Tarea 1: Cálculo de Varias Variables

Facultad de Ingeniería Sistemas

Fecha de entrega: 14 de Setiembre de 2024

Instrucciones

Resuelve los siguientes problemas de manera clara y completa. Asegúrate de incluir todos los pasos necesarios para llegar a la solución. Aplica los conceptos aprendidos en clase y justifica tus respuestas cuando sea necesario.

Dominio y Rango de Funciones Vectoriales

Determina el dominio y el rango de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, donde:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

Para determinar el **dominio** de la función $\mathbf{r}(t)$, analizamos las funciones componentes $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$. El dominio de $\mathbf{r}(t)$ será la intersección de los dominios de estas funciones.

$$\begin{aligned} \text{Dominio de } f_1(t) &: \quad \text{(describir)} \\ \text{Dominio de } f_2(t) &: \quad \text{(describir)} \\ \text{Dominio de } f_3(t) &: \quad \text{(describir)} \\ \text{Dominio de } \mathbf{r}(t) &: \quad \text{Intersección de los anteriores} \end{aligned}$$

El **rango** de $\mathbf{r}(t)$ se obtiene analizando el comportamiento de las componentes en función de t:

$$\text{Rango de } \mathbf{r}(t) = \{\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \text{Dominio de } \mathbf{r}(t)\}$$

1. Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$. Determine su dominio y rango.

2. Sea $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$. Determine el dominio y rango de esta función.

3. Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \ln(t) \end{pmatrix}$. Encuentre su dominio y rango.

4. Sea $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ t^3 \end{pmatrix}$. Determine el dominio y rango de esta función.

5. Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \arctan(t) \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$. Encuentre su dominio y rango.

6. Sea $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}$. Determine el dominio y rango de esta función.

7. Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2-1}{t+1} \\ t^2 + 2t + 1 \end{pmatrix}$. Encuentre su dominio y rango.

8. Sea $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$. Determine el dominio y rango de esta función.

Operaciones con Funciones Vectoriales

Considera las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$, define y calcula:

- **Suma:**
$$\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) + g_1(t) \\ f_2(t) + g_2(t) \\ f_3(t) + g_3(t) \end{pmatrix}$$

- **Producto por un escalar:**
$$c \cdot \mathbf{r}_1(t) = c \cdot \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot f_1(t) \\ c \cdot f_2(t) \\ c \cdot f_3(t) \end{pmatrix}$$

- **Producto escalar:**
$$\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t)$$

- **Producto vectorial:**
$$\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$$

9. Dados los vectores $\mathbf{u}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle \sin t, \cos t, e^t \rangle$, encuentra $\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$.
10. Si $\mathbf{a}(t) = \langle 3t^2, t, 2t \rangle$ y $\mathbf{b}(t) = \langle 2, t^2, \ln t \rangle$, calcula $\mathbf{a}(t) + \mathbf{b}(t)$.
11. Para el vector $\mathbf{w}(t) = \langle t, t^2, 1 \rangle$ y el escalar $k(t) = 2t$, encuentra $k(t)\mathbf{w}(t)$.
12. Dado $\mathbf{c}(t) = \langle e^t, \cos t, \sin t \rangle$ y $k = 3$, calcula $k\mathbf{c}(t)$.
13. Si $\mathbf{p}(t) = \langle 1, t, t^2 \rangle$ y $\mathbf{q}(t) = \langle 2, t^2, t^3 \rangle$, halla $\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{q}(t)$.
14. Dado $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$ y $\mathbf{s}(t) = \langle t^2, e^t, t^3 \rangle$, calcula $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{s}(t)$.
15. Para los vectores $\mathbf{u}(t) = \langle t, 1, t^2 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle 1, t, t^3 \rangle$, encuentra $\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$.
16. Dados $\mathbf{a}(t) = \langle t^2, t, 1 \rangle$ y $\mathbf{b}(t) = \langle \sin t, \cos t, e^t \rangle$, calcula $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$.
17. Dados los vectores $\mathbf{f}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{g}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, calcula la expresión $(\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{f}(t)$.
18. Para $\mathbf{h}(t) = \langle e^t, t, t^2 \rangle$ y $\mathbf{k}(t) = \langle t, \sin t, \cos t \rangle$, encuentra $\mathbf{h}(t) \times (\mathbf{k}(t) \cdot \mathbf{h}(t))$.
19. Si $\mathbf{m}(t) = \langle t^3, \cos t, t \rangle$ y $\mathbf{n}(t) = \langle t^2, \sin t, t^4 \rangle$, calcula $\mathbf{m}(t) \cdot (\mathbf{m}(t) \times \mathbf{n}(t))$.
20. Dado el vector $\mathbf{v}(t) = \langle t, e^t, t^2 \rangle$, calcula $(2\mathbf{v}(t)) \times \mathbf{v}(t)$.
21. Calcula $(\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)) \cdot (\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t))$ para $\mathbf{u}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{v}(t) = \langle \sin t, \cos t, e^t \rangle$.
22. Si $\mathbf{f}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ y $\mathbf{g}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$, encuentra la derivada de $(\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t))$ con respecto a t.