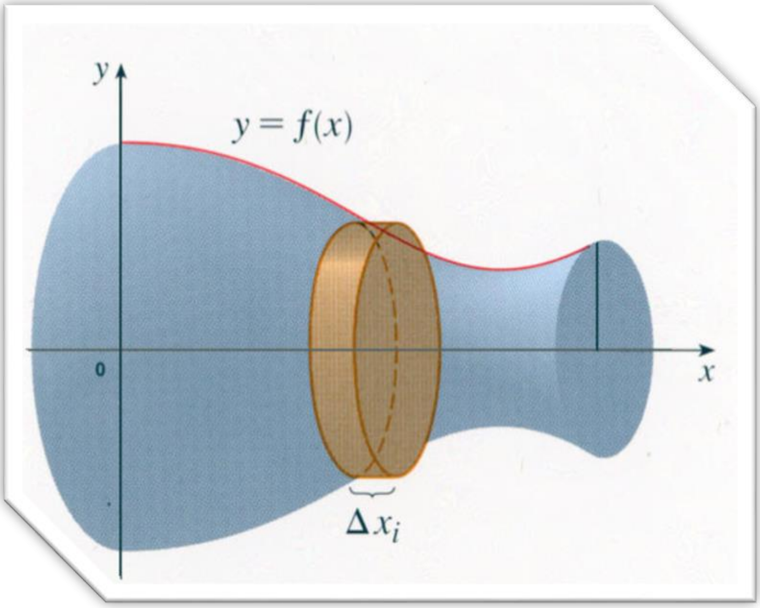
CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Book · September 2018

1 author:

Carlos Ayala Moya
Universidad Politécnica Salesiana (UPS)

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL



Carlos Ayala Moya

UNIVERSIDAD UTE - FAU

2018

CONTENIDO

NOTA ACLARATORIA.

ESTA VERSIÓN DE LOS APUNTES DE *CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL*, ES PRODUCTO DE MATERIAL QUE SE HA RECOPILADO DE UNA SERIE DE DOCUMENTOS QUE HABLAN ACERCA DEL TEMA, YA SEA IMPRESO O DEL INTERNET Y QUE HAN SIDO ADECUADOS CONFORME AL PLAN DE ESTUDIOS SEMESTRAL VIGENTE DE LA FACULTAD DE ARQUITECTURA Y URBANISMO DE LA UNIVERSIDAD UTE PARA LA MATERIA DE *MATEMATICAS APLICADAS II*. POR SER LA PRIMERA VERSIÓN SE CONSIDERA QUE NO ESTÁ TOTALMENTE CONCLUIDA SU REVISIÓN, POR LO QUE SE AGRADECERÁ A TODAS AQUELLAS PERSONAS QUE PUEDAN Y QUIERAN APORTAR COMENTARIOS AL PRESENTE DOCUMENTO, DE TAL FORMA QUE PERMITA LLEGAR A TENER UN DOCUMENTO QUE SIRVA DE APOYO PARA EL ESTUDIO DE LA MATERIA. DE FORMA EXPRESA SE AGRADECE A LOS AUTORES DEL MATERIAL UTILIZADO EN LAS NOTAS, SIENDO IMPOSIBLE DARLES EL CRÉDITO QUE SE MERECEN POR LA DIVERSIDAD DEL MATERIAL USADO Y POR NO TENER ÉSTOS APUNTES UN FIN LUCRATIVO, ESPERO SU COMPRENSIÓN, PARA USAR LIBREMENTE LA INFORMACIÓN.

ATENTAMENTE

Ing. Carlos Ayala Moya M. Sc.

1. DERIVACION

Inicialmente la derivada fue un problema de tipo geométrico que era hallar la tangente (pendiente) de una curva en un punto dado.

Explicación de lo que es derivación.

1.1 DEFINICIÓN DE PENDIENTE DE UNA CURVA

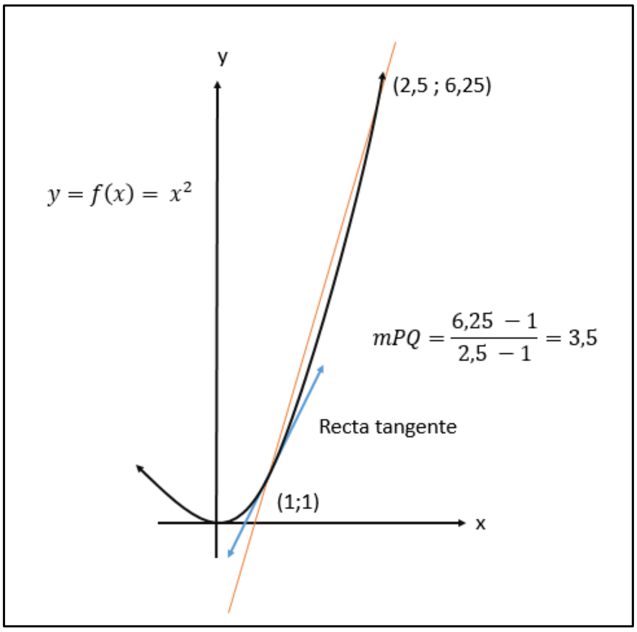


Figura 1.1: Recta Secante. Función $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x2}$ que pasa por (1;1) y (2.5;6.25)

$$m_{PQ} = \frac{elevación}{desplazamiento} = \frac{6.25 - 1}{2.5 - 1} = 3.5$$

$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{Pendiente\ de\ PQ}$
$(\mathbf{2.5, 6.25})$	$(\mathbf{6.25 - 1})/(\mathbf{2.5 - 1}) = \mathbf{3.5}$
$(\mathbf{2, 4})$	$(\mathbf{4 - 1})/(\mathbf{2 - 1}) = \mathbf{3}$
$(\mathbf{1.5, 2.25})$	$(\mathbf{2.25 - 1})/(\mathbf{1.25 - 1}) = \mathbf{2.5}$
$(\mathbf{1.25, 1.5625})$	$(\mathbf{1.5625 - 1})/(\mathbf{1.25 - 1}) = \mathbf{2.25}$
$(\mathbf{1.1, 1.21})$	$(\mathbf{1.21 - 1})/(\mathbf{1.1 - 1}) = \mathbf{2.1}$
$(\mathbf{1.01, 1.0201})$	$(\mathbf{1.0201 - 1})/(\mathbf{1.01 - 1}) = \mathbf{2.01}$

Tabla 1.1: Ejemplos de la Pendiente PQ

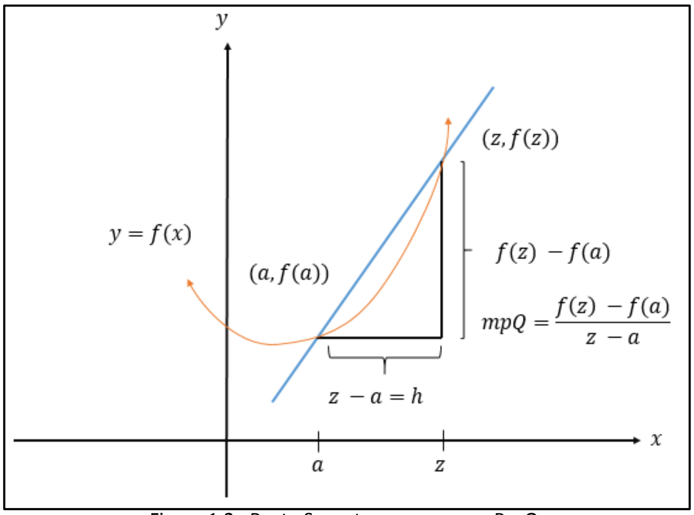


Figura 1.2 : Recta Secante que pasa por P y Q.

$$m_{PQ} = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ahora para encontrar la pendiente de una recta tangente al punto P.

$$m_{TAN} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo: Determinar la pendiente de una recta tangente en el punto (1,1) de la siguiente función:

$$f(x) = x^2$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2$$

Reemplazando a por x, para poder generalizar a cualquier punto (x, f(x)), se obtiene la llamada DERIVADA.

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Esto siempre que exista el límite

Ejemplo: Encuentre la derivada de f.

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Notación:

Simbología	**Se lee**
$\frac{dy}{dx}$	$"\ de\ y,\ de\ x"$
$\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)$	$"de\ f(x), de\ x"$
y'	$"y\ prima"$
$D_x y$	$"\ de\ x,\ de\ y"$
$D_x(f(x)$	$"\ de\ x, de\ f(x)"$

Tabla 1.2: Notaciones de la derivada.

Ejemplo: Encuentre la ecuación de una recta tangente en (1,7) de la siguiente función:

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3) - (2x^2+2x+3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+2x+2h+3-2x^2-2x-3}{h}$$

$$= \lim_{h\to o}\frac{4xh+2h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}(4x+2h+2)$$

$$f'(x) = 4x + 2$$

$$f'(1) = 4(1) + 2 = 6$$

Recordando el concepto de pendiente, tenemos:

$$m = \frac{y-7}{x-1} = 6$$

$$y - 7 = 6(x-1)$$

$$y = 6x + 1$$

1.2 REGLAS PARA LA DERIVACIÓN

Explicación de cada regla de derivación.

Regla 1: Derivada de función constante

$$f(x) = c$$

c = constante

$$f'(x) = 0$$

Regla 2: Derivada de función identidad.

$$f(x) = x$$
$$f'(x) = 1$$

Regla 3: Derivada de una constante por la función identidad.

$$f(x) = cx$$

c = constante

$$f'(x) = c$$

Regla 4: Derivada de una función potencia.

$$f(x) = x^h$$
$$f'(x) = hx^{h-1}x'$$
$$f'(x) = hx^{h-1}(1)$$

Regla 5: Derivada de una suma o una diferencia

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big) = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) - g(x)\big) = f'(x) - g'(x)$$

Ejercicios para que el alumno resuelva en clase:

$$f(x) = 2x^2 + 2x + 2x + 3$$
$$f(x) = (2x - 1)^2$$

1.3 DERIVADA DE UN PRODUCTO

Si *f* y *g* son funciones diferenciables, entonces el producto *f**g* es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esto es, la derivada del producto de dos funciones es la derivada de la primera función por la segunda, más la primera función por la derivada de la segunda.

$$\frac{d}{dx}(producto) = (derivada\ de\ la\ primera)(segunda) + (primera)(derivada\ de\ la\ segunda)$$

Ejemplo: Aplicación de la Regla del producto

$$F(x) = (x^2 + 3x) * (4x + 5), encuentre\ F'(x)$$

$$F(x) = \underbrace{(x^2 + 3x)}_{f(x)}\underbrace{(4x + 5)}_{g(x)}$$

Por lo tanto, es posible aplicar la regla del producto:

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + 3x)}_{Derivada\ de\ la\ primera} \underbrace{(4x + 5)}_{segunda} + \underbrace{(x^2 + 3x)}_{primera} + \underbrace{\frac{d}{dx}(4x + 5)}_{derivada\ de\ la\ segunda}$$

$$= (2x + 3)(4x + 5) + (x^2 + 3x)(4)$$

$$= 12x^2 + 34x + 15$$

Ejemplo: Diferenciación de un producto de tres factores

$$Si\ y = (x + 2)(x + 3)(x + 4), encuentre\ y'$$

Solución: Sería deseable utilizar la regla del producto, pero ésta se aplica sólo cuando se tienen dos factores. Considerando los primeros dos factores como uno solo, puede tratarse a y como un producto de dos funciones.

$$y = [(x+2)(x+3)](x+4)$$

La regla del producto da:

$$y' = \frac{d}{dx}[(x+2)(x+3)](x+4) + [(x+2)(x+3)]\frac{d}{dx}(x+4)$$

$$= \frac{d}{dx}[(x+2)(x+3)](x+4) + [(x+2)(x+3)](1)$$

Aplicando de nuevo la regla del producto. Se tiene

$$y' = \left(\frac{d}{dx}(x+2)(x+3) + (x+2)\frac{d}{dx}(x+3)\right)(x+4) + (x+2)(x+3)$$

$$= [(1)(x+3) + (x+2)(1)](x+4) + (x+2)(x+3)$$

Después de simplificar, se obtiene

$$y' = 3x^2 + 18x + 26$$

Otra manera de encontrar la derivada es:

Multiplicar los primeros dos factores de *y* para obtener

$$y = (x^2 + 5x + 6)(x+4)$$

Y luego aplicar la regla del producto.

Ejemplo:

Ejercicio de la derivada de un producto.

1.4 DERIVADA DE UN COCIENTE

Se omite la demostración.

$$\boxed{F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$\frac{d(cociente)}{dx} = \frac{(denominador)\left(\begin{matrix} derivada \\ del\ numerador \end{matrix}\right) - (numerador)\left(\begin{matrix} derivada \\ del\ denominador \end{matrix}\right)}{(denominador)^2}$$

Ejemplo: Aplicación de la regla del cociente

$$Si\ F(x) = \frac{4x^2 + 3}{2x - 1}, encuentre\ F'(x)$$

Solución: Se considera a F como un cociente y se aplica la regla del cociente.

$$Sea\ f(x) = 4x^2 + 3 \text{ y } g(x) = 2x - 1$$

$$= \frac{(2x - 1)(8x) - (4x^2 + 3)(2)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x - 6}{(2x - 1)^2} = \frac{2(2x + 1)(2x - 3)}{(2x - 1)^2}$$

Ejemplo: Reescribir antes de diferenciar

$$y = \frac{1}{x + \frac{1}{x + 1}}$$

Solución: Para simplifica la diferenciación, se reescribirá la función de manera que ninguna fracción aparezca en el denominador

Se tiene

$$y = \frac{1}{x + \frac{1}{x + 1}} = \frac{1}{\frac{x(x + 1) + 1}{x + 1}} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+x+1)(1)-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+x+1)-(2x^2+3x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$$

Ejemplo:

Ejercicio de la derivada de un cociente.

1.5 DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

$$\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(e^{u)} = e^u \frac{du}{dx}$$

Ejemplo: $encuentre\ \frac{d}{dx}(3e^x). Como\ 3\ es\ un\ factor\ constante.$

$$\frac{d}{dx}(3e^x) = 3\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= 3e^x$$

$$si\ y = \frac{x}{e^x}\ encuentre\ \frac{dy}{dx}$$

Solución: Se podría utilizar primero la regla del cociente y luego la ecuación, pero es un poco más fácil reescribir primero la función como $y = xe^{-x}$ y usar la regla del producto y la ecuación.

$$\frac{dy}{dx} = e^{-1}\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(e^{-1})(1) + x(e^{-1})(-1) = e^{-1}(1-x) = \frac{1-x}{e^x}$$

Ejemplo:

$si\ y = e^2 + e^x + \ln 3\ encuentre$:

Solución: como e^2 y ln 3 son constantes, $y' = 0 + e^x + 0 = e^x$

Ejemplo: Encuentre

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3+3x})$$

Solución: La función tiene la forma $e^u\ con\ u = x^3 + 3x$

Ejemplo:

Ejercicio de la derivada exponencial.

1.6 DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Consulta demostración.

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad para\ x\ > 0$$

Ahora sí $y\ =\ ln\ |u|$

$$\frac{d}{dx}(\ln|u|) = \frac{dy}{dx} * \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(\ln|u|) * \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} * \frac{du}{dx}\ para\ u\ \neq 0$$

Por lo que:

$$\frac{d}{du}(\ln|u| = \frac{1}{u} * \frac{du}{dx}\ para\ u\ > 0$$

Ejemplo: Diferencie $\mathrm{f(x)} =\ 5 \ln x$

Solución: Aquí f es una constante (5) que multiplica a una función $(\ln x)$; así que, por la regla básica 2, se tiene:

$$f'(x) = 5\frac{d}{dx}(\ln x) = 5 * \frac{1}{x} = \frac{5}{x}\ para\ x\ > 0$$

Ejemplo: Diferencie, $y = \ln(x^2+1)$

Solución: Esta función tiene la forma $ln\, u$ con $u = \ x^2 + 1$ y, como $x^2 + 1 > 0$, para toda x, $y = ln(x^2 + 1)$ está definida para toda x. al usar la ecuación se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Ejemplo: Diferencie la siguiente función:

$$y = x^2 In(4x+2)$$

Solución: usando la regla del producto se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = x^2\left(\frac{1}{4x+2}\right)(4) + (In(4x+2))\frac{d}{dx}(x^2)$$

Por la ecuación (2) con $u = 4x + 2$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \ x^2\left(\frac{1}{4x+2}\right)(4) + \big(In(4X+2)\big)(2x)\\ &= \frac{2x^2}{2x+1} + 2x, In(4x+2)\ \ para\ 4x+2>0\end{aligned}$$

Como $4x + 2 > 0$ exactamente cuando $x > -1/2$, se tiene

$$\frac{d}{dx}\big(x^2 In(4x+2)\big) = \frac{2x^2}{2x+1} + 2, In\ (4x+2)\ \ para\ x > -1/2$$

Ejemplo: Diferencie $y = In\ \big|ln|x|\big|$.

Solución: esta función tiene la forma $y = In\ |u| \quad con\ u = In|x|$, usando la ecuación (2), se obtiene

$$y' = \frac{1}{In\ |x|}\frac{d}{dx}(In\ |x|\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{xIn\ |x|} \quad para\ \ x,u\ \neq 0$$

Como $In\ |x| = 0$ cuando $x = -1{,}1$, se tiene

$$\frac{d}{dx}(In\big|In|x|\big| = \frac{1}{x\ In\ |x|}\ para\ x \neq -1{,}0{,}1$$

Ejemplo: Encuentre $\frac{dy}{dx}$ si $y = In\,(2x+5)^3$.

Solución: Aquí se tiene el logaritmo de una potencia. Primero se simplifica el lado derecho usando las propiedades de los logaritmos. Luego se diferencia para obtener.

$y = In(2x+5)^3 = 3\,In(2x+5)$ para $2x+5 > 0$

$$\frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{1}{2x+5}\right)(2) = \frac{6}{2x+5} \text{ para } x > -5/2$$

En forma alternativa, si la simplificación no se realizara primero, se escribirá:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x+5)^3}\frac{d}{dx}((2x+5)^3)$$
$$= \frac{1}{(2x+5)^3}(3)(2x+5)^2(2) = \frac{6}{2x+5}$$

Ejemplo: Encuentre $f'(p) = In((p+1)^2(p+2)^3\,(p+3)^4)$.

Solución: Se simplifica el lado derecho y luego se diferencia:

$$f(p) = 2\,In(p+1) + 3In\,(p+2) + 4In\,(p+3)$$
$$f'(p) = 2\left(\frac{1}{p+1}\right)(1) + 3\left(\frac{1}{p+2}\right)(1) + 4\left(\frac{1}{p+3}\right)(1)$$
$$= \frac{2}{p+1} + \frac{3}{p+2} + \frac{4}{p+3}$$

Ejemplo:

Ejercicio de derivación logarítmica

1.7 DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS CON BASE B

$$y = log_b u = \frac{In_{\ u}}{In_{\ b}} \quad \text{para } u > 0$$

$$\frac{d}{dx}(log_b u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{In_u}{In_{\ b}}\right) = \frac{1}{In\,b}\frac{d}{dx}(In\,u) = \frac{1}{In\,b}.\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(log_b u) = \frac{1}{(In\ b)u}.\frac{du}{dx} \text{ para } u\ > 0$$

Ejemplo: Diferenciación de una función logarítmica con base 2.

Diferencie $y = log_2 x$.

Solución: De acuerdo con el procedimiento anterior, se tiene

$$\frac{d}{dx}(log_2 x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{In\ x}{In\ 2}\right) = \frac{1}{In\ 2}\frac{d}{dx}(In\ x) = \frac{1}{(In\ 2)x}$$

Vale la pena mencionar que la respuesta puede escribirse en términos de la base original.

Debido a que

$$\frac{1}{In\ b} = \frac{1}{\frac{log_b b}{log_b e}} = \frac{log_b e}{1} = log_b e$$

Es posible expresar $\frac{1}{(In\ 2)x}$ como $\frac{log_2 e}{x}$. En forma más general, $\frac{d}{dx}(log_b u) = \frac{log_b e}{u}.\frac{du}{dx}$.

Ejemplo: Diferenciación de una función logarítmica con base 10.

Si $y = \log(2x+1)$, encuentre la razón de cambio de y con respecto a x.

Solución: La razón de cambio es dy/dx y la base implicada es 10. Por lo tanto, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log(2x+1)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{In(2x+1)}{In\ 10}\right)$$

$$= \frac{1}{In\ 10}.\frac{1}{2x+1}(2) = \frac{2}{In\ 10(2x+1)}$$

1.8 DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA. REGLA DE LA CADENA.

Una función compuesta es de la siguiente forma:

$$y = f(u)\ y\ u = g(x)$$

La Regla de la Cadena establece que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Ejemplo: Encuentre dy/dx.

$$y = u2$$

$$u = 2x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(u^2).\frac{d}{dx}(2x+1)$$
$$= (2u)2 = 4u$$

Al reemplazar *u* por $2x + 1$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x+1) = 8x + 4$$

Ahora comprobar al realizar el reemplazo de u por $2x + 1$ y desarrollar.

Ejemplo: Resuelva utilizando la Regla de la Cadena.

Si $y = 2u^2 - 3u - 2 \;\; y\, u = x^2 + 4$, encuentra dy/dx.

Solución: por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(2u^2 - 3u - 2).\frac{d}{dx}(x^2 + 4)$$

$$= (4u - 3)(2x)$$

Se puede escribir la respuesta solo en términos de x reemplazando u por $x^2 + 4$.

$$\frac{dy}{dx} = [4(x^2+4) - 3](2x) = [4x^2 + 13](2x) = 8x^3 + 26x$$

Ejemplo: Resuelva utilizando la Regla de la Cadena.

Si $y = \sqrt{w} \;\; y\, w = 7 - t^3$, encuentre dy/dt.

Solución: Aquí, y es una función de *w y w* es una función de t, por lo que se puede considerar a *y* como una función de *t.* Por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw}.\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dw}\left(\sqrt{w}\right).\frac{d}{dt}(7 - t^3)$$
$$= \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(-3t^2) = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-3t^2)$$
$$= -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{7-t^3}}$$

Ejemplo: Resuelva utilizando la Regla de la Cadena**.**

Si $y = \ 4u^3 + 10u^2 - 3u - 7 \ \ y \ u = \ 4/(3x - 5)$, encuentre dy/dx cuando $x = 1$.

Solución: por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(4u^3 + 10u^2 - 3u - 7) . \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3x - 5}\right)$$
$$= (12u^2 + 20u - 3) . \frac{(3x - 5)\frac{d}{dx}(4) - 4\frac{d}{dx}(3x - 5)}{(3x - 5)^2}$$
$$= (12u^2 + 20u - 3) . \frac{-12}{(3x - 5)^2}$$

Si reemplazamos $x = 1$

$$u = \frac{4}{3(1) - 5} = -2$$

Por lo tanto

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=1} = [12(-2)^2 + 20(-2) - 3] . \frac{-12}{[3(1) - 5]^2}$$
$$= 5 . (-3) = -15$$

Ejemplo: Resuelva utilizando la Regla de la Cadena.

$$y = f(u) = u^{100} \quad y \quad u = g(x) = \ x^3 - x^2 + 6$$

Entonces $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100} = (g(x))^{100} = f\big(g(x)\big)$. Ahora que se tiene una composicion, es posible diferenciarla. Como $y = u^{100} \ \ y \ u = x^3 - x^2 + 6$, por la regla de la cadena se tiene.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$= (100u^{100})(3x^2 - 2x)$$
$$= 100(x^3 - x^2 + 6)^{99}(3x^2 - 2x)$$

Se acaba de utilizar la regla de la cadena para diferenciar $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$, que es una potencia de una función de x, no simplemente una potencia de x. La regla siguiente, llamada **regla de la potencia**, generalizada el resultado y es un caso especial de la regla de la cadena.

Ejemplo:

Ejercicio adicional de la regla de la cadena.

1.9 REGLA DE LA POTENCIA.

$$\frac{d}{dx}(u^a) = au^{a-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$$

Pero $dy/du = au^{a-1}$. Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = au^{a-1}\frac{du}{dx}$$

Que es la regla de la potencia.

Ejemplo:

Si $y = (x^3 - 1)^7$, encuentre *y'.*

Solución: como y es una potencia de la *función* de *x*, aplicable la regla de la potencia.

Al hacer $u(x) = x^3 - 1\ y\ a = 7$, se tiene

$$\begin{aligned} y' &= a[u(x)]^{a-1}u'(x) \\ &= 7(x^3 - 1)^{7-1}\frac{d}{dx}(x^3 - 1) \\ &= 7(x^3 - 1)^6(3x^2) = 21x^2(x^3 - 1)^6 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Si $y = \sqrt[3]{(4x^2 + 3x - 2)^2}$, encuentre dy/dx cuando $x = -2$.

Solución: $y = (4x^2 + 3x - 2)^{2/3}$ se utiliza la regla de la potencia con

$$u = 4x^2 + 3x - 2$$

$y \quad a = \frac{2}{3}$. Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{(2/3)-1}\frac{d}{dx}(4x^2 + 3x - 2)$$
$$= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{-1/3}(8x + 3)$$
$$= \frac{2(8x + 3)}{3\sqrt[3]{4x^2 + 3x - 2}}$$

Así,

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=-2} = \frac{2(-13)}{3\sqrt[3]{8}} = -\frac{13}{3}$$

Ejemplo:

$$y = \frac{1}{x^2 - 2}$$

Solución: Aunque aquí puede emplearse la regla del cociente, un procedimiento más eficiente consiste en tratar el lado derecho como la potencia $(x^2-2)^{-1}$y utilizar la regla de la potencia. Sea $u = x^2 - 2$. Entonces $y = u^{-1}y$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} &= (-1)(\mathrm{x}^2-2)^{-1-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(\mathrm{x}^2-2)\\ &= (-1)(\mathrm{x}^2-2)^{-2}(2\mathrm{x})\\ &= -\frac{2\mathrm{x}}{(\mathrm{x}^2-2)^2}\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$si\ z = \left(\frac{2x+5}{x^2+1}\right)^4\ encuentre\ \frac{dz}{dx}$$

Solución: Como z es una potencia de una función, primero se utiliza la regla de la potencia:

$$\frac{dz}{dx} = 4\left(\frac{2x+5}{x^2+1}\right)^{4-1}\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+5}{x^2+1}\right)$$

Ahora se emplea la regla del cociente:

$$\frac{dz}{dx} = 4\left(\frac{2x+5}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{(x^2+1)(2)-(2x+5)(2x)}{(x^2+1)^2}\right)$$

Ejemplo:

Si $y\ =\ (x2-4)5(3x+5)4$. Encuentre y'

Solución: Como y es un producto, se aplica primero la regla del producto:

$$Y' = (x^2-4)^5\frac{d}{dx}((3x+5)^4) + (3x+5)^4\frac{d}{dx}((x^2-4)^5)$$

Ejemplo:

Ejercicio de derivación de la regla de la potencia.

1.10 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS E INVERSAS.

Las funciones trigonométricas directas son:

$$f(x) = sen\ x$$

$$f(x) = cos\ x$$

$$f(x) = tg\ x$$

$$f(x) = cotg\ x$$

$$f(x) = sec\ x$$

$$f(x) = cosec\ x$$

Las funciones trigonométricas inversas son:

$$f(x) = arc\ sen\ x$$

$$f(x) = arc\ cos\ x$$

$$f(x) = arc\ tg\ x$$

$$f(x) = arc\ cotg\ x$$

$$f(x) = arc\ sec\ x$$

$$f(x) = arc\ cosec\ x$$

Tabla de Derivadas Trigonométricas Directas:

$y\ =\ sen\, u$	$y' =\ u'\, cos\, u$
$y\ =\ cos\, u$	$y'\ =\ -u'\, sen\, u$
$y\ =\ tg\, u$	$y'\ =\ u'\, sec^2\, u$
$y\ =\ cotg\, u$	$y'\ =\ -u' cosec2\, u$
$y\ =\ sec\, u$	$y'\ =\ u'\, sec\, u\ *\ tg\, u$
$y =\ cosec\, u$	$y' =\ -u'\, cosec\, u\ *\ cotg\, u$

Tabla 1.3 Derivadas Logarítmicas

Ejemplos:

$y\ =\ sen\ 5x$	$y' =\ 5\ cos\ 5x$
$y\ =\ cos\ 3x^2$	$y'\ =\ -6xsen3\ x^2$
$y\ =\ tg\ 7x$	$y'\ =\ 7\ sec^2\ 7x$

$y = cotg\,(4x+5)$	$y' = -7'cosec^2(4x+5)$
$y = sec\,x^3$	$y' = 3x^2\,sec\,x^3 * tg\,x^3$
$y = cosec\,x^2$	$y' = -2x\,cosec\,x^2 * cotg\,x^2$

Tabla 1.4 Ejemplos de las derivadas logarítmicas.

Tabla de Derivadas Trigonométricas Inversas:

$y = arc\,sen\,u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arc\,cos\,u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = arc\,tg\,u$	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
$y = arc\,cotg\,u$	$y' = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$
$y = arc\,sec\,u$	$y' = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$
$y = arc\,cosec\,u$	$y' = -\frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}$

Tabla 1.5 Derivadas trigonométricas inversas

Ejemplos:

$y = \text{arcosen}\,x^2$	$y' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$
$y = arccos3x$	$y' = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$
$y = arctg3x$	$y' = \frac{3}{1+9x^2}$

Tabla 1.6 Ejemplos de las derivadas trigonométricas inversas

Ejemplo:

Ejercicio de derivada trigonométrica.

1.11 DERIVADA IMPLÍCITA.

Las funciones que están dadas en la forma usual $y = f(x)$ se las llama explicitas, las funciones que no se pueden expresar en la forma y=f(x) se las llama implícitas, estas funciones están expresado en la forma $F(x, y) = 0$.

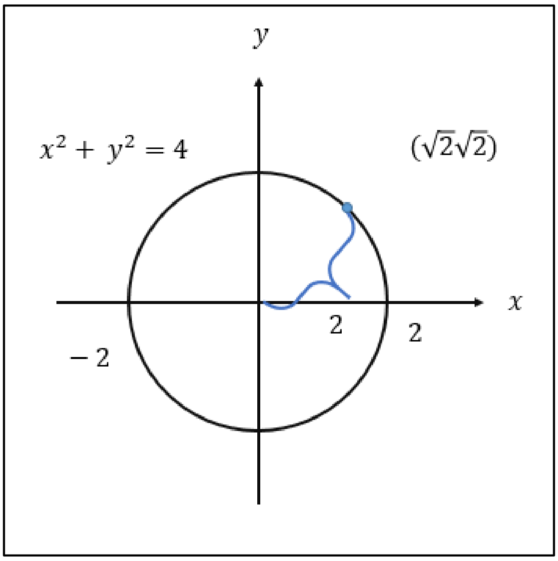


Figura 1.3: Función implícita del círculo.

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

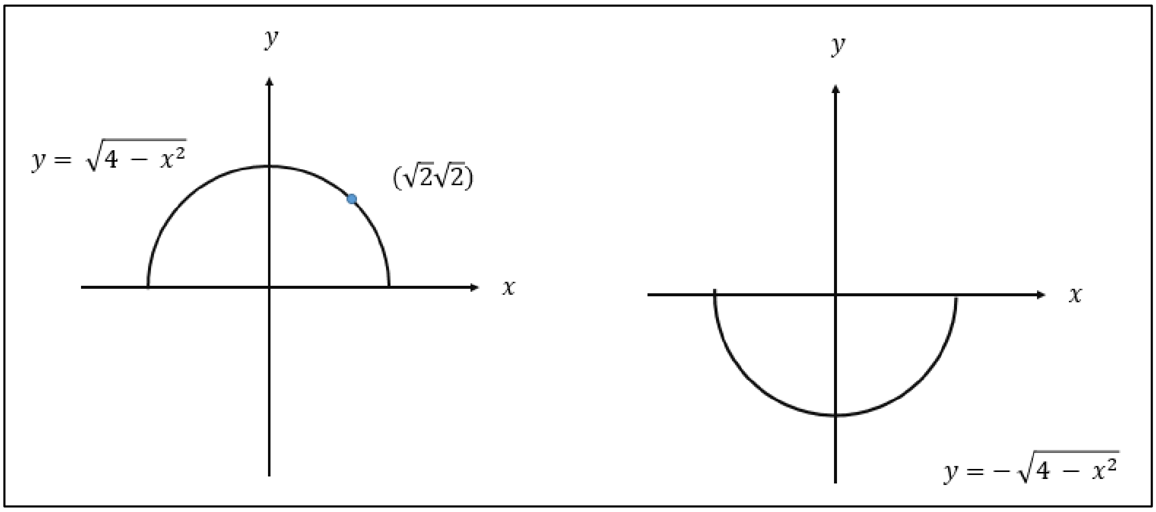


Figura 1.4: Función implícita del circulo (por partes)

Solución

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| x = \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}} = -1$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2) + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}4\right) = \frac{dy}{dx}(0)$$

Procedimiento de diferenciación implícita

Para una ecuación que supuestamente define a y de manera implícita como una función diferenciable de x, la derivada $\frac{dy}{dx}$ puede encontrarse como sigue:

Diferencie ambos lados de la ecuación con respecto a x

Agrupe todos los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$ en un lado de la ecuación y agrupe los demás términos en el otro lado

Obtenga $\frac{dy}{dx}$ como factor común en el lado que contenga los términos $\frac{dy}{dx}$

Despeje $\frac{dy}{dx}$, tomando en cuenta cualesquiera restricciones

Ejemplo:

$$y + y^3 - x = 7$$

Diferenciamos.

$$\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(7)$$

$$\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} - -1 = 0$$

Agrupamos términos dy/dx.

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

Factorizamos.

$$\frac{dy}{dx}(1 + 3y^2) = 1$$

Despejamos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + 3y^2}$$

Ejemplo:

$$\mathrm{x}^3 + 4\mathrm{xy}^2 - 27 = \mathrm{y}^4$$

Diferenciamos.

$$\frac{d}{dx}(x^3) + 4\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(27) = \frac{d}{dx}(y^4)$$

$$3x^2 + 4\left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{d}{dx}(x)\right] - 0 = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 4\left[x\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(1)\right] = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 8xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 = 4y^3\frac{dy}{dx}$$

Agrupamos términos dy/dx.

$$8xy\frac{dy}{dx} - 4y^3\frac{dy}{dx} = -3x^2 - 4y^2$$

Factorizamos:

$$\frac{dy}{dx}(8xy - 4y^3) = -3x^2 - 4y^2$$

Despejamos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 4y^2}{8xy - 4y^3} = \frac{3x^2 + 4y^2}{4y^3 - 8xy}$$

En (x, y) que:

$$4y^3 - 8xy \neq 0$$

Ejemplo: Encuentre $\frac{dy}{dx}$ en (1,2)

$$x^3 = (y - x^2)^2$$

Diferenciamos.

$$\frac{d}{dx}(x^3) = \frac{d}{dx}[(y - x^2)^2]$$

$$3x^2 = 2(y - x^2)\left(\frac{dy}{dx} - 2x\right)$$

$$3x^2 = 2\left(y\frac{dy}{dx} - 2xy - x^2\frac{dy}{dx} + 2x^3\right)$$

$$3x^2 = 2y\frac{dy}{dx} - 4xy - 2x^2\frac{dy}{dx} + 4x^3$$

Agrupamos términos dy/dx.

$$3x^2 + 4xy - 4x^3 = 2y\frac{dy}{dx} - 2x^2\frac{dy}{dx}$$

Factorizamos.

$$3x^2 + 4xy - 4x^3 = 2\frac{dy}{dx}(y - x^2)$$

Despejamos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4xy - 4x^3}{2(y - x^2)} \quad para\ y - x^2 \neq 0$$

$$Para\ el\ punto\ (1{,}2), y - x^2 = 2 - 1^2 = 1 \neq 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = \frac{3(1)^2 + 4(1)(2) - 4(1)^3}{2(2-(1)^2)} = \frac{7}{2}$$

Ejemplo:

$$q - p = \ln q + \ln p$$

$$\frac{d}{dp}(q) - \frac{d}{dp}(p) = \frac{d}{dp}(\ln q) + \frac{d}{dp}(\ln p)$$

$$\frac{dq}{dp} - 1 = \frac{1}{q}\frac{d}{dp} + \frac{1}{p}$$

$$\frac{dq}{dp} - \frac{1}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{1}{p} + 1$$

$$\frac{dq}{dp}\left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p} + 1$$

$$\frac{dq}{dp}\left(\frac{q-1}{q}\right) = \frac{1+p}{p}$$

$$\frac{dq}{dp} = \frac{(1+p)q}{p(q-1)}\ para\ p(q-1) \neq 0$$

Ejemplo:

Ejemplo de derivación implícita.

1.12 DERIVADA LOGARÍTMICA.

La técnica de diferenciación logarítmica simplifica la derivación de productos cocientes y potencias. El procedimiento es el siguiente:

Para diferenciar $y = f(x)$,

Obtenga el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación. Esto resulta en

$$In\ y = In(f(x))$$

Simplifique $In(f(x))$ usando las propiedades de los logaritmos.

Diferencie ambos lados con respecto a *x*.

Despeje

$$\frac{dy}{dx}$$

Exprese la respuesta solo en términos de *x.* Esto requiere sustituir *f(x)* por *y.*

Para diferenciar $y = f(x)$

Obtenga el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación. Esto resulta en $\ln y = \ln(f(x))$

Simplifique $\ln(f(x))$ usando las propiedades de los logaritmos.

Diferencie ambos lados con respecto a x

Despeje $\frac{dy}{dx}$

Exprese la respuesta solo en términos de x. Esto requiere sustituir $f(x)$ por y.

Tomar en cuenta que:

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\ln(f(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{dy}{dx}(\ln(f(x))$$

Ejemplo:

$$y = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$$

$$\ln y = \ln\frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}$$

$$\ln y = \ln(2x-5)^3 - \ln(x^2\sqrt[4]{x^2+1})$$

$$= 3\ln(2x-5) - (\ln x^2 + \ln(x^2+1)^{1/4}$$

$$= 3\ln(2x-5) - 2\ln x - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$

$$\frac{y'}{y} = 3\left(\frac{1}{2x-5}\right)(2) - 2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)(2x)$$

$$= \frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}$$

$$y' = y\left(\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\right)$$

$$y' = \frac{(2x-5)^3}{x^2\sqrt[4]{x^2+1}}\left[\frac{6}{2x-5} - \frac{2}{x} - \frac{x}{2(x^2+1)}\right]$$

Ejemplo: $y = x^x$

$$y' = y\frac{d}{dx}(\ln x^x)$$

$$= x^x\frac{d}{dx}(x \ln x)$$

$$= x^x\left((1)(\ln x) + (x)\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= x^x = (\ln x + 1)$$

Ejemplo:

$$y = (1+e^x)^{\ln x}$$

Es de la forma: $y = u^v$ donde $u = 1 + e^x$ y $v = \ln x$

$$\ln y = \ln\left((1+e^x)^{\ln x}\right)$$

$$\ln y\, (\ln x) \ln(\,(1+e^x))$$

$$\frac{y'}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)(\ln(1+e^x)) + (\ln x)\left(\frac{1}{1+e^x} * e^x\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(1+e^x)}{x} + \frac{e^x \ln x}{1+e^x}$$

$$y' = y\left(\frac{\ln(1+e^x}{x} + \frac{e^x \ln x}{1+e^x}\right)$$

$$y' = (1+e^x)^{\ln x}\left(\frac{\ln(1+e^x)}{x} + \frac{e^x \ln x}{1+e^x}\right)$$

Ejemplo:

Ejercicio de derivada logarítmica.

1.13 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

Sea f una función diferenciable (derivable), entonces se dice que f ' es la primera derivada de f; puede suceder que esta nueva función sea a su vez derivable, en este caso a la derivada de la primera derivada se le denomina segunda derivada de la función primitiva f. Del mismo modo, la derivada de la segunda derivada se llama tercera derivada de f, y así sucesivamente hasta la enésima derivada.

Primera derivada: y'	$f'(x)$	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$	Dxy
Segunda derivada: : y''	$f''(x)$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)\right)$	D^2xy
Tercera derivada: y'''	$f'''(x)$	$\frac{d^3y}{dx^3}$	$\frac{d^3}{dx^3}\left(f(x)\right)$	D^3xy
Cuarta derivada $y^{(4)}$	$f^{(4)}(x)$	$\frac{d^4y}{dx^4}$	$\frac{d^4}{dx^4}\left(f(x)\right)$	D^4xy

Tabla 1.7: Notación de las derivadas de orden superior.

Ejemplo:

$$f(x) = 6x^3 - 12x^2 + 6x - 2$$

$$f'(x) = 18x^2 - 24x + 6$$

$$f''(x) = 3tx - 24$$

$$f'''(x) = 36$$

$$f^{(4)} = 0$$

$$f^{(5)} = 0$$

Ejemplo:

$$y = e^{x^2}, encuentre\ \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}(2x) = 2xe^{x^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\left(x\left(e^{x^2}\right)(2x) + e^{x^2}(1)\right) = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$$

Ejemplo:

$$y = f(x) = \frac{16}{x+4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -16(x+4)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 32(x+4)^{-3} = \frac{32}{(x+4)^3}$$

Ejemplo: Diferenciación Implícita de orden superior.

$$enuentre\ \frac{d^2y}{dx^2}\ \ si\ x^2 + 4y^2 = 4$$

$$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{4y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4y\frac{d}{dx}(-x) - (-x)\frac{d}{dx}(4y)}{(4y^2)}$$

$$= \frac{4y(-1) - (-x)\left(4\frac{dy}{dx}\right)}{16y^2}$$

$$= \frac{-4y + 4x\frac{dy}{dx}}{16y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y + x\frac{dy}{dx}}{4y^2}$$

Ejemplo:

$$y^2 = e^x + y$$

$$2y\frac{dy}{dx} = e^{x+y}\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + e^{x+y}\frac{dy}{dx}$$

$$2y\frac{dy}{dx} - e^{x+y}\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

$$(2y - e^{x+y})\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y}}{2y - e^{x+y}}$$

Como

$$y^2 = e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2y - y^2} = \frac{y}{2 - y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2-y)\frac{dy}{dx} - y(-\frac{dy}{dx})}{(2-y)^2} = \frac{2\frac{dy}{dx}}{(2-y)^2}$$

Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2 - y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\left(\frac{y}{2-y}\right)}{(2-y)^2} = \frac{2y}{(2-y)^3}$$

Ejemplo:

Ejercicio de derivada de orden superior.

1.14 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

https://www.youtube.com/watch?v=CmjD1NiKv-o

Método de Newton

Si *f* es continua en el intervalo $[a, b]$ y *f(a)* y *f (b)* tienen signos opuestos, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz real entre *a* y *b.*

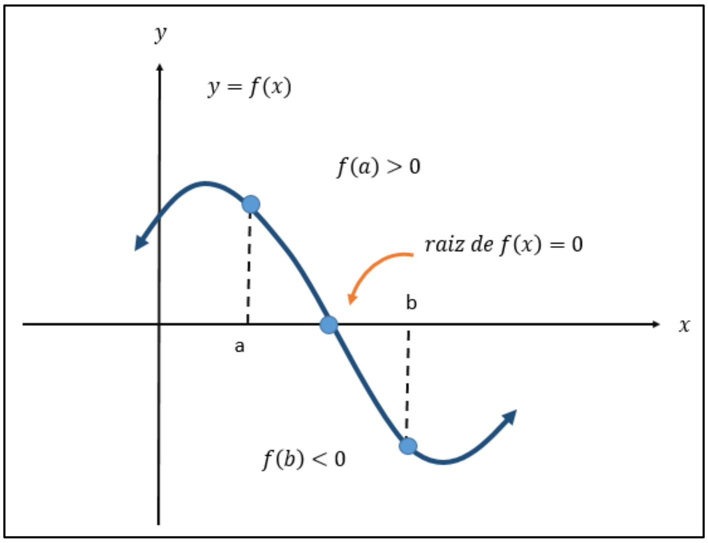


Figura 1.5: Método de Newton

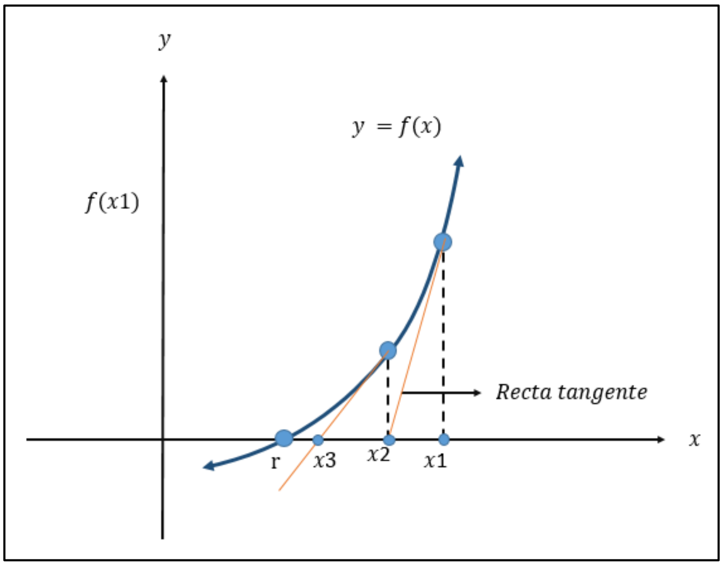


Figura 1.6: Aproximación a la raíz con el Método de Newton

$$\mathrm{m} = \mathrm{f'(x)} = \frac{y - f(x1)}{(x - X1)}$$

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Como (x2, 0) está sobre la recta tangente y sobre el eje x

$$0 - f(x1) = f'(x1)(x_2 - x_1)$$

$$-\frac{f'(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 - x_1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Se repite el procedimiento ya descrito, pero ahora partiendo de x_2 y se obtiene:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Generalizando el procedimiento se obtiene:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n = 1.2,3, \dots$$

Esta fórmula se la conoce como <u>fórmula recursiva o ecuación iterativa</u>**.**

Ejemplo: Aplique el Método de Newton.

$Y = x4 - 4x + 1;$ $\qquad 0 < x < 1$

Tolerancia= 0.0001

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$$

Se elige iniciar desde 0 para primera aproximación, porque f (0) es más cercana a cero.

$$f'(x) = 4x^3 - 4$$

$$f(x_n) = x_n^4 - 4_{x_{n+1}} \quad y \quad f'(x_n) = 4{x_n}^3 - 4$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)_n}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n + 1}{4x_n^3 - 4}$$

$$= \frac{4x_n^4 - 4x_n - x_n^4 + 4x_n - 1}{4x_n^3 - 4}$$

$$x_{n+1} = \frac{3x_n^4 - 1}{4x_n^3 - 4}$$

$$x_2 = \frac{3x_1^4 - 1}{4x_1^3 - 4} = \frac{3(0)^4 - 1}{4(0)^3 - 4} = 0.25$$

$$x_3 = \frac{3x_2^4 - 1}{4x_2^3 - 4} = \frac{3(0.25)^4 - 1}{4(0.25)^3 - 4} \approx 0.25099$$

$$x_4 = \frac{3x_3^4 - 1}{4x_3^3 - 4} = \frac{3(0.25099)^4 - 1}{4(0.25099)^3 - 4} \approx 0.25099$$

n	xn	Xn+1	Error
1	0,0000000	0,2500000	0,2500000
2	0,2500000	0,2509921	0,0009921
3	0,2509921	0,2509922	0,0000001

Tabla 1.8: Aproximación con el método de Newton de la función $Y = x4 - 4x + 1$.

Ejemplo:

$f(x)\ x^3 = 3x - 1;\qquad -1 < x < -2$

Tolerancia= 0.0001

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 1 = -1$$

Como f(-2) es más cercana a cero que f(-1), entonces -2 será la primera aproximación.

$$f(x_n) = x_n^3 - 3x_n + 1 \quad \text{y} \quad f'(x_n) = 3x_n^2 - 3$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_{n)}} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 - 1}{3x_1^2 - 3} = \frac{2(-2)^3 - 1}{3(-2)^2 - 4} \approx -1.88889$$

n	xn	Xn+1	Error
1	-2,00000	-1,88889	0,111111
2	-1,88889	-1,87945	0,009437
3	-1,87945	-1,87939	0,000066

Tabla 1.9 : *Aproximación con el método de Newton de la función* $f(x)\ x^3 = 3x - 1$

Ejemplo: Determinar los valores del parámetro b, para qué las tangentes a la curva de la función $f(x) = b2x3 + bx2 + 3x + 9$ en los puntos de abscisas $x = 1$, $x = 2$ sean paralelas.

Para que sean paralelas se tiene que cumplir que las derivadas en $x = 1 \, y \, x = 2$ sean iguales.

$$f'(1) = f'(2)$$

$$f'(x) = 3b2x2 + 2bx + 3$$

$$f'(1) = 3b2 + 2b + 3$$

$$f'(2) = 12b2 + 4b + 3$$

$$3b2 + 2b + 3 = 12b2 + 4b + 3$$

$$9b2 + 2b = 0$$

$$b = 0 \; b = -2/9$$

Ejemplo: Calcular los puntos en que la tangente a la curva $y = x3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje X.

$$y' = 3x2 - 6x - 9; \quad x2 - 2x - 3 = 0 \; (simplificando \; por \; 3)$$

$$x1 = 3 \; y1 = -22$$

$$x2 = -1y2 = 10$$

$$A(3, -22) \; B(-1, 10)$$

Ejemplo: Se ha trazado una recta tangente a la curva $y = x3$, cuya pendiente es 3 y pasa por el punto (0, −2). Hallar el punto de tangencia.

Sea el punto de tangencia $(a, f(a))$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(a) = 3a^2$$

$$3a2 = 3a = \pm 1$$

$$Las \; ecuaciones \; de \; las \; rectas \; tangentes \; son:$$

$$a = 1 \; f(a) = 1$$

$$y - 1 = 3(x - 1) \; y = 3x - 2$$

$$a = -1 \; f(a) = -1$$

$$y + 1 = 3(x + 1)\ y = 3x + 2$$

$$El\ punto\ (0, -2)\ pertenece\ a\ la\ recta\ \ y = 3x - 2.$$

$$Por\ tanto\ el\ punto\ de\ tangencia\ será\ (1, 1)$$

Ejemplo: Hallar los coeficientes de la ecuación $y = ax2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, 3) y por (2, 1), y en este último punto su tangente tiene de pendiente 3.

$$Pasa\ por\ (0, 3)\ 3 = c$$

$$Pasa\ por\ (2, 1)\ 1 = 4a + 2b + c$$

$$y' = 2ax + b\ 3 = 4a + b$$

$$Resolviendo\ el\ sistema\ se\ obtiene:$$

$$a = 2\ b = -5\ c = 3$$

Ejemplo: La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos (2, 3) y (3, 13). Siendo la tangente a la misma en el punto de abscisa 1 paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar el valor numérico de a, b y c.

$$Pasa\ por\ (2, 3)\ 3 = 4a + 2b + c$$

$$Pasa\ por\ \ (3, 13) 13 = 9a + 3b + c$$

$$y' = 2ax + b 1 = 2a + b$$

$$Resolviendo\ el\ sistema\ se\ obtiene:$$

$$a = 3\ b = -5\ c = 1$$

Ejemplo: Encontrar la recta normal a $f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$ en el punto x=2:

Se encuentra el pendiente de la curva en el punto de corte:

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$$
$$f'(2) = -1$$

Y el pendiente de la recta es:

$$m = -\frac{1}{f'(2)} = 1$$

Dicha recta pasará por

$$(a, f(a)) = (2,2)$$

Finalmente, la ecuación de la recta normal es:

$$y - 2 = 1(x - 2)$$
$$y = x$$

1.15 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN UTILIZANDO LOS CRITERIOS DE LA PRIMERA DERIVADA: CÁLCULO DE PUNTOS CRÍTICOS.

1.15.1 CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Se dice que una función f es creciente en el intervalo I cuando, para cualquier número $x1, x2$ incluidos en el intervalo, si x1<x2, entonces $f(x1) < f(x2)$. Una función es decreciente en el intervalo I cuando, para cualesquiera números x1, x2 incluidos en I, si x1<x2 entonces $f(x1) > f(x2)$

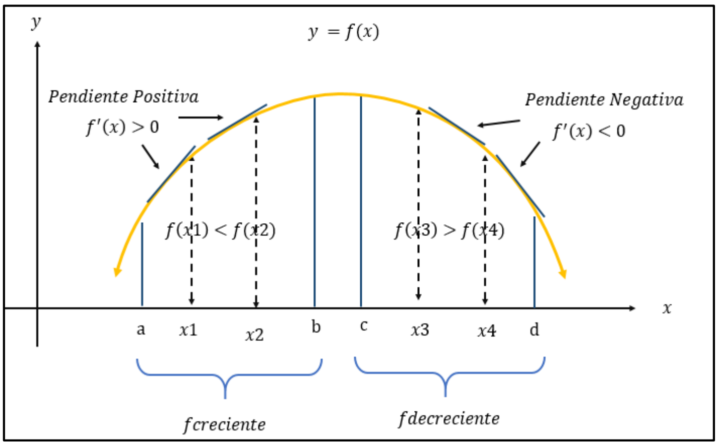


Figura 1.7: Crecimiento y decrecimiento de la función en un intervalo.

Regla 1: CRITERIO PARA FUNCIONES CRECIENTES O DECRECIENTES

$$Sea\ f\ diferenciable\ en\ el\ intervalo\ (a,b). Si\ f'(x) > 0\ para\ toda\ x\ en\ (a,b), entonces\ f\ es\ crecinete\ en\ (a,b). Si\ f'(x) < 0\ para\ toda\ x\ en\ (a,b), entonces\ f\ es\ decrecinete\ en\ (a,b).$$

Con el propósito de ilustrar estas ideas, se usará la regla de 1 para determinar los intervalos en donde $y = 18x - \frac{2}{3}x^3$ es creciente y los intervalos en qué Y es decreciente. Haciendo $y = f(x)$, debemos determinar cuándo $f'(x)$ es positiva y cuando es negativa. Se tiene

$$f'(x) = 18 - 2x^2 = 2(9 - x^2) = 2(3 + x)(3 - x)$$

	$-\infty$ a -3	-3 a 3	3 a ∞
$3+x$	-	+	+
$3-x$	+	+	-
$f'(x)$	-	+	-
$f(x)$			

Tabla 1.10: Análisis de signos de la función $f'(x) = 18 - 2x^2$ y sus puntos.

$$Si\ x < -3, \quad entonces\ el\ signo\ \left(f'(x)\right) = 2(-)(+) = -, por\ lo\ que f\ es\ decrecinete.$$
$$Si - 3 < x < 3 \quad entonces\ el\ signo\ \left(f'(x)\right) = 2(+)(+) = +, por\ lo\ que\ f\ es\ crecinete$$
$$Si\ x > 3, \quad entonces\ el\ signo\ \left(f'(x)\right) = 2(+)(-) = -, por\ lo\ que\ f\ es\ decreciente$$

1.15.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

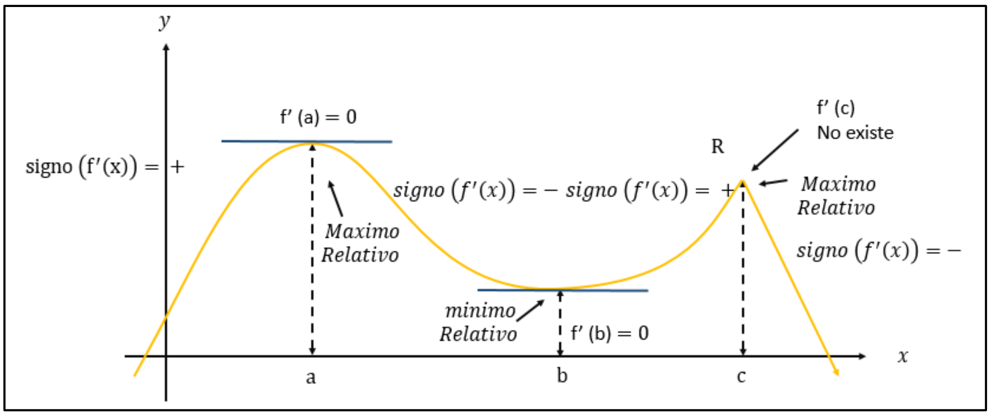


Figura 1.8: Máximos y mínimos relativos de una función.

DEFINICION

Una función *f* tiene un **máximo relativo** en *a* si existe un intervalo abierto que contenga a *a* sobre el cual $f(a) \geq f(x)$ para toda *x* incluida en el intervalo. El valor máximo relativo es *f(a).* Una función *f* tiene un ***mínimo relativo*** en *a* si existe un intervalo abierto que contenga a *a* sobre el cual *f(a) ≤ f(x)* para toda x incluida en el intervalo. EL valor mínimo relativo es *f(a).*

DEFINICION

Una funcion *f* tineun ***máximo absoluto*** en *a* si *f(a) ≥ f(x)* para toda x en el dominio de *f*. El máximo absoluto es *f(a).* Una funcion *f* tiene un ***mínimo absoluto*** en *a* si *f(a) ≤ f(x)* para toda x incluida en el dominio de *f.* El valor mínimo absoluto es *f(a).*

Cuando se haga referencia a un máximo o un mínimorelativo se le llamará **extremo relativo.** De manera análoga, se aludirá a los **extremos absolutos.**

Así, los extremos relativos son locales por naturaleza, mientras que los extremos absolutos son globales.

REGLA 2 UNA CONDICION NECESARIA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Si *f* tiene un extremo relativo en *a,* entonces *f'(a)=0* o bien *f'(a)* no existe.

La implicación de la regla 2 sólo es válida en una dirección:

$$\left.\begin{array}{c}\text{Extremo relativo}\\ \text{en } a\end{array}\right\} \text{ Implica } \left\}\begin{array}{c} f'(a) = 0 \\ o \\ f'(a) = \textit{no existe}\end{array}\right.$$

La regla 2 no dice que si f(a) es 0 o f(a) no existe, entonces debe existir un extremo relativo en a. De hecho, es posible que no exista ninguno.

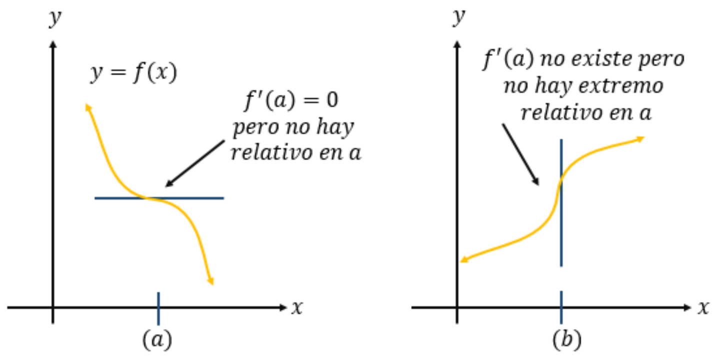


Figura 1.9: Extremos Relativos de la función.

Esta Regla reduce a un número finito de posibilidades, a estos valores se los conoce también como valores críticos.

REGLA 3 CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

Supongo que *f* es continua en un intervalo abierto *I* que contiene el valor crítico *a* y que *f* es diferenciable en *I*, excepto posiblemente en *a.*

Si *f'(x)* cambia de positiva a negativa cuando x aumenta al pasar por *a*, entonces *f* tiene un máximo relativo en *a.*

Si *f’(x)* cambia de negativo a positiva cuando x aumenta al pasar por *a*, entonces *f* tiene un mínimo relativo en *a*.

Consideremos:

$$y = f(x)\frac{1}{x^2} \qquad entonces \qquad f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

	- ∞	0	∞
$\frac{1}{x^2}$	-	+	
$f'(x)$	+	-	
$f(x)$			

Tabla 1.11: Análisis de signos de la función $f'(x) = 18 - 2x^2$ y sus puntos.

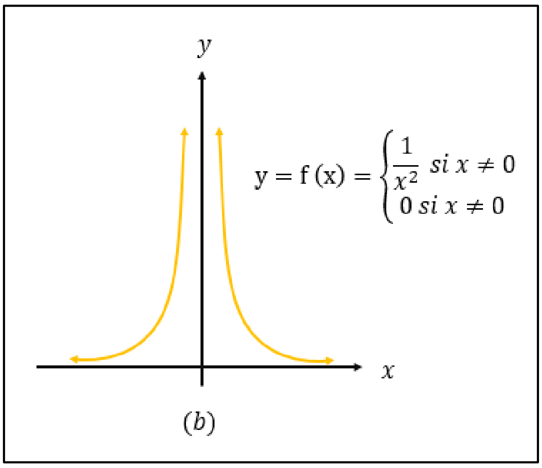


Figura 1.10: Extremo Relativo de la función $\frac{1}{x^2}$

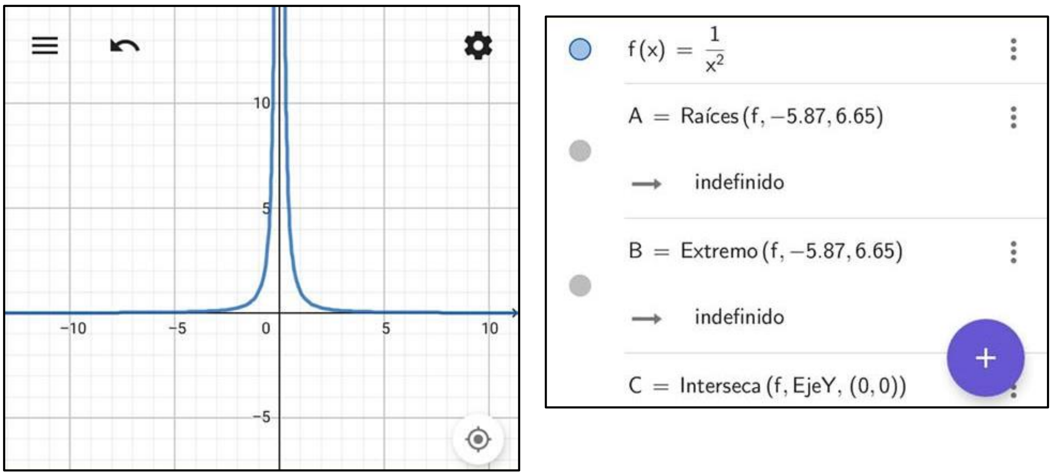


Figura 1.11: Grafica de la función $\frac{1}{x^2}$. Fuente: Geogebra

f’ (0) no está definida, pero 0 no es un valor crítico porque 0 no está en el dominio de *f.*

$-\infty$ 0 ∞

$\frac{1}{x^3}$	-	+
$f’\ (x)$	+	-
$f\ (x)$		

Tabla 1.12: Análisis de signos de la función $\frac{1}{x^3}$ y sus puntos.

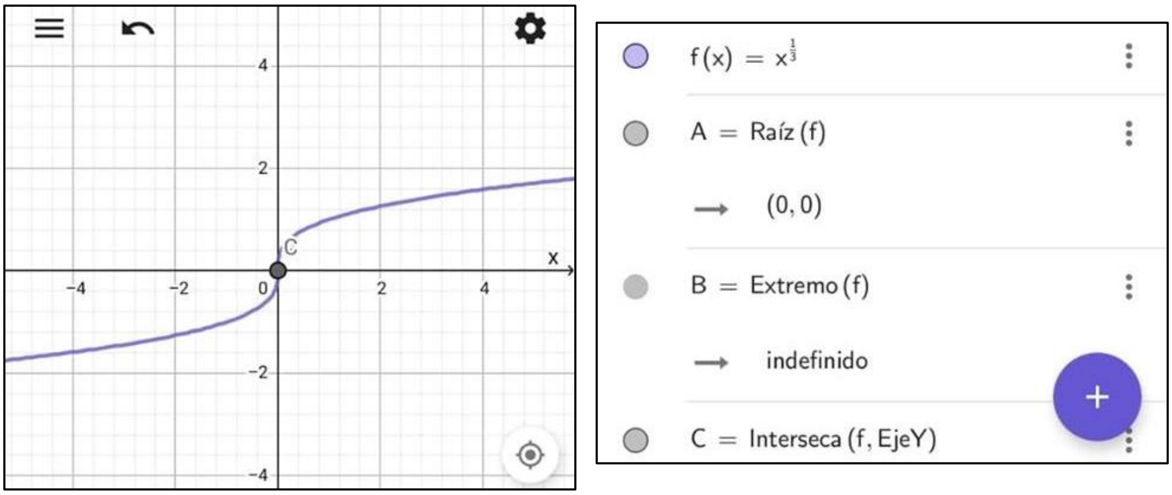


Figura 1.12: Grafica de la función $\frac{1}{x^3}$. Fuente: Geogebra

El 0 es un valor crítico, pero la regla 3 no es aplicable.

PRUEBA DE LA PRIMERA DERIVADA PARA LOS EXTREMOS RELATIVOS

PASO 1. Encontrar *f’ (x).*

PASO 2. Determinar todos los valores críticos de *f* [aquellas *a* donde *f’(a)=0* o *f’(a)* no exista] y cualquier *a* que no esté en el dominio de *f* pero tenga valores cercanos en el dominio de *f*, y construir entonces un diagrama de signos que muestre, para cada uno de los intervalos determinados por estos valores, si *f* es creciente *(f’(x)>0)* o decreciente (*f’(x)*< 0).

PASO 3. Para cada valor crítico *a* en que *f* es continua, determinar si *f’(x)* cambia de signo cuando x crece al pasar por *a*. Habrá un máximo relativo en *a* si *f’(x)* cambia de +*a* –, al ir de izquierda y derecha, y habrá un mínimo relativo si *f'(x)* cambia de – *a* + al ir de izquierda a derecha. Si *f'*(x) no cambia de sigo, no habrá un extremo relativo en *a*.

PASO 4. Para los valores críticos *a* en los cuales *f* no es continua, analiza la situación usando directamente las definiciones de los extremos.

Ejemplo: prueba de la primera derivada

Si $y = f(x) = x + \frac{4}{x+1}, para\ x \neq\ -1$ utilice la prueba de la primera derivada para encontrar dónde se presentan los extremos relativos.

SOLUCION:

Paso 1:

$$f(x) = x + 4(x+1)^{-1}, por\ lo\ que$$
$$f'(x) = 1 + 4(-1)(x+1)^{-2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2} \quad para\ x \neq -1$$

Observe que *f'(x)* se expres+o como un cociente con el numerados y el denominador completamente factorizados. Esto permite determinar con facilidad, en el paso 2, d'onde *f'(x)* es 0 o no existe, así como los signos de *f'.*

Paso 2:

$$f'(x) = 0, \qquad resulta\ x = \ -3{,}1$$

El denominador de *f'(X)* es cuando x es -1

Entonces se concluye que:

En -3 existe un máximo relativo porque cambia de signo de + a -

En 1 existe un minino relativo porque cambia de signo de - a +

Paso 3:

No existen valores críticos donde f no es continua.

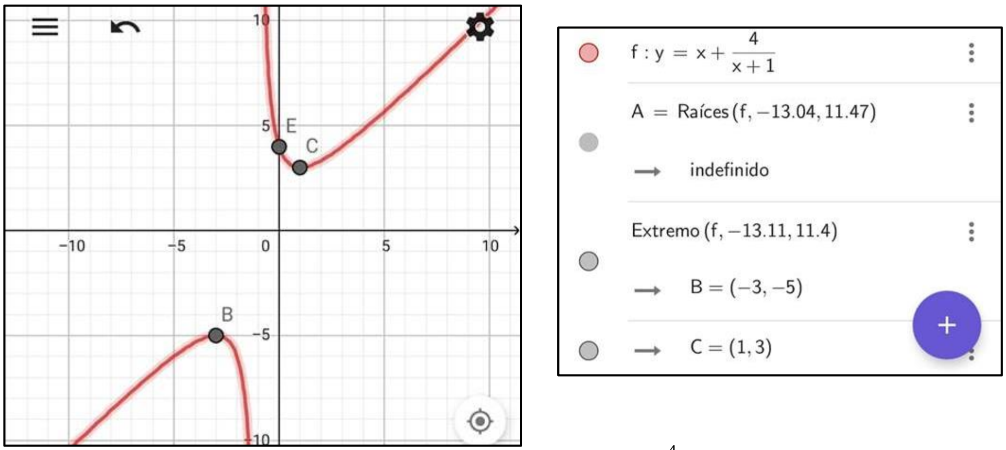


Figura 1.13: Gráfica de la función $y = f(x) = x + \frac{4}{x+1}$.Fuente: Geogebra

Ejemplo: UN EXTREMO RELATIVO donde *f'(x)* no existe

Pruebe $y = f(x) = x^{2/3}$ para los extremos relativos.

Solución: se tiene

$$f'(x) = 2/3x^{-\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

	- ∞	0 ∞
$(x)^{-\frac{1}{3}}$	-	+
$f'(x)$	-	+
$f(x)$		

Tabla 1.13 Diagrama de signos de la función $f^{\wedge\prime}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

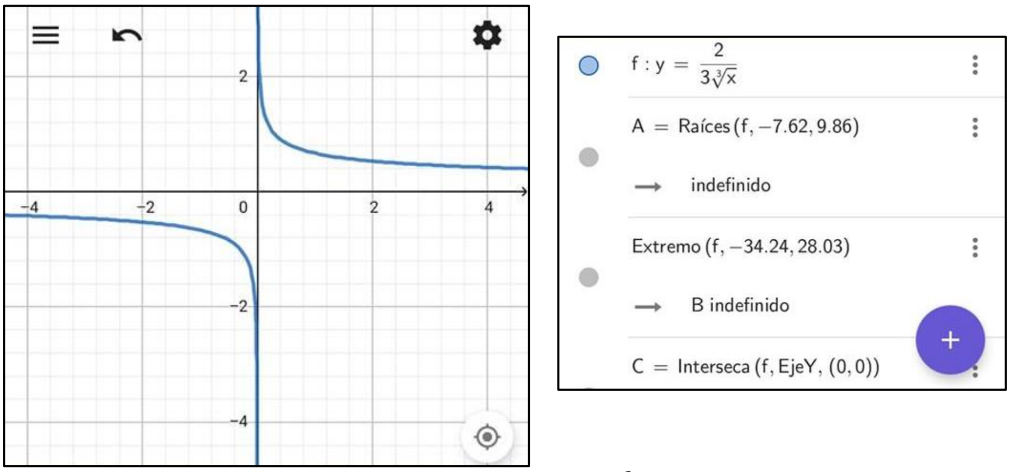


Figura 1.14: Grafica de la función $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.Fuente: Geogebra

Se concluye que f tiene un mínimo relativo en 0 de f(0)=0

Ejemplo: determinación de extremos relativos

Pruebe $y = f(x) = x^2 - e^x$ para los extremos relativos.

Solución: por la regla del producto

$$f'(x) = x^2 - e^x(2x) = xe^x(x+2)$$

$-\infty$ -2 0 ∞

$x+2$	-	+	+
x	-	-	+
e^x	+	+	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

Tabla 1.14.Grafica de la función $y = f(x) = x^2 - e^x$

e^x siempre es positiva

Valores críticos 0 y -2.

Máximo relativo cuando x=-2 y minino relativo cuando x=0.

Ejemplo:

[Ejercicio de crecimiento y decrecimiento.]

1.15.3 EXTREMOS ABSOLUTOS EN UN INTERVALO CERRADO

TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Si una función es continua en un intervalo cerrado, entonces la función tiene *tanto* un valor máximo como un valor mínimo en ese intervalo.

En este teorema es importante que se cumpla lo siguiente:

1. Intervalo cerrado y
2. Una función continúa sobre ese intervalo.

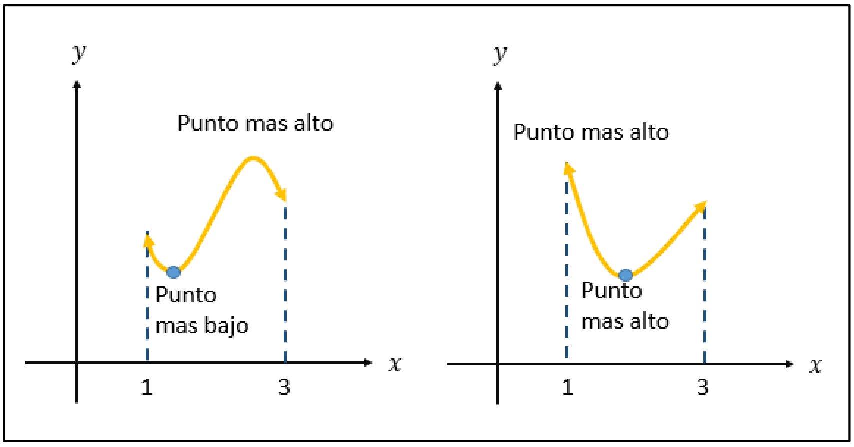
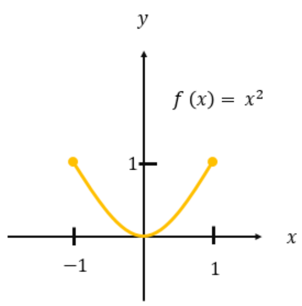
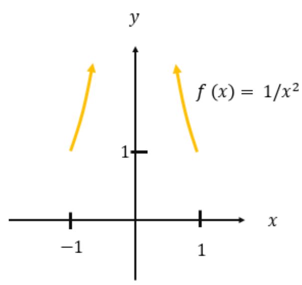


Figura 1.15 : Teorema de los valores extremos.

Si cualquiera de las dos condiciones (1 o 2) no se cumple, entonces los valores extremos no están garantizados. Consideremos:

$f(x) = x^2$	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
 Figura 1.16: Función $f(x) = x^2$ Intervalo abierto(-1,1).No hay máximo, mínimo=0	 Figura 1.17: Función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ No es continua en 0,no hay máximo, mínimo 0

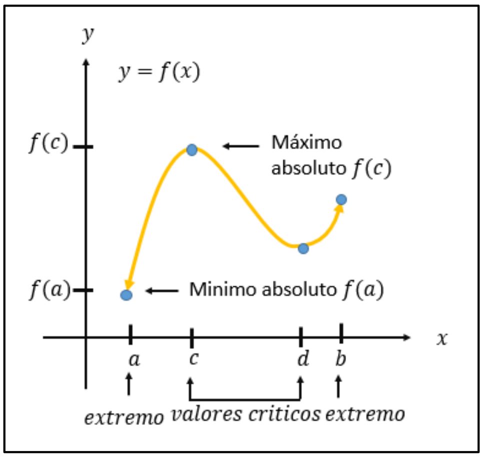


Figura 1.18: Extremos valores críticos extremos.

Ejemplo: Determinación de los valores extremos en un intervalo cerrado.

Encuentre los extremos absolutos para $f(x) = x^2 - 4x$+5 en el intervalo cerrado [1,4].

Solución: como *f* es continua sobre [1,4], el procedimiento anterior es aplicable aquí.
PASO1. Para encontrar los valores críticos de *f*, primero se encuentra *f':*

$$f(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

PASO 2. Al evaluar *f(x)* en los puntos extremos 1 y 4 y en el valor crítico 2, se tiene

Valores de *f* en los extremos	$f(1) = 2$ $f(4) = 5$

Y

Valor de *f* en el valor crítico 2 en (1,4)	$f(2) = 1$

PASO 3. A partir de los valores de la función evaluada en el paso 2, se concluye que el máximo es f(4)=5 y el mínimo es f(2)=1

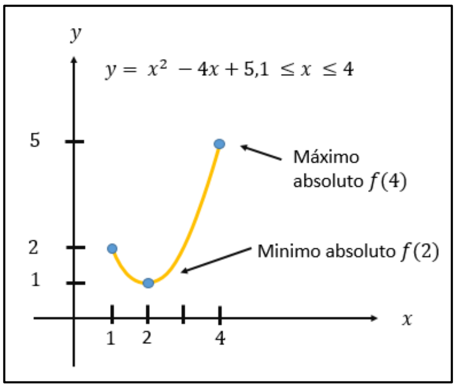


Figura 1.19: Valores de extremos.

1.16 ANÁLISIS DE LA FUNCIÓN UTILIZANDO LOS CRITERIOS DE LA SEGUNDA DERIVADA: CONCAVIDAD, PUNTOS DE INFLEXIÓN, GRÁFICO DE FUNCIONES.

1.16.1 CONCAVIDAD

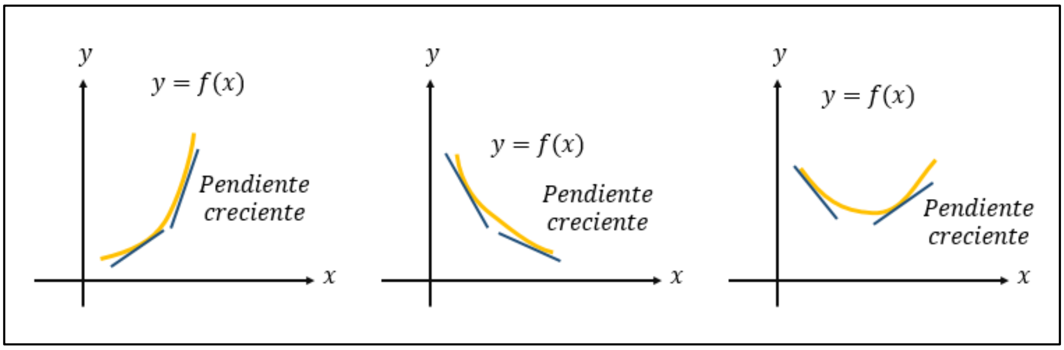


Figura 1.20: Concavidad cada una de las curvas es cóncava hacia arriba.

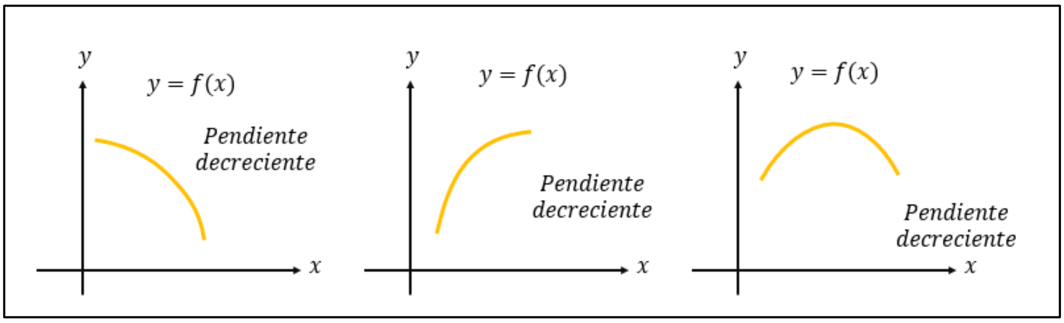


Figura 1.21: Cada una de las curvas es cóncava hacia abajo.

A las **Funciones Cóncavas** hacia arriba se las llama también **Funciones Convexas**.

REGLA 1

CRITERIO DE LA CONCAVIDAD Sea *f'* diferenciables en el intervalo (a, b). Si *f'(x) >0n para toda x en (a, b),* entonces *f* es cóncava hacia arriba en (*a, b*). Si *f''*(x) <0 para toda x en (*a, b*), *entonces* f *es cóncava hacia abajo en (*a, b*).*

Las funciones que se consideraran, si f''(c) > 0, entonces f es cóncava hacia arriba en c. Similarmente, f es cóncava hacia abajo en c, si f''(c) < 0.

Ejemplo: Prueba de Concavidad

Determine dónde es cóncava hacia arriba o dónde es cóncava hacia abajo la función dada.

$$y = f(x) = (x-1)^3 + 1$$

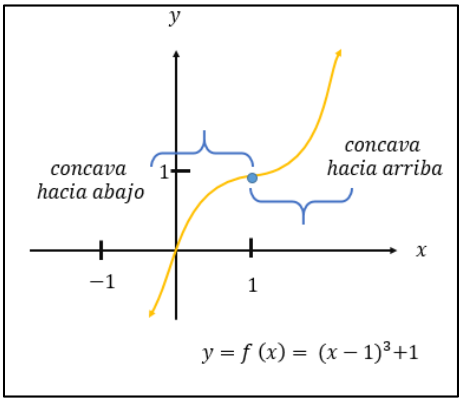


Figura 1.22: Prueba de concavidad.

Ejemplo:

[Ejercicio de concavidad y puntos de inflexión.]

1.16.2 PUNTO DE INFLEXIÓN

DEFINICION

Una función *f* tiene un **punto de inflexión** en *a* si y sólo si *f* es continua en *a* y cambia de concavidad en *a*.

Para determinar la concavidad de una función y sus puntos de inflexión, encuentre primero los valores de *x* donde *f*(*x*) es 0 o no está definida. Un Punto de inflexión debe satisfacer dos condiciones:

f'’ debe ser 0 o no existir en ese punto.

F debe ser continua en ese punto.

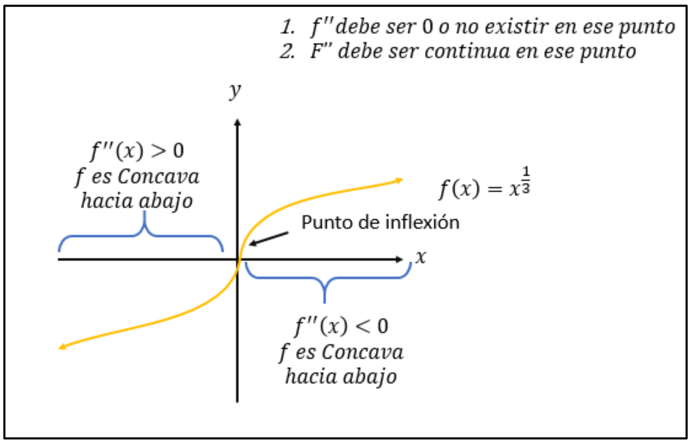


Figura 1.23: Punto de inflexión.

Punto de inflexión para *f*(x)=x1/3

Ejemplo: CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXION

Pruebe la concavidad y los puntos de inflexión de $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$

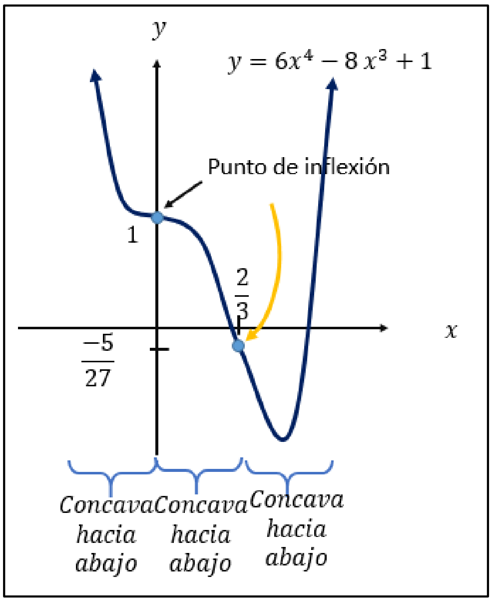


Figura 1.24: Concavidad y Punto de inflexión de la función $y = 6x^4 - 8x^3 + 1$.

Ejemplo:

Analice la concavidad y encuentre todos los puntos de inflexión de $f(x) = \frac{1}{x}$

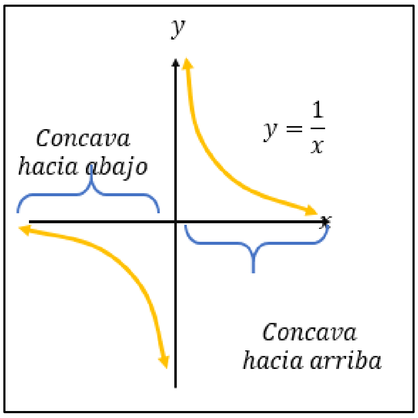


Figura 1.25: Cambio de la concavidad sin punto de inflexión de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Ejemplo:

Ejercicio de punto de inflexión.

1.16.3 PRUEBA DE LA SEGUNDA DERIVADA

PRUEBA DE LA SEGUNDAD DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Suponga que *f'(a)=0*

Si f''(a) <0, entonces *f* tiene un máximo relativo en ***a.***
Si f''(*a*) >0 entonces *f* tiene una mínimo relativo en *a.*

Ejemplo: PRUEBA DE LAS SEGUNDA DERIVADA

Analice las siguientes funciones en ralacion con sus máximos y mínimos relativos. De ser posible, utilice la prueca, utilice la prueba de la segunda derivada

a. $y' = 18x - \frac{2}{3^x}3$

b. $y = 6x^4 - 8x^1 + 1$

Ejemplo: EXTREMOS ABSOLUTOS

Si $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, determine dónde ocurren los extremos absolutos en el intervalo $(0, \infty)$

1.16.4 TRAZADO DE UNA CURVA

Trace la gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

Solución:

Intersecciones si x=0, entonces Y=0. Haciendo y=0, resulta que $0 = x(2x^2 - 0x + 12)$.

Claramente, x=0 es una solución y, al utilizar la formula cuadrática en $2x^2 - 9x + 12 = 0$, se encuentra que no tiene raíces reales. Por lo tanto, la única intersección es (0,0). De hecho, como en $2x^2 - 9x + 12$ es una función continua cuya valor en 0 es 2.0^2-9.0+12=12>0, se concluye que en $2x^2 - 9x + 12 > 0$ para toda x, lo cual da el diagrama de signos de la figura 13.39 para Y.

Observe que este diagrama indica que la gráfica de $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ está confinada al tercero y cuarto cuadrante del plano xy.

Simetría ninguna

Máximos y mínimos se tiene

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x-1)(x-2)$$

Los valores críticos son X=1.2, de manera que estos y los factores x-1 y x-2 determinan el diagrama de signos de y’

A partir del diagrama de signos para y’ vemos que existe un máximo relativo en 1 y un mínimo relativo en 2. Observe también que la línea de la figura, junto con la siguiente, ayudan a determinar una gráfica precisa de $y = 2x^2 - 9x^2 + 12$.

- ∞ 1 2 ∞

$x-1$	-	+	+
$x-2$	-	-	+
y'	+	-	+
y			

Tabla 1.15: Diagrama de signos de la función $y = 2x^2 - 9x^2 + 12$.

- ∞ 0 ∞

x	-	+
$2x^2 - 9x + 12$	+	+
y	-	+

Tabla 1.16 Diagrama de signos de la función $y' = 2x^2 - 9x + 12$.

- ∞ 3/2 ∞

$2x-3$	-	+
y''	-	+
y	∪	∩

Tabla 1.17 : Diagrama de signos de la función $y'' = 2x^2 - 9x + 12$.

Por supuesto, ayudará también a conocer el máximo relativo $y(1) = 5$, el cual ocurre en 1, y el mínimo relativo y(2)=4, que ocurre en 2, de manera que además de la intersección (0,0) también se graficará (1,5) y (2,4).

Concavidad

$$y'' = 12x - 18 = 6(2x - 3)$$

Al hacer $y'' = 0$, resulta un punto de inflexión posible en x=3/2, a partir del cual se construye el diagrama de signos para y''. Como la concavidad cambia en x=3/2, en cuyo punto *f* es crecientemente continua, existe un punto de inflexión en 3/2

Análisis

Se conoce las coordenadas de tres de los puntos importantes de las gráficas. Desde nuestra perspectiva el otro único punto importante es el punto de inflexión y, como $y(3/2) = 2(3/2)3 - 9(3/2)2 + 12(3/2) = 9/2$, el punto de inflexión es $(3/2,9/2)$.

Se grafican los cuatro puntos indicados anteriormente y se observa, a partir de los tres diagramas de signos en conjunto, que la curva crece a través del tercer cuadrante y pasa por 0, siendo cóncava hacia abajo hasta que alcance un Max. Relativo en (1,5). Después la curva cae abajo hasta que alcanza un máx. Relativo en (2,4) de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba y permanece así por el resto de la curva. Después de 2,4la curva es creciente a través del primer cuadrante.

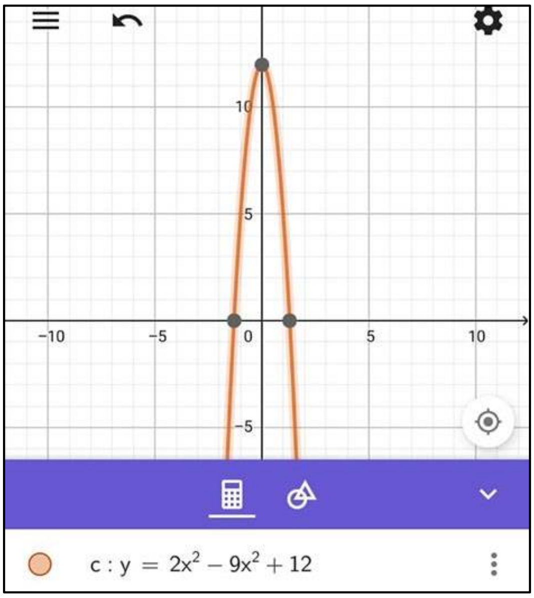


Figura 1.26: Gráfica de la función $y = 2x^2 - 9x^2 + 12$.

Ejemplo:

[Ejercicio de concavidad.]

1.17 APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

Ejemplo: minimización del costo de una cerca

Con el propósito de tener mayor seguridad, un fabricante planea un área de almacenamiento rectangular de 10800pies2 adyacente a uno de los edificios que se utilizara como uno de los lados del área de la cerca, La cerca paralela al edificio de una carretera y cuesta 3$por pie instalando mientras que la cerca de los otros dos lados costara 2$ por pie. Encuentre la cantidad de del cada tipo de cerca de manera que el costo total sea mínimo ¿Cuál es el costo mínimo?

Solución:

Como el primer paso de un problema como este es mejor dibujar el diagrama que represente esta situación se llaman x a la longitud del lado paralelo al edificio y a las longitudes de los otros dos lados y los otros dos lados donde X y Y están en pies. Como se desea minimizar el costo, el siguiente paso es determinar una función que proporcione el costo. Es obvio que el costo dependerá de cuanta cercha se coloque a lo largo de la carretera y cuanto a los otros lados.

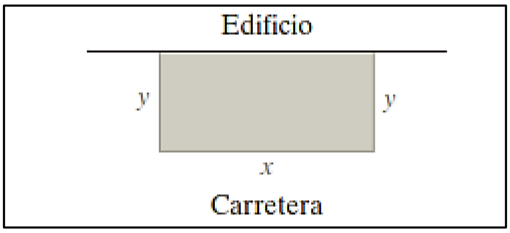


Figura 1.27: Problema de la cerca del ejemplo 1.

A lo largo de la carretera el costo por pies de 3$por lo que el costo total de esa cerca será de 3x. De manera similar da cada uno de los otros dos lados el costo es de 2y. Así el costo final C de la cerca está dado por la función de costo.

$$c = 3x + 2y + 2y$$

Es decir
(Ecuación 1) $C = 3x + 4y$

Paso 1. Es necesario encontrar el valor absoluto de C. Para hacerlo, se usan las técnicas analizadas, es decir se examina a C en sus valores críticos (y cuales quiera puntos extremos) incluidos en el dominio. Sin embargo, para diferencia, primero se necesita expresar C en función de una sola variable. [La adecuación (1) proporciona a C como una función de dos variables, X y Y.] Esto se logra encontrando una relación entre X y Y. En el enunciado del problema, se observó que el área de almacenamiento que es XY, debe ser igual a 10800

(Ecuación 2) $xy = 10800$

Paso 2. Con esta ecuación se puede expresar una variable (por ejemplo Y) en términos de la otra (x). Entonces, al sustituir en la ecuación (1) se tendrá a C como función de sólo una variable. Al despejar Y de la ecuación (2) se obtiene:

Ecuación 3.

$$y = \frac{10800}{x}$$

Al sustituir en la ecuación **1**, resulta

$$c = c(x) = 3x + 4\left(\frac{10800}{x}\right)$$
$$c(x) = 3x + \frac{43200}{x}$$

Dada la naturaleza física del problema, el dominio de C es X>0.

Ahora se encuentra $dc/dx,$ se iguala a 0 y se despeja x, se tiene

$$\frac{dC}{dx} = 3 - \frac{43200}{x^2} \qquad \frac{d}{dx}(43200x^{-1}) = -43200x^{-2}$$
$$3 - \frac{43200}{x^2} = 0$$
$$3 = \frac{43200}{x^2}$$

De lo cual se deduce que

$$x^2 = \frac{43200}{3} = 14400$$
$$x = 120$$

As, 120 es el *único* valor crítico y no hay puntos extremos que considerar. Para probar este valor, se usará la prueba de la segunda derivada.

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{86400}{x^3}$$

Cuando x=120, d^2C/dx^2 >0, entonces puede concluirse que x=120 da un min. Relativo. Sin embargo como 120 es el único valor critico incluido en el intervalo abierto (0,∞) y C es continua en ese intervalo, dicho min. Relativo también tiene que ser un mínimo absoluto.

Pero el ejercicio aún no está terminado, todas las preguntas del problema deben contestarse. Para tener un costo mínimo, el número de pies de cerca a lo largo de la carretera es de 120. Cuando X=120, a partir de la ecuación **3** se tiene y=10800/120=90. Por lo tanto, el número de pies de cerca necesario para los otros dos lados es 2y=180. Entonces, se requiere 120 pies de cerca de 3$ y 180 pies de la cerca de 2$. El costo mínimo puede obtenerse a partir de la fundación de costo dada por la ecuación $\mathbf{4}\ y$ es

$$c(120. = 3x - \frac{43200}{x}|_{x=120} = 3(120) + \frac{43200}{120} = 720$$

GUIA PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE MAXIMO Y MINIMO

PASO 1. Cuando sea apropiado, dibuje un diagrama que refleje la información dada en el problema.

PASO 2. Formule una expresión para la cantidad que se quiera maximizar o minimizar.

PASO 3. Escriba la expresión del paso 2 como una función de una variable y señale el dominio de esa función. El dominio puede está implícito en la naturaleza del problema.

PASO 5. Encuentre los valores críticos de la función. Después de probar cada valor crítico, determine cual proporciona el valor extremo absoluto que se busca. Si el dominio de la función incluye puntos extremos, asegúrese de examinar también los valores de la función en esos puntos.

Ejemplo: Maximización del ingreso.

La ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{80 - q}{4} \qquad 0 \leq q \leq 80$$

Donde *q* es el número de unidades y *p* el precio por unidad ¿Para qué valor de *q* se tendrá un ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

Solución: sea *r* el ingreso total, que es la cantidad a maximizar. Como

Ingreso= (precio) (cantidad)

Se tiene

$$r = pq = \frac{80 - q}{4} * q = \frac{80q - q^2}{4} = r(q)$$

$donde\ 0 \le q \le 80$. Al hacer dr/dq=0, resulta

$$\frac{dr}{dq} = \frac{80 - 2q}{4} = 0$$
$$80 - 2q = 0$$
$$q = 40$$

Así, 40 es el único valor crítico. Ahora se verá si este valor da un máximo. Examinando la primera derivada para 0≤q<40, se tiene dr/dq>0, por lo que r es creciente. Si q>40, entonces dr/dq<0, por lo que r es decreciente. Dado que r es creciente a la izquierda de 40 y r es decreciente a la derecha de 40, se concluye que q=40da el ingreso máximo absoluto, a saber

$$r(40) = (80)(40) - \frac{(40)^2}{4} = 400$$

Ejemplo: Minimización del costo promedio.

La función del costo total de un fabricante está dado por $c = c(q) = \frac{q^2}{4} + 3q + 400$

Donde c es el costo total de producir q unidades. ¿Para qué nivel de producción será mínimo el costo promedio por unidad? ¿Cuál es este mínimo?

Solución:

La cantidad de minimizar es el costo promedio $\bar{c}$. La función de costo promedio es

$$\bar{c} = \bar{c}(q) = \frac{c}{q} = \frac{\frac{q^2}{4} + 3q + 400}{q} = \frac{q}{4} + 3 + \frac{400}{q}$$

Aquí q debe ser positiva. Para minimizar$\bar{c}, se\ diferencia$:

$$\frac{d\bar{c}}{dq} = \frac{1}{4} - \frac{400}{q^2} = \frac{q^2 - 1600}{4q^2}$$

Para obtener los valores críticos, se resuelve $d\bar{c}/dq = 0$

$$q^2 - 1600 = 0$$
$$(q - 40)(q + 40) = 0$$

$$q = 40 \qquad puesto\ que \quad q > 0$$

Para determinar si este nivel de producción de un mínimo relativo, se usara la prueba de la segunda derivada. Se tiene

$$\frac{d^2\bar{c}}{dq^2} = \frac{800}{q^3}$$

Que es positivo para q=40. Así, $\bar{c}$ tiene un minimo elativo cuando q=40. Se observa que $\bar{c}$ es continuo para q>0. Como q=40 es el único extremo relativo, se concluye que este mínimo relativo es en efecto el único mínimo absoluto. Al sustituir q=40 en la ecuación **5** se obtendrá es costo promedio mínimo $\bar{c}(40) = \frac{40}{4} + 3 + \frac{400}{40} = 23$

Ejemplo: Tamaño económico del lote

Una empresa produce y vende anualmente 10000 unidades de artículos. Las ventas están distribuidas uniformemente a lo largo del año. La empresa desea determinar el número de unidades que deben fabricarse en cada periodo de producción para minimizar los costos totales anuales de operación y los costos por mantener inventarios. Se produce el mismo número de unidades en cada periodo. Este número se denomina **tamaño económico del lote o cantidad económica del perdido.** El costo de producir cada unidad es de 20$ y los costos

Por mantener inventarios (seguro, interes, almacenamiento, etc.) se estima iguales al 10% del valor promedio del inventario. Los costos de operación por periodo de producción son de 40$. Encuentre el tamaño economico del lote.

Solucion: sea q el numero de unidades enuna corrida de produccion. Como las ventas estan distribuidas a razón uniforme, se supondra que el inventario varía uniformemente de q a 0 entre periodos de produccion, asi se toma el inventario promedio iagual a q/2 unidades.

Los costos de produccion son de 20$ por unidad, por lo que el valor promedio del inventario es de 20(q/2). Los costos por mantener inventarios son de 10% de este valor:

$$0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right)$$

El número de corridas de producción por año es de 10000/q. entonces los costos totales de operación son

$$40\left(\frac{10000}{q}\right)$$

Por lo tanto, el total de los costos de inventario y operación está dado por

$$c = 0.10(20)\left(\frac{q}{2}\right) + 40\left(\frac{10000}{q}\right)$$

$$= q + \frac{400000}{q}$$

$$\frac{dc}{dq} = 1 - \frac{400000}{q^2} = \frac{q^2 - 400000}{q^2}$$

Al hacer $dc/dq = 0$, se obtiene $q^2 = 400000$ como q>0,

$$q = \sqrt{400000} = 200\sqrt{10} \approx 632.5$$

Para determinar si este valor de q minimiza a C, se examinará la primera derivada. Si $0 < q < \sqrt{400000}$, entonces dc/dq<0. Si $q > \sqrt{400000}$, entonces dc/dq>0. Se concluye que hay un mínimo absoluto en q=63.5. El número de periodos de producción es de 10000/63.5≈15.8. Para propósitos prácticos, serán 16 lotes, cada uno con tamaño económico de lotes igual a 625 unidades.

Ejemplo:

Ejercicio de optimización.

1.18 REGLA DE L'HÔPITAL

La regla de L´Hôpital permite resolver muchos casos de indeterminación de límites de funciones en un punto X = A. En principio la vamos a enunciar así:

Un límite INDETERMINADO de la forma: $0/0\,, \infty/\infty\,, 0 * \infty, \infty - \infty$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Valdrá L, en caso de que también sea L el límite en X=A del cociente de las derivadas de numerador y denominador, es decir:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{\big(f(x)\big)'}{\big(g(x)\big)'} = L$$

Ejemplo 1: Hallar el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Este límite tiene la forma indeterminada 0/0, por tanto, podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{+\sin x}{2x}$$

Límite que sigue teniendo la forma indeterminada 0/0, pero a la cual se puede volver a aplicar la regla de L'Hôpital:

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo: Hallar el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{5x-\ 3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{5x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)'}{(5x-3)'} = \frac{1}{5}$$

En cuanto a las indeterminaciones del tipo 0× ∞ , expresaremos el límite en la forma:

$$\lim_{x \to a} f(x) * g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

Ejemplo: Hallar el límite:

$$\lim_{x \to 1} (1-x) tg \frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} (1-x) tg \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)}{\cot g \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)'}{\left(\cot g \frac{\pi x}{2}\right)'} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{-sen^2 \frac{\pi x}{2} (\pi x/2)} = \lim_{x \to 1} \frac{2}{\pi sen^2(\pi x/2)} = \frac{2}{\pi}$$

Otro tipo de indeterminación susceptible de realizarse por la regla de L'Hôpital es la forma ∞ - ∞ . Para este caso hay que tener en cuenta la siguiente identidad:

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{gf}}$$

Ejemplo: Hallar el límite:

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right)$$

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right) = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2 - x - 6} =$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)'}{(x^2 - x - 6)'} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{2x - 1} = \frac{1}{5}$$

Finalmente, vamos a ver unos ejemplos en los que la regla de L'Hôpital ha de aplicarse sobre el exponente. Se trata de indeterminaciones del tipo: $0°$, $\infty°$, 1^{∞}, para su resolución es conveniente tener en cuenta la siguiente identidad:

$$A = e^{lnA}$$

Teniendo en cuenta esta identidad, la cual suele escribirse por comodidad

$A = exp(log\ A)$, podemos poner:

$$f^g = \exp(log f^g) = \exp(g log\ f)$$

Y ahora si estamos hallando un límite en x=*a* de esa *función exponencial*, nosotros calcularemos el límite en el exponente, es decir, dentro del paréntesis de "exp", en concreto el límite de *(g*×log *f*), el cual puede ser, por ejemplo, de la forma 0× ∞

Ejemplo: Hallar el límite:

$$\lim_{x \to 0} x^{3x}$$

Este límite tiene la forma indeterminada 0°, y tal como hemos dicho, puede expresarse:

$$\lim_{x \to 0} x^{3x} = \exp\left(\lim_{x \to 0} 3x * logx\right) =$$

En el interior del paréntesis (la exponencial) tenemos una indeterminación 0× ∞ , y ahora procederemos así:

$$= \exp\left(\lim_{x \to 0} \frac{3logx}{\frac{1}{x}}\right) = exp\left(\lim_{x \to 0} 3\frac{(logx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\right) =$$

$$= exp\left(\lim_{x \to 0} \frac{3logx}{1/x}\right) = exp\left(\lim_{x \to 0} (-3)\right) = e^0 = 1$$

Ejemplo:

Ejercicio de la regla de L'Hôpital.

2. INTEGRACIÓN

2.1 LA INTEGRAL INDEFINIDA:

DEFINICIÓN ANTI DERIVADA.

Dada una función *f*, si Fes una función tal que

$$F'(x) = f(x)$$

Entonces *F* se llama *Anti derivada* de *f* así,

Una Anti derivada de f es simplemente una función cuya derivada es f

Si se multiplica ambos lado de la ecuación 1 por la diferencial *dx*, resulta $F'(x)dx = f(x)dx$. Sin embargo, como F'(x) dx es la diferencial de F, se tiene que $df = f(x)$. De modo que se puede considerar a una Antiderivada de f como una función cuya diferencial es f(x) dx.

DEFINICION

Una *antiderivada* de una funcion *f* es una funcion de F tal que

$$F'(x) = f(x)$$

De manera equivalente, en notacion diferencial

$$dF = f(x)dx$$

Por ejemplo, como la derivada de x^2 es 2x,x^2 es una antiderivada de 2x. sin embargo, no es la unica antiderivada de 2x : puesto que

$$\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(x^2-5) = 2x$$

Tanto x^2+1 comox^2-5 tambien son atiderivadas de 2x. De hecho, es claro que como la derivada de una constante es 0, x^2+c es tambien ina antiderivada de 2x para *cualquir* constante c. Así, 2x tiene numerod indefinidos de antiderivadas. Lo mas importante es que *todas* las anti derivada de 2x deben ser funciones de la forma x^2+c, debido al siguiente hecho:

Como x^2+c describe todas las anti derivada de 2x, se puede hacer referencia a esta función como la *anti derivada más general* de 2x, denotada por $\int 2x\,dx$, la cual se lee como "*la integran indefinida* de 2x con respecto a *x*". Así, se escribe

$$\int 2xdx = x^2 + c$$

Notación y Constante de integración.

El símbolo $\int$ se llama *signo de integración* 2x es el *integrando* y ces la *constante de integración.* La dx forma parte de la notación integral e indica la variable implicada. Aquí, x es la *variable de integración.*

De una manera más general, la *integración indefinida* de cualquier función *f* con respecto a x se escribe como $\int f(x)dx$ y denota la Antiderivada más general de *f*. como todas las anti derivada de *f* difieren en una solo constante, si F es cualquier anti derivada de *f*, entonces:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad donde\ c\ es\ uan\ cosntate$$

Integrar *f* significa entonces $\int f(x)dx$. En resumen

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad si\ y\ sólo\ si \qquad F'(x) = f(x)$$

Así, se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \qquad y \qquad \int \frac{d}{dx}\big(F(x)\big)dx = F(x) + c$$

Con lo que se muestra la extensión hasta la cual la diferenciación y la integración indefinida constituyen procedimiento inverso.

Ejemplo:

Encuentre

$$\int 5dx$$

$$\int 5dx = 5x + c$$

Ejemplo:

Ejercicio de integración definida.

2.2 REGLAS BÁSICAS DE INTEGRACIÓN.

Reglas de derivación(explicación).

$\int kdx = kx + c$	$k\ es\ una\ constate$
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad a \neq 1$	
$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = lnx + c \qquad parax > 0$	
$\int e^x dx = e^x + c$	
$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx \qquad k\ es\ una\ constate$	
$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	

Tabla 2.1Propiedades de la integración

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int x^5 dx$$

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + c = \frac{x^6}{6} + c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int 7x\, dx$$

Solución: por la fórmula 5, con k=7 y f(x)=x,

$$\int 7x\, dx = 7 \int x\, dx$$

Como x es x^1, por la fórmula 2 se tiene

$$\int x^1 dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_1$$

Donde $c_1$es la constante de integración. Por lo tanto,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) = \frac{7}{2}x^2 + 7c_1$$

Como $7c_1$ solo es una constante arbitraria, por simplicidad se remplazará por c. Así

$$\int 7x\,dx = \frac{7}{2}x^2 + c$$

No es necesario escribir todos los pasos intermedios al integrar. De manera más sencilla, se escribe

$$\int 7x\,dx = (7)\frac{x^2}{2} + c = \frac{7}{2}x^2 + c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int -\frac{3}{5}e^x dx$$

Solución:

$$\int -\frac{3}{5}e^x dx = -\frac{3}{5}\int e^x\,dx \qquad\qquad formula\ \mathbf{5}$$

$$= -\frac{3}{5}e^x + c \qquad\qquad formula\ 4$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

Solución: aquí, t es la variable de integración. Se escribe de nuevo el integrado de manera que se pueda usar una formula básica. Como $\frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2}$, al aplicar la fórmula 2 se obtiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-1/2}dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{t} + c$$

Ejemplo:

Encuentre

$$\int \frac{1}{6x^3} dx$$

Solución:

$$\int \frac{1}{6x^3} dx = \frac{1}{6}\int x^{-3} dx = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c$$
$$= -\frac{x^{-2}}{12} + c = -\frac{1}{12x^2} + c$$

Ejemplo:

Encuentre

$$\int (x^2{}'2x)dx$$

Solución: por la fórmula 6

$$\int (x^2{}'2x)dx = \int x^2 dx + \int 2x \ dx$$

Ahora

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_1$$

Y

$$\int 2x \ dx = 2\int x \ dx = (2)\frac{x^{1+1}}{1+1} + c_2 = x^2 + c_2$$

Así,

$$\int (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + c_1 + c_2$$

Por conveniencia, se reemplazara la constante c_1 y c_2 $por\ c, entonces\ se\ tiene$

$$\int (x^2 + 2x)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$$

Ejemplo:

Encuentre $\int\left(2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1\right) dx$

Solución:

$$\int \left(2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1\right) dx$$

$$= 2\int x^{4/5}dx - 7\int x^3dx + 10\int e^x - \int 1dx \qquad formulas\ \mathbf{5}\ y\ 6$$

$$\int (2)\frac{x^{9/5}}{\frac{9}{5}} - 7\frac{x^4}{4} + 10e^x - x + c \qquad formula\ 1, 2\ y\ 4$$

$$= \frac{10}{9}x^{9/5} - \frac{7}{4}x^4 + 10e^x - x + c$$

Ejemplo:

Encuentre $\int y^2\left(y + \frac{2}{3}\right) dy$

Solución: el integrado no concuerda con ninguna forma familiar de integración. Sin embargo, al multiplicar los factores del integrando se obtiene

$$\int y^2\left(y + \frac{2}{3}\right) dy = \int \left(y^3 + \frac{2}{3}y^2\right) dy$$

$$= \frac{y^4}{4} + \left(\frac{2}{3}\right)\frac{y^3}{3} + c = \frac{y^4}{4} + \frac{2y^3}{9} + c$$

Ejemplo:

Encuentre:

$$\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6} dx$$

Solución: al factorizar la constante $\frac{1}{6}$ y multiplicar los binomios y obtiene

$$\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}\ dx = \frac{1}{6}\int (2x^2 + 5x - 3)dx$$

$$= \frac{1}{6}\left((2)\frac{x^3}{3} + (5)\frac{x^2}{2} - 3x\right) + c$$

$$= \frac{x^3}{9} + \frac{5x^2}{12} - \frac{x}{2} + c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx$$

Es posible descomponer el integrado en fracciones al dividir cada término del numerador entre el denominador

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (\ x - \ x^{-2}\ )\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \ \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^2}{2} + \ \frac{1}{x} + x$$

Integración Con Condiciones Iniciales

Ejemplo: Encuentre y si:

$$y' = \ 8x - 4$$

Condición inicial $y\ (2)\ = 5$;

Encuentre también $y\ (4)$

Solución: Aquí, $y\ (2)\ =\ 5$ es la condición inicial. Como $y'\ =\ 8x - 4$, y es una anti derivada de $8x\ - 4$:

$$y = \int (8x - 4)\ dx = 8\,.\ \frac{x^2}{2} - 4x + c = 4x + c$$

(1)

Es posible determinar el valor de c por medio de la condición inicial. Debido a que y = 5 cuando x = 2, a partir de la ecuación (1)$y = \int (8x - 4)\ dx = 8\,.\ \frac{x^2}{2} - 4x + c = 4x + c$*, se tiene*

$$5 = 4(2)^2 - 4\ (2) + c$$

$$5 = 16 - 8 + c$$

$$c = 3$$

Al reemplazar c por -3 en la ecuación (1) *se obtiene la función deseada:*

$$y = 4\,x^2 - 4\,x - 3$$

(2)

Para encontrar $y(4)$ *se hace* $x\ =\ 4$ *en la ecuación* (2).

$$y(4) = 4(4)^2\ - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45$$

Ejemplo:

Dado que $y'' = x^2\ - 6, y'(0) = 2\ Y\ y\ (1) =\ -1$, encuentre y.

Solución:

Estrategia Para pasar de y'' a y, son necesarios dos integraciones: la primera lleva de y '' a y ' y la segunda de y' a y. Por lo tanto, se tendrán dos constantes de integración que se denotaran como $c_1 -\ c_2$

Como $y'' = \frac{d}{dx}(\mathrm{y}') = \mathrm{x}^2 - 6,\ y' es\ una\ antiderivada\ de\ \mathrm{x}^2 - 6.\ Así\ que,$

$$y' = \int (\mathrm{x}^2 - 6)dx = \frac{\mathrm{x}^3}{3} - 6x + c_1$$

(3)

Ahora, y' (0) = 2 significa que y' = 2 cuando x = 0; por lo tanto, a partir de la ecuación (3)*, se tiene*

$$2 = \frac{0^3}{3} - 6(0) + c_1$$

Así, $c_1 = 2, de\ modo\ que$

$$y' = \frac{\mathrm{x}^3}{3} - 6x + 2$$

Por integración, es posible encontrar y:

$$y = \int (\frac{x^3}{3} - 6x + 2)\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - (6)\frac{x^2}{2} + 2x + c_2$$

Así

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x\, c_2 \tag{4}$$

Ahora, como y = -1 cuando x = 1, a partir de la ecuación (**4**)*, se tiene*

$$-1 = \frac{1^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + c_2$$

Así, $c_2 = -\frac{1}{12}, por\ lo\ que$

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}$$

Ejemplo:

$$y''' = 2; y''(-1) = 3, y'(3) = 10, \qquad y(0) = 13$$

$$y''' = 2e^{-x} + 3;\ \ y''(0) = 7, y'(0) = 5, y(0) = 1$$

2.3 REGLAS ADICIONALES DE INTEGRACIÓN

Regla de la Potencia para la Integración

$$\int u^a\ du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + c \qquad si\ a \neq -1$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int (x+1)^{20}\ dx.$$

Si: u=x+1

Entonces: du=dx

$$\int (x+1)^{20}\ dx\ =\ \int u^{20}\ du\ =\ \frac{u^{21}}{21}+c\ =\ \frac{(x+1)^{21}}{21}+c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int 3x^2\ (x^3+7)^3\,dx.$$

Si u= x^3+7; du=$3x^2$

$$\int 3x^2\,(x^3+7)^3 dx\ =\int (x^3+7)^3[3x^{\,2}\ dx\,] = \int u^3\ du\ =\frac{u^4}{4}+c\ =\ \frac{(x^3+7)^4}{4}+c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int x\,\sqrt{x^2\ +5}\ dx.$$

$$u\ =\ x^2+5\ \ ; du\ =2x\,dx$$

$$\int x(x^2+5)^{1/2}dx\ =\ \int (x^2+5)^{1/2}\,[x\,dx\,]\ =\ \int u^{1/2}\frac{du}{2}$$

$$\int x(x^2+5)^{1/2}\ dx\ =\frac{1}{2}\int u^{1/2}\ du\ =\frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right)+c\ =\frac{1}{3}u^{3/2}+c$$

$$\int x\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{(x^2+5)^{3/2}}{3}+c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int (4x+1)^2\,dx$$

$u = 4x + 1.$

$du = 4\,dx$

$$\int (4x+1)^2 dx = \int u^2 \left[\frac{du}{4}\right] = \frac{1}{4}\int u^2\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3} + c = \frac{(4x+1)^3}{12} + c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int \sqrt[3]{6y}\;dy.$$

$\int \sqrt[3]{6y}\,dy = \int 6^{1/3}\,y^{1/3}dy = \sqrt[3]{6}\int y^{1/3}\,dy = \sqrt[3]{6}\,\frac{y^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{6}}{4}\,y^{4/3}$+c

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int \frac{2x^3+3x}{(x^4+3x^2+7)^4}\,dx.$$

$$u = x^4 + 3x^2 + 7$$
$$du = (4x^3 + 6x)\,dx$$

Así:

$$(2x^3 + 3x)\,dx = \frac{du}{2}$$

$$\int (x^4+3x^2+7)^{-4}[(2x^3+3x)dx] = \int u^{-4}\left[\frac{du}{2}\right] = \frac{1}{2}\int u^{-4}\,du$$

$$\frac{1}{2}.\frac{u^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{6u^3} + c = -\frac{1}{6(x^4+3x^2+7)^3} + c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral que no se aplica la Regla de la Potencia.

$$\int 4x^2(x^4+1)^2\,dx.$$

$u = x^4 + 1$; $du = 4x^3\,dx$ ➔ No es posible aplicar la RDLP

$$\int 4x^2\,(x^4+1)^2 dx \;= 4\int x^2(x^8+2x^4+1)dx$$

$$= 4\int x^2\,(x^8+2x^4+1)dx$$

$$= 4\left(\frac{x^{11}}{11}+\frac{2x^7}{7}+\frac{x^3}{3}\right)+c$$

Integración de funciones exponenciales naturales

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

$$\int e^u\frac{du}{dx}\,dx = e^u + c$$

$$\int e^u\,du \;= e^u + c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int 2\mathrm{x}\,\mathrm{e}^{x^2}\,dx$$

$$u = x^2$$

$$du = 2x\,dx$$

$$\int 2xe^{x^2}\,dx \;= \int e^{x^2}\,[2x\,dx] = \int e^4\,du$$

$$= e^u + c = e^{x^2} + c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int (x^2+1)e^{x^{3}+3x}dx.$$

Si $u = x^3$ +3x

$$du = (3x^2+3)dx = 3(x^2+1)dx$$

$$\int (x^2+1)e^{x^{3}+3x}\,dx = \int e^{x^{3}+3x}[(x^2+1)dx]$$

$$= \frac{1}{3}\int e^u \; du = \frac{1}{3}e^u + c$$

$$= \frac{1}{3}e^{x^3+3x} + c$$

Integrales que incluyen funciones logarítmicas

$$\int \frac{1}{u}du = \text{In}\, u + c \qquad para\, u \neq 0$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int \frac{7}{x}dx$$

$$\int \frac{7}{x}dx = 7\int \frac{1}{x}\,dx = 7\,In\,x^7 + c \quad = In\,x^7 + c$$

Ejemplo: Encuentre la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx.$$

$$u = x^2+5 \quad ; \quad du = 2x\,dx.$$

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx = \int \frac{1}{x^2+5}[2x\,dx] = \int \frac{1}{u}du$$

$$= In\,u + c = In\,x^2+5+c$$

Como x^2+5 siempre es positiva:

$$In\ (x^2+5)+c$$

Ejemplo:

Encuentre

$$\int \frac{(2x^3+3x)\ dx}{x^4+3x^2+7}$$

Solución: Si $u = x^4+3x^2+7$, entonces $du = (4x^3\ +6x)dx$, que es dos veces el numerador, de modo que $(2x^3+3x)dx = \frac{du}{2}$. Para aplicar la ecuación (3), se escribe

$$\int \frac{2x^3+3x}{x^4+3x^2+7}dx\ = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}In\,u + c$$

$= \frac{1}{2}In\ x^4+3x^2+7\ \ +c$ Reescriba en términos de x.

$$= \frac{1}{2}In\ (x^4+3x^2+7)+c \qquad x^4+3x^2+7>0\ para\ toda\ x$$

Ejemplo:

Encuentre

$$\int \left(\frac{1}{(1-w)^2}+\frac{1}{w-1}\right)dw.$$

Solución:

$$\int \left(\frac{1}{(1-w)^2}+\frac{1}{w-1}\right)dw = \int (1-w)^{-2}\ dw + \int \frac{1}{w-1}dw$$

$$= -1\int (1-w)^{-2}[-dw] + \int \frac{1}{w-1}dw$$

La primera integral tiene la forma $\int u^{-2}du$ y la segunda tiene la forma $\int \frac{1}{v}dv$. Así,

$$\int \left(\frac{1}{(1-w)^2}+\frac{1}{w-1}\right)dw = -\frac{(1-w)^{-1}}{-1} + In\ w-1+c$$

$$= \frac{1}{1-w} + In\, w - 1 + c$$

2.4 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Ahora se considerará la resolución de problemas de integración más difíciles.

Cuando se deben integrar fracciones, a veces es necesario realizar una división preliminar para obtener formas de integración familiares, como lo muestra el ejemplo siguiente.

2.4.1 DIVISIÓN PREVIA

Ejemplo:

Encuentre:

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2} dx$$

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2} dx \; = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2}\right) dx \; = \int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + In\, x + c$$

Ejemplo:

Encuentre:

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1} dx.$$

Solución: Aquí el integrando es un consciente de polinomios donde el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador. En tal caso, primero se usa la división larga. Recuerde que, si F y G son polinomios, con el grado de F mayor o igual al grado de G, entonces la división larga permite encontrar (solamente) los polinomios, y R, donde es el polinomio cero o bien el grado de r es estrictamente menor que el grado G, lo que satisface.

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$$

Al utilizar una notación abreviada obvia, se ve que

$$\int \frac{f}{g} = \int \left(q + \frac{r}{g}\right) = \int q + \int \frac{r}{g}$$

Como la integración de un polinomio es fácil, se observa que la integración de funciones racionales se reduce a la tarea de integrar *funciones racionales propias* aquellas para las que el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador. En este caso se obtiene

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1} dx \ = \int \left(x^2 + x + \frac{1}{2x + 1}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \int \frac{1}{2x + 1} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x + 1} d(2x + 1)$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} In\ 2x + 1 + c$$

Ejemplo:

Integración implícita.(ejercicio)

2.4.2 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

Ejemplo:

$$\int \frac{\cos x}{2 - 3 \sin x} dx$$

$z = \sin x \rightarrow x = \arcsin z$;

$$z^2 = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - z^2$$

$$dx = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} dz$$

$$\int \frac{\cos x}{2 + 3 \sin x} dx = \int \frac{\sqrt{1 - z^2}}{2 + 3z} . \frac{1}{\sqrt{1 - z^2} dz} =$$

$$\int \frac{1}{2+3z} dz = \frac{In\ 2+3z}{3} = \frac{In\ 2+3\sin x}{3} + c$$

Ejemplo:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$$

$$z = \tan x \rightarrow \arctan z \ = x \rightarrow \frac{1}{1+z^2} dz = dx$$

$$sin^2 x + cos^2 x = 1 \ \ \rightarrow \ \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{sin^2 x}{cos^{\,6}\, x} dx = \int tan^2\ x . \frac{1}{cos^{\,4} x} dx \ = \int tan^2 z\,(tan^2 x + 1)^2 dx =$$

$$= \int z^2\,(z^2+1)^2 . \frac{1}{1+z^2} dz =$$

$$= \int z^2 (z^2+1) dz = \int (z^4 + z^2) dz =$$

$$= \frac{z^5}{5} + \frac{z^3}{3} = \frac{tan^5 x}{5} + \frac{tan^3}{3} + c$$

Ejemplo:

Integración por sustitución.(ejercicio)

2.4.3 INTEGRACIÓN POR PARTES

Cuando el integrando está formado por un producto (o una división, que podemos tratar como un producto) se recomienda utilizar el método de integración por partes que consiste en aplicar la siguiente fórmula:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Regla mnemotécnica: Un Día Vi = Una Vaca sin Corbata Vestida De Uniforme (UDV=UV-$\int$ VDU).

Método:

El integrando debe ser un producto de dos factores.

Uno de los factores será *u* y el otro será *dv*.

Se calcula *du* derivando *u* y se calcula *v* integrando *dv*.

Se aplica la fórmula.

Consejo:

Escoger adecuadamente u y dv:

Una mala elección puede complicar más el integrando.

Supongamos que tenemos un producto en el que uno de sus factores es un monomio (por ejemplo, x^3). Si consideramos $dv = x^3$. Entonces, integrando tendremos que $v = x^4/4$, con lo que hemos aumentado el grado del exponente y esto suele suponer un paso atrás.

Normalmente, se escogen los monomios como *u* para reducir su exponente al derivarlos. Cuando el exponente es 0, el monomio es igual a 1 y el integrando es más fácil.

Algo parecido ocurre con las fracciones (como $1/x$). Si consideramos $dv = 1/x$, tendremos $v = log\ |x|$ y, probablemente, obtendremos una integral más difícil.

Como norma general, llamaremos *u* a las potencias y logaritmos y *dv* a las exponenciales, fracciones y funciones trigonométricas.

No cambiar la elección:

A veces tenemos que aplicar el método más de una vez para calcular una misma integral.

En estas integrales, al aplicar el método por *n*-ésima vez, tenemos que llamar *u* al resultado *du* del paso anterior y *dv* al resultado *v*. Si no lo hacemos así, como escoger una opción u otra supone integrar o derivar, estaremos deshaciendo el paso anterior y no avanzaremos.

Integrales cíclicas:

En ocasiones, tras aplicar dos veces integración por partes, tenemos que despejar la propia integral de la igualdad obtenida para poder calcularla. Un ejemplo de esto es la Ejemplo 5.

Ejemplo: $\int xe^x\, dx$

$$\boldsymbol{u = x \quad y \quad dv = e^x dx}$$

$$\boldsymbol{du = dx \qquad y \qquad v = \int e^x \; dx \; = e^x + c_1}$$

$$\int xe^x \, dx \; = \int u \, dv$$

$$= uv - \int v \, du$$

$$= x(e^x + c_1) - \int (e^x + c_1) dx$$

$$= xe^x + c_{1x} - e^x - c_1$$

$$du = dx \qquad y \qquad v = \int e^x \; dx \; = e^x + c_1$$

$$\int xe^x \, dx = \int u \, dv$$

$$= uv - \int vdu$$

$$= x(e^x + c_{1)} - \int (e^x + c_1) dx$$

$$= xe^x + c_{1x} - e^x - c_{1x} + c$$

$$xe^x - e^x + c$$

$$e^x(x-1) + c$$

Por lo tanto, C1 ya no se colocará.

Ejemplo:

$$\int x \cos x dx$$

$$dv = \; cos(x) \; dx$$

$$\int x \cos x \; dx \quad = \begin{bmatrix} u = x \rightarrow du = 1 \\ dv = \cos x \rightarrow v = \sin x \end{bmatrix}$$

$$= x \sin x - \int \sin x \, dx =$$

$$= \boldsymbol{x \sin x + cos\, x + c\; c} \in \mathrm{R}$$

Ejemplo: Integral de un cociente, que se lo trata como una división

Mediante integración por partes encuentre:

$$\int \frac{In\, x}{\sqrt{x}} dx$$

Solución: se prueba

$u = In\, x$ Y $dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

$du = \frac{1}{x} dx$ Y $v = \int x^{-1/2}\, dx = 2x^{1/2}$

Así,

$$\int In\, x \left(\frac{1}{\sqrt{x}} dx\right) = \int u\, dv = uv - \int vdu$$

$$= (In\, x)(2\sqrt{x)} - \int (2x^{1/2}) \left(\frac{1}{x} dx\right)$$

$$= 2\sqrt{x} In\, x - 2 \int x^{-1/2}\, dx$$

$$= 2\sqrt{x} In\, x - 2(2\sqrt{x) + c}$$

$$= 2\sqrt{x}[In\,(x) - 2] + c$$

Ejemplo:

$$\int x^2\, ln\, xdx$$

Nos interesa escoger $u = x^2$ (para reducir su exponente) pero entonces nos vemos obligados a que $dv = ln(x)$ y obtener v no es inmediato. Así que escogemos lo contrario:

$$Dv = x^2 dx$$

$$u = In\ x\ \rightarrow du = \frac{1}{x}$$

$$dv = x^2 \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2\ In\ x\ dx = \frac{x^3}{3} In\ x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x} dx =$$

$$\frac{x^3}{3} In\ x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} In\ x - \frac{1}{9}x^3 =$$

$$\frac{x^3}{3}\left(ln\ x - \frac{1}{3}\right) + c$$

Ejemplo:

$$\int e^{-x}\ cos\ x\ dx$$

En este ejemplo no importa cuáles son los factores *u* y *dv*, ya que al integrar y al derivar e^{-x} obtenemos $-e^{-x}$ y al integrar y al derivar *cos(x)* obtenemos *± sin(x)*.

Se trata de una integral cíclica en la que tendremos que aplicar dos veces integración por partes (con la misma elección para no volver al paso anterior) y tendremos que despejar la integral de la expresión obtenida.

$$dv = \cos(x)dx$$

$$u = e^{-x} \rightarrow du = \ -e^{-x}$$

$$dv = cos\ x\ \rightarrow \quad v = sin\ x$$

$$\int e^{-x} cos\ x\ dx = e^{-x} sin\ x + \int e^{-x} sin\ x\ dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{-x} \rightarrow du = \ -e^{-x} \\ dv = sinx\ \rightarrow \quad v = -cos\ x \end{bmatrix} =$$

$$= \ e^{-x} sin\ x + (-\ e^{x} cos\ x + \int e^{-x}\ cos\ x\ dx)$$

$$\int e^{-x}\ cos\ x\ dx =$$

$$= e^{-x}sin\,x - e^{x}cos\,x - \int e^{-x}cos\,x\,dx$$

$$2\int e^{-x}\,cos\,x\,dx = e^{-x}\,sin\,x - e^{-x}cos\,x$$

$$\int e^{-x}\,cos\,x\,dx = \frac{e^{-x}sin\,x - e^{-x}cos\,x}{2} =$$

$$= \frac{e^{-x}}{2}(sin\,x - cos\,x) + c$$

Ejemplo:

$$\int e^{x}(x^2 - 2x - 1)dx$$

Parecido a lo que ocurre con *sin(x)* y *cos(x)*, al derivar o al integrar e^x obtenemos e^x, por lo que no importa si es *u* ó *dv*. Si escogemos que la exponencial sea *u*, este factor se mantendrá siempre en la integral y, además, el monomio (la potencia) será *dv* e iremos aumentando su grado al calcular *v*. Por tanto, escogemos $dv = e^x$ y *u* los monomios del polinomio para reducir su exponente hasta que sea una constante.

$$dv = e^{x}dx$$

$$\int e^{x}\,(x^2 - 2x - 1)dx = \int e^{x}x^2\,dx - \int 2xe^{x}\,dx - \int e^{x}\,dx$$

$$\int e^{x}\,dx = e^{x}$$

$$= 2x\,e^{x} - \int 2e^{x}\,dx = 2x\,e^{x} - 2e^{x} = 2e^{x}(x-1)$$

$$\int e^{x}\,x^2 dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \rightarrow du = 2x \\ dv = e^{x} \rightarrow v = e^{x} \end{bmatrix} = x^2e^{x} - \int 2xe^{x} =$$

$$= x^2e^{x} - 2e^{x}(x-1) = e^{x}(x^2 - 2x + 2)$$

$$\int e^{x}\,(x^2 - 2x - 1)dx = e^{x}(x^2 - 2x + 2) - 2e^{x}(x-1) - e^{x} =$$

$$= e^{x}(x^2 - 2x + 2 - 2x + 2 - 1) = e^{x}(x^2 - 4x + 3) + c$$

Ejemplo: Integración por partes 2 veces

Determine:

$$\int x^2\, e^{2x+1} dx.$$

Solución: Sea $u = x^2 \;\; y \;\; dv = e^{2x+1} dx$ .Entonces $du = 2x\, dx \;\; y\; v = \frac{3^{\,2x+1}}{2}$.

$$\int x^2\, e^{2x+1} dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2} (2x\, dx)$$

$$= \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \int x e^{2x+1}\, dx$$

Para encontrar $\int x e^{2x+1}\, dx$, se usara de nuevo la integración por partes. Aquí, sea $u = x\; y\; dv = e^{2x+1}\, dx$. Entonces $du = dx\; y\; v = e^{2x+1}/2$.

$$\int x e^{2x+1}\, dx = \frac{x e^{2x+1}}{2} - \int \frac{e^{2x+1}}{2} dx$$

$$= \frac{x e^{2x+1}}{2} - \frac{e^{2x+1}}{4} c_1$$

Asi,

$$\int x^2\, e^{2x+1} dx = \frac{x^2 e^{2x+1}}{2} - \frac{x e^{2x+1}}{2} + \frac{e^{2x+1}}{4} + c$$

$$= \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + c$$

donde $c = c_1$

Ejemplo:

$$\int (x^2 + x) e^{1-2x} dx$$

Escogeremos el polinomio como *u* para reducir los exponentes hasta que desaparezcan

$$dv = e^{-x}dx$$

$$\int (x^2+x)e^{1-2x}dx = \int (x^2+x)e^1\, e^{-2x}dx =$$

$$= e\left(\int x^2 e^{-2x}dx + \int xe^{-2x}\,dx\right)$$

$$\int x^2\, e^{-2x}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 \rightarrow \ du = 2x \\ dv = e^{-2x} \rightarrow \ v = -\dfrac{e^{-2x}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{e^{-2x}}{2}x^2 + \int \frac{e^{-2x}}{2}.2xdx = -\frac{e^{-2x}}{2}x^2 + \int xe^{-2x}\,dx$$

$$\int xe^{-2x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x \rightarrow du = 1 \\ dv = \ e^{-2x} \ \rightarrow \ v = -\dfrac{e^{-2x}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} = -e^{-2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\int (x^2+x)e^{1-2x}\,dx =$$

$$= e\left(-\frac{e^{-2x}}{2}x^2 - e^{-2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) - e^{-2x}\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)\right) =$$

$$= -e^{1-2x}\left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2}\right) = -2e^{1-2x}(x^2+2x-1) + c$$

Ejemplo:

Integración por partes (ejercicio).

2.4.4 INTEGRACIÓN POR DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES:

$$\int \frac{7}{x^2+3x-10}dx$$

$$\frac{7}{x^2+3x-10} = \frac{7}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x-2)}$$

$$A = \frac{7}{-5-2} = \frac{7}{-7} = -1$$

$$B = \frac{7}{2+5} = \frac{7}{7} = 1$$

$$\frac{7}{x^2 + 3x - 10} = \frac{-1}{(x+5)} + \frac{1}{(x-2)}$$

$$\int \frac{7}{x^2 + 3x - 10} dx = -\int \frac{1}{(x+5)} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx$$

$$-\int \frac{1}{(x+5)} dx + \int \frac{1}{(x-2)} dx = -Ln|x+5| + Ln|x-2| + c$$

$$= Ln|x-2| - Ln|x+5| + C = \frac{Ln|x-2|}{Ln|x+5|} + c$$

Descomposición en fracciones parciales.(ejercicio)

2.4.5 INTEGRACIÓN CON FACTORES LINEALES DISTINTOS Y REPETIDOS.

$$\int \frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$$

$(x^3 - 2x^2 + x - 2)' = 3x^2 - 4x + 1$ ➔ No se puede hacer por sustitución

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{5x^2 + 3x - 1}{(x-2)(x^2+1)}$$

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^3 - 2x^2) + (x-2) = x^2(x-2) + (x-2)$$

$$= (x-2)(x^2+1)$$

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$$

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{\cancel{(x-2)(x^2+1)}} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)}{\cancel{(x-2)(x^2+1)}}$$

$$5x^2 + 3x - 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-2)$$

$$= Ax^2 + A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C$$

$$= (Ax^2 + Bx^2) + (Cx - 2Bx) + (A - 2C)$$

$$5x^2 + 3x - 1 = (A + B)x^2 + (C - 2B)x + (A - 2C)$$

$$A + B = 5$$
$$C - 2B = 3$$
$$A - 2C = -1$$

$$A = 5 - B$$

$$C = 3 + 2B$$

$$5B - 2(3 + 2B) = -1$$

$$B = 0$$

$$A = 5$$

$$C = 3$$

$$\frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} = \frac{5}{(x - 2)} + \frac{3}{(x^2 + 1)}$$

$$\int \frac{5x^2 + 3x - 1}{x^3 - 2x^2 + x - 2} dx = \int \frac{5}{(x - 2)} dx + \int \frac{3}{(x^2 + 1)} dx$$

$$= 5 \int \frac{1}{(x - 2)} dx + 3 \int \frac{1}{(x^2 + 1)} dx$$

$$= 5. Ln|x - 2| + 3. Tan^{-1}x + c$$

$$= Ln|(x - 2)^5| + 3. Tan^{-1}x + c$$

Ejemplo:

Integración con factores lineales distintos y repetidos.(ejercicio)

2.5 INTEGRAL DEFINIDA

Definición, notación.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Los números *a* y *b* se llaman límites de integración; *a* es el límite inferior y *b* es el límite superior. El símbolo *x* se llama variable de integración y $f(x)$ es el integrando.

Teorema Fundamental del Calculo Integral

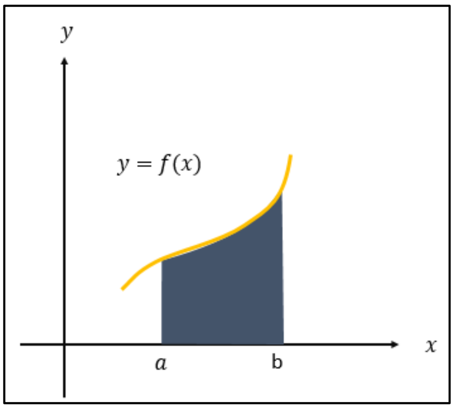


Figura 2.1: Teorema Fundamental del cálculo integral.

$$A(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

$A\ (b)$ es el área desde *a* hasta *b*

Si *f* es continua en el intervalo $[a, b]$ y *F* es cualquier anti derivada de *f* en $[a,\ b\ ]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo:

$$\int_0^2 (4 - x^2)dx = F(2) - F(0) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{16}{3}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)$$

$$\int_0^2 (4-x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}$$

Ejemplo:

$$\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6)dx$$

$$= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 6\right)dx$$

$$= \left[3^3 - \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1)\right]$$

$$\left(\frac{81}{2}\right) - \left(-\frac{15}{2}\right) = 48$$

<u>Propiedades de la Integral Definida</u>

Si a >b, entonces $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b kf\ (x)dx = k\ \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx\ \pm\ \int_a^b g(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

Ejemplo:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx = \int_0^1 x^3(1+x^4)^{-1/2}\,dx$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 (1+x^4)^{-1/2} d(1+x^4) = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(1+x^4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^4)^{1/2} = \frac{1}{2}((2)^{1/2} - (1)^{1/2})$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1$$

Ejemplo:

$$\int_{-2}^{1} x^3\, dx = \frac{x^4}{4} \quad = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}$$

Ejemplo:

Integración definida.(ejercicio)

2.6 APLICACIONES DE LA INTEGRAL

2.6.1 CÁLCULO DE ÁREAS BAJO Y SOBRE UNA CURVA

Ejemplo:

Encuentre el área de la región limitada por la curva

$$y = x^2 - x - 2$$

Y la recta y = 0 (el eje x) a partir de x = -2 hasta x=2.

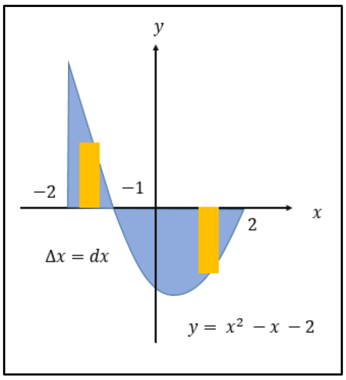


Figura 2.2: Calculo de área bajo y sobre una curva de la función $y = x^2 - x - 2$.

$$\text{Área} = \int_{-2}^{-1}(x^2 - x - 2)dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right]$$

$$- \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right]$$

$$= \frac{19}{3}$$

Ejemplo:

Calculo del área bajo la curva.(ejercicio)

2.6.2 ÁREA ENTRE DOS CURVAS

Ejemplo:

Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.

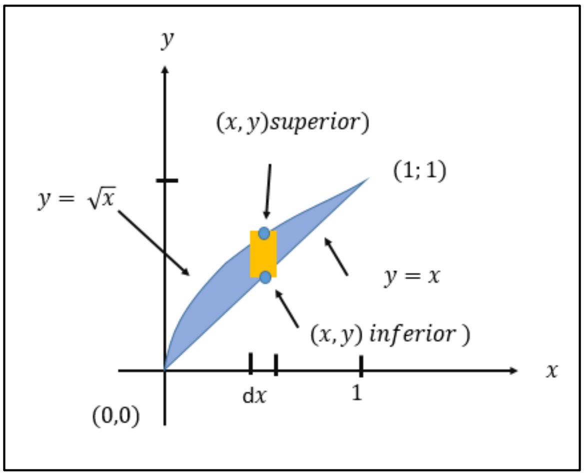


Figura 2.3 Área de la región limitada por las curvas de la función $y = \sqrt{x}$

Para saber dónde se intersecan las curvas debemos igualarlas:

$$\sqrt{x} = x$$

$$x = x^2$$

$$0 = x^2 - x = x(x-1)$$

$$x = 0 \; o \; x = 1$$

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = \sqrt{x} - x$$

Área = $\int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx$

$$= \int_0^1 (x^{1/2} - x)dx = \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}$$

Ejemplo:

Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$.

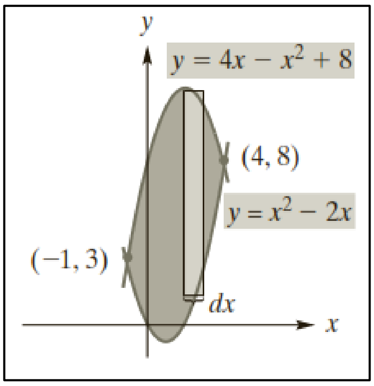


Figura 2.4: Región limitada por dos curvas de la función $y = 4x - x^2 + 8$

$$4x - x^2 + 8 = x^2 - 2x,$$

$$-2x^2 + 6x + 8 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \qquad \text{factorizado}$$

$$x = -1 \;\; \text{o} \; x = 4$$

Cuando $x = 1$, entonces $y = 3$; cuando $x = 4$, entonces $y = 8$. Así, las curvas se intersecan en $(-1,3)$ y $(4,8)$. El ancho de la franja indicada es dx . La altura es el valor de *y* sobre la curva posterior menos el valor de *y* sobre la curva inferior:

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = (4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)$$

$$[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)]dx = (-2x^2 + 6x + 8)dx$$

Área

$$\int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)dx = 41\frac{2}{3}$$

Ejemplo:

Encuentre el área de la región situada entre las curvas $y = 9 - x^2 + 1$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

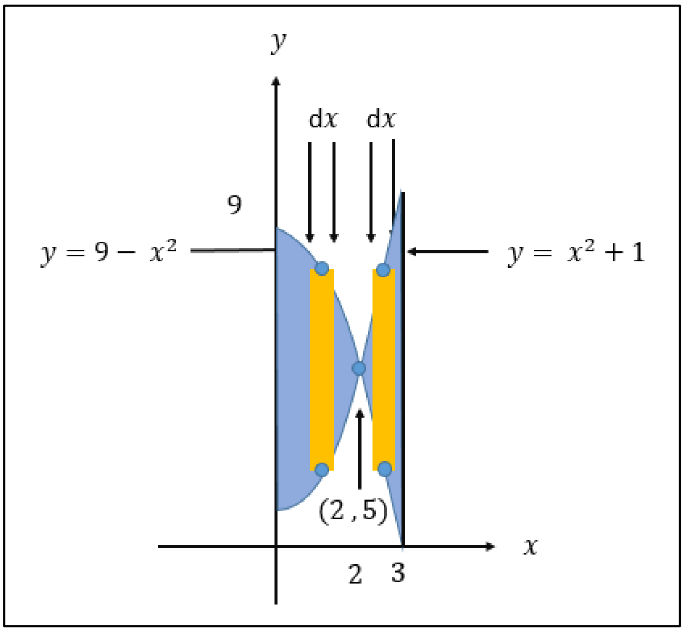


Figura 2.5: Región limitada por dos curvas de la función $y = x^2 + 1$.

$$9 - x^2 = x^2 + 1$$
$$8 = 2x^2$$
$$4 = x^2$$
$$x = \pm 2$$

A la izquierda del punto de intersección.

$y_{\text{superior}} = 9 - x^2$ y $y_{\text{inferior}} = x^2 + 1$

A la derecha del punto de intersección.

$y_{\text{superior}} = x^2 + 1$ y $y_{\text{inferior}} = 9 - x^2$

Entonces, desde $x = 0$ hasta $x = 2$, el área de una franja es

$$(y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})dx = [(9 - x^2) - (x^2 + 1)]dx$$

$$= (8 - 2x^2)dx$$

Pero desde $x = 2$ hasta $x = 3$, el área es

$$(y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})dx = [(x^2 + 1) - (9 - x^2)]dx$$
$$= (2x^2 - 8)dx$$

Por lo tanto, para encontrar el área de toda la región se necesitan dos integrales

$$\int_0^2 (8 - 2x^{2)}\, dx + \int_2^3 (2x^2 - 8)\, dx$$

$$= \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{2x^3}{3} - 8x\right)\Big|_2^3$$

$$= \left[\left(16 - \frac{16}{3}\right) - 0\right] + \left[(18 - 24) - \left(\frac{16}{3} - 16\right)\right]$$

$$= \frac{46}{3}$$

Ejemplo:

Área entre dos curvas.(ejercicio parte 1)

Área entre dos curvas.(ejercicio parte 2)

2.7 INTEGRACIÓN APROXIMADA

2.7.1 REGLA DEL TRAPECIO

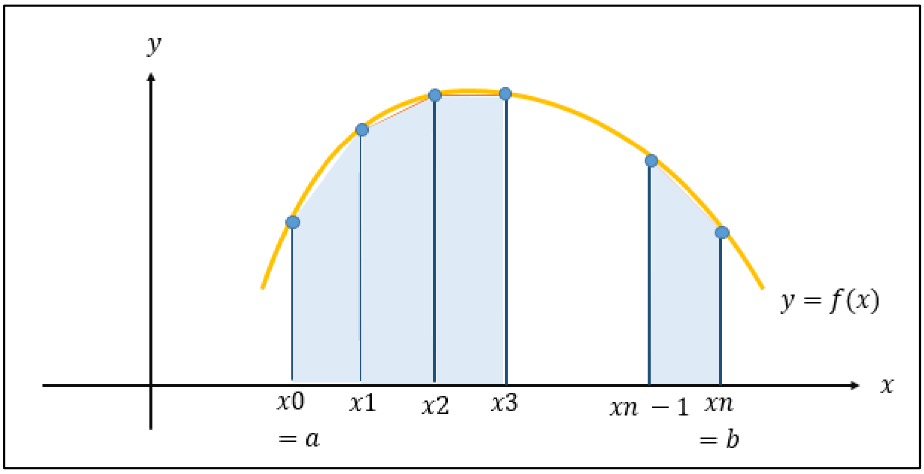


Figura 2.6: Regla del Trapecio

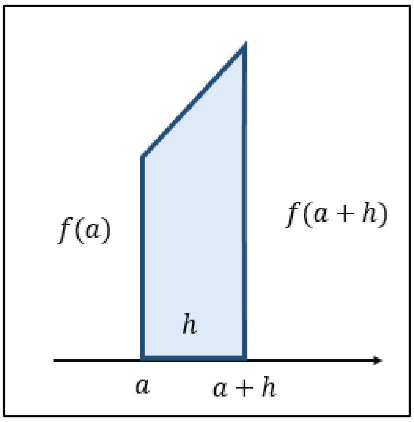


Figura 2.7 : Regla del Trapecio utilizando la fórmula del Trapecio.

$$\frac{1}{2}h[f(a) + f(a+h)]$$

El segundo trapecio tiene un área igual a:

$$\frac{1}{2}h[f(a+h) + f(a+2h)]$$

El Área bajo la curva se aproxima así:

$$A \approx \frac{1}{2}h[f(a) + f(a+h] + \frac{1}{2}h[f(a+h) + f(a+2h)]$$
$$+\frac{1}{2}h\left[f(a+2h) + f(a+3h)] + \cdots + \frac{1}{2}h[f(a+(n-1)h) + f(b)]\right]$$

Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

Donde $h = (b - a)/n$

Ejemplo:

Use la regla del trapecio para estimar el valor de

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

Para $n = 5$. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales.

Solución: Aquí $f(x) = 1/(1+x^2), n = 5, a = 0$ y $b = 1$. Entonces,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Los términos a sumar son

$$f(a) = f(0) = 1.0000$$

$$2f(a+h) = 2f(0.2) = 1.9231$$

$$2f(a+2h) = 2f(0.4) = 1.7241$$
$$2f(a+3h) = 2f(0.6) = 1.4706$$
$$2f(a+4h) = 2f(0.8) = 1.2195$$
$$f(b) = f(1) = \frac{0.5000}{7.8373} = \text{suma}$$

Por lo tanto, la estimación de la integral es

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \approx \frac{0.2}{2}(7.8373) \approx 0.784$$

El valor real de la integral es aproximadamente 0.785

Ejemplo:

Regla del trapecio.(ejercicio)

2.7.2 REGLA DE SIMPSON

Otro método para estimar $\int_a^b f(x)\, dx$ esta dado por la regla de Simpson, la cual implica aproximarla grafica de *f* por medio de segmentos parabólicos. Se omitirá su deducción.

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{h}{3}\,[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

Donde: $h = (b - a)/n$ y *n* es un numero par.

El patrón de coeficientes incluidos dentro de las llaves es 1, 4, 2, 4, 2..., 2, 4, 1, lo cual requiere que *n* sea par. Se usará esta regla para evaluar la integral del ejemplo 1.

Ejemplo:

Use la regla de Simpson para estimar el valor de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$ para $n = 4$. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee la respuesta a tres decimales.

Solución: Aquí $f(x) = 1/(1+x^2), n = 4, a = 0\ y\ b = 1$. Así,

$h = (b-a)/n = 1/4 = 0.25$. Los términos por sumar son:

$$f(a) = f(0) = 1.0000$$

$$4f(a+h) = 4f(0.25) = 3.7647$$

$$2f(a+2h)=2f(0.5)=1.6000$$

$$4f(a+3h)=4f(0.75)=2.5600$$

$$f(b)=f(1)=\frac{0.5000}{9.4247}=\text{suma}$$

Por lo tanto, mediante la regla de Simpson,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \approx \frac{0.25}{3}(9.4247) \approx 0.785$$

Esta es una mejor aproximación que la obtenida en el ejemplo 1 usando la regla del trapecio.

Ejemplo:

Regla de Simpson.(ejercicio)

2.8 VOLUMEN DE SOLIDO DE REVOLUCIÓN

Este método permite determinar el volumen de sólidos de revolución como la suma del volumen de cilindros circulares rectos de corta altura (discos). Recuerde que el volumen de un cilindro se calcula por la fórmula:

$$V = \pi r^2 h$$

Donde r= es el radio del cilindro y h su altura.

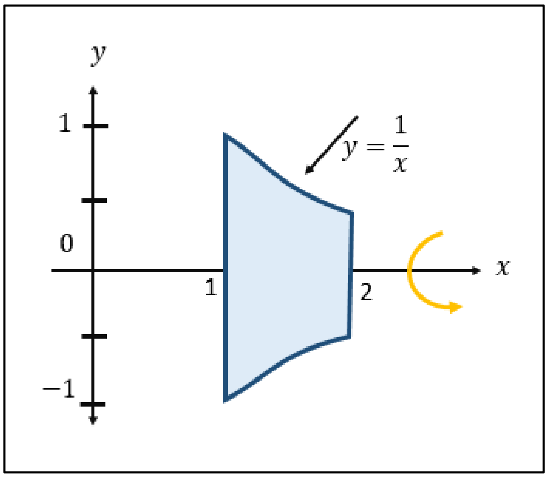


Figura 2.8: Región para obtener volumen de revolución.

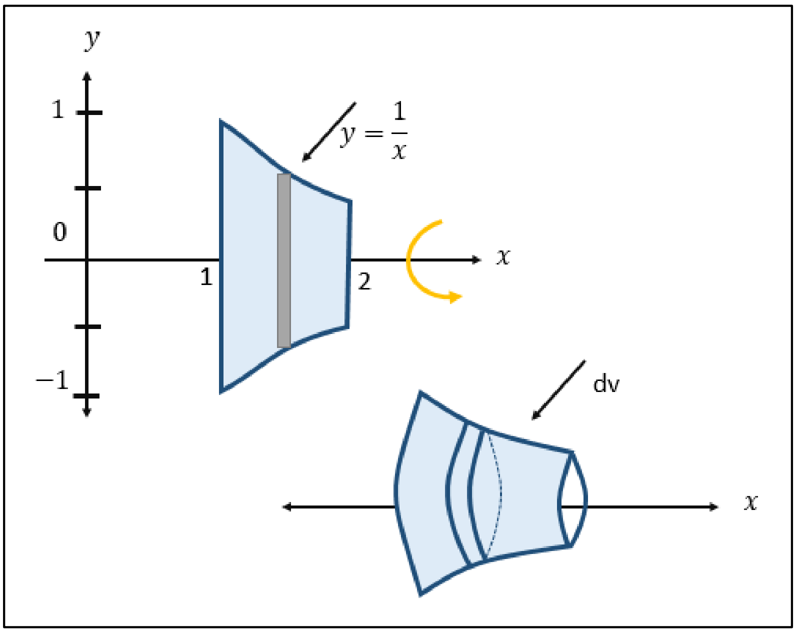


Figura 2.9: Volumen de Revolución.

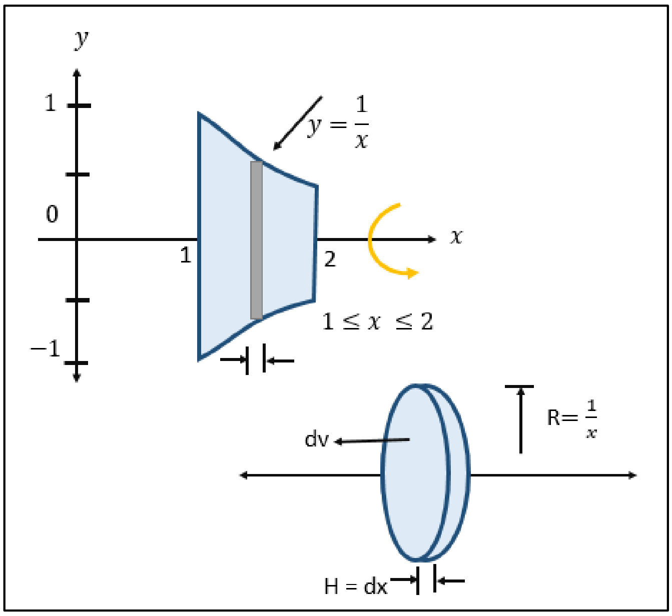


Figura 2.10: Disco del volumen de revolución

$$dv = \text{volumen del disco}$$

$$dv = \pi . R^2 . h$$

$$dv = \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$dv = \frac{\pi}{x^2} dx$$

$$\int dv = \int_1^2 \frac{\pi}{x^2} dx$$

$$V = \pi . \int_1^2 x^{-2}\, dx$$

$$V = \pi . \left\{\frac{x^{-1}}{-1}\Big]\right\}$$

$$V = -\pi . \left\{\frac{1}{x}\Big]\right\}$$

$$V = -\pi \left\{\frac{1}{2} - 1\right\}$$

$$V = -\pi \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

$$V = \frac{\pi}{2} u^3$$

Ejemplo:

Volumen de revolución.(ejercicio)