Tarea 1: Metemática II

Facultad de Administración

Fecha de entrega: 12 de Setiembre de 2024

Instrucciones

Resuelve los siguientes problemas de manera clara y completa. Asegúrate de incluir todos los pasos necesarios para llegar a la solución. Aplica los conceptos aprendidos en clase y justifica tus respuestas cuando sea necesario.

1. Encuentra la derivada de la función $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x - 7$.

   Solución:
   $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(3x^3 - 5x^2 + 2x - 7\right)$$
   Utilizamos la regla de la potencia para derivar cada término:
   $$f'(x) = 3 \cdot 3x^{3-1} - 5 \cdot 2x^{2-1} + 2 \cdot 1x^{1-1} - 0$$
   $$f'(x) = 9x^2 - 10x + 2$$

2. Determina la derivada lateral izquierda y derecha de la función $f(x)$ en $x = 1$.
   $$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \geq 1, \\ 2x + 1, & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

   Solución: Para la derivada lateral derecha en $x = 1$:
   $$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h + h^2}{h} = 2$$
   Para la derivada lateral izquierda en $x = 1$:
   $$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{2(1+h) + 1 - (2 \cdot 1 + 1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2 + 2h + 1 - 3}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$
   Ambas derivadas laterales son iguales, por lo tanto, $f'(1) = 2$.

3. Deriva $f(x) = e^x + \sin(x) + \ln(x)$.

   Solución: Aplicamos las fórmulas conocidas para la derivada de cada término:
   $$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^x\right) + \frac{d}{dx}\left(\sin(x)\right) + \frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right)$$
   $$f'(x) = e^x + \cos(x) + \frac{1}{x}$$

4. Encuentra la derivada de $f(x) = (3x^2 + 2x)^5$ usando la regla de la cadena.

   Solución: Sea $u(x) = 3x^2 + 2x$, entonces $f(x) = u(x)^5$. Usamos la regla de la cadena:
   $$f'(x) = 5u(x)^4 \cdot u'(x)$$
   Calculamos $u'(x)$:
   $$u'(x) = 6x + 2$$
   Por lo tanto, la derivada es:
   $$f'(x) = 5(3x^2 + 2x)^4 \cdot (6x + 2)$$

5. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ si $x^2 + y^2 = 25$.

   Solución: Derivamos ambos lados con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

   Despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

6. Deriva $f(x) = \frac{2x^3 - x}{x^2+1}$.

   Solución: Usamos la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(2x^3 - x) - (2x^3 - x)\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

   Derivamos:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(6x^2-1) - (2x^3 - x)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

   Simplificamos el numerador:

$$f'(x) = \frac{(6x^4 - x^2 + 6x^2 - 1) - (4x^4 - 2x^2)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 5x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$$

7. Deriva $f(x) = 3^x$.

   Solución: La derivada de una función exponencial de la forma a^x es:

$$f'(x) = 3^x \ln(3)$$

8. Deriva $f(x) = \arctan(x)$.

   Solución: La fórmula para la derivada de $\arctan(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

9. Deriva $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

   Solución: Usamos la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

10. Encuentra la derivada de $f(x) = \sin(x^2)$.

   Solución: Usamos la regla de la cadena:

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

   Por lo tanto:

$$f'(x) = 2x\cos(x^2)$$

11. Deriva la función $f(x) = e^x$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

12. Deriva la función $f(x) = \ln(x)$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}\left(\ln(x)\right) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

13. Deriva la función $f(x) = 5e^{2x}$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}\left(5e^{2x}\right) = 5 \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{2x}\right) = 5 \cdot 2e^{2x} = 10e^{2x}$$

14. Deriva la función $f(x) = \ln(3x^2)$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}\left(\ln(3x^2)\right) = \frac{1}{3x^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) = \frac{1}{3x^2} \cdot 6x = \frac{2}{x}$$

15. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25) \implies 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

16. Encuentra $\frac{dy}{dx}$ para la ecuación $xy = 1$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(1) \implies x\frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

17. Encuentra la segunda derivada de $f(x) = x^3$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(x^3) = \frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$$

18. Encuentra la segunda derivada de $f(x) = e^x$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(e^x) = e^x$$

19. Encuentra la segunda derivada de $f(x) = \ln(x)$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(\ln(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

20. Encuentra la segunda derivada de $f(x) = x^4$.
Solución:
$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(x^4) = \frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2$$

21. La posición de una partícula está dada por $s(t) = t^3 - 3t^2 + 2t$. Encuentra la velocidad de la partícula.
Solución:
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 2$$

22. Encuentra la tasa de cambio de $A(x) = x^2$ en $x = 3$.
Solución:

$$\frac{dA}{dx} = 2x$$

$$\left.\frac{dA}{dx}\right|_{x=3} = 2(3) = 6$$

23. Encuentra la tasa de cambio de $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ con respecto al radio r.
Solución:

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$

24. El radio de un círculo está aumentando a razón de 2 cm/s. Encuentra la tasa de cambio del área del círculo cuando $r = 10$ cm.
Solución: Sabemos que $A = \pi r^2$. La tasa de cambio del área es:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Sustituyendo los valores:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(2) = 40\pi\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$$

25. La altura de un cilindro está disminuyendo a razón de 3 cm/s, mientras que el radio está aumentando a razón de 1 cm/s. Encuentra la tasa de cambio del volumen cuando el radio es 5 cm y la altura es 10 cm.
Solución: La fórmula para el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$. Derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \pi(2rh\frac{dr}{dt} + r^2\frac{dh}{dt})$$

Sustituyendo los valores:

$$\frac{dV}{dt} = \pi\left(2(5)(10)(1) + (5)^2(-3)\right) = \pi(100 - 75) = 25\pi\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$$