Derivada de una función
Fórmulas básicas de derivadas
Derivadas laterales y regla de la cadena.

Henry R Moncada

UNIVERSIDAD NACIONAL TECNOLÓGICA DE LIMA SUR

September 4, 2024

Outline

Introducción

- Definición de la derivada de una función.
- Interpretación geométrica.
- Teoremas y propiedades clave.

Interpretación Geométrica

- La pendiente m

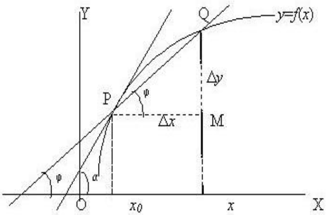
$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{x_1 + \Delta x - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

- Si la funcion es continua en x_1, entonces la recta tangente a la grafica de $f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$. Entonces la derivada de una función $f(x)$ en un punto $x_1 = a$ se define como el límite:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

  si este límite existe.

- La derivada de una función en un punto es la pendiente de la tangente a la gráfica en ese punto. Ejemplo gráfico de la interpretación geométrica.



Teoremas y Propiedades

- Teorema del valor medio.
- Propiedades de la derivada: linealidad, producto, cociente, etc.

Encuentre la derivada de la siguente función $y = x^2 - 4x + 3$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Encuentre la derivada de la siguente función $y = x^2 - 4x + 3$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(a + \Delta x)^2 - 4(a + \Delta x) + 3] - [a^2 - 4a + 3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 - 4a - 4\Delta x + 3] - [a^2 - 4a + 3]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 - 4a - 4\Delta x + 3 - a^2 - 4a - 3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2a\Delta x + (\Delta x)^2 - 4\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 2a + \Delta x - 4 = 2a - 4
\end{aligned}$$

Encuentre la derivada de la siguente función $y = 3x^2 + 12$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Encuentre la derivada de la siguente función $y = 3x^2 + 12$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3(a + \Delta x)^2 - 12] - [3a^2 + 12]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[3a^2 + 6a\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 12] - [3a^2 + 12]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6a\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 6a + 3\Delta x = 6a
\end{aligned}$$

Encuentre la derivada de la siguente función $y = \frac{2+x}{3-x}$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Encuentre la derivada de la siguente función $y = \frac{2+x}{3-x}$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\frac{2+a+\Delta x}{3-a-\Delta x}] - [\frac{2+a}{3-a}]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2+a+\Delta x)(3-a)] - [(2+a)(3-a-\Delta x)]}{\Delta x(3-a-\Delta x)(3-a)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[6+3a+3\Delta x-2a-a^2-a\Delta x] - [6+3a-2a-a^2-2\Delta x-a\Delta x]}{\Delta x(3-a-\Delta x)(3-x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x(3-a-\Delta x)(3-a)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(3-a-\Delta x)(3-a)} = \frac{5}{(3-a)(3-a)}
\end{aligned}$$

Encuentre la derivada de la siguente función $y = 3x^2$ en $x = 2$

Encuentre la derivada de la siguente función $y = \frac{2+x}{3-x}$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\frac{2+a+\Delta x}{3-a-\Delta x}\right] - \left[\frac{2+a}{3-a}\right]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2+a+\Delta x)(3-a)] - [(2+a)(3-a-\Delta x)]}{\Delta x(3-a-\Delta x)(3-a)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[6+3a+3\Delta x-2a-a^2-a\Delta x] - [6+3a-2a-a^2-2\Delta x-a\Delta x]}{\Delta x(3-a-\Delta x)(3-x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x(3-a-\Delta x)(3-a)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{(3-a-\Delta x)(3-a)} = \frac{5}{(3-a)(3-a)}
\end{aligned}$$

Encuentre la derivada de la siguente función $y = 3x^2$ en $x = 2$

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(a+h)^2] - [3a^2]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3(a^2+2ah+h^2) - 3a^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{12+12h+3h^2-12}{h} = \lim_{h \to 0} 12+3h = 12
\end{aligned}$$

Ejemplo 1: Derivada de $f(x) = x^2$

Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h) = 2a$$

Ejemplo 2: Derivada de $f(x) = \sin(x)$

Calcular la derivada de $f(x) = \sin(x)$ en $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$$

Usando la identidad $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) - \sin(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\sin(a) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a) \frac{\sin(h)}{h} \right)$$

Sabemos que $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ y $\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$, así que:

$$f'(a) = \cos(a)$$

Ejemplo 3: Derivada de $f(x) = e^x$

Calcular la derivada de $f(x) = e^x$ en $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{e^a e^h - e^a}{h}$$

$$= e^a \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Sabemos que $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, así que:

$$f'(a) = e^a$$

Ejemplo 4: Derivada de $f(x) = \ln(x)$

Calcular la derivada de $f(x) = \ln(x)$ en $x = a$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(a+h) - \ln(a)}{h}$$

Usando la propiedad logarítmica $\ln\left(\frac{a+h}{a}\right) = \ln(a+h) - \ln(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h}$$

Cambiando de variable con $u = \frac{h}{a}$, tenemos $h = au$ y cuando $h \to 0$, $u \to 0$:

$$f'(a) = \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{au} \cdot \frac{a}{a} = \frac{1}{a} \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u}$$

Sabemos que $\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, así que:

$$f'(a) = \frac{1}{a}$$

Tabla de Derivadas Comunes

Función	**Derivada**	**Ejemplo**
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$	Si $f(x) = 5$, entonces $f'(x) = 0$
$f(x) = cx$	$f'(x) = c$	Si $f(x) = 5x$, entonces $f'(x) = 5$
$f(x) = cu(x)$	$f'(x) = cu'$	Si $f(x) = 5u$, entonces $f'(x) = 5u'$
$f(x) = cx^n$	$f'(x) = cnx^{n-1}$	Si $f(x) = 3x^3$, entonces $f'(x) = 9x^2$
$f(x) = cu^n$	$f'(x) = cnu^{n-1}u'$	Si $f(x) = 3u^3$, entonces $f'(x) = 9u^2u'$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	Si $f(x) = \sin(x)$, entonces $f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	Si $f(x) = \cos(x)$, entonces $f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	Si $f(x) = \ln(x)$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$

Table 1: Derivadas comunes y ejemplos

Regla de la Suma

Regla de la Suma: Si $f(x) = u(x) + v(x)$, entonces la derivada es:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Ejemplos:

- Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 3x$, entonces $(f + g)' = 2x + 3$.
- Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \sin(x)$, entonces $(f + g)' = e^x + \cos(x)$.
- Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2$, entonces $(f + g)' = 3x^2 + 2x$.

Regla del Producto

Regla del Producto: Si $f(x) = u(x)v(x)$, entonces la derivada es:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Ejemplos:

- Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sin(x)$, entonces $(f \cdot g)' = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$.
- Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$, entonces $(f \cdot g)' = e^x \ln(x) + \frac{e^x}{x}$.
- Si $f(x) = x^3$ y $g(x) = \cos(x)$, entonces $(f \cdot g)' = 3x^2 \cos(x) - x^3 \sin(x)$.

Regla del Cociente

Regla del Cociente: Si $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, entonces la derivada es:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin(x)} \implies f'(x) = \frac{2x\sin(x) - x^2\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

- Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 1$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}$.
- Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \sin(x)$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{\sin^2(x)}$.
- Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x$, entonces $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{2x \cdot x - (x^2+1)}{x^2}$.

Regla de la Cadena

Regla de la Cadena: Si $f(x) = u(v(x))$, entonces la derivada es:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Ejemplos:

$$f(x) = \sin(x^2) \implies f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

- Si $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = x^2$, entonces $(f \circ g)'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$.
- Si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln(x)$, entonces $(f \circ g)'(x) = e^{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
- Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 1 - x^2$, entonces $(f \circ g)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Derivadas Laterales

Consideremos la función $f(x)$ definida en un intervalo alrededor de un punto x_0. Las derivadas laterales en x_0 se definen como:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplos para la derivada lateral derecha:

- Para $f(x) = x^2$, $\quad f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0$
- Para $f(x) = |x|$, $\quad f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = 1$
- Para $f(x) = \sin(x)$, $\quad f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = 1$

Ejemplos para la derivada lateral izquierda:

- Para $f(x) = x^2$, $\quad f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 - 0}{h} = 0$
- Para $f(x) = |x|$, $\quad f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{|-h| - 0}{h} = -1$
- Para $f(x) = \sin(x)$, $\quad f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = 1$

Derivadas laterales

Consider la function:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{if } x < 3 \\ 8 - x & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$$

Encuentre la derivada a la izquierda ($f'_{-}(3)$) y la derivada a la derecha ($f'_{+}(3)$).

- derivada a la izquierda:

$$f'_{-}(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

  Since $f(x) = 2x - 1$ for $x < 3$:

$$f'_{-}(3) = \lim_{x \to 3^-} \frac{(2x - 1) - (2 \cdot 3 - 1)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{2x - 7}{x - 3} = 2$$

- derivada a la derecha:

$$f'_{+}(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

  Since $f(x) = 8 - x$ for $x \geq 3$:

$$f'_{+}(3) = \lim_{x \to 3^+} \frac{(8 - x) - (8 - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{5 - x}{x - 3} = -1$$

La derivada a la izquierda en $x = 3$ es 2, y la derivada a la derecha es -1, no son iguales. Por lo tanto, la derivada no existe

Example: $f(x) = |x-3|$

Considere la función $f(x) = |x-3|$.

$$f(x) = |x-3| = \begin{cases} 3-x & x<3 \\ x-3 & x \geq 3 \end{cases}$$

Encuentre la derivada lateral en $x = 3$.
Right derivative:

$$f'_{+}(3) = \lim_{h\to 0^+} \frac{|3+h-3| - |3-3|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Left derivative:

$$f'_{-}(3) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|3+h-3| - |3-3|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

La función $f(x) = |x-3|$ es no differenciable en $x = 3$ dado que la derivada a la izquierda en $x = 3$ es -1, y la derivada a la derecha es 1, no son iguales. Por lo tanto, la derivada no existe

Ejemplo 1: Derivada de una Constante

- $f(x) = c$
- $f'(x) = 0$
- Interpretación: La pendiente de una línea horizontal es cero.

Ejemplo 2: Derivada de x^n

- $f(x) = x^2$
- $f'(x) = 2x$
- Ejemplo geométrico de una parábola y su tangente.

Ejemplo 3: Derivada de una Suma

- $f(x) = x^2 + 3x$
- $f'(x) = 2x + 3$
- Interpretación de la suma de funciones y sus derivadas.

Ejemplo 4: Derivada del Producto de dos Funciones

- $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$
- $f'(x) = 2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$
- Uso de la regla del producto.

Ejemplo 5: Derivada del Cociente de dos Funciones

- $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$
- $f'(x) = \frac{(2x)(x+1) - x^2}{(x+1)^2}$
- Aplicación de la regla del cociente.

Ejemplo 6: Derivada de una Composición de Funciones

- $f(x) = \sin(x^2)$
- $f'(x) = 2x\cos(x^2)$
- Uso de la regla de la cadena.