CONTINUIDAD EN FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Presentation · January 2022

DOI: 10.13140/RG.2.2.34491.22560

2 authors:

Kelvin Antonio Florimon de Jesus
Universidad Autónoma de Santo Domingo

Juan Toribio Milane
Universidad Autónoma de Santo Domingo

Universidad Autónoma de Santo Domingo

Continuidad En Funciones De Varias Variables. Dada la función

$$f(x,y) = xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)$$

definir $f(0,0)$ de manera que f sea continua en el origen.

Kelvin Antonio Florimon de Jesus.

Juan Toribio Milane.

jtoribio34@uasd.edu.do

(26 de enero de 2022)

Continuidad En Funciones De Varias Variables

Analizar, Definir y Representar

Contenido

Contenido

Objetivos

Objetivos General:

- Analizar y definir la continuidad en funciones de varias variables.

Objetivos Específicos:

- Entender el concepto de continuidad a una función de dos o más variables.
- Redefinir una función que sea continua en un punto indeterminado.
- Utilizar gráfico de computadora para representar la continuidad.

Preguntas

¿Qué es una función de dos o más variables?

Preguntas

- ¿Qué es una función de dos o más variables?
- ¿Qué es el límite de una función?

Preguntas

- ¿Qué es una función de dos o más variables?
- ¿Qué es el límite de una función?

¿Cuál es la diferencia entre el límite de una función de una variable y una función de dos variables?

KELVIN A. FLORIMON

Preguntas

- ¿Qué es una función de dos o más variables?
- ¿Qué es el límite de una función?
- ¿Cuál es la diferencia entre el límite de una función de una variable y una función de dos variables?

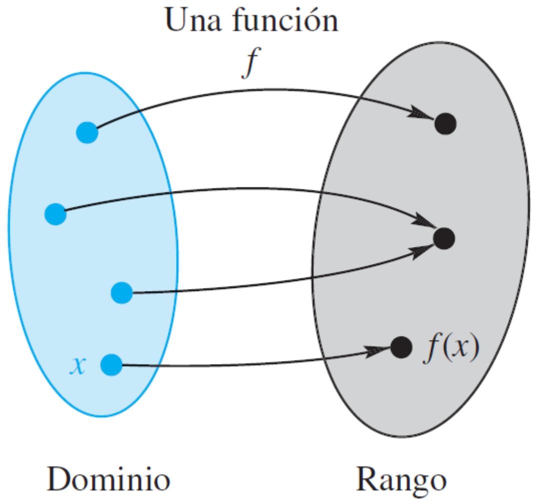
¿Qué es una función continua?

Preguntas

- ¿Qué es una función de dos o más variables?
- ¿Qué es el límite de una función?
- ¿Cuál es la diferencia entre el límite de una función de una variable y una función de dos variables?
- ¿Qué es una función continua?

Definición de función

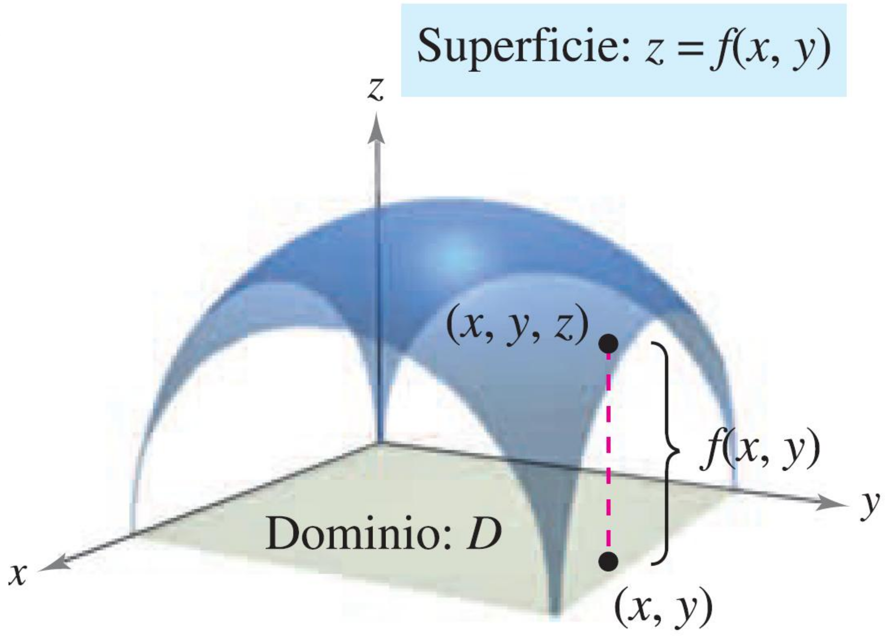
Una **función** *f* es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto *x* en un conjunto
—denominado **dominio**— un solo valor *f* (*x*) de un segundo conjunto. El conjunto
de todos los valores así obtenidos se denomina **rango** de la función.



Definición de función

Función de dos variables.

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una **función de x y y**. El conjunto D es el **dominio** de f, y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **rango** de f.

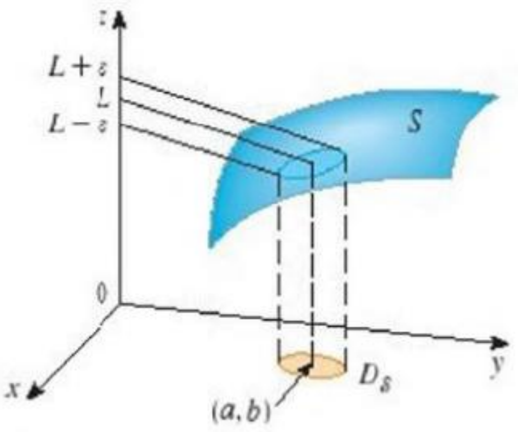


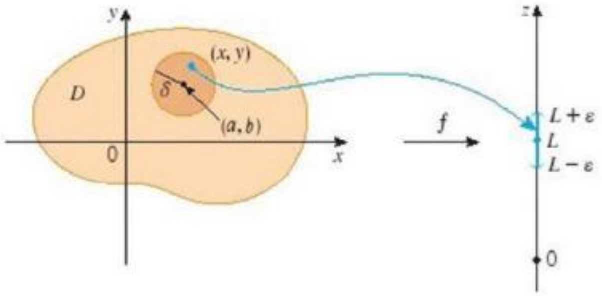
Límite de una función

Límite de función de dos variables.

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables definida en el interior de un círculo con centro en (a, b), excepto posiblemente en (a, b).

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 / 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon\right\}$$





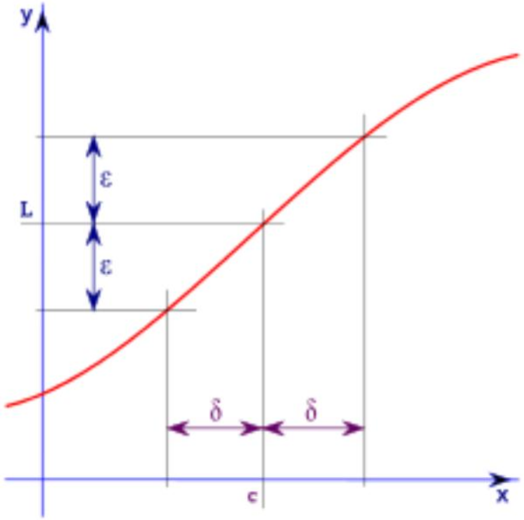
Límite de una función

Diferencia

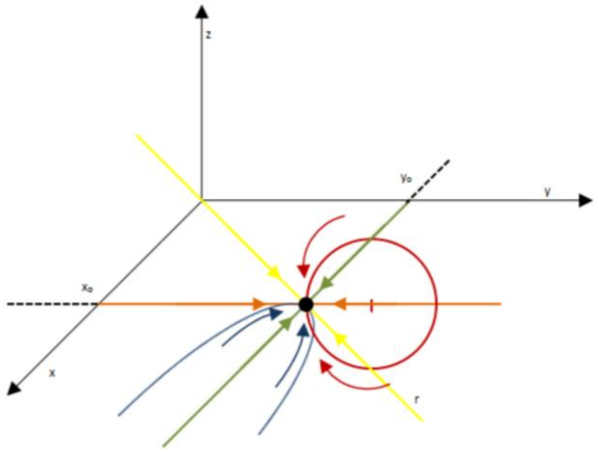
Límite de una función

Diferencia

Función de una



Función de dos variable



Continuidad

KELVIN A. FLORIMON

Continuidad

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = L}$$

Función
de
una variable

$$\boxed{\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L}$$

Función
de
dos o más
variable

Continuidad

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$f(x_0) = L$

Función de una variable

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L$

$f(x_0, y_0) = L$

Función de dos o más variable

Continuidad

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

$f(x_0) = L$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Función de una variable

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = L$

$f(x_0, y_0) = L$

$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Función de dos o más variable

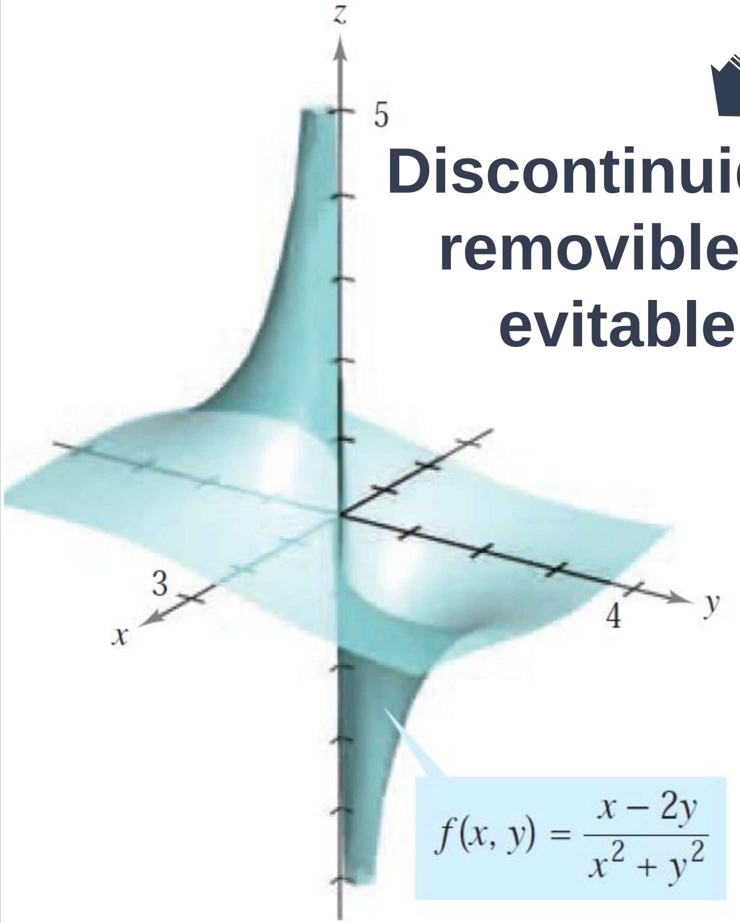
Continuidad

Tipos de discontinuidad

Continuidad

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad removible o evitable



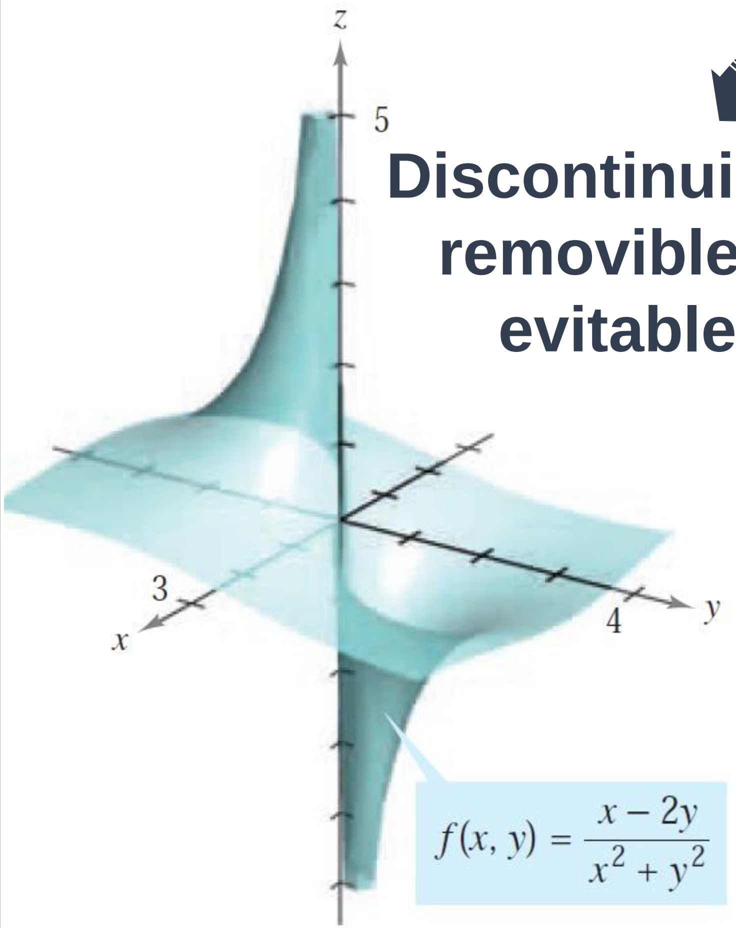
$$f(x, y) = \frac{x - 2y}{x^2 + y^2}$$

Continuidad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y): \quad existe$$

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad removible o evitable



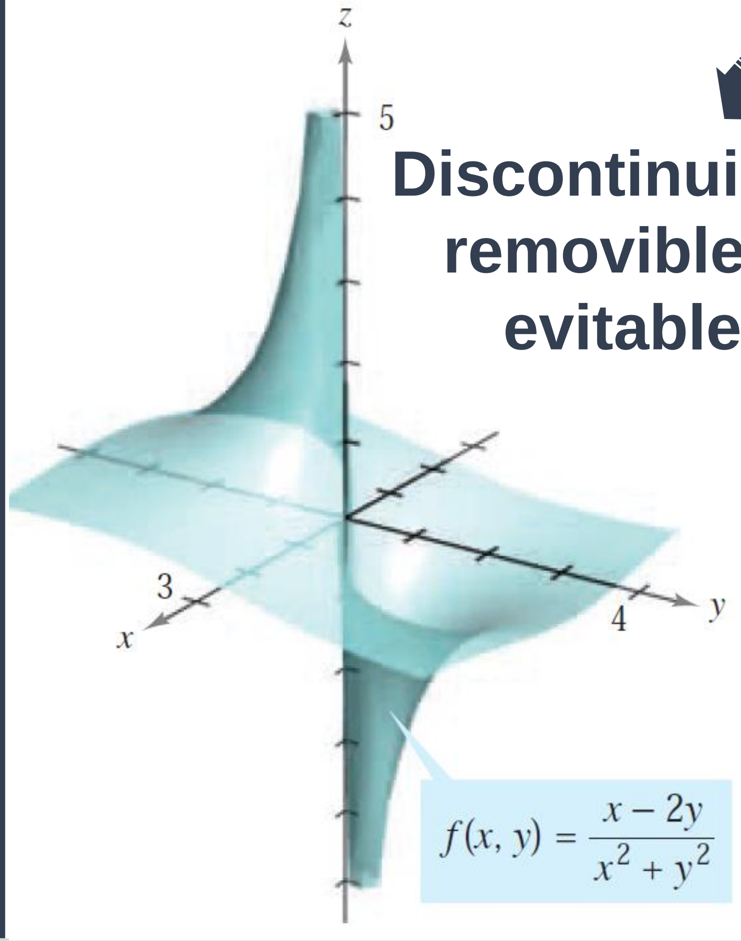
Continuidad

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y): \;\; existe}$$

$$\boxed{f(0,0): \;\; no\, definida}$$

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad removible o evitable



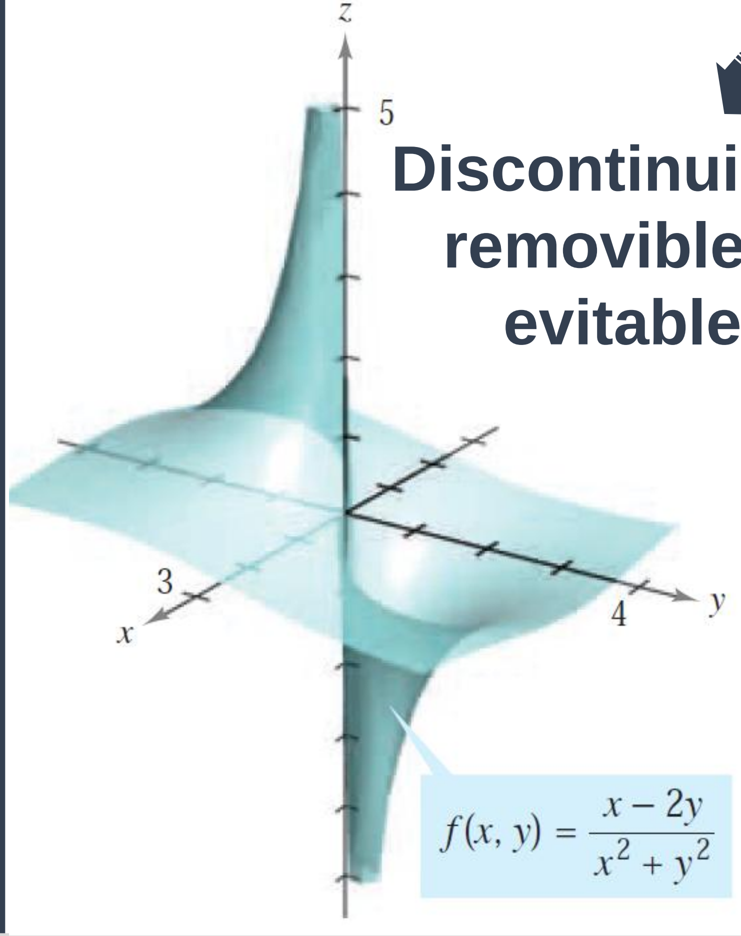
Continuidad

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y): \ \ existe}$$

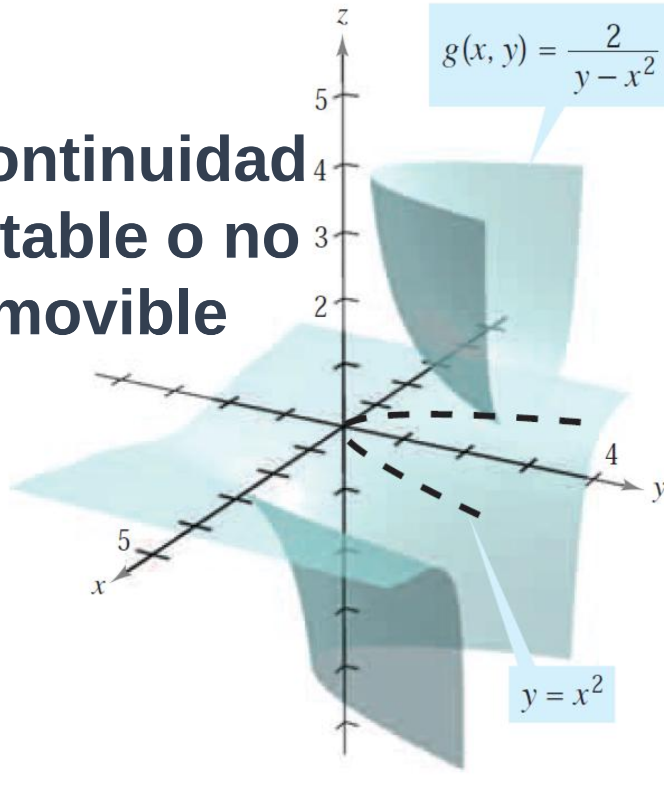
$$\boxed{f(0,0): \ \ no\ definida}$$

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad removible o evitable



Discontinuidad inevitable o no removible



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$

Continuidad

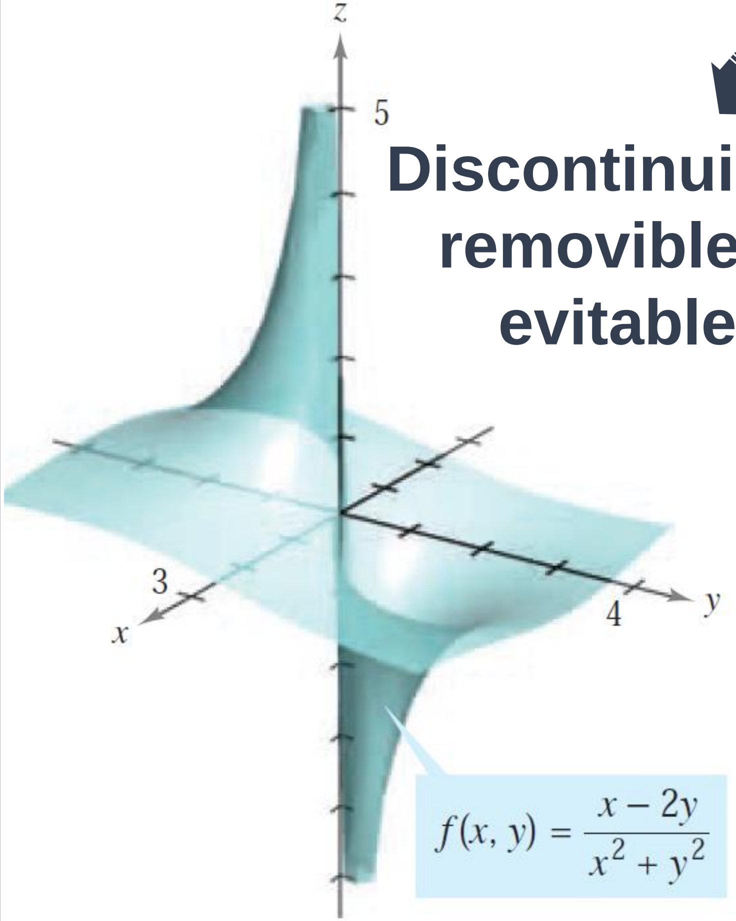
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$: existe

$f(0,0)$: no definida

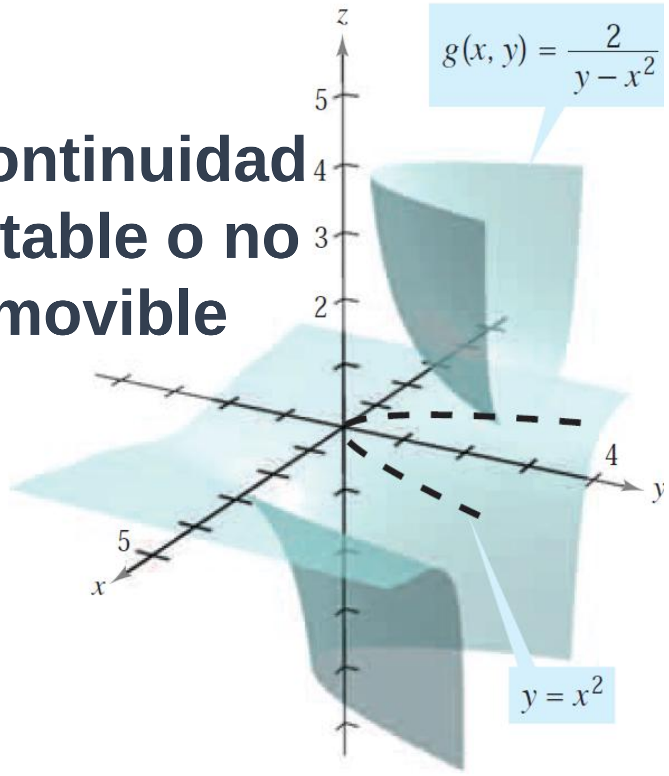
$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$: no existe

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad removible o evitable



Discontinuidad inevitable o no removible



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$

Continuidad

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y): \ \ existe}$$

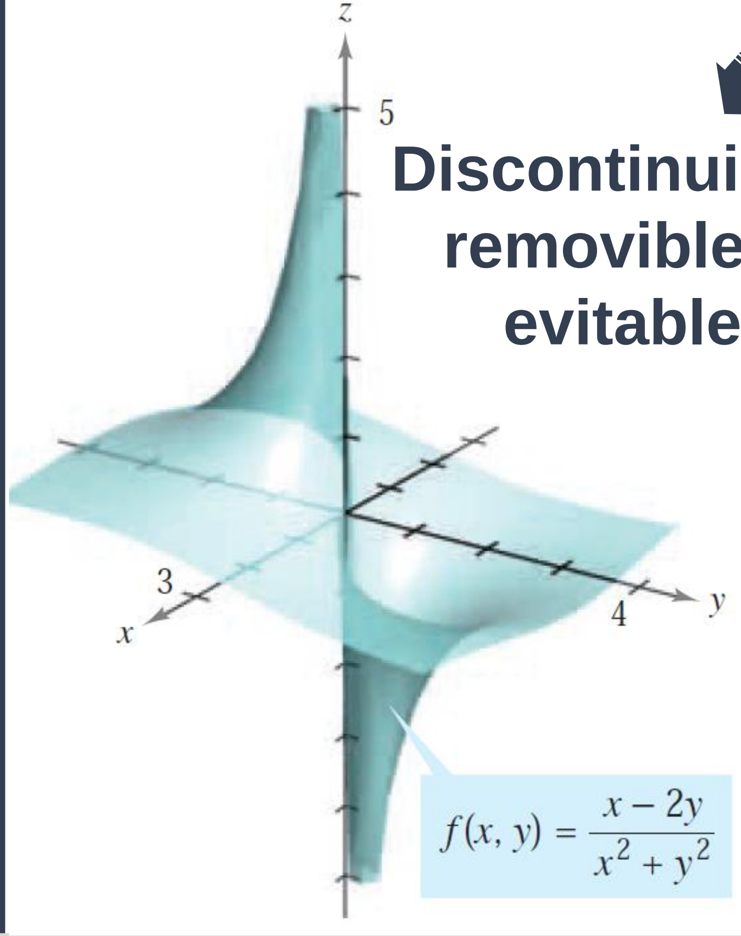
$$\boxed{f(0,0): \ \ no\ definida}$$

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y): \ \ no\ existe}$$

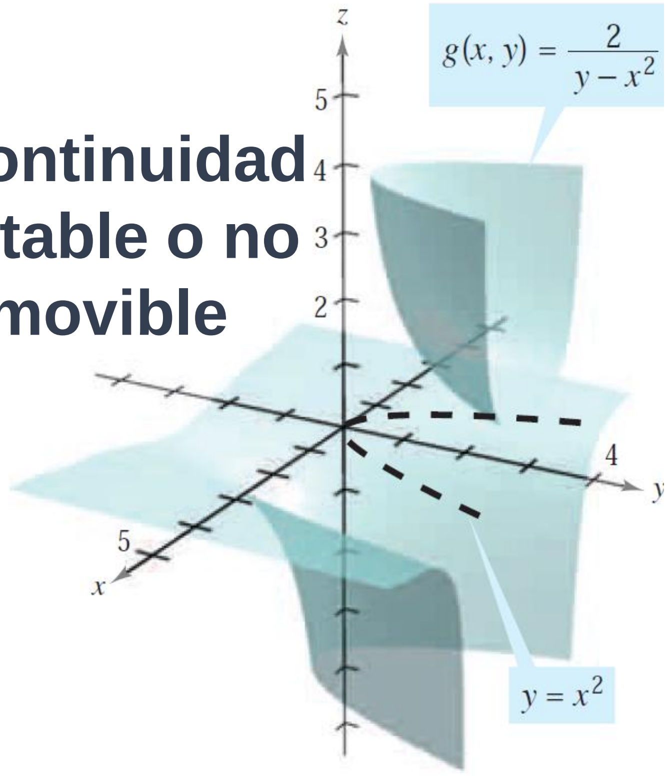
$$\boxed{f(x_0,y_0): \ \ no\ definida}$$

Tipos de discontinuidad

Discontinuidad removible o evitable



Discontinuidad inevitable o no removible



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$

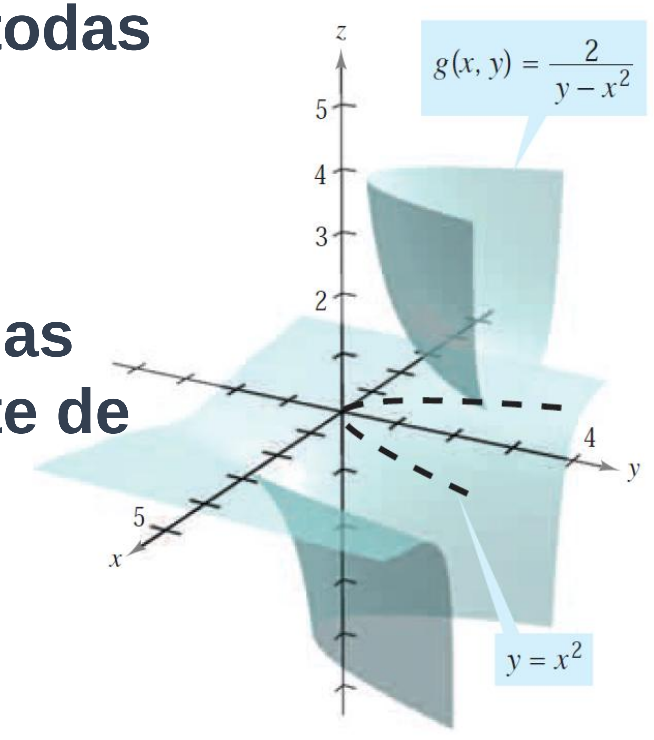
Criterios de continuidad

Las funciones polinómicas son continuas en todas las regiones.

Criterios de continuidad

Las funciones polinómicas son continuas en todas las regiones.

Las funciones racionales son continuas para las regiones en donde el denominador es diferente de cero.



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$

Operaciones con funciones continuas.

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0), entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0).

- Múltiplo escalar: kf
- Producto: fg
- Suma y diferencia: $f \pm g$
- Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

Ejercicios propuestos

I

Analizar la continuidad de las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$, explique cualquier diferencia.

Ejercicios propuestos

I

Analizar la continuidad de las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$, explique cualquier diferencia.

1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejercicios propuestos

I

Analizar la continuidad de las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$, explique cualquier diferencia.

1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizando puntos distintos del origen $(x,y) \neq (0,0)$

$f(x,y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = g(x,y)$, es una función racional donde $x^2 + y^2 = 0$ en $(x,y) = (0,0)$.

Ejercicios propuestos

I

Analizar la continuidad de las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$, explique cualquier diferencia.

1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando puntos distintos del origen $(x,y)\neq(0,0)$

$f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=g(x,y)$, es una función racional donde $x^2+y^2=0$ en $(x,y)=(0,0)$.

$f(x,y)$ y $g(x,y)$ son continua en $(x,y)\neq(0,0)$.

Ejercicios propuestos

1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0,0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 1$

Ejercicios propuestos

1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y) = (0,0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 1$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

Ejercicios propuestos

1

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x, y) = (0,0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 1$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$
- si $(x,y) \to (0,0)$ entonces $(x,y) \neq (0,0)$
- $f(x,y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = g(x,y)$

Ejercicios propuestos

1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

- $f(0,0)=0$ y $g(0,0)=1$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$
- si $(x,y)\to(0,0)$ entonces $(x,y)\neq(0,0)$
- $f(x,y)=\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=g(x,y)$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=0$

Ejercicios propuestos

1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=0$$

Evaluando el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}\ ind$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2=0$$

KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=0$$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, la función $f(x,y)$ es continua en R^2

Evaluando el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}\ ind$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2=0$$

Ejercicios propuestos

1

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = 0$$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, la función $f(x,y)$ es continua en R^2
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \neq g(0,0)$, la función $g(x,y)$ es continua

en $R^2 - \{(0,0)\}$. Tiene una discontinuidad evitable.

Evaluando el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \; ind$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 - y^2 = 0$$

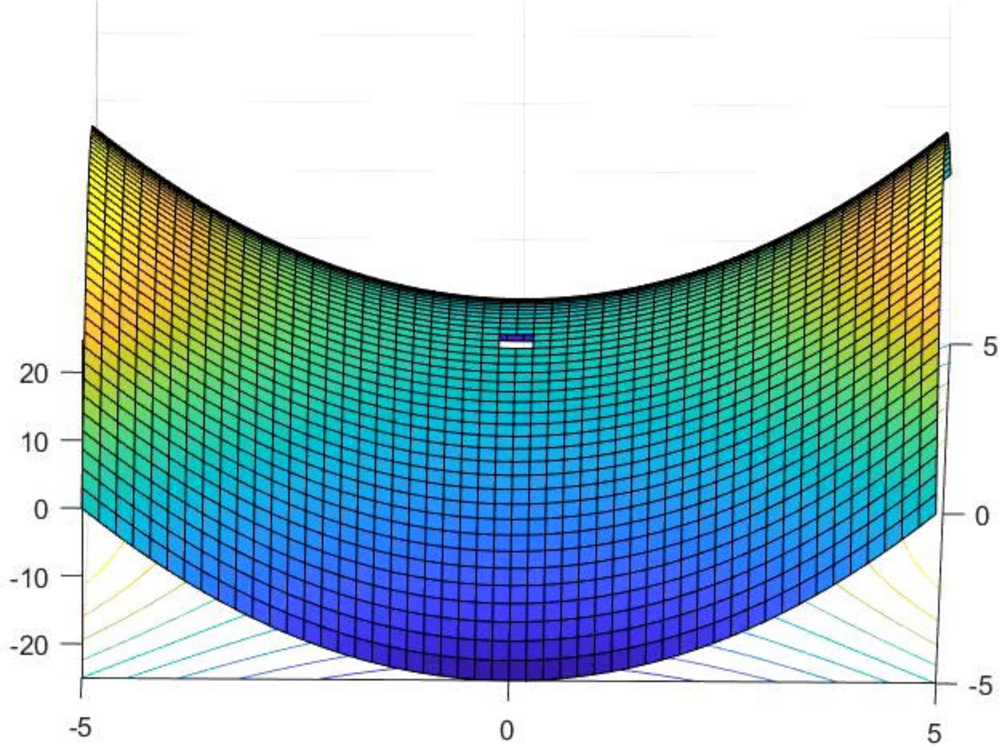
ANÁLISIS REAL II

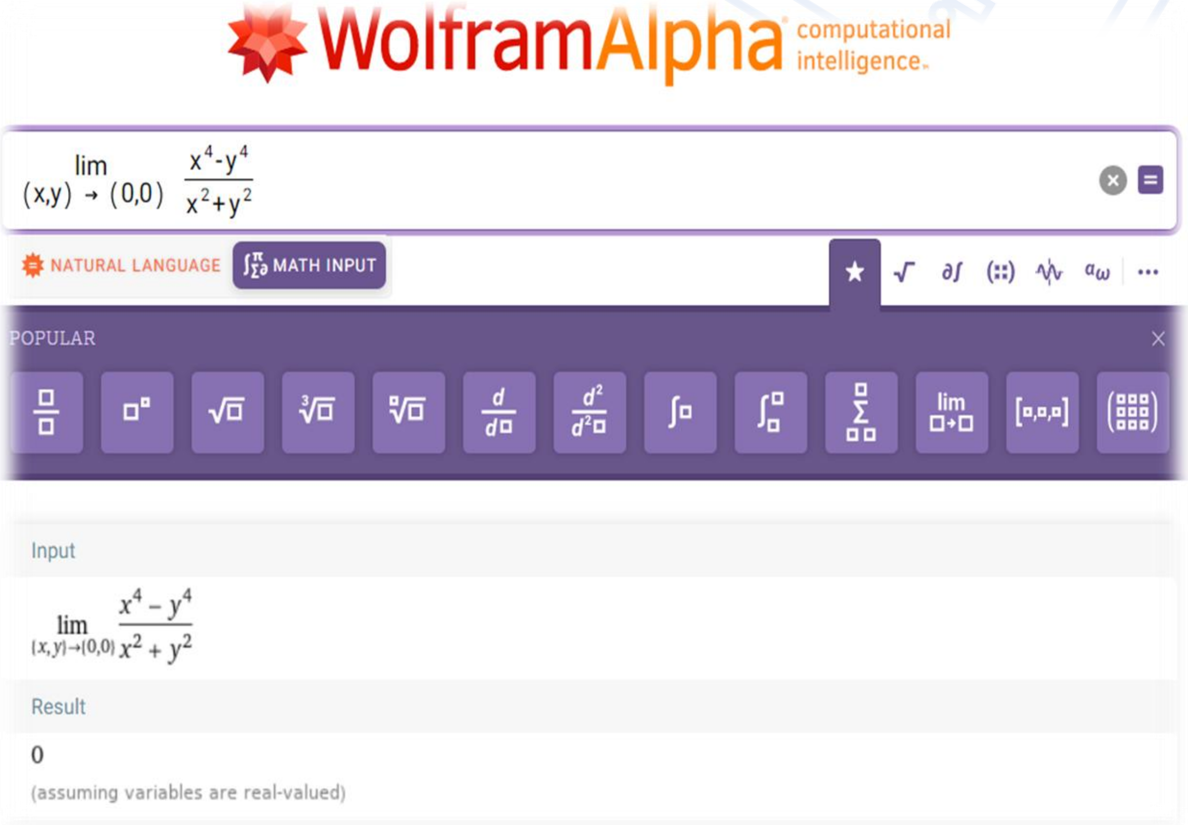
KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

1

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$





Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando puntos distintos del origen $(x,y)\neq(0,0)$

$f(x,y)=\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=g(x,y)$, es una función racional donde $x^2+y^2=0$ en $(x,y)=(0,0)$.

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando puntos distintos del origen $(x,y)\neq(0,0)$

$f(x,y)=\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=g(x,y)$, es una función racional donde $x^2+y^2=0$ en $(x,y)=(0,0)$.

$f(x,y)$ y $g(x,y)$ son continua en $(x,y)\neq(0,0)$.

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y) = (0,0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 2$

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y) = (0,0)$

- $f(0,0) = 0$ y $g(0,0) = 2$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$

KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

- $f(0,0)=0$ y $g(0,0)=2$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$
- si $(x,y)\to(0,0)$ entonces $(x,y)\neq(0,0)$
- $f(x,y)=\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=g(x,y)$

KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

- $f(0,0)=0$ y $g(0,0)=2$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$
- si $(x,y)\to(0,0)$ entonces $(x,y)\neq(0,0)$
- $f(x,y)=\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=g(x,y)$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=0$

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$$

$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2x^2}{x^2(1+m^2)}$$

$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2}{(1+m^2)}$$

$$=0$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=0$$

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=0$$

Mediante trayectoria rectilínea $y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$$

$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2x^2}{x^2(1+m^2)}$$

$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2}{(1+m^2)}$$

$$=0$$

Mediante coordenadas polar

$x=r\,cos\theta, y=r\,sen\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^2\operatorname{sen}^2\theta\, r^2\cos^2\theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta+r^2\cos^2\theta}$$

$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{r^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}$$

$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^2(\operatorname{sen}^4\theta-\cos^4\theta)}{1}$$

$$=0$$

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=0$$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, la función $f(x,y)$ es continua en R^2

Mediante trayectoria rectilínea $y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$$
$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2x^2}{x^2(1+m^2)}$$
$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2}{(1+m^2)}$$
$$=0$$

Mediante coordenadas polar
$x=r\,cos\theta, y=r\,sen\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}$$
$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^2\operatorname{sen}^2\theta\, r^2\cos^2\theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta+r^2\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{r^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}$$
$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^2(\operatorname{sen}^4\theta-\cos^4\theta)}{1}$$
$$=0$$

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=0$$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$, la función $f(x,y)$ es continua en R^2
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\neq g(0,0)$, la función $g(x,y)$ es continua

en $R^2-\{(0,0)\}$. Tiene una discontinuidad evitable.

Mediante trayectoria rectilínea $y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2x^2}{x^2+m^2x^2}$$

$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2x^2}{x^2(1+m^2)}$$

$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m^2}{(1+m^2)}$$

$$=0$$

Mediante coordenadas polar

$x=r\cos\theta, y=r\operatorname{sen}\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^2\operatorname{sen}^2\theta\, r^2\cos^2\theta}{r^2\operatorname{sen}^2\theta+r^2\cos^2\theta}$$

$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}{r^2(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}$$

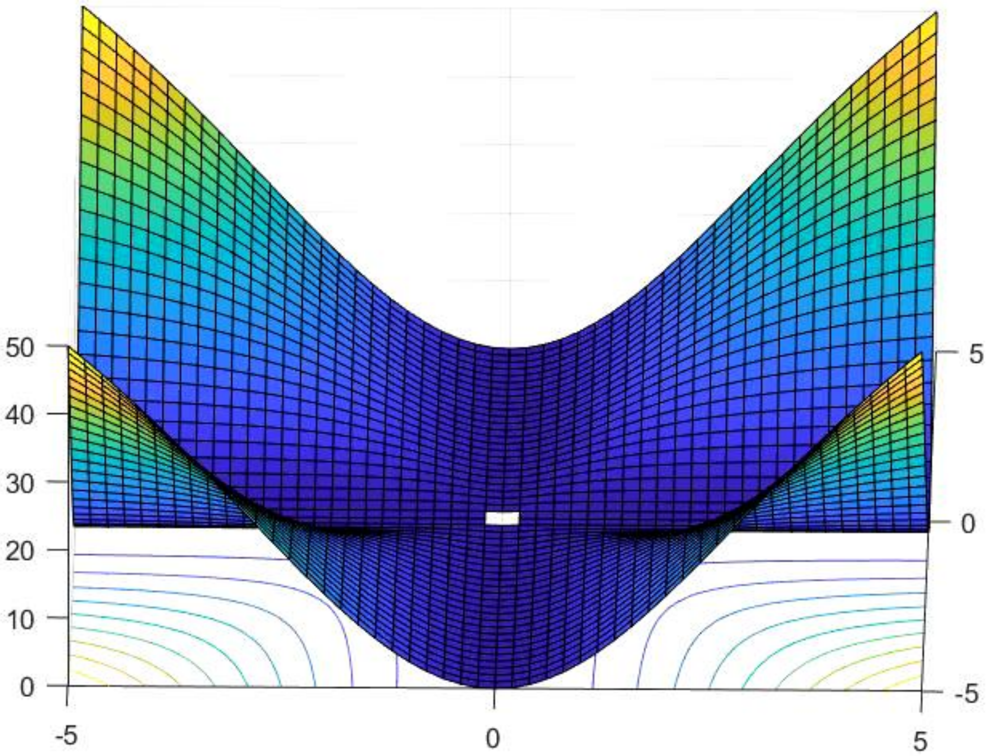
$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{4r^2(\operatorname{sen}^4\theta-\cos^4\theta)}{1}$$

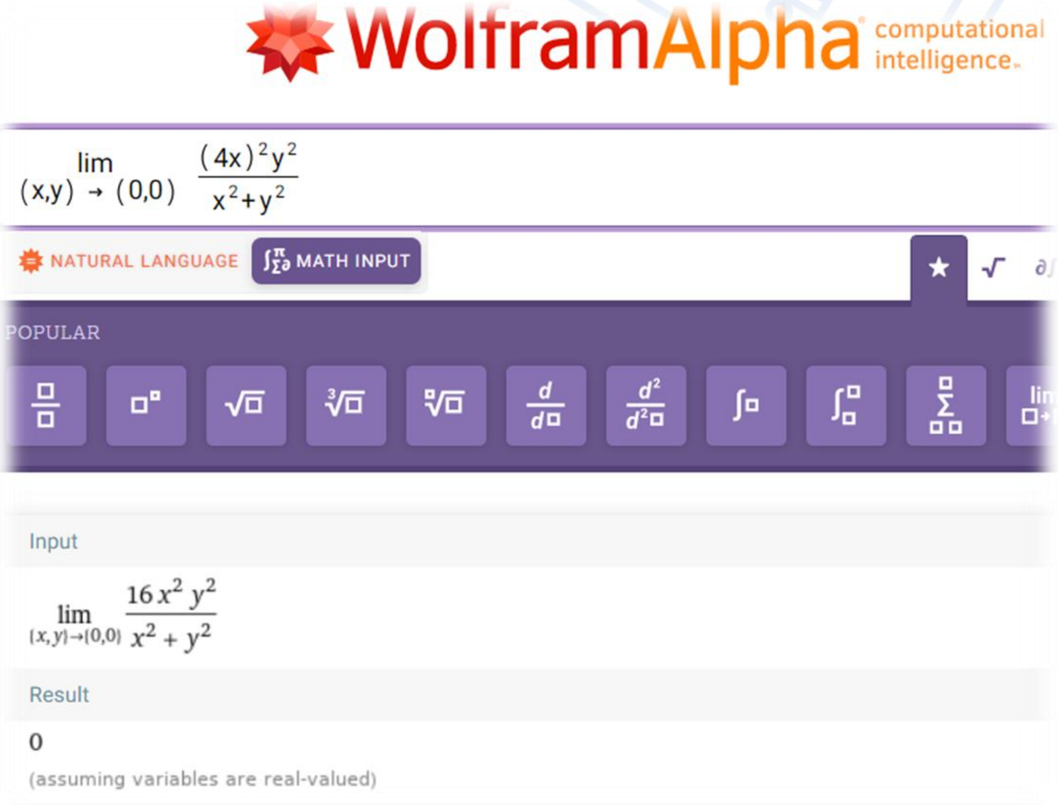
$$=0$$

Ejercicios propuestos

2

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$





Ejercicios propuestos

II Analizar la continuidad de la función

1 $$f(x,y,z) = \frac{sen\ z}{e^x + e^y}$$

Analizando

Ejercicios propuestos

II Analizar la continuidad de la función

Operaciones con funciones continuas.

Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

1 $$f(x,y,z) = \frac{sen\ z}{e^x + e^y}$$

Analizando

Ejercicios propuestos

II Analizar la continuidad de la función

Operaciones con funciones continuas.

Cociente: f/g, si $g(x_0, y_0) \neq 0$

1 $$f(x,y,z) = \frac{sen\ z}{e^x + e^y}$$

Analizando

- $sen\ (z)$ esta definida en $z \in R$.

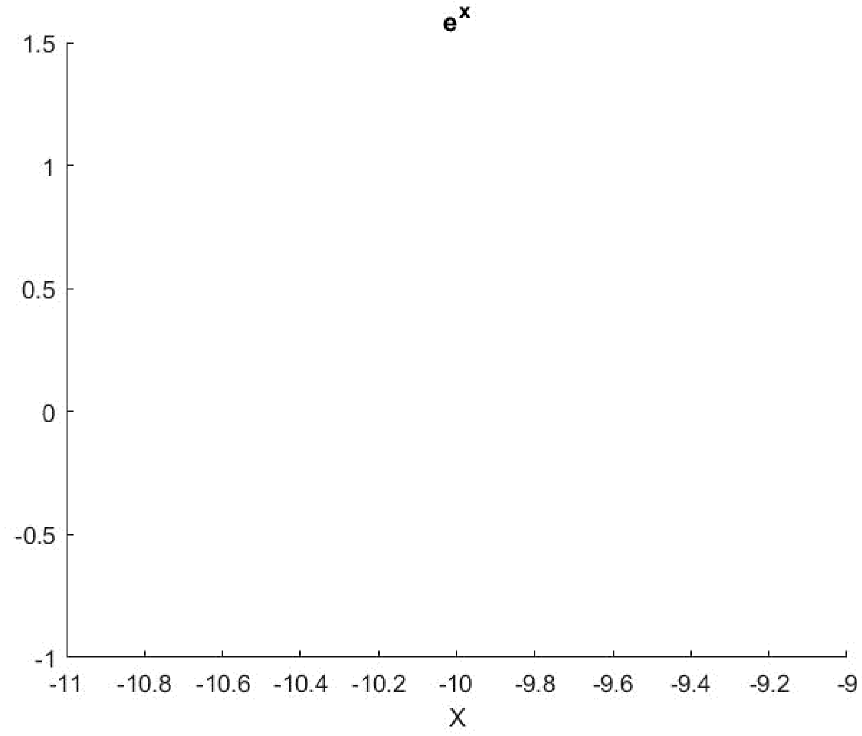
Ejercicios propuestos

II Analizar la continuidad de la funcione

1 $$f(x,y,z) = \frac{sen\ z}{e^x + e^y}$$

Analizando

- $sen\ (z)$ esta definida en $z \in R$.
- $e^x + e^y \neq 0$.



Ejercicios propuestos

II Analizar la continuidad de la funcione

1 $$f(x,y,z) = \frac{sen\ z}{e^x + e^y}$$

Analizando

- $sen\ (z)$ esta definida en $z \in R$.
- $e^x + e^y \neq 0$.
- En consecuencia $f(x,y,z)$ es continua en R^3.

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Operaciones con funciones continuas.

Cociente: $\boldsymbol{f/g}$, si $\boldsymbol{g(x_0, y_0) \neq 0}$

Analizando en $x^2 \neq y^2$

- $sen\,(x^2 - y^2)$ esta definida en $(x, y) \in R^2$.
- $x^2 - y^2 \neq 0$
- En consecuencia $f(x, y)$ es continua en R^2.

KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1 \qquad , & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Analizando en $x^2 = y^2 = \pm a$

- $f(\pm a, \pm a) = 1$

KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1 \qquad\qquad , & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Analizando en $x^2 = y^2 = \pm a$

- $f(\pm a, \pm a) = 1$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(\pm a,\pm a)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(\pm a,\pm a)} \dfrac{sen\,(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} = 1$

KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1 \quad , & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Analizando en $x^2 = y^2 = \pm a$

- $f(\pm a, \pm a) = 1$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(\pm a,\pm a)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(\pm a,\pm a)} \frac{sen\,(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)} = 1$

Límite especial

$$\lim_{(x)\to(0)} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Ejercicios propuestos

2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{x^2-y^2}, & x^2\neq y^2\\ 1 \quad , & x^2=y^2\end{cases}$$

Analizando en $x^2 = y^2 = \pm a$

- $f(\pm a, \pm a) = 1$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(\pm a,\pm a)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(\pm a,\pm a)} \dfrac{sen\,(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)} = 1$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(\pm a,\pm a)} f(x,y) = f(\pm a,\pm a)$, la función $f(x,y)$ es continua en R^2.

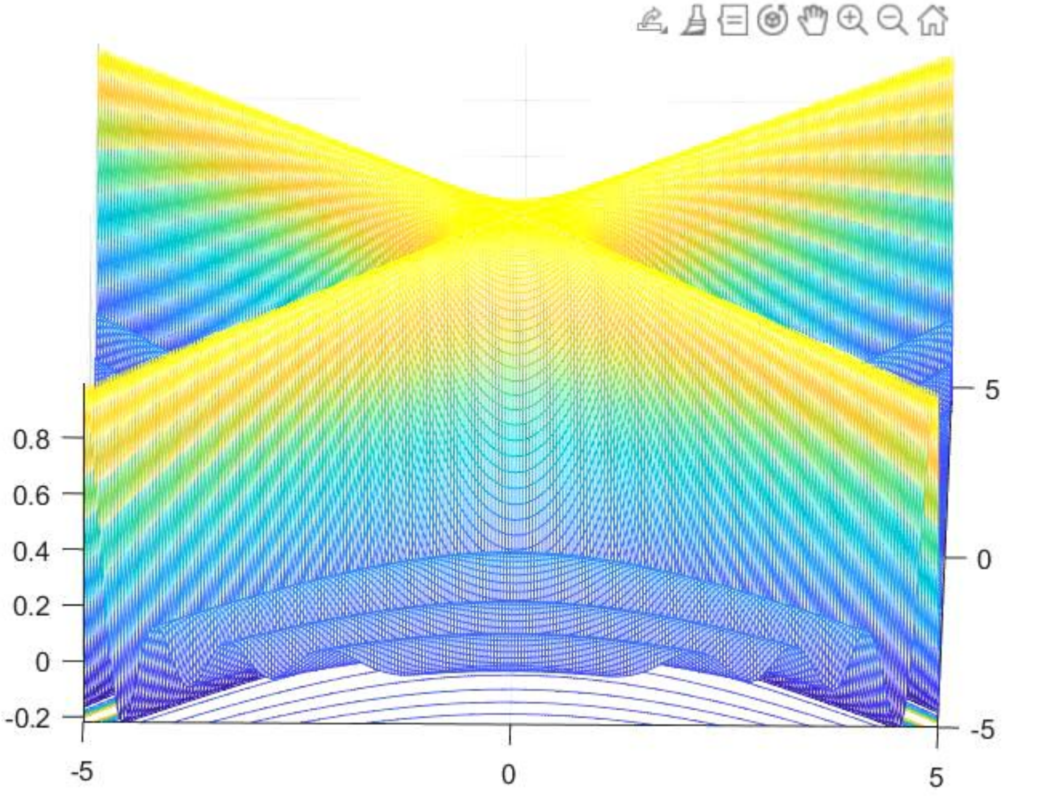
Límite especial

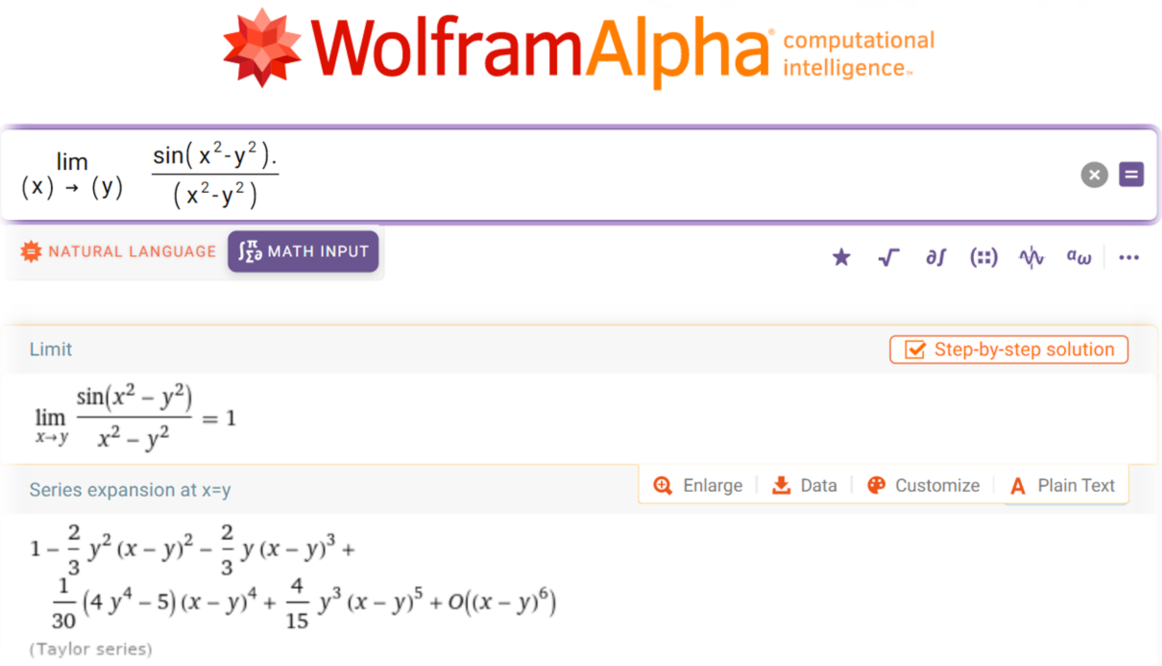
$$\lim_{(x)\to(0)} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Ejercicios propuestos

2

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$





Ejercicios propuestos

III

Dada la función

$$f\ (x,y) = \ xy\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right),$$

definir $f\,(0{,}0)$ de manera que $f\,(x,y)$ sea continua en el origen.

Analizando puntos distintos del origen $(x,y) \neq (0{,}0)$

$$f(x,y) = xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

- $x^2 + y^2 \neq 0$

$f(x,y)$ es continua en R^2.

KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0,0)$

$$f(x,y) = xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0,0)$

$$f(x,y) = xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

- $f(0,0)$ no esta definida.

Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0,0)$

$$f(x,y) = xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

- $f(0,0)$ no esta definida.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} = 0$

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x)\to(0)} \frac{x^2(mx)-x(x^3m^3)}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \lim_{(x)\to(0)} \frac{x^4m(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}$$

$$= \lim_{(x)\to(0)} \frac{x^2m(1-m^2)}{(1+m^2)}$$

$$= 0$$

KELVIN A. FLORIMON

Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x,y)=(0,0)$

$$f(x,y)=xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

- $f(0,0)$ no esta definida.
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}=0$

Mediante trayectoria rectilínea $y=mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2(mx)-x(x^3m^3)}{x^2+m^2x^2}$$

$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^4m(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}$$

$$=\lim_{(x)\to(0)}\frac{x^2m(1-m^2)}{(1+m^2)}$$

$$=0$$

Mediante coordenadas polar $x=r\cos\theta, y=r\,sen\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{r^3\cos^3\theta\, r\,sen\theta-r\cos\theta\, r^3\,sen^3\theta}{r^2\,sen^2\theta+r^2\cos^2\theta}$$

$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{r^4(\cos^3\theta\,sen\theta-\cos\theta\,sen^3\theta)}{r^2(sen^2\theta+\cos^2\theta)}$$

$$=\lim_{(r,\theta)\to(0,0)}\frac{r^2(\cos^3\theta\,sen\theta-\cos\theta\,sen^3\theta)}{1}$$

$$=0$$

Ejercicios propuestos

Analizando en el origen $(x, y) = (0,0)$

$$f(x,y) = xy\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

- $f(0,0)$ no esta definida.
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} = 0$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$, la función $f(x,y)$ es continua

en $R^2 - \{(0,0)\}$. Tiene una discontinuidad evitable.

Mediante trayectoria rectilínea $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} = \lim_{(x)\to(0)} \frac{x^2(mx)-x(x^3m^3)}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \lim_{(x)\to(0)} \frac{x^4m(1-m^2)}{x^2(1+m^2)}$$

$$= \lim_{(x)\to(0)} \frac{x^2m(1-m^2)}{(1+m^2)}$$

$$= 0$$

Mediante coordenadas polar

$x = r\,cos\theta, y = r\,sen\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{r^3\cos^3\theta\, r\,sen\theta - r\cos\theta\, r^3\,sen^3\theta}{r^2\,\text{sen}^2\theta + r^2\cos^2\theta}$$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{r^4(\cos^3\theta\, sen\theta - \cos\theta\, sen^3\theta)}{r^2(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}$$

$$= \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{r^2(\cos^3\theta\, sen\theta - \cos\theta\, sen^3\theta)}{1}$$

$$= 0$$

Ejercicios propuestos

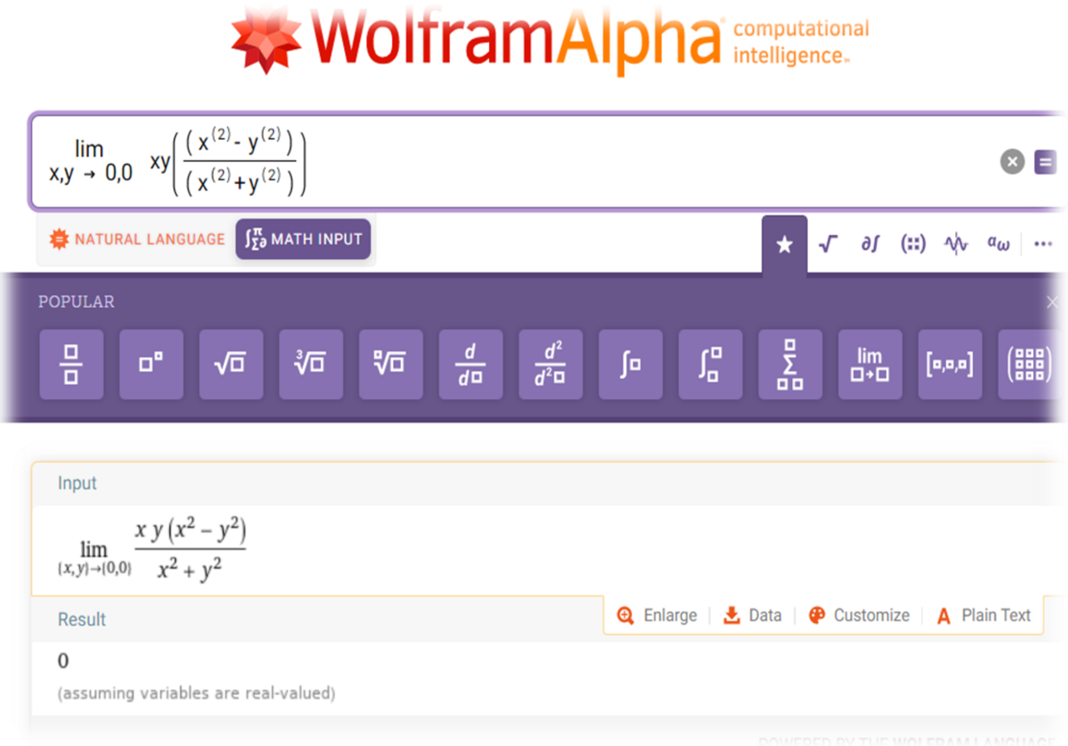
$$f(x, y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

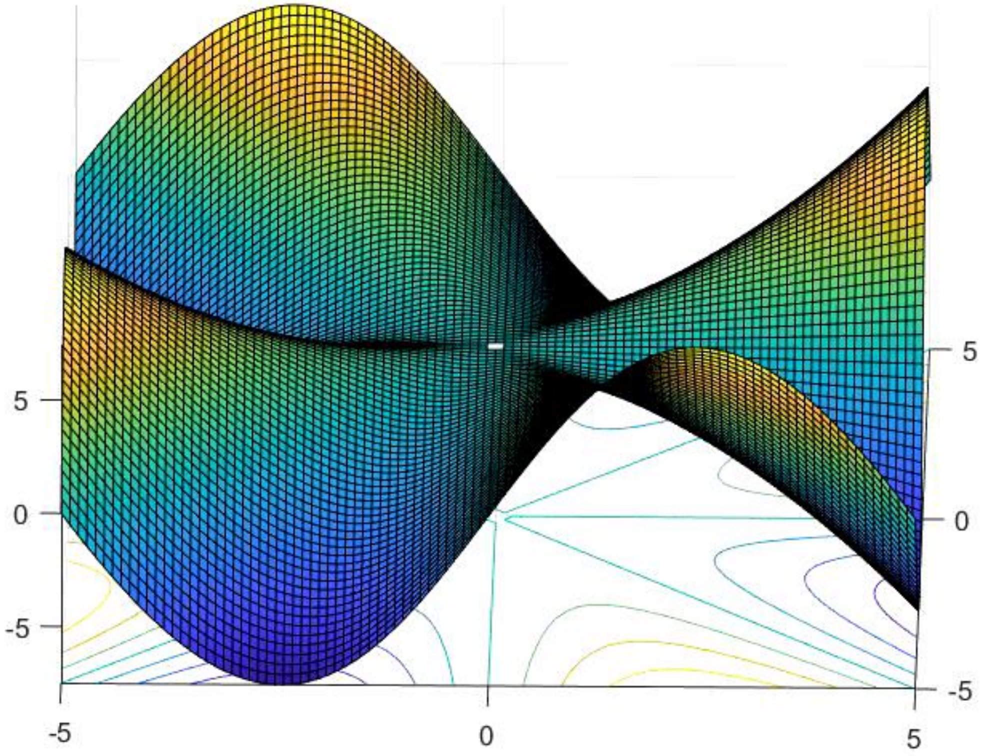
En este caso la función $f(x, y)$ es continua en R^2.

Ejercicios propuestos

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

En este caso la función $f(x, y)$ es continua en R^2.



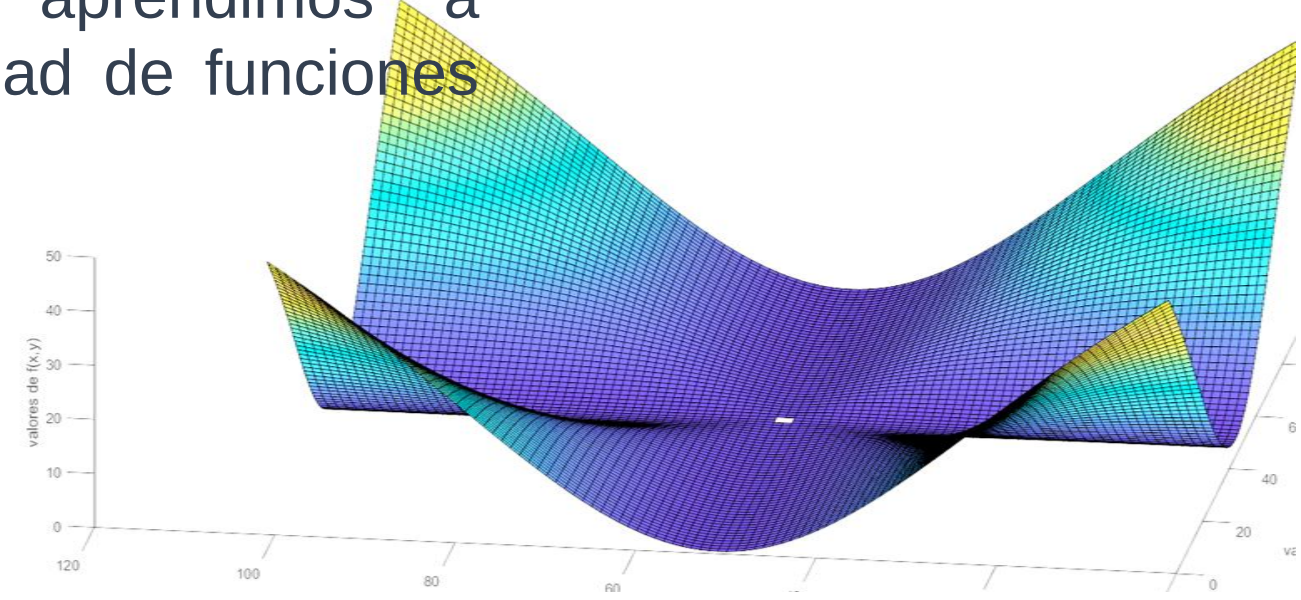


ANÁLISIS REAL II

KELVIN A. FLORIMON

Conclusión

Pudimos entender que es una función de un o más variables, la similitudes entre la continuidad de función de una variables y varias variables. También aprendimos a analizar y definir la continuidad de funciones de varias variables.



KELVIN A. FLORIMON

Recursos

- Microsoft PowerPoint
- MATLAB
- Wolfram Alpha
- Libros de texto
- DemoCreator

Bibliografía

Larson, R., & Edward, B. (2010). Calculo 2 de Varias Variables (9th ed.).

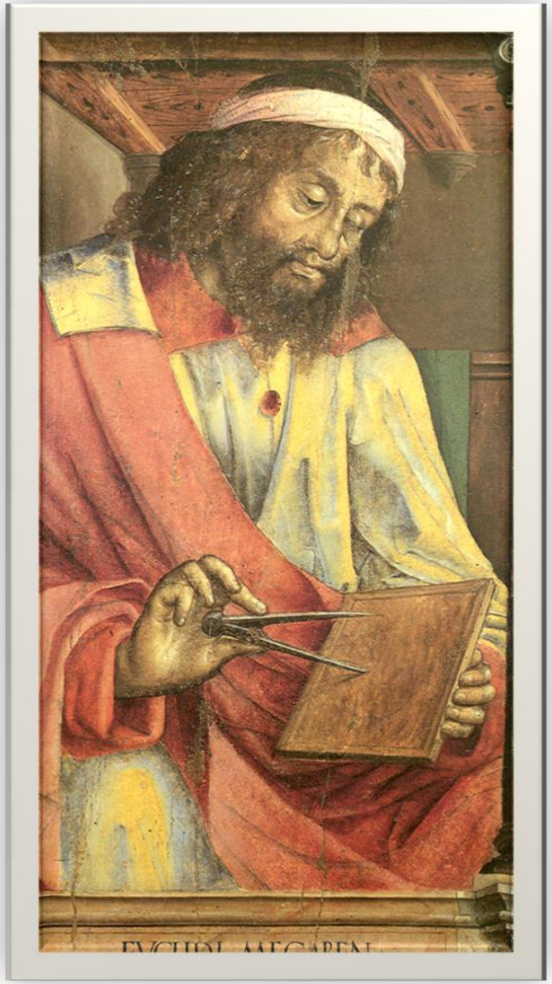
Purcell, Varberg, Rigdon. (2007). Calculo (9th ed.).

Milane, J. (2022). Funciones Reales de Variables Reales.

Frase reflexiva

“Las leyes de la naturaleza no son más que los pensamientos matemáticos de Dios.”

Euclides (325 a. C. 265 a. C.).



ANÁLISIS REAL II

KELVIN A. FLORIMON

¡Muchas gracias!