ÁLGEBRA LINEAL : Práctica Calificada

21 de Setiembre 2024

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

Nombre: ______________________________________

1. **Matriz de cofactores:** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcule la matriz de cofactores de A.

Solución:

Para calcular la matriz de cofactores, calculamos el determinante de cada uno de los menores de la matriz. El cofactor C_{ij} se calcula como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

donde A_{ij} es la matriz que se obtiene eliminando la fila i y la columna j.

- $C_{11} = (-1)^{1+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 1(0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1)) = 1$
- $C_{12} = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = -1(4 \cdot 2 - 1 \cdot 5) = -3$
- $C_{13} = (-1)^{1+3} \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = 1(4 \cdot (-1) - 0 \cdot 5) = -4$
- $C_{21} = (-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -1(1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = -5$
- $C_{22} = (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = 1(2 \cdot 2 - 3 \cdot 5) = -11$
- $C_{23} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = -1(2 \cdot (-1) - 1 \cdot 5) = 7$
- $C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1(1 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = 1$
- $C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -1(2 \cdot 1 - 3 \cdot 4) = 10$

- $C_{33} = (-1)^{3+3} \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 1(2 \cdot 0 - 1 \cdot 4) = -4$

Por lo tanto, la matriz de cofactores es:

$$\mathrm{Cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -5 & -11 & 7 \\ 1 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

2. **Matriz adjunta:** Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

encuentre la matriz adjunta (o adjugata) de B.

Solución:

Para encontrar la matriz adjunta, calculamos los cofactores de cada elemento de la matriz B.

1. Calculamos los menores de los elementos:

$$C_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = (1)(0) - (4)(6) = -24$$

$$C_{12} = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (0)(0) - (4)(5) = -20$$

$$C_{13} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (0)(6) - (1)(5) = -5$$

$$C_{21} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = (2)(0) - (3)(6) = -18$$

$$C_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (1)(0) - (3)(5) = -15$$

$$C_{23} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (1)(6) - (2)(5) = -4$$

$$C_{31} = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (2)(4) - (3)(1) = 5$$

$$C_{32} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = (1)(4) - (3)(0) = 4$$

$$C_{33} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1)(1) - (2)(0) = 1$$

2. La matriz de cofactores es:

$$\mathrm{Cof}(B) = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ -20 & -15 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Tomamos la traspuesta de la matriz de cofactores para obtener la matriz adjunta (adjugata):

$$\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -24 & -20 & -5 \\ 18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz adjunta de B es:

$$\boxed{\mathrm{Adj}(B) = \begin{pmatrix} -24 & -20 & -5 \\ 18 & -15 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}}$$

3. **Inversa de una matriz:** Utilice el método de Gauss-Jordan para encontrar la inversa de la matriz
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Para encontrar la inversa de C mediante el método de Gauss-Jordan, adjuntamos la matriz identidad a la derecha de C y realizamos operaciones elementales hasta obtener la identidad en el lado izquierdo.

$$(C|I) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Paso 1: Restamos 5 veces la primera fila de la tercera fila para hacer el pivote en la primera columna de la tercera fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & | & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 2: Sumamos 4 veces la segunda fila a la tercera fila para hacer el pivote en la segunda columna de la tercera fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Restamos 4 veces la tercera fila de la segunda fila para eliminar el 4 en la segunda fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Restamos 3 veces la tercera fila de la primera fila y luego restamos 2 veces la segunda fila de la primera fila para obtener la identidad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa de C es

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **Inversa por el método de la adjunta:** Encuentre la inversa de la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

utilizando el método de la adjunta.

Solución:

(a) Calculemos la matriz de cofactores de D:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(b) Transponemos la matriz de cofactores para obtener la adjunta $\text{Adj}(D)$:

$$\text{Adj}(D) = C^\top = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 \\ -5 & 4 & -2 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(c) Calculamos el determinante de D:

$$\det(D) = 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2(8) - 1(5) + 0 = 16 - 5 = 11$$

(d) Finalmente, la inversa de D es:

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)}\text{Adj}(D) = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -5 & 4 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{4}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

5. **Resolución de un sistema de ecuaciones lineales:** Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales usando:

(a) El método de Gauss-Jordan,

(b) La Regla de Cramer,

(c) El método de la matriz inversa.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1, \\ x - y + 4z &= 2, \\ 3x + 2y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

Solución: Usando:

(a) **Método de Gauss-Jordan:** Primero, representamos el sistema como una matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 4 & | & 2 \\ 3 & 2 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$$

Aplicamos las operaciones de fila para convertir la matriz en una matriz escalonada reducida por filas:

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1, \quad R_3 \leftarrow R_3 - \frac{3}{2}R_1$$

Obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & | & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Siguiente paso:

$$R_3 \leftarrow R_3 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, procedemos a simplificar para obtener los valores de z, y y x:

$$R_3 \leftarrow -R_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Usamos sustitución hacia atrás para obtener y:

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{9}{2}R_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & | & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftarrow -\frac{2}{5}R_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, obtenemos x:

$$R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2 + R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x = \frac{7}{5}, \quad y = -\frac{3}{5}, \quad z = 0.$$

(b) **Regla de Cramer:** Para resolver el sistema de ecuaciones lineales usando la regla de Cramer, necesitamos calcular los determinantes de las matrices.

i. **Paso 1: Determinante de la matriz de coeficientes**
La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Según el **método de Sarrus**,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

el determinante se puede calcular sumando el producto de los elementos de las diagonales principales y restando el producto de los elementos de las diagonales secundarias. Primero, calculamos las **diagonales principales**:

$$\text{Diagonal principal 1:} \quad 2 \cdot (-1) \cdot 2 = -4$$

$$\text{Diagonal principal 2:} \quad 1 \cdot 2 \cdot (-1) = -2$$

$$\text{Diagonal principal 3:} \quad 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$$

Sumando las diagonales principales:

$$-4 - 2 + 36 = 30$$

Ahora, calculamos las **diagonales secundarias**:

$$\text{Diagonal secundaria 1:} \quad 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

$$\text{Diagonal secundaria 2:} \quad 2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$$

$$\text{Diagonal secundaria 3:} \quad 3 \cdot (-1) \cdot (-1) = 3$$

Sumando las diagonales secundarias:

$$6 + 16 + 3 = 25$$

Finalmente, **restamos la suma de las diagonales secundarias de la suma de las diagonales principales**:

$$\det(A) = 30 - 25 = 5$$

Otro metodo : El determinante de A es:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando cada determinante menor:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot ((-1 \cdot 2) - (4 \cdot 2)) - 3 \cdot ((1 \cdot 2) - (4 \cdot 3)) + (-1) \cdot ((1 \cdot 2) - (-1 \cdot 3)) \\ &= 2 \cdot (-2 - 8) - 3 \cdot (2 - 12) - (2 + 3) \\ &= 2 \cdot (-10) - 3 \cdot (-10) - 5 = -20 + 30 - 5 = 5. \end{aligned}$$

Así, $\det(A) = 5$.

ii. **Paso 2: Determinante de la matriz para x**
Reemplazamos la primera columna de A por el vector de términos independientes $(1, 2, 3)$:

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de A_x es:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando:

$$\begin{aligned} \det(A_x) &= 1 \cdot (-1 \cdot 2 - 4 \cdot 2) - 3 \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 3) - 1 \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3) \\ &= 1 \cdot (-2 - 8) - 3 \cdot (4 - 12) - 1 \cdot (4 + 3) \\ &= (-10) + 3 \cdot 8 - 7 = -10 + 24 - 7 = 7. \end{aligned}$$

Así, $\det(A_x) = 7$.

iii. **Paso 3: Determinante de la matriz para y**
Reemplazamos la segunda columna de A por el vector de términos independientes $(1, 2, 3)$:

$$A_y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

El determinante de A_y es:

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Calculando:

$$\begin{aligned} \det(A_y) &= 2 \cdot (2 \cdot 2 - 4 \cdot 3) - (1 \cdot 2 - 4 \cdot 3) - (1 \cdot 3 - 2 \cdot 3) \\ &= 2 \cdot (4 - 12) - (2 - 12) - (3 - 6) \\ &= 2 \cdot (-8) - (-10) - (-3) = -16 + 10 + 3 = -3. \end{aligned}$$

Así, $\det(A_y) = -3$.

iv. **Paso 4: Determinante de la matriz para z**
Reemplazamos la tercera columna de A por el vector de términos independientes $(1, 2, 3)$:

$$A_z = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El determinante de A_z es:

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando:

$$\begin{aligned}\det(A_z) &= 2\cdot(-1\cdot 3 - 2\cdot 2) - 3\cdot(1\cdot 3 - 2\cdot 3) + 1\cdot(1\cdot 2 - (-1)\cdot 3)\\ &= 2\cdot(-3-4) - 3\cdot(3-6) + 1\cdot(2+3)\\ &= 2\cdot(-7) - 3\cdot(-3) + 5 = -14 + 9 + 5 = 0.\end{aligned}$$

Así, $\det(A_z) = 0$.

v. **Paso 5: Solución**
Usando la regla de Cramer, tenemos:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{7}{5}, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = -\frac{3}{5}, \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{0}{5} = 0.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$x = \frac{7}{5}, \quad y = -\frac{3}{5}, \quad z = 0.$$

(c) **Método de la matriz inversa:**

i. **Paso 1: Expresión matricial del sistema**
Escribimos el sistema en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ii. **Paso 2: Calcular la inversa de la matriz A**
Utilizamos la regla de Cramer o el método de Gauss-Jordan para encontrar la inversa de A. La inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{8}{5} & \frac{11}{5} \\ 2 & \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & -8 & 11 \\ 10 & 7 & -9 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

iii. **Paso 3: Multiplicar A^{-1} por b**
Para encontrar la solución $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$, multiplicamos la matriz inversa por el vector $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -10 & -8 & 11 \\ 10 & 7 & -9 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

iv. **Paso 4: Solución del sistema**
Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$x = \frac{7}{5}, \quad y = -\frac{3}{5}, \quad z = 0.$$