

PROBLEMAS RESUELTOS 1

(continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de funciones de varias variables)

PROBLEMA 1

Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Planteamos el estudio del límite en el origen realizando un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Así:

$$l = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2(\theta) \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

de donde se sigue que la función dada es continua en el origen, ya que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

PROBLEMA 2

Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Planteamos el estudio del límite en el origen realizando un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Así:

$$l = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta)}{\rho \cos(\theta) - \rho \sin(\theta)} = \frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{\cos(\theta) - \sin(\theta)}$$

Por tanto, el límite depende de θ , de donde se sigue que no existe límite doble y que la función dada no es continua en el origen.

PROBLEMA 3

Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

El origen es el punto en el que la definición de la función cambia, por tanto, es en ese punto donde debemos estudiar si se pierde la continuidad o no. Para ello, estudiamos la existencia del límite doble de $f(x, y)$ en dicho punto.

Si construimos la curva paramétrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = t h(t) \end{cases}$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} t h(t) = 0$, entonces:

$$l = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t^2 h^2(t)}{t^2 t^2 h^2(t) + (t - t h(t))^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 h^2(t)}{t^2 h^2(t) + (1 - h(t))^2}$$

por ello,

$$\text{si } h(t) \rightarrow 0 \Rightarrow l = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{si } h(t) \rightarrow \infty \Rightarrow l = 0$$

$$\text{si } h(t) \rightarrow k \neq 0 \Rightarrow l = \frac{0}{(1 - k)^2}$$

Nos encontramos con la duda sobre el valor del límite l cuando $h(t)$ es una función tal que $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 1$. Para solventar este problema estudiamos algún caso particular de

función $h(t)$, por ejemplo, tomando $h(t) = (1 - t)$. En tal caso,

$$l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 (1 - t)^2}{t^2 (1 - t)^2 + t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - t)^2}{(1 - t)^2 + 1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Del resultado obtenido deducimos que no existe el límite doble de $f(x, y)$ en el origen y, por tanto, la función dada no es continua en $(0, 0)$.

PROBLEMA 4

Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Planteamos el estudio del límite en el origen realizando un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Así:

$$l = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{\rho^2} = \operatorname{sen}^2(\theta)$$

Por tanto, el límite depende de θ , de donde se sigue que no existe límite doble y que la función dada no es continua en el origen.

PROBLEMA 5

Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Debemos estudiar la continuidad de la función en el origen. Para ello, estudiamos la existencia del límite doble de $f(x, y)$ en dicho punto.

Si construimos la curva paramétrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = t h(t) \end{cases}$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} t h(t) = 0$, entonces:

$$l = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + t^3 h^3(t)}{t^2 + t^2 h^2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + t h^3(t)}{1 + h^2(t)}$$

por ello,

$$\text{si } h(t) \rightarrow 0 \Rightarrow l = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{si } h(t) \rightarrow \infty \Rightarrow l = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t}{h^2(t)} + t h(t)}{\frac{1}{h^2(t)} + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{si } h(t) \rightarrow k \neq 0 \Rightarrow l = \frac{0}{1} = 0$$

Así, se concluye que el límite doble de la función vale $l = 0$. Por tanto, la función dada es continua en $(0, 0)$ puesto que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0) = 0.$$

PROBLEMA 6

Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Estudiamos la existencia de límite doble en el origen. Para ello utilizamos coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Así:

$$l = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) = 0 = f(0, 0)$$

Por tanto, el límite doble vale 0 y la función dada es continua en el origen.

PROBLEMA 7

Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x+y} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Empezamos por estudiar la existencia de límite doble en el origen. Para ello consideramos la curva paramétrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = t h(t) \end{cases}$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} t h(t) = 0$. Entonces:

$$l = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{t + t h(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 + h(t)}$$

por tanto,

$$\text{si } h(t) \rightarrow 0 \Rightarrow l = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{si } h(t) \rightarrow \infty \Rightarrow l = 0$$

$$\text{si } h(t) \rightarrow k \neq 0 \Rightarrow l = \frac{0}{1+k} = 0$$

Así, se concluye que el límite doble de la función vale $l = 0$ y que la función dada es continua en $(0, 0)$.

PROBLEMA 8

Estudiar la continuidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Planteamos el estudio del límite en el origen realizando un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Así:

$$l = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)}{\rho^2} = \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)$$

por tanto, el valor de l depende de θ , de donde se sigue que no existe límite doble y que la función dada no es continua en el origen.

PROBLEMA 9

Estudia la continuidad, existencia de las derivadas parciales y diferenciabilidad de la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3 + y^3} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

SOLUCIÓN

Comenzamos estudiando la continuidad de la función dada en el origen (en el resto de puntos se tiene que la función dada es diferenciable). En primer lugar planteamos el estudio del límite realizando un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sen(\theta) \end{cases}$$

Así:

$$l = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos(\theta) \sen(\theta)}{\rho^3 (\cos^3(\theta) + \sen^3(\theta))} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\cos(\theta) \sen(\theta)}{(\cos^3(\theta) + \sen^3(\theta))} = \frac{\cos(\theta) \sen(\theta)}{(\cos^3(\theta) + \sen^3(\theta))}$$

por lo que l depende de θ , de donde se deduce que no existe el límite doble de f en el origen. De esta manera se tiene que f no es continua en el origen y, como consecuencia, tampoco es diferenciable en dicho punto.

Con respecto a la derivabilidad parcial se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\Delta x \cdot 0^2}{(\Delta x)^3} \right)}{\Delta x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{0 \cdot (\Delta y)^2}{(\Delta y)^3} \right)}{\Delta y} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que f es una función que admite derivadas parciales en el origen y no es diferenciable en dicho punto.

PROBLEMA 10

Estudiar la continuidad y la existencia de derivadas parciales de la función,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6}{(x^2 - y)^2 + x^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

en el punto $(0, 0)$.

SOLUCIÓN

La función no es continua en $(0, 0)$, ya que los límites según la recta $y = x$ y la parábola $y = x^2$ son, respectivamente,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x}} \frac{x^6}{(x^2 - x)^2 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^2 - 2x^3 + x^4 + x^6} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2}} \frac{x^6}{(x^2 - x^2)^2 + x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6}{x^6} = 1$$

Al ser distintos los valores obtenidos, la función no tiene límite doble en $(0, 0)$, y por lo tanto no es continua.

Analicemos la existencia de derivadas parciales en el origen,

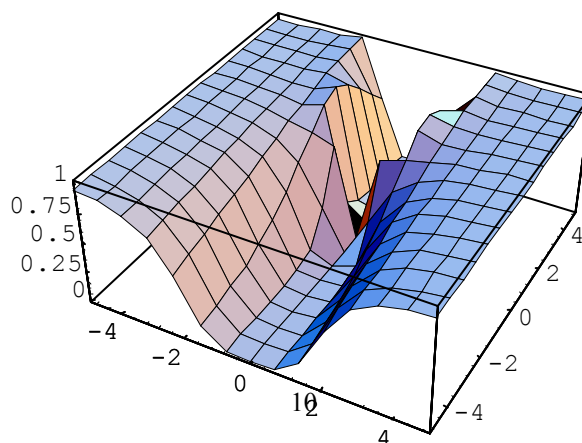
$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^6}{h^4 + h^6} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{1 + h^2} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0$$

luego $f(x, y)$ admite derivadas parciales en $(0, 0)$ sin ser continua en dicho punto.

NOTA

La representación gráfica de la función $f(x, y)$ es,



PROBLEMA 11

Dada la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ a & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- Determinar el valor de a para que la función sea continua en el origen.
- Para este valor de a calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
- Hallar la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial s}(1, 0)$, siendo s la dirección que forma un ángulo de 60° con la parte positiva del eje OX .

SOLUCIONES (Resuelto en clase el viernes día 26 de marzo. Observa que el apartado

c) se expresa y resuelve aquí de modo “diferente” a lo visto en clase, ¡pronto aprenderemos muchas cosas más!).

a) Si aplicamos el cambio

$$\begin{cases} x = t \\ y = t h(t) \end{cases}$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0} t h(t) = 0$, entonces:

$$l = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{t^4 + t^4 h^4(t)}{t^2 + t^2 h^2(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{t^2 + t^2 h^4(t)}{1 + h^2(t)}$$

por ello,

$$\text{si } h(t) \rightarrow k \Rightarrow l = \operatorname{arctg} \frac{0 + 0}{1 + k^2} = 0$$

$$\text{si } h(t) \rightarrow \infty \Rightarrow l = \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{\frac{t^2}{h^2(t)} + t^2 h^2(t)}{\frac{1}{h^2(t)} + 1} = 0$$

$$\text{si } h(t) \rightarrow 0 \Rightarrow l = \lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0$$

Así,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$$

Para que $f(x, y)$ sea continua en $(0, 0)$ debe ocurrir que el límite anterior coincida con $f(0, 0)$, es decir, que

$$a = f(0,0) = 0$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - 2x(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4x^5 + 4x^3y^2 - 2x^5 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2 + (x^4 + y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{0}{0}$$

Así,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arctg \frac{(\Delta x)^4}{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\arctg(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \end{aligned}$$

Por simetría,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

c) Si tenemos en cuenta que,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \operatorname{sen} \alpha$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^5 + 4x^3y^2 - 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2 + (x^4 + y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{2}{2} = 1$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4y^3(x^2 + y^2) - 2y(x^4 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2 + (x^4 + y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{0}{2} = 0$$

finalmente,

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x,y) = 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

PROBLEMA 12

Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0 \\ 0 & x = 0 \text{ ó } y = 0 \end{cases}$$

Estudiar la existencia en el origen de las derivadas: f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}

SOLUCIÓN

$$\text{i)} \quad f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{arctg} \frac{0}{h} - 0}{h} = 0$$

$$\text{ii)} \quad f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - k^2 \operatorname{arctg} \frac{0}{k} - 0}{k} = 0$$

$$\text{iii)} \quad f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} \quad (1)$$

Calculamos primeramente $f_x(0, k)$

$$f_x(0, k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(0, k)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \operatorname{arctg} \frac{k}{h} - k^2 \operatorname{arctg} \frac{h}{k}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} h \operatorname{arctg} \frac{k}{h} - k^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} \frac{h}{k}}{h} = 0 \frac{\pi}{2} - k^2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{k}}{h} =$$

$$= -k^2 \frac{1}{k} = -k$$

Sustituyendo en (1),

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1$$

$$\text{iv)} \quad f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} \quad (2)$$

Calculamos primeramente $f_y(h, 0)$

$$\begin{aligned} f_y(h, 0) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{h^2 \arctg \frac{k}{h} - k^2 \arctg \frac{h}{k}}{k} = \\ &= h^2 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\arctg \frac{k}{h}}{k} - \lim_{k \rightarrow 0} k \arctg \frac{h}{k} = h^2 \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k}{h}}{k} - 0 \frac{\pi}{2} = \\ &= h^2 \frac{1}{h} = h \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2),

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

PROBLEMA 13

Dada la función $w = 2s \cdot t$, donde $s = x^2 + y^2$, $t = \frac{x}{y}$

- ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de w en $x = y = 1$?
¿Y la de máxima disminución?
- Determinar la derivada direccional en el punto dado en la dirección en la que w crece con mayor rapidez.
- Calcular d^2w en el punto $(3,2)$.

SOLUCIÓN

Si $w = 2s \cdot t$, donde $s = x^2 + y^2$, $t = \frac{x}{y}$, entonces:

$$w = 2(x^2 + y^2) \frac{x}{y} = \frac{2x^3 + 2xy^2}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{6x^2 + 2y^2}{y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{12x}{y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{4y^2 - 6x^2 - 2y^2}{y^2} = \frac{2y^2 - 6x^2}{y^2} \end{cases} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{4xy^2 - 2x^3 - 2xy^2}{y^2} = \frac{2xy^2 - 2x^3}{y^2} \end{cases}$$

- La dirección de máximo crecimiento es la dirección del gradiente en dicho punto $P(1,1)$,

$$\frac{\partial w}{\partial x}(P) = 8, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(P) = 0 \Rightarrow \text{grad}(P) = (8, 0) \equiv (1, 0)$$

La dirección de máximo crecimiento es el eje X cuando se toma el sentido positivo del mismo. La dirección de máxima disminución es $-\nabla w(p) = (-1, 0)$.

$$\text{b) } f'_u(P) = |\text{grad } w(P)| = 8$$

c)

$$d^2w(P) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy^2 \right) (3, 2) =$$

$$d^2w(P) = \left(18 dx^2 + 2 \left(\frac{-23}{2} \right) dx dy + \frac{27}{2} dy^2 \right)$$

$$d^2w(P) = 18 dx^2 - 23 dx dy + \frac{27}{2} dy^2$$

PROBLEMA 14

Dada la función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Se pide:

- Determinar la continuidad de f .
- Estudiar la continuidad de las derivadas parciales de f . ¿De los resultados obtenidos puede deducirse la diferenciabilidad de f en el origen?

SOLUCIÓN

a)

$$1. - f(0, 0) = 0$$

$$\begin{aligned} 2. - \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{yx^2 - y^3}{x^2 + y^2} \stackrel{\left\{ \begin{smallmatrix} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{smallmatrix} \right\}}{=} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\rho^3 \sin \theta \cos^2 \theta - \rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2} = \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\rho^3 (\cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)}{\rho^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \rho (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta = \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \rho \cos 2\theta \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

$$3. - f(0, 0) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$$

Luego $f(x, y)$ es continua en $(0, 0)$.

b) i.- Analicemos la continuidad de la derivada parcial con respecto a x , en el origen

$$\begin{cases} \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2xy(x^2 + y^2) - (yx^2 - y^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

entonces podemos escribir,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

analicemos su continuidad en el origen,

$$a) \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4xy^3}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{4\rho^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{\rho^4} = 4 \cos \theta \sin^3 \theta$$

luego $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ no existe, de lo que se deduce que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$.

ii.- Analicemos la continuidad de la derivada parcial con respecto a y, en el origen:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-k^3}{k^2} - 0}{k} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-k^3}{k^3} = -1 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{(x^2 - 3y^2)(x^2 + y^2) - (yx^2 - y^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

resulta que,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

analicemos su continuidad en el origen,

$$a) \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = -1$$

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4 - 4x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^4 \cos^4 \theta - \rho^4 \sin^4 \theta - 4\rho^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{\rho^4} =$$

$$= \cos^4 \theta - \sin^4 \theta - 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

luego $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ no existe, de lo que se deduce que $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ no es continua en $(0,0)$.

Por tanto, de los resultados obtenidos no puede deducirse la diferenciabilidad de $f(x,y)$ en el origen, (ninguna de las parciales es continua en el origen).

PROBLEMA 15

Si la temperatura de un depósito cilíndrico viene dada por la función

$$T(x, y, z) = 10(xe^{-y^2} + ze^{-x^2})$$

y nos situamos en el punto de coordenadas (0,0,1), se pide:

- Determinar cuál es la razón de cambio de la temperatura al desplazarnos hacia el punto de coordenadas (2,3,1).
- En qué dirección debemos movernos para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible. ¿Y para que aumente?
- Si no quisiéramos apreciar cambio alguno de temperatura ¿qué dirección debemos tomar?
- Si nos movemos siguiendo el camino descrito por,

$$\vec{x}(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}t, 0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}t \right), \text{ determinar } \frac{d(T \circ \vec{x})}{dt}.$$

SOLUCIÓN

$$T(x, y, z) = 10(xe^{-y^2} + ze^{-x^2}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 10(e^{-y^2} - 2zxe^{-x^2})_{(0,0,1)} = 10 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 10(-2xye^{-y^2})_{(0,0,1)} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} = 10(e^{-x^2})_{(0,0,1)} = 10 \end{cases}$$

- a) $P(0,0,1)$ y $Q(2,3,1)$ consideramos el vector unitario,

$$\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|} = \left(\frac{2-0}{\sqrt{13}}, \frac{3-0}{\sqrt{13}}, \frac{1-1}{\sqrt{13}} \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right)$$

entonces,

$$d_{\frac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}} T(0,0,1) = (10, 0, 10) \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, 0 \right) = \frac{20}{\sqrt{13}}$$

- b) Para que disminuya lo más rápido, nos debemos mover en la dirección,

$$-\nabla T(0,0,1) = (-10, 0, -10),$$

Para que aumente lo más rápido, nos debemos mover en la dirección,

$$\nabla T(0,0,1) = (10, 0, 10)$$

- c) Para que no haya cambio de temperatura buscamos el vector tal que,

$$d_{\vec{v}} T(0,0,1) = 0 \Rightarrow (10, 0, 10)(v_1, v_2, v_3) = 0 \Rightarrow v_1 = -v_3$$

entonces, $\vec{v} = (v_1, v_2, -v_1)$ siendo $|\vec{v}| = 1$. Por ejemplo, en la dirección del vector $(0, 1, 0)$.

d) Calculemos

$$\begin{aligned}(T \circ \vec{x})(t) &= T(\vec{x}(t)) = T\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}t, 0, -\frac{3\sqrt{2}}{2}t\right) = 10\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}t - \frac{3\sqrt{2}}{2}te^{\frac{9}{2}t^2}\right) = \\ &= -15\sqrt{2}t\left(1 + e^{\frac{9}{2}t^2}\right)\end{aligned}$$

cuya derivada con respecto de t es,

$$\frac{d(T \circ \vec{x})}{dt} = -15\sqrt{2}\left(1 + e^{\frac{9}{2}t^2}\right) + 15\sqrt{2}te^{\frac{9}{2}t^2}9t$$

$$\frac{d(T \circ \vec{x})}{dt} = -15\sqrt{2}\left[\frac{e^{\frac{9}{2}t^2} + 1 - 9t^2}{e^{\frac{9}{2}t^2}}\right]$$

PROBLEMA 16

Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones,

- Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$.
- La derivada direccional de la función $z = x^2 + y^2$ en la dirección del vector $(1,1)$ en el punto $(0,0)$ es $2\sqrt{2}$.
- La función $f(x,y) = x^2 \sin y$ verifica el teorema de Schwartz para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- La superficie de un lago viene representada por una región D en el plano XY . Su profundidad (en metros) en el punto (x,y) viene dada por la función $p(x,y) = 400 - 3x^2 y^2$. Si un bañista está en el punto $(1,-2)$, determinar en qué dirección debe nadar para que la profundidad aumente lo más rápido posible.

SOLUCIÓN

a) Sí, por la unicidad del límite.

b) Falso pues si consideramos el vector unitario a $\vec{u}(1,1) \Rightarrow \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ y el punto

$P(0,0)$, obtenemos como derivada direccional,

$$d_{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}} f(0,0) = \vec{\nabla} f(0,0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = (f'_x(0,0), f'_y(0,0)) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (0,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

NOTA

Podemos aplicar esta expresión de la derivada direccional por ser diferenciable la función.

c) Veamos si verifica las condiciones del teoremas de Schwartz

$$f(x,y) = x^2 \sin y \quad \text{Función continua}$$

$$\left. \begin{aligned} f'_x(x,y) &= 2x \sin y \\ f'_y(x,y) &= x^2 \cos y \end{aligned} \right\} \text{ Funciones continuas}$$

$$f''_{xy}(x,y) = 2x \cos y \quad \text{Función continua}$$

entonces existe $f''_{yx}(x,y)$ y además es igual a $f''_{xy}(x,y)$.

Efectivamente,

$$f_{yx}''(x, y) = 2x \cos y$$

- d) La función $p(x, y) = 400 - 3x^2y^2$ es diferenciable en $P(1, -2)$, entonces el vector gradiente nos dará la dirección en la que la profundidad aumenta lo más rápido posible,

$$\nabla \vec{p}(x, y) = (\vec{p}'_x(x, y), \vec{p}'_y(x, y)) = (-6xy^2, -6x^2y)$$

$$\nabla \vec{p}(1, -2) = (-24, 12) = 12(-2, 1)$$

La dirección en que la profundidad aumenta lo más rápido posible es, $(-2, 1)$.

PROBLEMA 17

Dada la función,

$$f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

- a.- Calcula la derivada direccional de $f(x, y)$ en el punto $(1, 0)$ según la dirección del vector $(1, 1)$.
 b.- Determina las direcciones de máximo y mínimo crecimiento de $f(x, y)$ en el punto $(1, 0)$, así como el valor de las derivadas direccionales en dichas direcciones.

SOLUCIÓN

a)

$$d_{\vec{v}} f(1, 0) = \nabla f(1, 0) \cdot \vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) \right) \cdot (v_1, v_2)$$

El vector \vec{v} tiene que ser un vector unitario en la dirección de $(1, 1)$:

$$\vec{v} \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Así,

$$d_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(1, 0) = \left(\frac{-2}{e}, 0 \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{2\sqrt{2}}{2e} = -\frac{\sqrt{2}}{e}$$

b)

$$\text{Máximo crecimiento: } \vec{w} = \left(-\frac{2}{e}, 0 \right) = \vec{\nabla} f(1, 0)$$

$$\text{Mínimo crecimiento: } \vec{m} = \left(\frac{2}{e}, 0 \right) = -\vec{\nabla} f(1, 0)$$

El valor de sus derivadas direccionales en estas direcciones,

$$d_{\vec{\nabla} f(1, 0)} f(1, 0) = \frac{2}{e}$$

$$d_{-\vec{\nabla} f(1, 0)} f(1, 0) = \frac{-2}{e}$$

