos t, 3\rangle}{5} \qquad \boldsymbol{N}(t) = \langle -\cos t, -\operatorname{sen} t, 0\rangle \qquad \boldsymbol{B}(t) = \left\langle \frac{3}{5}\operatorname{sen} t, -\frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5}\right\rangle.$$

En $t = \frac{\pi}{2}$ *tenemos*

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle 0, 4, \frac{3\pi}{2}\right\rangle \quad \boldsymbol{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right\rangle \quad \boldsymbol{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 0, -1, 0\rangle \quad \boldsymbol{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\rangle.$$

Ejemplo

- *Ecuación del plano osculador en* $t = \frac{\pi}{2}$*:*

$$0 = \boldsymbol{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left\langle x, y-4, z-\frac{3\pi}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\rangle \cdot \left\langle x, y-4, z-\frac{3\pi}{2}\right\rangle = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}z - \frac{6\pi}{5},$$

de donde $3x + 4z - 6\pi = 0$.

- *Ecuación del plano normal en* $t = \frac{\pi}{2}$*:*

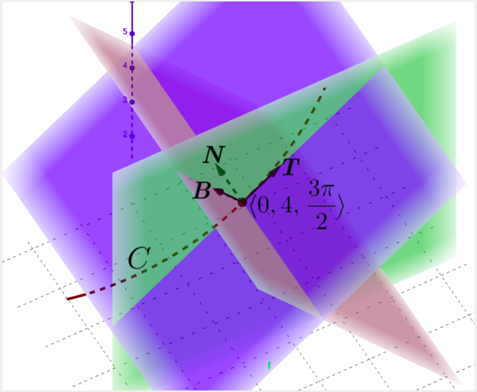
$$0 = \boldsymbol{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left\langle x, y-4, z-\frac{3\pi}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right\rangle \cdot \left\langle x, y-4, z-\frac{3\pi}{2}\right\rangle = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z - \frac{9\pi}{10},$$

de donde $-8x + 6z - 9\pi = 0$.

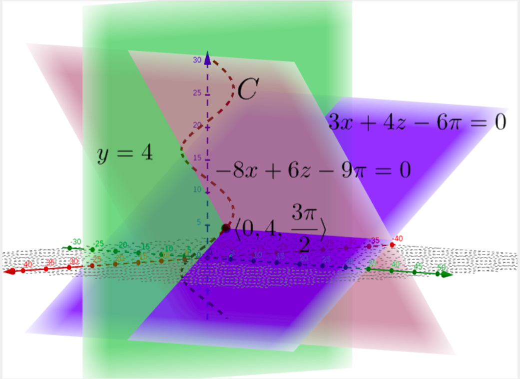
- *Ecuación del plano rectificante en* $t = \frac{\pi}{2}$*:*

$$0 = \boldsymbol{N}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left\langle x, y-4, z-\frac{3\pi}{2}\right\rangle = \langle 0, -1, 0\rangle \cdot \left\langle x, y-4, z-\frac{3\pi}{2}\right\rangle = -y + 4,$$

de donde $y = 4$.



(a) Triedro de Frenet-Serret



(b) Planos osculador, normal y rectificante

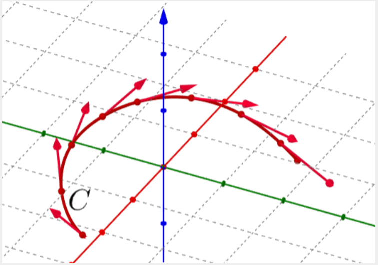
Figura 0.9: Curva $x = 4\cos t$, $y = 4 \operatorname{sen} t$, $z = 3t$, en $t = \frac{\pi}{2}$

Curvatura

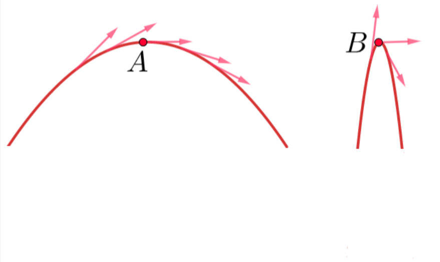
Definición (**Curvatura**)

Sea C una curva parametrizada por una función vectorial regular $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *de clase* C^2*. La curvatura de* C *en un punto para el tiempo* t *es dada por*

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}.}$$



(a) Cambio de dirección de vectores tangentes



(b) Curvaturas menor y mayor

Figura 0.10: Curvatura

Ejemplo

Hallar la curvatura de la curva obtenida de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ *en* $t = 0$, $t = 2$, $t = -2$ *y cuando* $t \to \infty$.

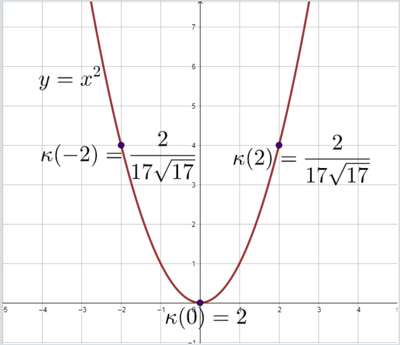


Figura 0.11: Curvatura de la parábola $y = x^2$ en $(0,0)$, $(-2,4)$, $(2,4)$.

Ejemplo

Solución: *Tomando $x = t$, $y = t^2$, entonces $y = x^2$, por lo tanto la curva obtenida es la parábola $y = x^2$ (ver Figura 0.11). Tenemos que $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t \rangle$, así*

$$\boldsymbol{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\langle 1, 2t \rangle}{\|\langle 1, 2t \rangle\|} = \frac{\langle 1, 2t \rangle}{\sqrt{1+4t^2}} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \right\rangle.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}'(t) &= \left\langle -\frac{4t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2\sqrt{1+4t^2} - \frac{8t^2}{\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2} \right\rangle = \left\langle -\frac{4t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\frac{2(1+4t^2)-8t^2}{\sqrt{1+4t^2}}}{1+4t^2} \right\rangle \\ &= \left\langle -\frac{4t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right\rangle = \frac{\langle -4t, 2 \rangle}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Consecuentemente,

$$\kappa(t) = \frac{\|\boldsymbol{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}\,'(t)\|} = \frac{\left\| \frac{\langle -4t, 2 \rangle}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right\|}{\|\langle 1, 2t \rangle\|} = \frac{\frac{(16t^2+4)^{\frac{1}{2}}}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}}{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ejemplo

Note que en $t = 0$ (punto $(0,0)$) tenemos que

$$\kappa(0) = \frac{2}{(1 + 4(0)^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.$$

En el punto $(0,0)$ la curvatura de la parábola es mayor. En $t = 2$, tenemos el punto $(2,4)$ (o $t = -2$ tenemos el punto $(-2,4)$), la curvatura

$$\kappa(2) = \kappa(-2) = \frac{2}{17\sqrt{17}}.$$

Cuando $t \to \infty$, la curvatura $\kappa(t) \to 0$. Esto implica que para valores grandes de t, la parábola es aproximadamente recta.

Ejemplo

Note que en $t = 0$ *(punto* $(0,0)$*) tenemos que*

$$\kappa(0) = \frac{2}{(1+4(0)^2)^{\frac{3}{2}}} = 2.$$

En el punto $(0,0)$ *la curvatura de la parábola es mayor. En* $t = 2$*, tenemos el punto* $(2,4)$ *(o* $t = -2$ *tenemos el punto* $(-2,4)$*), la curvatura*

$$\kappa(2) = \kappa(-2) = \frac{2}{17\sqrt{17}}.$$

Cuando $t \to \infty$*, la curvatura* $\kappa(t) \to 0$*. Esto implica que para valores grandes de* t*, la parábola es aproximadamente recta.*

Teorema

La curvatura de una curva C *en* $\mathbb{R}^3$ *obtenida de una función vectorial regular* $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ *de clase* C^2 *es dada por:*

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.}$$

El lector puede mostrar que en este caso para $t \in [a, b]$ se tiene

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}.}$$

El lector puede mostrar que en este caso para $t \in [a, b]$ se tiene

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}.}$$

Ejemplo

En el Ejemplo 0.29 calculamos la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ usando la Definición 0.28. Podemos utilizar la ecuación anterior para obtener

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[1 + (2t)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de forma más simple.

El lector puede mostrar que en este caso para $t \in [a, b]$ se tiene

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}.}$$

Ejemplo

En el Ejemplo 0.29 calculamos la curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ *usando la Definición 0.28. Podemos utilizar la ecuación anterior para obtener*

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{[1 + (2t)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

de forma más simple.

Ejemplo (**Curvatura de una elipse**)

Hallar la curvatura de la curva obtenida a partir de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, b \operatorname{sen} t \rangle$*, para* $t \in \mathbb{R}$ *y* a, b *son constantes positivas. Obtener las curvaturas en los puntos donde* $(a, 0)$ *y* $(0, b)$.

Ejemplo

Solución: *Ya que*

$$x'(t) = -a \operatorname{sen} t \quad x''(t) = -a \cos t \quad y'(t) = b \cos t \quad y''(t) = -b \operatorname{sen} t,$$

se tiene que

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|ab \operatorname{sen}^2 t + ab \cos^2 t|}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}},$$

Ejemplo

Solución: *Ya que*

$$x'(t) = -a\operatorname{sen} t \quad x''(t) = -a\cos t \quad y'(t) = b\cos t \quad y''(t) = -b\operatorname{sen} t,$$

se tiene que

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\left[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{|ab\operatorname{sen}^2 t + ab\cos^2 t|}{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}},$$

esto es

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}. \tag{0.1}$$

Ejemplo

Ahora, en el punto $(a, 0)$ *de la elipse tenemos que* $t = 0$. *Luego,*

$$\kappa(0) = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 0 + b^2 \cos^2 0)^{3/2}} = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}.$$

Ejemplo

Ahora, en el punto $(a, 0)$ *de la elipse tenemos que* $t = 0$. *Luego,*

$$\kappa(0) = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 0 + b^2 \cos^2 0)^{3/2}} = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}.$$

Así, la curvatura en el punto $(a, 0)$ *es* $\frac{a}{b^2}$.

Ejemplo

Ahora, en el punto $(a,0)$ *de la elipse tenemos que* $t=0$. *Luego,*

$$\kappa(0)=\frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2 0+b^2\cos^2 0)^{3/2}}=\frac{ab}{(b^2)^{3/2}}=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2}.$$

Así, la curvatura en el punto $(a,0)$ *es* $\frac{a}{b^2}$.
En el punto $(0,b)$ *de la elipse tenemos que* $t=\pi/2$. *Luego,*

$$\kappa(\pi/2)=\frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2(\pi/2)+b^2\cos^2(\pi/2))^{3/2}}=\frac{ab}{(a^2)^{3/2}}=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}.$$

Ejemplo

Ahora, en el punto $(a, 0)$ *de la elipse tenemos que* $t = 0$*. Luego,*

$$\kappa(0) = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 0 + b^2 \cos^2 0)^{3/2}} = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}.$$

Así, la curvatura en el punto $(a, 0)$ *es* $\frac{a}{b^2}$.
En el punto $(0, b)$ *de la elipse tenemos que* $t = \pi/2$*. Luego,*

$$\kappa(\pi/2) = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2(\pi/2) + b^2 \cos^2(\pi/2))^{3/2}} = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{ab}{a^3} = \frac{b}{a^2}.$$

Así, la curvatura en el punto $(0, b)$ *es* $\frac{b}{a^2}$.

Ejemplo

Ahora, en el punto $(a,0)$ de la elipse tenemos que $t=0$. Luego,

$$\kappa(0)=\frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2 0+b^2\cos^2 0)^{3/2}}=\frac{ab}{(b^2)^{3/2}}=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2}.$$

Así, la curvatura en el punto $(a,0)$ es $\frac{a}{b^2}$.
En el punto $(0,b)$ de la elipse tenemos que $t=\pi/2$. Luego,

$$\kappa(\pi/2)=\frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2(\pi/2)+b^2\cos^2(\pi/2))^{3/2}}=\frac{ab}{(a^2)^{3/2}}=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}.$$

Así, la curvatura en el punto $(0,b)$ es $\frac{b}{a^2}$.

En el ejemplo anterior supongamos que $0<a<b$. Como vimos, en el punto $(a,0)$ de la elipse tenemos que la curvatura es $\frac{a}{b^2}$ y en el punto $(0,b)$ es $\frac{b}{a^2}$.

Ejemplo

Ahora, en el punto $(a,0)$ *de la elipse tenemos que* $t=0$*. Luego,*

$$\kappa(0)=\frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2 0+b^2\cos^2 0)^{3/2}}=\frac{ab}{(b^2)^{3/2}}=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2}.$$

Así, la curvatura en el punto $(a,0)$ *es* $\frac{a}{b^2}$.
En el punto $(0,b)$ *de la elipse tenemos que* $t=\pi/2$*. Luego,*

$$\kappa(\pi/2)=\frac{ab}{(a^2\operatorname{sen}^2(\pi/2)+b^2\cos^2(\pi/2))^{3/2}}=\frac{ab}{(a^2)^{3/2}}=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}.$$

Así, la curvatura en el punto $(0,b)$ *es* $\frac{b}{a^2}$.

En el ejemplo anterior supongamos que $0<a<b$. Como vimos, en el punto $(a,0)$ de la elipse tenemos que la curvatura es $\frac{a}{b^2}$ y en el punto $(0,b)$ es $\frac{b}{a^2}$. Ya que $0<a<b$ tenemos $\frac{a}{b^2}<\frac{b}{a^2}$, esto es, la curvatura en el punto $(a,0)$ es menor que la curvatura en el punto $(0,b)$.

Ejemplo (**Curvatura de una circunferencia**)

Hallar la curvatura de la curva obtenida a partir de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a \operatorname{sen} t \rangle$*, para* $t \in \mathbb{R}$ *y* a *una constante positiva.*

Ejemplo (**Curvatura de una circunferencia**)

Hallar la curvatura de la curva obtenida a partir de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a\operatorname{sen} t\rangle$, *para* $t \in \mathbb{R}$ *y* a *una constante positiva.*

Solución: *De* (0.1) *tenemos*

$$\kappa(t) = \frac{a^2}{(a^2\operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{a^2}{(a^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t))^{3/2}} = \frac{a^2}{(a^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}.$$

Ejemplo (**Curvatura de una circunferencia**)

Hallar la curvatura de la curva obtenida a partir de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle a\cos t, a \operatorname{sen} t\rangle$, *para* $t \in \mathbb{R}$ *y* a *una constante positiva.*

Solución: *De* (0.1) *tenemos*

$$\kappa(t) = \frac{a^2}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{a^2}{(a^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t))^{3/2}} = \frac{a^2}{(a^2)^{3/2}} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a}.$$

Consecuentemente, la curvatura de la circunferencia es constante e igual a $\frac{1}{a}$.

Ejemplo

Hallar la curvatura de la curva obtenida de $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t \ln t\rangle$ *en* $(e^2, 1, e)$.

Ejemplo

Hallar la curvatura de la curva obtenida de $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t\ln t\rangle$ *en* $(e^2, 1, e)$.

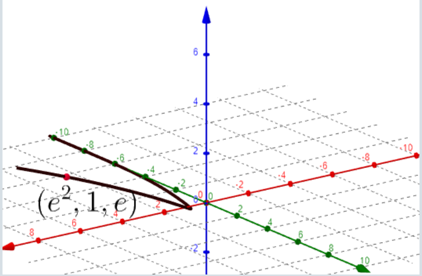


Figura 0.12: Curva $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t\ln t\rangle$.

Ejemplo

Hallar la curvatura de la curva obtenida de $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t\ln t\rangle$ *en* $(e^2, 1, e)$.

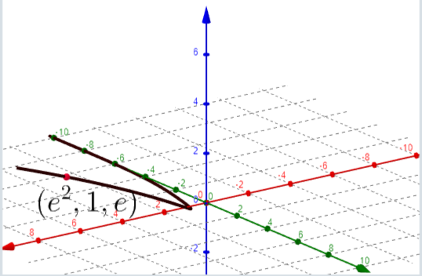


Figura 0.12: Curva $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t\ln t\rangle$.

Solución: *Usaremos el Teorema 0.32. Primero tenemos que*

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle 2t, \frac{1}{t}, 1 + \ln t \right\rangle \qquad y \qquad \mathbf{r}''(t) = \left\langle 2, -\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t} \right\rangle.$$

Ejemplo

En el punto $(e^2, 1, e)$ *tenemos que* $t = e$*, así, debemos hallar* $\mathbf{r}'(e)$ *y* $\mathbf{r}''(e)$.

Ejemplo

En el punto $(e^2, 1, e)$ tenemos que $t = e$, así, debemos hallar $\mathbf{r}'(e)$ y $\mathbf{r}''(e)$. Evaluando tenemos

$$\mathbf{r}'(e) = \left\langle 2e, \frac{1}{e}, 1 + \ln e \right\rangle = \left\langle 2e, \frac{1}{e}, 1 + 1 \right\rangle = \left\langle 2e, \frac{1}{e}, 2 \right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{r}''(e) = \left\langle 2, -\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e} \right\rangle.$$

Ejemplo

En el punto $(e^2, 1, e)$ *tenemos que* $t = e$*, así, debemos hallar* $\mathbf{r}'(e)$ *y* $\mathbf{r}''(e)$*. Evaluando tenemos*

$$\mathbf{r}'(e) = \left\langle 2e, \frac{1}{e}, 1 + \ln e \right\rangle = \left\langle 2e, \frac{1}{e}, 1 + 1 \right\rangle = \left\langle 2e, \frac{1}{e}, 2 \right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{r}''(e) = \left\langle 2, -\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e} \right\rangle .$$

Ahora

$$\mathbf{r}'(e) \times \mathbf{r}''(e) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2e & \frac{1}{e} & 2 \\ 2 & -\frac{1}{e^2} & \frac{1}{e} \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\left(\frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2}\right) - \boldsymbol{j}(2 - 4) + \boldsymbol{k}\left(-\frac{2}{e} - \frac{2}{e}\right) = \left\langle \frac{3}{e^2}, 2, -\frac{4}{e} \right\rangle .$$

Ejemplo

En el punto $(e^2,1,e)$ *tenemos que* $t=e$*, así, debemos hallar* $\boldsymbol{r}'(e)$ *y* $\boldsymbol{r}''(e)$*. Evaluando tenemos*

$$\boldsymbol{r}'(e)=\left\langle 2e,\frac{1}{e},1+\ln e\right\rangle=\left\langle 2e,\frac{1}{e},1+1\right\rangle=\left\langle 2e,\frac{1}{e},2\right\rangle \quad \text{y} \quad \boldsymbol{r}''(e)=\left\langle 2,-\frac{1}{e^2},\frac{1}{e}\right\rangle.$$

Ahora

$$\boldsymbol{r}'(e)\times\boldsymbol{r}''(e)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2e & \frac{1}{e} & 2\\ 2 & -\frac{1}{e^2} & \frac{1}{e}\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\left(\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}\right)-\boldsymbol{j}(2-4)+\boldsymbol{k}\left(-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}\right)=\left\langle\frac{3}{e^2},2,-\frac{4}{e}\right\rangle.$$

Luego, por el Teorema 0.32 tenemos

$$\begin{aligned}\kappa(e)&=\frac{\|\boldsymbol{r}'(e)\times\boldsymbol{r}''(e)\|}{\|\boldsymbol{r}'(e)\|^3}=\frac{\|\langle\frac{3}{e^2},2,-\frac{4}{e}\rangle\|}{\|\langle 2e,\frac{1}{e},2\rangle\|^3}=\frac{(\frac{9}{e^4}+4+\frac{16}{e^2})^{1/2}}{(4e^2+\frac{1}{e^2}+4)^{3/2}}=\frac{(\frac{9+4e^4+16e^2}{e^4})^{1/2}}{(\frac{4e^4+1+4e^2}{e^2})^{3/2}}\\ &=\frac{\frac{(9+4e^4+16e^2)^{1/2}}{e^2}}{\frac{(4e^4+1+4e^2)^{3/2}}{e^3}}=e\frac{(9+4e^4+16e^2)^{\frac{1}{2}}}{(4e^4+1+4e^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Torsión

Definición (**Torsión**)

*La **torsión** de una curva C de clase C^3 es la función $\tau(s)$ que satisface la ecuación anterior y mide el grado en que se puede torcer la curva, es decir, la rapidez con la que el vector binormal cambia de dirección a medida que nos movemos por longitud de arco.*

Definición (**Torsión**)

*La **torsión** de una curva C de clase C^3 es la función $\tau(s)$ que satisface la ecuación anterior y mide el grado en que se puede torcer la curva, es decir, la rapidez con la que el vector binormal cambia de dirección a medida que nos movemos por longitud de arco.*

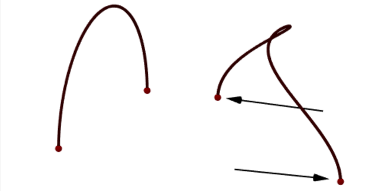


Figura 0.13: La curva de la izquierda tiene torsión cero. La curva de la derecha tiene torsión diferente de cero

Definición (**Torsión**)

*La **torsión** de una curva C de clase C^3 es la función $\tau(s)$ que satisface la ecuación anterior y mide el grado en que se puede torcer la curva, es decir, la rapidez con la que el vector binormal cambia de dirección a medida que nos movemos por longitud de arco.*

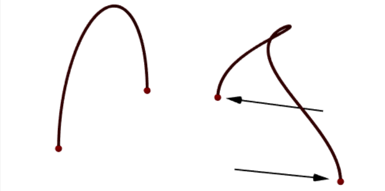


Figura 0.13: La curva de la izquierda tiene torsión cero. La curva de la derecha tiene torsión diferente de cero

Teorema

Sea C una curva obtenida a partir de una función vectorial regular $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de clase C^3. Tenemos que

$$\boxed{\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t))\cdot\mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\|^2}.}$$

Ejemplo

Un resorte en forma de hélice puede ser representado por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2\cos 2\pi t, 2\operatorname{sen} 2\pi t\rangle$. *Hallar la torsión del resorte en cada punto.*

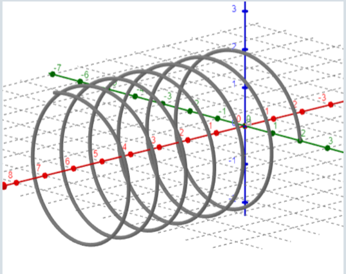


Figura 0.14: Resorte $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2\cos 2\pi t, 2\operatorname{sen} 2\pi t\rangle$.

Ejemplo

Un resorte en forma de hélice puede ser representado por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2\cos 2\pi t, 2\,\mathrm{sen}\, 2\pi t\rangle$. *Hallar la torsión del resorte en cada punto.*

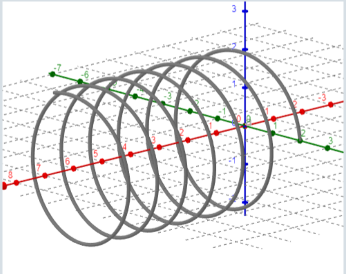


Figura 0.14: Resorte $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2\cos 2\pi t, 2\,\mathrm{sen}\, 2\pi t\rangle$.

Solución: *Primero, tenemos que*

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1, -4\pi\,\mathrm{sen}\, 2\pi t, 4\pi\cos 2\pi t\rangle \qquad \mathbf{r}''(t) = \langle 0, -8\pi^2\cos 2\pi t, -8\pi^2\,\mathrm{sen}\, 2\pi t\rangle$$

$$\mathbf{r}'''(t) = \langle 0, 16\pi^3\,\mathrm{sen}\, 2\pi t, -16\pi^3\cos 2\pi t\rangle.$$

Ejemplo

Por lo tanto,

$$\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2 = 32^2\pi^6 + 64\pi^4 \operatorname{sen}^2 2\pi t + 64\pi^4 \cos^2 2\pi t = 32^2\pi^6 + 64\pi^4$$

y

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t) \\
&\qquad = \langle 32\pi^3, 8\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi t, -8\pi^2 \cos 2\pi t\rangle \cdot \langle 0, 16\pi^3 \operatorname{sen} 2\pi t, -16\pi^3 \cos 2\pi t\rangle \\
&\qquad = 128\pi^5 \operatorname{sen}^2 2\pi t + 128\pi^5 \cos^2 2\pi t = 128\pi^5.
\end{aligned}$$

Luego

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)) \cdot \mathbf{r}'''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|^2} = \frac{128\pi^5}{32^2\pi^6 + 64\pi^4} = \frac{128\pi^5}{64\pi^4(16\pi^2 + 1)} = \frac{2\pi}{16\pi^2 + 1}.$$

Teorema fundamental de la teoría de curvas

Definición

El sistema

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{T}'(s) = \kappa(s)\boldsymbol{N}(s) \\ \boldsymbol{N}'(s) = \tau(s)\boldsymbol{B}(s) - \kappa(s)\boldsymbol{T}(s) \\ \boldsymbol{B}'(s) = -\tau(s)\boldsymbol{N}(s), \end{cases}}$$

es llamado ***fórmulas de Frenet-Serret****.*

Note que podemos escribirlas ecuaciones dadas en la definición anterior en la siguiente forma matricial:

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{T}'(s) \\ \mathbf{N}'(s) \\ \mathbf{B}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}(s) \\ \mathbf{N}(s) \\ \mathbf{B}(s) \end{bmatrix}.}$$

Teorema (Teorema fundamental de la teoría local de curvas)

Dadas dos funciones diferenciables $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, para $s \in I$, existe una curva regular C parametrizada por una función $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ tal que s es la longitud de arco, $\kappa(s)$ es su curvatura y $\tau(s)$ es su torsión para todo $s \in I$. Además de eso, otra curva $\tilde{C}$ que satisfaga las condiciones anteriores, puede ser obtenida de C por un movimiento rígido, esto es, $\tilde{C} = \Omega(C)$ para algún movimiento rígido Ω.

Supongamos que la curva C en el espacio tridimensional es parametrizada por longitud de arco $\mathbf{r} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$. La expansión de Taylor en torno de 0 para esta parametrización es dada por

$$\boxed{\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + s\mathbf{r}'(0) + \tfrac{s^2}{2}\mathbf{r}''(0) + \tfrac{s^3}{6}\mathbf{r}'''(0) + \mathbf{R}(s),}$$

donde $\lim\limits_{s\to 0} \frac{\mathbf{R}(s)}{s^3} = \vec{0}$. Dado que $\mathbf{r}'(s) = \mathbf{T}(s)$, tenemos $\mathbf{r}''(s) = \mathbf{T}'(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$ y así

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'''(s) &= (\kappa(s)\mathbf{N}(s))' = \kappa'(s)\mathbf{N}(s) + \kappa(s)\mathbf{N}'(s) = \kappa'(s)\mathbf{N}(s) + \kappa(s)[\tau(s)\mathbf{B}(s) - \kappa(s)\mathbf{T}(s)] \\ &= \kappa'(s)\mathbf{N}(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{B}(s) - \kappa^2(s)\mathbf{T}(s). \end{aligned}$$

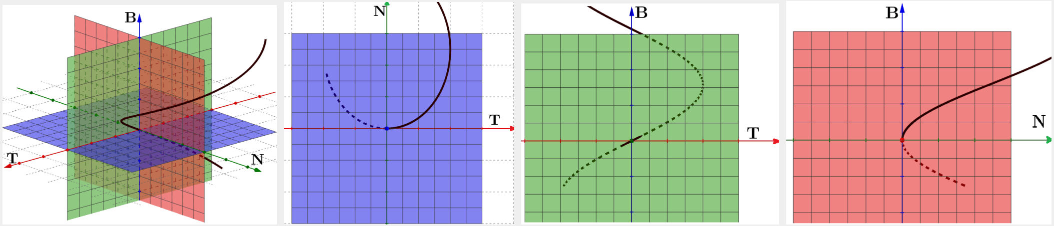
Al evaluar estas expresiones en 0 y reemplazando en la expansión de Taylor de $\mathbf{r}$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \mathbf{r}(0) + s\mathbf{T}(0) + \frac{s^2}{2}\kappa(0)\mathbf{N}(0) + \frac{s^3}{6}[\kappa'(0)\mathbf{N}(0) + \kappa(0)\tau(0)\mathbf{B}(0) - \kappa^2(0)\mathbf{T}(0)] + \mathbf{R}(s) \\ &= \mathbf{r}(0) + \left[s - \kappa^2(0)\frac{s^3}{6}\right]\mathbf{T}(0) + \left[\frac{s^2}{2}\kappa(0) + \frac{s^3}{6}\kappa'(0)\right]\mathbf{N}(0) + \frac{s^3}{6}\kappa(0)\tau(0)\mathbf{B}(0) + \mathbf{R}(s). \end{aligned}$$

Podemos realizar un cambio de coordenadas (o una traslación) de tal modo que el punto inicial de la curva es el origen, es decir, $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$, y además de eso. dado que $\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0)$ es una base de $\mathbb{R}^3$, tenemos que las ecuaciones paramétricas de C, expresadas en esta base, son dadas por

$$\boxed{x(s) = s - \kappa^2(0)\tfrac{s^3}{6} + R_x(s)\, y(s) = \tfrac{s^2}{2}\kappa(0) + \tfrac{s^3}{6}\kappa'(0) + R_y(s)\, z(s) = \tfrac{s^3}{6}\kappa(0)\tau(0) + R_z(s),}$$

donde $\mathbf{R}(s) = \langle R_x(s), R_y(s), R_z(s)\rangle$. Las ecuaciones anteriores son llamadas **forma canónica local** de la curva C en torno de $s = 0$. Note que en la base ordenada $\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0)$, el plano osculador hace el papel del plano xy, el plano rectificante hace el papel del plano xz y el plano normal hace el papel del plano yz. En la Figura 0.15 mostramos la curva C en el sistema de coordenadas dado por el triedro de Frenet-Serret y las proyecciones de la curva en los planos osculador, rectificante y normal.



(a) Curva C **(b)** Plano osculador **(c)** Plano rectificante **(d)** Plano normal

Figura 0.15: Forma canónica local