

# 4. Integrales múltiples

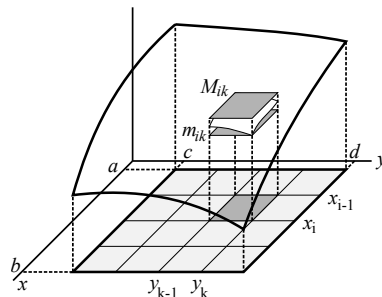
## 4.1 Integrales dobles

[Las demostraciones son similares a las de  $\mathbf{R}$  y hacemos pocas].

Generalizamos la definición de la integral en una variable. Sea  $f(x, y)$  **acotada** en un **rectángulo**  $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$ . Dividimos  $R$  en  $n \times n$  subrectángulos iguales  $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ , de área  $\Delta x \Delta y = \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n}$ . Llamamos  $M_{ij}$  y  $m_{ij}$ , respectivamente, al supremo e ínfimo de  $f$  en cada  $R_{ij}$  y construimos las **sumas superior**  $U_n$  e **inferior**  $L_n$ :

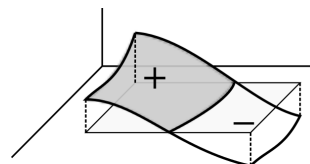
$$U_n = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \Delta x \Delta y, \quad L_n = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \Delta x \Delta y$$

(sumas de volúmenes de prismas, una mayor y otra menor que el volumen que encierra  $f(x, y)$  si  $f \geq 0$ ).



Si ambas sucesiones  $\{L_n\}$  y  $\{U_n\}$  tienen un mismo límite, se dice que  $f$  es **integrable** en  $R$ , se representa el límite común por  $\iint_R f$  ó  $\iint_R f(x, y) dx dy$  y se le llama **integral** de  $f$  en  $R$ .

$\iint_R f$  representará (similar a lo que sucedía en  $\mathbf{R}$ ) la suma de los volúmenes encerrados entre la gráfica de  $f$  y el plano  $z=0$  en  $R$ , con signos + o - adecuados. Y al igual que allí:



**Teor 1.**  $f$  continua en  $R \Rightarrow f$  integrable en  $R$ .

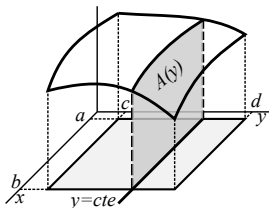
También aquí las funciones ‘poco’ discontinuas siguen siendo integrables:

**Teor 2.** Si el conjunto de puntos de  $R$  en que una  $f$  acotada es discontinua es como máximo un número finito de puntos y un número finito de gráficas de funciones continuas, entonces  $f$  es integrable en  $R$ .

Para calcular integrales dobles no necesitaremos la definición, el problema se reduce a calcular dos integraciones sucesivas de funciones de una variable:

**Teorema de Fubini:**

$$f \text{ continua en } R \Rightarrow \iint_R f = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$



Para cada  $y$  constante  $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  representa el área de la sección del sólido determinado por la gráfica de  $f$ ; integrando esta  $A(y)$  entre  $c$  y  $d$  obtenemos el volumen dado por  $\iint_R f = \int_c^d A(y) dy$ . La segunda igualdad es lo simétrico.

[Hay funciones raras (discontinuas, claro) para las que el teorema falla].

**Ej 1.** Sean  $R = [0, \pi] \times [0, 1]$  y  $f(x, y) = 2x - y \sin x$ . Calcular la integral es fácil:

$$\iint_R f = \int_0^\pi \left[ \int_0^1 (2x - y \sin x) dy \right] dx = \int_0^\pi \left[ 2xy - \frac{y^2 \sin x}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^\pi \left( 2x - \frac{\sin x}{2} \right) dx = \left[ x^2 + \frac{\cos x}{2} \right]_0^\pi = \pi^2 - 1.$$

O también podríamos hacer (los corchetes entre las integrales no se suelen escribir):

$$\iint_R f = \int_0^1 \int_0^\pi (2x - y \sin x) dx dy = \int_0^1 \left[ x^2 + y \cos x \right]_0^\pi dy = \int_0^1 (\pi^2 - 2y) dy = \pi^2 - \left[ y^2 \right]_0^1 = \pi^2 - 1.$$

[No olvidemos que la **integral de una constante es la constante por la longitud del intervalo**].

**Ej 2.**  $\int_c^d \int_a^b f(x) g(y) dx dy = \int_c^d g(y) \left[ \int_a^b f(x) dx \right] dy = \left[ \int_a^b f(x) dx \right] \left[ \int_c^d g(y) dy \right]$ . [Estos atajos se hacen a menudo].

Generalicemos el recinto de integración. Sea ahora  $D$  **región acotada del plano**. Definamos sobre un rectángulo  $R$  que contenga a  $D$  la función  $f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases}$ .

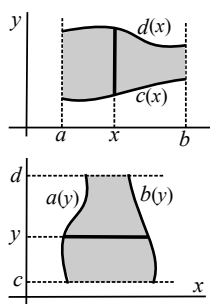
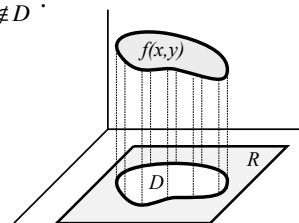
Se define entonces  $\iint_D f = \iint_R f^*$  si  $f^*$  es integrable.

Describe, si  $f \geq 0$ , el **volumen** limitado por la gráfica de  $f$  en  $D$ .

[Y en el caso particular en que  $f = 1$ , representará el **área** de  $D$ ].

Si la frontera de  $D$  se puede poner como unión finita de gráficas de funciones continuas y  $f$  es continua ya sabemos que  $\iint_D f$  existirá.

Consideremos **dos tipos sencillos** de regiones  $D$  de integración (otras más complicadas se podrán descomponer en varias de esa forma). A la vista del significado de  $\iint_R f^*$  está claro que:



**Teor 3.**

i) Si  $f$  continua en  $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ , con  $c(x) \leq d(x)$  continuas en  $[a, b] \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$ .

ii) Si  $f$  continua en  $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ , con  $a(y) \leq b(y)$  continuas en  $[c, d] \Rightarrow \iint_D f = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy$ .

[Cuando  $x$  varía entre  $a$  y  $b$ , la  $y$  varía entre  $c(x)$  y  $d(x)$ , e igual la otra].

**Ej 3.** Integremos  $f(x, y) = x \cos(x+y)$  sobre el  $D$  del dibujo:

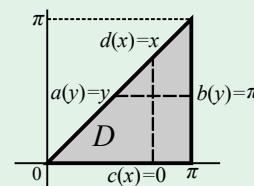
$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_0^\pi \int_0^x x \cos(x+y) dy dx = \int_0^\pi x [\sin 2x - \sin x] dx \\ &= \left[ x \left( \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \left[ \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \right] dx = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

O, con cálculos algo más largos, integrando primero respecto a  $x$ :

$$\iint_D f = \int_0^\pi \int_y^\pi x \cos(x+y) dx dy \stackrel{\text{partes}}{=} \int_0^\pi [-\pi \sin y - \cos y - y \sin 2y - \cos 2y] dy = -\frac{3\pi}{2}.$$

A veces, no sólo es preferible integrar primero respecto de una de las variables y luego respecto de la otra, sino que no tenemos otra opción. Por ejemplo, si fuese  $f(x, y) = \sin x^2$ , no se podría hallar  $\int_0^\pi \left[ \int_y^\pi \sin x^2 dx \right] dy$ , por ser la primitiva no calculable, pero sí se puede hacer:

$$\int_0^\pi \left[ \int_0^x \sin x^2 dy \right] dx = \int_0^\pi x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} (1 - \cos \pi^2).$$



En recintos más complicados se dividirá  $D$ . La integral será la suma de las integrales sobre cada subconjunto:

**Ej 4.** Integremos sobre la región  $D$  acotada por  $y = |x| - 1$  e  $y = \frac{x^2}{4}$ .

$$\iint_D f = \int_{-2}^0 \int_{-x-1}^{x^2/4} f(x, y) dy dx + \int_0^2 \int_{x-1}^{x^2/4} f(x, y) dy dx$$

O como  $y = x^2/4 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{y}$ ,  $y = \pm x - 1 \Leftrightarrow x = \pm(y+1)$ , se puede hacer (hallando más integrales) también de esta forma:

$$\int_0^1 \int_{-2\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{y+1} f(x, y) dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-y-1}^{y+1} f(x, y) dx dy.$$

Si en particular integramos  $f \equiv 1$  obtendremos el **área** de  $D$ :

$$A = \iint_D 1 = \int_{-2}^0 \left( \frac{x^2}{4} + x + 1 \right) dx + \int_0^2 \left( \frac{x^2}{4} - x + 1 \right) dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

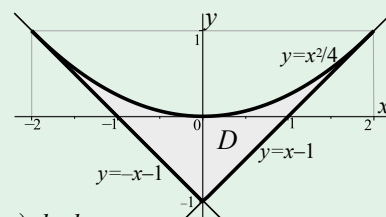
[**Integrales iguales por ser  $f \equiv 1$  par en  $x$  y  $D$  simétrica respecto a  $x=0$ ; bastaba hacer  $2 \int_0^2$ ].**

O peor:  $A = \iint_D 1 = 2 \int_0^1 [y+1-2\sqrt{y}] dy + 2 \int_{-1}^0 [y+1] dy = 2 \frac{1}{6} + 1 = \frac{4}{3}$  [1 = área triángulo].

Tomemos ahora  $f(x, y) = 3xy^2$  y calculemos la integral por el primer camino:

$$\iint_D f = \int_{-2}^0 [xy^3]_{-x-1}^{x^2/4} dx + \int_0^2 [xy^3]_{x-1}^{x^2/4} dx = \dots = -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0.$$

[**Debía anularse por ser  $f$  impar en  $x$  y  $D$  simétrica respecto a  $x=0$ . El 'volumen negativo' dado por la gráfica de  $f$  en la parte de  $D$  con  $x \leq 0$  se cancela con el positivo que da la de  $x \geq 0$ ].**



Otro ejemplo, y de paso repasamos algo más de integrales de funciones de una variable. Antes de los ejemplos en polares repasaremos también como integrar funciones trigonométricas y algunas raíces.

**Ej 5.** Calculemos la integral  $\iint_D \frac{y}{x+1} dx dy$ , siendo  $D$  la región acotada por  $x=0$ ,  $y=1$  y  $x=y^2$ .

Para  $x \neq -1$  el integrando es continuo y sabemos que la integral va a existir.  
Es algo más corto este orden de integración:

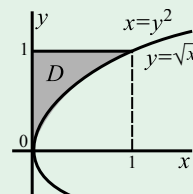
$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{x+1} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-x}{x+1} dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \right] dx = \ln|x+1| \Big|_0^1 - \frac{1}{2} = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

- En integrales racionales, **si el grado del numerador no es menor primero se divide**, (el paso siguiente, si fuera necesario, sería **descomponer en fracciones simples**).

Es más largo con el otro orden de integración (exige integrar por partes y hacer otra racional):

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{y}{x+1} dx dy = \int_0^1 y \ln(1+y^2) dy = \frac{y^2}{2} \ln(1+y^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y^3+y-y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

- Pide las partes por mejorar los logaritmos al ser derivados, aunque aumente la potencia de la  $y$ . En otras típicas partes como  $xe^x$  o  $x^2 \cos x$  se derivan las  $x^n$  por no estropearse las otras al integrarlas.



## Cambios de variable

Generalicemos para integrales dobles la fórmula para integrales en  $\mathbf{R}$ :

$$\int_a^b f(g(u)) g'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx, \text{ con } g \in C^1([a, b]).$$

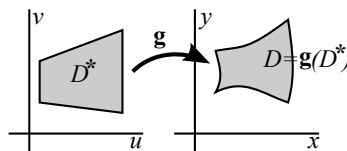
En concreto, el caso de  $g$  **inyectiva** (creciente o decreciente) en  $[a, b]$ :

$$\int_{[a,b]} f(g(u)) |g'(u)| du = \int_{g([a,b])} f(x) dx.$$

En  $\mathbf{R}^2$  nuestra situación será esta: para calcular  $\iint_D f(x, y) dx dy$

realizaremos un cambio de variable  $\mathbf{g} : D^* \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbf{R}^2$

$$(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$$



con el fin de que el nuevo recinto  $D^*$  o la nueva función a integrar sean más sencillas. El papel de la  $|g'(u)|$  lo cumplirá aquí el valor absoluto del determinante jacobiano.

**Teor 3.**

Sea  $\mathbf{g} : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$  de  $C^1$ , inyectiva en  $D^*$ ,  $\mathbf{g}(D^*) = D$  y  $f$  integrable.

$$\text{Entonces: } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

La demostración es complicada y no se da. Pero hacemos observaciones sobre hipótesis y resultado.

- El teorema sigue siendo cierto aunque  $\mathbf{g}$  deje de ser inyectiva en puntos sueltos o curvas continuas.
- Si el determinante jacobiano  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$  en un punto, el teorema de la función inversa asegura que  $\mathbf{g}$  es inyectiva en un entorno de ese punto, pero sabemos que aunque no se anule en ningún punto de  $D^*$  esto no basta para que sea inyectiva en todo el conjunto  $D^*$ .
- En caso de ser  $f \equiv 1$  queda  $\iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \text{área de } D$ , con lo que el jacobiano viene a ser una medida de cómo un cambio de variable distorsiona el área.

Si  $D^*$  es un **pequeño rectángulo** del plano  $uv$ , al ser  $\mathbf{g}$  diferenciable una buena aproximación es

$$\mathbf{g}(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v) \approx \mathbf{g}(u_o, v_o) + \mathbf{Dg}(u_o, v_o)(\Delta u, \Delta v),$$

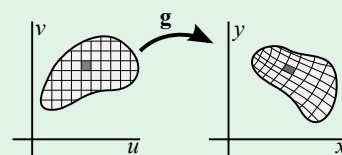
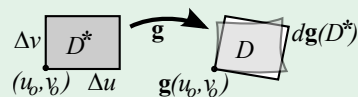
y así  $D = \mathbf{g}(D^*)$  será 'aproximadamente igual' al paralelogramo  $\mathbf{Dg}(D^*)$  con vértice  $\mathbf{g}(u_o, v_o)$  y cuyos lados son

$$\mathbf{Dg}(\Delta u, 0) = \Delta u \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{Dg}(0, \Delta v) = \Delta v \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}.$$

Este paralelogramo tiene por área el valor absoluto de  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v$   
[pues  $|(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0)| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$  mide áreas].

Si  $D^*$  es un **conjunto más general**, el área de  $D = \mathbf{g}(D^*)$  pasa a

ser aproximadamente  $\sum \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$ , expresión que en el límite será la integral sobre  $D^*$ .



Como primer ejemplo de cambio de variable consideramos los **cambios lineales**:

$$\begin{cases} x = Au + Bv \\ y = Cu + Dv \end{cases} \cdot \text{Si } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0 \text{ define biyección de } \mathbf{R}^2 \text{ en } \mathbf{R}^2.$$

$$\rightarrow \iint_D f(x,y) dx dy = |AD - BC| \iint_{D^*} f(Au + Bv, Cu + Dv) du dv.$$

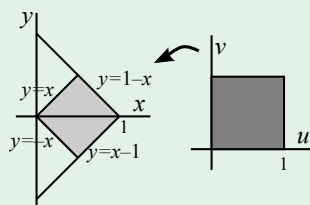
[Las regiones se transforman de forma sencilla porque **las aplicaciones lineales llevan rectas a rectas**].

**Ej 6.** Sea  $D$  el cuadrado de la figura y hallemos  $\iint_D (x-y)^2 e^{x+y} dx dy$ .

La forma de  $f$  y el recinto sugieren:  $\begin{cases} x+y=u \\ x-y=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=(u+v)/2 \\ y=(u-v)/2 \end{cases}$ .

Las rectas que definen los lados pasan a ser:  $u=0, 1, v=0, 1$ .

El jacobiano es  $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$ . Luego  $\iint_D = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 v^2 e^u du dv = \frac{e-1}{6}$ .



Hacemos otro ejemplo que usa un cambio de variable más complicado (que tanteando se nos podría ocurrir):

**Ej 7.** Hallemos el área de la región  $D$  limitada en  $x \geq 0$  por  $y=x$ ,  $y=x-6$ ,  $y=-x^2$ ,  $y=2-(x-2)^2$ ,  
i) integrando directamente en cartesianas, ii) haciendo el cambio:  $x=u+v$ ,  $y=v-u^2$ .

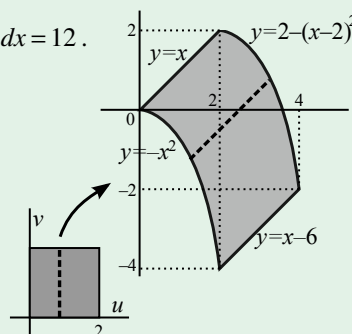
i)  $A = \int_0^2 \int_{-x^2}^x dy dx + \int_2^4 \int_{x-6}^{-x^2} dy dx = \int_0^2 (x+x^2) dx + \int_2^4 (4+3x-x^2) dx = 12$ .

ii)  $\begin{cases} x=u+v \\ y=v-u^2 \end{cases}$  lleva  $\begin{matrix} u=0 \rightarrow y=x, & u=2 \rightarrow y=x-6, \\ v=0 \rightarrow y=-x^2, & v=2 \rightarrow (x-2)^2=2-y. \end{matrix}$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2u & 1 \end{vmatrix} = 1+2u \neq 0$  en  $D^*$ , y el cambio es inyectivo en  $D^*$  pues lleva  $u=a$  a rectas  $y=x-a-a^2$  del plano  $xy$ , distintas para cada  $a \geq 0$ .

[No es inyectiva en  $\mathbf{R}^2$  pues, por ejemplo,  $u=-1$  va también a  $y=x$ ].

Por tanto,  $A = \int_0^2 \int_0^2 (1+2u) du dv = 2[u+u^2]_0^2 = 12$ .

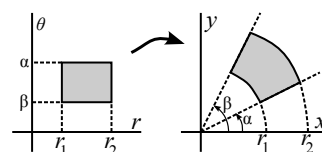


Pero el cambio que más a menudo aparece y nos será más útil es el **cambio a polares**:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \cdot \text{El jacobiano es ahora: } J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Y la fórmula del cambio adopta la forma:  $\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$ .

¿Qué conjuntos  $D$  provienen de otros  $D^*$  sencillos del plano  $r\theta$ ?  
Un rectángulo  $[r_1, r_2] \times [\alpha, \beta]$  pasa a ser un sector de corona circular limitado por las circunferencias de radio  $r_1$  y  $r_2$  y las rectas que pasan por el origen de pendientes  $\alpha$  y  $\beta$ .



Si queremos hallar el área en polares de una región  $D$  limitada en  $\theta \in [\alpha, \beta]$  por  $r=g(\theta)$  y  $r=h(\theta)$ , con  $g \leq h$ , será:

$$\text{área} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g(\theta)}^{h(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [h^2(\theta) - g^2(\theta)] d\theta,$$

(coincidente con lo que se dice en mis apuntes de matemáticas).

Como este cambio lleva a senos y cosenos, repasamos antes de los ejemplos las **integrales trigonométricas**.

Se integran  $\sin^m \theta \cos^n \theta$ ,  $m$  y  $n$  ambas **pares**, mediante las fórmulas  $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ ,  $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ .

Si  $m$  o  $n$  es **impar**, son casi inmediatas buscando  $\sin \theta d\theta$  o  $\cos \theta d\theta$  [usando, tal vez,  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ].

Los cocientes de trigonométricas, según sea su paridad, pasan a racionales con  $\sin \theta = t$ , o con  $\cos \theta = t$ , o con  $\tan \theta = t$ . Y, en cualquier caso, con el cambio más largo  $t = \tan \frac{\theta}{2}$ .

Las integrales  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$  se convierten en trigonométricas haciendo  $x = a \sin t$ .

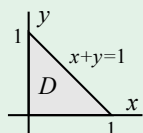
En el primer ejemplo de polares, tanto el recinto como el  $x^2 + y^2$  del integrando las pedían a gritos:

**Ej 8.** Hallemos  $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$ , con  $D$  el sector circular del dibujo:

$$\iint_{D^*} r \sqrt{4-r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[ \int_0^2 r (4-r^2)^{1/2} dr \right] d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{3} (4-r^2)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}$$

el  $[\cdot]$  no depende de  $\theta$       octante de esfera ↗

Obsérvese que el cambio a polares no es inyectivo en el lado izquierdo del rectángulo  $D^*$  (todos los puntos con  $r=0$  van al origen), pero como ya dijimos, **no importa que falle la inyectividad en puntos o rectas sueltas.**

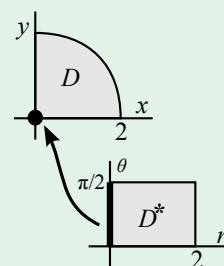


En otros  $D$  el cambio a polares complicará normalmente el recinto.

Por ejemplo, el triángulo del dibujo daría lugar a la integral:

$$\iint_D f = \int_0^{\pi/2} \int_0^{1/(\sin \theta + \cos \theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

y no haríamos el cambio salvo que  $f$  se simplificase notablemente.



Aunque la  $f$  es inofensiva, aquí es el recinto el que pide usar polares:

**Ej 9.** Calcular la integral doble  $\iint_D (x-y)^2 dx dy$ , siendo  $D$  el semicírculo dado por  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$ .

En polares es  $(r \cos \theta - r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) = r^2 (1 - \sin 2\theta)$ .  
a simple vista, no se han precisado las fórmulas del ángulo doble

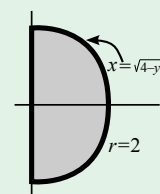
Por tanto:  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 (1 - \sin 2\theta) dr d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin 2\theta) d\theta = 4\pi$ .  
↑ por el jacobiano      ↑ es impar y su integral es 0

Debía ser  $> 0$  por ser el integrando positivo. Las **simetrías simplifican** muchas integrales.

En cartesianas los cálculos serían bastante más largos:

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 - 2xy + y^2) dx dy = \int_{-2}^2 \left( \underbrace{y^3 - 4y}_{\text{impares}} + \underbrace{\frac{2}{3} (y^2 + 2) \sqrt{4-y^2}}_{\text{pares}} \right) dy = \frac{4}{3} \int_0^2 (y^2 + 2) \sqrt{4-y^2} dy$$

$$\left[ \begin{array}{l} y=2 \sin t, y=2 \rightarrow t=\frac{\pi}{2} \\ dy=2 \cos t = \sqrt{4-y^2} \end{array} \right] \rightarrow = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (8s^2 + 4) c^2 dt = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} (3 + 2 \cos 2t - \cos 4t) dt = 4\pi.$$



Uno en otro recinto igual de sencillo para repasar las integrales con potencias impares:

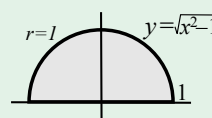
**Ej 10.** Calculemos  $I = \iint_D (x^4 y + 3y^3) dx dy$ ,  $D$  semicírculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ .

En polares:  $\int_0^{\pi} \int_0^1 (r^6 \cos^4 \theta \sin \theta + 3r^4 \sin^3 \theta) dr d\theta = \int_0^{\pi} \left[ \frac{1}{7} c^4 s + \frac{3}{5} s (1-c^2) \right] d\theta$

Y todas las integrales son ya inmediatas. En concreto es:  $I = \left[ -\frac{1}{35} \cos^5 \theta - \frac{3}{5} \cos \theta + \frac{1}{5} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi} = \frac{6}{7}$ .

Las potencias impares suelen dar cálculos sencillos también en cartesianas. Comprobémoslo:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^4 y + 3y^3) dy dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 [2x^4 (1-x^2) + 3(1-x^2)^2] dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (3-6x^2+5x^4-2x^6) dx = \frac{6}{7}.$$



En el siguiente ejemplo, aunque el recinto no parecería adecuado a las polares, por no estar limitado por curvas  $r = cte$  o  $\theta = cte$ , el aspecto del integrando las pide indudablemente:

**Ej 11.** Integremos  $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ , sobre el semicírculo  $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ ,  $y \geq 1$ .

Las curvas que limitan el recinto, escritas en polares quedan:

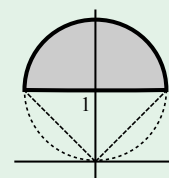
$$y = r \sin \theta = 1 \rightarrow r = 1/\sin \theta, \quad x^2 + y^2 = 2y, \quad r^2 = 2r \sin \theta \rightarrow r = 2 \sin \theta.$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{1/\sin \theta}^{2 \sin \theta} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} dr d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2 \sin^2 \theta - 1) d\theta = -\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 1.$$

Las cuentas se complican bastante si se intentan hacer de cualquier forma en cartesianas:

$$\int_{-1}^1 \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{x^2 + y^2} dy dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\ln 2 + \ln(1 + \sqrt{1-x^2}) + \ln(1+x^2)] dx = \dots$$

O peor:  $\int_1^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy = [\text{par en } x] = 2 \int_1^2 \left[ \arctan \frac{x}{y} \right]_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy = \int_1^2 \arctan \frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{y}} dy = \dots$



Usemos el cambio a polares para hallar el valor de una famosa integral impropia convergente de una variable que tiene primitiva no elemental:

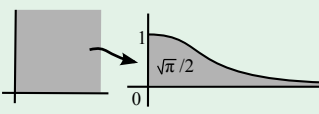
**Ej 12.** Para calcular  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$  consideramos la integral doble:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx dy = \int_0^\infty I e^{-y^2} dy = I^2.$$

En polares es:  $\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$

$\uparrow$  integrando par

$\infty$  es un límite como en toda impropia

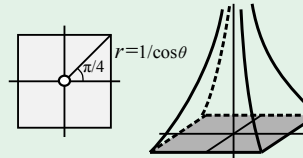


También pide polares esta impropia (aquí por no estar acotada en el origen), convergente pese a su aspecto:

**Ej 13.** Calculemos la impropia  $\iint_R \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$ , con  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ .

$$\iint_R \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^{1/2}} = 8 \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^{\pi/4} \int_t^{1/\cos \theta} \frac{r}{r} dr d\theta = 8 \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos \theta} \equiv I.$$

(en polares deja de ser impropia) (se puede hallar por dos caminos)



Por ser el integrando impar en  $\cos \theta$  lo buscamos como diferencial:

$$I = 8 \int_0^{\pi/4} \frac{\cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} d\theta = [\sin \theta = s] = 8 \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{ds}{1-s^2} = 4 \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[ \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} \right] ds = \dots = 8 \log(1 + \sqrt{2}) \approx 7.05.$$

[El volumen es finito, pero las secciones con el plano  $x=0$  o con el  $y=0$  tienen área infinita].

La integral es también calculable (y no larga) con el cambio de último recurso  $\tan \frac{\theta}{2} = u$

En los libros de cálculo en  $R$  se puede leer que  $\sin \theta = \frac{2u}{1+u^2}$ ,  $\cos \theta = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ ,  $d\theta = \frac{2du}{1+u^2}$ . Por tanto:

$$I = 8 \int_0^{\tan \pi/8} \frac{1+u^2}{1-u^2} \frac{2}{1+u^2} du = 8 \int_0^{\tan \pi/8} \left[ \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right] du = 8 \log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \Big|_0^{\tan \pi/8} \approx 7.05.$$

Pequeñas **modificaciones del cambio a polares** son útiles en los dos siguientes ejemplos:

**Ej 14.** Hallemos  $\iint_D y dx dy$ ,  $D$  región dada por  $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ ,  $y \geq 0$ .

Las coordenadas más adecuadas son las polares centradas en  $(1, 0)$ :

$$x = 1 + u \cos v, y = u \sin v, \text{ cuyo jacobiano es } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u.$$

Como  $(x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow u = 1$  es:  $\iint_D y = \int_0^\pi \int_0^1 u^2 \sin v du dv = \left[ \frac{u^3}{3} \right]_0^1 \Big|_0^\pi = \frac{2}{3}.$

Aunque la integral no es complicada en cartesianas (de las dos formas) y en las polares habituales:

$$\iint_D y = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (2x-x^2) dx = \frac{1}{2} \left[ 4 - \frac{8}{3} \right] = \frac{2}{3}.$$

$$\iint_D y = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} y dx dy = \int_0^1 2y(1-y^2)^{1/2} dy = -\frac{2}{3} \left[ (1-y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\iint_D y = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \left[ -\cos^4 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

$x^2 + y^2 = 2x$ ,  $r^2 = 2r \cos \theta$ ,  $r = 2 \cos \theta$

Más veces en el curso utilizaremos este cambio para las elipses:

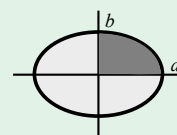
**Ej 15.** Calculemos el área  $A$  de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

El cambio a polares no es útil, pero sí este modificado:  $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$ ,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr. \text{ La elipse pasa a ser } r=1 \rightarrow A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\theta = \pi ab.$$

[Con integrales en  $\mathbf{R}$ :  $A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab$ ].

$x = a \sin t$ ,  $dx = a \cos t dt$





Veamos más **aplicaciones** de las integrales dobles (las fórmulas serán análogas para  $\mathbf{R}^3$ ). Además del **área** de  $D$  [ $A = \iint_D dx dy$ ], y del **volumen** en  $D$  bajo la gráfica de una  $f$  positiva [ $V = \iint_D f$ ], se tiene que el **volumen sobre  $D$  entre las gráficas de dos funciones acotadas**  $f(x, y) \leq g(x, y)$ , viene dado por  $V = \iint_D (g - f) dx dy$ , independientemente de los signos de cada una de ellas.

[Basta tomar una constante  $C$  tal que  $f+C$  sea positiva y pensar en la  $\iint_D (g+C-(f+C))$ ].

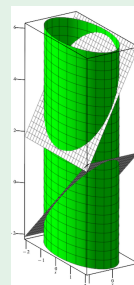
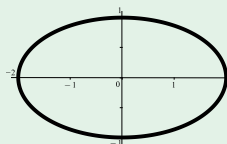
**Ej 16.** Hallemos el volumen del sólido comprendido entre  $z=x$  y  $z=4+2y$  sobre la elipse  $x^2+4y^2 \leq 4$ .

Con  $x=2r \cos \theta$ ,  $y=r \sin \theta$ ,  $J=2r$ , siendo  $x \leq 2 \leq 4+2y$  sobre la elipse:

$$V = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (8r + r^2 [4 \sin \theta - 2 \cos \theta]) d\theta dr = 16\pi \int_0^1 r dr = 8\pi.$$

Peor:  $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2} (2y-x+4) dy dx = \int_{-2}^2 (4-x) \sqrt{4-x^2} dx = 8 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \dots$

O esto:  $\int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} (2y-x+4) dx dy = 8 \int_{-1}^1 (y+2) \sqrt{1-y^2} dy = 32 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \dots$



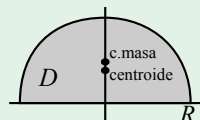
Más aplicaciones de utilidad física: El **promedio** de una magnitud  $f$  sobre  $D$  es  $\bar{f} = \frac{1}{A} \iint_D f$ .

Si  $\sigma(x, y)$  es la **densidad** de una placa  $D$ , su **masa** es  $M = \iint_D \sigma(x, y) dx dy$ .

El **centro de masa** de la  $D$  es el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  de coordenadas  $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \sigma$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \sigma$  [se llama **centroide** si  $\sigma = \text{cte}$ , y será  $\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y$  (el promedio de sus  $x$  e  $y$ )].

Los **momentos de inercia** respecto a los ejes  $x$  e  $y$  son:  $I_x = \iint_D y^2 \sigma$ ,  $I_y = \iint_D x^2 \sigma$ .

**Ej 17.** Sea un semicírculo  $D$  de radio  $R$  de densidad directamente proporcional a la distancia al centro de  $D$ . Hallemos su centroide, su centro de gravedad y sus momentos de inercia.



Se puede probar que **si una lámina tiene un eje de simetría, su centroide está en dicho eje** (y si tiene dos, está en su intersección). Por tanto,  $\bar{x}_c = 0$ . La otra

$$\bar{y}_c = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42 R.$$

Para el centro de gravedad hay que incluir la densidad  $\sigma(r) = kr$  (simétrica). También será  $\bar{x} = 0$ .

Como la masa es  $M = \int_0^\pi \int_0^R kr^2 dr d\theta = \frac{\pi k}{3} R^3$ , será  $\bar{y} = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^\pi \int_0^R r^3 \sin \theta dr d\theta = \frac{3R}{2\pi} \approx 0.48 R$ .

Los momentos son:  $I_x = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^2 \theta dr d\theta = \frac{\pi k}{10} R^5$ ,  $I_y = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{\pi k}{10} R^5$ .

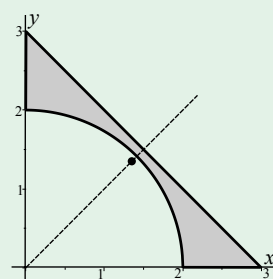
**Ej 18.** Hallemos el centro de masas de la región del primer cuadrante dada por  $x^2+y^2 \geq 4$ ,  $x+y \leq 3$  y cuya densidad es  $\sigma(x, y) = xy$ .

$$\begin{aligned} \text{La masa es } M &= \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{3-x} xy dy dx + \int_2^3 \int_0^{3-x} xy dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (5x - 6x^2 + 2x^3) dx + \frac{1}{2} \int_2^3 (9x - 6x^2 + x^3) dx = \frac{11}{8}. \end{aligned}$$

La  $\bar{x}$  y la  $\bar{y}$  serán iguales por simetría de la región y de la densidad.

$$\begin{aligned} M \bar{x} &= \int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{3-x} x^2 y dy dx + \int_2^3 \int_0^{3-x} x^2 y dy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (5x^2 - 6x^3 + 2x^4) dx + \frac{1}{2} \int_2^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4) dx = \frac{23}{12}. \end{aligned}$$

Luego  $\bar{x} = \bar{y} = \frac{46}{33} \approx 1.39$ .



**Ej 19.** Calculemos la distancia media de los puntos de un círculo de radio 3 al centro de ese círculo.

El área del círculo es  $A = \pi R^2 = 9\pi$ . Y en polares, la distancia es  $r$ .

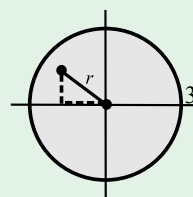
Por tanto, la distancia media:  $d_{\text{media}} = \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 dr d\theta = \frac{2}{9} \left[ \frac{1}{3} r^3 \right]_0^3 = 2$ .

Hallamos ahora en ese círculo la media para una nueva distancia definida por:

$$d^*((x, y), (a, b)) = |x-a| + |y-b| \quad (\text{caminando paralelos a los ejes}).$$

La distancia al origen es aquí:  $|x| + |y| = r(|\cos \theta| + |\sin \theta|)$ . Y entonces:

$$d_{\text{media}}^* = \frac{1}{9\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 (|\cos \theta| + |\sin \theta|) dr d\theta = \frac{4}{9\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^2 (\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta = \frac{8}{\pi} \quad (> 2, \text{ claro}).$$



## 4.2. Integrales triples

Análogamente a como hicimos para  $n=2$ , se define  $\iiint_P f$ , para una  $f(x, y, z)$  acotada y continua (o ‘poco discontinua’), inicialmente sobre un paralelepípedo  $P = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ . Representará un ‘volumen’ en un espacio de cuatro dimensiones, es decir, el del ‘sólido’ de cuatro dimensiones con ‘base’  $P$  y altura en cada punto la que le asigna  $f(x, y, z)$ . Nos serviría también para hallar la masa de un  $P$ . Las integrales triples se podrán de nuevo calcular mediante integrales iteradas:

$$f \text{ continua en } P \Rightarrow \iiint_P f = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

[o las otras 5 iteradas que salen permutando papeles de  $x, y, z$ ].

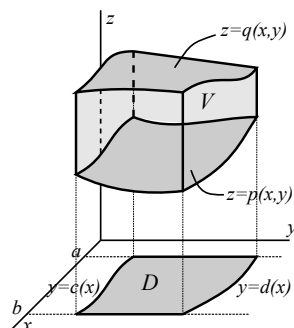
**Ej 1.** Si  $f(x, y, z) = 2yz - x$  y  $P = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$  es:

$$\iiint_P f = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2yz - x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (9y - 3x) dy dx = \int_0^1 (18 - 6x) dx = 15.$$

$$\text{O, por ejemplo, así: } \int_0^3 \int_0^1 \int_0^2 (2yz - x) dy dx dz = \int_0^3 \int_0^1 (4z - 2x) dx dz = \int_0^3 (4z - 1) dz = 18 - 3 = 15.$$

También podemos integrar sobre recintos  $V \subset \mathbb{R}^3$  más generales.

$$\begin{aligned} \text{Si } V = \{ (x, y, z) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y) \}, \\ \text{con } c \leq d \text{ continuas en } [a, b] \text{ y } p \leq q \text{ continuas en} \\ D = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}, \text{ y } f \text{ es continua en } V \\ \Rightarrow \iiint_V f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{p(x, y)}^{q(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx. \end{aligned}$$



Análogas fórmulas se obtienen intercambiando los papeles de  $x, y, z$ . Muchos recintos que aparecen están incluidos en algunos de esos tipos.

En el caso de que sea  $f \equiv 1$ ,  $\iiint_V dx dy dz$  representará el **volumen de  $V$** .

[Claro que los volúmenes se pueden calcular simplemente con integrales dobles, de la misma forma que para las áreas bastan las integrales de funciones de una variable. Pero con cambios de variable en la dimensión superior se consiguen abreviar bastantes veces los cálculos].

Lo más difícil de las integrales triples es dibujar gráficas, pero al menos debemos hacernos una idea de ellas para decidir qué funciones limitando los recintos son mayores o menores. En los dos primeros ejemplos, el volumen está limitado por planos. La escritura inicial  $dx dy dz$  es sólo alfabética.

**Ej 2.** Calculemos  $\iiint_V x dx dy dz$ , siendo  $V$  la región acotada por los planos:

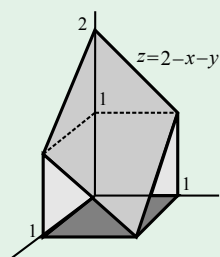
$$x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, x+y+z=2.$$

En el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  del plano  $xy$  está  $z=2-x-y$  por encima de  $z=0$ , y con ello se podría plantear la integral sin el dibujo (fácil cortando con planos).

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x-y} x dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (2x - x^2 - xy) dy dx \\ &= \int_0^1 (2x - x^2 - x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1) dx = \int_0^1 \left( \frac{3x}{2} - x^2 \right) dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

O un poquito más corto si cambiamos el orden de  $dx$  y  $dy$ . El primer paso es igual, y luego:

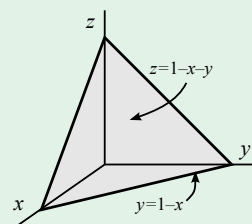
$$\int_0^1 \int_0^1 (2x - x^2 - xy) dx dy = \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y \right) dy = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$



**Ej 3.** Hallemos  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , con  $V$  tetraedro de vértices

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).$$

$$\begin{aligned} \iiint_V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \right] (1-x)^4 dx = \frac{1}{24} \int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5) dx = \frac{1}{720}. \end{aligned}$$



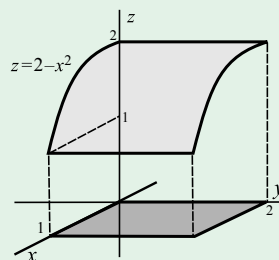


En el siguiente la base del recinto (su ‘sombra’) sigue siendo muy sencilla y su ‘tapa’ también se dibuja con facilidad, por tratarse de una función que no depende de una de las variables:

**Ej 4.** Calcular  $\iiint_V x e^z dx dy dz$ , siendo  $V$  el sólido limitado por  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ ,  $y=2$ ,  $z=0$  y la superficie  $z=2-x^2$ .

En  $[0, 1] \times [0, 2]$  es  $z=2-x^2 > 0$  (tampoco necesitaríamos el dibujo).

$$\begin{aligned}\iiint_V &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{2-x^2} x e^z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^2 x [e^{2-x^2} - 1] dy dx \\ &= \int_0^1 [2x e^{2-x^2} - 2x] dx = -[e^{2-x^2} + x^2]_0^1 = \boxed{e^2 - e - 1}.\end{aligned}$$



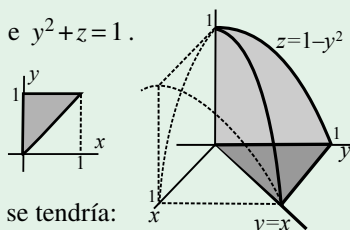
En el siguiente, con recinto un poco más complicado, debemos tener cuidado además con los órdenes de integración, pues algunos dan lugar a primitivas no calculables:

**Ej 5.**  $\iiint_V e^{-z} dx dy dz$ , con  $V$  acotado en  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  por  $x=y$ ,  $z=0$  e  $y^2+z=1$ .

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^y \int_0^{1-y^2} e^{-z} dz dx dy &= \frac{1}{2} \int_0^1 y (1 - e^{-y^2-1}) dy \\ &= \frac{1}{2} [y^2 - e^{-y^2-1}]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2e}}.\end{aligned}$$

[Si en vez de  $dz dx dy$ , por ejemplo, hubiéramos escogido  $dz dy dx$  se tendría:

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^{1-y^2} e^{-z} dz dy dx = \frac{1}{2} - e^{-1} \int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx, \text{ aparentemente no calculable].}$$



[Todas las integrales nos han salido positivas por estar integrando funciones positivas en cada recinto, pero, desde luego, las integrales triples pueden ser negativas].

## Cambios de variable.

Con hipótesis totalmente análogas a las del plano se tiene la siguiente fórmula para los cambios:

$$\text{Sea } \mathbf{g}: (u, v, w) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \text{ de } C^1, \text{ inyectiva en } V^*, \mathbf{g}(V^*) = V$$

$$\text{y } f \text{ integrable} \Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\mathbf{g}(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw.$$

[Vale aunque  $\mathbf{g}$  no sea inyectiva un número finito de puntos, curvas o superficies].

Hacemos un primer ejemplo en el que algo puede simplificar un sencillo cambio lineal:

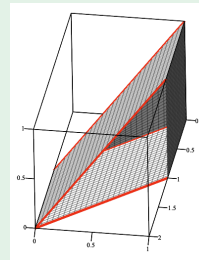
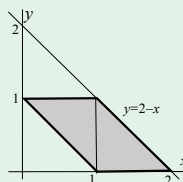
**Ej 6.** Si  $f(x, y, z) = xe^{x+y}$  y  $V$  está acotado por los planos  $y=0$ ,  $y=1$ ,  $x+y=1$ ,  $x+y=2$ ,  $z=0$  y  $z=y$  calculamos  $\iiint_V f$  con más orden de integración y haciendo también un cambio lineal.

$$\int_0^1 \int_{1-y}^{2-y} \int_0^y x e^{x+y} dz dx dy = \int_0^1 \int_{1-y}^{2-y} x y e^{x+y} dx dy = \int_0^1 [e^{2-y} (y-y^2) + e y^2] dy = \boxed{\frac{e^2}{6} + \frac{e}{3}}.$$

• Por partes  $\int x e^{x+y} dx = (x-1)e^{x+y}$

El habitual  $dz dy dx$  exige calcular dos integrales:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_0^y x e^{x+y} dz dy dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} \int_0^y x e^{x+y} dz dy dx \\ = \int_0^1 e x^2 dx + \int_1^2 [(x-x^2)e^2 + x e^x] dx = \dots = \frac{e}{3} + \frac{e^2}{6}.\end{aligned}$$



Tiene una sola integral el orden  $\int_0^1 \int_z^{2-y} \int_{1-y}^y x e^{x+y} dx dy dz = \dots$

Muy parecida a la inicial es a la que lleva:  $\int_0^1 \int_0^y \int_{1-y}^{2-y} x e^{x+y} dx dz dy = \int_0^1 \int_0^y [(1-y)e^2 + e y] dz dy = \dots$

La expresión de los planos sugiere claramente el **cambio**:  $u=x+y$ ,  $v=y$ ,  $w=z$  (es pues  $x=u-v$ ).

Su jacobiano es no nulo (y es por tanto una biyección en el espacio):  $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

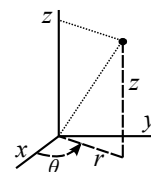
La integral se transforma, pues, en:

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_0^v (u-v) e^u dw dv du = \int_1^2 (\frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{3} e^u) dv = \dots = \frac{e}{3} + \frac{e^2}{6}.$$

Pero sobre todo nos van a interesar los cambios a coordenadas **cilíndricas y esféricas**. Definamos cada una y familiaricémonos con ellas antes de hacer integrales.

**Cilíndricas:**  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ . O sea, polares del plano  $xy$  junto con la coordenada  $z$ . Dar las cilíndricas de un  $(x, y, z)$  es trivial para la  $z$ , y además es  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , y se tiene que  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ .

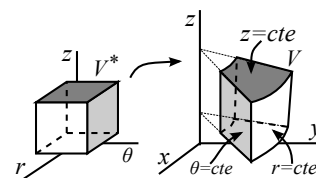
El jacobiano es:  $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$  [localmente invertible si  $r > 0$ , e inyectiva en  $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$  (o si elegimos  $-\pi < \theta \leq \pi$ )].



Por tanto la fórmula del cambio de variable adopta aquí la forma:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dr d\theta dz$$

¿Qué conjuntos del espacio son sencillos en cilíndricas? Los puntos  $r = cte$  son una superficie cilíndrica, y los  $\theta = cte$  y  $z = cte$  planos (vertical y horizontal). Un paralelepípedo  $V^*$  pasa a ser un  $V$  como el de la derecha.

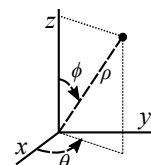


Suelen pedir cilíndricas las superficies de revolución. Y admiten modificaciones como las vistas con polares si, por ejemplo, tratamos con cilindros elípticos o no centrados en el eje  $z$ .

[Utilizando la regla de la cadena, y trabajando como hicimos con las polares, podemos deducir expresiones para el gradiente y el Laplaciano en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\theta &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_z &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \nabla f &= f_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_z \mathbf{e}_z \\ \Delta f &= f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + f_{zz} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{[ortogonales} \\ &\text{entre ellos].} \end{aligned}$$

**Esféricas:**  $\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$ . Es  $r = \rho \sin \phi$ ,  $\rho^2 = r^2 + z^2$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Además:  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ,  $\tan \phi = \frac{r}{z}$  [mirando cuadrantes]. [Los físicos suelen cambiar los nombres de  $\phi$  y  $\theta$ ].



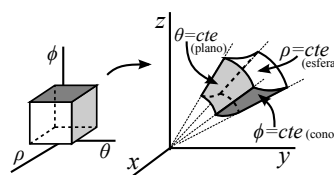
El jacobiano es de cálculo más largo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} &= \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \begin{vmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} - \rho^2 \sin^3 \phi \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2 \sin \phi. \quad \text{[Cambio no inyectivo en todo el eje } z \text{].} \end{aligned}$$

La integrales en esféricas se calculan, pues, mediante:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} \rho^2 \sin \phi f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) d\rho d\theta d\phi$$

En esféricas,  $\rho = C$  describe una superficie esférica,  $\theta = C$  se trata de un plano y  $\phi = C$  es una superficie cónica. Un recinto simple  $V$  en esféricas es, por tanto, el dibujado a la derecha. Son adecuadas para integrar en esferas (y quizás en conos).



[Se comprueba que el gradiente y el Laplaciano son aquí:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ \mathbf{e}_\theta &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\phi &= (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \nabla f &= f_\rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho \sin \phi} f_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho} f_\phi \mathbf{e}_\phi \\ \Delta f &= f_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\theta\theta} + \frac{\cos \phi}{\rho^2 \sin \phi} f_\phi + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} f_{\theta\theta} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{[ortogonales} \\ &\text{de nuevo].} \end{aligned}$$

**Ej 7.** Escribamos el punto dado en cartesianas por  $(-1, 1, -\sqrt{6})$  en los otros dos sistemas coordenados.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \quad \tan \theta = -1 \text{ y estamos en el } 2^\circ \text{ cuadrante} \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}. \quad [\text{No es } \theta = \arctan(-1)].$$

Escrito en coordenadas cilíndricas el punto es, pues:  $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, -\sqrt{6})$ .

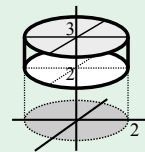
$$\rho = \sqrt{1+1+6} = 2\sqrt{2}. \quad \tan \phi = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \phi = \frac{5\pi}{6}. \quad \text{En esféricas es } (\rho, \theta, \phi) = (2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}).$$

En los siguientes ejemplos se ve que muchas veces las cartesianas no son las coordenadas más adecuadas (si lo eran en los ejemplos anteriores). Los dos primeros son los típicos recintos para trabajar en cilíndricas (o polares, que viene a ser lo mismo) y en esféricas: sobre un cilindro y sobre una esfera.

**Ej 8.** Calcular la integral de la función  $f(x, y, z) = z e^{x^2+y^2}$  sobre el cilindro  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $2 \leq z \leq 3$ .

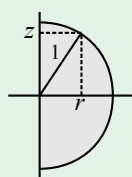
$$\iiint_V z e^{x^2+y^2} dx dy dz = \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r z e^{r^2} dr d\theta dz = \frac{9-4}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[ \frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 = \frac{5\pi}{2} (e^4 - 1).$$

Lo mismo que integrar en  $z$  y hacer luego el cambio a polares. Las cartesianas no nos sirven porque aparecen primitivas no calculables:  $\int e^{x^2+y^2} dx$  o  $\int e^{x^2+y^2} dy$ .



**Ej 9.** Calculemos de distintas formas el conocido volumen de la esfera unidad.

Lo mejor, en esféricas:  $\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta = 2\pi \int_0^1 2\rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3}.$



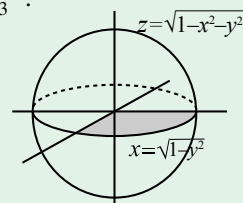
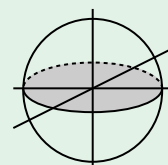
En cilíndricas por dos caminos (algo más largo):

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{2} dz = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Las cartesianas son las coordenadas menos adecuadas aquí:

$$\begin{aligned} \text{vol} &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= \dots [\text{cambio } x = \sqrt{1-y^2} \sin t] \dots = 8 \int_0^1 \frac{\pi}{4} (1-y^2) dy = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$



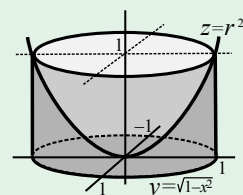
En este ejemplo lo más corto resultan ser las cilíndricas:

**Ej 10.** Calculamos  $\iiint_V z dx dy dz$ , siendo  $V$  el sólido limitado por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z=0$  y  $z=x^2+y^2$ .

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{r^2} r z dz dr d\theta = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^1 r^5 dr = \left[ \frac{\pi}{6} \right].$$

En cartesianas acaba saliendo, pero con cálculos mucho más largos:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} z dz dy dx &= 2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dy dx \\ &= \frac{2}{15} \int_0^1 (8x^4 + 4x^2 + 3) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{2}{15} \int_0^{\pi/2} (8 \sin^4 t + 4 \sin^2 t + 3) \cos^2 t dt = \dots \end{aligned}$$



[Las esféricas no son nada adecuadas: habría que distinguir entre  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$  y  $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  y ni el plano ni la zona parabólica adoptan una expresión que lleve a cálculos sencillos].

El cono sugiere también cilíndricas (o polares trabajando con  $n=2$ ), pero las esféricas no funcionan mal:

**Ej 11.** Calculemos el volumen encerrado entre el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y el plano  $z=0$  sobre el cuadrado  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .

Podemos hallarlo mediante integrales dobles, pero hacemos  $\iiint_V dx dy dz$ .

En cartesianas es fácil el recinto, pero largas las integrales:

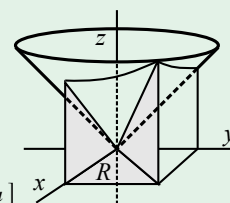
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2} dx dy = [\text{tablas, ordenador o } \sqrt{x^2+y^2} = x+u] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\sqrt{1+y^2} - y^2 \ln y + y^2 \ln(1+\sqrt{1+y^2})] dy = \dots \end{aligned}$$

En cilíndricas (o polares en la segunda integral):  $x=1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos \theta}$ , cono y recinto simétricos,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \theta} r^2 dr d\theta &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \stackrel{u=\tan \theta}{=} \frac{2}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{6} [\log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \left[ \frac{1}{3} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] \right]. \end{aligned}$$

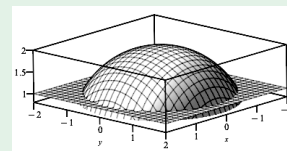
En esféricas es sencilla la variación en  $\phi$  y la recta  $x=1$  pasa a ser  $\rho = \frac{1}{\cos \theta \sin \phi}$ :

$$2 \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/(\cos \theta \sin \phi)} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\phi d\theta}{\sin^2 \phi \cos^3 \theta} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \quad \text{la misma de antes}$$



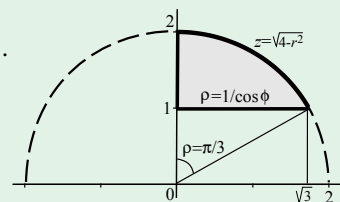
**Ej 12.** Calcular  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{z^2}$ , con  $V$  sólido dado por  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $z \geq 1$ .

Este casquete esférico pide más las cilíndricas. Para ver la variación de las variables, mejor dibujamos la sección con un plano vertical. Ambas formas en las cilíndricas parecen las más adecuadas:



$$\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \frac{r}{z^2} dr dz d\theta = \pi \int_1^2 \left( \frac{4}{z^2} - 1 \right) dz = \pi \left[ -\frac{4}{z} \right]_1^2 - \pi = \boxed{\pi}.$$

O bien: 
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} \frac{r}{z^2} dz dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left( r - \frac{r}{\sqrt{4-r^2}} \right) dr$$
$$= 3\pi + 2\pi \left[ \sqrt{4-r^2} \right]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\pi}.$$



En esféricas el ángulo máximo es  $\phi = \frac{\pi}{3}$  por ser la tangente  $\sqrt{3}$  y  $z=1$  se convierte en  $\rho = \frac{1}{\cos \theta}$ .

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{1/\cos \phi}^2 \frac{\sin \phi}{\cos^2 \phi} d\rho d\phi d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/3} \left( \frac{2s}{c^2} - \frac{s}{c^3} \right) d\phi = 2\pi \left[ \frac{2}{c} - \frac{1}{2c^2} \right]_0^{\pi/3} = \boxed{\pi}.$$

Ahora planteamos (se usa la simetría de recinto e integrando) y damos algún paso en cartesianas:

$$4 \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \frac{dz dy dx}{z^2} = 4 \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \right] dy dx = 4 \int_0^{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{3-x^2} - \arctan \sqrt{3-x^2} \right] dx$$

[Maple sabe hacer la última integral de arriba, e incluso de hacer la final y devolvernos el  $\pi$ ].

Aplicaciones físicas similares a las vistas para las integrales dobles son:

**Masa** de un sólido  $V$  es  $M = \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz$ , si  $\sigma(x, y, z)$  es su densidad.

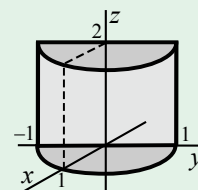
**Centro de masa** de  $V$  es  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  con  $\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x \sigma$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y \sigma$ ,  $\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z \sigma$ .

**Momento de inercia** respecto al eje  $z$ :  $I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \sigma$  (análogos los otros).

**Ej 13.** Hallemos la masa del medio cilindro  $V$  dado por  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $0 \leq z \leq 2$  y cuya densidad es  $\sigma(x, y, z) = x$ .

El sólido sugiere utilizar las coordenadas cilíndricas ( $x = r \cos \theta$  y  $J = r$ ):

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^2 r^2 \cos \theta dz dr d\theta = \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right] \left[ \int_0^1 2r^2 dr \right]$$
$$= \left[ \sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \frac{2}{3} r^3 \right]_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$



Aunque en este caso sale también fácil en cartesianas:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 x dz dy dx = 4 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \frac{4}{3} \left[ -\frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

O en otro orden: 
$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^2 x dz dx dy = \int_{-1}^1 \left[ x^2 \right]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_{-1}^1 [1-y^2] dy = 2 - \frac{2}{3} [y^3]_0^1 = \boxed{\frac{4}{3}}.$$

**Ej 14.** Hallemos la posición del centro de masa de una semiesfera sólida homogénea.

Por simetría, será  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Volumen =  $\frac{2}{3} \pi R^3$ . [Masa =  $\frac{2}{3} \pi R^3 \sigma$ ,  $\sigma$  constante].

$$\bar{z} = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho^3 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{3}{R^3} \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \left[ \frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3R}{8} = 0.375R.$$

[El recinto pedía a gritos utilizar las coordenadas esféricas].

