# Extremos Absolutos y Relativos de una Función
# Criterio de los Extremos Absolutos de una Función
# Criterios de la Primera y Segunda Derivada
# Aplicaciones de la derivada: Ingreso, Costo y Utilidad Marginal.

Henry R Moncada

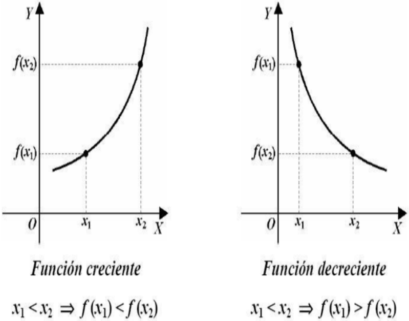
UNIVERSIDAD NACIONAL TECNOLÓGICA DE LIMA SUR

September 12, 2024

# Outline

# Funciones crecientes y decrecientes

Las siguientes figuras muestran la definición algebraica de **función creciente** y **función decreciente**.



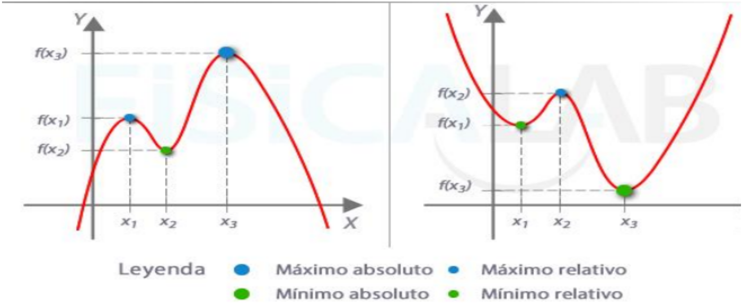

La siguiente definición es equivalente: Una función $f$ continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto $(a, b)$,

- Si $f^{'}(x) > 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la función $f$ es creciente en $[a, b]$
- Si $f^{'}(x) < 0$ para toda $x \in (a, b)$, entonces la función $f$ es decreciente en $[a, b]$

# Máximos y mínimos de una función

- **Extremo Relativo**: Sea $f$ una función cuyo dominio es el conjunto $D$, y $c$ un número en $D$.
  - $f(c)$ es un **valor máximo relativo (o máximo local)** de $f(x)$ en $D$, si existe $h > 0$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in (c-h, c+h)$.
  - $f(c)$ es un **valor mínimo relativo (o mínimo local)** de $f(x)$ en $D$, si existe $h > 0$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in (c-h, c+h)$.
  - Los valores máximo y mínimo relativos o locales de f se conocen como los extremos relativos o locales de $f$.

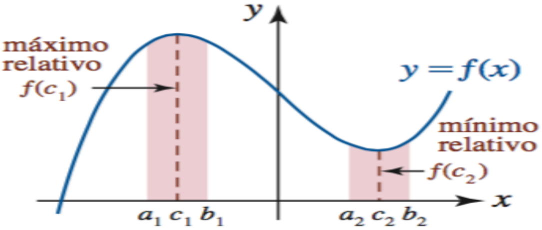
Básicamente, $f(c)$ es mayor o menor que los puntos inmediatamente anteriores y posteriores.



# Ejemplo

Ejemplo : Extremos relativos

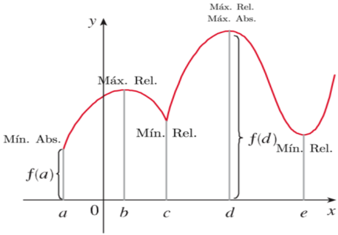
Para la $f(x) = x^3 - 5x + 8$, se tiene que su comportamiento final es $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, por lo cual $f$ no tiene extremos absolutos. No obstante esta función tiene extremos relativos en $f(c_1)$ y $f(c_2)$. En este caso, $f(c_1)$ es un máximo relativo y $f(c_2)$ es un mínimo relativo.
**Solución**:




**Observación 1:** Si $f$ es continua en todo su dominio entonces todo extremo absoluto, con excepción de un extremo de un punto frontera, también es un extremo relativo.

# Máximos y mínimos de una función

- **Extremo Absoluto**: Sea $f$ una función cuyo dominio es el conjunto $D$, y $c$ un número en D
  - Si $f(c) \geq f(x)$ para todo el dominio de $f(x)$, entonces $f(c)$ es un **valor máximo absoluto (o máximo global)** de $f(x)$ en $D$. En tal caso, $(c, f(c))$ es el punto más alto de la gráfica de $f$.
  - Si $f(c) \leq f(x)$ para todo el dominio de $f(x)$, entonces $f(c)$ es un **valor mínimo absoluto (o mínimo global)** de $f(x)$ en $D$. En tal caso, $(c, f(c))$ es el punto más bajo de la gráfica de $f$.
  - Los valores máximo y mínimo (absolutos) de $f$ se conocen como los **extremos globales o absolutos de** $f$.




$f(a)$ y $f(b)$ son extremos absolutos;
$f(a)$ es mínimo absoluto;
$f(d)$ es máximo absoluto;
$f(b)$, $f(c)$, $f(d)$ y $f(e)$ son extremos relativos;
$f(c)$ y $f(e)$ son mínimos relativos;
$f(b)$ y $f(d)$ son máximos relativos;
$f(d)$ es máximo absoluto y relativo.

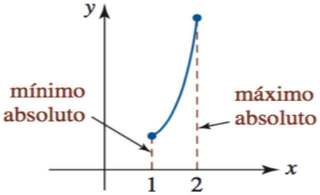
# Existencia de extremos absolutos en intervalos

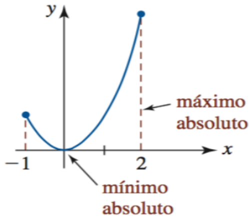
En intervalos que no sean cerrados y aún la función sea continua, no se garantiza la existencia de extremos absolutos de la función.

Ejemplo : Sea $f(x) = x^2$.

**Solución**:

1. $f$ en el intervalo $[1, 2]$ tiene un máximo absoluto en $f(2) = 4$ y un mínimo absoluto en $f(1) = 1$.
2. $f$ en el intervalo cerrado $[1, 2]$ tiene un máximo absoluto en $f(2) = 4$ y un mínimo absoluto $f(0) = 0$, el cual ocurre en un punto $x$ del interior del intervalo $[1, 2]$.



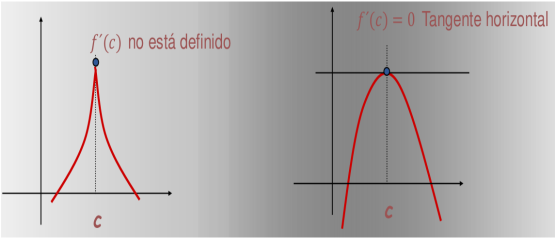




3. $f$ en el intervalo abierto $(1, 2)$ no tiene extremos absolutos. En este caso $f(1)$ y $f(2)$ no están definidos.
4. $f$ en el intervalo abierto $(1, 2)$ no tiene un máximo absoluto, pues $f(2)$ no existe, y un mínimo absoluto $f(0) = 0$.

# Valores críticos de una función

Dada una función $f(x)$ cuyo dominio es el intervalo $K$ que contiene a $x = c$, entonces $c$ es un valor crítico de $f(x)$ si:

1. $f^{'}(c) = 0$ (tangente horizontal)
2. $f^{'}(x)$ no existe
3. $c$ es un extremo del intervalo $K$




Los máximos y mínimos de una función se localizan en los valores críticos.

# Extremo en un punto frontera

Cuando un extremo absoluto de una función f ocurre en un punto frontera de un intervalo cerrado $I$, se dice que se trata de un extremo de punto frontera. Cuando $I$ no es un intervalo cerrado; es decir, cuando $I$ es un intervalo como $(a, b], (1, b]$ o $[a, 1)$, entonces aunque $f$ sea continua en $I$ no hay garantía de que $f$ tenga un extremo absoluto

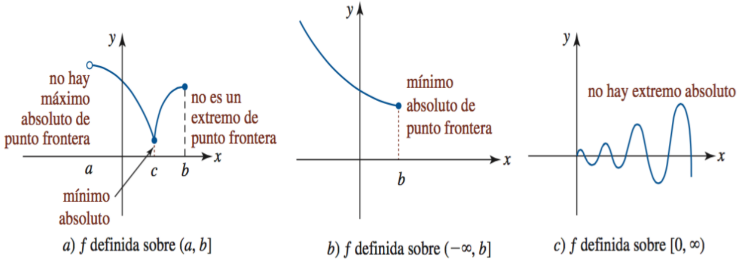
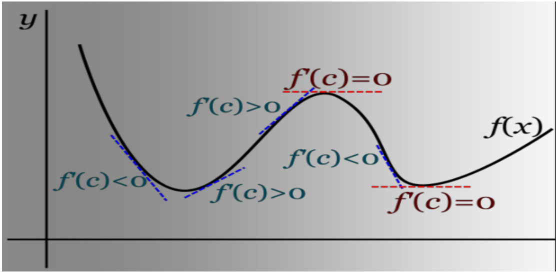



Figure 1: Ejemplo de una función f que es continua en un intervalo y que no tiene ningún extremo absoluto; no obstante tiene extremos relativos

# Criterio de la primera derivada

Sea $c$ un **valor crítico** de $f(x)$.

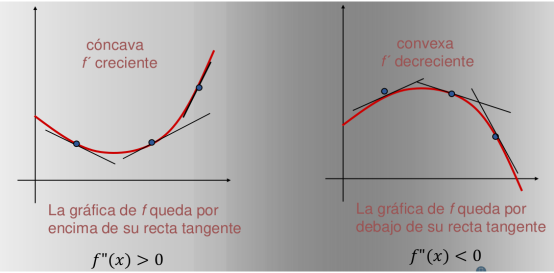
1. Si $f'(x) > 0$ antes de $x = c$ y $f'(x) < 0$ después de $x = c$, entonces $f(c)$ es un **máximo relativo** de $f(x)$
2. Si $f'(x) < 0$ antes de $x = c$ y $f'(x) > 0$ después de $x = c$, entonces $f(c)$ es un **mínimo relativo** de $f(x)$
3. Si $f'(x) > 0$ antes de $x = c$ y $f'(x) > 0$ después de $x = c$; o si $f'(x) < 0$ antes de $x = c$ y $f'(x) < 0$ después de $x = c$, entonces $f(c)$ no es un **máximo o un mínimo relativo** de $f(x)$



# Concavidad de funciones

Sea $f$ derivable en un intervalo $K$.

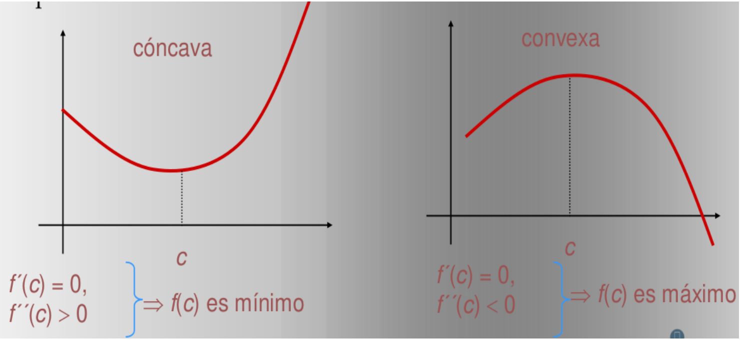
- La gráfica de $f$ es **cóncava** en $K$ si $f^{'}(x) > 0$ en todo el intervalo.
- La gráfica de $f$ es **convexa** en $K$ si $f^{'}(x) < 0$ en todo el intervalo



# Criterio de la segunda derivada

Sea $f$ una función tal que $f^{'}(c) = 0$ y cuya segunda derivada existe en un intervalo $K$ que contiene a $x = c$.

- Si $f^{''}(x) > 0$, entonces $f(c)$ es un **mínimo relativo**
- Si $f^{''}(x) < 0$, entonces $f(c)$ es un **máximo relativo**
- Si $f^{''}(x) = 0$, entonces el **criterio no es decisivo** y debe emplearse el **criterio de la primera derivada**



# Problemas de máximos y mínimos

Problemas con expresiones como: Más grande, menor costo, menor tiempo, mayor beneficio, menor esfuerzo, más resistencia, etc., son problemas que pueden ser traducidos en lenguaje matemático como problemas de máximos y mínimos.

1. Determinar la magnitud que debe ser optimizada.
2. Realizar un diagrama, si es necesario.
3. Determinar el modelo (ecuación) que describe la magnitud a optimizar.
4. Establecer las condiciones auxiliares del problema (ecuaciones auxiliares)
5. Unir todas las ecuaciones como una sola expresión de la magnitud a optimizar en función de una única variable.
6. Derivar y encontrar los puntos críticos.
7. Emplear el criterio de la primera o de la segunda derivada para determinar la naturaleza de los puntos críticos.
8. Comprobar que el valor obtenido cumple las condiciones del problema.
9. Dar la respuesta del problema.

# Problemas de razones relacionadas

Problemas que plantean la rapidez con que cambia una cantidad en términos de la razón de cambio (rapidez) de otras cantidades, se denominan problemas de razones relacionadas.

1. Realizar un diagrama del problema, si es necesario.
2. Determinar todas las variables del problema, particularmente aquellas que varían con el tiempo.
3. Establecer el modelo del problema (junto con sus ecuaciones auxiliares)
4. Unir todas las ecuaciones como una sola expresión.
5. Derivar (implícitamente y empleando la regla de la cadena) respecto al tiempo. Para encontrar la ecuación de razones relacionadas.
6. Sustituir en la ecuación obtenida todos los valores conocidos, para despejar la razón de cambio solicitada.
7. Comprobar que el valor obtenido cumple las condiciones del problema.
8. Dar la respuesta del problema.

# Ejemplos

## Ejemplo 1: Mínimo Relativo

Encontrar los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.
**Solución**:

- Derivada: $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
- Puntos críticos: $3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \,\text{o}\, x = 2$.
- Segunda derivada: $f''(x) = 6x - 6$. Evaluamos en $x = 0$ y $x = 2$:
    - $f''(0) = -6$ (Mínimo relativo en $x = 0$).
    - $f''(2) = 6$ (Máximo relativo en $x = 2$).

## Ejemplo 2: Máximo Absoluto en un Intervalo

Encontrar el máximo absoluto de la función $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ en el intervalo $[0, 5]$.
**Solución**:

- Derivada: $f'(x) = -2x + 4$.
- Puntos críticos: $-2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
- Evaluamos en los puntos críticos y los extremos del intervalo:
    - $f(0) = 1$, $f(2) = 5$, $f(5) = -4$.
- El máximo absoluto es $f(2) = 5$ en $x = 2$.

### Ejemplo 3: Extremos Relativos usando la Primera Derivada

Encontrar los extremos relativos de $f(x) = x^4 - 4x^3$.
**Solución**:

- Derivada: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$.
- Puntos críticos: $4x^2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \, \text{o} \, x = 3$.
- Evaluamos la derivada en los intervalos:
  - $f'(x) < 0$ para $x < 0$, $f'(x) > 0$ para $0 < x < 3$, $f'(x) < 0$ para $x > 3$.
- Mínimo relativo en $x = 3$, máximo relativo en $x = 0$.

### Ejemplo 4: Mínimo Absoluto en un Intervalo

Encontrar el mínimo absoluto de $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo $[1, 4]$.
**Solución**:

- Derivada: $f'(x) = 2x - 4$.
- Puntos críticos: $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
- Evaluamos en los extremos del intervalo y en $x = 2$:
  - $f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(4) = 5$.
- El mínimo absoluto es $f(2) = 1$ en $x = 2$.

## Ejemplo 5: Extremos absolutos

Encuentre los extremos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ en el intervalo $[-3, 1]$.

**Solución**: El dominio de $f$ es el intervalo $[-3, 1]$.

1. Debido a que $f$ es un polinomio entonces f es una función continua en todo $\mathbb{R}$, en particular es continua en el intervalo $[-3, 1]$, su dominio.
2. Al evaluar a $f$ en los extremos del intervalo $[-3, 2]$ se tiene que
$$f(-3) = 20 \text{ y } f(-1) = -24$$
.
3. En este caso
$$f^{'}(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4) = 0$$
si $x = -2$ y $x = 4$. Solo de estos dos valores, $x = -2$ está en el domino de $f$. Por lo tanto, $x = -2$ es el único punto crítico de $f$ en el intervalo abierto $(-3, 2)$. Además, $f(-2) = 30$.
4. El mayor de los valores $f(-3), f(-2), f(1)$ es $f(1) = -24$, y el mayor valor es $f(-2) = 30$. Por lo tanto, $f(1) = -24$ es el mínimo absoluto de $f$ en $[-3, 2]$ y $f(-2) = 30$ es el máximo absoluto de $f$ en $[-3, 2]$

## Ejemplo 6: Encuentre los números crítico de la función $f(x) = x \ln x$.

**Solución**:
El domino de $f$ está dado por todos los números $x > 0$. Entonces

$$f(x) = x\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x = 0$$

cuando $\ln x = -1$, es decir, cuando $x = e^{-1}$. Este número es el único punto crítico de $f$.

## Ejemplo 7: Encuentre los puntos críticos de la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

**Solución**:
El domino de $f$ está dado por los números reales $x \neq 0$. Dado que

$$f^{'}(x) = \frac{(x-1)(2x) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

entonces,

1. $f^{'}(x) = 0$ si $x(x-1) = 0$, es decir, si $x = 0$ o $x = 2$.
2. $f^{'}(x)$ no existe cuando $(x-1)^2 = 0$, es decir, si $x = 1$.

Ahora bien, como de estos números $x = 1$ es el único que no está en el dominio de $f$ entonces se tiene que los únicos números críticos de $f$ son $x = 0, 2$.

## Ejemplo 8: Encuentre los números críticos de la función $f(x) = |x|$.

**Solución**:
El dominio de $f$ esto todo $\mathbb{R}$. Ahora bien, para $x > 0$, $f^{'}(x) = 1$ y para $x < 0$, $f^{'}(x) = -1$. Esto hace que para $x \neq 0$ la derivada que $f$ nunca se anule. Luego $f$ no tiene ningún número crítico en los reales $x \neq 0$. Como $f^{'}(0)$ no existe y $x = 0$ está en dominio de $f$ entonces $x = 0$ es el único punto crítico de $f(x) = |x|$.

## Ejemplo 9: Maximización del producto

Hallar dos números cuya suma es 120 y el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

**Solución**:

Sea $x + y = 120$ con $P(x) = x \cdot y^2$, queremos maximizar $P(x)$.

$$y = 120 - x$$

Derivamos $P(x)$:

$$P(x) = x \cdot (120 - x)^2$$
$$P'(x) = (120 - x)^2 - 2x(120 - x)$$

Resolviendo $P'(x) = 0$ obtenemos el valor de $x$ que maximiza el producto.

$$\begin{aligned} 0 &= (120 - x)^2 - 2x(120 - x) \\ &= (120 - x)(120 - 3x) \\ 0 &= 3(120 - x)(40 - x) \end{aligned}$$

El valores de $x$ que maximizan el producto $x = 120, y = 0$ y $x = 40, y = 80$. Descartamos $y = 0$ porque no tiene sentido en el contexto.

## Ejemplo 10: Maximizar el área de los márgenes de un rectángulo interior

El área de una superficie rectangular es de 18 $m^2$ . Sabiendo que en su interior hay otra de forma rectangular con $3/4$ $m$ de márgenes superior e inferior y $1/2$ $m$ de márgenes laterales, hallar las dimensiones de la superficie exterior de manera que el área de los márgenes sea máxima.

**Solución**: Sea:

- $L$ la longitud de la superficie interior.
- $W$ el ancho de la superficie interior.
- $L + 2 \times \frac{3}{4} = L + 1.5$ la longitud de la superficie exterior.
- $W + 2 \times \frac{1}{2} = W + 1$ el ancho de la superficie exterior.

Sabemos que el área de la superficie interior es:

$$L \times W = 18\,\mathrm{m}^2$$

podemos expresar $L$ en función de $W$:

$$L = \frac{18}{W}$$

El área total de la superficie exterior es:

$$A_{\text{ext}} = (L + 1.5)(W + 1)$$

El área de los márgenes será el área de la superficie exterior menos el área de la superficie interior:

$$\begin{aligned} A_{\text{márgenes}} &= A_{\text{ext}} - A_{\text{int}} = (L + 1.5)(W + 1) - L \times W \\ &= (L \times W + L + 1.5W + 1.5) - L \times W = L + 1.5W + 1.5 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de $A_{\text{márgenes}}$:

$$A_{\text{márgenes}} = \frac{18}{W} + 1.5W + 1.5$$

Para maximizar el área de los márgenes, derivamos la expresión con respecto a $W$:

$$\frac{d}{dW}\left(\frac{18}{W}+1.5W+1.5\right)=-\frac{18}{W^2}+1.5$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos:

$$-\frac{18}{W^2}+1.5=0\Rightarrow\frac{18}{W^2}=1.5\quad\Rightarrow\quad W^2=\frac{18}{1.5}=12\quad\Rightarrow\quad W=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

Con $W=2\sqrt{3}$, calculamos $L$:

$$L=\frac{18}{W}=\frac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$$

El área de los márgenes es:

$$A_{\text{márgenes}}=\frac{18}{2\sqrt{3}}+1.5(2\sqrt{3})+1.5=3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+1.5=6\sqrt{3}+1.5$$

Las dimensiones de la superficie interior son:

$$L=3\sqrt{3}\quad\text{y}\quad W=2\sqrt{3}$$

Las dimensiones de la superficie exterior son:

$$L_{\text{ext}}=L+1.5=3\sqrt{3}+1.5$$

$$W_{\text{ext}}=W+1=2\sqrt{3}+1$$

Este valor es máximo, como se puede verificar mediante la segunda derivada.

$$\frac{d^2}{dW^2}\left(\frac{18}{W}+1.5W+1.5\right)=\frac{d}{dW}\left(-\frac{18}{W^2}+1.5\right)=\frac{36}{W^3}<0$$

## Ejemplo 11: Minimización del material del cilindro

Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular con 64 $cm^3$ de volumen. Hallar las dimensiones para que la cantidad de metal para construirlo sea mínima, en el caso en que el recipiente (a) sea abierto, (b) sea cerrado.

**Solución**:

Consideremos un cilindro con radio $r$ y altura $h$. Sabemos que:

$$V = \pi r^2 h = 64\,\mathrm{cm}^3$$

Queremos minimizar el área superficial del cilindro:

- (a) Si el recipiente es abierto, el área superficial es:

$$A_{\text{abierto}} = \pi r^2 + 2\pi r h$$

- (b) Si el recipiente es cerrado, el área superficial es:

$$A_{\text{cerrado}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

**Paso 1: Expresar el área en función de una sola variable**

Del volumen tenemos $h = \frac{64}{\pi r^2}$. Sustituyendo en la ecuación del área:

$$A_{\text{abierto}}(r) = \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{64}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{128}{r}$$

**Paso 2: Derivar el área respecto a $r$ para minimizarla**

Derivamos $A_{\text{abierto}}(r)$ respecto a $r$:

$$\frac{dA_{\text{abierto}}}{dr} = 2\pi r - \frac{128}{r^2}$$

Igualamos a cero para encontrar el valor de $r$:

$$2\pi r - \frac{128}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \left(\frac{128}{2\pi}\right)^{1/3} \approx 3.63\,\text{cm}$$

Sustituyendo $r = 3.63$ cm en la ecuación del volumen:

$$h = \frac{64}{\pi(3.63)^2} \approx 1.55\,\text{cm}$$

**Paso 1: Expresar el área en función de una sola variable**
En el caso cerrado, la ecuación del área es:

$$A_{\text{cerrado}}(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{64}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{128}{r}$$

**Paso 2: Derivar el área respecto a $r$ para minimizarla**
Derivamos $A_{\text{cerrado}}(r)$:

$$\frac{dA_{\text{cerrado}}}{dr} = 4\pi r - \frac{128}{r^2} \Rightarrow r = \left(\frac{128}{4\pi}\right)^{1/3} \approx 2.88\,\text{cm}$$

Sustituyendo $r = 2.88$ cm en la ecuación del volumen:

$$h = \frac{64}{\pi(2.88)^2} \approx 2.46\,\text{cm}$$

**Conclusión :**
Hemos encontrado las dimensiones óptimas para el recipiente cilíndrico:

- (a) Si es abierto: $r \approx 3.63\,\text{cm}$, $h \approx 1.55\,\text{cm}$.
- (b) Si es cerrado: $r \approx 2.88\,\text{cm}$, $h \approx 2.46\,\text{cm}$.

Estas dimensiones minimizan el área superficial, y por lo tanto la cantidad de metal necesario.

## Ejemplo 12: Minimización del área del triángulo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (3,4), de tal manera que el área del triángulo que forma con el primer cuadrante del plano es mínima.

**Solución**:

**Paso 1: Ecuación de la recta**

Dado que la recta pasa por el punto $(3, 4)$, su ecuación puede expresarse en forma punto-pendiente:

$$y - 4 = m(x - 3) \Rightarrow y = mx - 3m + 4$$

Para interceptar con el eje $x$ $(y = 0)$:

$$0 = mx - 3m + 4 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3m - 4}{m}$$

Para interceptar con el eje $y$ $(x = 0)$:

$$y = -3m + 4$$

**Paso 2: Área del triángulo**

El área del triángulo formado por la recta con los ejes coordenados es:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \text{Base} \cdot \text{Altura}$$

Donde la base es la intersección con el eje $x$, es decir, $x = \frac{3m-4}{m}$, y la altura es la intersección con el eje $y$, es decir, $y = -3m + 4$.

Entonces, el área es:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(\frac{3m - 4}{m}\right)(-3m + 4)$$

**Paso 13: Minimización del área**
Expandimos y simplificamos el área:

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3m - 4)(-3m + 4)}{m}$$

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-9m^2 + 12m + 12m - 16}{m}$$

$$A(m) = \frac{-9m + 24 - \frac{16}{m}}{2}$$

Ahora, derivamos $A(m)$ respecto a $m$ y buscamos los puntos críticos:

$$A'(m) = -\frac{9}{2} + \frac{8}{m^2}$$

Igualamos a 0 para encontrar los puntos críticos:

$$-\frac{9}{2} + \frac{8}{m^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{16}{9} \quad \Rightarrow \quad m = \pm\frac{4}{3}$$

**Paso 4: Verificación y conclusión**
Evaluamos el área en los valores de $m$:
Para $m = \frac{4}{3}$:

$$A\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{-9\left(\frac{4}{3}\right) + 24 - \frac{16}{\frac{4}{3}}}{2} = 4$$

Para $m = -\frac{4}{3}$, el área es mayor, por lo que descartamos esta solución.

**Conclusión:** La ecuación de la recta que minimiza el área es:

$$y - 4 = \frac{4}{3}(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{3}x - 0$$

## Ejemplo 14: Minimización de la cantidad de cerca

Se quiere poner una cerca para proteger un campo rectangular de un área $A$ conocida, cuyo uno de los bordes lo constituye la margen de un río. Sabiendo que el borde del río no hay colocar cerca, demostrar que la menor cantidad de cerca que se necesita es cuando la longitud del campo es igual al doble de su anchura.

**Solución**:

Queremos cercar un campo rectangular de área $A$ adyacente a un río. No se requiere cerca en el borde del río.

- Sea $x$ el ancho del campo (perpendicular al río).
- Sea $y$ la longitud del campo (paralela al río).
- El área del campo es conocida: $A = x \cdot y$.
- La cantidad de cerca requerida es solo en tres lados: $2x + y$.

Nuestro objetivo es minimizar la cantidad de cerca que se necesita.

**Formulación Matemática**

- El área es:
$$A = x \cdot y \Rightarrow y = \frac{A}{x}.$$
- La longitud total de la cerca es:
$$L = 2x + y = 2x + \frac{A}{x}.$$
- Queremos minimizar $L(x)$.

**Minimización de la Longitud de la Cerca** Para minimizar $L(x)$, tomamos la derivada con respecto a $x$:

$$L'(x) = 2 - \frac{A}{x^2}.$$

Igualamos a cero para encontrar los puntos críticos:

$$2 - \frac{A}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{A}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{A}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{A}{2}}.$$

**Determinación de $y$** Sustituyendo $x = \sqrt{\frac{A}{2}}$ en la ecuación del área $A = x \cdot y$:

$$y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{\frac{A}{2}}} = 2\sqrt{\frac{A}{2}}.$$

Por lo tanto, $y = 2x$.
**Conclusión** La longitud mínima de cerca se logra cuando la longitud del campo es el doble de su anchura, es decir, $y = 2x$. La cantidad mínima de cerca es:

$$L_{\text{min}} = 2x + \frac{A}{x} = 2\sqrt{\frac{A}{2}} + 2\sqrt{\frac{A}{2}} = 4\sqrt{\frac{A}{2}}.$$

# Extremos Absolutos en un Intervalo Cerrado

- Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
- Los extremos absolutos (máximos y mínimos) de $f(x)$ ocurren en:
  - Puntos críticos dentro del intervalo ($a < x < b$).
  - Los extremos del intervalo $x = a$ o $x = b$.
- Método:
  1. Calcular $f'(x)$ y encontrar los puntos críticos.
  2. Evaluar $f(x)$ en los puntos críticos y en $a$ y $b$.
  3. Comparar los valores para determinar el máximo y mínimo absoluto.

## Ejemplo 1: $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en $[0, 3]$

**Solución**:

- **Paso 1:** Derivada de $f(x)$:
$$f'(x) = 2x - 4.$$
- **Paso 2:** Encontramos los puntos críticos resolviendo $f'(x) = 0$:
$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$$
- **Paso 3:** Evaluamos $f(x)$ en los puntos críticos y en los extremos:
$$f(0) = 3, \quad f(3) = 0, \quad f(2) = -1.$$
- **Paso 4:** El mínimo absoluto es $f(2) = -1$ y el máximo absoluto es $f(0) = 3$.

## Ejemplo 2: $f(x) = \sin(x)$ en $[0, \pi]$

**Solución**:

- **Paso 1:** Derivada de $f(x)$:
$$f'(x) = \cos(x).$$
- **Paso 2:** Encontramos los puntos críticos resolviendo $f'(x) = 0$:
$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$
- **Paso 3:** Evaluamos $f(x)$ en los puntos críticos y en los extremos:
$$f(0) = 0, \quad f(\pi) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$
- **Paso 4:** El máximo absoluto es $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y el mínimo absoluto es $f(0) = f(\pi) = 0$.

Ejemplo 3: $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[1, 4]$

**Solución**:

- **Paso 1:** Derivada de $f(x)$:
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$
- **Paso 2:** No hay puntos críticos dentro del intervalo porque $f'(x) \neq 0$ para $x \in [1, 4]$.
- **Paso 3:** Evaluamos $f(x)$ en los extremos:
$$f(1) = 1, \quad f(4) = \frac{1}{4}.$$
- **Paso 4:** El mínimo absoluto es $f(4) = \frac{1}{4}$ y el máximo absoluto es $f(1) = 1$.

Ejemplo 4:

Encuentre los extremos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ en el intervalo $[-3, 1]$.
**Solución**:
El dominio de f es el intervalo $[-3, 1]$.

- **Paso 1:** Debido a que $f$ es un polinomio entonces f es una función continua en todo $\mathbb{R}$, en particular es continua en el intervalo $[-3, 1]$, su dominio.
- **Paso 2:** Al evaluar a $f$ en los extremos del intervalo $[3, 2]$ se tiene que $f(-3) = 20$ y $f(1) = -24$
- **Paso 3:** En este caso

$$f^{'}(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x+2)(x-4) = 0$$

  si $x = -2$ y $x = 4$. Solo de estos dos valores, $x = -2$ está en el domino de $f$. Por lo tanto, $x = -2$ el único punto crítico de $f$ en el intervalo abierto $(-3, 2)$. Además, $f(-2) = 30$.
- **Paso 4:** El mayor de los valores $f(-3), f(-2), f(1)$ es $f(1) = -24$, y el mayor valor es $f(-2) = 30$. Por lo tanto, $f(1) = 24$ es el mínimo absoluto de $f$ en $[-3, 2]$ y $f(-2) = 30$ es el máximo absoluto de $f$ en $[-3, 2]$.

# Conclusión

- El criterio de los extremos absolutos permite encontrar máximos y mínimos en intervalos cerrados.
- Se deben considerar tanto los puntos críticos dentro del intervalo como los extremos.
- Este método es útil para aplicaciones en optimización y análisis de funciones.
- Los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ se encuentran comparando los valores en los puntos críticos y en los extremos.
- En todos los ejemplos, seguimos el procedimiento general de derivar, encontrar los puntos críticos, evaluar en los extremos y comparar los valores.