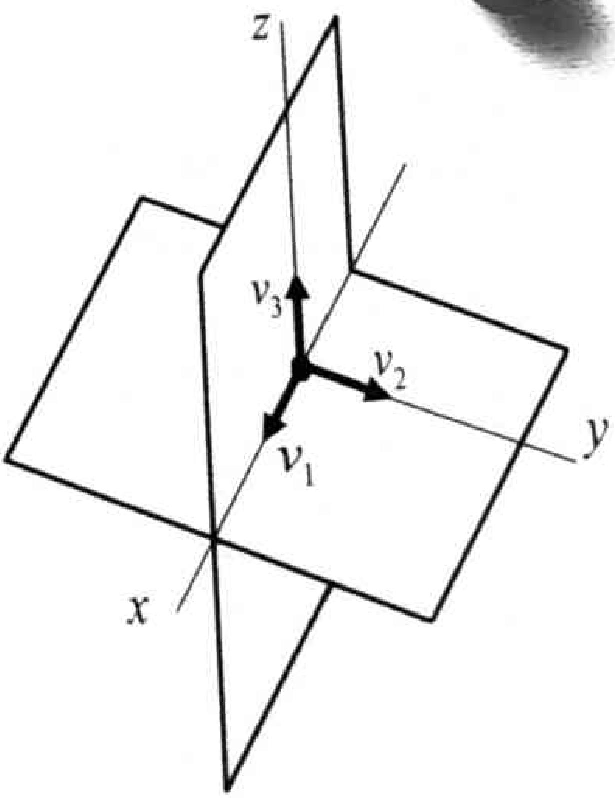
Ejercicios Resueltos de Álgebra Lineal

Volumen 2



Prólogo

Este libro de ejercicios de Álgebra Lineal nace como complemento del libro "Álgebra Lineal y Geometría Vectorial", A. Borobia y B. Estrada, Ed. Sanz y Torres, segunda edición (2019); al que se puede recurrir para consultar los resultados teóricos necesarios. Nos referiremos a él como [BE].

Los contenidos cubren un curso anual de Álgebra Lineal estructurado en dos semestres, a los que podrían ajustarse los dos volúmenes en los que está estructurado el libro. Éste es el caso de las asignaturas Álgebra Lineal I y Álgebra Lineal II del Grado en Matemáticas de la UNED que he impartido durante años. A los estudiantes de este grado va dirigido de forma específica, aunque también serviría para cualquier curso de Álgebra Lineal de estudios de ciencias o ingenierías.

Dirigido a estudiantes de la UNED, que la mayor parte del tiempo estudian solos, se ha pretendido incluir multitud de explicaciones para suplir las que daría un profesor en clase. Estas explicaciones se repiten de manera machacona algunas veces, con el riesgo de aburrir al lector más avanzado, pretendiendo asentar esquemas de razonamiento e incluir todos los pasos para el lector menos instruido.

Cada sección comienza con un resumen de los conceptos y resultados que se van a aplicar, que servirá para repasar el estudio previo necesario. Los primeros ejercicios de una sección son de un nivel más básico, después el nivel es variable. Muchos de estos ejercicios han aparecido en exámenes de Álgebra Lineal I y II del Grado en Matemáticas de la UNED, por lo que son una buena referencia del nivel exigible a los estudiantes.

La metodología de lectura y trabajo con el libro que se aconseja es la siguiente:

- Nunca empezar a hacer ejercicios sin haber estudiado un mínimo de conceptos teóricos con los correspondientes primeros ejemplos resueltos. Esto se puede hacer, por ejemplo, utilizando el libro de referencia antes citado Álgebra Lineal y Geometría Vectorial; u otro libro de Álgebra Lineal.

- En el extremo opuesto, evitar tener un control absoluto de los contenidos teóricos hasta comenzar a hacer ejercicios. El progreso en la comprensión de las matemáticas es siempre un trabajo a dos niveles: estudio teórico y práctica del mayor número posible de ejercicios, pasando de uno a otro según el progreso de cada uno.

- Como regla general, leer con detalle el enunciado de un ejercicio para entender lo que se pide y todas las hipótesis de partida, e intentar resolverlo antes de consultar la solución. Si en un primer intento no encuentra un camino para abordar la resolución, se puede comenzar a leer la propuesta por del libro y parar cuando se tengan pistas suficientes para continuar.

- Al terminar el ejercicio, hacer labor de síntesis recordando los pasos que se han dado en la resolución. Eso ayudará a asentar esquemas de razonamiento y fijar los contenidos teóricos que apoyan cada paso.

Agradecimientos

Quiero agradecer a los profesores Alberto Borobia, Roberto Canogar, Ernesto Martínez y José Antonio Vallejo, la ayuda prestada con la revisión del libro y sus importantes sugerencias.

Contenidos de los dos volúmenes:

Volumen I:

1. Matrices
2. Sistemas lineales
3. Espacios vectoriales
4. Aplicaciones lineales

Volumen II:

5. Formas canónicas de endomorfismos (Matrices de Jordan)
6. Subespacios invariantes y polinomios anuladores
7. Formas bilineales y cuadráticas
8. Espacio vectorial euclídeo
9. Isometrías vectoriales

Beatriz Estrada López

Profesora Titular de Universidad

Departamento de Matemáticas Fundamentales

UNED.

Índice general

Tabla de símbolos

$\mathbb{K}$	Cuerpo.
$\mathbb{R}$	Cuerpo de los números reales.
$\mathbb{C}$	Cuerpo de los números complejos.
$\mathbb{Q}$	Cuerpo de los números racionales.
$\mathbb{K}^n$	Producto cartesiano $\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$.
$\mathbb{K}[x]$	Conjunto de polinomios en la indeterminada x con coeficientes en $\mathbb{K}$.
$\mathbb{K}_n[x]$	Conjunto de polinomios de $\mathbb{K}[x]$ de grado menor o igual que n.
$\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$	Matrices de orden $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$.
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	Matrices de orden n con entradas en $\mathbb{K}$.
a_{ij} o $[A]_{ij}$	Entrada situada en la fila i y en la columna j de la matriz A.
A_{ij}	Submatriz obtenida eliminando la fila i y la columna j de la matriz A.
A^t, $\bar{A}$, A^*	Matriz traspuesta, matriz conjugada y matriz traspuesta conjugada de A.
I_n	Matriz identidad de orden n.
0_n	Matriz nula de orden n (o simplemente 0 si no se produce ambigüedad).
$A \sim_f B$	La matriz A es equivalente por filas a la matriz B.
$A \sim_c B$	La matriz A es equivalente por columnas a la matriz B.
$A \sim B$	La matriz A es equivalente a la matriz B.
$H_f(A), H_c(A)$	Formas de Hermite por filas y por columnas de la matriz A.
$\mathrm{rg}(A)$	Rango de la matriz A.
$\mathrm{rg}\{v_1, \ldots, v_n\}$	Rango del conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
$\det(A)$	Determinante de la matriz A.
$\mathrm{Adj}(A)$	Matriz adjunta de la matriz A.
$\Delta_k(A)$	Menor principal de orden k de la matriz A.
α_{ij}	Adjunto de la entrada a_{ij} de la matriz A.
δ_{ij}	Delta de Kronecker. $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
$AX = B$	Representación matricial de un sistema lineal.
V	Espacio vectorial.
V^*	Espacio dual del espacio vectorial V.
$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$	Base de un espacio vectorial de dimensión n.
$L(v_1, \ldots, v_n)$	Subespacio vectorial generado por los vectores $v_1, \ldots, v_n$.
$A - B$	El conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.
$A \subseteq B$	El conjunto A está contenido en el conjunto B pudiendo ser $A = B$.
$A \subsetneq B$	El conjunto A está contenido en el conjunto B siendo $A \neq B$.
$U \cap W$	Espacio vectorial intersección de los subespacios vectoriales U y W.
$U + W$	Espacio vectorial suma de los subespacios vectoriales U y W.
$U \oplus W$	Espacio vectorial suma directa de los subespacios vectoriales U y W.
$U \overset{\perp}{\oplus} W$	Espacio vectorial suma directa ortogonal de los subespacios vectoriales U y W.
V/U	Espacio vectorial cociente del espacio vectorial V módulo el subespacio U.
$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}$	Matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.
$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}\{v_1 \vert \cdots \vert v_n\}$	Matriz de coordenadas de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ respecto de la base $\mathcal{B}$ por columnas.
$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}(f)$	Matriz de la aplicación lineal $f : U \to V$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ de U y $\mathcal{B}'$ de V.
$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$	Matriz del endomorfismo $f : V \to V$ respecto de la base $\mathcal{B}$ de V.
$\mathrm{Ker}(f)$	Subespacio núcleo de la aplicación lineal f.
$\mathrm{Im}(f)$	Subespacio imagen de la aplicación lineal f.
$\mathrm{rg}(f)$	Rango de la aplicación lineal f.
$f\vert_U$	Aplicación restricción de f al subespacio vectorial U.

$\mathcal{L}(U,V)$	Espacio vectorial de las aplicaciones lineales $f : U \to V$.
$\mathcal{L}(V)$	Espacio vectorial de los endomorfismos del espacio vectorial V.
$\mathcal{GL}(V)$	Grupo general lineal formado por los automorfismos del espacio vectorial V.
$GL(n,\mathbb{K})$	Grupo de matrices regulares de orden n con entradas en $\mathbb{K}$.
λ	Autovalor de una aplicación lineal o de una matriz.
$p_f(\lambda)$	Polinomio característico del endomorfismo f.
$m_f(\lambda)$	Polinomio mínimo del endomorfismo f.
V_λ	Subespacio propio asociado al autovalor λ.
$K^i(\lambda)$	Subespacio (propio) generalizado $i-$ésimo asociado al autovalor λ.
$M(\lambda)$	Subespacio máximo asociado al autovalor λ.
J, $J_\mathbb{R}$	Matriz de Jordan y matriz de Jordan real.
$\mathcal{BL}(V)$	Espacio vectorial formado por las formas bilineales del espacio vectorial V.
Φ	Forma cuadrática.
$\mathfrak{M}_\mathcal{B}(\Phi)$	Matriz de la forma cuadrática Φ respecto de la base $\mathcal{B}$.
$\mathrm{sg}(\Phi)$, $\mathrm{sg}(f)$	Signatura de la forma cuadrática Φ y signatura de la forma bilineal f.
U^c	Subespacio conjugado del subespacio vectorial U.
$(V,\langle\,,\rangle)$	Espacio vectorial euclídeo.
$\langle u,v\rangle$	Producto escalar de u por v.
$\lVert v\rVert$	Norma del vector v.
$G_\mathcal{B}$	Matriz de un producto escalar (o matriz de Gram) respecto de la base $\mathcal{B}$.
$u \perp v$	El vector u es ortogonal al vector v.
$U^\perp$	Subespacio ortogonal del subespacio vectorial U
$\mathcal{O}(V)$	Grupo ortogonal del espacio vectorial euclídeo V.
$u \wedge v$	Producto vectorial de los vectores u por v
$[u,v,w]$	Producto mixto de los vectores u, v y w
$\measuredangle(u,v)$	Ángulo entre los vectores u y v.

Capítulo 5

Formas canónicas de endomorfismos

La matriz canónica de un endomorfismo es una matriz que, por su simplicidad, se elige como representante de la clase de equivalencia lineal a la que pertenece dicho endomorfismo. De modo que, dos endomorfismos son linealmente equivalentes si y sólo si existen bases respecto de las cuales tienen la misma matriz canónica. Desde un punto de vista puramente matricial, dos matrices de orden n son semejantes, si y sólo si, son semejantes a la misma matriz canónica. Tenemos distintas formas canónicas según que los endomorfismos, o las matrices, sean complejos o reales. Todo endomorfismo complejo admite una forma canónica de Jordan y todo endomorfismo real admite, o bien una forma canónica de Jordan, o una forma de Jordan real.

5.1. Autovalores y autovectores. Diagonalización.

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V de dimensión n. Un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$[1] diremos que es un **autovalor o valor propio** de f si existe $v \in V$, no nulo, tal que $f(v) = \lambda v$. Se denomina **espectro** de f al conjunto formado por todos los autovalores de f.

Un vector $v \in V$ es un **autovector o vector propio** asociado a un autovalor λ de f si y sólo si $f(v) = \lambda v$. Al conjunto formado por todos los autovectores asociados a un autovalor λ se le denomina **subespacio propio** asociado a λ y lo denotamos por $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$. Se cumple que $V_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$ y $\dim V_\lambda = n - \operatorname{rg}(f - \lambda \operatorname{Id})$. Los autovalores de f son las raíces del **polinomio característico** de f, que denotamos por $p_f(\lambda)$ y que es igual a:

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n), \text{ con } A \text{ la matriz de } f \text{ respecto de cualquier base } \mathcal{B}.$$

La **multiplicidad algebraica** del autovalor λ_i es su multiplicidad como raíz del polinomio característico, y la denotaremos por a_i; y la **multiplicidad geométrica** es la dimensión del

[1] El cuerpo $\mathbb{K}$ es el de los números reales, $\mathbb{R}$, o el de los números complejos, $\mathbb{C}$.

subespacio propio asociado V_{λ_i}, y la denotaremos por g_i. Siempre se cumple $1 \leq g_i \leq a_i$. Además, unas ecuaciones implícitas de V_{λ_i}, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen a partir del sistema lineal $(A - \lambda I_n)X = 0$ y $g_i = \dim V_{\lambda_i} = n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I_n)$.

Un endomorfismo f es **diagonalizable** si existe una base de V formada por autovectores de f. La matriz de f respecto de dicha base es una matriz diagonal. Si $\mathcal{B}$ es una base cualquiera de V y $\mathcal{B}' = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de autovectores asociados a los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, no necesariamente distintos, entonces:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} \tag{5.1}$$

Las matrices $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ y $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ son semejantes. Se llama matriz de paso, P, a la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$, la base de autovectores, a $\mathcal{B}$. Es decir $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$. La relación de semejanza entre matrices del endomorfismo en distintas bases es $D = P^{-1}AP$.

Teorema de caracterización de los endomorfismos diagonalizables: ([BE], Teorema 5.13) Un endomorfismo f de un $\mathbb{K}$−espacio vectorial V de dimensión n es diagonalizable, si y sólo si, tiene n autovalores (contados con su multiplicidad) y para todo autovalor se cumple que la multiplicidad algebraica y geométrica coinciden.

Una **matriz** cuadrada A se dice que es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal D, es decir si existe una matriz regular P tal que $D = P^{-1}AP$. Como definición alternativa podríamos decir que, una matriz cuadrada $A \in \mathfrak{M}_n\,\mathbb{K}$ es diagonalizable, si y sólo si, el endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ cuya matriz en cierta base es A es diagonalizable.

5.1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b-1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 2-b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{con } b \in \mathbb{R},$$

compruebe que 2 es un autovalor de A para todo b y estudie en qué casos 3 es un autovalor.

Solución: La matriz A tiene a 2 como autovalor si y sólo si $\det(A - 2I_3) = 0$. Calculamos el determinante

$$\det(A - 2I_3) = \det\begin{pmatrix} b-3 & 0 & 0 \\ -1 & b-2 & 2-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

El determinante es 0, para todo b, ya que la matriz tiene una fila nula. Entonces, 2 es un autovalor de A para todo b.

El número $\lambda = 3$ es autovalor de A si y sólo $\det(A - 3I_3) = 0$. Calculamos el determinante

$$\det(A - 3I_3) = \det\begin{pmatrix} b-4 & 0 & 0 \\ -1 & b-3 & 2-b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} b-4 & 0 \\ -1 & b-3 \end{pmatrix} = -(b-4)(b-3)$$

Entonces, $\lambda = 3$ es autovalor de A si y sólo si $b = 4$ o $b = 3$. $\square$

5.2. En cada caso, determine los autovalores y subespacios propios del endomorfismo f, de un espacio vectorial real, cuya matriz respecto de alguna base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución: Al ser un endomorfismo real, los autovalores son las raíces reales del polinomio característico.

(a) El polinomio característico de f es

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$p_f(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda + 2$$

Los autovalores de f, o de A, son las raíces reales de este polinomio, es decir las soluciones de la ecuación característica $\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0$. Por tanto, f tiene dos autovalores

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

Ambos autovalores son simples, es decir tienen multiplicidad algebraica 1.

Subespacios propios:

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$

$$V_1 = \{v : f(v) = v\} = \{v : f(v) - v = \mathbf{0}\} = \{v : f(v) - \mathrm{Id}(v) = \mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtiene del sistema lineal $(A - I_2)X = 0$:

$$\begin{aligned} V_1 = &\ \left\{(x_1, x_2) :\ (A - I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = &\ \left\{(x_1, x_2) :\ \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = &\ \{(x_1, x_2) :\ -3x_1 + 3x_2 = 0,\ -4x_1 + 4x_2 = 0\ \} \end{aligned}$$

Las ecuaciones obtenidas son linealmente dependientes, por lo que no son unas ecuaciones implícitas de V_1. Nos quedamos con una de ellas y la simplificamos obteniendo una ecuación implícita del subespacio propio

$$V_1 \equiv \{-x_1 + x_2 = 0\}$$

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$

$$V_2 = \{v : f(v) = 2v\} = \{v : f(v) - 2v = \mathbf{0}\} = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtiene del sistema lineal $(A-2I_2)X=0$:

$$\begin{aligned} V_2 &= \left\{(x_1,x_2):\ (A-2I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2):\ \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \{(x_1,x_2):\ -4x_1+3x_2=0,\ -4x_1+3x_2=0\} \end{aligned}$$

Por tanto, una ecuación implícita del subespacio propio asociado es

$$V_2 \equiv \{-4x_1+3x_2=0\}$$

(b) Calculamos el polinomio característico de f con matriz $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

$$p_f(\lambda)=\det(B-\lambda I_2)=\det\begin{pmatrix} -4-\lambda & 3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$$

El polinomio característico tiene una raíz doble $\lambda=-1$, por lo que f tiene un único autovalor $\lambda=-1$ con multiplicidad algebraica 2.

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda=-1$ es

$$V_{-1}=\{v:\ f(v)=-v\}=\{v:\ f(v)+v=\mathbf{0}\}=\mathrm{Ker}(f+\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtiene del sistema lineal $(B+I_2)X=0$:

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \left\{(x_1,x_2):\ (B+I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{(x_1,x_2):\ \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ &= \{(x_1,x_2):\ -3x_1+3x_2=0,\ -3x_1+3x_2=0\} \end{aligned}$$

Por tanto, una ecuación implícita del subespacio propio es

$$V_{-1} \equiv \{-x_1+x_2=0\}$$

(c) Calculamos el polinomio característico de f con matriz $C=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$p_f(\lambda)=\det(C-\lambda I_2)=\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2+1$$

El polinomio característico no tiene ninguna raíz real, por lo que el endomorfismo f no tiene ningún autovalor. □

5.3. En cada caso, determine los autovalores y subespacios propios del endomorfismo f, de un espacio vectorial complejo, cuya matriz respecto de alguna base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } E = \begin{pmatrix} 1+2i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución: Al ser un endomorfismo complejo, los autovalores son las raíces complejas del polinomio característico.

(a) El polinomio característico de f es

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 3 \\ -4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

Se trata del mismo polinomio que el caso (a) del ejercicio anterior. Por tanto, f tiene los mismos dos autovalores simples:

$$\lambda_1 = 1 \text{ y } \lambda_2 = 2$$

Los subespacios propios, que se calculan utilizando la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$. Tienen las mismas ecuaciones que las obtenidas en el ejercicio anterior:

$$V_1 \equiv \{-x_1 + x_2 = 0\} \text{ y } V_2 \equiv \{-4x_1 + 3x_2 = 0\}$$

La diferencia es que en este caso las coordenadas (x_1, x_2) de los vectores del espacio vectorial toman valores complejos, $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$.

(b) Calculamos el polinomio característico de f con matriz $E = \begin{pmatrix} 1+2i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \det(E - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 1+2i-\lambda & i \\ -2i & 1-i-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1+2i-\lambda)(1-i-\lambda) - (-2i^2) \\ &= \lambda^2 - (2+i)\lambda + (1+i) \end{aligned}$$

Las raíces complejas de este polinomio se calculan con la fórmula general de la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} \lambda = & \frac{2+i \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4(1+i)}}{2} = \frac{2+i \pm \sqrt{3+4i-4(1+i)}}{2} \\ = & \frac{2+i \pm \sqrt{-1}}{2} = \frac{2+i \pm i}{2} \end{aligned}$$

Luego las raíces de $p_f(\lambda)$ son los dos autovalores de f:

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 1 + i$ es

$$V_{1+i} = \operatorname{Ker}(f - (1+i)\operatorname{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(E - (1+i)I_2)X = 0$:

$$\begin{aligned}
V_{1+i} &= \left\{(x_1, x_2) :\ (E - (1+i)I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) :\ \begin{pmatrix} 1+2i-(1+i) & i \\ -2i & 1-i-(1+i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) :\ \begin{pmatrix} i & i \\ -2i & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \{(x_1, x_2) :\ ix_1 + ix_2 = 0,\ -2ix_1 - 2ix_2 = 0\}
\end{aligned}$$

Las dos ecuaciones son proporcionales, luego podemos eliminar una y obtener una ecuación implícita del subespacio propio respecto de $\mathcal{B}$: $ix_1 + ix_2 = 0$. Simplificando la ecuación tenemos

$$V_{1+i} \equiv \{x_1 + x_2 = 0\}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = 1$ es $V_1 = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$. Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(E - I_2)X = 0$.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \left\{(x_1, x_2) :\ (E - I_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) :\ \begin{pmatrix} 2i & i \\ -2i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \{(x_1, x_2) :\ 2ix_1 + ix_2 = 0,\ -2ix_1 - ix_2 = 0\}
\end{aligned}$$

Las dos ecuaciones son proporcionales, luego nos quedamos con una y la simplificamos para determinar una ecuación implícita del subespacio

$$V_1 \equiv \{2x_1 + x_2 = 0\}$$

(c) Calculamos el polinomio característico de f con matriz $C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$p_f(\lambda) = \det(C - \lambda I_2) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -5 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

que tiene dos raíces complejas que son los autovalores de f:

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = i$ es

$$V_i = \operatorname{Ker}(f - i\,\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(C - iI_2)X = 0$:

$$\begin{aligned} V_i = &\left\{(x_1, x_2) : (C - iI_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = &\left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -3-i & -5 \\ 2 & 3-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Las dos filas de la matriz son proporcionales y por tanto generan ecuaciones equivalentes. Esto lo sabemos ya que i es autovalor de C si y sólo si $\det(C - iI_2) = 0$. Las propiedades básicas del determinante nos permiten afirmar que, al ser igual a 0, las filas de la matriz son linealmente dependientes. Nos quedamos con una y obtenemos una ecuación implícita del subespacio propio respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$V_i \equiv \{2x_1 + (3 - i)x_2 = 0\}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -i$ es

$$V_{-i} = \operatorname{Ker}(f + i\,\mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio, respecto de $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(C + iI_2)X = 0$:

$$\begin{aligned} V_{-i} = &\left\{(x_1, x_2) : (C + iI_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\ = &\left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -3+i & -5 \\ 2 & 3+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

Las dos filas de la matriz son proporcionales y, por tanto, generan ecuaciones equivalentes. Nos quedamos con una y obtenemos una ecuación implícita del subespacio propio respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$V_{-i} \equiv \{2x_1 + (3 + i)x_2 = 0\} \quad \square$$

5.4. Halle los autovalores y subespacios propios asociados del endomorfismo de $\mathbb{K}_3[x]$ que consiste en la derivación de polinomios.

Solución: Sea $f : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_3[x]$ definido por

$$f(p(x)) = p'(x) \quad \text{para todo} \quad p(x) \in \mathbb{K}_3[x]$$

Tenemos que determinar una matriz de f para calcular el polinomio característico. Consideramos la base canónica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ y calculamos las imágenes por f de los vectores de la base

$$f(1) = (1)' = 0, \; f(x) = x' = 1, \; f(x^2) = (x^2)' = 2x, \; f(x^3) = (x^3)' = 3x^2$$

Las coordenadas de estos vectores respecto de $\mathcal{B}$ son

$$f(1) = (0,0,0,0)_{\mathcal{B}}, \; f(x) = (1,0,0,0)_{\mathcal{B}}, \; f(x^2) = (0,2,0,0)_{\mathcal{B}}, \; f(x^3) = (0,0,3,0)_{\mathcal{B}}$$

Entonces, la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al ser la matriz triangular, los autovalores son las entradas de la diagonal principal, por lo que f tiene un único autovalor $\lambda = 0$ de multiplicidad algebraica 4.

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 0$ es

$$V_0 = \mathrm{Ker}(f - 0\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f)$$

Utilizando coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ se obtiene que

$$V_0 = \left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}} : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de donde se tienen unas ecuaciones implícitas de V_0

$$V_0 = \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$$

Por tanto, los polinomios de V_0 son de la forma

$$p(x) = x_0 + x_1 x + x_2 x^2 + x_3 x^3 \quad \text{con} \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

Es decir, V_0 es el subespacio de $\mathbb{K}_3[x]$ formado por los polinomios de grado 0, o lo que es lo mismo $V_0 = \mathbb{K}$. $\square$

5.5. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores, no necesariamente distintos, de una matriz A de orden n diagonalizable, entonces se cumple que

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \text{ y } \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Solución: Sea A una matriz de orden n diagonalizable y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sus autovalores, no necesariamente distintos, contados con su multiplicidad. Entonces, existe una matriz regular P tal que

$$P^{-1}AP = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

A continuación demostramos que la traza y el determinante son invariantes por semejanza, de lo que se deduce que

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \text{ y } \det(A) = \det(D) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Vamos a demostrarlo. Sean A y B dos matrices semejantes y P una matriz regular tal que $B = P^{-1}AP$, entonces

$$\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}((P^{-1}A)(P)) = \operatorname{tr}((P)(P^{-1}A)) = \operatorname{tr}(I_nA) = \operatorname{tr}(A)$$

donde hemos utilizado la propiedad básica de la traza respecto del producto de matrices: $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Esta misma propiedad la tiene el determinante: $\det(AB) = \det(BA)$, por lo que

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det((P^{-1}A)(P)) = \det((P)(P^{-1}A)) = \det(I_nA) = \det(A)$$

como queríamos demostrar. □

5.6. Demuestre que si f es un endomorfismo de V y $\dim(\operatorname{Im}(f)) = k$, entonces f tiene como mucho $k+1$ autovalores distintos.

Solución: Vamos a utilizar la propiedad siguiente: si u y v son autovectores no nulos asociados a autovalores distintos, entonces son linealmente independientes. Supongamos que f tiene p autovalores distintos y no nulos con autovectores asociados $v_1, \ldots, v_p$, todos no nulos, entonces los vectores $v_1, \ldots, v_p$ son linealmente independientes.

Las imágenes de estos autovectores:

$$f(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, f(v_p) = \lambda_p v_p$$

son también linealmente independientes, y son vectores pertenecientes al subespacio $\operatorname{Im}(f)$. Entonces, dado que $L(f(v_1), \ldots, f(v_p)) \subseteq \operatorname{Im}(f)$ se tiene que

$$p = \dim L(f(v_1), \ldots, f(v_p)) \leq \dim(\operatorname{Im}(f)) = k$$

Luego, el número de autovalores distintos y no nulos de f es como mucho k. Eventualmente, también podría ser 0 un autovalor de f, lo que no aumentaría la dimensión del subespacio $\operatorname{Im}(f)$. Por tanto, f tiene como mucho $k+1$ autovalores distintos. □

5.7. Demuestre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

(a) $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de una matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ si y sólo si $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

(b) Si A es semejante a B, entonces A^k es semejante a B^k para todo $k \geq 1$.

(c) Si A^k es semejante a B^k para algún $k \geq 2$, entonces A es semejante a B.

(d) $\lambda = 0$ es autovalor de un endomorfismo f si y sólo si f no es inyectivo.

(e) $\lambda = 0$ es autovalor de una matriz A si y sólo si $\det(A) = 0$.

(f) Si A es una matriz real no nula diagonalizable y $\text{tr}(A) = 0$, entonces necesariamente A tiene autovalores positivos y negativos.

(g) Para todo $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, y toda matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ se cumple que

$$\lambda \text{ es autovalor de } A \text{ si y sólo si } a\,\lambda \text{ es autovalor de } aA.$$

Solución:

(a) Verdadera. Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. El escalar λ es autovalor de A si y sólo si es raíz del polinomio característico de A es decir $p_A(\lambda) = 0$, lo que equivale a

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Es decir,

$$\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$$

Esta condición sobre el rango de $A - \lambda I_n$ equivale a que el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I_n)X = 0$ tenga infinitas soluciones. El conjunto de soluciones del sistema determina las coordenadas de los autovectores asociados al autovalor λ.

(b) Verdadera. Si A es semejante a B, existe una matriz regular P tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces,

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \overset{k-1}{\cdots} (P^{-1}AP) = P^{-1}(APP^{-1})^{k-1}AP$$

Simplificando cada producto $PP^{-1} = I_n$ se tiene la igualdad $B^k = P^{-1}A^kP$. Luego A^k es semejante a B^k para todo $k \geq 1$.

(c) Falsa. Determinamos un contraejemplo. Es decir, dos matrices A y B tales que A^k sea semejante a B^k para algún $k \geq 2$, pero A no sea semejante a B.

Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

verifican que $A^3 = B^3 = 0_3$, la matriz nula de orden 3, por lo que A^3 y B^3 son semejantes. Sin embargo, las matrices A y B no son semejantes pues tienen distinto rango. Tampoco son semejantes las matrices A^2 y B^2 ya que

$$A^2 = B \quad \text{y} \quad B^2 = 0_3$$

y ninguna matriz no nula es semejante a la matriz nula del mismo orden.

(d) Verdadera. Un endomorfismo f no es inyectivo si y sólo si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$. Teniendo en cuenta que si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces $\mathrm{Ker}(f) = V_0$, el subespacio propio asociado al autovalor 0; tenemos el resultado deseado.

(e) Verdadera. $\lambda = 0$ es autovalor de A si y sólo si es solución de la ecuación característica $\det(A - \lambda I_n) = 0$, lo que equivale a $\det(A) = 0$.

(f) Verdadera. Si A es una matriz real no nula de orden n diagonalizable, entonces es semejante a una matriz diagonal

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ números reales no necesariamente distintos (los autovalores de A repetidos según sus multiplicidades) y no todos nulos. Las matrices A y D, por ser semejantes, tienen la misma traza por lo que

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$$

Entonces, necesariamente A tiene autovalores positivos y negativos.

(g) Verdadera. Sean $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, y $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A si y sólo si es raíz de su polinomio característico, lo que equivale a $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Ahora bien, como

$$\det(A - \lambda I_n) = \frac{1}{a^n} \det(a(A - \lambda I_n)) = \frac{1}{a^n} \det(aA - a\lambda I_n)$$

entonces

$$\det(A - \lambda I_n) = 0 \ \text{ si y sólo si } \ \det(aA - a\lambda I_n) = 0$$

La segunda igualdad significa que $a\lambda$ es autovalor de la matriz aA. □

5.8. Demuestre que toda matriz estrictamente triangular no nula no es diagonalizable.

Solución: Una matriz estrictamente triangular (superior o inferior) es una matriz triangular (superior o inferior) tal que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a 0.

Si A es una matriz de orden n estrictamente triangular, entonces $\lambda = 0$ es el único autovalor de A de multiplicidad algebraica $a = n$. La multiplicidad geométrica de este autovalor es

$$g = \dim V_0 = n - \mathrm{rg}(A - 0I_n) = n - \mathrm{rg}(A)$$

Si A es una matriz no nula, entonces $\mathrm{rg}(A) \neq 0$, y así $g = n - \mathrm{rg}(A) < n = a$.

Por tanto, $g \neq a$, y como no coinciden la multiplicidad algebraica y geométrica del autovalor, la matriz no es diagonalizable. □

5.9. Demuestre que si f es un endomorfismo de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V de dimensión n y λ_1, λ_2 son dos autovalores distintos de f tales que

$$\dim(V_{\lambda_1}) = k \text{ y } \dim(V_{\lambda_2}) = n - k$$

entonces f es diagonalizable.

Solución: En primer lugar, vamos a demostrar que f no tiene más autovalores.

Para el autovalor λ_1 tenemos que su multiplicidad geométrica es $g_1 = \dim(V_{\lambda_1}) = k$, por lo que la multiplicidad algebraica es $a_1 \geq g_1 = k$.

Para el autovalor λ_2 tenemos que su multiplicidad geométrica es $g_2 = \dim(V_{\lambda_2}) = n - k$, por lo que la multiplicidad algebraica es $a_2 \geq g_2 = n - k$.

Como la suma de las multiplicidades algebraicas no puede superar el grado del polinomio característico de f, que coincide con la dimensión del espacio vectorial, entonces

$$n = \dim(V) \geq a_1 + a_2 \geq k + n - k = n$$

Luego, $n = a_1 + a_2$ y por tanto el polinomio característico no tiene más raíces. Es decir, f no tiene más autovalores. Además, las relaciones

$$a_1 \geq g_1 = k,\ a_2 \geq g_2 = n - k,\ a_1 + a_2 = n$$

implican que $a_1 = g_1 = k$, $a_2 = g_2 = n - k$. Como coinciden las multiplicidades algebraicas y geométricas, entonces f es diagonalizable. Podemos añadir que, como $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{\mathbf{0}\}$, entonces los subespacios propios son suplementarios en V:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \quad \square$$

5.10. Considere las matrices A, B, C y E de los Ejercicios 5.2 y 5.3. En cada caso, determine si la matriz es diagonalizable en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ o en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ y, en los casos afirmativos, calcule la matriz diagonal D y la matriz de paso P.

Solución:

- Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^2$ cuya matriz en a base canónica es $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

  El endomorfismo tiene dos autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$, ambos son simples, y por tanto es diagonalizable tanto en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ como $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. La matriz diagonal semejante a A es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$$

  siendo $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ una base de autovectores, tales que $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$.

Calculamos los autovectores. Para ello, consideramos las ecuaciones implícitas de los subespacios propios que se calcularon previamente:

$$V_1 \equiv \{-x_1 + x_2 = 0\} \ \text{ y } \ V_2 \equiv \{-4x_1 + 3x_2 = 0\}$$

por lo que podemos tomar $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (3,4)$.
La matriz de paso, P, tal que $P^{-1}AP = D$, es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. es decir, $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Para comprobar que se ha calculado bien la base, verificamos la relación de semejanza $D = P^{-1}AP$, o la equivalente $PD = AP$. Con esta última condición, evitamos calcular la matriz inversa de P.

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^2$ cuya matriz en a base canónica es $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = B$.

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

El endomorfismo tiene un único autovalor $\lambda = -1$ con multiplicidad algebraica $a = 2$, y será diagonalizable si y sólo si la multiplicidad geométrica del autovalor, g, es igual a 2. El subespacio propio asociado es $V_{-1} \equiv \{-x_1 + x_2 = 0\}$, por lo que

$$g = \dim V_{-1} = 1 < 2$$

Entonces, B no es diagonalizable ni en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ ni en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

- Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^2$ cuya matriz en a base canónica es $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = C$.

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico, $\lambda^2 + 1$, no tiene ninguna raíz real, por lo que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ la matriz C no tiene ningún autovalor. Es decir, C no es diagonalizable como matriz real.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, las raíces del polinomio son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. La matriz tiene dos autovalores distintos, simples, por lo que sí es diagonalizable como matriz compleja. Cuando los autovalores son simples, o de multiplicidad algebraica 1, siempre se cumple $g_i = a_i$ ya que $1 \leq g_i \leq a_i = 1$.
La matriz diagonal compleja semejante a C es

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$$

siendo $\mathcal{B}'$ una base de autovectores. Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = i$ pertenecen al subespacio propio de ecuaciones $V_i \equiv \{2x_1 + (3-i)x_2 = 0\}$, por lo que podemos tomar como autovector $v_1 = (3-i, -2)$.

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -i$ tiene ecuación implícita $V_{-i} \equiv \{2x_1 + (3+i)x_2 = 0\}$ por lo que podemos tomar como autovector

$$v_2 = (3+i, -2)$$

La matriz de paso P, tal que $D = P^{-1}CP$, es la matriz de cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, y tiene por columnas las coordenadas de los autovectores calculados:

$$P = \begin{pmatrix} 3-i & 3+i \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que hemos hecho bien los cálculos, es decir, que se cumple la relación de semejanza $D = P^{-1}CP$, o la condición equivalente $PD = CP$.

$$\begin{aligned} PD &= \begin{pmatrix} 3-i & 3+i \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i & 1-3i \\ -2i & 2i \end{pmatrix} \\ CP &= \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3-i & 3+i \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3i & 1-3i \\ -2i & 2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Sea f el endomorfismo de $\mathbb{C}^2$ cuya matriz en a base canónica es

$$E = \begin{pmatrix} 1+2i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$

Tiene dos autovalores distintos $\lambda_1 = 1+i$ y $\lambda_2 = 1$ simples, por lo que sí es diagonalizable. La matriz diagonal compleja semejante a E es

$$D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$$

donde $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ es una base de autovectores, tales que $v_1 \in V_{1+i}$ y $v_2 \in V_1$. Los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1+i$ pertenecen al subespacio propio de ecuaciones $V_{1+i} \equiv \{x_1 + x_2 = 0\}$, por lo que podemos tomar como autovector

$$v_1 = (1, -1)$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = 1$ tiene ecuación implícita $V_1 \equiv \{2x_1 + x_2 = 0\}$ por lo que podemos tomar como autovector

$$v_2 = (1, -2)$$

La matriz P tal que $D = P^{-1}EP$, es la matriz de cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que hemos hecho bien los cálculos, es decir, que se cumple la relación de semejanza $D = P^{-1}EP$, o la condición equivalente $PD = EP$.

$$\begin{aligned} EP &= \begin{pmatrix} 1+2i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1-i & -2 \end{pmatrix} \\ PD &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1-i & -2 \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

5.11. Determine los valores del parámetro $b \in \mathbb{K}$ para los cuales la siguiente matriz es diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 3-b & b-1 & b-2 \\ 1-b & b+1 & b-2 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

En los casos diagonalizables determine una matriz diagonal D y una matriz regular P tales que $D = P^{-1}AP$.

Solución: Comenzamos calculando los autovalores, para lo cual, determinamos el polinomio característico de A.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 3-b-\lambda & b-1 & b-2 \\ 1-b & b+1-\lambda & b-2 \\ 0 & 0 & b-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la tercera fila tenemos

$$p_A(\lambda) = (b-\lambda)\det \begin{pmatrix} 3-b-\lambda & b-1 \\ 1-b & b+1-\lambda \end{pmatrix} = (b-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (b-\lambda)(\lambda - 2)^2$$

Por tanto, los autovalores de A y sus multiplicidades algebraicas según los valores de b son

- Si $b = 2$, entonces $\lambda = 2$ es el único autovalor con multiplicidad algebraica $a = 3$.
- Si $b \neq 2$, entonces los autovalores son

$$\lambda_1 = 2,\ a_1 = 2 \text{ y } \lambda_2 = b,\ a_2 = 1$$

Veamos en cada caso si la matriz es diagonalizable.

- Si $b = 2$, entonces f es diagonalizable si y sólo si la multiplicidad geométrica, g, del único autovalor, $\lambda = 2$, coincide con la multiplicidad algebraica $a = 3$.

$$g = \dim V_2 = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq a$$

  Por tanto f no es diagonalizable si $b = 2$.

- Si $b \neq 2$, entonces tenemos que comprobar si la multiplicidad geométrica del único autovalor múltiple coincide con su multiplicidad algebraica. Es decir, si $g_1 = a_1 = 2$.

$$g_1 = \dim V_2 = 3 - \operatorname{rg}(A - 2I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1-b & b-1 & b-2 \\ 1-b & b-1 & b-2 \\ 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

  Por tanto, $g_1 = 2$ si y sólo si $\operatorname{rg}(A - 2I_3) = 1$, es decir si $b = 1$.

Finalmente, podemos concluir que f es diagonalizable si y sólo si $b = 1$.

A continuación, suponiendo $b = 1$, vamos a determinar la matriz diagonal D y la matriz regular P tales que $D = P^{-1}AP$. Si $b = 1$, la matriz y los autovalores son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \lambda_1 = 2,\ g_1 = 2;\ \lambda_2 = 1, g_2 = 1$$

por lo que

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos suponer que $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$ con $\mathcal{B}$ la base canónica; y $D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ es la matriz de f respecto de una base $\mathcal{B}'$ de autovectores. En tal caso, $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Además, si $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, entonces u_1 y u_2 son autovectores asociados al autovalor 2, y u_3 autovector asociado al autovalor 1.

Ecuaciones del subespacio propio V_2 asociado a $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} V_2 &= \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = \{(x_2, x_2, x_3) : (A - 2I_3)X = 0\} \\ &= \left\{ (x_2, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

de donde $V_2 \equiv \{x_3 = 0\}$. Tomamos dos vectores linealmente independientes de este subespacio. Nos sirven

$$u_1 = (1, 0, 0) \ \text{ y } \ u_2 = (0, 1, 0)$$

Los dos primeros vectores de la base canónica $\mathcal{B}$.

Ecuaciones del subespacio propio V_1 asociado a $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned} V_1 &= \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{(x_2, x_2, x_3) : (A - I_3)X = 0\} \\ &= \left\{ (x_2, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

de donde $V_1 \equiv \{x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$. Tomamos un vector de este subespacio para completar la base $\mathcal{B}'$. Nos sirve

$$u_3 = (1, 1, 1)$$

La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}' = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ es D y la matriz P es

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La relación de semejanza entre D y A se corresponde con la relación (5.1) entre las matrices de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$$

Finalmente, comprobamos que hemos hecho bien los cálculos verificando que se cumple la igualdad $D = P^{-1}AP$, o la condición equivalente $PD = AP$. Esta segunda igualdad evita que tengamos que calcular la matriz inversa de P.

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

5.12. Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(a) Determine si existe alguna matriz diagonal real D que sea semejante a B. En caso afirmativo calcule D y P tales que $D = P^{-1}BP$.

(b) Determine si existe alguna matriz diagonal compleja D que sea semejante a B. En caso afirmativo calcule D y P tales que $D = P^{-1}BP$.

Solución: Comenzamos calculando el polinomio característico:

$$p_B(\lambda) \quad = \det(B - \lambda\, I_3) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3}-\lambda \end{pmatrix}$$

Para evitar la complejidad que aportan los coeficientes racionales en el cálculo, podemos utilizar la siguiente propiedad que se demostró en el Ejercicio 5.7.:

$$\lambda \text{ es autovalor de } B \text{ si y sólo si } 3\,\lambda \text{ es autovalor de } 3B$$

Calculamos los autovalores de la matriz $3B$

$$p_{3B}(\lambda) = \det(3B - \lambda\, I_3) = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -3 \\ 2 & -1-\lambda & -4 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollamos el determinante por la primera fila

$$\begin{aligned} p_{3B}(\lambda) &= (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1-\lambda \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2+15) - 3(6-2\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2+15) - 6(3-\lambda) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2+15-6) = (3-\lambda)(\lambda^2+9) \end{aligned}$$

Nótese que intentamos desarrollar el determinante de modo que obtengamos el resultado factorizado lo máximo posible. Eso facilitará el cálculo de las raíces. Las raíces de este polinomio son:

$$\mu_1 = 3,\ \mu_2 = 3i,\ \mu_3 = -3i$$

por lo que las raíces de polinomio característico de B, $p_B(\lambda)$, son

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i,\ \lambda_3 = -i$$

Se puede comprobar que

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = (1-\lambda)(\lambda^2+1)$$

y tiene las raíces que se acaban de calcular.

Entonces, tenemos los siguientes casos:

(a) Dado que $p_B(\lambda)$ tiene una única raíz real, entonces B no es diagonalizable en $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ pues tiene un único autovalor real simple. Es decir, no existe una matriz diagonal $D \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semejante a B.

(b) Dado que $p_B(\lambda)$ tiene tres raíces complejas distintas, entonces B, como matriz compleja, tiene tres autovalores distintos. Como todos los autovalores son simples, siempre se cumple que la multiplicidad geométrica de cada uno es igual a la algebraica, e igual a uno. Por tanto, B sí es diagonalizable en $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$. La matriz diagonal semejante a B es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Si llamamos f al endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ con matriz B respecto de la base canónica, $B = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$, entonces $D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ siendo $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de autovectores de f. Y la matriz P es la matriz de cambio de base $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Determinamos la base de autovectores:

- Subespacio propio asociado al autovalor 1: $V_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$

$$V_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Simplificando obtenemos las ecuaciones implícitas

$$V_1 \equiv \{2x_1 - 4x_2 = 0,\ x_3 = 0\}$$

por lo que un autovector asociado al autovalor 1 es $u_1 = (2, 1, 0)$.

- Subespacio propio asociado al autovalor i: $V_i = \mathrm{Ker}(f - i\,\mathrm{Id})$

$$V_i = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 1-i & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} - i & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Simplificando obtenemos las ecuaciones implícitas

$$V_i \equiv \begin{cases} (1-i)\,x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - (1+3i)\,x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Si $x_3 = \lambda$, entonces despejando x_1 en la primera ecuación obtenemos

$$x_1 = \frac{1}{1-i}\,x_3 = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)}\,\lambda = \frac{1+i}{2}\,\lambda,$$

y despejando x_2 en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{4x_3 - 2x_1}{-1-3i} = \frac{4\,\lambda - (1+i)\,\lambda}{-1-3i} = \frac{3-i}{-1-3i}\,\lambda \\ &= \frac{(3-i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)}\,\lambda = \frac{10i}{10}\,\lambda = i\,\lambda \end{aligned}$$

Luego un autovector $u_2 \in V_i$ es $u_2 = (\frac{1+i}{2}, i, 1)$.

- Subespacio propio asociado al autovalor $-i$: $V_{-i} = \mathrm{Ker}(f + i\,\mathrm{Id})$

$$V_{-i} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} + i & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Simplificando obtenemos las ecuaciones implícitas

$$V_{-i} \equiv \begin{cases} (1+i)\,x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - (1-3i)\,x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Si $x_3 = \lambda$, entonces despejando x_1 en la primera ecuación obtenemos

$$x_1 = \frac{1}{1+i}x_3 = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)}\,\lambda = \frac{1-i}{2}\,\lambda,$$

y despejando x_2 en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{4x_3 - 2x_1}{-1+3i} = \frac{4\,\lambda - (1-i)\,\lambda}{-1+3i} = \frac{3+i}{-1+3i}\,\lambda \\ &= \frac{(3+i)(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}\,\lambda = \frac{-10i}{10}\,\lambda = -i\,\lambda \end{aligned}$$

Luego un autovector $u_3 \in V_{-i}$ es $u_3 = (\frac{1-i}{2}, -i, 1)$.

Las columnas de P son las coordenadas de los autovectores u_1, u_2, u_3 respecto de $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y comprobamos que se cumple la relación de semejanza $D = P^{-1}BP$ o la condición equivalente $PD = BP$.

$$PD = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix}$$

$$BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & i & -i \end{pmatrix} \quad \square$$

Observación: Sea $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ con entradas reales, es decir, $b_{i,j} \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Se cumple que si $\lambda = a + bi$ es un autovalor complejo de B y v un autovector asociado a λ, entonces $\overline{\lambda} = a - bi$ también es autovalor de B y $\overline{v}$ es autovector asociado a $\overline{\lambda}$. Aplicando este resultado, en el ejercicio que acabamos de hacer, no hubiera sido necesario el cálculo de u_3, autovector asociado a $-i$, ya que podríamos haber tomado directamente el conjugado de u_2, autovector asociado a i.

5.13. Demuestre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

(a) Si una matriz real de orden tres tiene dos autovalores distintos, entonces la matriz tiene tres autovalores contados con su multiplicidad.

(b) Si u y v son dos autovectores linealmente independientes de un endomorfismo f, entonces u y v están asociados a autovalores distintos.

(c) Si $v_1, \ldots, v_k$ son autovectores linealmente dependientes de un endomorfismo f asociados a los autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, entonces existen $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tales que $\lambda_i = \lambda_j$.

(d) Si u y v son dos vectores linealmente independientes de $\operatorname{Ker}(f)$, entonces $\lambda = 0$ es un autovalor de f de multiplicidad algebraica $a \geq 2$.

(e) Si u y v son dos vectores linealmente independientes de $\operatorname{Ker}(f)$, entonces $\lambda = 0$ es un autovalor de f de multiplicidad geométrica igual a 2.

(f) Si u y v son dos vectores linealmente independientes de $\operatorname{Ker}(f)$, entonces existe un plano P tal que el endomorfismo restricción de f a P, $f_P : P \to P : \ f_P(w) = f(w)$ para todo $w \in P$, es el endomorfismo nulo.

Solución:

(a) Verdadera. Si una matriz real de orden tres tiene dos autovalores distintos, entonces el polinomio característico es un polinomio con coeficientes reales de grado tres con dos raíces reales distintas, por lo que la tercera raíz (distinta o no a las anteriores) también es real. Esto ocurre porque las raíces complejas de un polinomio real aparecen por pares: si $a+bi$, con $b \neq 0$, es raíz de un polinomio real, también lo es su conjugada $a-bi$. Entonces, el polinomio característico tiene tres raíces reales (no necesariamente distintas) que son los tres autovalores de la matriz contados con su multiplicidad.

(b) Falsa. Dos autovectores linealmente independientes u y v de un endomorfismo f, pueden estar asociados al mismo autovalor λ. Para ello, es suficiente que el endomorfismo tenga un autovalor múltiple λ y con multiplicidad geométrica $g = \dim V_\lambda \geq 2$. En tal caso existen $u, v \in V_\lambda$ linealmente independientes.

(c) Verdadera. La afirmación es verdadera ya que, si todos los autovalores fuesen distintos dos a dos, es decir $\lambda_i \neq \lambda_j$ para todo $i \neq j$, entonces los autovectores $v_1, \ldots, v_k$ serían linealmente independientes.

(d) Verdadera. Si u y v son vectores linealmente independientes de $\mathrm{Ker}(f)$, entonces $\dim \mathrm{Ker}(f) \geq 2$. Como $\mathrm{Ker}(f)$ es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 0$, es decir $\mathrm{Ker}(f) = V_0$, entonces su multiplicidad geométrica, $g = \dim V_0$, es mayor o igual que dos. Como la multiplicidad algebraica, a, es mayor o igual que la geométrica, entonces se cumple $a \geq 2$.

(e) Falsa. Si u y v son dos vectores linealmente independientes de $\mathrm{Ker}(f)$, entonces $\lambda = 0$ es un autovalor de multiplicidad geométrica $g = \dim \mathrm{Ker}(f) \geq 2$, pero no tiene por que ser igual a dos.

(f) Verdadera. Si u y v son dos vectores linealmente independientes de $\mathrm{Ker}(f)$ y $P = L(u,v)$, veamos que el endomorfismo $f_P : P \to P$ es el endomorfismo nulo. En efecto, si $w \in P$ es de la forma $w = au + bv$ y

$$f|_P(au+bv) = f(au+bv) = af(u) + bf(v) = a\mathbf{0} + b\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \square$$

5.14. Sean V un espacio vectorial real de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y f un endomorfismo de V que cumple las siguientes condiciones:

(a) $f(v_1 + 2v_2 + v_3) = v_1 + 2v_2 + v_3$.

(b) El plano de ecuación $x+2y+z=0$ es el subespacio propio asociado a un autovalor de f.

Determine si f es diagonalizable.

Solución: De la condición (a) se deduce que el vector $v = v_1 + 2v_2 + v_3$ cumple $f(v) = v$, luego es un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$. Las multiplicidades geométrica g_1 y algebraica a_1 de este autovalor cumplen $1 \leq g_1 \leq a_1$.

Por otro lado, como v no pertenece al plano $x+2y+z=0$, que es un subespacio propio, entonces dicho plano es el subespacio propio asociado a otro autovalor $\lambda_2 \neq 1$:

$$V_{\lambda_2} \equiv \{x+2y+z=0\}$$

Las multiplicidades geométrica y algebraica de λ_2 cumplen $g_2 = \dim V_{\lambda_2} = 2 \leq a_2 \leq 2$. Entonces, $g_1 = a_1 = 1$ y $g_2 = a_2 = 2$, por lo que f sí es diagonalizable.

Tomando dos vectores linealmente independientes de V_{λ_2}, por ejemplo:

$$u = v_1 - v_3 = (1, 0, -1)_{\mathcal{B}},\ w = v_2 - 2v_3 = (0, 1, -2)_{\mathcal{B}}$$

se cumple que $\mathcal{B}' = \{v, u, w\}$ es una base de autovectores de V. La matriz de f respecto de $\mathcal{B}'$ es la matriz diagonal

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \square$$

5.15. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de un espacio vectorial real V, y f un endomorfismo de V tal que:

(a) Tiene exactamente dos autovalores distintos.

(b) $\mathrm{Ker}(f) \equiv \{x_1 - x_2 = 0,\ x_4 = 0\}$.

(c) $f(v_4) = 2v_4$.

(d) $v_1 - v_2$ es un autovector de f.

Determine si f es diagonalizable.

Solución: En primer lugar, del apartado (b) se deduce que el subespacio $\mathrm{Ker}(f)$ es un plano de V. Como $\mathrm{Ker}(f)$ es el subespacio propio asociado al autovalor 0, es decir $\mathrm{Ker}(f) = V_0$, podemos afirmar que $\lambda_1 = 0$ es un autovalor con multiplicidad geométrica $g_1 = \dim V_0 = 2$. Su multiplicidad algebraica cumple

$$2 = g_1 \leq a_1 \leq 4$$

De la condición (c) sabemos que v_4 es un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$, luego sus multiplicidades algebraica y geométrica cumplen $1 \leq g_2 \leq a_2 \leq 2$.

La condición (a) indica que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ son los únicos autovalores de f.

De la condición (d) sabemos que $v_1 - v_2$ es otro autovector de f. Para averiguar a cuál de los dos autovalores está asociado, comprobamos que $v_1 - v_2 \notin \mathrm{Ker}(f)$, es decir, no es autovector asociado a $\lambda_1 = 0$. En efecto, las coordenadas de este vector respecto de $\mathcal{B}$ son $v_1 - v_2 = (1, -1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$ y no satisfacen las ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}(f)$. Por tanto, $v_1 - v_2$ es un autovector asociado a $\lambda_2 = 2$.

Como v_4 y $v_1 - v_2$ son linealmente independientes, entonces forman una base del subespacio propio V_2 cuya dimensión, g_2, no puede ser mayor que 2. En resumen, se tiene

$$\lambda_1 = 0,\ a_1 = g_1 = 2 \ \text{ y } \ \lambda_2 = 2,\ a_2 = g_2 = 2$$

Como multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden, entonces f es diagonalizable. Una base de autovectores es $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, v_4, v_1 - v_2\}$ siendo $\{u_1, u_2\}$ una base de $\mathrm{Ker}(f)$. Y la matriz de f respecto de dicha base es $\mathrm{diag}(0,0,2,2)$. □

5.16. Una matriz escalar de orden n es de la forma λI_n con $\lambda \in \mathbb{K}$. Demuestre que ninguna matriz no escalar es semejante a una matriz escalar.

Solución: Sea A una matriz de orden n no escalar, es decir $A \neq \lambda I_n$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Supongamos, por reducción al absurdo, que A es semejante a una matriz $E = \lambda I_n$, que sería una matriz diagonal. Entonces, existe una matriz regular P tal que $A = PEP^{-1}$ y se cumple

$$A = PEP^{-1} = P(\lambda I_n)P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n = E$$

lo que contradice la hipótesis de que A no es una matriz escalar. □

Potenciación de matrices diagonalizables

Si una matriz es diagonalizable, podemos utilizar ese hecho para simplificar el cálculo de sus potencias. La propiedad fundamental se ha demostrado en el Ejercicio 5.7.(b):

$$\text{Si } A = PDP^{-1}, \quad \text{entonces } A^n = PD^nP^{-1}.$$

5.17. Calcule la potencia n-ésima de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

sabiendo que tiene como autovalores 1 y 2 y los subespacios propios son

$$V_1 = L((1,-1,0),(2,1,1)) \text{ y } V_2 = L((1,1,2))$$

Solución: Los vectores $(1,-1,0)$ y $(2,1,1)$ son autovectores asociados al autovalor 1 que, por tanto, tiene multiplicidades algebraica y geométrica iguales a 2. El vector $(1,1,2)$ es un autovector asociado al autovalor 2 que, por tanto, tiene multiplicidades algebraica y geométrica iguales a 1. Es decir,

$$\{(1,-1,0), (2,1,1), (1,1,2)\}$$

es una base de autovectores para del endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ con matriz B, y se tiene la relación de semejanza $B = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
B^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5-2^n & 1-2^n & -3+3\cdot 2^n \\ 1-2^n & 5-2^n & -3+3\cdot 2^n \\ 2-2^{n+1} & 2-2^{n+1} & -2+3\cdot 2^{n+1} \end{pmatrix} \qquad \square
\end{aligned}$$

5.18. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-2 & \sqrt{6}-2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}-2\sqrt{6} & 5-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule la potencia $n-$ésima de A sabiendo que A y D son semejantes.

Solución: Si A y D son semejantes, entonces los autovalores de A son los mismos que los de D, es decir $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ simples. Calculamos una base de autovectores para determinar la matriz P tal que $P^{-1}AP = D$.

Subespacios propios:

$V_1 = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) \equiv \{(A - I_2)X = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-3 & \sqrt{6}-2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}-2\sqrt{6} & 4-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene la ecuación implícita $V_1 \equiv \{(2\sqrt{3}-3)x + (\sqrt{6}-2\sqrt{2})y = 0\}$. Despejamos x para obtener un autovector

$$x = -\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3}\, y = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-3} \cdot \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3}\, y = \frac{\sqrt{6}}{3}\, y$$

Un autovector asociado al autovalor 1 es $(2, \sqrt{6})$

$V_2 = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) \equiv \{(A - 2I_2)X = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{3}-4 & \sqrt{6}-2\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}-2\sqrt{6} & 3-2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene la ecuación implícita $V_2 \equiv \{(2\sqrt{3}-4)x+(\sqrt{6}-2\sqrt{2})y=0\}$. Despejamos x para obtener un autovector

$$x=-\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-4}\,y=\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-4}\cdot\frac{2\sqrt{3}+4}{2\sqrt{3}+4}\,y=-\frac{\sqrt{2}}{2}y$$

Un autovector asociado al autovalor 2 es $\left(-1,\sqrt{2}\right)$

Potencias

$$\begin{aligned}
A^n=PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{6} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\begin{pmatrix} 2^n\sqrt{6}+2\sqrt{2} & 2-2^{n+1} \\ \sqrt{12}-2^n\sqrt{12} & 2^{n+1}\sqrt{2}+\sqrt{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Extrayendo un factor $\sqrt{2}$ en todas las entradas de la última matriz, obtenemos

$$A^n = \left(2-\sqrt{3}\right)\begin{pmatrix} 2^n\sqrt{3}+2 & \sqrt{2}(1-2^n) \\ \sqrt{6}(1-2^n) & 2^{n+1}+\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \square$$

5.19. Sabiendo que la matriz

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es diagonalizable y tiene por autovalores: 1 doble y -1 doble; calcule C^n para $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Sabiendo que la matriz C es diagonalizable y conociendo sus autovalores, podemos afirmar que existe una matriz regular P tal que $C=PDP^{-1}$ con

$$D=\operatorname{diag}(1,1,-1,-1)$$

Las potencias de la matriz D son muy sencillas de calcular: $D^n=\begin{cases} I_4 & \text{si } n \text{ es par} \\ D & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Entonces las potencias de C son

$$C^n=PD^nP^{-1}=\begin{cases} PI_4P^{-1}=I_4 & \text{si } n \text{ es par} \\ PDP^{-1}=C & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad \square$$

5.2. Forma canónica de Jordan

Esta sección se dedica a la determinación de la forma canónica de Jordan de un endomorfismo. Esta forma canónica siempre existe si el endomorfismo es complejo y no siempre si es real. La forma canónica del endomorfismo es la representación matricial mediante una matriz de Jordan.

Una **matriz de Jordan** es una matriz cuadrada diagonal por bloques de modo que los bloques de la diagonal son bloques de Jordan. Un **bloque de Jordan** de orden n es una matriz cuadrada de orden n, que denotaremos por $B_n(\lambda)$, tal que $b_{ii} = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{K}$, para $i = 1, \dots, n$; $b_{i,i-1} = 1$, para $i = 2, \dots, n$; y el resto de entradas son iguales a 0.

$$B_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Teorema de Existencia de forma canónica de Jordan ([BE], Teorema 5.21):

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V de dimensión n. Entonces, existe una base $\mathcal{B}$ tal que la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es una matriz de Jordan, si y sólo si, f tiene n autovalores contados con su multiplicidad.

La base $\mathcal{B}$ se denomina una **base de Jordan** de f, y no es única. La matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ se denomina **forma canónica de Jordan** de f y es única salvo permutación de bloques de Jordan.

Cuando se cumple el Teorema de existencia, para determinar una base de Jordan, se definen una serie de subespacios $f-$invariantes asociados a cada autovalor: los subespacios propios generalizados y el subespacio máximo. Un subespacio vectorial U de V es **invariante** por f, o $f-$invariante, si y sólo si $f(U) \subseteq U$.

Se denomina **subespacio propio generalizado** $i-$ésimo asociado a un autovalor λ de f, al subespacio vectorial

$$K^i(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})^i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots$$

El subespacio propio generalizado primero es el subespacio propio asociado: $K^1(\lambda) = V_\lambda$.

Los subespacios propios generalizados están contenidos unos en otros en forma de cadena ascendente: $K^i(\lambda) \subseteq K^{i+1}(\lambda)$, que se estabiliza en el que denominamos subespacio máximo. Es decir, existe un entero $k > 0$ tal

$$V_\lambda = K^1(\lambda) \subsetneq K^2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq K^k(\lambda) = K^{k+1}(\lambda) = \cdots = K^j(\lambda) = \cdots \quad \text{para todo } j \geq k$$

Los subespacios generalizados empiezan a repetirse a partir del $k-$ésimo, al que llamamos **subespacio máximo** asociado a λ: $M(\lambda) = K^k(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})^k$.

Si llamamos $d_i = \dim K^i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots$, se cumple que la diferencia en dimensiones entre subespacios propios generalizados consecutivos $r_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 2, \ldots, k$; es decreciente. Es decir, $r_2 \geq r_3 \geq \cdots \geq r_k$ y $d_1 \geq r_2$.

El subespacio máximo asociado a un autovalor también está caracterizado por ser el primer subespacio generalizado cuya dimensión es igual a la multiplicidad algebraica del autovalor.

Cuando se cumple el Teorema de Existencia se tiene la descomposición del espacio vectorial V como suma directa de los subespacios máximos asociados a los autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Es decir,

$$V = M(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus M(\lambda_r)$$

Para construir una base de Jordan de f, se determina una base de Jordan de f restringido a cada subespacio máximo: $\mathcal{B}_i$ base de Jordan de $f|_{M(\lambda_i)}$, según el **algoritmo** descrito en ([BE], Teorema 5.28). Finalmente, la base de Jordan de f se obtiene uniendo las bases de cada subespacio máximo $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$.

La multiplicidad geométrica de un autovalor es igual al número de bloques de Jordan asociados a dicho autovalor que aparecen en la forma canónica.

En la forma canónica de Jordan un autovalor aparece repetido en la diagonal tantas veces como indique su multiplicidad algebraica.

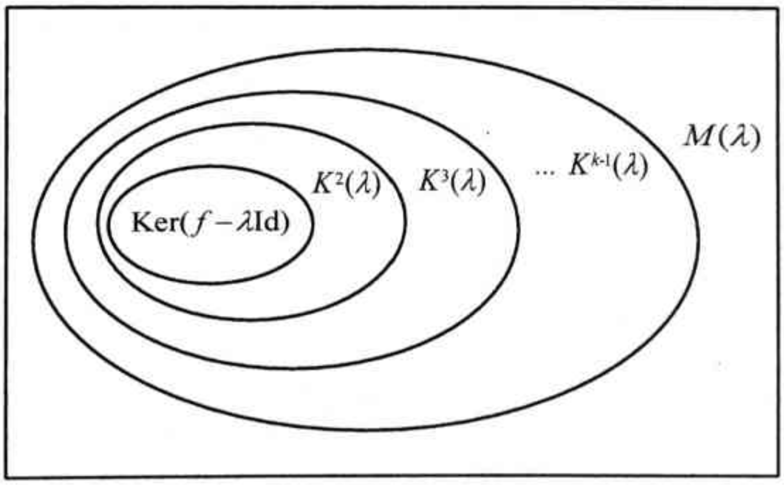


Figura 5.1: Diagrama de subespacios generalizados $K^i(\lambda) \subsetneq K^{i+1}(\lambda)$

5.20. Demuestre que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los autovalores, no necesariamente distintos, de una matriz A de orden n, entonces se cumple que

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \text{ y } \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Solución: Es el mismo enunciado del Ejercicio 5.5. sin la exigencia de que A sea diagonalizable. Vamos a demostrarlo.

Si A es una matriz de orden n, compleja o real, con n autovalores (no necesariamente distintos) entonces se cumple el Teorema de Existencia de la forma canónica de Jordan. Es decir, existe una matriz de Jordan J semejante a A

$$P^{-1}AP = J$$

Como J es una matriz triangular cuyos elementos de la diagonal principal son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, entonces

$$\operatorname{tr}(J) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \text{ y } \det(J) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

El resultado del ejercicio se sigue del hecho de que dos matrices semejantes tienen la misma traza y el mismo determinante. □

5.21. Determine el subespacio máximo asociado a cada autovalor del endomorfismo f de $\mathbb{K}^5$ con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y su forma canónica de Jordan.

Solución: En primer lugar, observamos que por ser la matriz triangular sus autovalores son las entradas de la diagonal principal. En este caso, $\lambda_1 = 1$ es un autovalor doble, es decir de multiplicidad algebraica $a_1 = 2$, y $\lambda_2 = 2$ es un autovalor triple, es decir de multiplicidad algebraica $a_2 = 3$.

El subespacio máximo $M(1)$ asociado a $\lambda_1 = 1$ es el primer subespacio generalizado que tenga dimensión igual a a_1. Para determinarlo vamos calculando las dimensiones de la cadena ascendente de subespacios generalizados:

$$K^1(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}),\ K^2(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2,\ K^3(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^3, \ldots$$

$$\dim K^1(1) = 5 - \operatorname{rg}(A - I_5) = 5 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Como $\dim K^1(1) = 1 \neq a_1$, entonces este subespacio no es el máximo. Calculamos la dimensión del subespacio generalizado segundo

$$\dim K^2(1) = 5 - \mathrm{rg}(A - I_5)^2 = 5 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Como $\dim K^2(1) = 2 = a_1$, entonces este subespacio es el máximo, es decir

$$M(1) = K^2(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$$

No es necesario comprobar que la cadena de subespacios generalizados se estabiliza en este punto, es decir que el subespacio generalizado tercero es igual al segundo

$$K^1(1) \subsetneq K^2(1) = K^3(1)$$

pero podemos hacerlo en este primer ejemplo. Calculamos la dimensión del subespacio generalizado tercero:

$$\dim K^3(1) = 5 - \mathrm{rg}(A - I_5)^3 = 5 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto, como $K^2(1) \subseteq K^3(1)$ y $\dim K^2(1) = \dim K^3(1)$, entonces $K^2(1) = K^3(1)$.

El subespacio máximo $M(2)$ asociado a $\lambda_2 = 2$ es el primer subespacio generalizado que tenga dimensión igual a la multiplicidad algebraica $a_2 = 3$. Para determinarlo, vamos calculando las dimensiones de la cadena ascendente de subespacios generalizados:

$$\dim K^1(2) = \dim \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = 5 - \mathrm{rg}(A - 2I_5) = 5 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Como $\dim K^1(2) = 2 < a_2$, entonces este subespacio no es el máximo. Calculamos la dimensión del subespacio generalizado segundo

$$\dim K^2(2) = 5 - \mathrm{rg}(A - 2I_5)^2 = 5 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Como $\dim K^2(2) = 3 = a_2$, entonces este subespacio es el máximo, es decir

$$M(2) = K^2(2) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$$

Observación: Este procedimiento es el que debemos seguir en general para calcular subespacios máximos, aunque a veces podemos acortarlo. Veámoslo en este caso. Podemos determinar directamente los subespacios máximos sin necesidad de calcular las dimensiones de $K^2(1)$ y $K^2(2)$, como acabamos de hacer.

Como $\dim K^1(1) = 1 < a_1 = 2$, entonces el subespacio generalizado segundo necesariamente tiene dimensión mayor que 1, pero a la vez menor o igual que la multiplicidad algebraica. Es decir

$$\dim K^1(1) = 1 < \dim K^2(1) \leq a_1 = 2$$

por lo que $\dim K^2(1) = 2$, lo que convierte a este subespacio en el máximo.

El mismo razonamiento se haría con el otro autovalor. Como $\dim K^1(2) = 2 < a_2 = 3$, entonces el subespacio generalizado segundo necesariamente tiene dimensión mayor que 2, pero a la vez menor o igual que la multiplicidad algebraica. Es decir

$$\dim K^1(2) = 2 < \dim K^2(2) \leq a_2 = 3$$

por lo que $\dim K^2(2) = 3$, lo que convierte a este subespacio en el máximo.

Vamos con la forma canónica de Jordan. En primer lugar, vemos que se cumple el Teorema de Existencia ya que el endomorfismo tiene 5 autovalores contados con su multiplicidad. Es decir, $a_1 + a_2 = 5$. El número de bloques de Jordan asociados a cada autovalor lo determina la multiplicidad geométrica.

La multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 1$ es $g_1 = \dim K^1(1) = 1$, por lo que en la forma canónica hay un único bloque de Jordan asociado a este autovalor. Como el autovalor es doble, este bloque será de tamaño 2×2.

La multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 2$ es $g_2 = \dim K^1(2) = 2$, por lo que en la forma canónica hay dos bloques de Jordan asociados a este autovalor. Como el autovalor es triple, entonces la única posibilidad es que haya un bloque de tamaño 2×2 y uno de tamaño 1×1.

Por tanto, la forma canónica de Jordan es, salvo permutación de bloques, la siguiente

$$J = \left(\begin{array}{cc|c|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \square$$

5.22. Determine la forma canónica de Jordan y una base de Jordan del endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$ con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos el polinomio característico, los autovalores y subespacios propios generalizados.

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -2-\lambda & 2 \\ -3 & -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -4 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda) = -\lambda^2(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Los autovalores de f y sus multiplicidades algebraicas son

$$\lambda_1 = 0,\ a_1 = 2;\quad \lambda_2 = 2,\ a_2 = 1$$

Se cumple el Teorema de existencia de forma canónica de Jordan ya que el endomorfismo tiene tres autovalores contados con su multiplicidad, es decir $a_1 + a_2 = 3 = \dim \mathbb{K}^3$, por lo que el endomorfismo admite una forma canónica de Jordan. Para determinarla, calculamos los subespacios generalizados asociados a cada autovalor.

Autovalor $\lambda_2 = 2$: al ser un autovalor simple, o de multiplicidad algebraica 1, siempre se cumple que la multiplicidad geométrica es $g_2 = 1$ y el subespacio propio asociado es el subespacio máximo. Es decir, $M(2) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$.

Autovalor $\lambda_1 = 0$: al ser un autovalor doble, el subespacio máximo será el primero de los subespacios generalizados que tenga dimensión 2.

La dimensión del subespacio generalizado primero es

$$g_1 = \dim K^1(0) = \dim(\mathrm{Ker}(f - 0\,\mathrm{Id})) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 1$$

De ello se deduce que la forma canónica de Jordan, J, tiene un único bloque asociado a este autovalor, que por tanto será de orden 2. La forma canónica es

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\dim K^1(0) = 1$ es menor que la multiplicidad algebraica $a_1 = 2$, entonces el subespacio máximo asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$ es el subespacio generalizado segundo, que tendrá dimensión 2.

$$M(0) = K^2(0) = \mathrm{Ker}((f - 0\,\mathrm{Id})^2) = \mathrm{Ker}(f^2)$$

ya que $K^1(0) \subsetneq K^2(0)$ y $\dim K^2(0) \leq 2$.

El espacio vectorial se descompone en suma directa de los subespacios máximos

$$\mathbb{K}^3 = M(0) \oplus M(2)$$

Una base de Jordan $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J$ se forma uniendo una base de Jordan de cada subespacio máximo. En este caso, como las dimensiones de cada uno son muy pequeñas, la base tiene una estructura muy sencilla.

Para los autovalores múltiples escribimos en una tabla los subespacios generalizados con sus dimensiones. La tabla de la base de Jordan de $M(0)$ es

Dimensiones:	1		2
Subespacios:	$K^1(0)$	$\subset$	$K^2(0) = M(0)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1

Esta tabla indica que la base de Jordan de $M(0)$ es $\{v_1, v_2\}$ con

$$v_1 \in K^2(0) - K^1(0) \;\text{ y }\; v_2 = f(v_1)$$

Para el autovalor simple, $\lambda_2 = 2$, basta tomar un autovector $v_3 \in K^1(2) = M(2)$.

Calculamos ecuaciones implícitas de los subespacios.

Subespacio propio (o subespacio generalizado primero) asociado al autovalor 0:

$$K^1(0) = V_0 = \mathrm{Ker}(f - 0\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f)$$

Unas ecuaciones implícitas de V_0 se obtienen a partir del sistema lineal $AX = 0$

$$K^1(0) \equiv \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Simplificando el sistema lineal tenemos unas ecuaciones implícitas

$$K^1(0) \equiv \{x_1 = 0,\; x_2 - x_3 = 0\}$$

y una base de este subespacio está formada por el vector $u_1 = (0, 1, 1)$.

Subespacio generalizado segundo: $K^2(0) = \mathrm{Ker}(f^2)$

Unas ecuaciones implícitas de $K^2(0)$ se obtienen a partir del sistema lineal $A^2X = 0$

$$K^2(0) \equiv \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \\ -8 & -8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Simplificando el sistema lineal tenemos una ecuación implícita

$$K^2(0) \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

Consideramos la base de $K^1(0)$ formada por el vector $u_1 = (0,1,1)$, y la ampliamos para obtener una base de $K^2(0)$:

$$\{u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,-1,0)\}$$

Para la base de Jordan, podemos tomar como primer vector el segundo de esta base $v_1 = (1,-1,0) \in K^2(0) - K^1(0)$ y a partir de él calculamos $v_2 = f(v_1)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (0,1,1)$$

Subespacio propio asociado al autovalor 2:

Unas ecuaciones implícitas de $K^1(2) = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$ se obtienen a partir del sistema lineal homogéneo $(A - 2I_3)X = 0$

$$K^1(2) = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) \equiv \left\{ (x_1,x_2,x_3) : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Simplificando el sistema lineal tenemos unas ecuaciones implícitas

$$K^1(2) \equiv \{x_1 = 0,\ 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Podemos tomar $v_3 = (0,1,2)$. Así, una base de Jordan de f es

$$\mathcal{B}' = \{(1,-1,0),\ (0,1,1),\ (0,1,2)\}$$

La matriz de f respecto de esta base es $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J$. Para comprobar que los cálculos están bien hechos verificamos la relación de semejanza $A = PJP^{-1}$, o la condición equivalente $AP = PJ$, donde $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es la matriz de f en la base canónica $\mathcal{B}$ y $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es la matiz de paso o de cambio de base.

En efecto, siendo

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

podemos comprobar que se verifica

$$AP = PJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \square$$

5.23. Determine la forma canónica de Jordan y una base de Jordan del endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ con matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos el polinomio característico, los autovalores y subespacios propios generalizados.

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda+1) = -(\lambda+1)^3 \end{aligned}$$

El endomorfismo tiene un único autovalor $\lambda = -1$ con multiplicidad algebraica $a = 3$. Se cumple el Teorema de existencia, por lo que f admite una forma canónica de Jordan. Para determinarla calculamos los subespacios generalizados hasta obtener el máximo.

Subespacio propio asociado a -1: $V_{-1} = K^1(-1) = \text{Ker}(f + \text{Id}) \equiv \{(A + I_3)X = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K^1(-1) \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

La multiplicidad geométrica es $g = \dim K^1(-1) = 3 - \text{rg}(A + I_3) = 2$, menor que la multiplicidad algebraica $a = 3$, por tanto el subespacio máximo es el subespacio generalizado segundo $K^2(-1) = \text{Ker}(f + \text{Id})^2 = M(-1)$ ya que

$$K^1(-1) \subsetneq K^2(-1) \Rightarrow 2 = \dim K^1(-1) < \dim K^2(-1) \leq 3 = a$$

La tabla de la base de Jordan del subespacio máximo es

Dimensiones:	2		3
Subespacios:	$K^1(-1)$	$\subset$	$K^2(-1) = M(-1)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_3		

La tabla indica que los vectores cumplen $v_1 \in K^2(-1) - K^1(-1)$, $v_2 = (f + \text{Id})(v_1)$ y $\{v_2, v_3\}$ es una base de $K^1(-1)$. La forma canónica de Jordan está formada por dos bloques, uno por cada fila de vectores en la tabla. El tamaño de cada bloque es igual al número de vectores en cada fila. Por tanto, tenemos un bloque de orden 2 y un bloque de orden 1. Es decir,

$$J = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right), \quad \mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$$

A la vista de las ecuaciones implícitas de $K^1(-1)$ y dado que $K^2(-1) = \mathbb{K}^3$, que no tiene ecuaciones implícitas, podemos tomar como v_1 cualquier vector que no cumpla las ecuaciones de $K^1(-1)$. Por ejemplo, $v_1 = (1, 0, 0)$. A continuación calculamos $v_2 = (f + \text{Id})(v_1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (0, 1, 1)$$

El tercer vector de la base de Jordan puede ser $v_3 = (1, -1, 0)$.

Para comprobar que se ha calculado correctamente tanto la forma canónica, como la base, verificamos que se cumple la relación de semejanza $J = P^{-1}AP$, donde $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de la base de Jordan $\mathcal{B}'$ a la canónica $\mathcal{B}$.

Siendo

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

comprobamos que se verifica la condición $AP = PJ$ que es equivalente a $J = P^{-1}AP$

$$AP = PJ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

5.24. Determine la forma canónica de Jordan, y una base de Jordan, del endomorfismo f de $\mathbb{C}^3$ con matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Solución: El polinomio característico de f es

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & i-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & i-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(i-\lambda)^2$$

Por lo que los autovalores de f y sus multiplicidades algebraicas son

$$\lambda_1 = -1,\ a_1 = 1;\ \lambda_2 = i,\ a_2 = 2$$

Para el autovalor simple, $\lambda_1 = -1$, se cumple que $g_1 = 1$ y $M(-1) = K^1(-1)$

Para el autovalor múltiple, $\lambda_2 = i$, determinamos los subespacios generalizados.

Dimensión del subespacio propio asociado a λ_2:

$$\dim K^1(i) = \dim \mathrm{Ker}(f - i\,\mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rg}(A - iI_3) = 3 - \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

Esta dimensión es la multiplicidad geométrica, $g_2 = 1$, e indica que habrá un único bloque de Jordan asociado al autovalor i. Esta información es suficiente para afirmar que la forma canónica es

$$J(f) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & i \end{array}\right)$$

El subespacio máximo $M(i)$ es el subespacio generalizado segundo ya que $\dim K^1(i) = 1$ es menor que la multiplicidad algebraica, lo que implica

$$K^1(i) \subsetneq K^2(i) \ \text{ y } \ 1 < \dim K^2(i) \leq a_2$$

Es decir, $\dim K^2(i) = 2$, lo que equivale a $K^2(i) = M(i)$.

El espacio se descompone en suma directa $\mathbb{C}^3 = M(-1) \oplus M(i)$. Para determinar la base de Jordan $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J(f)$ calculamos una base de Jordan de cada subespacio máximo:

$$\{v_1\} \text{ base de Jordan de } M(-1), \ \{v_2, v_3\} \text{ base de Jordan de } M(i).$$

Base de $M(-1)$**.** Unas ecuaciones implícitas de $M(-1) = \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$ se obtienen a partir del sistema lineal homogéneo $(A + I_3)X = 0$

$$K^1(-1) \equiv \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & i+1 & 1 \\ 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Simplificando el sistema lineal tenemos unas ecuaciones implícitas

$$K^1(-1) \equiv \{2x_1 + (i+1)x_2 = 0, \ x_3 = 0\}$$

Una base de este subespacio está formada por el vector $v_1 = (i+1, -2, 0)$, que será el primero en la base de Jordan.

Base de $M(i)$. La tabla de la base de Jordan es de la forma

Dimensiones:	1		2
Subespacios:	$K^1(i)$	$\subset$	$K^2(i) = M(i)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2

Esta tabla indica que la base de Jordan de $M(i)$ es $\{v_2, v_3\}$ con

$$v_2 \in K^2(i) - K^1(i), \ v_3 = (f - i\operatorname{Id})(v_2)$$

Necesitamos calcular las ecuaciones implícitas de $K^2(i)$ y $K^1(i)$.

Unas ecuaciones implícitas de $K^1(i) = \operatorname{Ker}(f - i\operatorname{Id})$ se obtienen a partir del sistema lineal homogéneo $(A - iI_3)X = 0$

$$K^1(i) \equiv \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Simplificando el sistema lineal tenemos unas ecuaciones implícitas

$$K^1(i) \equiv \{x_1 = 0, \ x_3 = 0\}$$

Unas ecuaciones implícitas de $K^2(i) = \mathrm{Ker}(f - i\,\mathrm{Id})^2$ se obtienen a partir del sistema lineal homogéneo $(A - iI_3)^2X = 0$

$$M(i) = K^2(i) \equiv \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\equiv \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 \\ -2-2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de donde $K^2(i) \equiv \{x_1 = 0\}$. Tomamos un vector de $v_2 \in K^2(i) - K^1(i)$, por ejemplo $v_2 = (0, 0, 1)$ y calculamos $v_3 = (f - i\,\mathrm{Id})(v_2)$.

$$\begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (f - i\,\mathrm{Id})(v_2) = (0, 1, 0) = v_3$$

Comprobamos que la base de Jordan

$$\mathcal{B}' = \{(i+1, -2, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

se ha calculado correctamente verificando la relación de semejanza $J = P^{-1}AP$, o la equivalente $PJ = AP$, donde P es la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}'$ a la canónica $\mathcal{B}$

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que se cumple

$$PJ = AP = \begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 2 & 1 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

5.25. Determine la forma canónica de Jordan y una base de Jordan del endomorfismo f de $\mathbb{C}^3$ con matriz y polinomio característico

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & -1-2i & -i \\ -2-2i & 4i & -1+2i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad p_f(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$$

Solución: Calculando las raíces del polinomio característico obtenemos los siguientes autovalores

$$\lambda_1 = 1,\ a_1 = 1;\ \ \lambda_2 = -1,\ a_2 = 2$$

La multiplicidad geométrica del autovalor doble $\lambda_2 = -1$ es

$$g_2 = \dim(\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})) = 3 - \mathrm{rg}(A + I_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ i & -2i & -i \\ -2-2i & 4i & 2i \end{pmatrix} = 1$$

entonces, la forma canónica de Jordan tiene un único bloque de Jordan asociado a este autovalor, por lo que es de la forma

$$J(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

El subespacio máximo es $M(-1) = K^2(-1) = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})^2$.

Una base de Jordan, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, debe cumplir que $\{v_1\}$ sea una base de $M(1) = K^1(1)$ y $\{v_2, v_3\}$ sea una base de Jordan de $M(-1)$. Es decir,

$$v_1 \in K^1(1),\ v_2 \in K^2(-1) - K^1(-1),\ v_3 = (f + \mathrm{Id})(v_2)$$

Ecuaciones implícitas de los subespacios generalizados:

Unas ecuaciones de $K^1(1)$ se obtienen del sistema lineal $(A - I_3)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & -2-2i & -i \\ -2-2i & 4i & -2+2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hacemos las siguientes operaciones elementales de filas para simplificarlo: $f_2 \to -if_2$, $f_3 \to f_3 + (2+2i)f_2$. Se obtiene

$$K^1(1) \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x_1 & +(2i-2)x_2 & -x_3 = 0 \\ & (-8+4i)x_2 & -4x_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow\ K^1(1) = L((-i, 1, -2+i))$$

Unas ecuaciones de $K^1(-1)$ se obtienen del sistema lineal $(A + I_3)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ i & -2i & -i \\ -2-2i & 4i & 2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando el sistema se obtienen las ecuaciones

$$K^1(1) \equiv \left\{ \begin{array}{lll} x_1 & & = 0 \\ & 2x_2 & +x_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow\ K^1(-1) = L((0, 1, -2))$$

Unas ecuaciones de $K^2(-1)$ se obtienen del sistema lineal $(A + I_3)^2X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4i & 0 & 0 \\ -4-8i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$K^2(-1) \equiv \{ x_1 = 0 \} \Rightarrow K^2(-1) = L((0,1,0),(0,0,1))$$

Entonces podemos tomar como base de Jordan

$$v_1 = (-i, 1, -2+i),\ v_2 = (0,0,1) \in K^2(-1) - K^1(-1),\ v_3 = (f + \mathrm{Id})(v_2) = (0, -i, 2i)$$

Comprobación: se cumple la relación de semejanza $P^{-1}AP = J$ con

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ -2+i & 1 & 2i \end{pmatrix}$$

ya que

$$AP = PJ = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 1 & -i & i \\ -2+i & -1+2i & -2i \end{pmatrix} \quad \square$$

5.26. Determine la forma canónica de Jordan J del endomorfismo f de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V cuya matriz respecto de cierta base $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y encuentre una base $\mathcal{B}'$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J$.

Solución: Comenzamos determinando los autovalores. El polinomio característico de f es

$$p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollando el determinante por la primera fila y después por la última columna tenemos que

$$p_f(\lambda) = (1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^4$$

Por tanto, f tiene un único autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidad algebraica $a = 4$.

Calculamos los subespacios propios generalizados hasta obtener el subespacio máximo $M(1)$, que será el primero que tenga dimensión igual a la multiplicidad algebraica $a = 4$.

Subespacio generalizado primero $K^1(1) = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$

$$\dim K^1(1) = 4 - \operatorname{rg}(A - I_4) = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Subespacio generalizado segundo: $K^2(1) = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$

$$\dim K^2(1) = 4 - \operatorname{rg}(A - I_4)^2 = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

Esta dimensión coincide con la multiplicidad algebraica del autovalor, lo que implica que es el subespacio máximo: $M(1) = K^2(1)$. En particular, $K^2(1) = V$, que es el espacio total.

La tabla de la base de Jordan es

Dimensiones:	2		4
Subespacios:	$K^1(1)$	$\subset$	$K^2(1) = M(1)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4	$\leftarrow$	v_3

Como en la base de Jordan hay dos líneas con dos vectores cada una, entonces la forma canónica de Jordan está formada por dos bloques de orden 2. Es decir,

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

A continuación, determinamos una base de Jordan $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J$. Para ello nos fijamos en la tabla anterior. Tenemos que encontrar dos vectores linealmente independiente $v_1, v_3 \in K^2(1) - K^1(1)$ tales que generen un suplementario de $K^1(1)$ en $K^2(1)$. Es decir, tales que

$$K^1(1) \oplus L(v_1, v_3) = K^2(1)$$

Una vez determinados estos vectores calculamos v_2 y v_4 del siguiente modo:

$$v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1) \ \text{ y } \ v_4 = (f - \mathrm{Id})(v_3)$$

Calculamos una base de cada subespacio generalizado y, previamente, unas ecuaciones implícitas.

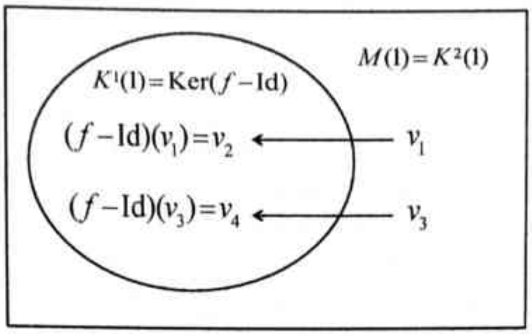


Figura 5.2: Diagrama de los vectores de la base de Jordan.

Unas ecuaciones de $K^1(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ se obtienen del sistema lineal $(A - I_4)X = 0$

$$(A - I_4)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando el sistema lineal tenemos unas ecuaciones implícitas

$$K^1(1) \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 = 0\}$$

y una base de este subespacio es

$$\{u_1 = (0,1,1,0)_{\mathcal{B}},\ u_2 = (0,0,0,1)_{\mathcal{B}}\}$$

Como $K^2(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2 = V$ es el espacio total, no tiene ecuaciones implícitas.

Para determinar los vectores v_1 y v_3 tales que $K^2(1) = K^1(1) \oplus L(v_1,\ v_3)$, ampliamos la base $\{u_1, u_2\}$ de $K^1(1)$ con dos vectores v_1 y v_3, tales que $\{u_1, u_2, v_1, v_3\}$ formen una base de $K^2(1)$. Nos sirven

$$v_1 = (1,0,0,0)_{\mathcal{B}},\ v_3 = (0,0,1,0)_{\mathcal{B}}$$

La independencia lineal de los vectores u_1, u_2, v_1, v_3 se comprueba fácilmente viendo que el rango de la matriz de coordenadas por filas es 4:

$$\mathrm{rg} \left(\begin{array}{cccc||c} 0 & 1 & 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & v_3 \end{array} \right) = 4$$

Para terminar, se calculan $v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1)$ y $v_4 = (f - \mathrm{Id})(v_3)$ teniendo en cuenta que la matriz del endomorfismo $f - \mathrm{Id}$ es $A - I_4$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (0,1,1,1)_{\mathcal{B}}$$

y

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_4 = (0, -1, -1, 1)_{\mathcal{B}}$$

Comprobamos que la base se ha calculado correctamente. Las coordenadas de estos vectores forman las columnas de la matriz de cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si la base está correctamente calculada se tiene que cumplir $J = P^{-1}AP$, o lo que es lo mismo $PJ = AP$. En efecto, se puede comprobar que

$$PJ = AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

5.27. Determine la forma canónica de Jordan J del endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule una base de Jordan $\mathcal{B}'$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J$.

Solución: En primer lugar, como la matriz del endomorfismo es triangular sus autovalores están en la diagonal principal, por lo que f tiene un único autovalor $\lambda = 2$ de multiplicidad algebraica $a = 4$. El número de autovalores, contados son su multiplicidad es igual a 4, e igual a la dimensión del espacio vectorial, por lo que existe la forma canónica de Jordan de f.

Para determinarla, hay que calcular las dimensiones de los subespacios propios generalizados hasta determinar el subespacio máximo:

- Subespacio generalizado primero $K^1(2) = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$:

$$\dim(K^1(2)) = 4 - \operatorname{rg}(A - 2I_4) = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2$$

Entonces, la multiplicidad geométrica del autovalor es $g = 2$, lo que implica que en la forma canónica habrá dos bloques de Jordan. Estos bloques podrían ser de los siguientes tamaños: 2 de tamaño 2×2 (como en el ejercicio anterior) o bien 1 de tamaño 3×3 y uno de tamaño 1×1. Para saber en qué caso estamos hay que calcular el subespacio máximo, así que continuamos.

- Subespacio generalizado segundo: $K^2(2) = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2$

$$\dim(K^2(2)) = 4 - \operatorname{rg}(A - 2I_4)^2 = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3$$

Entonces, el subespacio máximo es el subespacio generalizado tercero: $M(2) = K^3(2)$, que tendrá dimensión cuatro y será igual a $\mathbb{K}^4$.

La cadena de subespacios y sus dimensiones se representan en la tabla de la base de Jordan, que es la siguiente:

Dimensiones:	2		3		4
Subespacios:	$K^1(2)$	$\subset$	$K^2(2)$	$\subset$	$K^3(2) = M(2)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4				

La primera fila de la tabla contiene tres vectores y se corresponde con un bloque de Jordan 3×3. La segunda fila, con un único vector, se corresponde con un bloque de orden 1. La forma canónica de Jordan es

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Calculamos ecuaciones implícitas de los subespacios para determinar la base de Jordan $\mathcal{B}' = \{v_2, v_2, v_3, v_4\}$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J$.

Unas ecuaciones de $K^1(2)$, respecto de la base canónica $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(A - 2I_4)X = 0$

$$(A - 2I_4)X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando el sistema se tienen unas ecuaciones implícitas $K^1(2) \equiv \{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$.

Unas ecuaciones de $K^2(2)$, respecto de la base canónica $\mathcal{B}$, se obtienen del sistema lineal $(A - 2I_4)^2X = 0$

$$(A - 2I_4)^2X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando el sistema se obtiene $K^2(2) \equiv \{ x_1 = 0 \}$.

El subespacio máximo $K^3(2)$ es todo el espacio vectorial $\mathbb{K}^4$ por lo que no tiene ecuaciones implícitas.

La base de Jordan cumple las siguientes condiciones:

$$v_1 \in K^3(2) - K^2(2), \; v_2 = (f - 2\,\mathrm{Id})(v_1), \; v_3 = (f - 2\,\mathrm{Id})^2(v_1), \; v_4 \in K^1(2)$$

donde $\{v_3, v_4\}$ es una base del subespacio propio asociado $K^1(2)$.

A la vista de las ecuaciones implícitas, podemos tomar $v_1 = (1,0,0,0)$ y a partir de él calculamos v_2 y v_3.

$$\begin{aligned} v_2 &= (f - 2\,\mathrm{Id})(v_1) = (0,1,-2,4) \\ v_3 &= (f - 2\,\mathrm{Id})^2(v_1) = (f - 2\,\mathrm{Id})(v_2) = (0,0,1,2) \end{aligned}$$

Como último vector nos sirve $v_4 = (0,0,0,1)$ ya que junto con $v_3 = (0,0,1,2)$ determinan una base de $K^1(2) = \{x_1 = x_2 = 0\}$.

Comprobación: la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a la base canónica $\mathcal{B}$ es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y se cumple

$$AP = PJ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ -4 & 10 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \square$$

5.28. Determine la forma canónica de Jordan de la siguiente matriz de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Solución: El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = {} & \det \left(\begin{array}{cc|cc} 1-\lambda & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1-\lambda \end{array}\right) \\ = {} & \left(\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \right)^2 = ((1-\lambda)^2 + 4)^2 \end{aligned}$$

Este polinomio no tiene raíces reales, por lo que la matriz A, como matriz real, no admite una forma canónica de Jordan. Las raíces complejas de p_A son: $\lambda_1 = 1+2i$ doble y $\lambda_2 = 1-2i$ doble.

Sea f el endomorfismo de $\mathbb{C}^4$ cuya matriz respecto de la base canónica es $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Para determinar su forma canónica es necesario y suficiente conocer las dimensiones de los subespacios generalizados.

- Subespacio generalizado primero: $V_{1+2i} = K^1(1+2i) = \operatorname{Ker}(f-(1+2i)\operatorname{Id})$

$$\dim \operatorname{Ker}(f-(1+2i)\operatorname{Id}) = 4 - \operatorname{rg}(A-(1+2i)I_4) = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -2i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2i & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2i \end{pmatrix}$$

Las filas 3 y 4 son proporcionales $F_4 = -iF_3$, por lo que el rango de la matriz $A-(1+2i)I_4$ es como mucho 3. Escalonamos la matriz para determinar el rango. Este trabajo nos servirá para calcular después, con más facilidad, unas ecuaciones implícitas de $K^1(1+2i)$.

$$A-(1+2i)I_4 = \begin{pmatrix} -2i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2i & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_4 \to f_4 + if_3 \\ f_2 \to f_2 + if_1 \\ f_3 \to f_3 + 2f_2}]{} \begin{pmatrix} -2i & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_1$$

Entonces, la multiplicidad geométrica del autovalor es $g_1 = \dim \operatorname{Ker}(f-(1+2i)\operatorname{Id}) = 1$, lo que implica que en la forma canónica habrá un único bloque de Jordan asociado a este autovalor, y el subespacio máximo es $M(1+2i) = K^2(1+2i) = \operatorname{Ker}(f-(1+2i)\operatorname{Id})^2$.

- Subespacio generalizado primero: $V_{1-2i} = K^1(1-2i) = \operatorname{Ker}(f-(1-2i)\operatorname{Id})$

$$\dim \operatorname{Ker}(f-(1-2i)\operatorname{Id}) = 4 - \operatorname{rg}(A-(1-2i)I_4) = 4 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2i & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2i \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz para determinar el rango

$$A-(1-2i)I_4 = \begin{pmatrix} 2i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2i & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2i \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_4 \to f_4 - if_3 \\ f_2 \to f_2 - if_1 \\ f_3 \to f_3 + 2f_2}]{} \begin{pmatrix} 2i & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2$$

Entonces, la multiplicidad geométrica del autovalor es $g_2 = \dim \operatorname{Ker}(f-(1-2i)\operatorname{Id}) = 1$, lo que implica que en la forma habrá un único bloque de Jordan asociado al autovalor $\lambda_2 = 1-2i$, y el subespacio máximo es $M(1-2i) = K^2(1-2i) = \operatorname{Ker}(f-(1-2i)\operatorname{Id})^2$.

La forma canónica de Jordan es

$$J = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1+2i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+2i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-2i \end{array}\right)$$

El espacio vectorial se descompone en suma directa $\mathbb{C}^4 = M(1+2i) \oplus M(1-2i)$ y una base de Jordan $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ debe cumplir que $\{v_1, v_2\}$ sea una base de Jordan de $M(1+2i)$ y $\{v_3, v_4\}$ sea una base de Jordan de $M(1-2i)$. Es decir,

$$v_1 \in K^2(1+2i) - K^1(1+2i), \quad v_2 = (f - (1+2i)\,\mathrm{Id})(v_1)$$
$$v_3 \in K^2(1-2i) - K^1(1-2i), \quad v_4 = (f - (1-2i)\,\mathrm{Id})(v_3)$$

Unas ecuaciones implícitas de $K^1(1+2i)$ se obtienen del sistema $(A - (1+2i)I_4)X = 0$, o el sistema equivalente $A_1X = 0$, que simplificado resulta ser

$$K^1(1+2i) \equiv \{-ix_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$$

Unas ecuaciones de $K^2(1+2i)$ se obtienen del sistema $(A-(1+2i)I_4)^2X = 0$. Realizamos operaciones elementales de filas para simplificar la matriz del sistema, teniendo en cuenta que $F_2 = -iF_1$ y $F_4 = -iF_3$.

$$(A - (1+2i)I_4)^2 = \begin{pmatrix} -8 & -8i & -4i & 4 \\ 8i & -8 & -4 & -4i \\ 0 & 0 & -8 & -8i \\ 0 & 0 & 8i & -8 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Unas ecuaciones de $K^2(1+2i)$ son $\{x_1 + ix_2 = 0,\ x_3 + ix_4 = 0\}$. Entonces podemos tomar

$$v_1 = (0,0,1,i) \in K^2(1+2i) - K^1(1+2i)$$

y calculamos $v_2 = (f - (1+2i)\,\mathrm{Id})(v_1)$:

$$\begin{pmatrix} 2i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2i & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (1, i, 0, 0)$$

Del mismo modo, para el autovalor $\lambda_2 = 1 - 2i$. Unas ecuaciones implícitas de $K^1(1-2i)$ se obtienen simplificando el sistema lineal homogéneo $(A - (1-2i)I_4)X = 0$, o el sistema equivalente $A_2X = 0$, de donde se obtiene

$$K^1(1-2i) \equiv \{ix_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$$

Unas ecuaciones implícitas de $K^2(1-2i)$ se obtienen del sistema $(A-(1-2i)I_4)^2X=0$. Se realizan operaciones elementales de filas a la matriz del sistema para simplificarlo:

$$(A-(1-2i)I_4)^2 = \begin{pmatrix} -8 & 8i & 4i & 4 \\ -8i & -8 & -4 & 4i \\ 0 & 0 & -8 & 8i \\ 0 & 0 & -8i & -8 \end{pmatrix} \sim_f \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $K^2(1-2i) \equiv \{x_1 - ix_2 = 0,\ x_3 - ix_4 = 0\}$, y podemos tomar

$$v_3 = (0,0,1,-i) \in K^2(1-2i) - K^1(1-2i)$$

Después, calculamos $v_4 = (f-(1-2i)\,\mathrm{Id})(v_3)$:

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -2i & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2i & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_4 = (1,-i,0,0)$$

Finalmente, una base de Jordan es

$$\mathcal{B}' = \{(0,0,1,i),(1,i,0,0),(0,0,1,-i),(1,-i,0,0)\}$$

y la matriz de cambio de base

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que se cumple $P^{-1}AP = J$, ya que

$$AP = PJ = \begin{pmatrix} 1 & 1+2i & 1 & 1-2i \\ i & -2+i & -i & -2-i \\ 1+2i & 0 & 1-2i & 0 \\ -2+i & 0 & -2-i & 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

Observación: Para los autovalores complejos conjugados $\lambda = 1+2i$ y $\overline{\lambda} = 1-2i$ se han obtenido bases de Jordan formadas por vectores conjugados. Es decir $\{v_1, v_2\}$ es una base de Jordan de $M(\lambda)$ y $\{\overline{v}_1 = v_3, \overline{v}_2 = v_4\}$ es una base de Jordan de $M(\overline{\lambda})$. Esto ocurre siempre si las entradas de la matriz son números reales. El resultado general sería el siguiente.

Si A es la matriz de un endomorfismo complejo f y todas las entradas de A son reales, entonces:

(1) λ es autovalor de f si y sólo si $\overline{\lambda}$ es autovalor de f, y

(2) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base de Jordan de $M(\lambda)$ si y sólo si $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k\}$ es una base de Jordan de $M(\overline{\lambda})$.

5.29. Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V de dimensión 4 que respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, , v_4\}$ tiene la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que los subespacios $U = L(v_1, v_2)$ y $W = L(v_3, v_4)$ son f−invariantes.

(b) Sea $f|_U$ la aplicación restricción de f a U. Determine la matriz de $f|_U$ respecto de la base $\mathcal{B}_U = \{v_1, v_2\}$ de U, la forma canónica de Jordan de $f|_U$ y la correspondiente base de Jordan.

(c) Sin hacer más cálculos, y teniendo en cuenta la estructura en bloques de la matriz de f, dé una base $\mathcal{B}'$ de V respecto de la cual $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan de f.

Solución:

(a) El subespacio $U = L(v_1, v_2)$ es f−invariante si y sólo si las imágenes $f(v_1)$ y $f(v_2)$ pertenecen a U. Las coordenadas de $f(v_1)$ y $f(v_2)$ son las entradas de la primera y segunda columnas de la matriz de f.

$$f(v_1) = (4, 4, 0, 0)_{\mathcal{B}} = 4v_1 + 4v_2 \in U \text{ y } f(v_2) = (-1, 0, 0, 0)_{\mathcal{B}} = -v_1 \in U$$

Por tanto, U es f−invariante. Del mismo modo, se demuestra que $W = L(v_3, v_4)$ es f−invariante, ya que

$$f(v_3) = (0, 0, 4, 4)_{\mathcal{B}} = 4v_3 + 4v_4 \in W \text{ y } f(v_4) = (0, 0, -1, 0)_{\mathcal{B}} = -v_3 \in W$$

(b) La matriz de $f|_U : U \to U$ respecto de la base $\mathcal{B}_U = \{v_1, v_2\}$ es

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_U}(f|_U) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico es $p_{f|_U}(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (2-\lambda)^2$, por lo que $f|_U$ tiene un autovalor $\lambda = 2$ de multiplicidad algebraica $a = 2$. La multiplicidad geométrica es

$$g = \dim(\operatorname{Ker}(f|_U - 2\,\mathrm{Id})) = 2 - \operatorname{rg}(A - 2I_2) = 2 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1$$

por lo que en la forma canónica hay un único bloque de Jordan

$$J(f|_U) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Además, el subespacio generalizado segundo será el subespacio máximo $M(2) = K^2(2) = U$ pues $K^1(2) \subsetneq K^2(2) \subseteq U$ y $\dim U = 2$.

Una base de Jordan $\mathcal{B}'_U = \{u_1, u_2\}$ debe cumplir

$$u_1 \in K^2(2) - K^1(2) \;\; \text{y} \;\; u_2 = (f|_U - 2\,\mathrm{Id})(u_1)$$

Determinamos unas ecuaciones de $K^1(2) = \mathrm{Ker}(f|_U - 2\,\mathrm{Id})$ respecto de $\mathcal{B}_U$

$$K^1(2) \equiv \{(A - 2I_2)X = 0\} = \left\{ (x_1, x_2)_{\mathcal{B}_U} : \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo que una ecuación implícita de $K^1(2)$ es $2x_1 - x_2 = 0$. Teniendo en cuenta que $K^2(2) = U$, podemos tomar

$$u_1 = v_1 = (1, 0)_{\mathcal{B}_U} \in K^2(2) - K^1(2)$$

y así

$$u_2 = (f|_U - 2\,\mathrm{Id})(u_1) = (2, 4)_{\mathcal{B}_U} = 2v_1 + 4v_2$$

Entonces, una base de Jordan de $f|_U$ es $\mathcal{B}'_U = \{v_1,\, 2v_1 + 4v_2\}$.

(c) Teniendo en cuenta la estructura en bloques de la matriz de f, podemos afirmar que la matriz de $f|_W : W \to W$ respecto de la base $\mathcal{B}_W = \{v_3, v_4\}$ es

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_W}(f|_W) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma canónica de Jordan es

$$J(f|_W) = J(f|_U) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y una base de Jordan $\mathcal{B}'_W = \{v_3,\, 2v_3 + 4v_4\}$.

Finalmente, considerando la descomposición en subespacios invariantes $V = U \oplus W$, y la base

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}'_W = \{v_1,\, 2v_1 + 4v_2,\, v_3,\, 2v_3 + 4v_4\}$$

se tiene que

$$J = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

que es la forma canónica de Jordan de f.

Siempre es conveniente confirmar que se ha hecho bien el cambio de base, para lo cual, verificamos la igualdad $AP = PJ$, con $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

$$P = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \quad \square$$

5.30. Teniendo en cuenta los Ejercicios 5.23. y 5.10. determine la forma canónica de Jordan y una base de Jordan del endomorfismo g de $\mathbb{K}^5$ con matriz

$$C = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

Solución: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^5$. De la estructura en bloques de la matriz de g respecto de $\mathcal{B}$ podemos afirmar que los subespacios suplementarios $U = L(v_1, v_2, v_3)$ y $W = L(v_4, v_5)$ son $g-$invariantes. Consideramos los endomorfismos restricción de g a cada uno de los subespacios

$$g|_U : U \longrightarrow U, \quad g|_W : W \longrightarrow W$$

cuyas matrices son

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}_U}(g|_U) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_W}(g|_W) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

respecto de las bases $\mathcal{B}_U = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}_W = \{v_4, v_5\}$. Las formas canónicas de Jordan de estas matrices se calcularon en los Ejercicios 5.23. y 5.10.

La forma canónica de $g|_U$ es

$$J(g|_U) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'_U}(g|_U) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la base de Jordan es $\mathcal{B}'_U = \{u_1, u_2, u_3\}$ con

$$u_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}_U} = v_1, \; u_2 = (0,1,1)_{\mathcal{B}_U} = v_2 + v_3, \; u_3 = (1,-1,0)_{\mathcal{B}_U} = v_1 - v_2$$

La forma canónica de $g|_W$ es

$$J(g|_W) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'_W}(g|_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la base de Jordan es $\mathcal{B}'_W = \{u_4, u_5\}$ con

$$u_4 = (1,1)_{\mathcal{B}_W} = v_4 + v_5, \; u_2 = (3,4)_{\mathcal{B}_W} = 3v_4 + 4v_5$$

Uniendo las dos bases de Jordan

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}'_W = \{u_1, \ldots, u_5\}$$

se tiene la forma canónica de g, $J(g) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g)$

$$J(g) = \left(\begin{array}{c|c} J(g|_U) & 0 \\ \hline 0 & J(g|_W) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

La matriz de cambio de base es

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y podemos comprobar que se cumple la igualdad $CP = PJ(g)$. $\square$

5.31. Demuestre que todas las matrices de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{K})$ de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ a & \lambda & 0 & 0 \\ d & b & \lambda & 0 \\ f & e & c & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{K} \text{ no nulos}$$

son semejantes.

Solución: Por un lado, al ser triangulares todas las matrices dadas cumplen el Teorema de existencia de forma canónica de Jordan. Por otro, sabemos que dos matrices son semejantes si y sólo si tienen la misma forma canónica. Por tanto, el problema planteado es equivalente a demostrar que todas las matrices en las condiciones dadas tienen la misma forma canónica de Jordan.

Sea f un endomorfismo de $\mathbb{K}^4$ con matriz A igual a la dada en el enunciado. Podemos afirmar que tiene un único autovalor λ de multiplicidad algebraica igual a 4. Para determinar su forma canónica, estudiamos las dimensiones de los subespacios generalizados.

El subespacio propio (o generalizado primero) tiene dimensión

$$\dim K^1(\lambda) = 4 - \operatorname{rg}(A - \lambda I_4) = 4 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ d & b & 0 & 0 \\ f & e & c & 0 \end{pmatrix}$$

Si a, b y c son distintos de 0, entonces el rango de la matriz $A - \lambda I_4$ es igual a 3 para todo $d, e, f \in \mathbb{K}$. Por lo tanto, la multiplicidad geométrica del autovalor es $g = \dim K^1(\lambda) = 1$ para todo $d, e, f \in \mathbb{K}$, de lo que podemos deducir que en todos los casos, en la forma canónica de Jordan habrá un único bloque de Jordan. Es decir, la forma canónica de todas las matrices es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Nótese que no hemos necesitado calcular toda la cadena de subespacios propios generalizados, pues, en este caso, el subespacio propio determina la dimensión de los restantes. La tabla de la base de Jordan para que haya un único bloque es de la forma

Dimensiones:	1		2		3		4
Subespacios:	$K^1(2)$	$\subset$	$K^2(2)$	$\subset$	$K^3(2)$	$\subset$	$K^4(2) = M(2)$
	v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1

□

Los siguientes casos generales se demuestra con el mismo argumento

- Son semejantes todas las matrices de orden n triangulares inferiores de la forma

$$a_{ii} = \lambda,\ i = 1, \ldots, n;\ a_{i,i-1} \neq 0,\ i = 2, \ldots, n;$$

- Son semejantes todas las matrices de orden n triangulares superiores de la forma

$$a_{ii} = \lambda,\ i = 1, \ldots, n;\ a_{i,i+1} \neq 0,\ i = 1, \ldots, n-1. \quad \square$$

5.32. Determine la forma canónica de Jordan del endomorfismo f de $\mathbb{K}^5$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

según los valores de $a, b, c \in \mathbb{K}$.

Solución: El endomorfismo tiene un único autovalor $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica $a = 5$. En primer lugar, observamos que si $a = b = c = 0$, entonces la matriz dada ya es una matriz de Jordan, por lo que de aquí en adelante supondremos que alguno de los valores es distinto de 0.

Determinamos los subespacios propios generalizados y sus dimensiones.

$$\dim K^1(2) = \dim \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = 5 - \operatorname{rg}(A - 2I_5) = 5 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz $A - 2I_5$ es igual al número de elementos no nulos en el conjunto $\{a, b, c\}$, al que llamaremos n.

(1) Si $n = 1$, entonces $\mathrm{rg}(A - 2I_5) = 1$ y $\dim K^1(2) = 4$. Este valor, que es la multiplicidad geométrica, indica el número de bloques de Jordan que habrá en la forma canónica. Si la matriz de Jordan, de orden 5, tiene cuatro bloques de Jordan, entonces, salvo permutación de bloques, es de la forma

$$J_1 = \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Aunque no es necesario, vamos a confirmar que la tabla de la base de Jordan se corresponde con esta forma canónica. En efecto, dado que $\dim K^1(2) = 4$ es una unidad menor que la multiplicidad algebraica, entonces el siguiente subespacio generalizado tiene dimensión 5 y es el subespacio máximo

$$M(2) = K^2(2)$$

La tabla de la base de Jordan es la siguiente

Dimensiones:	4		5
Subespacios:	$K^1(2)$	$\subset$	$K^2(2) = M(2)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_3		
	v_4		
	v_5		

y las cuatro filas de vectores de la tabla se corresponden con los cuatro bloques de J_1.

(2) Si $n = 2$, entonces $\mathrm{rg}(A - 2I_5) = 2$ y $\dim K^1(2) = 3$, por lo que en la matriz de Jordan habrá 3 bloques y se tienen dos posibilidades respecto a los órdenes de los bloques: 3, 1 y 1; o bien 2, 2 y 1. Para determinar cada caso tenemos que seguir estudiando las dimensiones de los subespacios generalizados.

$$\dim K^2(2) = \dim \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^2 = 5 - \mathrm{rg}(A - 2I_5)^2 = 5 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí hay que distinguir cuál de los tres elementos $\{a, b, c\}$ es igual a 0 y aparecen dos casos:

(2.1) Si $a \neq 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$, entonces $\dim K^2(2) = 4$. Como la dimensión es una unidad menor que la multiplicidad algebraica, entonces el siguiente subespacio generalizado tendrá dimensión 5 y por tanto será el subespacio máximo

$$M(2) = K^3(2) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^3$$

En tal caso, se tiene la siguiente tabla para la base de Jordan

Dimensiones: Subespacios:	3 $K^1(2)$	$\subset$	4 $K^2(2)$	$\subset$	5 $K^3(2) = M(2)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4				
	v_5				

que se corresponde con la siguiente forma canónica

$$J_2 = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

(2.2) Si $b \neq 0$ y uno de los dos valores a o c es igual a 0, entonces $\dim K^2(2) = 5$, por lo que éste sería el subespacio máximo. La tabla de la base de Jordan sería

Dimensiones: Subespacios:	3 $K^1(2)$	$\subset$	5 $K^2(2) = M(2)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4	$\leftarrow$	v_3
	v_5		

que se corresponde con la siguiente forma canónica

$$J_3 = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

(3) Si $n = 3$, entonces los tres valores a, b y c son distintos de 0 y $\dim K^1(2) = 2$. Por lo tanto, en la matriz de Jordan habrá 2 bloques y se tienen dos posibilidades respecto a los órdenes de los bloques: 4 y 1; o bien 3 y 2. Para determinar cada caso, tenemos que seguir estudiando las dimensiones de los subespacios generalizados.

$$\dim K^2(2) = \dim \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})^2 = 5 - \operatorname{rg}(A - 2I_5)^2 = 5 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

Razonando igual que en el caso 2.1 se tiene que $K^3(2) = M(2)$.

Ahora, la tabla de la base de Jordan es la siguiente:

Dimensiones: Subespacios:	2 $K^1(2)$	$\subset$	4 $K^2(2)$	$\subset$	5 $K^3(2) = M(2)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_5	$\leftarrow$	v_4		

y la forma canónica correspondiente es

$$J_4 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \qquad \square$$

5.33. Determine la forma canónica de Jordan, y una base de Jordan, del endomorfismo de $\mathbb{K}_3[x]$ que consiste en la derivación de polinomios.

Solución: Sea $f : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_3[x]$ definido por $f(p(x)) = p'(x)$. En el Ejercicio 5.4. ya habíamos calculado los autovalores y subespacios propios asociados de este endomorfismo. Su matriz respecto de la base canónica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ es

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene un único autovalor $\lambda = 0$ de multiplicidad algebraica 4.

Utilizamos la siguiente notación para las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$

$$p(x) = x_0 + x_1 x + x_2 x^2 + x_3 x^3 = (x_0, x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}}$$

El subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 0$ tiene las siguientes ecuaciones implícitas

$$V_0 = \operatorname{Ker}(f - 0\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Ker}(f) = \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$$

Este subespacio tiene dimensión 1, por lo que la forma canónica de Jordan esta formada por un único bloque de Jordan. Es decir

$$J(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La tabla de la base de Jordan está formada por una única fila

Dimensiones: Subespacios:	1 $K^1(0)$	$\subset$	2 $K^2(0)$	$\subset$	3 $K^3(0)$	$\subset$	4 $K^4(0) = M(0)$
	v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1

Para determinar la base de Jordan $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, tomamos $v_1 \in K^4(0) - K^3(0)$, teniendo en cuenta que $K^4(0)$ es el espacio total.

Unas ecuaciones implícitas de $K^3(0)$ se obtienen del sistema lineal $A^3X = 0$

$$K^3(0) = \left\{ (x_0, x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{B}} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de donde $K^3(0) \equiv \{x_3 = 0\}$. Entonces, podemos tomar $v_1 = x^3 = (0,0,0,1)_{\mathcal{B}} \notin K^3(0)$. El resto de vectores de la base son:

$$v_2 = f(v_1), \; v_3 = f^2(v_1), \; v_4 = f^3(v_1)$$

Utilizamos la matriz de f para calcularlos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v_2 = (0,0,3,0)_{\mathcal{B}} = 3x^2$$

o simplemente la definición de f: $v_2 = f(v_1) = f(x^3) = (x^3)' = 3x^2$. Del mismo modo se obtienen

$$v_3 = f^2(v_1) = f(f(v_1)) = f(v_2) = (3x^2)' = 6x$$
$$v_4 = f^3(v_1) = f(f^2(v_1)) = f(v_3) = (6x)' = 6$$

Por tanto, una base de Jordan de f es

$$\mathcal{B}' = \{x^3, \, 3x^2, \, 6x, \, 6\} \quad \square$$

5.34. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^8$ que respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_8\}$ tiene la siguiente matriz

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine una base de cada subespacio propio generalizado.

Solución: La matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es una matriz de Jordan y a partir de su estructura en bloques se puede determinar la dimensión de cada subespacio generalizado y la tabla de construcción de la base de Jordan de cada subespacio máximo.

En primer lugar, tenemos los siguientes autovalores: $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $a_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica $a_2 = 5$.

Base de Jordan del subespacio máximo $M(1)$:

En la matriz de Jordan hay dos bloques asociados al autovalor 1. Cada bloque se corresponde con una fila de la tabla de la base de Jordan y el tamaño del bloque coincide con el número de vectores de la fila. Por tanto, la tabla de Jordan de $M(1)$ es

Dimensiones: Subespacios:	2 $K^1(1)$	 $\subset$	3 $K^2(1) = M(1)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_3		

Una base de $K^1(1) = \text{Ker}(f - \text{Id})$ está formada por los vectores de la primera columna de la tabla $\{v_2, v_3\}$.

Una base de $K^2(1) = \text{Ker}(f - \text{Id})^2$ está formada por los vectores de las columnas 1 y 2 de la tabla: $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Base de Jordan del subespacio máximo $M(2)$:

En la matriz de Jordan hay dos bloques asociados al autovalor 2. El primer bloque, de tamaño 3×3 se corresponde con la primera fila de la tabla de la base de Jordan, que tendrá tres vectores. El segundo bloque, de tamaño 2×2, se corresponde con la segunda fila que tendrá dos vectores. La tabla de Jordan de $M(2)$ es:

Dimensiones: Subespacios:	2 $K^1(2)$	 $\subset$	4 $K^2(2)$	 $\subset$	5 $K^3(2) = M(2)$
	v_6	$\leftarrow$	v_5	$\leftarrow$	v_4
	v_8	$\leftarrow$	v_7		

Una base de $K^1(2) = \text{Ker}(f - 2\,\text{Id})$ está formada por los vectores de la primera columna de la tabla: $\{v_6, v_8\}$.

Una base de $K^2(2) = \text{Ker}(f - 2\,\text{Id})^2$ está formada por los vectores de la primera y segunda columnas de la tabla $\{v_5, v_6, v_7, v_8\}$.

Una base de $K^3(2) = \text{Ker}(f - 2\,\text{Id})^3$ está formada por los vectores de la primera, segunda y tercera columnas de la tabla: $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$. $\square$

5.35. Los subespacios generalizados de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^6$ son

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}) \equiv \{x_1+x_2+x_3+x_4=0,\ x_5-x_6=0,\ x_1-x_5=0\} \\ &\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{Id})^2 = \mathbb{K}^6 \end{aligned}$$

Determine su forma canónica de Jordan y estudie si los vectores

$$v_1=(1,1,0,0,1,1),\ v_3=(0,1,0,0,0,0),\ v_5=(0,0,1,0,0,0)$$

pueden pertenecer a una base de Jordan $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$ de f.

Solución: En primer lugar, determinamos las dimensiones de los subespacios generalizados para poder escribir la tabla de la base de Jordan y la forma canónica.

El espacio generalizado segundo asociado al autovalor $\lambda=3$ es el espacio total, por lo que se trata del subespacio máximo $M(3)=\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{Id})^2$. Entonces, $\lambda=3$ es el único autovalor de f de multiplicidad algebraica $a=6$. Por otro lado, la multiplicidad geométrica, que es la dimensión del subespacio propio es

$$g=\dim(\operatorname{Ker}(f-3\,\mathrm{Id}))=6-(\text{n}^\text{o}.\text{ ecuaciones implícitas})=3$$

por lo que la tabla de la base de Jordan es la siguiente

Dimensiones:	3		6
Subespacios:	$K^1(3)$	$\subset$	$K^2(3)=M(3)=\mathbb{K}^6$
	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4	$\leftarrow$	v_3
	v_6	$\leftarrow$	v_5

Cada fila de vectores determina un bloque de Jordan y el tamaño del bloque es igual al número de vectores de la fila, luego la forma canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Para la segunda parte del ejercicio tenemos en cuenta que los vectores v_1, v_3 y v_5 pueden pertenecer a la base de Jordan si son vectores de $K^2(3)-K^1(3)$ y generan un suplementario de $K^1(3)$ en $K^2(3)$. Es decir, si cumplen

$$K^2(3)=K^1(3)\oplus L(v_1,v_3,v_5) \tag{5.2}$$

Un diagrama de esta situación puede verse en la Figura 5.3, donde aparecen sombreados los subespacios $K^1(3)=L(v_2,v_4,v_6)$ y su suplementario $L(v_1,v_3,v_5)$. Ambos subespacios tienen en común el vector 0, que se ha marcado como un punto.

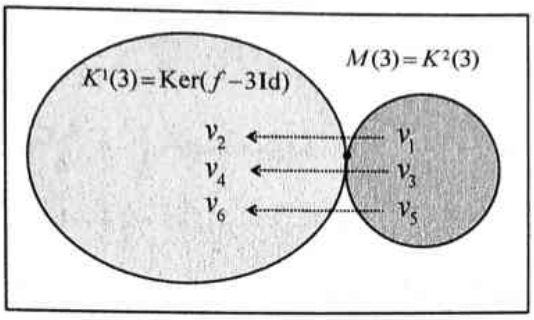


Figura 5.3: Diagrama de los vectores de la base de Jordan.

Si tomamos una base cualquiera de $\mathcal{B}_{K^1(3)} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $K^1(3)$, la condición (5.2) es equivalente a que los vectores $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_3, v_5\}$ determinen una base de $K^2(3) = \mathbb{K}^6$. Es decir, $\{v_1, v_3, v_5\}$, los vectores dados, son válidos para formar una base de Jordan de f si y sólo si $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_3, v_5\}$ son linealmente independientes.

Consideramos los vectores

$$u_1 = (1, -1, 0, 0, 1, 1),\ u_2 = (0, 1, -1, 0, 0, 0),\ u_3 = (0, 0, 1, -1, 0, 0)$$

que forman una base de $K^1(3)$ y comprobamos el rango del conjunto $\{u_1, u_2, u_3, v_1, v_3, v_5\}$. La matriz de coordenadas por filas es

$$\left(\begin{array}{cccccc||c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & u_3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & v_5 \end{array}\right)$$

cuyo determinante es igual a 0. Por tanto, los vectores no son linealmente independientes, y $\{v_1, v_3, v_5\}$ no son válidos para formar una base de Jordan. $\square$

5.36. Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales las siguiente matrices son semejantes en $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1-a & a & -a \\ -a & a+1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 1-b & b-1 \\ b-1 & 2 & 0 \\ 0 & b & 2-b \end{pmatrix}$$

Solución: Para que las matrices sean semejantes tienen que tener la misma forma canónica: forma canónica de Jordan, si admiten, o forma de Jordan real. Por lo tanto, tenemos que comenzar determinando sus formas canónicas.

El polinomio característico de la matriz A es

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-a-\lambda & a & -a \\ -a & a+1-\lambda & 1-a \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} 1-a-\lambda & a \\ -a & a+1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

Entonces, los autovalores de A son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $a_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica $a_2 = 1$. Se cumple el Teorema de existencia, por lo que A admite una forma canónica de Jordan, que dependerá de la multiplicidad geométrica, g_1, del autovalor doble $\lambda_1 = 1$.

$$g_1 = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -a & a & -a \\ -a & a & 1-a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{si } a \neq 0 \end{cases}$$

La multiplicidad geométrica g_1 indica el número de bloques de Jordan correspondientes al autovalor $\lambda_1 = 1$ en la forma canónica de Jordan, por lo que se tienen las siguientes opciones:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ si } a = 0, \quad \text{o bien} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ si } a \neq 0.$$

El polinomio característico de la matriz B es

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} b-\lambda & 1-b & b-1 \\ b-1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & b & 2-b-\lambda \end{pmatrix}$$

Desarrollamos el determinante por la segunda fila

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= -(b-1)\det \begin{pmatrix} 1-b & b-1 \\ b & 2-b-\lambda \end{pmatrix} + (2-\lambda)\det \begin{pmatrix} b-\lambda & b-1 \\ 0 & 2-b-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -(b-1)((1-b)(2-b-\lambda) - b(b-1)) + (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2b - b^2) \\ &= -(b-1)((1-b)(2-\lambda)) + (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2b - b^2) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \end{aligned}$$

Se tiene que $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ para todo b, por lo que los autovalores de B son los mismos que los de A, es decir $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica $a_1 = 2$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad algebraica $a_2 = 1$.

La multiplicidad geométrica g_1 del autovalor $\lambda_1 = 1$ de B es

$$g_1 = 3 - \mathrm{rg}(B - I_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} b-1 & 1-b & b-1 \\ b-1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } b = 1 \\ 1 & \text{si } b \neq 1 \end{cases}$$

Entonces la forma canónica de Jordan de B es

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ si } b = 1, \quad \text{o bien} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ si } b \neq 1.$$

Finalmente, las matrices A y B son semejantes si tiene la misma forma canónica, es decir, si $a = 0$ y $b = 1$, o bien, si $a \neq 0$ y $b \neq 1$. □

5.37. Encuentre un ejemplo de dos matrices A y B no triangulares que tengan los mismos autovalores pero no sean semejantes.

Solución: Dos matrices A y B que tienen los mismos autovalores no son semejantes si tienen distinta forma canónica. Elegimos dos formas canónicas distintas $J(A)$ y $J(B)$ con los mismos autovalores. Por ejemplo:

$$J(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } J(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ambas matrices tienen un único autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica 3.

Si las matrices A y B son semejantes a $J(A)$ y $J(B)$ respectivamente, entonces serán de la forma

$$A = PJ(A)P^{-1} \text{ y } B = QJ(B)Q^{-1}$$

donde P y Q son matrices invertibles.

Basta elegir tales matrices P y Q y obtenemos A y B en las condiciones pedidas

$$A = PJ(A)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = QJ(B)Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad □$$

Problemas inversos

5.38. Determine la forma canónica de Jordan de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ que tiene un único autovalor λ de multiplicidad algebraica 4, tal que los subespacios generalizados, $K^i(\lambda) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})^i$, cumplen:

$$K^1(\lambda) \subsetneq K^2(\lambda) \subsetneq K^3(\lambda) = K^4(\lambda)$$

Solución: La secuencia de subespacios indica que el subespacio máximo es

$$M(\lambda) = K^3(\lambda)$$

ya que es el primero a partir del cual se empiezan a repetir los subespacios propios generalizados. La dimensión del subespacio máximo coincide con la multiplicidad algebraica del autovalor, por lo que $\dim K^3(\lambda) = 4$.

Si el subespacio máximo es $M(\lambda) = K^3(\lambda)$, entonces la primera fila de vectores en la tabla de la base de Jordan contendrá tres vectores. Por tanto, será de la forma

Dimensiones:	d_1		d_2		4
Subespacios:	$K^1(\lambda)$	$\subset$	$K^2(\lambda)$	$\subset$	$K^3(\lambda) = M(\lambda)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1

Como el número total de vectores en la base de Jordan es igual a cuatro, entonces las dimensiones d_1 y d_2, de los subespacios $K^1(\lambda)$ y $K^2(\lambda)$, respectivamente, sólo pueden ser

$$d_1 = 2 \text{ y } d_2 = 3$$

La tabla de la base de Jordan en este caso sería la siguiente

Dimensiones:	2		3		4
Subespacios:	$K^1(\lambda)$	$\subset$	$K^2(\lambda)$	$\subset$	$K^3(\lambda) = M(\lambda)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4				

La primera fila de vectores determina un bloque de orden 3×3 en la forma canónica de Jordan. La última fila de vectores, que contiene sólo uno, determina un bloque de Jordan de orden 1×1. Por tanto la forma canónica de Jordan del endomorfismo es

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right) \quad \square$$

5.39. Determine la forma canónica de Jordan de un endomorfismo f de $\mathbb{C}^7$ que cumple las siguientes condiciones:

(a) $\operatorname{rg}(f) = 5$ y $\operatorname{rg}((f - \mathrm{Id})^2) = 4$.

(b) El polinomio característico es $p_f(\lambda) = -\lambda^3(1-\lambda)^4$.

Solución: En primer lugar, del apartado (b) se deduce que los autovalores de f y sus multiplicidades algebraicas son

$$\lambda_1 = 0,\ a_1 = 3;\ \lambda_2 = 1,\ a_2 = 4$$

Para determinar la forma canónica hay que conocer las dimensiones de los subespacios propios generalizados. Para ello utilizaremos que

$$\dim(\operatorname{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})^j) = \dim(\mathbb{C}^7) - \operatorname{rg}((f - \lambda_i \mathrm{Id})^j)$$

Para el autovalor $\lambda_1 = 0$ tenemos que la multiplicidad geométrica es

$$g_1 = \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 7 - \operatorname{rg}(f) = 7 - 5 = 2$$

Esta es la dimensión del subespacio generalizado primero e indica que en la forma canónica de Jordan habrá dos bloques asociados a este autovalor. Además, como la multiplicidad algebraica del autovalor es 3, la única opción en la forma canónica es que haya un bloque de orden 2 y otro de orden 1.

Para el autovalor $\lambda_2 = 1$ se tiene que la dimensión del subespacio propio generalizado segundo $K^2(1) = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})^2$ es

$$\dim K^2(1) = 7 - \operatorname{rg}(f - \mathrm{Id})^2 = 7 - 4 = 3$$

Como esta dimensión es menor que la multiplicidad algebraica del autovalor, entonces este no es el subespacio máximo, y como $K^2(1) \subsetneq K^3(1)$, entonces $\dim K^3(1) = 4$, por lo que $K^3(1) = M(1)$. Entonces, las tablas de la base de Jordan de cada subespacio máximo son de la forma:

$\overset{2}{K^1(1)}$	$\subset$	$\overset{3}{K^2(1)}$	$\subset$	$\overset{4}{K^3(1) = M(1)}$
v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
v_4				

$\overset{2}{K^1(0)}$	$\subset$	$\overset{3}{K^2(0) = M(0)}$
v_6	$\leftarrow$	v_5
v_7		

y la forma canónica de Jordan es, salvo permutación de bloques, la siguiente matriz

$$J(f) = \left(\begin{array}{c|c} J(f|_{M(1)}) & 0 \\ \hline 0 & J(f|_{M(0)}) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \square$$

5.40. De un endomorfismo f de $\mathbb{C}^n$ no diagonalizable se sabe que:

(a) Tiene tres autovalores distintos: 1, 2 y 3.

(b) El subespacio máximo $M(1)$ es una recta de $\mathbb{C}^n$

(c) $K^2(2) \subsetneq M(2)$ y $\dim M(2) = 4$.

(d) El subespacio máximo $M(3)$ es igual a $K^2(3)$ y es un plano de $\mathbb{C}^n$.

Determine n y las posibles formas canónicas de Jordan de f.

Solución: En primer lugar, por ser f un endomorfismo de un espacio vectorial complejo, siempre admite una forma canónica de Jordan. Entonces, si llamamos $\lambda_i = i,\ i = 1, 2, 3;$ a los autovalores y $a_i,\ i = 1, 2, 3;$ a las multiplicidades algebraicas, se cumple que

$$a_1 + a_2 + a_3 = n$$

Por otro lado, como la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincide con la dimensión del subespacio máximo, se tiene

$$a_1 = \dim(M(1)) = 1,\ a_2 = \dim(M(2)) = 4,\ a_3 = \dim(M(3)) = 2 \ \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 7$$

Luego f es un endomorfismo de $\mathbb{C}^7$.

Para determinar la forma canónica de Jordan hay que calcular las dimensiones de los subespacios propios generalizados.

Para el autovalor $\lambda_1 = 1$, de multiplicidad algebraica 1, se tiene

$$g_1 = a_1 = M(1) = K^1(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$$

por lo que habrá un único bloque de orden 1 en la matriz de Jordan de f asociado a este autovalor.

Para el autovalor $\lambda_3 = 3$, la cadena de subespacios propios generalizados es

$$K^1(3) \subsetneq K^2(3) = M(3) \quad \text{con} \quad \dim(M(3)) = 2$$

por lo que multiplicidad geométrica es $g_3 = \dim(K^1(3)) = 1$. Entonces, hay único bloque de Jordan asociado a este autovalor que será de orden 2.

Para el autovalor $\lambda_2 = 2$ se tiene la siguiente cadena de subespacios

$$K^1(2) \subsetneq K^2(2) \subsetneq M(2) \quad \text{con} \quad \dim(M(2)) = 4$$

por lo que se tienen dos posibilidades:

$$K^3(2) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^3 = M(2) \ \text{ o } K^4(2) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^4 = M(2)$$

(1) Si $K^3(2) = M(2)$, entonces la tabla de a base de Jordan de $M(2)$ es de la forma

Dimensiones: Subespacios:	2 $K^1(2)$	 $\subset$	3 $K^2(2)$	 $\subset$	4 $K^3(2) = M(2)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4				

por lo que habrá dos bloques de Jordan asociados a este autovalor: uno de orden 3 y otro de orden 1. La forma canónica de Jordan de f será

$$J_1 = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c|}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \cline{4-6} 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{3} & \multicolumn{1}{c|}{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{1} & \multicolumn{1}{c|}{3} & 0 \\ \cline{5-7} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{1} \end{array}\right)$$

(2) Si $K^4(2) = M(2)$, entonces la tabla de a base de Jordan de $M(2)$ es de la forma

Dimensiones:	1		2		3		4
Subespacios:	$K^1(2)$	$\subset$	$K^2(2)$	$\subset$	$K^3(2)$	$\subset$	$K^4(2) = M(2)$
	v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1

por lo que habrá un único bloque de Jordan, de orden 4, asociado a este autovalor. La forma canónica de Jordan de f será

$$J_2 = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & \multicolumn{1}{c|}{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{3} & 0 \\ \cline{5-7} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{1} \end{array}\right) \qquad \square$$

5.41. Determine la forma canónica de Jordan de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^5$ que respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ cumple las siguientes condiciones:

(a) $f(v_1) = -v_1$

(b) $f(v_5) = -v_1$

(c) $f(v_2 - v_3) = v_3 - v_2$

(d) $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id}) \neq \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})^2 \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + x_4 = 0,\ x_5 = 0\}$

Solución: Vamos analizando las distintas condiciones dadas en el enunciado:

(a) $f(v_1) = -v_1$ implica que $\lambda_1 = -1$ es un autovalor de f y v_1 es un autovector asociado, es decir $v_1 \in V_{-1} = K^1(-1)$.

(c) $f(v_2 - v_3) = -(v_2 - v_3)$ implica que $v_2 - v_3 \in V_{-1}$ y así $v_2 - v_3$ es otro autovector asociado al autovalor -1, linealmente independiente de v_1. Luego la multiplicidad geométrica del autovalor $\lambda_1 = -1$ es $g_1 = \dim V_{-1} \geq 2$, y la multiplicidad algebraica cumplirá

$$2 \leq g_1 \leq a_1$$

(d) Los datos de este apartado indican que $\lambda_2 = 2$ es un autovalor de f. Nos dan unas ecuaciones implícitas de $K^2(2)$, en concreto son tres ecuaciones, por lo que podemos afirmar que

$$\dim K^2(2) = \dim \mathbb{K}^5 - (\text{n}^\text{o} \text{ ecs. }) = 5 - 3 = 2$$

y como $K^1(2) \subsetneq K^2(2)$, entonces $\dim(K^1(2)) = 1$, que es la multiplicidad geométrica del autovalor. La multiplicidad algebraica cumple $a_2 \geq \dim K^2(2) = 2$. Es decir,

$$g_2 = \dim K^1(2) = 1 \;\text{ y }\; a_2 = \dim M(2) \geq 2$$

(b) Como $f(v_5) = -v_1$, la imagen del vector v_5 es la misma que la de v_1, por lo que f no es inyectiva, es decir $\operatorname{Ker}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$, o equivalentemente $\lambda_3 = 0$ es autovalor de f. Un autovector asociado a este autovalor es $v_1 - v_5$ ya que

$$f(v_1 - v_5) = f(v_1) - f(v_5) = -v_1 - (-v_1) = \mathbf{0} = 0 \cdot (v_1 - v_5)$$

Por lo que $v_1 - v_5$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_3 = 0$ y las multiplicidades algebraica y geométrica serán $1 \leq g_3 \leq a_3$.

Como el espacio vectorial tiene dimensión 5, entonces $a_1 + a_2 + a_3 \leq 5$. Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores: $a_1 \geq 2$ y $a_2 \geq 2$, podemos afirmar que

$$a_1 + a_2 + a_3 = 5 \;\text{ con }\; a_1 = a_2 = 2,\; a_3 = 1$$

Y de ahí se obtienen las multiplicidades geométricas

$$\begin{cases} 2 \leq g_1 \leq a_1 = 2 \Rightarrow g_1 = 2 \\ g_2 = 1,\; a_2 = 2, \\ 1 \leq g_3 \leq a_3 = 1 \Rightarrow g_3 = 1. \end{cases}$$

Las multiplicidades geométricas indican el número de bloques de Jordan asociado a cada autovalor en la matriz de Jordan. Por lo tanto, la forma canónica de Jordan es, salvo permutación de bloques, la siguiente matriz:

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

5.42. Justifique en cada caso si existe un endomorfismo f de $\mathbb{K}^8$ que tenga un único autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de multiplicidad algebraica 8, tal que las dimensiones de los subespacios generalizados $d_i = \dim K^i(\lambda)$ con $K^i(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^i$ sean

(a) $d_1 = 1$, $d_3 < d_4 = 8$.

(b) $d_1 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 8$.

(c) $d_1 = 2$, $d_3 = 6$, $d_4 = 8$.

(d) $d_1 = 2$, $d_4 = 8$.

(e) $d_1 = 2$.

(f) $d_1 = 3$, $d_2 = 6$, $d_3 = 7$, $d_4 = 8$.

En los casos en los que exista tal endomorfismo determine su forma canónica de Jordan.

Solución: Para determinar la existencia tendremos en cuenta la siguiente propiedad respecto a las dimensiones de los subespacios generalizados: si $r_i = d_i - d_{i-1}$, $i \geq 2$; entonces se cumple $r_i \geq r_{i+1}$ y $d_1 \geq r_2$.

También habrá que escribir la tabla de subespacios generalizados con sus dimensiones y aplicar el algoritmo de construcción de la base de Jordan, y determinar cuántos bloques de Jordan y de qué tamaño habrá.

(a) $d_1 = 1$, $d_3 < d_4 = 8$. En este caso, el subespacio máximo es $K^4(\lambda)$, lo que implica que el bloque de Jordan más grande será de orden 4. Pero, por otro lado, $d_1 = 1$ implica que en la forma canónica de Jordan habrá un único bloque que tendrá que ser de orden 8. Por tanto, esta situación no es posible.

(b) $d_1 = 2$, $d_3 = 4$, $d_4 = 8$. Esta situación no puede darse ya que $2 = d_1 < d_2 < d_3 = 4$ implica que $d_2 = 3$ y por tanto $r_2 = 1$; mientras que $r_4 = d_4 - d_3 = 8 - 4 = 4$, y no se cumpliría $r_2 \geq r_3 \geq r_4$.

(c) $d_1 = 2$, $d_3 = 6$, $d_4 = 8$. En este caso $r_4 = 2$, por lo que las diferencias en dimensiones entre los subespacios anteriores $r_2 \geq r_3 \geq r_4 = 2$ deben ser al menos 2. Además $d_1 = 2$ indica que en la tabla de Jordan habrá dos líneas de vectores, por lo que la única opción posible es

$$r_2 = r_3 = r_4 = 2 \text{ con } {}^{\circ}d_2 = 4$$

Se tendría la siguiente tabla para la base de Jordan

Dimensiones:	2		4		6		8
Subespacios:	$K^1(\lambda)$	$\subset$	$K^2(\lambda)$	$\subset$	$K^3(\lambda)$	$\subset$	$K^4(\lambda)$
	v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_8	$\leftarrow$	v_7	$\leftarrow$	v_6	$\leftarrow$	v_5

La forma canónica de Jordan es

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda
\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B_4(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & B_4(\lambda) \end{array}\right)$$

(d) $d_1 = 2$, $d_4 = 8$. En este caso, $d_1 = 2$ implica que hay sólo dos filas de vectores en la tabla de la base de Jordan, y como el subespacio máximo es $K^4(\lambda)$ cada fila tiene como mucho cuatro vectores. Por tanto la única opción es una situación análoga a la anterior. Es decir, si $d_1 = 2$ y $d_4 = 8$, entonces necesariamente $d_2 = 4$ y $d_3 = 6$.

(e) $d_1 = 2$. Aquí tenemos varias opciones. Igual que en los casos anteriores, tendremos dos filas de vectores en la base de Jordan, es decir dos bloques de Jordan en la forma canónica. Las opciones para los tamaños de los dos bloques son cuatro:

$$4 \text{ y } 4,\ 5 \text{ y } 3,\ 6 \text{ y } 2,\ 7 \text{ y } 1.$$

El primer caso es igual al del apartado (c) y los restantes se corresponden con las siguientes tablas:

Dimensiones: Subespacios:	2 $K^1(\lambda)$	$\subset$	4 $K^2(\lambda)$	$\subset$	6 $K^3(\lambda)$	$\subset$	7 $K^4(\lambda)$	$\subset$	8 $K^5(\lambda)$
	v_5	$\leftarrow$	v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_8	$\leftarrow$	v_7	$\leftarrow$	v_6				

con forma canónica de Jordan

$$\left(\begin{array}{c|c} B_5(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & B_3(\lambda) \end{array}\right)$$

2 $K^1(\lambda)$	$\subset$	4 $K^2(\lambda)$	$\subset$	5 $K^3(\lambda)$	$\subset$	6 $K^4(\lambda)$	$\subset$	7 $K^5(\lambda)$	$\subset$	8 $K^6(\lambda)$
v_6	$\leftarrow$	v_5	$\leftarrow$	v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
v_8	$\leftarrow$	v_7								

con forma canónica de Jordan

$$\left(\begin{array}{c|c} B_6(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & B_2(\lambda) \end{array}\right)$$

Para la tabla

2	3	4	5	6	7	8
$K^1(\lambda) \subset$	$K^2(\lambda) \subset$	$K^3(\lambda) \subset$	$K^4(\lambda) \subset$	$K^5(\lambda)$	$\subset K^6(\lambda)$	$\subset K^7(\lambda)$
v_7	v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1
v_8						

la forma canónica de Jordan es

$$\left(\begin{array}{c|c} B_7(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & B_1(\lambda) \end{array}\right)$$

(f) $d_1 = 3$, $d_2 = 6$, $d_3 = 7$, $d_4 = 8$. Por un lado, $d_1 = 3$ implica que hay tres filas de vectores en la tabla de la base de Jordan, y por otro $d_4 = 8$ implica que el subespacio máximo es $M(\lambda) = K^4(\lambda)$. Al aplicar el algoritmo de construcción de la base de Jordan según las dimensiones dadas se obtiene la siguiente tabla

Dimensiones:	3		6		7		8
Subespacios:	$K^1(\lambda)$	$\subset$	$K^2(\lambda)$	$\subset$	$K^3(\lambda)$	$\subset$	$K^4(\lambda)$
	v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_6	$\leftarrow$	v_5				
	v_8	$\leftarrow$	v_7				

y la forma canónica correspondiente es

$$\left(\begin{array}{c|c|c} B_4(\lambda) & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_2(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & 0 & B_2(\lambda) \end{array}\right)$$

donde cada bloque se corresponde con una de las filas de la tabla de la base. □

Potenciación de matrices y formas canónicas

La relación de semejanza entre una matriz cuadrada, A, y su forma canónica de Jordan, J, permite simplificar el cálculo de las potencias de A. Si $A = PJP^{-1}$ para alguna matriz P regular o invertible, entonces

$$A^n = PJ^nP^{-1} \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

Las formas canónicas son matrices triangulares para las que es más fácil el cálculo de potencias.

5.43. Utilice la fórmula del binomio de Newton para determinar la potencia k–ésima de una matriz que es un bloque de Jordan de orden n, $B_n(\lambda)$. Como casos particulares, compruebe que para $n = 2$ y $n = 3$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ k\,\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\,\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2}\,\lambda^{k-2} & k\,\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Solución: Sea $B_n(\lambda)$ una matriz de orden n que es un bloque de Jordan. Esta matriz es de la forma

$$B_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

y se puede escribir como suma de una matriz diagonal, D, y otra estrictamente triangular, N. Es decir, $B_n(\lambda) = D + N$ con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz N es nilpotente (véase el Ejercicio 1.10, Volumen I) y la matriz $D = \lambda\, I_n$ es una matriz escalar. Las matrices escalares conmutan con todas las matrices del mismo orden (véase el Ejercicio 1.9, Volumen I) por lo que D y N conmutan y se puede aplicar el binomio de Newton del siguiente modo:

$$\begin{aligned} B_n(\lambda)^k &= (D+N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^{k-i}N^i \\ &= \binom{k}{0} D^k + \binom{k}{1} D^{k-1}N + \cdots + \binom{k}{i} D^{k-i}N^i + \cdots + \binom{k}{k} N^k \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $D = \lambda I_n$ y $D^k = \lambda^k I_n$ se tiene la siguiente expresión

$$B_n(\lambda)^k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \lambda^k I_n + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \lambda^{k-1} N + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \lambda^{k-i} N^i + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} N^k$$

La matriz N es nilpotente. En concreto $N^n = 0$ y las potencias anteriores son no nulas, es decir $N^i \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$. Por lo que, en el sumatorio anterior, aunque sea $k \geq n$ hay exactamente n sumandos no nulos.

Si $k \geq n$, y teniendo en cuenta que $N^0 = I_n$, entonces

$$B_n(\lambda)^k = (D+N)^k = \sum_{i=0}^{n-1} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \lambda^{k-i} N^i \tag{5.3}$$

Veamos los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$. Si $n = 2$, entonces $B_2(\lambda) = D + N$ con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B_2(\lambda)^k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \lambda^k I_2 + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \lambda^{k-1} N \tag{5.4}$$

ya que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; N^i = 0 \text{ para } \; i \geq 2$$

Entonces, de (5.4) se deduce que

$$B_2(\lambda)^k = \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^k = \lambda^k I_2 + k\,\lambda^{k-1} N = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} + k\,\lambda^{k-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ k\,\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Si $n = 3$, entonces $B_3(\lambda) = D + N$ con

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B_3(\lambda)^k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \lambda^k I_3 + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} \lambda^{k-1} N + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} \lambda^{k-2} N^2 \tag{5.5}$$

ya que $N^i = 0$ para $i \geq 3$. Calculamos las potencias de N

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; \text{ y } \; N^i = 0 \; \text{ para } \; i \geq 3$$

Sustituyendo estas matrices en (5.5) obtenemos que para todo $k \geq 2$

$$B_3(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}^k = \lambda^k I_3 + k\,\lambda^{k-1} N + \tfrac{k(k-1)}{2}\,\lambda^{k-2} N^2$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{k-1} & 0 \end{pmatrix} + \tfrac{k(k-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda^{k-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 & 0 \\ k\,\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0 \\ \tfrac{k(k-1)}{2}\,\lambda^{k-2} & k\,\lambda^{k-1} & \lambda^k \end{pmatrix} \quad \square$$

5.44. Calcule la potencia k−ésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: En el Ejercicio 5.23. se calculó la forma canónica de Jordan J y una matriz regular P tal que $A = PJP^{-1}$. Estas matrices son

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las potencias de A son de la forma $A^k = PJ^kP^{-1}$, por lo que vamos a calcular primero las potencias J^k. Esta matriz está formada por dos bloques de Jordan y sus potencias son de la forma

$$J^k = \left(\begin{array}{c|c} B_2(-1) & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)^k = \left(\begin{array}{c|c} B_2^k(-1) & 0 \\ \hline 0 & (-1)^k \end{array}\right)$$

Aplicando los resultados obtenidos en el ejercicio anterior se obtiene

$$J^k = \left(\begin{array}{cc|c} (-1)^k & 0 & 0 \\ k(-1)^{k-1} & (-1)^k & 0 \\ \hline 0 & 0 & (-1)^k \end{array}\right) = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A^k = PJ^kP^{-1} &= (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1-k & k \\ -k & -k & k+1 \end{pmatrix} \text{ para todo } k \geq 2. \quad \square \end{aligned}$$

5.45. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ que respecto de la base canónica tiene la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y los subespacios propios generalizados

$$K^1(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = L((0,2,1)), \quad K^2(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2 = L((0,2,1),(1,1,1))$$

Determine la matriz en la base canónica del endomorfismo f^k para $k \geq 2$.

Solución: La matriz en la base canónica del endomorfismo f^k es la matriz B^k. Con los datos del ejercicio vamos a determinar la forma canónica J de f y con las potencias de J calcularemos las de B.

En primer lugar, calculamos los autovalores de f ya que del enunciado se deduce que $\lambda = 1$ es un autovalor de multiplicidad algebraica $a \geq 2$, lo que sería compatible con la existencia de otro autovalor.

El polinomio característico es

$$p_f(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

por lo que podemos afirmar que $\lambda = 1$ es el único autovalor de multiplicidad algebraica $a = 3$. Además, como $\dim K^2(1) = 2$, menor que la multiplicidad algebraica, entonces el subespacio máximo es $M(1) = K^3(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^3$, que por tener dimensión 3 es el espacio total.

La tabla de la base de Jordan y la forma canónica son:

1		2		3
$K^1(2)$	$\subset$	$K^2(2)$	$\subset$	$K^3(2) = M(2)$
v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1

$$J = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar la base de Jordan $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ tomamos $v_1 \in K^3(1) - K^2(1)$, por ejemplo nos sirve $v_1 = (1,0,0)$, y a continuación calculamos los otros dos vectores. La matriz de $f - \mathrm{Id}$ es $B - I_3$ con la que calculamos $v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = (1,1,1)$$

Después calculamos $v_3 = (f - \mathrm{Id})^2(v_1) = (f - \mathrm{Id})(v_2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = (0,2,1)$$

Entonces, $B = PJP^{-1}$ con $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a la base canónica $\mathcal{B}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las potencias de la matiz J se calcularon en el Ejercicio 5.43. y son de la forma

$$J^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ k\,1^{k-1} & 1^k & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2}\,1^{k-2} & k\,1^{k-1} & 1^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix}$$

y a partir de ellas se calculan las potencias de B, que son $B^k = PJ^kP^{-1}$.

$$\begin{aligned} B^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ \frac{k(k-1)}{2} & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ k + k\,(k-1) & 2k+1 & 2 \\ k + \frac{1}{2}k\,(k-1) & k+1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k+1 & k & -2k \\ k^2 & (k-1)^2 & -2k^2+4k \\ \frac{1}{2}k\,(k+1) & \frac{1}{2}k\,(k-1) & -k^2+k+1 \end{pmatrix} \quad \text{para todo } k \geq 2. \quad \square \end{aligned}$$

5.3. Forma de Jordan real

Los endomorfismos reales que no cumplen el Teorema de existencia de forma canónica de Jordan ([BE], Teorema 5.21), son aquellos cuyo polinomio característico tiene raíces complejas (no reales). Si f es un endomorfismo de un espacio vectorial real V de dimensión n, que no admite una forma canónica de Jordan, se construye una forma canónica real, que llamamos forma de Jordan real, determinando previamente una forma canónica del endomorfismo extensión compleja $\hat{f}$.

Se denomina **extensión compleja** de V al conjunto $\hat{V} = \{u + wi : u, w \in V\}$ que es un espacio vectorial complejo de la misma dimensión que V. En particular $V \subset \hat{V}$ ya que $V = \{u + 0i : u \in V\}$. Además, se cumple que si $\mathcal{B}$ es una base de V, también es una base de $\hat{V}$.

La extensión compleja de $f : V \to V$ es el endomorfismo $\hat{f} : \hat{V} \to \hat{V}$ definido por

$$\hat{f}(u + vi) = f(u) + f(v)i$$

Se cumple que las matrices de f y $\hat{f}$ respecto de una base $\mathcal{B}$ de V son iguales: $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\hat{f}) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = A$, por lo que f y $\hat{f}$ tienen el mismo polinomio característico $p_f(\lambda) = p_{\hat{f}}(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$. Ahora bien, las raíces complejas de p_f no son autovalores de f y sí lo son de $\hat{f}$. El endomorfismo complejo $\hat{f}$ admite una forma canónica de Jordan $J(\hat{f})$ que es una matriz compleja.

Por ser la matriz de $\hat{f}$ real, los autovalores complejos aparecen por pares conjugados. Si $\lambda = a + bi$, $b \neq 0$, es un autovalor complejo de $\hat{f}$, también lo es el conjugado, $\bar{\lambda} = a - bi$, con la misma multiplicidad y las mismas dimensiones de los subespacios generalizados. Además, si $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base de Jordan de $M(\lambda)$, entonces $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k\}$ es una base de Jordan de $M(\bar{\lambda})$

Construcción de la matriz canónica real a partir de la compleja

Para construir la forma de Jordan real $J_{\mathbb{R}}(f)$ de un endomorfismo real $f : V \to V$ cuyo polinomio característico tiene raíces complejas, no todas reales, y cuya matriz respecto de una base $\mathcal{B}$ es $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$, se siguen los siguientes pasos:

1.- Consideramos el endomorfismo complejo $\hat{f}$ de $\hat{V}$ cuya matriz es $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\hat{f})$

2.- Construimos la base de Jordan compleja $\mathcal{B}'$ del endomorfismo complejo $\hat{f}$ y su forma canónica de Jordan compleja $J(\hat{f}) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f})$.

3.- Para cada par de autovalores complejos λ y $\bar{\lambda}$ de $\hat{f}$ cambiamos los $2r$ vectores del espacio complejo $\{v_1, \ldots, v_r\}$ y $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_r\}$, de $\mathcal{B}'$, correspondientes a cada par de bloques de Jordan $r \times r$, por los $2r$ vectores (reales) de V:

$$\{u_1, w_1, \ldots, u_r, w_r\} \text{ con } v_j = u_j + i\, w_j,\ j = 1, \ldots, r.$$

Se obtiene así una base $\mathcal{B}''$ real de V tal que $J_{\mathbb{R}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f)$.

Los vectores u_j y w_j son la parte real e imaginaria del vector v_j y los denotaremos por $\mathrm{Re}(v_j) = u_j$, $\mathrm{Im}(v_j) = w_j$.

Si en la matriz de Jordan de $\hat{f}$, $J(\hat{f}) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f})$, hay dos bloques de Jordan $B_j(\lambda)$ y $B_j(\bar{\lambda})$ de orden $j \times j$

$$B_j(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{j\times j}, \quad B_j(\bar{\lambda}) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \bar{\lambda} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}_{j\times j} \tag{5.6}$$

entonces, en la forma de Jordan real $J_{\mathbb{R}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f)$ los dos bloques complejos $B_j(\lambda)$ y $B_j(\bar{\lambda})$ quedan sustituidos por un bloque real de tamaño $2j \times 2j$ de la forma

$$C_{2j}(\lambda) = \begin{pmatrix} C(\lambda) & 0_2 & \cdots & \cdots & 0_2 \\ I_2 & C(\lambda) & \ddots & & \vdots \\ 0_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0_2 \\ 0_2 & \cdots & 0_2 & I_2 & C(\lambda) \end{pmatrix}_{2j\times 2j} \quad \text{con} \quad C(\lambda) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

El bloque $C_{2j}(\lambda)$ tiene la misma estructura que el bloque $B_j(\lambda)$ sustituyendo cada 1 en $B_j(\lambda)$ por I_2, cada λ por $C(\lambda)$ y cada 0 por 0_2, la matriz nula de orden 2.

Por ejemplo, si la forma canónica de Jordan de la extensión compleja $\hat{f}$ de un endomorfismo f es:

$$J = \left(\begin{array}{cc|c|cc|c} 1+2i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+2i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1+2i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1-2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-2i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2i \end{array}\right)$$

respecto de una base $\{v_1, \ldots, v_6\}$ de $\hat{V}$, entonces la forma de Jordan de f es

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} C(1+2i) & 0_2 & 0_2 \\ I_2 & C(1+2i) & 0_2 \\ 0_2 & 0_2 & C(1+2i) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

respecto de la base $\{\mathrm{Re}(v_1), \mathrm{Im}(v_1), \mathrm{Re}(v_2), \mathrm{Im}(v_2), \mathrm{Re}(v_3), \mathrm{Im}(v_3)\}$ de V. $\square$

5.46. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica $\mathcal{B}$ es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Compruebe que no admite forma canónica de Jordan y determine su forma de Jordan real.

Solución: Comenzamos calculando el polinomio característico para determinar los autovalores.

$$p_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 13$$

Este polinomio no tiene raíces reales por lo que f no tiene autovalores y no admite forma canónica de Jordan.

Para determinar la forma de Jordan real consideramos el endomorfismo extensión compleja de f, $\hat{f} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, que respecto de la base canónica tiene la misma matriz que f: $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\hat{f}) = A$; y determinamos su forma canónica de Jordan $J(\hat{f})$ y una base de Jordan $\mathcal{B}'$ tal que

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f}) = J(\hat{f})$$

Los autovalores de $\hat{f}$ son las raíces del polinomio: $\lambda = 2+3i$ y $\bar{\lambda} = 2-3i$. Como son dos autovalores simples, es decir de multiplicidad algebraica 1, entonces el endomorfismo $\hat{f}$ es diagonalizable y

$$J(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix}$$

Una base de Jordan $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2'\}$ está formada por dos autovectores, cada uno correspondiente a uno de los autovalores. Además, v_1' y v_2' son vectores conjugados: $v_1' \in V_{2+3i}$ y $v_2' = \bar{v}_1' \in V_{2-3i}$.

Determinamos un autovector del subespacio propio asociado a $\lambda = 2+3i$, cuyas ecuaciones implícitas se obtienen del sistema lineal $(A-(2+3i)I_2)X = 0$:

$$V_{2+3i} = K^1(2+3i) = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -3-3i & 3 \\ -6 & 3-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La matriz $A-(2+3i)I_2$ tiene rango 1 (o determinante 0), por lo que las dos ecuaciones son proporcionales. Nos quedamos con la primera ecuación y la simplificamos dividiendo por 3, de donde tenemos una ecuación implícita del subespacio

$$V_{2+3i} \equiv \{(-1-i)x_1 + x_2 = 0\}$$

Tomamos un vector de este subespacio, por ejemplo $v_1' = (1, 1+i)$, y el conjugado $v_2' = (1, 1-i)$ es un vector del subespacio propio asociado al autovalor conjugado. Ya tenemos la base de Jordan $\mathcal{B}'$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f}) = J(\hat{f})$, y podemos comprobar que hemos hecho bien el cambio de base: $P^{-1}AP = J(\hat{f})$, siendo $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

A partir de la base de Jordan compleja $\mathcal{B}'$ construimos la base real $\mathcal{B}''$ del siguiente modo: tomamos la base de Jordan del subespacio máximo asociado a λ, que es el subespacio V_{2+3i}, que está formada por el vector v_1', y consideramos su parte real e imaginaria:

$$v_1' = \mathrm{Re}(v_1') + \mathrm{Im}(v_1')i = (1,1) + (0,1)i \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}'' = \{v_1'' = (1,1),\ v_2'' = (0,1)\}$$

La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}''$ es la forma de Jordan real de f

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f) = J_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que se han hecho bien los cálculos verificando la relación de semejanza $Q^{-1}AQ = J_{\mathbb{R}}(f)$, con $Q = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}$.

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \square$$

5.47. Determine la forma canónica del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Tenga en cuenta los cálculos realizados en el Ejercicio 5.12.

Solución: Teniendo en cuenta los cálculos que se hicieron en el Ejercicio 5.12., las raíces del polinomio característico de esta matriz real son

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = i \ \text{ y } \ \lambda_3 = -i$$

Entonces, f tiene un único autovalor, no se cumple el Teorema de existencia, y por tanto f no admite una forma canónica de Jordan.

Para determinar la forma de Jordan real consideramos el endomorfismo extensión compleja $\hat{f} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ que, respecto de la base canónica, tiene la misma matriz que f:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\hat{f}) = B$$

En el ejercicio 5.12. se calculó su forma canónica de Jordan $J(\hat{f})$ y una base de Jordan $\mathcal{B}'$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f}) = J(\hat{f})$:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},\ \mathcal{B}' = \left\{ v_1' = (2,1,0),\ v_2' = \left(\frac{1+i}{2}, i, 1\right),\ v_3' = \left(\frac{1-i}{2}, -i, 1\right) \right\}$$

Entonces la forma de Jordan real de f y la base correspondiente son

$$J_{\mathbb{R}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathcal{B}'' = \{v_1'' = v_1',\ v_2'' = \mathrm{Re}(v_2'),\ v_3'' = \mathrm{Im}(v_2')\}$$

Las partes real e imaginaria del vector v_2' son

$$v_2' = \mathrm{Re}(v_2') + \mathrm{Im}(v_2')i = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) + \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) i$$

Así, $\mathcal{B}'' = \{(2,1,0),\ \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right),\ \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)\}$ y la matriz de paso o de cambio de base es

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, tendríamos que hacer la comprobación de la relación de semejanza $P^{-1}BP = J_{\mathbb{R}}(f)$, o la condición equivalente $BP = PJ_{\mathbb{R}}(f)$. □

5.48. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de un espacio vectorial real V y f el endomorfismo de V que, respecto de $\mathcal{B}$, tiene la siguiente expresión analítica

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4,\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4,\ x_3 - 2x_4,\ 2x_3 + x_4)$$

Determine la forma canónica de f y una base para dicha forma.

Solución: La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$C = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

El polinomio característico es

$$p_f(\lambda) = \det \left(\begin{array}{cc|cc} 1-\lambda & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{array}\right) = \left(\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right)^2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2$$

que tiene por raíces: $\lambda = 1 + 2i$ doble, $\bar{\lambda} = 1 - 2i$ doble.

Por tanto, f no tiene ningún autovalor y no admite una forma canónica de Jordan. Para determinar la forma de Jordan real $J_{\mathbb{R}}(f)$ se siguen los siguientes pasos:

1°) Se considera el endomorfismo complejo extensión de f, $\hat{f}$ de $\hat{V}$, que respecto de la base $\mathcal{B}$ de $\hat{f}$ tiene por matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\hat{f}) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = C$.

2°) Se determina su forma canónica de Jordan $J(\hat{f})$ y una base de Jordan $\mathcal{B}'$ de $\hat{V}$ tal que $J(\hat{f}) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$. Para ello calculamos los subespacios generalizados:

Subespacio propio asociado a $\lambda = 1 + 2i$: $V_{1+2i} = K^1(1+2i) = \mathrm{Ker}(\hat{f} - (1+2i)\,\mathrm{Id})$.

$$\dim K^1(1+2i) = 4 - \mathrm{rg}(C - (1+2i)I_4) = 4 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2i & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2i & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2i \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz $C - (1+2i)I_4$ para determinar su rango:

$$\begin{pmatrix} -2i & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2i & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2i \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 + if_1 \\ f_4 \to f_4 - if_3}]{} \begin{pmatrix} -2i & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2-2i & -2+2i \\ 0 & 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 - (1-i)f_3]{} \begin{pmatrix} -2i & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C_1$$

El rango es igual a 2, por lo que $\dim K^1(1+2i) = 2$. Como la dimensión coincide con la multiplicidad algebraica, entonces éste es el subespacio máximo $M(1+2i) = K^1(1+2i)$. Por ser la matriz del endomorfismo real, lo mismo ocurre con el autovalor complejo conjugado, es decir $M(1-2i) = K^1(1-2i)$. Las multiplicidades algebraicas coinciden con las geométricas, por lo que el endomorfismo es diagonalizable. La forma canónica es

$$J(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2i \end{pmatrix}$$

Una base de Jordan será $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', \overline{v}_1', \overline{v}_2'\}$ donde $v_1', v_2' \in V_{1+2i}$.

Determinamos una base de V_{1+2i} cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base $\mathcal{B}$ se obtienen del sistema lineal $(C - (1+2i)I_4)X = 0$, o el equivalente, $C_1X = 0$,

$$\begin{cases} -2ix_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2ix_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

de donde podemos extraer la base

$$\{v_1' = (1, i, 0, 0)_{\mathcal{B}},\ v_2' = (0, 1+i, 1, -i)_{\mathcal{B}}\}$$

Una base del subespacio $M(\overline{\lambda})$ está formada por los vectores conjugados de los anteriores $\overline{v}_1' = (1, -i, 0, 0)_{\mathcal{B}}$ y $\overline{v}_2' = (0, 1-i, 1, i)_{\mathcal{B}}$.

3°) Se construye la base real $\mathcal{B}''$ de V tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f) = J_{\mathbb{R}}(f)$ a partir de $\mathcal{B}'$. Para ello nos quedamos con una base de Jordan de $M(\lambda)$, $\{v_1', v_2'\}$ y tomamos las partes real e imaginaria de cada vector:

$$\mathcal{B}'' = \{\mathrm{Re}(v_1'), \mathrm{Im}(v_1'), \mathrm{Re}(v_2'), \mathrm{Im}(v_2')\}$$

$$\mathcal{B}'' = \{(1,0,0,0)_{\mathcal{B}},\ (0,1,0,0)_{\mathcal{B}},\ (0,1,1,0)_{\mathcal{B}},\ (0,1,0,-1)_{\mathcal{B}}\}$$

La forma de Jordan real es

$$J_{\mathbb{R}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f) = \left(\begin{array}{c|c} C(1+2i) & 0 \\ \hline 0 & C(1+2i) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Comprobamos que se cumple la relación de semejanza $P^{-1}CP = J_{\mathbb{R}}(f)$ donde

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para ello basta comprobar que $CP = PJ_{\mathbb{R}}(f)$. En ambos productos se obtiene la siguiente matriz

$$CP = PJ_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \square$$

5.49. Determine la forma canónica del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b-a+c+1 & a-b & b \\ 2b+c & -2b & a+b \end{pmatrix}$$

según los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solución: Comenzamos calculando el polinomio característico y los autovalores

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ b-a+c+1 & a-b-\lambda & b \\ 2b+c & -2b & a+b-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} a-b-\lambda & b \\ -2b & a+b-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 + b^2) \\ &= (1-\lambda)((\lambda-a)^2 + b^2) \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio son: 1, $a+bi$ y $a-bi$. Se tienen los siguientes casos:

(1) Si $b = 0$, las tres raíces son reales y su multiplicidad depende del valor de a.

(1.1) Si $b = 0$ y $a \neq 1$, entonces los autovalores son $\lambda_1 = 1$ simple y $\lambda_2 = a$ doble. La multiplicidad geométrica del autovalor doble es

$$g_2 = 3 - \mathrm{rg}(A - aI_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -a+c+1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto, el subespacio propio asociado a $\lambda_2 = a$ es el subespacio máximo. Hay $g_2 = 2$ bloques de Jordan asociados a este autovalor que serán de orden 1. Entonces, la forma canónica de Jordan es

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } \ c \in \mathbb{R}$$

(1.2) Si $b = 0$ y $a = 1$, entonces el polinomio característico es $(1-\lambda)^3$ y el endomorfismo tiene un único autovalor $\lambda_1 = 1$ triple. La multiplicidad geométrica de este autovalor es:

$$g_1 = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{si } c = 0 \\ 2 & \text{si } c = 1 \end{cases}$$

Por tanto se tiene los siguientes casos:
Si $b = 0$, $a = 1$ y $c = 0$ el endomorfismo es diagonalizable al coincidir la multiplicidad algebraica y geométrica, por tanto la forma canónica de Jordan es

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $b = 0$, $a = 1$ y $c \neq 0$, entonces la multiplicidad geométrica es igual a 2, por lo que hay dos bloques de Jordan asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$, que necesariamente son uno de orden 2 y otro de orden 1. La forma canónica de Jordan es

$$J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } c \neq 0.$$

(2) Si $b \neq 0$, entonces no se cumple el Teorema de existencia ya que se tiene un único autovalor $\lambda_1 = 1$ simple. Por tanto, el endomorfismo no admite una forma canónica de Jordan. Para el endomorfismo $\hat{f}$, extensión compleja de f, se cumple que tiene tres autovalores simples: 1, $a + bi$ y $a - bi$, por lo que es diagonalizable y su forma canónica de Jordan es

$$J(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+bi & 0 \\ 0 & 0 & a-bi \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } c \in \mathbb{R}$$

Por tanto, la forma de Jordan real de f es

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}, \quad \text{para todo } c \in \mathbb{R} \quad \square$$

5.50. De un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ se sabe que el endomorfismo extensión compleja $\hat{f}$ de $\mathbb{C}^4$ tiene la siguiente forma canónica de Jordan

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f}) = \begin{pmatrix} 2+3i & 0 & 0 & \\ 1 & 2+3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-3i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-3i \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{B}' = \{(i, 1+i, 2+i, 3), (0,0,1+i,-1), (-i, 1-i, 2-i, 3), (0,0,1-i,-1)\}$. Determine

(a) La forma de Jordan real $J_{\mathbb{R}}$ de f, y una base $\mathcal{B}''$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f) = J_{\mathbb{R}}$.

(b) La matriz de f en la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$.

(c) Compruebe que la matriz de $\hat{f}$ en la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^4$ coincide con $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Solución:

(a) Para determinar la base real $\mathcal{B}''$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f) = J_{\mathbb{R}}$, consideramos una base de Jordan del subespacio máximo asociado al autovalor $2+3i$ de $\hat{f}$, que está formada por los dos primeros vectores de $\mathcal{B}'$:

$$M(2+3i) = L(v_1' = (i, 1+i, 2+i, 3), v_2' = (0,0,1+i,-1))$$

y tomamos la parte real e imaginaria de estos vectores:

$$v_1' = (0,1,2,3) + (1,1,1,0)i, \; v_2' = (0,0,1,-1) + (0,0,1,0)i$$

Obtenemos la base real

$$\mathcal{B}'' = \{\, v_1'' = (0,1,2,3), \; v_2'' = (1,1,1,0), \; v_3'' = (0,0,1,-1), \; v_4'' = (0,0,1,0)\,\}$$

La matriz de Jordan real se obtiene considerando los bloques de Jordan asociados a este autovalor, es decir la matriz de Jordan de $\hat{f}|_{M(2+3i)}$, que es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 1 & 2+3i \end{pmatrix}$$

Después, se cambia en cada bloque de Jordan el autovalor $2+3i$ por $C(2+3i)$ el 1 por I_2 y el 0 por 0_2, y se obtiene

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f) = J_{\mathbb{R}}(f) = \begin{pmatrix} C(2+3i) & 0_2 \\ I_2 & C(2+3i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) La matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = Q\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f)Q^{-1} \quad \text{con} \quad Q = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''\,\mathcal{B}}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & -26 & 5 & 6 \\ -2 & 14 & -3 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) La base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^4$ es la misma que la canónica de $\mathbb{R}^4$. La matriz de $\hat{f}$ en esta base se obtiene a partir de la matriz de f en la base $\mathcal{B}'$, que ya conocemos, realizando el cambio de base. Es decir

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\hat{f}) = P\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f})P^{-1} \quad \text{con} \quad P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 1+i & 0 & 1-i & 0 \\ 2+i & 1+i & 2-i & 1-i \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\hat{f})$ evitando el cálculo de la matriz compleja P^{-1} podemos verificar la igualdad equivalente

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)P = P\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f})$$

El producto $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)P$ es igual a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)P &= \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ 30 & -26 & 5 & 6 \\ -2 & 14 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 & -i & 0 \\ 1+i & 0 & 1-i & 0 \\ 2+i & 1+i & 2-i & 1-i \\ 3 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3+2i & 0 & -3-2i & 0 \\ -1+5i & 0 & -1-5i & 0 \\ 2+9i & -1+5i & 2-9i & -1-5i \\ 5+9i & -2-3i & 5-9i & -2+3i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y el mismo resultado se obtiene con el producto $P\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\hat{f})$. $\square$

5.4. Autoevaluación 5

Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

A5.1. Si A es una matriz de orden 3 y $\text{rg}(A - 2I_3) < 3$, entonces 2 es un autovalor de A.

A5.2. Si A es una matriz de orden $n \geq 2$ y $\text{rg}(A - 4I_n) = 1$, entonces 4 es un autovalor simple (o de multiplicidad algebraica 1) de A.

A5.3. Si A es una matriz de orden n y $\det(A) = 0$, entonces 0 es un autovalor de A.

A5.4. Un endomorfismo f es inyectivo, si y sólo si, 0 no es un autovalor de f.

A5.5. Si el endomorfismo $f - \lambda\,\text{Id}$ es inyectivo, entonces λ no es un autovalor de f.

A5.6. Si el polinomio característico de un endomorfismo es $\lambda^3 - \lambda$, entonces el endomorfismo no es diagonalizable.

A5.7. Si el polinomio característico de un endomorfismo real es $\lambda^3 + \lambda$, entonces el endomorfismo no admite una forma canónica de Jordan.

A5.8. Si el polinomio característico de un endomorfismo f de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial es $\lambda^3 - \lambda$, entonces el endomorfismo no admite una forma canónica de Jordan.

A5.9. Si un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ tiene tres autovalores distintos, entonces admite una forma canónica de Jordan.

A5.10. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ con un único autovalor λ, triple, y $\text{Ker}(f - \lambda\,\text{Id}) = \text{Ker}(f - \lambda\,\text{Id})^2$, entonces f es diagonalizable.

A5.11. Si u y v son dos autovectores linealmente independientes de un endomorfismo f, entonces están asociados a autovalores distintos.

A5.12. Si u y v son dos autovectores no nulos asociados a autovalores distintos de un endomorfismo f, entonces son linealmente independientes.

A5.13. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V formada por autovectores de un endomorfismo f de V, entonces f es diagonalizable.

A5.14. Si u y v son dos autovectores distintos de f y $f(u) = f(v)$, entonces $\lambda = 0$ es un autovalor de f.

A5.15. Si u y v son dos autovectores linealmente independientes de un endomorfismo f de $\mathbb{C}^4$, entonces su forma canónica de Jordan está formada por varios bloques de Jordan.

A5.16. Si u y v son dos autovectores linealmente independientes asociados al mismo autovalor λ de f, entonces la multiplicidad algebraica es igual a dos.

A5.17. Si u y v son dos autovectores linealmente independientes asociados al mismo autovalor λ de f, entonces la multiplicidad geométrica puede ser igual a dos.

A5.18. Una condición suficiente para que un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sea diagonalizable es que la multiplicidad algebraica de cada autovalor sea igual a uno.

A5.19. Una condición suficiente para que un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ sea diagonalizable es que la multiplicidad algebraica de cada autovalor sea igual a uno.

A5.20. Una condición necesaria, pero no suficiente, para que un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sea diagonalizable es que la multiplicidad algebraica de cada autovalor sea igual a uno.

A5.21. Una condición necesaria para que un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ sea diagonalizable es que la multiplicidad algebraica de cada autovalor sea igual a uno.

A5.22. Una condición necesaria y suficiente para que un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sea diagonalizable es que la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor coincidan.

A5.23. Una condición necesaria y suficiente para que un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ sea diagonalizable es que la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor coincidan.

A5.24. Una condición necesaria y suficiente para que un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sea diagonalizable es tenga n autovalores, contados con su multiplicidad, y que la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor coincidan.

A5.25. Si f es un endomorfismo complejo que tiene dos autovalores distintos, entonces admite una forma canónica de Jordan que está compuesta por varios bloques de Jordan.

A5.26. Si f es un endomorfismo cuya forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

entonces el subespacio propio asociado a λ puede ser un plano.

A5.27. Si la forma canónica de f es una matriz formada por un único bloque de Jordan, entonces f tiene un único autovalor con multiplicidad geométrica igual a uno.

A5.28. Si un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 4$, tiene exactamente cuatro autovalores distintos y los subespacios propios asociados son cuatro rectas distintas, entonces la forma canónica de Jordan está formada por cuatro bloques de Jordan.

A5.29. Si un endomorfismo tiene como forma canónica la matriz

$$\left(\begin{array}{c|c} B_4(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & B_2(\lambda) \end{array}\right)$$

entonces el subespacio máximo es $M(\lambda) = K^4(\lambda)$ y $\dim K^3(\lambda) = 2$.

A5.30. Si la forma canónica de Jordan de un endomorfismo f de V está formada por un único bloque de Jordan, entonces el endomorfismo tiene un único autovalor λ y el subespacio máximo es $M(\lambda) = V$.

A5.31. Si f es un endomorfismo de V que tiene un único autovalor λ y el subespacio máximo es $M(\lambda) = V$, entonces la forma canónica de Jordan de f está formada por un único bloque de Jordan.

A5.32. Si un endomorfismo de $\mathbb{K}^5$ tiene menos de cinco rectas invariantes, entonces no es diagonalizable.

A5.33. Las siguientes matrices son semejantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A5.34. Las siguientes matrices son semejantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A5.35. Las siguientes matrices son semejantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A5.36. Las siguientes matrices no son semejantes porque no tienen la misma traza

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A5.37. Si $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ es una matriz tal que $\det(A) = 6$, entonces la siguiente matriz no puede ser su forma canónica

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

A5.38. No es diagonalizable el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ con matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

A5.39. No es diagonalizable el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ con matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Capítulo 6

Subespacios invariantes y polinomios anuladores

En este capítulo, V denota un $\mathbb{K}$ –espacio vectorial de dimensión finita, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, y f un endomorfismo de V. El objetivo es estudiar los subespacios f–invariantes de modo que permitan identificar la clase de equivalencia lineal a la que pertenece f. El resultado que relaciona los subespacios invariantes y la equivalencia lineal de endomorfismos es el siguiente:

Sea $h \in GL(V)$ un automorfismo de V y sean f y $g = h \circ f \circ h^{-1}$ dos endomorfismos linealmente equivalentes. Un subespacio vectorial $U \subseteq V$ es f–invariante si y sólo si $h(U)$ es g–invariante.

6.1. Subespacios invariantes

Un subespacio vectorial U de V es **invariante** por un endomorfismo f de V, o simplemente f–invariante, si $f(U) \subseteq U$. Si $U = L(v_1, \ldots, v_k)$, entonces es f–invariante, si y sólo si, $f(v_i) \in U$ para $i = 1, \ldots, k$. La intersección y la suma de dos subespacios f–invariantes es un subespacio f–invariante. Para el estudio de estos subespacios se distinguen dos tipos: (1) un subespacio f– invariante **reducible** es aquel que se puede descomponer en suma directa $U = U_1 \oplus U_2$, con U_1 y U_2 subespacios f–invariantes no triviales (distintos de $\{0\}$); y (2) un subespacio invariante es **irreducible** si no es reducible.

Utilizaremos las matrices canónicas (forma canónica de Jordan o forma de Jordan real) para determinar los subespacios invariantes de un endomorfismo, ya que con ellas es mucho más sencillo su cálculo.

Caracterización de subespacios invariantes irreducibles ([BE], Proposición 6.11):
Sea f un endomorfismo que admite una forma canónica de Jordan. Un subespacio U de dimensión r es f–invariante irreducible si y sólo si es r–**cíclico**. Es decir, es de la forma

$$U = L\left((v, (f - \lambda \mathrm{Id})(v), \ldots, (f - \lambda \mathrm{Id})^{r-1}(v) \right) \quad \text{con} \quad v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^r - \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})^{r-1}$$

para algún autovalor λ de f.

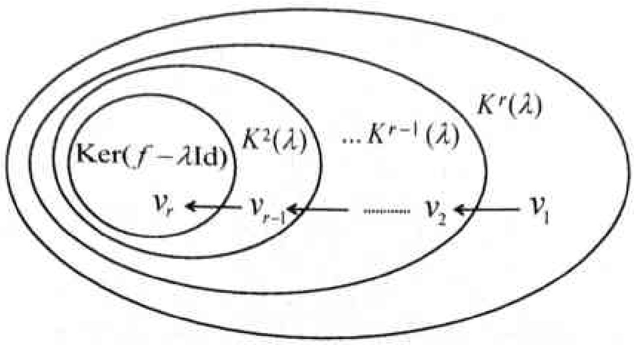


Figura 6.1: Diagrama de los vectores que generan un subespacio $r-$cíclico.

Rectas invariantes: Una recta $R = L(v)$ es $f-$invariante, si y sólo si, v es un autovector no nulo de f. De modo que las rectas invariantes son todas las contenidas en los subespacios propios asociados a los autovalores de f.

Hiperplanos invariantes: Respecto de una base $\mathcal{B}$ de V, el hiperplano de ecuación implícita $u_1x_1 + \cdots + u_nx_n = 0$ es $f-$invariante si y sólo si $(u_1, \ldots, u_n)_{\mathcal{B}}$ es un autovector no nulo del endomorfismo f^t. (Si A es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$, entonces f^t es el endomorfismo cuya matriz respecto de $\mathcal{B}$ es A^t).

Para todo endomorfismo f se cumple que el número de rectas $f-$invariantes es igual al número de hiperplanos $f-$invariantes.

Para determinar subespacios invariantes de dimensiones intermedias (que no sean rectas o hiperplanos) se procede del siguiente modo: se calculan todos los subespacios irreducibles y los reducibles se obtienen como sumas de los irreducibles.

Descomposición de subespacios invariantes. Supondremos que f admite una forma canónica de Jordan, es decir, que f tiene autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ con multiplicidades algebraicas $a_1, \ldots, a_k$ tales que $a_1 + \cdots + a_k = n$ con $n = \dim V$. En tal caso, el espacio vectorial se descompone en suma directa de los subespacios máximos:

$$V = M(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus M(\lambda_k)$$

y se tienen los siguientes resultados:

(1) Si un subespacio $f-$invariante no está contenido en un subespacio máximo, entonces es reducible y se descompone como suma de subespacios invariantes

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k, \text{ con } U_i = M(\lambda_i) \cap U$$

En la descomposición $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ hay al menos dos subespacios no triviales, es decir, U tiene intersección no trivial con al menos dos subespacios máximos.

(2) Los subespacios $f-$invariantes irreducibles están contenidos en los subespacios máximos.

(3) Si $v_1, \ldots, v_r$ son vectores que forman una fila de la tabla de la base de Jordan, entonces $L(v_1, \ldots, v_r)$ es un subespacio $r-$cíclico.

(4) Un subespacio $f-$invariante U es $r-$cíclico, si y sólo si, la forma canónica del endomorfismo $f|_U$ es un bloque de Jordan de orden r.

(5) Un subespacio r–cíclico $U = L(v_1 = v,\, v_2 = (f - \lambda\,\mathrm{Id})(v), \ldots, v_r = (f - \lambda\,\mathrm{Id})^{r-1}(v))$ con $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^r - \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^{r-1}$ contiene exactamente r subespacios f–invariantes y todos son irreducibles: La recta $L(v_r)$, el plano $L(v_r, v_{r-1})$, que es 2–cíclico; y, en general, un subespacio i–cíclico de cada dimensión $1 \le i \le r$: $U_i = L(v_r, \ldots, v_{r-i+1})$.

Tipos de planos f–invariantes según el número de rectas invariantes que contienen:

- Si P no contiene rectas invariantes, entonces f es real, y la forma canónica de $f|_P$ es

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

- Si P contiene una única recta invariante, la forma canónica de $f|_P$ es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

- Si P contiene exactamente dos rectas invariantes, la forma canónica de $f|_P$ es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1 \neq \lambda_2 \tag{6.3}$$

- Si todas las rectas contenidas en P son invariantes, la forma canónica de $f|_P$ es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

6.1. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ cuya matriz en la base canónica $\mathcal{B}$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine si los siguientes subespacios son f–invariantes:

$$R_1 \equiv \{x_1 = 0,\ 2x_2 - x_3 = 0\}, \quad R_2 \equiv \{x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$$
$$P \equiv \{x_1 + x_2 = 0\}, \quad P_a \equiv \{(2 + 2a)x_1 - (2 + 3a)x_2 - a x_3 = 0\},\ a \neq 0$$

Solución: Usamos el resultado siguiente: el subespacio $U = L(v_1, \ldots, v_k)$ es f–invariante si y sólo si $f(v_1), \ldots, f(v_k) \in U$. Para cada subespacio determinamos previamente una base.

R_1 : Una base de la recta $R_1 \equiv \{x_1 = 0,\ 2x_2 - x_3 = 0\}$ está formada por el vector $v = (0,1,2)$. La imagen de este vector por f se calcula utilizando la matriz de f

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v) = (-1,0,3)$$

Como $f(v) \notin R_1$, entonces R_1 no es $f-$invariante.

R_2 : Una base de la recta $R_2 \equiv \{x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\}$ está formada por el vector $u = (1,1,-1)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(u) = u$$

Como $f(u) \in R_2$, entonces R_2 sí es $f-$invariante.

P : Una base del plano P de ecuación $x_1 + x_2 = 0$ está formada por los vectores $v_1 = (1,-1,0)$ y $v_2 = (0,0,1)$. Calculamos las imágenes de estos vectores:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v_1) = (3,1,-2) \notin P$$

por tanto P no es $f-$ invariante.

P_a : Una base de cada plano de la familia $P_a \equiv \{(2+2a)x_1 - (2+3a)x_2 - ax_3 = 0\}$, $a \neq 0$ está formada por los vectores $u_1 = (1, 0, \frac{2+2a}{a})$ y $u_2 = (0, -1, \frac{2+3a}{a})$. Calculamos sus imágenes.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2+2a}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{2+a}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow f(u_1) = \left(2, 1, \frac{2+a}{a}\right)$$

Sustituimos las coordenadas de $f(u_1)$ en la ecuación de P_a y obtenemos

$$(2+2a)2 - (2+3a) - a\,\frac{2+a}{a} = 0$$

por lo que $f(u_1) \in P_a$. Calculamos $f(u_2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{2+3a}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{2+2a}{a} \end{pmatrix} \Rightarrow f(u_2) = \left(1, 0, \frac{2+2a}{a}\right)$$

Sustituimos las coordenadas de $f(u_2)$ en la ecuación de P_a y obtenemos

$$(2+2a)1 - (2+3a)0 - a\,\frac{2+2a}{a} = 0$$

por lo que $f(u_2) \in P_a$.

Por tanto, sí son $f-$invariantes todos los planos P_a con $a \neq 0$. □

6.2. Determine las rectas invariantes de los endomorfismos de $\mathbb{K}^2$ con las siguientes matrices

$$\text{(a) } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{(b) } B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{(c) } C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución: Las rectas invariantes son las generadas por autovectores, es decir son todas las contenidas en los subespacios propios asociados a cada autovalor. En el Ejercicio 5.2., pág. 3, se calcularon los autovalores y subespacios propios.

(a) Los autovalores del endomorfismo f de $\mathbb{K}^2$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = A$, son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ simples. Los subespacios propios, tienen las siguientes ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$:

$$V_1 \equiv \{-x_1 + x_2 = 0\} \text{ y } V_2 \equiv \{-4x_1 + 3x_2 = 0\}$$

Ambos subespacios son dos rectas y por tanto este endomorfismo tiene exactamente dos rectas invariantes V_1 y V_2.

(b) Si f es el endomorfismo de $\mathbb{K}^2$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = B$, tiene un autovalor doble $\lambda = -1$ y el subespacio propio es $V_{-1} \equiv \{-x_1 + x_2 = 0\}$. Como $\dim V_{-1} = 1$ y todas las rectas $f-$invariantes están contenidas en V_{-1}, entonces V_{-1} es la única recta invariante.

(c) Si f es el endomorfismo de $\mathbb{K}^2$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = C$, su polinomio característico, que es $p_f(\lambda) = \lambda^2 + 1$, no tiene raíces reales.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces f no tiene autovalores y, por tanto, no tiene ninguna recta invariante.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces los autovalores de f son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. Los subespacios propios asociados se calcularon en el Ejercicio 5.3., y son

$$V_i \equiv \{2x_1 + (3-i)x_2 = 0\} \text{ y } V_{-i} \equiv \{2x_1 + (3+i)x_2 = 0\}$$

que son las dos rectas invariantes de f. □

6.3. Determine unas ecuaciones implícitas de las rectas y planos invariantes del endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$ con matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: Los autovalores y subespacios propios asociados se calcularon en el Ejercicio 5.23., pág. 33. El endomorfismo tiene un único autovalor $\lambda = -1$ triple. El subespacio propio asociado es $V_{-1} \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$, que es un plano. Todas las rectas contenidas en V_{-1} son invariantes. Para determinar unas ecuaciones de las rectas, tenemos que expresar de forma genérica los vectores de V_{-1} y, para ello, utilizamos unas ecuaciones paramétricas de este subespacio:

$$x_2 = a, \; x_3 = b, \; x_1 = -a + b, \; a, b \in \mathbb{K}$$

Por tanto, las coordenadas respecto de la base canónica de los autovectores son de la forma $(-a+b, a, b)$ con $a, b \in \mathbb{K}$. Entonces, las rectas invariantes son

$$R_{a,b} = L((-a+b, a, b)) \quad \text{con} \quad (a,b) \neq (0,0)$$

Unas ecuaciones implícitas respecto de la base canónica se obtienen de la condición

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -a+b & x_1 \\ a & x_2 \\ b & x_3 \end{pmatrix} = 1$$

Si $a = 0$, entonces $b \neq 0$ y

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} b & x_1 \\ 0 & x_2 \\ b & x_3 \end{pmatrix} = 1 \;\Leftrightarrow\; \{bx_2 = 0,\; b(x_3 - x_1) = 0\}$$

Simplificando las ecuaciones obtenidas tenemos una única recta para todo $b \neq 0$

$$R \equiv \{x_2 = 0,\; x_3 - x_1 = 0\}$$

Si $a \neq 0$, se obtienen las ecuaciones de la condición

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} -a+b & x_1 \\ a & x_2 \\ b & x_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & x_1+x_2-x_3 \\ a & x_2 \\ b & x_3 \end{pmatrix} = 1 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} a(x_1+x_2-x_3) = 0 \\ ax_3 - bx_2 = 0 \end{cases}$$

Simplificando el sistema anterior, se tienen las ecuaciones de las rectas invariantes

$$R_{a,b} \equiv \{x_3 + x_2 - x_1 = 0,\; ax_3 - bx_2 = 0\}, \; a \neq 0$$

Los **planos invariantes** son hiperplanos invariantes cuando el espacio vectorial tiene dimensión 3 y, para calcularlos, hay que determinar los autovectores de A^t. La matriz A^t es semejante a A, por lo que tiene los mismos autovalores y forma canónica de Jordan. Los autovectores de A^t están en el subespacio propio asociado al autovalor -1 cuyas ecuaciones se obtienen del sistema lineal $(A^t + I_3)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \operatorname{Ker}(f^t + \operatorname{Id}) \equiv \{x_2 + x_3 = 0\}$$

Por tanto, las coordenadas de los autovectores de f^t son de la forma $(c, d, -d)$, con $c, d \in \mathbb{K}$. Cada autovector no nulo determina el hiperplano invariante:

$$H_{c,d} \equiv \{cx_1 + dx_2 - dx_3 = 0\} \quad \text{con} \quad (c,d) \neq (0,0).$$

Si $c = 0$, entonces $d \neq 0$ y se obtiene un único hiperplano pata todo d

$$H_{0,d} \equiv \{x_2 - x_3 = 0\}$$

Si $c \neq 0$ el autovector $(c, d, -d)$ de f^t genera el mismo hiperplano que el vector proporcional $(1, \frac{d}{c}, -\frac{d}{c})$. El conjunto de vectores de la forma anterior es el mismo que el formado por los vectores $(1, e, -e)$ con $e \in \mathbb{K}$. De estos últimos se obtienen las ecuaciones de los hiperplanos invariantes:

$$H_e \equiv \{x_1 + ex_2 - ex_3 = 0\},\ e \in \mathbb{K} \quad \square$$

6.4. Determine las rectas y planos invariantes del endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$ con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Tenemos en cuenta los cálculos que se realizaron en el Ejercicio 5.22., pág. 31. Los autovalores de f y sus multiplicidades algebraicas son

$$\lambda_1 = 0,\ a_1 = 2;\ \ \lambda_2 = 2,\ a_2 = 1$$

Las rectas invariantes son todas las contenidas en los subespacios propios asociados a los autovalores: V_0 y V_2. Ambos subespacios tienen dimensión 1, por lo que son las dos únicas rectas invariantes de f:

$$V_0 \equiv \{x_1 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\} \text{ y } V_2 \equiv \{x_1 = 0,\ 2x_2 - x_3 = 0\}$$

Los planos invariantes son de la forma $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con (a, b, c) autovector de f^t, por tanto, tenemos que determinar los subespacios propios del endomorfismo f^t, que tiene los mismos autovalores que f.

Subespacio propio de f^t asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$: unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}(f^t - 0\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f^t)$ se obtienen del sistema lineal $A^t X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Simplificando el sistema lineal tenemos que $\mathrm{Ker}(f^t) \equiv \{x_2 = x_3 = 0\}$. Los vectores no nulos de este subespacio son de la forma $(a, 0, 0)$ con $a \neq 0$, y de ellos se tienen los hiperplanos (planos) invariantes de ecuaciones $ax_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$. En realidad, se obtiene un único plano invariante para todo $a \neq 0$. Es el plano

$$P_1 \equiv \{x_1 = 0\}$$

Subespacio propio de f^t asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$: unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}(f^t - 2\,\mathrm{Id})$ se obtienen del sistema lineal $(A^t - 2I_3)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema lineal obtenemos unas ecuaciones paramétricas

$$\mathrm{Ker}(f^t - 2\,\mathrm{Id}) = \{(-a, -a, a),\ a \in \mathbb{K}\}$$

Los vectores no nulos de este subespacio son de la forma $(-a, -a, a)$ con $a \neq 0$, y de ellos se tienen los hiperplanos (planos) invariantes de ecuaciones $-ax_1 - ax_2 + ax_3 = 0$. En realidad se obtiene el mismo plano invariante para todo $a \neq 0$. Es el plano:

$$P_2 \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$$

Un modo alternativo de calcular los planos invariantes sería el siguiente: En primer lugar, dado que hay dos rectas invariantes y el número de hiperplanos invariantes es igual al número de rectas invariantes, entonces hay exactamente dos hiperplanos (planos) invariantes. Si somos capaces de encontrar dos planos invariantes, ya estaría resuelto. Para ello, podemos usar los datos sobre subespacios generalizados que se calcularon en el Ejercicio 5.22. El subespacio máximo $M(0) = K^2(0) = \mathrm{Ker}(f^2)$ es un plano invariante irreducible ya que es 2−cíclico. La matriz de $f|_{M(0)}$ está formada por un bloque de Jordan

$$J(f|_{M(0)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Po otro lado, un plano invariante reducible se obtiene como suma de las dos únicas rectas invariantes: $V_0 \oplus V_2$. Con los dos métodos se obtienen los mismos planos

$$P_1 = V_0 \oplus V_2 \quad \text{y} \quad P_2 = K^2(0) \quad \square$$

6.5. Teniendo en cuenta el Ejercicio 5.12., determine las rectas y planos invariantes del endomorfismo f de $\mathbb{K}^3$ con matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Solución: Las raíces del polinomio característico de B se calcularon en el Ejercicio 5.12., pág. 17; y son: 1, i y $-i$; por lo que es necesario distinguir dos casos dependiendo del cuerpo $\mathbb{K}$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces f tiene un único autovalor $\lambda = 1$ y el subespacio propio asociado es la recta $V_1 \equiv \{x_3 = 0,\ 2x_1 - 4x_2 = 0\}$. Ésta es la única recta invariante.
  Por tanto, f tiene un único plano invariante, que es un hiperplano. Para determinarlo, sin tener en cuenta la forma canónica de f, calculamos los autovectores de f^t. Unas ecuaciones implícitas del subespacio propio de f^t asociado al autovalor 1 se obtienen del sistema lineal $(B^t - I_3)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ -1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Ker}(f^t - \mathrm{Id}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Los autovectores no nulos de f^t son de la forma $(-2a, a, a)$, con $a \neq 0$. Todos dan lugar al mismo plano (hiperplano) invariante

$$P \equiv \{-2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, los autovalores de f son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$ y $\lambda_3 = -i$ todos simples. Los tres subespacios propios asociados a estos autovalores son las tres rectas invariantes generadas por los autovectores correspondientes (véase, pág. 17)

$$V_1 = L((2,1,0)), \quad V_i = L\left(\left(\frac{1+i}{2}, i, 1\right)\right), \quad V_{-i} = L\left(\left(\frac{1-i}{2}, -i, 1\right)\right)$$

Como el número de rectas invariantes es igual al número de hiperplanos invariantes, entonces f tiene exactamente tres planos invariantes. En este caso, es sencillo determinarlos teniendo en cuenta que la suma de dos rectas invariantes es un plano invariante. Los planos son:

$$\begin{aligned} P_1 &= V_1 \oplus V_i = L((2,1,0), (\tfrac{1+i}{2}, i, 1)) \\ P_2 &= V_1 \oplus V_{-i} = L((2,1,0), (\tfrac{1-i}{2}, -i, 1)) \\ P_3 &= V_i \oplus V_{-i} = L\left((\tfrac{1+i}{2}, i, 1),\ (\tfrac{1-i}{2}, -i, 1)\right) \end{aligned}$$

Los tres son planos invariantes reducibles. □

6.6. Determine las posibles formas canónicas de un endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ que tiene infinitas rectas invariantes.

Solución: Dado que las rectas invariantes están generadas por autovectores y, por tanto, son todas las contenidas en los subespacios propios asociados a los autovalores, entonces es necesario que el endomorfismo tenga un autovalor λ, tal que, el subespacio V_λ tenga dimensión mayor o igual que 2. Es decir, la multiplicidad geométrica de λ debe ser $g \geq 2$.

(1) Si $g = 3$, entonces λ sería el único autovalor con multiplicidad algebraica $a = 3$. Como coinciden ambas multiplicidades, entonces el endomorfismo es diagonalizable y la forma canónica es

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(2) Si $g = 2$, para la multiplicidad algebraica a de λ se tienen dos opciones: $a = 3$ o $a = 2$.

(2.1) Si $a = 3$, entonces λ es el único autovalor triple. La multiplicidad geométrica $g = 2$ indica que en la forma canónica hay dos bloques de Jordan, por lo que sería la siguiente

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(2.2) Si $a = 2$, entonces el endomorfismo tendría otro autovalor distinto, μ, simple, y la siguiente forma canónica

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \square$$

6.7. Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V que admite una forma canónica de Jordan. Demuestre que existe un subespacio f−invariante irreducible de dimensión r, con $1 \leq r \leq \dim V$, si y sólo si, la forma canónica de Jordan tiene al menos un bloque de Jordan de orden $l \geq r$.

Solución: Un subespacio U de V es f−invariante irreducible de dimensión r, si y sólo si, es r−cíclico. Es decir, si existe un autovalor λ de f tal que

$$U = L\left(v, (f - \lambda\,\mathrm{Id})(v), \ldots, (f - \lambda\,\mathrm{Id})^{r-1}(v)\right) \text{ con } v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^r - \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^{r-1}$$

$\Rightarrow$) Supongamos que existe U en las condiciones anteriores. Entonces, el subespacio máximo asociado a λ es $M(\lambda) = K^l(\lambda) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^l$ con $l \geq r$ ya que se tiene la cadena de subespacios propios generalizados

$$V_\lambda = K^1(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq K^{r-1}(\lambda) \subsetneq K^r(\lambda) \subseteq \cdots \subseteq K^l(\lambda) = M(\lambda), \ l \geq r.$$

Por tanto, en la tabla de la base de Jordan de $M(\lambda)$, la primera fila contendrá $l \geq r$ vectores, que darán lugar a un bloque de Jordan de orden $l \geq r$ en la forma canónica.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que en la forma canónica de Jordan de f hay un bloque de Jordan $B_l(\lambda)$ con $l \geq r$, entonces existe una fila de vectores en la base de Jordan de la forma

$K^1(\lambda)$	$\subset \cdots \subset$	$K^r(\lambda)$	$\subset \cdots \subset$	$K^{l-1}(\lambda)$	$\subset K^l(\lambda)$
v_l	$\leftarrow \cdots \leftarrow$	v_{l-r+1}	$\leftarrow \cdots \leftarrow$	v_2	$\leftarrow v_1$

donde $v_i = (f - \lambda\,\mathrm{Id})^{i-1}(v_1)$, $i = 2, \ldots, l$.

Los r últimos vectores $v_{l-r+1}, \ldots, v_l$ generan un subespacio r−cíclico que es un subespacio f−invariante irreducible. Veámoslo.

Si llamamos $v = v_{l-r+1} = (f - \mathrm{Id})^{l-r}(v_1)$, entonces podemos expresar los r vectores $v_{l-r+1}, v_{l-r} \ldots, v_l$ de la forma

$$v, \ (f - \mathrm{Id})(v), \ldots, \ (f - \mathrm{Id})^{r-1}(v)$$

por lo que el subespacio $U = L(v, \ (f - \mathrm{Id})(v), \ldots, \ (f - \mathrm{Id})^{r-1}(v))$ es r−cíclico y, en particular, un subespacio invariante irreducible de dimensión r, como queríamos demostrar. $\square$

6.8. Determine las ecuaciones de los planos invariantes irreducibles del endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Los planos irreducibles son subespacios 2−cíclicos de la forma

$$L(v, (f - \mathrm{Id})(v)) \quad \text{con} \quad v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2 - \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$$

Unas ecuaciones de $K^1(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ se obtienen del sistema lineal $(J - I_3)X = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K^1(1) \equiv \{x = 0\}$$

Como $\dim K^1(1) = 2$, entonces $\dim K^2(1) = 3$, es decir $K^2(1) = \mathbb{R}^3$, y por ser el espacio total no tiene ecuaciones implícitas.

Así, los vectores v que pertenecen a $K^2(1) - K^1(1)$ tienen coordenadas, respecto de $\mathcal{B}$, (a, b, c) con $a \neq 0$. Su imagen por $f - \mathrm{Id}$ se calcula teniendo en cuenta que la matriz de este endomorfismo es $J - I_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (f - \mathrm{Id})\,(a, b, c) = (0, a, 0)$$

Entonces, los planos invariantes irreducibles son de la forma $L((a, b, c), (0, a, 0))$ con $a \neq 0$. Para simplificar las ecuaciones de estos planos determinamos un sistema generador de vectores equivalente, con menos parámetros:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los planos son de la forma $P_e = L((1, 0, e), (0, 1, 0))$ con $e \in \mathbb{R}$ y unas ecuaciones implícitas son

$$P_e \equiv \{ex - z = 0\}, \quad e \in \mathbb{R}$$

Todos los planos contienen a la recta $L((0, 1, 0))$, que es el eje y. Se trata del haz de planos que se cortan en esa recta. Véase la Figura 6.2. Además, como todos los planos son irreducibles, el eje y es la única recta invariante contenida en cada uno. $\square$

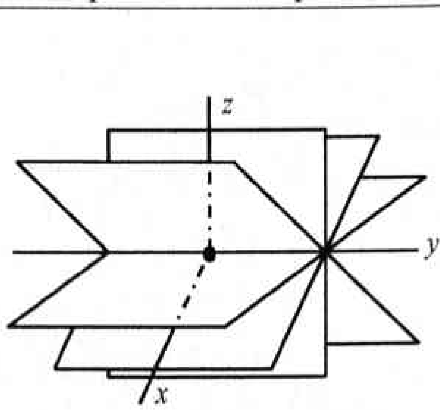


Figura 6.2: Algunos planos invariantes del haz que contiene al eje y.

6.9. Sean f un endomorfismo de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ una base de V, tal que la matriz de f en dicha base es la siguiente matriz de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(a) Determine los subespacios $f-$invariantes irreducibles.

(b) Determine los hiperplanos $f-$invariantes reducibles.

Solución: En primer lugar, a la vista de la matriz, podemos afirmar que el endomorfismo tiene dos autovalores $\lambda_1 = 1$, $a_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$, $a_2 = 2$. La multiplicidad geométrica de cada uno es igual al número de bloques de Jordan asociados, por lo que $g_1 = g_2 = 1$. El tamaño del bloque más grande indica cuál es el subespacio máximo:

$$M(1) = K^3(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^3 \quad \text{y} \quad M(2) = K^2(2) = \operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})^2$$

Las tablas de la base de Jordan de cada uno son

Dimensiones:	1		2		3	1		2
Subespacios:	$K^1(1)$	$\subset$	$K^2(1)$	$\subset$	$K^3(1) = M(1)$	$K^1(2)$	$\subset$	$K^2(2) = M(2)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1	v_5	$\leftarrow$	v_4

El espacio vectorial se descompone en suma directa $V = M(1) \oplus M(2)$.

(a) Las rectas invariantes son todas las contenidas en los subespacios propios asociados a los autovalores. En este caso, cada subespacio propio es una recta, luego sólo hay dos rectas invariantes: $V_1 = K^1(1) = L(v_3)$ y $V_2 = K^1(2) = L(v_5)$.

Los subespacios invariantes irreducibles están contenidos en los subespacios máximos. Como $\dim M(1) = 3$ y $\dim M(2) = 2$, entonces no hay ningún subespacio irreducible de dimensión cuatro, es decir, ningún hiperplano invariante irreducible; y el único subespacio f−invariante irreducible de dimensión tres es el subespacio 3−cíclico

$$M(1) = L(v_1, v_2, v_3) \text{ con } v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1), \ v_3 = (f - \mathrm{Id})^2(v_1)$$

Planos irreducibles invariantes contenidos en $M(2)$:
Como $M(2) = L(v_4, v_5)$ con $v_5 = (f - 2\,\mathrm{Id})(v_4)$, es un subespacio 2−cíclico, entonces es un plano invariante irreducible.

Planos irreducibles invariantes contenidos en $M(1)$:
Como $M(1) = L(v_1, v_2, v_3)$ es 3−cíclico, entonces contiene a un único plano invariante irreducible, que es $P = L(v_2, v_3)$ con $v_3 = (f - \mathrm{Id})(v_2)$. Véase, la propiedad (5), pág. 91.

(b) El número de hiperplanos invariantes es igual al de rectas invariantes, es decir igual a dos. Como no hay hiperplanos invariantes irreducibles, entonces hay exactamente dos hiperplanos invariantes reducibles. Podemos obtener uno como suma directa de los dos planos invariantes que se calcularon en el apartado anterior:

$$H_1 = P \oplus M(2),$$

y otro, como suma de una recta y un subespacio de dimensión 3 invariantes:

$$H_2 = V_2 \oplus M(1) \quad \square$$

6.10. Determine todos los subespacios invariantes del endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ con la siguiente matriz respecto de la base canónica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la base canónica de $\mathbb{K}^4$. La matriz A es una matriz de Jordan que se corresponde con las siguientes tablas para los autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$

Dimensiones: Subespacios:	1 $K^1(1)$	$\subset$	2 $K^2(1) = M(1)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1

1 $K^1(2)$	$\subset$	2 $K^2(2) = M(2)$
v_4	$\leftarrow$	v_3

Los dos subespacios máximos son 2−cíclicos y por tanto irreducibles.

El procedimiento para determinar todos los subespacios invariantes es el siguiente: se calculan todos los subespacios irreducibles contenidos en cada subespacio máximo. El resto de subespacios son reducibles y se obtienen como sumas de los irreducibles.

- Subespacios irreducibles contenidos en $M(1) = L(v_1, v_2)$.
  Por er 2–cíclico, contiene una única recta invariante, $V_1 = L(v_2)$, el subespacio propio asociado al autovalor 1, y un único plano invariante irreducible, que es el propio $M(1)$.
- Subespacios irreducibles contenidos en $M(2) = L(v_3, v_4)$. Igual que en el caso anterior, por ser $M(2)$ un subespacio 2–cíclico, contiene una única recta invariante, $V_2 = L(v_4)$, el subespacio propio asociado al autovalor 2, y un único plano irreducible invariante, que es el propio $M(2)$.

Subespacios invariantes reducibles:

Planos reducibles: son sumas de rectas invariantes, por tanto sólo tenemos una posibilidad

$$P = V_1 \oplus V_2 = L(v_2, v_4)$$

Hiperplanos invariantes reducibles. En primer lugar, observamos que no hay ningún hiperplano invariante irreducible, pues todos los subespacios invariantes irreducibles están contenidos en los subespacios máximos y ambos tienen dimensión dos. Por otro lado, como el número de rectas invariantes es igual al número de hiperplanos invariantes, entonces el endomorfismo tiene exactamente dos hiperplanos invariantes y son reducibles. Podemos obtenerlos como suma de un plano invariante y una recta invariante no contenida en el plano:

$$H_1 = V_1 \oplus M(2) = L(v_2, v_3, v_4) \;\text{ y }\; H_2 = V_2 \oplus M(1) = L(v_1, v_2, v_4)$$

En resumen, el endomorfismo tiene dos rectas invariantes, dos hiperplanos invariantes (ambos reducibles) y tres planos invariantes (dos irreducibles y uno reducible). □

6.11. Determine todos los subespacios invariantes del endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ con la siguiente matriz respecto de la base canónica

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: Los autovalores son $\lambda_1 = 1$, triple, y $\lambda_2 = 2$, simple. La matriz dada es una matriz de Jordan, por lo que la base canónica, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, es una base de Jordan que se corresponde con las siguientes tablas de subespacios máximos:

Dimensiones:	1		2		3	1
Subespacios:	$K^1(1)$	$\subset$	$K^2(1)$	$\subset$	$K^3(1) = M(1)$	$K^1(2) = M(2)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1	v_4

Subespacios f−invariantes irreducibles:

Contenidos en $M(2)$: el propio $M(2)$ ya que es una recta.

Contenidos en $M(1)$: como este subespacio es 3−cíclico ya que

$$M(1) = L(v_1, v_2, v_3) \text{ con } v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1),\ v_3 = (f - \mathrm{Id})^2(v_1),$$

entonces los únicos subespacios invariantes no triviales contenidos en él (véase, (5), pág. 91) son:

- la recta $L(v_3) = K^1(1)$,
- el plano irreducible $L(v_2, v_3) = K^2(1)$,
- el hiperplano irreducible $L(v_1, v_2, v_3) = K^3(1) = M(1)$.

Subespacios f−invariantes reducibles:

Los subespacios f−invariantes reducibles se obtienen como sumas de los irreducibles. Son los siguientes:

Planos reducibles: sólo hay uno que es suma de las dos únicas rectas invariantes:

$$P = L(v_3, v_4) = L(v_3) \oplus L(v_4) = K^1(1) \oplus M(2)$$

Hiperplanos reducibles: son suma de un plano f−invariante y una recta f−invariante no contenida en el plano. Sólo hay una opción

$$H = L(v_4) \oplus L(v_2, v_3) = M(2) \oplus K^2(1)$$

Se confirma que el número de hiperplanos invariantes (uno reducible y otro irreducible) es igual al número de rectas invariantes. □

6.12. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^4$ con la siguiente matriz respecto de la base canónica $\mathcal{B}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine unas ecuaciones implícitas respecto de $\mathcal{B}$ de los planos e hiperplanos irreducibles f−invariantes.

Solución: Para determinar todos los subespacios invariantes, previamente, hay que calcular la forma canónica de Jordan y una base de Jordan. Esto ya se hizo en el Ejercicio 5.26. donde se obtuvieron la siguiente matriz de Jordan y la base

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Dimensiones:	2		4
Subespacios:	$K^1(1)$	$\subset$	$K^2(1) = M(1)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4	$\leftarrow$	v_3

$$\mathcal{B}' = \{v_1 = (1,0,0,0),\ v_2 = (0,1,1,1),\ v_3 = (0,0,1,0),\ v_4 = (0,-1,-1,1)\}$$

En primer lugar, observamos que no hay hiperplanos $f-$invariantes irreducibles ya que una condición necesaria es que en la forma canónica haya un bloque de Jordan de tamaño mayor o igual que tres (véase Ejercicio 6.7.).

Determinamos los planos $f-$invariantes irreducibles respecto de la base $\mathcal{B}'$ de Jordan y, después, obtendremos sus ecuaciones respecto de la canónica. A la vista de la tabla de la base de Jordan podemos afirmar que

$$K^1(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = L(v_2, v_4)$$

y sus ecuaciones respecto de $\mathcal{B}'$ son $\{x_1 = x_3 = 0\}$; y

$$K^2(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2 = \mathbb{K}^4$$

por lo que no tiene ecuaciones implícitas.

Los planos irreducibles son subespacios $2-$cíclicos de la forma

$$L(v, (f - \mathrm{Id})(v)) \ \text{ con } \ v \in K^2(1) - K^1(1)$$

y los vectores $v \in K^2(1) - K^1(1)$ tienen coordenadas (a,b,c,d), respecto de $\mathcal{B}'$, tales que no son solución de las ecuaciones de $K^1(1)$. Es decir, son los vectores

$$(a,b,c,d)_{\mathcal{B}'} \ \text{ tales que } \ (a,c) \neq (0,0)$$

Si $v = (a,b,c,d)_{\mathcal{B}'}$, entonces $(f - \mathrm{Id})(v) = (0,a,0,c)_{\mathcal{B}'}$ ya que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

Por tanto, los planos $f-$invariantes irreducibles son

$$L((a,b,c,d)_{\mathcal{B}'},\ (0,a,0,c)_{\mathcal{B}'}) \ \text{ con } \ (a,c) \neq (0,0)$$

Para simplificar las ecuaciones de estos planos, determinamos un sistema generador de vectores equivalente haciendo operaciones elementales con los vectores. Esto es opcional. Si $a \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & 0 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & l & e & f \\ 0 & 1 & 0 & e \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & e & g \\ 0 & 1 & 0 & e \end{pmatrix},\ e, g \in \mathbb{K}$$

Si $a = 0$, entonces $c \neq 0$ y un sistema generador equivalente es

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & h & 1 & j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ h \in \mathbb{K}$$

A continuación determinamos sus ecuaciones en la base canónica $\mathcal{B}$, para lo cual tenemos que determinar las coordenadas de los vectores generadores respecto de $\mathcal{B}$:

- Los planos $P_{e,g} = L((1,0,e,g)_{\mathcal{B}'}, (0,1,0,e)_{\mathcal{B}'})$:

$$\begin{aligned}(1,0,e,g)_{\mathcal{B}'} &= 1v_1 + 0v_2 + ev_3 + gv_4 = (1,0,0,0)_{\mathcal{B}} + e(0,0,1,0)_{\mathcal{B}} + g(0,-1,-1,1)_{\mathcal{B}} \\ &= (1,-g,e-g,g)_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0,1,0,e)_{\mathcal{B}'} &= 0v_1 + 1v_2 + 0v_3 + ev_4 = (0,1,1,1)_{\mathcal{B}} + e(0,-1,-1,1)_{\mathcal{B}} \\ &= (0,1-e,1-e,1+e)_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

En la base canónica, $\mathcal{B}$,

$$P_{e,g} = L((1,-g,e-g,g)_{\mathcal{B}}, (0,1-e,1-e,1+e)_{\mathcal{B}})$$

y sus ecuaciones implícitas se obtienen de la condición

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ -g & 1-e & x_2 \\ e-g & 1-e & x_3 \\ g & 1+e & x_4 \end{pmatrix} = 2$$

de donde

$$P_{e,g} \equiv \left\{ \begin{array}{r} ex_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2gx_1 + (1+e)x_2 - (1-e)x_4 = 0 \end{array} \right.$$

- Los planos $P_h = L((0,h,1,0)_{\mathcal{B}'}, (0,0,0,1)_{\mathcal{B}'})$:

$$(0,h,1,0)_{\mathcal{B}'} = 0v_1 + hv_2 + v_3 + 0v_4 = h(0,1,1,1)_{\mathcal{B}} + (0,0,1,0)_{\mathcal{B}} = (0,h,h+1,h)_{\mathcal{B}}$$
$$(0,0,0,1)_{\mathcal{B}'} = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + v_4 = (0,-1,-1,1)_{\mathcal{B}}$$

En la base canónica, $\mathcal{B}$,

$$P_h = L(\,(0,h,h+1,h)_{\mathcal{B}},\ (0,-1,-1,1)_{\mathcal{B}}\,)$$

y sus ecuaciones implícitas se obtienen de la condición

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ h & -1 & x_2 \\ h+1 & -1 & x_3 \\ h & 1 & x_4 \end{pmatrix} = 2$$

de donde

$$P_h \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1 = 0 \\ (-1-2h)x_2 + 2hx_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad \square$$

6.13. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3&-1&1&0\\1&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&-1&3\end{pmatrix},\ J=\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&0&0\\1&2&0&0\\\hline 0&0&2&0\\0&0&1&2\end{array}\right),\ P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&0&1\\0&-1&1&1\end{pmatrix}$$

tales que $J=P^{-1}AP$, considere el endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ cuya matriz en la base canónica es A y estudie si:

(a) existe algún plano f–invariante, contenido en un hiperplano invariante, y que contenga infinitas rectas invariantes;

(b) existe algún plano f–invariante que contenga exactamente dos rectas invariantes.

En caso afirmativo, determine las ecuaciones de los planos en la base canónica.

Solución: Si llamamos $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbb{K}^4$ se tiene que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)=A$. La matriz J es la forma canónica de Jordan de f, que es la matriz de f respecto de una base $\mathcal{B}'=\{v_1',\, v_2',\, v_3',\, v_4'\}$ de modo que $P=\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Entonces

$$\mathcal{B}'=\{v_1'=(0,0,1,0),\ v_2'=(1,0,-1,-1),\ v_3'=(0,0,0,1),\ v_4'=(0,1,1,1)\}$$

es la base de Jordan cuyos vectores se obtienen de las columnas de P.

Estudiamos la existencia de los planos f–invariantes respecto de la base de Jordan $\mathcal{B}'$, que es más sencillo y, después, calculamos las ecuaciones en la base canónica. Siempre es útil tener en cuenta la tabla de la base de Jordan para determinar una base de cada subespacio propio generalizado:

Dimensiones:	2		4
Subespacios:	$K^1(2)$	$\subset$	$K^2(2)=M(2)$
	v_2'	$\leftarrow$	v_1'
	v_4'	$\leftarrow$	v_3'

(a) Las rectas invariantes están contenidas en el subespacio propio asociado al único autovalor $K^1(2)=\mathrm{Ker}(f-2\,\mathrm{Id})$, por tanto un plano invariante que contenga infinitas rectas invariantes estará contenido en $K^1(2)$. En este caso, $P=K^1(2)=L(v_2',v_4')$ es el único plano invariante que contiene infinitas rectas invariantes. Este plano está contenido en el hiperplano $H=L(v_1',v_2',v_4')$, que es invariante por ser suma de dos subespacios invariantes

$$H=L(v_1',v_2',v_4')=L(v_1',v_2')\oplus L(v_4')$$

El plano $L(v_1',v_2')$ es irreducible por ser 2–cíclico y $L(v_4')$ es una recta invariante por ser v_4' autovector. Las formas canónicas de Jordan de $f|_H$ y $f|_P$ son

$$J(f|_H)=\left(\begin{array}{cc|c}2&0&0\\1&2&0\\\hline 0&0&2\end{array}\right)\quad\text{y}\quad J(f|_P)=\left(\begin{array}{c|c}2&0\\\hline 0&2\end{array}\right)$$

Una ecuación implícita de H en la base $\mathcal{B}'$ se obtiene considerando las coordenadas de los vectores de la base de H respecto de $\mathcal{B}'$:

$$v_1' = (1,0,0,0)_{\mathcal{B}'},\ v_2' = (0,1,0,0)_{\mathcal{B}'},\ v_4' = (0,0,0,1)_{\mathcal{B}'}$$

Una ecuación de H respecto de $\mathcal{B}'$ se obtiene de la condición

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} = 3 \ \Rightarrow\ H \equiv \{x_3 = 0\}$$

Una ecuación de H respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ se obtiene considerando las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de los vectores de la base de H:

$$v_1' = (0,0,1,0)_{\mathcal{B}},\ v_2' = (1,0,-1,-1)_{\mathcal{B}},\ v_4' = (0,1,1,1)_{\mathcal{B}}$$

Una ecuación de H respecto de $\mathcal{B}$ se obtiene de la condición

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & y_2 \\ 1 & -1 & 1 & y_3 \\ 0 & -1 & 1 & y_4 \end{pmatrix} = 3 \ \Rightarrow\ H \equiv \{y_1 - y_2 + y_4 = 0\}$$

donde (y_1, y_2, y_3, y_4) son a las coordenadas de un vector genérico respecto de $\mathcal{B}$.

Unas ecuaciones implícitas del plano $P = L(v_2', v_4')$ respecto de $\mathcal{B}$ se obtiene de la condición

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ -1 & 1 & y_3 \\ -1 & 1 & y_4 \end{pmatrix} = 2 \ \Rightarrow\ P \equiv \left\{ \begin{array}{l} y_1 - y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - y_2 + y_4 = 0 \end{array} \right.$$

(b) Un plano $f-$invariante que contenga exactamente dos rectas $f-$invariantes, R_1 y R_2, debe ser de la forma $P = R_1 \oplus R_2$, con $R_1 = L(u_1)$, $R_2 = L(u_2)$; y u_1, u_2 autovectores asociados a autovalores distintos. Esta situación no se puede dar ya que f tiene un único autovalor. □

6.14. Dado un endomorfismo f de un espacio vectorial V, demuestre que si un plano P contenido en V contiene tres rectas $f-$invariantes, entonces todas las rectas contenidas en dicho plano son $f-$invariantes.

Solución: Sea P un plano $f-$invariante de V y $R_i = L(v_i)$, $i = 1,2,3$; tres rectas invariantes distintas contenidas en P. Cada vector v_i, es un autovector asociado a algún autovalor λ_i de f. Si los tres autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 fuesen distintos, entonces los tres vectores v_1, v_2 y v_3 serían linealmente independientes y no podrían estar contenidos en el plano P. Por tanto, como mucho hay dos autovalores distintos entre λ_1, λ_2 y λ_3.

Supongamos que hay exactamente dos autovalores distintos, por ejemplo $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\lambda_2 = \lambda_3$, entonces una base de P está formada por los autovectores v_1 y v_2 que son linealmente independientes por estar asociados a autovalores distintos. En tal caso, el vector v_3, que pertenece a P y es un autovector asociado a λ_2, sólo puede ser de la forma $v_3 = \mu v_2$. En tal caso, las rectas R_2 y R_3 serían iguales, llegando a una contradicción.

Entonces, los tres autovalores son iguales $\lambda_i = \lambda$, $i = 1, 2, 3$; y los tres autovectores cumplen $v_i \in V_\lambda$. Dado que las tres rectas son distintas, los vectores no son proporcionales, por lo que podemos tomar $\{v_1, v_2\}$ como una base de autovectores de P. Los vectores de P son de la forma $av_1 + bv_2$, por lo que son autovectores asociados al autovalor λ. Es decir, todas las rectas contenidas en P son $f-$invariantes, como queríamos demostrar.

Demostración alternativa: Si un plano contiene más de dos rectas invariantes, entonces su forma canónica de $f|_P$ es como en (6.4), pág. 91:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Por tanto, todas las rectas contenidas en P son invariantes. $\square$

6.15. Estudie si puede existir un endomorfismo de $\mathbb{C}^4$ que tenga exactamente una recta invariante y exactamente dos planos invariantes.

Solución: En primer lugar, observamos que el endomorfismo, por ser complejo, admite una forma canónica de Jordan.

Puesto que las rectas invariantes son todas las contenidas en los subespacios propios, entonces, necesariamente habrá un único autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ de multiplicidad algebraica $a = 4$, y V_λ será la única recta invariante. Por lo tanto, la multiplicidad geométrica será $d = \dim V_\lambda = 1$ y la matriz de Jordan del endomorfismo tendrá un único bloque de Jordan.

La la forma canónica de Jordan y la tabla de la base correspondiente son

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

1		2		3		4
$K^1(\lambda)$	$\subset$	$K^2(\lambda)$	$\subset$	$K^3(\lambda)$	$\subset$	$K^4(\lambda) = M(\lambda)$
v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1

La base de Jordan es

$$\mathcal{B} = \{v_1, (f - \lambda \,\mathrm{Id})(v_1), (f - \lambda \,\mathrm{Id})^2(v_1), (f - \lambda \,\mathrm{Id})^3(v_1)\}, \; v_1 \in K^4(\lambda) - K^3(\lambda)$$

lo que implica que el espacio total $\mathbb{C}^4 = M(\lambda)$ es un subespacio $4-$cíclico, y por tanto irreducible.

Contenidos en un subespacio invariante $4-$cíclico, en este caso $\mathbb{C}^4$, sólo hay tres subespacios invariantes y todos son irreducibles:

- la recta $L(v_4)$,
- el plano $L(v_3, v_4) = L(v_3, (f - \lambda\,\mathrm{Id})(v_3))$, que es 2− cíclico;
- el hiperplano $L(v_2, v_3, v_4) = L(v_2, (f - \lambda\,\mathrm{Id})(v_2), (f - \lambda\,\mathrm{Id})^2(v_2))$; que es 3−cíclico.

Por tanto el endomorfismo f de $\mathbb{C}^4$ con una única recta invariante, tiene también un único plano invariante. Se concluye que **no** existe un endomorfismo en las condiciones dadas. □

6.16. Estudie si puede existir un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ que tenga exactamente una recta invariante y exactamente dos planos invariantes.

Solución: La diferencia respecto al ejercicio anterior es que no todo endomorfismo real admite una forma canónica de Jordan, por lo que se tienen otras opciones.

La parte inicial del razonamiento es la misma: puesto que las rectas invariantes son todas las contenidas en los subespacios propios, entonces necesariamente habrá un único autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ y V_λ será la única recta invariante. Ahora, la multiplicidad algebraica del autovalor no tiene que ser necesariamente $a = 4$. Se tiene las siguientes opciones:

(1) Si f admite una forma canónica de Jordan, entonces estaríamos en el caso análogo al del ejercicio anterior. El único autovalor, λ, tiene multiplicidad cuatro y el endomorfismo tiene una recta invariante y un único plano invariante.

(2) Si f no admite una forma canónica de Jordan, entonces su polinomio característico tiene raíces complejas $a \pm bi$, con $b \neq 0$, y su forma canónica será

$$J = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{array}\right)$$

La estructura diagonal por bloques de la matriz hace visibles los dos planos invariantes. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es la base tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = J$, entonces

$$P_1 = L(v_1, v_2), \quad P_2 = L(v_3, v_4)$$

son dos planos invariantes. Las formas canónicas de f restringida a cada plano son

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}_1}(f|_{P_1}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \ \mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\} \ \text{ y } \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}_2}(f|_{P_2}) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ \mathcal{B}_2 = \{v_3, v_4\}$$

Veamos ahora que no hay más planos f−invariantes. Si P fuese un plano f−invariante reducible sería suma directa de dos rectas invariantes, lo cual es imposible pues f sólo tiene una recta invariante. Si P fuese un plano f−invariante irreducible, 2−cíclico, contendría a la única recta invariante, es decir sería P_1, ya que la forma canónica de $f|_P$ sería $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, como en (6.2). Si fuera un plano invariante que no contiene rectas invariantes, entonces sería P_2, ya que la forma canónica de $f|_P$ sería $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$, como en (6.1)

Podemos afirmar que sí existe un endomorfismo real en las condiciones dadas. □

6.17. Escriba las matrices de dos endomorfismos de $\mathbb{K}^4$ que no sean linealmente equivalentes y tengan un único hiperplano invariante irreducible.

Solución: Dos endomorfismos f y g de $\mathbb{K}^4$ no son linealmente equivalentes si y sólo si tienen distintas formas canónicas. Por tanto, debemos encontrar dos formas canónicas distintas que cumplan las condiciones requeridas.

Un hiperplano $f-$invariante irreducible es un subespacio $3-$cíclico de la forma

$$H = L(v,\ (f-\lambda \mathrm{Id})(v),\ (f-\lambda \mathrm{Id})^2(v)),\quad v \in K^3(\lambda) - K^2(\lambda)$$

para algún autovalor λ de f. Entonces, el subespacio máximo asociado al autovalor λ contiene a $K^3(\lambda)$:

$$K^1(\lambda) \subsetneq K^2(\lambda) \subsetneq K^3(\lambda) \subseteq K^l(\lambda) = M(\lambda) \quad \text{con} \quad l = 3 \text{ o } l = 4$$

por lo que en la forma canónica de Jordan debe haber un bloque de Jordan de orden 3 o de orden 4 (véase Ejercicio 6.7.). Estudiamos los dos casos:

(1) Si $M(\lambda) = K^4(\lambda)$, entonces la forma canónica de Jordan es

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

y cumple la condición requerida ya que el espacio total $\mathbb{K}^4 = M(\lambda)$ es irreducible por ser $4-$cíclico y contiene como subespacios invariantes: una única recta $L(v_4)$, un único plano $L(v_3, v_4)$ irreducible, y un único hiperplano $L(v_2, v_3, v_4)$ irreducible.

(2) Si $M(\lambda) = K^3(\lambda)$, pueden darse dos situaciones:

(2.1) Si existe otro autovalor $\mu \neq \lambda$, la forma canónica sería

$$J_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu \end{array}\right)$$

que tiene un único hiperplano invariante irreducible $M(\lambda)$.

(2.2) Si λ es el único autovalor de multiplicidad algebraica 4, la forma canónica sería

$$J_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right)$$

En este caso, son hiperplanos invariantes irreducibles todos los subespacios $3-$cíclicos, es decir de la forma

$$L(v,\ (f-\lambda \mathrm{Id})(v),\ (f-\lambda \mathrm{Id})^2(v)) \quad \text{con} \quad v \in K^3(\lambda) - K^2(\lambda)$$

La tabla de la base de Jordan correspondiente es

Dimensiones: Subespacios:	2 $K^1(\lambda)$	$\subset$	3 $K^2(\lambda)$	$\subset$	4 $K^3(\lambda) = M(\lambda)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4				

El espacio total es $K^3(\lambda)$ y una base de $K^2(\lambda)$ es la formada por los vectores de las columnas 1 y 2 de la tabla: $\{v_2, v_3, v_4\}$. Entonces, una ecuación implícita de este subespacio es $x_1 = 0$. Los vectores de coordenadas (a, b, c, d) con $a \neq 0$ pertenecen a $K^3(\lambda) - K^2(\lambda)$ y con ellos se pueden generar distintos hiperplanos irreducibles $f-$invariantes. Por ejemplo, si $v = (1, 0, 0, 0)$, tenemos el hiperplano

$$H_v = L\left(v, (f - \lambda \operatorname{Id})(v),\ (f - \lambda \operatorname{Id})^2(v)\right) = L((1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0))$$

Si $u = (1, 0, 0, 1)$, tenemos el hiperplano

$$H_u = L\left(u, (f - \lambda \operatorname{Id})(u),\ (f - \lambda \operatorname{Id})^2(u)\right) = L((1,0,0,1),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0))$$

con $H_v \equiv \{x_4 = 0\}$ y $H_u \equiv \{x_1 - x_4 = 0\}$ distintos.

Finalmente, J_1 y J_2 son las matrices de dos endomorfismos no linealmente equivalentes que tienen un único hiperplano invariante irreducible. $\square$

6.18. Determine las posibles formas canónicas de Jordan o de Jordan real de los endomorfismos de $\mathbb{R}^5$ que tengan exactamente dos rectas invariantes.

Solución: Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ que tiene exactamente dos rectas invariantes. Dado que las rectas invariantes son todas las contenidas en los subespacios propios asociados a los autovalores, entonces f tiene exactamente dos autovalores distintos λ_1 y λ_2 y las dos rectas invariantes son $V_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \operatorname{Id})$ y $V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 \operatorname{Id})$.

Esto implica que las multiplicidades geométricas de los dos autovalores son iguales a uno, y las formas canónicas tienen un único bloque de Jordan asociado a cada autovalor.

Si el endomorfismo admite una forma canónica de Jordan se tienen las siguientes opciones:

$$J_1 = \left(\begin{array}{ccc|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \end{array}\right) \quad \text{y} \quad J_2 = \left(\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right)$$

Si el endomorfismo no admite una forma canónica de Jordan, el polinomio característico tendrá dos raíces complejas conjugadas y la forma de Jordan real será

$$J_3 = \left(\begin{array}{cc|c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{array}\right) \quad \square$$

6.19. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si un endomorfismo de $\mathbb{K}^4$ tiene tres autovalores distintos e infinitas rectas invariantes, entonces es diagonalizable.

(b) Si un endomorfismo de $\mathbb{C}^4$ tiene un único plano invariante, entonces tiene un único autovalor.

(c) Si f y g son dos endomorfismos de $\mathbb{R}^3$, tales que f tiene una única recta invariante y g un único plano invariante, entonces f y g son linealmente equivalentes.

(d) Si f y g son dos endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ con el mismo polinomio característico, tales que, f tiene infinitas rectas invariantes y g infinitos planos invariantes, entonces f y g son linealmente equivalentes.

(e) Existen endomorfismos de $\mathbb{R}^4$ con exactamente tres hiperplanos invariantes y algún autovalor múltiple.

Solución:

(a) Verdadera. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{K}^4$ que tenga tres autovalores distintos λ_1, λ_2 y λ_3. Tanto si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, como si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la cuarta raíz de polinomio característico pertenece al cuerpo $\mathbb{K}$, por tanto será igual a alguna de las otras tres raíces λ_1, λ_2 o λ_3. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que λ_1 es el autovalor doble y los otros dos simples. Dado que el endomorfismo tiene infinitas rectas invariantes, y éstas están contenidas en los subespacios propios, entonces necesariamente V_{λ_1} debe ser un plano ya que tanto V_{λ_2} como V_{λ_3} son de dimensión uno. Entonces, se cumple que las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada autovalor coinciden: $g_1 = a_1 = 2$, $g_2 = a_2 = g_3 = a_3 = 1$, por lo que f es diagonalizable. La forma canónica de Jordan sería la matriz diagonal

$$J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

(b) Verdadera. Lo demostramos por reducción al absurdo. Supongamos que f tiene un único plano invariante y dos autovalores distintos λ_1 y λ_2 con multiplicidades $a_1 + a_2 = 4$. Su forma canónica de Jordan, respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, podría ser de dos tipos distintos

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ a & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & b & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ a & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & b & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a, b \in \{0, 1\}$$

En los dos casos se tiene más de un plano invariante. Por ejemplo, si la matriz canónica es J_1, con independencia del valor de a y b, son invariantes los planos: $L(v_1, v_2)$ y $L(v_3, v_4)$; lo que se deduce sin más que ver la estructura en bloques de la matriz. Si la forma canónica es J_2, con independencia del valor de a y b, son invariantes los planos $L(v_2, v_3)$ y $L(v_3, v_4)$.

Supongamos ahora que f tiene un único plano invariante y tres o más autovalores distintos. Si λ_1, λ_2 y λ_3 son autovalores distintos, y v_1, v_2 y v_3 autovectores no nulos asociados, entonces f tiene al menos tres rectas invariantes $R_i = L(v_i)$, $i = 1, 2, 3$; y al menos tres planos invariantes

$$R_1 \oplus R_2, \quad R_1 \oplus R_3, \quad R_2 \oplus R_3$$

Entonces, se concluye que f sólo puede tener un autovalor λ que será de multiplicidad cuatro. De hecho se puede comprobar que la única forma canónica posible es la formada por un único bloque de Jordan:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(c) Falsa. Dos endomorfismos f y g son linealmente equivalentes si y sólo si tienen la misma forma canónica. Sin embargo las siguientes formas canónicas distintas se corresponden con dos endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ que cumplen la condición de tener una única recta invariante y un único plano invariante.

$$J(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } J(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

La afirmación sería cierta si los endomorfismos f y g fuesen complejos, y tuvieran los mismos autovalores, ya que la única forma canónica posible para un endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ con una única recta invariante o un único plano invariante es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(d) Falsa. Los endomorfismos f y g con las siguientes formas canónicas, respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ son un contraejemplo.

$$J(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ y } J(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Tienen el mismo polinomio característico y, por un lado, f tiene infinitas rectas invariantes: todas las contenidas en el subespacio propio asociado al autovalor, que es el plano $V_\lambda = L(v_2, v_3)$; y, por otro, g tiene infinitos planos invariantes, todos los planos de $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, f y g no son linealmente equivalentes ya que tienen distintas formas canónicas.

(e) Verdadera. Sí existen endomorfismos de $\mathbb{R}^4$ con exactamente tres hiperplanos invariantes y algún autovalor múltiple. Es el caso del endomorfismo con la siguiente matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_3\}$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Este endomorfismo tiene exactamente tres rectas invariantes, que son los tres subespacios propios asociados a los autovalores distintos:

$$V_{\lambda_1} = L(v_2),\ V_{\lambda_2} = L(v_3),\ V_{\lambda_3} = L(v_4)$$

y por tanto tiene tres hiperplanos invariantes. Además, tiene un autovalor múltiple. □

6.20. Sean $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y) = (-x - y,\ 4x + 3y)$ y U el subespacio vectorial de ecuación $2x + y = 0$. Demuestre que

(a) U es $f-$invariante, y

(b) No existe ningún subespacio $f-$invariante, W, tal que $\mathbb{K}^2 = U \oplus W$.

Solución:

(a) Una base de U, que es una recta de $\mathbb{K}^2$, es $\{(-1, 2)\}$. El subespacio U es $f-$invariante si y sólo si $f(-1, 2) \in U$. Entonces, podemos afirmar que U es $f-$invariante ya que $f(-1, 2) = (-1, 2) \in U$.

(b) En primer lugar, observamos que si W es un subespacio tal que $\mathbb{K}^2 = U \oplus W$, entonces $\dim W = 1$. El subespacio W es una recta $f-$invariante, si y sólo si, $W = L(v)$ siendo v un autovector de f y $v \notin U$. Veamos cómo son los autovalores y autovectores de f.

El polinomio característico de f es

$$\det(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

El único autovalor es $\lambda = 1$, por lo que todos los autovectores de f están contenidos en el subespacio propio $V_1 = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$ cuyas ecuaciones son:

$$\begin{pmatrix} -1-1 & -1 \\ 4 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando se obtiene que $V_1 \equiv \{2x + y = 0\}$, por lo que $V_1 = U$.

Entonces, como todo autovector de f pertenece a U, no existe W en las condiciones requeridas. □

6.21. Sea U un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita. Demuestre que si U es $f-$invariante para todo $f \in \mathcal{L}(V)$ entonces $U = \{0\}$ o $U = V$.

Solución: En primer lugar, observamos que tanto el subespacio trivial, $\{0\}$, como el total, V, cumplen la propiedad de ser invariantes por todo endomorfismo de V.

Ahora, supongamos que U es un subespacio tal que $\{0\} \subsetneq U \subsetneq V$ y veamos que no es $f-$invariante para algún endomorfismo f de V. La condición $\{0\} \subsetneq U \subsetneq V$ implica que existe un vector $w \in V - U$, $w \neq 0$. Vamos a definir un endomorfismo que cumpla $f(u) = w \notin U$ para algún $u \in U$. Para este endomorfismo U no será $f-$invariante.

Consideramos un vector no nulo $u \in U$ y una base de V que contenga a u, $\mathcal{B} = \{u, v_2, \ldots, v_n\}$. La existencia de una base tal queda garantizada por el Teorema de ampliación a una base ([BE], Teorema 3.23). La aplicación lineal definida por

$$f(u) = w,\ f(v_2) = w_2, \ldots, f(v_n) = w_n$$

con $w_2, \ldots, w_n$ vectores cualesquiera de V cumple la condición requerida. $\square$

6.22. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Demuestre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si U es un subespacio vectorial de V tal que $\mathrm{Im}(f) \subseteq U$, entonces es $f-$invariante.

(b) Si todos los subespacios vectoriales de V son $f-$invariantes, entonces f es una homotecia, es decir existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda v$, para todo $v \in V$.

Solución:

(a) Supongamos que U es un subespacio vectorial de V tal que $\mathrm{Im}(f) \subseteq U$. Para todo $v \in U$, se cumple que $f(v) \in \mathrm{Im}(f) \subseteq U$. Por tanto, U es $f-$invariante.

(b) Sea f un endomorfismo de V tal que todos los subespacios vectoriales de V son $f-$invariantes. En particular, toda recta de V es $f-$invariante. Para todo $v \in V$, $v \neq 0$, la recta $L(v)$ es $f-$invariante, si y sólo si, v es un autovector de f. Es decir, todo vector de V es autovector de f. A continuación vamos a demostrar que f tiene un único autovalor λ, de lo que se deduce que $f(v) = \lambda v$ para todo $v \in V$.

Supongamos que existen λ_1 y λ_2 dos autovalores distintos de f y sean v_1 y v_2 dos autovectores no nulos asociados a dichos autovalores. El vector $av_1 + bv_2 \neq 0$ es un autovector de f asociado a algún autovalor λ, por lo que

$$f(av_1 + bv_2) = \lambda(av_1 + bv_2) = \lambda\, av_1 + \lambda\, bv_2$$

También se cumple, por ser f lineal, que

$$f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2) = a\,\lambda_1\, v_1 + b\,\lambda_2\, v_2$$

Igualando ambas expresiones se tiene que

$$a(\lambda_1 - \lambda)v_1 + b(\lambda_2 - \lambda)v_2 = 0 \ \text{ para todo } \ a, b \in \mathbb{K}$$

Como v_1 y v_2 son linealmente independientes, la condición anterior se cumple si y sólo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Por lo que f tiene un único autovalor, como queríamos demostrar. $\square$

6.23. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V que admite una forma canónica de Jordan. Demuestre que si f es diagonalizable y U es un subespacio $f-$invariante, entonces $f|_U$ es diagonalizable.

Solución: Supongamos que f es diagonalizable, entonces los subespacios propios asociados a los autovalores de f coinciden con los subespacios máximos, es decir, para todo autovalor λ de f se cumple

$$\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^2 = M(\lambda)$$

Hacemos la demostración por reducción al absurdo suponiendo que U es un subespacio $f-$invariante y $f|_U : U \to U$ no es diagonalizable. Entonces, la forma canónica de Jordan de $f|_U$ tiene un bloque de Jordan de orden mayor que uno, y por tanto existe un subespacio $2-$cíclico

$$U = L(v, (f|_U - \lambda\,\mathrm{Id})(v)) \quad \text{con} \quad v \in \mathrm{Ker}(f|_U - \lambda\,\mathrm{Id})^2 - \mathrm{Ker}(f|_U - \lambda\,\mathrm{Id})$$

Este vector v también cumple $v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^2 - \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$, pero esto contradice la hipótesis de partida $\mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^2 = \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$. La contradicción viene de suponer que $f|_U$ no es diagonalizable. $\square$

6.24. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V que admite una forma canónica de Jordan. Demuestre que f es diagonalizable, si y sólo si, para todo subespacio vectorial $f-$invariante U existe un subespacio suplementario W que también es $f-$invariante.

Solución:

$\Rightarrow$) Supongamos que f es diagonalizable y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los autovalores distintos de f con multiplicidades algebraicas $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, tales que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n$, con $n = \dim V$. El espacio vectorial V se descompone en suma directa de los subespacios propios asociados a los autovalores

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_r}$$

y el subespacio $f-$invariante U es igual a

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r, \quad \text{con} \quad U_i = U \cap V_{\lambda_i}, \ i = 1, \ldots, r.$$

Entonces podemos construir una base de U formada por autovectores del siguiente modo: tomamos una base $\mathcal{B}_i$ de autovectores de cada U_i, para todo $U_i \neq \{0\}$ y la unión de dichas bases determina una base de U, $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_k\}$, formada por autovectores[1].

[1]Obsérvese que esta es una demostración alternativa del ejercicio anterior

Como f es diagonalizable, existe una base de autovectores, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ que podemos formar ampliando la base $\mathcal{B}_U$. Entonces, el subespacio $W = L(v_{k+1}, \dots, v_n)$ es un suplementario de U y al estar generado por autovectores también es invariante.

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo subespacio vectorial invariante U existe un subespacio suplementario W que también es invariante. Vamos a hacer la demostración por reducción al absurdo, suponiendo que f no es diagonalizable.

Si f no es diagonalizable, entonces su forma canónica de Jordan tiene un bloque de orden mayor o igual que dos. En concreto, existe un subespacio $2-$cíclico, que es un plano invariante irreducible:

$$P = (v, (f - \lambda\,\mathrm{Id})(v)) \quad \text{con} \quad v \in \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})^2 - \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id})$$

para algún autovalor λ de f. Este plano contiene un única recta invariante $R = L(v)$.

Aplicando la hipótesis inicial a R, sabemos que existe un subespacio W suplementario de R, es decir $V = R \oplus W$, que es invariante. Como la intersección de subespacios invariantes es invariante, entonces $P \cap W$ es un subespacio invariante. Ahora bien, el plano P no está contenido en W, ya que R es una recta contenida en P y no en W, por lo que $P \cap W$ es una recta invariante contenida en P y distinta de R. Una contradicción. $\square$

6.25. Sea g el endomorfismo de $\mathbb{K}^5$ con matriz en la base canónica

$$C = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \end{array}\right)$$

Teniendo en cuenta el Ejercicio 5.30., compruebe que el subespacio $g-$invariante

$$S \equiv \{\ x_2 - x_3 = 0,\ 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0\ \}$$

es reducible. Descomponga S como suma no trivial de subespacios $g-$invariantes y estudie si se puede descomponer como suma de rectas invariantes.

Solución: Para determinar si S es un subespacio $g-$invariante reducible o irreducible necesitamos conocer la forma canónica de Jordan de g y una base de cada subespacio máximo. Después tendremos en cuenta que:

(1) Una condición necesaria (no suficiente) para que S sea irreducible es que esté contenido en un subespacio máximo.

(2) Además, como $\dim(S) = 3$, S es irreducible si y sólo si es $3-$cíclico.

La forma canónica de Jordan $J(g)$ y una base de Jordan $\mathcal{B}'$ se calcularon en el Ejercicio 5.30., pág. 50.

$$J(g) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g) = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right), \quad \mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

$$u_1 = (1,0,0,0,0), \; u_2 = (0,1,1,0,0), \; u_3 = (1,-1,0,0,0)$$
$$u_4 = (0,0,0,1,1), \; u_5 = (0,0,0,3,4)$$

El espacio vectorial se descompone en suma de los subespacios máximos:

$$\mathbb{K}^5 = M(-1) \oplus M(1) \oplus M(2)$$

con

$$M(-1) = L(u_1, u_2, u_3), \; M(1) = L(u_4), \; M(2) = (u_3)$$

Con estos datos, podemos afirmar que S no está contenido en ningún subespacio máximo, por lo que es reducible. En efecto, como $\dim(S) = 3$, el único caso posible sería $S \subseteq M(-1)$, pero podemos encontrar vectores de S no contenidos en $M(-1)$, por ejemplo $v = (0,1,1,3,4) \in S$ y $v \notin M(-1)$ cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base canónica son $M(-1) \equiv \{x_4 = x_5 = 0\}$. Además, también podemos razonar del siguiente modo: S es irreducible si y sólo si es $3-$cíclico, y el endomorfismo no admite subespacios $3-$cíclicos ya que no hay ningún bloque de Jordan de orden mayor o igual que 3.

Para determinar una descomposición de S en suma de subespacios invariantes, tenemos en cuenta la propiedad (1), pág. 90, ([BE], Proposición 6.7):

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \;\text{ con }\; S_1 = S \cap M(-1), S_2 = S \cap M(1), S_3 = S \cap M(2)$$

Calculamos estos subespacios intersección:

$$S_1 = S \cap M(-1) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right.$$

Simplificando el sistema obtenemos unas ecuaciones implícitas de S_1

$$S_1 = S \cap M(-1) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{array} \right.$$

entonces, el subespacio $S \cap M(-1)$ es el plano $S_1 = L(u_1, u_2)$.

Para determinar $S_2 = S \cap M(1)$, teniendo en cuenta que $M(1) = L(u_4)$ es una recta, lo más fácil, sin tener que calcular unas ecuaciones implícitas de $M(1)$, es comprobar cuál de las dos opciones posibles es la que se da: $M(1) \subset S$ o bien $M(1) \cap S = \{0\}$. Comprobamos que $u_4 = (0,0,0,1,1) \notin S$, por lo que la recta $M(1)$ no está contenida en S, es decir

$$S_2 = M(1) \cap S = \{0\}$$

El subespacio $S_3 = S \cap M(2)$ se determina haciendo un razonamiento similar al anterior: $M(2) = L(u_5)$ es una recta, por lo que, o bien $M(2) \subset S$ o bien $M(2) \cap S = \{0\}$. Comprobamos que el vector $u_5 = (0,0,0,3,4)$ pertenece a S, ya que sus coordenadas son solución de sus ecuaciones implícitas, por tanto $M(2) \subset S$ y así

$$S_3 = S \cap M(2) = M(2)$$

La descomposición de S en subespacios $g-$invariantes no triviales es

$$S = S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 = S_1 \oplus S_3 = L(u_1, u_2) \oplus L(u_5)$$

La forma canónica de Jordan de $g|_S : S \longrightarrow S$ respecto de la base $\{u_1, u_2, u_5\}$ de S es

$$J(g|_S) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

El subespacio S no se puede descomponer en suma de rectas invariantes $S = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$, pues en tal caso $g|_S$ sería diagonalizable. De hecho, a la vista de la forma canónica anterior podemos afirmar que S contiene exactamente dos rectas invariantes $L(u_2)$ y $L(u_5)$. □

6.26. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^4$ con dos autovalores distintos, λ_1 y λ_2, tales que los subespacios propios asociados tiene las siguientes ecuaciones:

$$V_{\lambda_1} \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_2 - 2x_4 = 0\},\ V_{\lambda_2} \equiv \{2x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 + x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$$

Determine si los siguientes planos $f-$invariantes son reducibles o irreducibles

$$P_1 \equiv \{x_1 - x_3 = 0,\ x_2 = 0\},\quad P_2 \equiv \{3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0,\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0\}$$

Solución: Un plano invariante es reducible, si y sólo si, se puede descomponer en suma directa de dos rectas invariantes y, para ello, es condición necesaria y suficiente que el plano invariante contenga al menos dos rectas invariantes. Por otro lado, sabemos que todas las rectas $f-$invariantes están contenidas en los subespacios propios V_{λ_1} y V_{λ_2}, por lo que las rectas invariantes contenidas en un plano $f-$invariante P serán las contenidas en los subespacios $P \cap V_{\lambda_1}$ y $P \cap V_{\lambda_2}$.

Rectas invariantes contenidas en P_1:

$$P_1 \cap V_{\lambda_1} \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow P_1 \cap V_{\lambda_1} = L((1,0,1,0))$$

La recta $R_1 = L((1,0,1,0))$ es una recta invariante contenida en P_1.

$$P_1 \cap V_{\lambda_2} \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1 \cap V_{\lambda_2} = \{(0,0,0,0)\}$$

No hay ninguna recta invariante contenida en P_1 y asociada al autovalor λ_2. Entonces, P_1 contiene una única recta invariante, R_1, y por tanto es irreducible.

Rectas invariantes contenidas en P_2:

$$P_2 \cap V_{\lambda_1} \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_2 \cap V_{\lambda_1} = L((0,2,2,1))$$

La recta $R_2 = L((0,2,2,1))$ es una recta invariante contenida en P_2.

$$P_2 \cap V_{\lambda_2} \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_2 \cap V_{\lambda_2} = \{(1,-3,-1,0)\}$$

La recta $R_3 = L((1,-3,-1,0))$ es una recta invariante contenida en P_2. Entonces, P_2 es reducible ya que contiene dos rectas invariantes $P_2 = R_2 \oplus R_3$. □

6.27. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^8$ que respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_8\}$ tiene la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine si los subespacios propios generalizados son reducibles o irreducibles.

Solución: Los vectores de la base de Jordan $\mathcal{B}$ se corresponden con las siguientes tablas

Dimensiones:	2	3
Subespacios:	$K^1(1)$	$\subset K^2(1) = M(1)$
	v_2	$\leftarrow v_1$
	v_3	

2		4	5
$K^1(2)$	$\subset$	$K^2(2)$	$\subset K^3(2) = M(2)$
v_6	$\leftarrow$	v_5	$\leftarrow v_4$
v_8	$\leftarrow$	v_7	

Sabemos que los subespacios propios generalizados son $f-$invariantes y para determinar si son reducibles o irreducibles, en primer lugar, vamos a consideramos una base de cada subespacio. Obtenemos las bases de las tablas anteriores:

- $K^1(1) = L(v_2, v_3)$ y como todas las rectas contenidas en $K^1(1)$ son invariantes se tiene que $K^1(1) = L(v_2) \oplus L(v_3)$, por lo que es reducible. Además,

$$J(f|_{K^1(1)}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

- $K^2(1) = L(v_1, v_2, v_3)$. Contiene a la recta invariante $L(v_3)$ y al plano $L(v_1, v_2)$ que también es invariante por ser $2-$cíclico ya que $v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1)$ y $v_1 \in K^2(1) - K^1(1)$. Entonces, $K^2(1) = L(v_1, v_2) \oplus L(v_3)$ es suma directa de un plano y una recta invariantes y, por tanto, reducible. Además

$$J(f|_{K^2(1)}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- $K^1(2) = L(v_6, v_8)$ y como todas las rectas contenidas en $K^1(2)$ son invariantes se tiene que $K^1(2) = L(v_6) \oplus L(v_8)$, por lo que es reducible. Además,

$$J(f|_{K^1(2)}) = \left(\begin{array}{c|c} 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Una base de $K^2(2)$ está formada por los vectores de las columnas 1 y 2 de la tabla de la base de $M(2)$. Es decir, $K^2(2) = L(v_5, v_6, v_7, v_8)$. Además,

$$K^2(2) = L(v_5, v_6, v_7, v_8) = L(v_5, v_6) \oplus L(v_7, v_8)$$

  Los dos planos $L(v_5, v_6)$ y $L(v_7, v_8)$ son invariantes irreducibles ya que son subespacios $2-$cíclicos: $v_6 = (f - 2\,\mathrm{Id})(v_5)$, $v_8 = (f - 2\,\mathrm{Id})(v_7)$ y $v_5, v_7 \in K^2(2) - K^1(2)$. Por tanto, $K^2(2)$ es reducible. La forma canónica de $f|_{K^2(2)}$ es

$$J(f|_{K^2(2)}) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

- $K^3(2) = L(v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$. Podemos descomponer este subespacio en suma de dos: uno $3-$cíclico, generado por los tres vectores de la primera fila de la tabla de la base, y otro $2-$cíclico, generado por los dos vectores de la segunda fila:

$$K^3(2) = L(v_4, v_5, v_6) \oplus L(v_7, v_8)$$

Por tanto, $K^3(2)$ es reducible. Los subespacios se corresponden con los dos bloques de la forma canónica de $f|_{K^3(2)}$, que es

$$J(f|_{K^3(2)}) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Podemos afirmar que todos los subespacios generalizados de este endomorfismo son reducibles. □

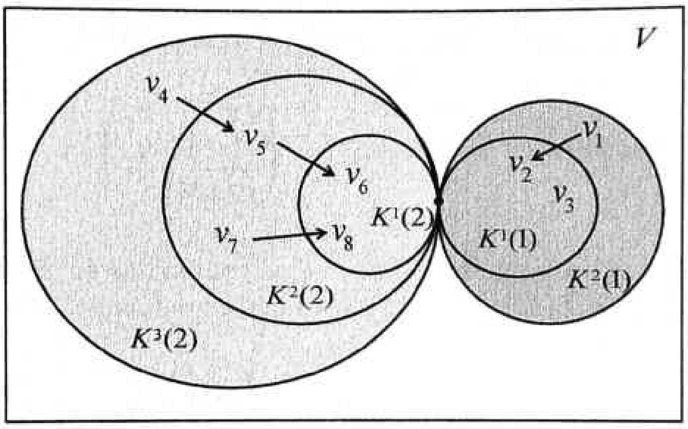


Figura 6.3: Diagrama de subespacios y vectores de la base de Jordan con $V = \mathbb{K}^8$.

6.2. Polinomios anuladores y subespacios invariantes

Dado un endomorfismo f de un $\mathbb{K}$−espacio vectorial V y un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \quad a_n \neq 0$$

denotaremos por $p(f)$ al endomorfismo

$$p(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{Id}$$

donde $f^n = f \circ \overset{n}{\cdots} \circ f$. Sea $A \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{K})$ una matriz de orden m, denotaremos por $p(A)$ a la matriz

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_m$$

Si A es la matriz de f respecto de una base $\mathcal{B}$, entonces $p(A)$ es la matriz del endomorfismo $p(f)$ respecto de $\mathcal{B}$.

Un polinomio $p(t)$ es **anulador** de un endomorfismo f si $p(f)$ es el endomorfismo nulo, y es anulador de una matriz cuadrada A si $p(A)$ es la matriz nula. El polinomio anulador de f, o de A, de grado mínimo y mónico se denomina polinomio mínimo anulador o, simplemente, **polinomio mínimo** de f o de A.

Resultados que relacionan los polinomios anuladores y los subespacios invariantes:

(1) Si $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, entonces el subespacio vectorial $\mathrm{Ker}(p(f))$ es f−invariante.

(2) **Teorema de Cayley-Hamilton**: el polinomio característico de f (o de A) es un polinomio anulador de f (o de A).

(3) Si $p(t)$ es anulador de f y $p(t) = p_1(t)p_2(t)$ con p_1 y p_2 polinomios de grado mayor o igual que uno, tales que, su máximo común divisor es una constante, entonces $V = \mathrm{Ker}(p_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(p_2(f))$ ([BE], Teorema 6.17).

(4) Todo autovalor de un endomorfismo es raíz de cualquier polinomio anulador.

(5) Todo polinomio anulador es múltiplo del polinomio mínimo.

(6) El polinomio mínimo es divisor del polinomio característico y tiene sus mismas raíces.

(6) Si el polinomio característico de f es de la forma

$$p_f(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (t - \lambda_k)^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$$

y $M(\lambda_i) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \,\mathrm{Id})^{l_i}$ son los subespacios máximos asociados a los autovalores λ_i, $i = 1, \ldots, k$; entonces, el polinomio mínimo anulador de f es

$$m_f(t) = (t - \lambda_1)^{l_1} \cdots (t - \lambda_k)^{l_k}$$

El exponente l_i coincide con el orden del bloque de Jordan de mayor tamaño correspondiente al autovalor λ_i.

(7) Un endomorfismo es diagonalizable, si y sólo si, su polinomio mínimo es de la forma $m_f(t) = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_k)$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Es decir, no tine raíces múltiples.

6.28. Determine el polinomio característico y el polinomio mínimo de las siguientes formas canónicas, y observe en qué casos coinciden:

$$J_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),\ J_2 = \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),\ J_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ J_5 = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right),\ J_6 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Solución: El polinomio característico de J_1 es $p_{J_1}(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ y el polinomio mínimo $m_{J_1}(t) = (t-1)^{l_1}(t-2)^{l_2}$ con $l_1 \leq 2$ y $l_2 \leq 2$. El bloque de mayor tamaño del autovalor 1 es de orden 2, por tanto $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2 = M(1)$ y $l_1 = 2$. El bloque de mayor tamaño del autovalor 2 es de orden dos, por tanto $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})^2 = M(2)$ y $l_2 = 2$. Entonces

$$m_{J_1}(t) = (t-1)^2(t-2)^2$$

por lo que coincide con el polinomio característico.

El polinomio característico de J_2, J_3 y J_4 es el mismo $p_{J_1}(t) = (t-1)^4$, el polinomio mínimo en cada caso será $(t-1)^{l_1}$ siendo l_1 el bloque de Jordan de mayor tamaño correspondiente al autovalor 1. Entonces,

$$m_{J_2}(t) = (t-1)^2,\ m_{J_3}(t) = (t-1)^3 \ \text{ y } \ m_{J_4}(t) = (t-1)^4$$

La diferencia en cada caso viene dada por cuál es el subespacio máximo:

$M(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2$, $M(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^3$ y $M(1) = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^4$, respectivamente.

Compárense las tablas de la base de Jordan

J_2	3 $K^1(1)$	$\subset$	4 $K^2(1)$
	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_3		
	v_4		

J_3	2 $K^1(1)$	$\subset$	3 $K^2(1)$	$\subset$	4 $K^3(1)$
	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1
	v_4				

J_4	1 $K^1(1)$	$\subset$	2 $K^2(1)$	$\subset$	3 $K^3(1)$	$\subset$	4 $K^4(1)$
	v_4	$\leftarrow$	v_3	$\leftarrow$	v_2	$\leftarrow$	v_1

El polinomio característico de J_5 y J_6 es el mismo $p_{J_5}(t) = -(t-2)^5$. El polinomio mínimo, en cada caso, será $(t-2)^{l_1}$ siendo l_1 el bloque de Jordan de mayor tamaño correspondiente al autovalor 2. Entonces,

$$m_{J_5}(t) = m_{J_6}(t) = (t-2)^3$$

Nótese que, a pesar de tener el mismo polinomio mínimo, J_5 y J_6 no son semejantes. Esto pone de manifiesto que el polinomio mínimo, aunque aporta más información del endomorfismo que el polinomio característico, no forma un sistema completo de invariantes para la relación de semejanza de matrices, o de equivalencia lineal de endomorfismo.

Los casos en los que coinciden polinomio mínimo y polinomio característico son los siguientes: J_1 y J_4, en ambos casos existe un único bloque de Jordan asociado a cada uno de los autovalores. □

6.29. Determine el polinomio característico y el polinomio mínimo de las siguientes matrices en el caso real y el caso complejo.

$$J_8 = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right), \quad J_9 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Solución: Supongamos que las matrices J_8 y J_9 son las formas de Jordan reales de dos endomorfismo f y g de $\mathbb{R}^4$. Para determinar el polinomio mínimo de f y g, utilizaremos el hecho de que dichos polinomios coinciden con los de los endomorfismos complejos $\hat{f}$ y $\hat{g}$ de $\mathbb{C}^4$ cuyas matrices son J_8 y J_9.

El polinomio característico de J_8 es $p_{J_8}(t) = (t-4)^2((t-2)^2+3^2)$, que es el polinomio característico tanto de f como de $\hat{f}$. El polinomio mínimo de $\hat{f}$ es

$$m_{\hat{f}}(t) = (t-4)(t-(2+3i))(t-(2-3i))$$

ya que la forma canónica de Jordan de $\hat{f}$ es

$$J_{10} = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2+3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3i \end{array}\right)$$

Entonces, $m_f(t) = m_{\hat{f}}(t) = (t-4)((t-3)^2+2^2)$. La diferencia entre $m_f(t)$ y $m_{\hat{f}}(t)$ es que el primero, como polinomio de $\mathbb{R}[x]$, no se descompone en factores lineales, y el segundo, como polinomio de $\mathbb{C}[x]$, sí.

El polinomio característico de J_9 es $p_{J_9}(t) = ((t-2)^2+3^2)^2$ que es el polinomio característico tanto de g como de $\hat{g}$. El polinomio mínimo de $\hat{g}$ es

$$m_{\hat{g}}(t) = (t-(2+3i))(t-(2-3i))$$

ya que la forma canónica de Jordan de $\hat{g}$ es

$$J_{11} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2+3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+3i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2-3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-3i \end{array}\right)$$

y todos los bloques de Jordan son de orden uno. Entonces,

$$m_g(t) = m_{\hat{g}}(t) = (t-2)^2 + 3^2 \quad \square$$

6.30. Determine el polinomio mínimo de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hágalo por dos métodos distintos:

(1) Utilizando las formas canónicas calculadas en ejercicios previos.

(2) Sin utilizar las formas canónicas.

Solución: (1) La forma canónica de Jordan de A se calculó en el Ejercicio 5.26. y es

$$J(A) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Las matrices A y $J(A)$ son semejantes y, por tanto, tienen el mismo polinomio mínimo que es $m_A(t) = (t-1)^2$, ya que la multiplicidad del autovalor como raíz de m_A es igual al orden del bloque de Jordan de mayor tamaño.

La forma canónica de Jordan de la matriz B se calculó en el Ejercicio 5.27. y es

$$J(B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Las matrices B y $J(B)$ son semejantes y, por tanto, tienen el mismo polinomio mínimo que es $m_B(t) = (t-2)^3$, ya que la multiplicidad del autovalor como raíz de m_B es igual al orden del bloque de Jordan de mayor tamaño.

(2) Sin utilizar formas canónicas, razonamos del siguiente modo: el polinomio característico de A es $p_A(t) = (1-t)^4$, por tanto el polinomio mínimo, que es divisor del

característico y tiene sus mismas raíces, es $m_A(t) = (t-1)^l$ con $1 \leq l \leq 4$. Como el polinomio mínimo es el polinomio anulador de A de menor grado, vamos comprobando cuál de los cuatro polinomios posibles es:

- $p_1(t) = t - 1$ no es anulador ya que $p_1(A) = A - I_4 \neq 0_4$.

- $p_2(t) = (t-1)^2$ es anulador si y sólo si $p_2(A) = (A - I_4)^2 = 0_4$. Lo comprobamos:

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_4$$

Entonces, $p_2(t)$ es el polinomio mínimo de A.

El polinomio característico de B es $p_B(t) = (2-t)^4$, por tanto el polinomio mínimo es $m_B(t) = (t-2)^l$ con $1 \leq l \leq 4$. Como el polinomio mínimo es el polinomio anulador de B de menor grado, vamos comprobando cuál de los cuatro polinomios posibles es:

- $q_1(t) = t - 1$ no es un polinomio anulador de B ya que $q_1(B) = B - 2I_4 \neq 0_4$.

- $q_2(t) = (t-1)^2$ no es anulador ya que podemos comprobar que $q_2(B) = (B - 2I_4)^2 \neq 0_4$.

$$(B - 2I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_4$$

- $q_3(t) = (t-1)^3$ sí es anulador ya que podemos comprobar que $q_3(B) = (B - 2I_4)^3 = 0_4$.

$$(B - 2I_4)^3 = (B - 2I_4)^2(B - 2I_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4$$

Entonces, $q_3(t)$ es el polinomio mínimo de B. □

6.31. Dada la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Determine si los siguientes polinomios son anuladores de C

$$p(t) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4 \ \text{ y } \ q(t) = t^4 - t^3 - t^2 - t - 2$$

Solución: Los polinomios dados son anuladores de C si y sólo si son múltiplos de su polinomio mínimo, por lo que tenemos que determinar este polinomio en primer lugar.

Para ello, utilizaremos la forma canónica de Jordan que se calculó en el Ejercicio 5.29., y es

$$J(C) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

El único autovalor de C es 2, por lo que el polinomio mínimo, $m(t)$, tiene como única raíz 2. La multiplicidad es igual al tamaño del bloque de Jordan mayor en $J(C)$. Entonces

$$m(t) = (t-2)^2$$

A continuación vemos si los polinomios dados son múltiplos de $m(t)$. Para ello, podemos proceder por dos métodos distintos: factorizar los polinomios o dividirlos entre $m(t)$ y comprobar si el resto de la división es 0.

Comenzamos con $p(t) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4$. En primer lugar, siempre debemos comprobar si las raíces de $m(t)$ son raíces de $p(t)$. Comprobamos que sí se cumple $p(2) = 0$. Hacemos la división de $p(t)$ entre $m(t)$ y obtenemos

$$p(t) = m(t)(t-1)$$

Por lo que $p(t)$ sí es un polinomio anulador de C.

Para $q(t) = t^4 - t^3 - t^2 - t - 2$ comprobamos que sí se cumple la condición necesaria $q(2) = 0$. Hacemos la división de $q(t)$ entre $m(t)$ y obtenemos

$$q(t) = m(t)t^2 + (3t^3 - 5t^2 - t - 2)$$

Entonces, $q(t)$ no es múltiplo de $m(t)$, por lo que no es un polinomio anulador de C. □

6.32. De un endomorfismo f de un espacio vectorial real de dimensión cinco se sabe que su polinomio mínimo es $m_f(t) = (t-2)^4$. Determine su forma canónica de Jordan.

Solución: El polinomio característico tiene las mismas raíces que el polinomio mínimo, por lo que el único autovalor es $\lambda = 2$. Además, como el polinomio característico es múltiplo del mínimo, entonces $p_f(t) = -(t-2)^5$. La multiplicidad del autovalor como raíz del polinomio mínimo es 4, lo que indica que el subespacio máximo es

$$M(2) = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})^4$$

En concreto, en la forma canónica hay un bloque de Jordan de orden cuatro, y es el más grande. Por tanto, la forma canónica de f es

$$J(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \square$$

6.33. Determine la forma de Jordan real de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^6$ cuyo polinomio mínimo es $m_f(t) = (t^2+1)^2$.

Solución: El polinomio mínimo no tiene raíces reales, por lo que f no tiene autovalores. Entonces, procedemos a determinar la forma canónica de la extensión compleja $\hat{f}$ de $\mathbb{C}^6$ cuyo polinomio mínimo es igual al de f y, a partir de ella, la forma de Jordan real de f. El polinomio mínimo de $\hat{f}$ tiene por raíces i doble, y $-i$ doble, y se puede factorizar del siguiente modo

$$m_{\hat{f}}(t) = (t-i)^2(t+i)^2$$

Los únicos autovalores son i y $-i$ por tanto el polinomio característico es

$$p_{\hat{f}}(t) = (t-i)^3(t+i)^3$$

Esto ocurre porque al ser la matriz de $\hat{f}$ real, los autovalores conjugados i y $-i$ tienen las mismas multiplicidades.

La forma canónica de Jordan de $\hat{f}$ presenta un bloque de orden dos asociado a cada autovalor, por lo que es de la siguiente forma

$$J(\hat{f}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{array}\right)$$

Para determinar la forma de Jordan real, nos quedamos con la forma canónica de $\hat{f}|_{M(i)}$ que es

$$J(\hat{f}|_{M(i)}) = \left(\begin{array}{cc|c} i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ \hline 0 & 0 & i \end{array}\right)$$

y cambiamos cada entrada igual a i por el bloque

$$C(i) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(i) & \mathrm{Im}(i) \\ -\mathrm{Im}(i) & \mathrm{Re}(i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

cada 1 por I_2, y cada 0 por 0_2, la matriz nula de orden 2.

Así, se obtiene la forma de Jordan real de f, que es

$$J_{\mathbb{R}}(f) = \left(\begin{array}{cc|c} C(i) & 0_2 & 0_2 \\ I_2 & C(i) & 0_2 \\ \hline 0_2 & 0_2 & C(i) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Se puede comprobar que el polinomio característico de esta matriz es $(t^2+1)^3$ $\square$

6.34. Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$ –espacio vectorial V que admite una forma canónica de Jordan. Demuestre que el polinomio característico y el polinomio mínimo de f coinciden, si y sólo si, para cada autovalor λ de f existe un único bloque de Jordan asociado a λ en su forma canónica de Jordan.

Solución: Si f admite una forma canónica de Jordan, tanto si el espacio vectorial es complejo como si es real, su polinomio característico es de la forma

$$p_f(t) = (\lambda_1 - t)^{a_1} \cdots (\lambda_r - t)^{a_r} \quad \text{con} \quad \lambda_i \in \mathbb{K},\ a_1 + \cdots + a_r = n = \dim V$$

y el polinomio mínimo es

$$m_f(t) = (t - \lambda_1)^{l_1} \cdots (t - \lambda_r)^{l_r}$$

siendo el subespacio máximo asociado a cada autovalor $M(\lambda_i) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{l_i}$.

El subespacio $M(\lambda_i) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{Id})^{l_i}$ determina que, el bloque de Jordan de mayor tamaño asociado a λ_i es de orden l_i, ya que la primera línea de la tabla de la base de Jordan está formada por l_i vectores.

Por otro lado, como cada autovalor λ_i tiene que aparecer a_i veces en la diagonal de la forma canónica de Jordan, entonces a_i es igual a la suma de los tamaños de todos los bloques asociados a λ_i.

Así, se cumple que existe un único bloque asociado a λ_i, si y sólo si, ese bloque es de tamaño $l_i = a_i$, es decir si $p_f(t) = m_f(t)$. □

6.35. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial real V tal que el polinomio $p(t) = t^4 + 4t^3 + 2t^2 + 12t + 45$ es anulador de f. Determine una descomposición del espacio vectorial de la forma $V = U \oplus W$ siendo U y W subespacios f–invariantes.

Solución: Para la demostración, utilizaremos el resultado (3), pág. 123, que relaciona la factorización de un polinomio anulador con subespacios invariantes ([BE], Teorema 6.17).

Comenzamos factorizando el polinomio $p(t)$, para lo cual buscamos sus posibles raíces entre los divisores enteros del término independiente: 45.

$$p(1) \neq 0,\ p(-1) \neq 0,\ p(3) \neq 0,\ p(-3) = 0$$

entonces $t = -3$ es una raíz de p, es decir $p(t) = (t+3)q(t)$. Hacemos la división de $p(t)$ entre $(t+3)$ para determinar el cociente y obtenemos

$$q(t) = t^3 + t^2 - t + 15$$

Continuamos con la factorización de $q(t)$, buscando sus posibles raíces entre los divisores del término independiente: 15. Descartamos los valores que no eran raíces de $p(t)$: 1, −1, 3. Tenemos $q(-3) = 0$, por lo que −3 es raíz de $q(t)$. Determinamos $r(t)$ tal que $q(t) = (t+3)r(t)$ haciendo la división de $q(t)$ entre $(t+3)$. Se obtiene

$$r(t) = t^2 - 2t + 5$$

Factorización de $r(t)$: comprobamos que este polinomio de grado dos no tiene raíces reales, por lo que no se puede descomponer en factores de grado uno.

Finalmente, la factorización de p es

$$p(t) = (t^2 - 2t + 5)(t + 3)^2$$

Si llamamos $p_1(t) = t^2 - 2t + 5$ y $p_2(t) = (t + 3)^2$, que son dos polinomios sin factores comunes no constantes, entonces se cumple que $V = \mathrm{Ker}(p_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(p_2(f))$, siendo $U = \mathrm{Ker}(p_1(f))$ y $W = \mathrm{Ker}(p_1(f))$ dos subespacios f−invariantes. La descomposición es la siguiente:

$$V = \mathrm{Ker}(f^2 - 2f + 5\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + 3\,\mathrm{Id})^2 \quad \square$$

Observación: Nótese que a la factorización $p(t) = (t + 3)q(t)$ no se le puede aplicar el Teorema 6.17 ([BE], pág. 261), ya que los factores $(t + 3)$ y $q(t)$ tienen como divisor común el polinomio $(t + 3)$.

6.36. Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz invertible de orden n. Utilice el Teorema de Cayley-Hamilton para demostrar que la matriz A^{-1} pertenece al subespacio vectorial de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ generado por las matrices

$$I_n,\ A,\ A^2,\ \ldots,\ A^{n-1}$$

Solución: En primer lugar, demostremos que si A es invertible el polinomio característico de A no tiene por raíz $\lambda = 0$. En efecto, si $\lambda = 0$ fuese raíz del polinomio característico, entonces $\lambda = 0$ sería autovalor de A, es decir, $\det(A - 0I_n) = \det(A) = 0$, y esto es imposible pues A es invertible.

Sea $p_A(\lambda) = a_n\,\lambda^n + \cdots + a_1\,\lambda + a_0$, con $a_0 \neq 0$, el polinomio característico de A. Por el Teorema de Cayley-Hamilton, p_A es un polinomio anulador de A, es decir

$$p_A(A) = a_nA^n + \cdots + a_1A + a_0I_n = 0$$

De la ecuación anterior se tiene que

$$a_nA^n + \cdots + a_1A = -a_0I_n$$

Aplicando la propiedad distributiva en el miembro izquierdo de la ecuación obtenemos

$$A\left(a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n\right) = -a_0I_n$$

Multiplicando en ambos miembros por A^{-1} por la izquierda y simplificando se tiene

$$a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n = -a_0A^{-1}$$

Por tanto

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(a_nA^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I_n\right)$$

que es una combinación lineal de las matrices I_n, A, A^2, $\ldots$, A^{n-1}, como queríamos demostrar. $\square$

Obsérvese que este resultado proporciona un método alternativo para el cálculo de la inversa de una matriz a partir de sus potencias, como se muestra en el siguiente ejercicio.

6.37. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

demuestre que $A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 + 6A + I_3)$ y utilícelo para calcular A^{-1}.

Solución: El polinomio característico de A es

$$p_A(t) = \det(A - tI_3) = -t^3 + 6t^2 + t - 2$$

En primer lugar, como $t = 0$ no es raíz de p_A, entonces $\det(A) \neq 0$ y A es invertible.

Por el Teorema de Cayley-Hamilton, p_A es anulador de A, por lo que se cumple $p_A(A) = 0_3$, es decir, se tiene $p_A(A) = -A^3 + 6A^2 + A - 2I_3 = 0_3$. Entonces

$$I_3 = \frac{1}{2}(-A^3 + 6A^2 + A)$$

y multiplicando por A^{-1} en esta igualdad se llega a

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(-A^2 + 6A + I_3)$$

Utilizando la expresión anterior obtenemos

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \tfrac{1}{2}\left(- \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + 6 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I_3 \right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(- \begin{pmatrix} 13 & 12 & 4 \\ 25 & 24 & 8 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + I_3 \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

6.38. Sea $A \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ una matriz invertible tal que

$$A^{-1} = \frac{A^2 - 5A + 8I_4}{4}$$

(a) Determine un polinomio anulador de A.

(b) Sabiendo que A no es diagonalizable, determine las posibles matrices de Jordan semejantes a A.

Solución: (a) Multiplicando por A en ambos miembros de la ecuación dada se tiene

$$I_4 = AA^{-1} = \frac{A^3 - 5A^2 + 8A}{4} \;\Rightarrow\; A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_4 = 0_4$$

luego el polinomio $q(t) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4$ es un polinomio anulador de A.

(b) Factorizamos el polinomio anulador ya que las raíces del polinomio característico de A también son raíces de $q(t)$.

$$q(t) = (t-1)(t-2)^2$$

Entonces, los posibles autovalores de A son 1 y 2 (podría ser autovalor alguno de ellos o los dos).

Para obtener más información necesitamos conocer el polinomio mínimo de A, $m_A(t)$, que es el anulador de menor grado y mónico. Todo polinomio anulador, es múltiplo del polinomio mínimo, luego los posibles polinomios mínimos son los divisores de $q(t)$. Se tienen las siguientes posibilidades

(1) $m_A(t) = (t-1)$

(2) $m_A(t) = (t-2)$

(3) $m_A(t) = (t-1)(t-2)$

(4) $m_A(t) = (t-2)^2$

(5) $m_A(t) = (t-1)(t-2)^2$

Por otro lado, las raíces del polinomio mínimo serían los autovalores de A y la multiplicidad algebraica de estas raíces en el polinomio mínimo indica el tamaño del bloque de Jordan más grande asociado al autovalor correspondiente.

Como el endomorfismo no es diagonalizable, en la matriz de Jordan tendrá que haber algún bloque de tamaño, al menos 2×2, o lo que es lo mismo, el polinomio mínimo tiene que tener una raíz con multiplicidad al menos 2. Por este motivo, quedan descartados los polinomios de los casos 1, 2 y 3; y los posibles serían los de los casos 4 y 5.

(4) Si $m_A(t) = (t-2)^2$, entonces $\lambda = 2$ es el único autovalor de A y la única raíz del polinomio característico, que será $p_A(t) = (2-t)^4$. Además, en la matriz de Jordan semejante a A hay al menos un bloque de orden 2 y ninguno de orden mayor. En definitiva, salvo permutación de bloques, se tienen las siguientes opciones

$$J_1 = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \text{o} \quad J_2 = \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \cline{3-4} 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

(5) Si $m_A(t) = (t-1)(t-2)^2$, entonces A tiene dos autovalores. Además, en la forma canónica hay al menos un bloque de orden 2 asociado al autovalor 2, y ninguno

de orden mayor; y todos los bloques asociados al autovalor 1 serán de orden 1. El polinomio característico (de grado cuatro) puede ser alguno de los siguientes:

$$p_A(t) = (t-1)(t-2)^3 \quad \text{o bien} \quad p_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$$

En cada caso, la matriz de Jordan semejante a A será (salvo permutación de bloques)

$$J_3 = \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \text{o} \quad J_4 = \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Finalmente, podemos afirmar que si A es una matriz compleja de orden cuatro tal que $4A^{-1} = A^2 - 5A + 8I_4$, entonces es semejante a alguna de las matrices canónicas J_1, J_2, J_3 o J_4. $\square$

6.39. Utilizando el Teorema de Cayley-Hamilton demuestre la veracidad de las siguientes afirmaciones :

(a) Toda matriz cuadrada, no nula e idempotente es diagonalizable.

(b) Si el único autovalor de un endomorfismo complejo f es $\lambda = 0$, entonces f es nilpotente, es decir, existe $k > 0$ tal que $f^k = 0$.

Solución:

(a) Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ idempotente, es decir tal que $A^2 = A$. Entonces, $A^2 - A = 0$, por lo que $q(t) = t^2 - t = t(t-1)$ es un polinomio anulador de A. Todo polinomio anulador es múltiplo de polinomio mínimo, $m_A(t)$, por lo que se tienen las siguientes posibilidades:

(1) $m_A(t) = t$,

(2) $m_A(t) = t - 1$,

(3) $m_A(t) = t(t-1)$

En el caso (1), $m_A(A) = A = 0_n$, es decir la matriz sería $A = 0_n$ que es diagonalizable. En el caso (2), $m_A(A) = A - I_n = 0_n$, por lo que la matriz sería $A = I_n$, también diagonalizable. En el caso (3) la matriz tendría dos autovalores: 0 y 1. Además, dado que los autovalores son raíces simples del polinomio mínimo, entonces todos los bloques de Jordan de su forma canónica serían de orden 1. Es decir, A sería diagonalizable y semejante a una matriz de la forma $\operatorname{diag}(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$.

(b) Si f es el endomorfismo nulo, que denotamos por $\mathbf{0}$, el resultado se cumple trivialmente. Si f no es el endomorfismo nulo y su único autovalor es $\lambda = 0$, entonces su polinomio característico es $p_f(t) = (-t)^n$, y por el Teorema de Cayley-Hamilton, se tiene que $p_f(f) = (-1)^n f^n = \mathbf{0}$ por lo que $f^n = \mathbf{0}$. Como queríamos demostrar. $\square$

Nótese, que se puede cumplir $f^l = \mathbf{0}$ para algún valor $l \leq n$. En concreto, el polinomio mínimo es de la forma $m_f(t) = t^k$ con $1 \leq k \leq n$, por lo que $m_f(f) = f^k = \mathbf{0}$, siendo este valor, k, el menor para el cual $f^k = \mathbf{0}$.

6.40. Determine la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^5$, no nulo, que cumpla

$$f^4 = 4f^3 - 4f^2$$

Solución: La condición $f^4 = 4f^3 - 4f^2$ nos permite determinar un polinomio anulador de f ya que

$$f^4 = 4f^3 - 4f^2 \Rightarrow f^4 - 4f^3 + 4f^2 = \mathbf{0}$$

de donde se deduce que $q(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2$ es un polinomio anulador de f.

Lo factorizamos para determinar sus raíces

$$q(t) = t^2(t^2 - 4t + 4) = t^2(t-2)^2$$

luego las raíces de q son 0 (doble) y 2 (doble). Como los autovalores de f son raíces de todo polinomio anulador ([BE], Proposición 6.20), entonces los posibles autovalores de f son 0 y 2 (pueden serlo ambos o sólo uno de ellos).

Todo polinomio anulador de f es múltiplo del polinomio mínimo $m_f(t)$. En particular, $q(t)$ es múltiplo de $m_f(t)$ por lo que éste tendrá por raíces 0 y/o 2, es decir:

$$m_f(t) = t^{l_1}(t-2)^{l_2}, \quad \text{con } 0 \leq l_1 \leq 2,\ 0 \leq l_2 \leq 2,\ l_1 + l_2 \neq 0$$

Las multiplicidades de las raíces del polinomio mínimo, l_1 y l_2, determinan el tamaño máximo de los bloques de Jordan asociados a los autovalores en la forma canónica de Jordan de f. Entonces, los bloques de Jordan serán de orden uno o dos.

El polinomio característico de f será de grado cinco y tendrá las mismas raíces que el polinomio mínimo, por lo que será de la forma

$$p_f(t) = (-t)^{a_1}(2-t)^{a_2}, \quad \text{con } a_1 + a_2 = 5,\ 0 \leq a_1, a_2 \leq 5$$

Dependiendo del polinomio característico y el mínimo se tienen muchas posibilidades. Como el ejercicio sólo pide una, podemos considerar el caso en que $q(t) = t^2(t-2)^2$ es el polinomio mínimo. En este caso, hay dos opciones para el polinomio característico:

$$p_f(t) = -t^3(2-t)^2 \quad \text{o bien} \quad p_f(t) = t^2(2-t)^3$$

En ambos casos se tiene un autovalor triple y el otro doble.

- Si $p_f(t) = -t^3(2-t)^2$ (0 triple y 2 doble). La forma canónica de Jordan de f es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si $p_f(t) = t^2(2-t)^3$ (0 doble, 2 triple) la forma canónica es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aquí habríamos terminado el ejercicio. A modo de ilustración, se listan otros casos (no todos) variando los polinomios característico y mínimo.

- Si $p_f(t) = -t^3(2-t)^2$. La forma canónica de Jordan de f será alguna de las siguientes según el polinomio mínimo $m_f(t)$:

$$\underset{m_f(t)=t^2(t-2)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=t^2(t-2)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=t(t-2)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=t(t-2)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

- Si $p_f(t) = t^2(2-t)^3$, las posibles matrices de Jordan de f se tienen intercambiando los papeles de los autovalores en los casos anteriores:

$$\underset{m_f(t)=t^2(t-2)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=t^2(t-2)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=t(t-2)}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=t(t-2)^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

- Si $p_f(t) = (2-t)^5$ (0 no es autovalor), las posibles matrices de Jordan de f son

$$\underset{m_f(t)=(t-2)}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=(t-2)^2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=(t-2)^2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

- Si $p_f(t) = (-t)^5$ (2 no es autovalor), las posibles matrices de Jordan de f son

$$\underset{m_f(t)=t^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{m_f(t)=t^2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \qquad \square$$

6.41. Determine si existen endomorfismos f y g, no linealmente equivalentes, tales que tengan el mismo polinomio característico $p(x) = (x+2)^4(x-1)^2$ y el mismo polinomio mínimo $m(x) = (x+2)^2(x-1)$. En caso afirmativo determine un invariante lineal que los distinga.

Solución: A la vista del polinomio característico, ambos endomorfismos tienen dos autovalores: $\lambda_1 = 1$, doble, y $\lambda_2 = -2$, cuádruple. Además, por tener el mismo polinomio mínimo, $m(x)$, en la forma canónica de Jordan de ambos endomorfismos todos los bloques de Jordan asociados al autovalor 1 son de orden 1, y el bloque de mayor tamaño asociado al autovalor -2 es de orden 2. Entonces, se tienen las siguientes opciones para las formas canónicas:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Estas matrices no son semejantes, por lo que si f es un endomorfismo con matriz de Jordan J_1, y g es un endomorfismo con matriz de Jordan J_2, no son linealmente equivalentes, y cumplen las condiciones requeridas.

Un invariante lineal que diferencia a las dos formas canónicas es el número de bloques de Jordan asociados al autovalor -2, que es exactamente la multiplicidad geométrica de dicho autovalor. En el primer caso,

$$\operatorname{rg}(J_1 + 2I_4) = 4 \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})) = 6 - 4 = 2$$

por eso hay dos bloques de Jordan asociados a -2.

En el segundo,

$$\operatorname{rg}(J_2 + 2I_4) = 3 \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker}(g + 2\,\mathrm{Id})) = 6 - 3 = 3$$

por eso hay tres bloques de Jordan asociados a -2.

Observamos cómo son las tablas de Jordan para las multiplicidades geométricas obtenidas. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_6\}$ es una base de Jordan, las tablas de las bases de Jordan del subespacio máximo $M(-2)$ en cada caso son las siguientes:

J_1	2 $K^1(-2)$	$\subset$	4 $K^2(-2)$
	v_4	$\leftarrow$	v_3
	v_6	$\leftarrow$	v_5

J_2	3 $K^1(-2)$	$\subset$	4 $K^2(-2)$
	v_4	$\leftarrow$	v_3
	v_5		
	v_6		

Finalmente, podemos afirmar que dos endomorfismos f y g con polinomio característico $p(x)$ y polinomio mínimo $m(x)$, son linealmente equivalentes si y sólo si

$$\operatorname{rg}(f + 2\,\mathrm{Id}) = \operatorname{rg}(g + 2\,\mathrm{Id}) \quad \square$$

6.42. Demuestre que el polinomio mínimo y el polinomio característico determinan un sistema completo de invariantes para la clasificación lineal de los endomorfismos de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V de dimensión dos o tres. Muestre con un ejemplo, que si $\dim V = n$, el resultado no se cumple para ningún $n \geq 4$.

Solución: El polinomio mínimo y el polinomio característico forman un sistema completo de invariantes para la clasificación lineal de los endomorfismos de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V, si determinan de forma completa la forma canónica. Es decir, si dados dos endomorfismo f y g se cumple que tienen la misma forma canónica (de Jordan o de Jordan real) si y sólo si coinciden su polinomio característico y mínimo.

Supongamos $\dim V = 2$. El polinomio característico de f, $p(t)$, tiene grado dos y el polinomio mínimo, $m(t)$, puede ser de grado dos o grado uno.

Si el grado de p y el de m son iguales, entonces se tiene las siguientes posibilidades

(1) $p(t) = m(t) = (t-\lambda)^2$, en cuyo caso la forma canónica de Jordan de f sería

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(2) $p(t) = m(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. La forma canónica de Jordan de f sería

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $p(t) = m(t) = (a-t)^2+b^2$, entonces el endomorfismo no tiene autovalores y no admite una forma canónica de Jordan. La forma de Jordan real sería

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Si el polinomio mínimo tiene distinto grado que el característico, entonces es de la forma $m(t) = (t-\lambda)$, siendo $\lambda \in \mathbb{K}$ el único autovalor de f.

(4) El polinomio característico, como tiene las mismas raíces que el mínimo, sólo puede ser la forma $p(t) = (t-\lambda)^2$. En este cuarto caso, la forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Por tanto, la forma canónica viene completamente determinada por ambos polinomios, como queríamos demostrar.

Supongamos ahora que $\dim V = 3$. El polinomio característico de f, $p(t)$, tiene grado tres y el polinomio mínimo, $m(t)$, tiene las mismas raíces que $p(t)$ y grado tres, dos o uno.

Si el grado de p y el de m son iguales, entonces se tienen los siguientes casos

(1) Si $-p(t) = m(t) = (t-\lambda)^3$, la forma canónica de Jordan de f sería

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(2) Si $-p(t) = m(t) = (t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la forma canónica de Jordan de f sería

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(3) Si p tiene tres raíces distintas, $-p(t) = m(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)(t-\lambda_3)$, el endomorfismo tiene tres autovalores distintos y la forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

(4) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $-p(t) = m(t) = ((a-t)^2 + b^2)(t-\lambda)$, entonces el endomorfismo tiene un único autovalor y no admite una forma canónica de Jordan. La forma de Jordan real sería

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

Si el grado de $m(t)$ es dos, entonces se tiene los siguientes casos dependiendo de si m tiene una única raíz doble o dos raíces distintas.

(5) $p(t) = -(t-\lambda)^3$ y $m(t) = (t-\lambda)^2$, en cuyo caso la forma canónica de Jordan de f sería

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(6) $p(t) = -(t-\lambda_1)^2(t-\lambda_2)$ y $m(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)$, en cuyo caso la forma canónica de Jordan de f sería

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Si el grado de m es uno, es decir $m(t) = t - \lambda$, entonces

(7) El endomorfismo tiene un único autovalor y el polinomio característico es de la forma $p(t) = -(t-\lambda)^3$. La forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Por tanto, ambos polinomios determinan de forma completa la forma canónica de Jordan.

Finalmente, vemos que el polinomio característico y el mínimo no forman un sistema completo de invariantes para determinar la equivalencia lineal de endomorfismos si $\dim V = n \geq 4$, con un ejemplo.

Las siguientes matrices de Jordan se corresponden con las formas canónicas de dos endomorfismos, g y f de V, cuyo polinomio característico es $p(t) = (-1)^n(t-\lambda)^n$, con $n \geq 4$, y el mínimo $m(t) = (t-\lambda)^2$.

$$J(f) = \left(\begin{array}{c|c} B_2(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & \operatorname{diag}(\lambda, \overset{n-2}{\ldots}, \lambda) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cccc} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda \end{array}\right)$$

$$J(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} B_2(\lambda) & 0 & 0 \\ \hline 0 & B_2(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \operatorname{diag}(\lambda, \overset{n-4}{\ldots}, \lambda) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc|c} \lambda & 0 & & & \\ 1 & \lambda & & & \\ \hline & & \lambda & 0 & \\ & & 1 & \lambda & \\ \hline & & & & \operatorname{diag}(\lambda, \overset{n-4}{\ldots}, \lambda) \end{array}\right)$$

La forma canónica de f tiene un único bloque de orden 2 y el resto de orden 1, y la forma canónica de g tiene dos bloques de orden 2 y el resto de orden 1. Por tanto, f y g no son linealmente equivalentes, pese a tener el mismo polinomio mínimo y característico. $\square$

6.43. Determine la forma canónica de Jordan o de Jordan real de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ que cumple las siguientes condiciones:

(a) El plano P de ecuaciones $\{x_3 = 0,\ 2x_2 + x_3 = 0\}$ es un subespacio 2−cíclico.

(b) La recta $R_1 = L((1,0,1,0))$ es invariante.

(c) La recta $R_2 = L((1,1,0,3))$ es invariante.

(d) El polinomio $(t-3)^3$ es anulador de f.

Solución: En primer lugar, del apartado (d) podemos deducir que el polinomio mínimo de f, que es divisor de todo polinomio anulador de f, será de la forma

$$m_f(t) = (t-3)^k \quad \text{con} \quad 1 \leq k \leq 3$$

Por tanto, f tiene un único autovalor $\lambda = 3$, y los subespacios invariantes dados en los apartados (a), (b) y (c) están asociados este autovalor.

Por otro lado, como las raíces del polinomio característico son las mismas que las del polinomio mínimo, entonces

$$p_f(t) = (t-3)^4$$

y así, λ tiene multiplicidad algebraica igual a 4, y f admite una forma canónica de Jordan.

Vamos a determinar la multiplicidad geométrica $g = \dim V_3 = \dim(\mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}))$. Para ello, tenemos en cuenta que las rectas invariantes R_1 y R_2 están contenidas en el subespacio propio V_3 por lo que $2 \leq g \leq 4$.

Por otro lado, el plano P, por ser 2−cíclico, es de la forma

$$P = L(v, (f - 3\,\mathrm{Id})(v)) \text{ con } v \in \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})^2 - \mathrm{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id})$$

por lo que el vector $u = (f - 3\,\mathrm{Id})(v) \in V_3$, es un autovector. Las rectas R_1 y R_2 no están contenidas en P, por lo que podemos afirmar que los vectores $(1,0,1,0)$, $(1,1,0,3)$ y u son tres autovectores linealmente independientes de V_3. Entonces, $3 \leq g \leq 4$.

Finalmente, para determinar la forma canónica de Jordan observamos que, por un lado, $g \geq 3$ implica que la matriz tiene al menos tres bloques de Jordan; y por otro, al tener un subespacio 2−cíclico, hay un bloque de orden 2. Entonces, necesariamente $g = 3$, es decir, hay tres bloques de Jordan. La forma canónica es

$$J(f) = \left(\begin{array}{cc|c|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ \cline{3-3} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \square$$

6.44. Dadas las matrices semejantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{6}{5} & -\frac{22}{5} & -\frac{31}{5} \\ 1 & \frac{11}{10} & \frac{27}{10} & \frac{18}{5} \\ 0 & \frac{3}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{6}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{13}{5} & \frac{19}{5} \end{pmatrix} \text{ y } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

determine si se cumplen las siguientes igualdades:

$$(1)\, A^4 - 6A^3 + 9A^2 = 0_4, \quad (2)\, A^4 - 3A^3 + 3A^2 - A = 0_4 \text{ y } (3)\, A^4 = 3A^3$$

Resuelva sin calcular las potencias de A.

Solución: (1) La igualdad $A^4 - 6A^3 + 9A^2 = 0_4$ es cierta si $p(t) = t^4 - 6t^3 + 9t^2$ es un polinomio anulador de A, por lo que necesariamente tiene que ser múltiplo del polinomio mínimo.

Como las matrices A y J son semejantes, tienen el mismo polinomio mínimo anulador. Calculamos el polinomio mínimo de J. Los autovalores de J son $\lambda_1 = 0$ de multiplicidad algebraica tres y $\lambda_2 = 3$ simple. Por tanto, el polinomio mínimo de J es de la forma $m(t) = t^{l_1}(t-3)^{l_2}$ con l_1 el tamaño del bloque de Jordan más grande asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$, y l_2 el tamaño del bloque de Jordan más grande asociado al autovalor $\lambda_2 = 3$. Entonces

$$m(t) = t^3(t-3)$$

Ahora, tenemos que comprobar si $p(t)$ es múltiplo de $m(t)$. Para ello, en primer lugar, comprobamos si las raíces de $m(t)$ son raíces de $p(t)$: sí se cumple $p(0) = p(3) = 0$. Después, factorizamos $p(t)$ obteniendo

$$p(t) = t^2(t^2 - 6t + 9) = t^2(t-3)^2$$

Claramente, $p(t)$ no es un múltiplo de $m(t)$, por lo que podemos afirmar que $p(t)$ no es un polinomio anulador de A. Es decir, $A^4 - 6A^3 + 9A^2 \neq 0_4$.

(2) La segunda igualdad, $A^4 - 3A^3 + 3A^2 - A = 0_4$, se cumple si $q(t) = t^4 - 3t^3 + 3t^2 - t$ es un polinomio anulador de A. Es decir, si $q(t)$ es múltiplo de $m(t)$. En primer lugar, comprobamos si las raíces de $m(t)$ son raíces de $p(t)$, y vemos que $q(3) \neq 0$, por lo que $q(t)$ no es múltiplo de $m(t)$ y por tanto no es un polinomio anulador de A. Entonces, $A^4 - 3A^3 + 3A^2 - A \neq 0_4$.

(3) La igualdad $A^4 - 3A^3 = 0_4$ se cumple si $r(t) = t^4 - 3t^3$ es un polinomio anulador de A. Como $r(t)$ es igual al polinomio mínimo, entonces sí se cumple $A^4 = 3A^3$. $\square$

6.45. Construya un endomorfismo f que cumpla $f^k = f$, para algún $k \geq 2$, y que no sea diagonalizable.

Solución: El endomorfismo debe cumplir $f^k - f = \mathbf{0}$, por lo que el polinomio

$$p(t) = t^k - t = t(t^{k-1} - 1)$$

es anulador de f. Dado que nos piden un endomorfismo concreto, y no estudiar todos los posibles, podemos construir uno para el cual $p(t)$ sea su polinomio mínimo.

Las raíces del segundo factor de $t^{k-1} - 1$ son las raíces $(k-1)$–ésimas de la unidad y son todas distintas y simples (multiplicidad algebraica 1), en $\mathbb{C}$. Entonces, si f es un endomorfismo complejo que cumple $f^k = f$ siempre es diagonalizable, por lo que tenemos que determinar un endomorfismo real.

Para que f, real, no sea diagonalizable el polinomio $p(t)$ debe tener alguna raíz compleja, lo que implica $k \geq 4$.

Tomando $k = 5$ y $p(t) = t(t^4 - 1)$ como el polinomio característico de f, cuyas raíces son: 0, 1, -1, i, $-i$; la forma de Jordan real de f sería

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que $f^5 = f$ o equivalentemente que $J_1^5 = J_1$.

Otro ejemplo se tiene considerando $k = 4$ y $p(t) = t(t^3 - 1)$ como el polinomio característico de f. Las raíces de este polinomio son: 0, 1, $\frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y la forma de Jordan real

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que $f^4 = f$ o equivalentemente que $J_2^4 = J_2$. $\square$

6.3. Autoevaluación 6

Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

A6.1. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{K}^n$, $n \geq 2$, que no admite ninguna recta invariante, entonces $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

A6.2. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, que no admite ninguna recta invariante, entonces f no admite una forma canónica de Jordan.

A6.3. Si f y g son endomorfismos linealmente equivalentes de $\mathbb{C}^2$ y f tiene una única recta invariante, entonces g es diagonalizable.

A6.4. Si f es un endomorfismo de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial de dimensión 4 que tiene una única recta invariante y un único plano invariante, entonces su forma canónica de Jordan esta formada por un bloque de Jordan de orden 4.

A6.5. Si la matriz de un endomorfismo f es una matriz de Jordan de orden 5 formada por bloques de orden 2 y 3, entonces f tiene algún hiperplano irreducible $f-$invariante.

A6.6. Si la matriz de un endomorfismo f es una matriz de Jordan de orden 5 formada por bloques de orden 2 y 3, entonces f tiene algún hiperplano $f-$invariante.

A6.7. Si un endomorfismo de f tiene infinitas rectas invariantes, entonces necesariamente tiene un autovalor múltiple.

A6.8. Si un endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ tiene exactamente n rectas invariantes, entonces es diagonalizable.

A6.9. Si un endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ tiene más de n rectas invariantes, entonces es diagonalizable.

A6.10. Si la matriz de Jordan de un endomorfismo f de un espacio vectorial V es una matriz escalar, entonces todos los subespacios de V son $f-$invariantes.

A6.11. Si P es un plano $f-$invariante que no contiene ninguna recta $f-$invariante, entonces f no admite una forma canónica de Jordan.

A6.12. Si P es un plano $f-$invariante que contiene una única recta $f-$invariante, entonces f no es diagonalizable.

A6.13. Un plano $f-$invariante es reducible si contiene al menos una recta $f-$invariante.

A6.14. Un plano $f-$invariante es reducible, si y sólo si, contiene exactamente dos rectas $f-$invariantes.

A6.15. Un plano $f-$invariante es reducible, si y sólo si, contiene más de una recta $f-$invariante.

A6.16. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Si U es un subespacio vectorial de V tal que $\mathrm{Im}(f) \subseteq U$, entonces U es $f-$invariante.

A6.17. Si $p(x)$ es un polinomio anulador de un endomorfismo complejo f sin raíces múltiples, entonces f es diagonalizable.

A6.18. Si $p(x)$ es un polinomio anulador de un endomorfismo real f sin raíces múltiples, entonces f es diagonalizable.

A6.19. Si un polinomio es anulador de una matriz compleja de orden n, entonces todas las raíces del polinomio son autovalores de dicha matriz.

A6.20. Si λ es un autovalor de A y $p(x)$ es un polinomio anulador de A, entonces $p(\lambda) = 0$.

A6.21. El polinomio mínimo anulador de un endomorfismo es divisor del polinomio característico y tiene menor grado.

A6.22. Si $p(x) = (x-1)(x-2)$ es un polinomio anulador de un endomorfismo, entonces 1 y 2 son autovalores de f.

A6.23. Si $p(x) = (x-1)(x-2)$ es un polinomio anulador de un endomorfismo f, entonces f es diagonalizable.

A6.24. Si $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ es un polinomio anulador de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^n$, entonces todo polinomio de la forma $p(x)q(x)$, con $q(x) \in \mathbb{K}[x]$, es anulador de f.

A6.25. Si A es una matriz de orden 4 cuyo polinomio mínimo es $m_A(t) = (t-1)^2$ y $q(t) = (t-1)^2(t-2)^2$ es un polinomio anulador de A de grado 4, entonces $q(t)$ es el polinomio característico de A.

A6.26. Si el polinomio mínimo y el característico de un endomorfismo f diagonalizable coinciden, entonces f no tiene autovalores múltiples.

A6.27. Si f es diagonalizable, su polinomio mínimo puede tener raíces múltiples.

A6.28. Si f es diagonalizable, su polinomio característico puede tener raíces múltiples.

A6.29. Si el polinomio mínimo de un endomorfismo f es $m_f(t) = (t-3)t$, entonces existe una base $\mathcal{B}$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(3, \overset{p}{\ldots}, 3, 0, \overset{q}{\ldots}, 0)$ con $p > 0$ y $q > 0$.

A6.30. Si $p(t) = (t-3)t$ es un polinomio anulador de un endomorfismo f, entonces existe una base $\mathcal{B}$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(3, \overset{p}{\ldots}, 3, 0, \overset{q}{\ldots}, 0)$ con $p \geq 0$ y $q \geq 0$.

A6.31. Si A es una matriz de orden n tal que $(A - I_n)^2(A + I_n) = 0$, entonces $(A - I_n)^2 = 0$ o bien $A + I_n = 0$.

A6.32. Si el polinomio mínimo de un endomorfismo f es $m_f(t) = (t-3)^2$, entonces la forma canónica de Jordan de f está formada por bloques de Jordan de orden 2.

A6.33. Si el polinomio mínimo de un endomorfismo f es $m_f(t) = (t-3)^2$, entonces la forma canónica de Jordan de f no contiene bloques de Jordan de orden 3.

A6.34. Si $(t-a)^2 + b^2$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, es un factor del polinomio mínimo de un endomorfismo real, entonces el endomorfismo no es diagonalizable.

A6.35. Si f es un endomorfismo de V tal que x^3 no es un polinomio anulador de f y x^4 sí, entonces el espacio vectorial es $V = \operatorname{Ker}(f^4)$.

A6.36. Si $(t-1)^4$ es un polinomio anulador de una matriz A, entonces $(t-1)^3$ no puede ser un polinomio anulador de A.

A6.37. El polinomio mínimo de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es $(t-1)^2$.

A6.38. El polinomio mínimo de la matriz $2I_9$ es $(t-2)$.

Capítulo 7

Formas Bilineales y Cuadráticas

Dado un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V, una aplicación $f : V \times V \to \mathbb{K}$ es una **forma bilineal** si para cualesquiera vectores $u,\ v,\ w \in V$ y escalares $a, b \in \mathbb{K}$ cumple las siguientes propiedades:

(1) $f(u+v, w) = f(u, w) + f(v, w)$.

(2) $f(au, v) = af(u, v)$.

(3) $f(u, v+w) = f(u, v) + f(u, w)$.

(4) $f(u,\ bv) = bf(u, v)$.

Estas cuatro propiedades son equivalentes a esta dos:

(5) $f(au+bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$.

(6) $f(u, av+bw) = af(u, v) + bf(u, w)$.

que significan que f es lineal en sus dos componentes. El conjunto de todas las formas bilineales de V se denota por $\mathcal{BL}(V)$.

Dada una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots,\ v_n\}$ de V, se llama **matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$** a la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = (f(v_i, v_j))$ de orden n. Dados dos vectores cualesquiera $x, y \in V$ cuyas coordenadas respecto a $\mathcal{B}$ son $x = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}}$ e $y = (y_1, \dots, y_n)_{\mathcal{B}}$, entonces la imagen $f(x, y)$ se calcula utilizando la matriz de f del siguiente modo:

$$f(x,y) = (x_1 \ \dots \ x_n)\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\, Y \tag{7.1}$$

A la ecuación (7.1) se la denomina **expresión analítica o ecuación** de f en la base $\mathcal{B}$.

Congruencia.

Las matrices de una aplicación bilineal en distintas bases son congruentes. Dadas dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V y $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, se cumple

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \mathfrak{M}^t_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Todas las matrices de f tienen el mismo rango al que se llama **rango** de la forma bilineal.

Una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice que es **simétrica** si $f(u,v) = f(v,u)$ para todo $u, v \in V$, y **antisimétrica** si $f(u,v) = -f(v,u)$, para todo $u, v \in V$. Una forma bilineal es simétrica (antisimétrica) si su matriz, respecto de cualquier base, es simétrica (antisimétrica).

Formas cuadráticas

Se llama **forma cuadrática** asociada a la forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ a la aplicación $\Phi : V \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(v) = f(v,v)$. Distintas formas bilineales f y g pueden dar lugar a la misma forma cuadrática: $\Phi(v) = f(v,v) = g(v,v)$ para todo $v \in V$. Se llama **forma polar** de Φ, y se denota por f_Φ, a la única forma bilineal simétrica tal que $f_\Phi(v,v) = \Phi(v)$.

Se denomina **matriz de la forma cuadrática** Φ, respecto de una base $\mathcal{B}$, a la matriz de su forma polar

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_\Phi)$$

La imagen $\Phi(v)$, de un vector v de coordenadas $(x_1 \ldots x_n)$ respecto de $\mathcal{B}$, se calcula utilizando la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ del siguiente modo:

$$\Phi(x) = f_\Phi(v,v) = (x_1 \ldots x_n)\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X^t\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)\, X \tag{7.2}$$

A la ecuación (7.2) se la denomina **expresión analítica o ecuación** de Φ en la base $\mathcal{B}$.

Si f es una forma bilineal no simétrica con matriz $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ y $\Phi(v) = f(v,v)$, entonces la matriz de Φ en la base $\mathcal{B}$ es $\dfrac{A + A^t}{2}$.

Caracterización:

Una aplicación $\Phi : V \to \mathbb{K}$ es una forma cuadrática si y sólo si cumple las siguientes propiedades:

(1) $\Phi(\lambda v) = \lambda^2\, \Phi(v)$ para todo $v \in V$.

(2) La aplicación $f_\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $f_\Phi(u,v) = \frac{1}{2}[\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)]$ es una forma bilineal simétrica (la forma polar).

También se cumple la siguiente relación entre una forma cuadrática Φ y su forma polar f_Φ:

$$f_\Phi(u,u) = \frac{1}{4}\left(\Phi(u+v) - \Phi(u-v)\right)$$

7.1. Formas Bilineales y Formas cuadráticas

7.1. Sea f una forma bilineal de un $\mathbb{K}$ –espacio vectorial V de dimensión 2 que, respecto de un base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, cumple

$$f(v_2, v_2) = 1,\ f(v_1, v_2) = 2,\ f(v_2, v_1) = 3,\ f(v_2, v_2) = 0$$

Determine $f(4v_1 - v_2,\, 5v_1 + 6v_2)$.

Solución: Aplicamos las propiedades de linealidad de f en sus dos componentes. Linealidad en la primera componente

$$f(4v_1 - v_2,\, 5v_1 + 6v_2) = 4f(v_1,\, 5v_1 + 6v_2) - f(v_2,\, 5v_1 + 6v_2)$$

Linealidad en la segunda componente

$$f(4v_1 - v_2,\, 5v_1 + 6v_2) = 4[5f(v_1,\, v_1) + 6f(v_1,\, v_2)] - [5f(v_2,\, v_1) + 6f(v_2,\, v_2)]$$

Por tanto

$$f(4v_1 - v_2,\, 5v_1 + 6v_2) = 20f(v_1,\, v_1) + 24f(v_1,\, v_2) - 5f(v_2,\, v_1) - 6f(v_2,\, v_2)$$

Sustituyendo los valores dados en el enunciado se obtiene

$$f(4v_1 - v_2,\, 5v_1 + 6v_2) = 20 + 48 - 15 - 0 = 53 \quad \square$$

7.2. De una forma bilineal simétrica f de un espacio vectorial V se sabe que, respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, cumple

$$f(v_2, v_2) = 1,\ f(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = 4,\ f(v_1 + 2v_2, v_1 + 2v_2) = 10$$

Determine $f(v_1, v_1)$ y $f(v_1, v_2)$.

Solución: Llamemos $x = f(v_1, v_1)$ e $y = f(v_1, v_2) = f(v_2, v_1)$. Entonces, aplicando la linealidad de f en sus dos componentes tenemos

$$4 = f(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = f(v_1, v_1) - f(v_1, v_2) - f(v_2, v_1) + f(v_2, v_2) = x - 2y + 1$$

$$10 = f(v_1 + 2v_2, v_1 + 2v_2) = f(v_1, v_1) + 2f(v_1, v_2) + 2f(v_2, v_1) + 4f(v_2, v_2) = x + 4y + 4$$

Resolviendo el sistema obtenemos los valores de x e y.

$$\left\{ \begin{array}{c} x - 2y + 1 = 4 \\ x + 4y + 4 = 10 \end{array} \right. \Rightarrow x = 4,\ y = \frac{1}{2} \quad \square$$

7.3. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ dos bases de un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial V con

$$u_1 = v_1 + v_2, \; u_2 = v_1 + v_3, \; u_3 = v_1 + v_2 + v_3$$

Dada la forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ tal que $f(u_i, u_j) = (-1)^{i+j}$ para $i, j \in \{1, 2, 3\}$, determine $f(2v_1 + v_2 - v_3, \, v_1 + 3v_2)$.

Solución: Conocemos los valores de f para las parejas de vectores de la base $\mathcal{B}'$, por lo que para calcular

$$f(w_1, w_2), \text{ con } w_1 = 2v_1 + v_2 - v_3, \; w_2 = v_1 + 3v_2$$

necesitamos conocer las coordenadas de los vectores w_1 y w_2 respecto de la base $\mathcal{B}'$. Las calculamos.

$$\begin{aligned} w_1 = 2v_1 + v_2 - v_3 \; &= a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \\ &= a_1(v_1 + v_2) + a_2(v_1 + v_3) + a_3(v_1 + v_2 + v_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)v_1 + (a_1 + a_3)v_2 + (a_2 + a_3)v_3 \end{aligned}$$

como las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, entonces

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 2 \\ a_1 + a_3 &= 1 \\ a_2 + a_3 &= -1 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad a_1 = 3, \; a_2 = 1, \; a_3 = -2$$

Coordenadas de $w_2 = v_1 + 3v_2 = b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3$. Siguiendo el mismo razonamiento anterior se llega a un sistema similar cambiando aes por bes y los términos independientes:

$$\left\{ \begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ b_1 + b_3 &= 3 \\ b_2 + b_3 &= 0 \end{aligned} \right. \quad \Rightarrow \quad b_1 = 1, \; b_2 = -2, \; b_3 = 2$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(w_1, w_2) \; &= f(3u_1 + u_2 - 2u_3, \; u_1 - 2u_2 + 2u_3) \\ &= 3f(u_1, u_1 - 2u_2 + 2u_3) + f(u_2, u_1 - 2u_2 + 2u_3) - 2f(u_3, u_1 - 2u_2 + 2u_3) \\ &= 3f(u_1, u_1) - 6f(u_1, u_2) + 6f(u_1, u_3) + f(u_2, u_1) - 2f(u_2, u_2) + 2f(u_2, u_3) \\ &\quad -2f(u_3, u_1) + 4f(u_3, u_2) - 4f(u_3, u_3) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $f(u_i, u_j) = f(u_j, u_i) = (-1)^{i+j}$ se tiene

$$\begin{aligned} f(w_1, w_2) \; &= 3f(u_1, u_1) - 5f(u_1, u_2) + 4f(u_1, u_3) - 2f(u_2, u_2) + 6f(u_2, u_3) - 4f(u_3, u_3) \\ &= 3(-1)^2 - 5(-1)^3 + 4(-1)^4 - 2(-1)^4 + 6(-1)^5 - 4(-1)^6 \\ &= 3 + 5 + 4 - 2 - 6 - 4 = 0 \qquad \square \end{aligned}$$

7.4. Determine cuáles de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ son formas bilineales.

(a) $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_2 + 3x_2y_1$

(b) $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1^2 + x_2y_2$

(c) $h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

(d) $k((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2^{x_1y_1}$

Solución: Sean $a, b \in \mathbb{K}$ y $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in \mathbb{K}^2$ cualesquiera,

$$\begin{aligned}
\text{(a) } f(a(x_1, x_2) + b(y_1, y_2), (z_1, z_2)) &= f((ax_1 + by_1,\ ax_2 + by_2), (z_1, z_2)) \\
&= 2(ax_1 + by_1)z_2 + 3(ax_2 + by_2)z_1 \\
&= 2ax_1z_2 + 2by_1z_2 + 3ax_2z_1 + 3by_2z_1 \\
&= a(2x_1z_2 + 3x_2z_1) + b(2y_1z_2 + 3y_2z_1) \\
&= af((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + bf((y_1, y_2), (z_1, z_2))
\end{aligned}$$

y por tanto f es lineal en la primera componente. Del mismo modo se demuestra que cumple

$$f((x_1, x_2),\ a(y_1, y_2) + b(z_1, z_2)) = af((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + bf((x_1, x_2), (z_1, z_2))$$

por lo que es lineal en la segunda componente. En definitiva, f sí es bilineal.

(b) La aplicación g no es bilineal ya que

$$\begin{aligned}
g(a(x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= g((ax_1, ax_2), (y_1, y_2)) = (ax_1)^2 + ax_2y_2 = a^2x_1^2 + ax_2y_2 \\
ag((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= a(x_1^2 + x_2y_2) = ax_1^2 + ax_2y_2
\end{aligned}$$

no tienen por qué ser iguales.

$$\begin{aligned}
\text{(c) } h(a(x_1, x_2) + b(y_1, y_2), (z_1, z_2)) &= h((ax_1 + by_1,\ ax_2 + by_2), (z_1, z_2)) \\
&= \det \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 & z_1 \\ ax_2 + by_2 & z_2 \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} ax_1 & z_1 \\ ax_2 & z_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} by_1 & z_1 \\ by_2 & z_2 \end{pmatrix} \\
&= a \det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix} + b \det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix} \\
&= af((x_1, x_2), (z_1, z_2)) + bf((y_1, y_2), (z_1, z_2))
\end{aligned}$$

y por tanto h es lineal en la primera componente. Del mismo modo se demostraría la linealidad en la segunda componente.

(d) k no es bilineal pues los valores

$$h(a(x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 2^{ax_1y_1} \quad \text{y} \quad ah((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = a2^{x_1y_1}$$

no tienen por qué ser iguales. □

7.5. Sea V un $\mathbb{K}$ −espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de V. Decida razonadamente la veracidad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f(v_i,v_j) = f(v_j,v_i)$ para todo $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, entonces f es simétrica.

(b) Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal. Si $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de V y $f(v_i,v_i) = 0$ para todo $i = 1,\ldots,n$; entonces $f(u,v) = 0$ para todo $u,v \in V$.

Solución: Sean $x,y \in V$ cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ son

$$x = (x_1,\ldots,x_n)_{\mathcal{B}},\ y = (y_1,\ldots,y_n)_{\mathcal{B}}$$

(a) La forma bilineal f es simétrica si y sólo si $f(x,y) = f(y,x)$ par todo $x,y \in V$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_1v_1+\cdots+x_nv_n,\ y_1v_1+\cdots+y_nv_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_iy_jf(v_i,v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} y_jx_if(v_j,v_i) \end{aligned} \tag{7.3}$$

en la última igualdad se ha aplicado la propiedad conmutativa en $\mathbb{K}$ y la propiedad de f: $f(v_i,v_j) = f(v_j,v_i)$. Por otro lado,

$$f(y,x) = f(y_1v_1+\cdots+y_nv_n,\ x_1v_1+\cdots+x_nv_n) = \sum_{k,l=1}^{n} y_kx_lf(v_k,v_l) \tag{7.4}$$

Las expresiones (7.3) y (7.4) coinciden, y por tanto f es simétrica.

(b) La afirmación es falsa. Ponemos un contraejemplo. La forma bilineal de $\mathbb{K}^2$

$$f((x_1,x_2),\ (y_1,y_2)) = x_1y_2$$

respecto de la base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1)\}$ cumple que $f(v_i,v_i) = 0$ para $i = 1,2$. Sin embargo, $f(v_1,v_2) = 1$, por lo que f no es la forma nula. □

7.6. Determine cuáles de las siguientes aplicaciones de $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ son formas bilineales:

(a) $f(p(x),q(x)) = x^2p'(x)q'(x)$

(b) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo, $g(p(x),q(x)) = p(x_0)q(x_0)$

(c) Dado $r(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, un polinomio fijo, $h(p(x),q(x)) = \int_a^b p(x)q(x)r(x)\ dx$

Solución: Sean $a_1,a_2 \in \mathbb{R}$ y $p_1(x),p_2(x),q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ cualesquiera.

$$\begin{aligned}
\text{(a) } f(a_1p_1(x)+a_2p_2(x),\, q(x)) &= x^2(a_1p_1(x)+a_2p_2(x))'q'(x)\\
&= x^2(a_1p_1'(x)+a_2p_2'(x))\,q'(x)\\
&= x^2(a_1p_1'(x)q'(x)+a_2p_2'(x)q'(x))\\
&= a_1(x^2p_1'(x)q'(x))+a_2(x^2p_2'(x)q'(x))\\
&= a_1f(p_1(x),q(x))+a_2f(p_2(x),q(x))
\end{aligned}$$

Por tanto, f es lineal en la primera componente. Además, la aplicación es simétrica, $f(p,q)=f(q,p)$, de lo que se deduce la linealidad en la segunda componente. En definitiva, f es bilineal.

(b) Dado $x_0 \in \mathbb{R}$ fijo $g(p(x),q(x)) = p(x_0)q(x_0)$ es una aplicación simétrica. Vemos que es lineal en la primera componente, y de ello se deduce que también lo es en la segunda.

$$\begin{aligned}
g(a_1\,p_1(x)+a_2\,p_2(x),\, q(x)) &= (a_1\,p_1(x)+a_2\,p_2(x))(x_0)\,q(x_0)\\
&= (a_1p_1(x_0)+a_2p_2(x_0))\,q(x_0)\\
&= a_1\,p_1(x_0)\,q(x_0)+a_2\,p_2(x_0)\,q(x_0)\\
&= a_1\,g(p_1(x),q(x))+a_2\,g(p_2(x),q(x))
\end{aligned}$$

(c) Sea $r(x)$ un polinomio fijo de $\mathbb{R}_n[x]$,

$$\begin{aligned}
h(a_1p_1(x)+a_2p_2(x),\, q(x)) &= \int_a^b((a_1p_1(x)+a_2p_2(x))q(x)r(x)\;dx\\
&= \int_a^b((a_1p_1(x)q(x)r(x)+a_2p_2(x)q(x)r(x))\;dx\\
&= \int_a^b a_1p_1(x)q(x)r(x)\;dx+\int_a^b a_2p_2(x)q(x)r(x)\;dx\\
&= a_1\int_a^b p_1(x)q(x)r(x)\;dx+a_2\int_a^b p_2(x)q(x)r(x)\;dx\\
&= a_1h(p_1(x),q(x))+a_2h(p_2(x),q(x))
\end{aligned}$$

por tanto, h es lineal en la primera componente. Como además es simétrica, también es lineal en la segunda componente, por lo que, h sí es bilineal. □

7.7. Determine cuáles de las siguientes aplicaciones de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $n \geq 2$, son formas bilineales. En caso afirmativo estudie si son simétricas.

(a) $f(A,B) = \det(AB)$

(b) Dada una matriz fija $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $g(A,B) = \operatorname{tr}(ABC)$

(c) $h(A,B) = 2a_{11}b_{11} - a_{nn}b_{n,n-1}$

Solución: Sean $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ y $A_1, A_2, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ cualesquiera,

(a)

$$\begin{aligned}
f(a_1A_1,\,B) &= \det(a_1A_1B) = a_1^n\det(A_1B)\\
a_1f(A_1,\,B) &= a_1\det(A_1,B)
\end{aligned}$$

Estos valores son distintos en general, por lo que f no es bilineal.

(b) Dada una matriz fija $C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} g(a_1A_1 + a_2A_2,\, B) &= \operatorname{tr}((a_1A_1 + a_2A_2)BC) \\ &= \operatorname{tr}(a_1A_1BC + a_2A_2BC) \\ &= a_1 \operatorname{tr}(A_1BC) + a_2 \operatorname{tr}(A_2BC) \\ &= a_1 g(A_1, B) + a_2 g(A_2, B) \end{aligned}$$

donde en la tercera igualdad se ha aplicado la propiedad de linealidad de la traza. Del mismo modo se demostraría la linealidad en la segunda componente de g, por lo que podemos afirmar que sí es una forma bilineal.

La aplicación no es simétrica ya que

$$g(A,B) = g(B,A) \ \text{ si y sólo si } \ \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BAC)$$

y esta última igualdad, en general, no se cumple para todo A y B.

No obstante, sí hay casos concretos de matrices C para los cuales esta aplicación sería simétrica. De las propiedades de la traza sabemos que $\operatorname{tr}(A(BC)) = \operatorname{tr}((BC)A)$, por lo que si C, fija, es una matriz que conmuta con toda las matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, se tendría la simetría de g: $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BAC)$. En virtud del Ejercicio 1.9 (Vol. I) podemos afirmar que esta propiedad se cumple si y sólo si C es una matriz escalar. Si $C = \lambda I_n$, con $\lambda \in \mathbb{K}$, la forma bilineal g estaría definida como sigue:

$$g(A,B) = \operatorname{tr}(AB\,\lambda I_n) = \lambda \operatorname{tr}(AB)$$

(c) Utilizamos la notación $[A]_{ij}$ para denotar la entrada (i,j) de la matriz A.

$$\begin{aligned} h(a_1A_1 + a_2A_2,\, B) &= 2[a_1A_1 + a_2A_2]_{11}\, b_{11} - [a_1A_1 + a_2A_2]_{nn}\, b_{n,n-1} \\ &= 2(a_1[A_1]_{11} + a_2[A_2]_{11})\, b_{11} - (a_1[A_1]_{nn} + a_2[A_2]_{nn})\, b_{n,n-1} \\ &= a_1(2[A_1]_{11}b_{11} - [A_1]_{nn}b_{n,n-1}) + a_2(2[A_2]_{11}\, b_{11} - [A_2]_{nn}\, b_{n,n-1}) \\ &= a_1\, h(A_1, B) + a_2\, h(A_2, B) \end{aligned}$$

Por tanto, h es lineal en la primera componente. Del mismo modo se demuestra la linealidad en la segunda componente, por lo que h es una forma bilineal.

A continuación estudiamos si h es simétrica

$$\begin{aligned} h(A,B) &= 2a_{11}b_{11} - a_{nn}b_{n,n-1}, \quad \text{y} \\ h(B,A) &= 2b_{11}a_{11} - b_{nn}a_{n,n-1} \end{aligned}$$

son distintos en general, por lo que h no es simétrica. $\square$

7.8. Determine las matrices en la base canónica de las siguientes formas bilineales de $\mathbb{K}^n$ e indique cuáles son simétricas o antisimétricas.

(a) $n = 2$, $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$.

(b) $n = 3$, $g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 - 2x_2y_2 + 4x_3y_1 - 5x_3y_2$.

(c) $n = 3$, $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} 2^{i+j} x_iy_j$.

(d) $n = 4$, $l((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = \sum_{i,j=1}^{4} (-1)^{i+j}(1 - \delta_{ij})x_iy_j$, con δ_{ij} una delta de Kronecker.

Solución: La matriz de una forma bilineal f respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, que denotamos por $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$, es la matriz de orden n cuya entrada (i, j) es $f(v_i, v_j)$.

(a) Si $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^2$, entonces

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & f(v_1, v_2) \\ f(v_2, v_1) & f(v_2, v_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Los valores $f(v_i, v_j)$ se calculan a partir de la ecuación de f:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$$

y se obtienen los coeficientes de x_iy_j en dicha ecuación.

(b) La entrada (i, j) de la matriz de g respecto de la base canónica $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$, $g(v_i, v_j)$, es igual al coeficiente de x_iy_j en la ecuación de g:

$$g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 - 2x_2y_2 + 4x_3y_1 - 5x_3y_2$$

Por tanto

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = (g(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} g(v_1, v_1) & g(v_1, v_2) & g(v_1, v_3) \\ g(v_2, v_1) & g(v_2, v_2) & g(v_2, v_3) \\ g(v_3, v_1) & g(v_3, v_2) & g(v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) La entrada (i, j) de la matriz de h respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ es igual al coeficiente de x_iy_j en la ecuación de h. Es decir, $h(v_i, v_j) = 2^{i+j}$, y por tanto

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(h) = (h(v_i, v_j)) = (2^{i+j}) = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 \end{pmatrix}$$

(d) La entrada (i, j) de la matriz de l respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^4$ es igual al coeficiente de $x_i y_j$ en la ecuación de l. Es decir,

$$l(v_i, v_j) = (-1)^{i+j}(1 - \delta_{ij})$$

Si $i = j$, entonces $\delta_{ij} = 1$ y $l(v_i, v_j) = 0$.
Si $i \neq j$, entonces $\delta_{ij} = 0$ y $l(v_i, v_j) = (-1)^{i+j}$.
Por tanto, la matriz de l es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(l) = (l(v_i, v_j)) = (-1)^{i+j}(1 - \delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una condición necesaria y suficiente para que una forma bilineal sea simétrica (o antisimétrica) es que su matriz (respecto de cualquier base) sea simétrica (o antisimétrica). Por tanto, las formas bilineales h y l son simétricas y no hay ninguna antisimétrica. □

7.9. Dada la forma bilineal $f \in \mathcal{BL}(\mathbb{K}^3)$ definida por

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_1 y_3 - 2x_2 y_1 - 2x_2 y_2 + 4x_3 y_1 - x_3 y_2$$

Determine la matriz de f en la base $\mathcal{B}' = \{u_1 = (1, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, -1, 1)\}$ por dos métodos distintos; y su expresión analítica o ecuación en dicha base.

Solución: Método 1: Según la definición $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = (f(u_i, u_j))$, por lo que tenemos que calcular los nueve valores $f(u_i, u_j)$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$ a partir de la ecuación de f.

$$\begin{aligned} f(u_1, u_1) &= f((1,1,0),(1,1,0)) = 1 + 2 - 0 - 2 - 2 - 0 - 0 = -1 \\ f(u_1, u_2) &= f((1,1,0),(0,1,1)) = 0 + 2 - 1 - 0 - 2 + 0 - 0 = -1 \\ f(u_1, u_3) &= f((1,1,0),(1,-1,1)) = 1 - 2 - 1 - 2 + 2 - 0 - 0 = -2 \\ & \dots \end{aligned}$$

Completando los cálculos se obtiene la matriz

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Método 2: Utilizamos la matriz de f en la base canónica $\mathcal{B}$, la matriz de cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, y relación de congruencia entre las matrices de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = P^t\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) P$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) &= P^t\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)P \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La expresión analítica o ecuación de f en la base $\mathcal{B}'$ es

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x_1'\ x_2'\ x_3')\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} \\
&= (x_1'\ x_2'\ x_3') \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 10 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$f(x,y) = -x_1'y_1' - x_1'y_2' - 2x_1'y_3' - x_2'y_1' - 3x_2'y_2' + 5x_2'y_3' + 10x_3'y_1' + 2x_3'y_2' + 3x_3'y_3'$$

siendo (x_1', x_2', x_3') e (y_1', y_2', y_3') las coordenadas de los vectores x e y de $\mathbb{K}^3$ respecto de la base $\mathcal{B}'$. $\square$

7.10. Dada la forma bilineal $f \in \mathcal{BL}(\mathbb{R}_3[x])$ definida por

$$f(p,q) = p(0)q(0) + p'(1)q'(1)$$

determine las matrices de f en las bases canónica $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}' = \{1+x,\ 1-x,\ x+x^2\}$. Calcule $f(p,q)$ para $p(x) = (1+x)+(1-x)+(x+x^2)$, $q(x) = 2(1+x) - 3(x+x^2)$ utilizando las dos matrices y compruebe que se obtienen los mismos resultados.

Solución: La base canónica de $\mathbb{R}_3[x]$ es $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ y la matriz de f en esta base

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix}$$

Antes de hacer los cálculos, observamos que f es simétrica: $f(p,q) = f(q,p)$, por lo que no hay que calcular todas las entradas de la matriz.

$$\begin{array}{lll}
f(1,1) = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1, & f(1,x) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0, & f(1,x^2) = 1\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0 \\
f(x,1) = f(1,x) = 0, & f(x,x) = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1, & f(x,x^2) = 0\cdot 0 + 1\cdot 2 = 2 \\
f(x^2,1) = f(1,x^2) = 0, & f(x^2,x) = f(x,x^2) = 2, & f(x^2,x^2) = 0\cdot 0 + 2\cdot 2 = 4
\end{array}$$

Entonces

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz de f en la base $\mathcal{B}' = \{1+x,\, 1-x,\, x+x^2\}$ es

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) &= \mathfrak{M}^t_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dados

$$p(x) = (1+x) + (1-x) + (x+x^2) \;\text{ y }\; q(x) = 2(1+x) - 3(x+x^2)$$

para calcular $f(p,q)$ utilizando la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$, necesitamos las coordenadas de p y q respecto de $\mathcal{B}'$:

$$p = (1,1,1)_{\mathcal{B}'}, \quad q = (2,0,-3)_{\mathcal{B}'}$$

Entonces

$$f(p,q) = (1\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -17$$

Ahora, calculamos $f(p,q)$ utilizando la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$, para lo que necesitamos las coordenadas de p y q respecto de $\mathcal{B}$:

$$p(x) = 2 + x + x^2 = (2,1,1)_{\mathcal{B}}, \quad q(x) = 2 - x - 3x^2 = (2,-1,-3)_{\mathcal{B}}$$

Entonces

$$f(p,q) = (2\ 1\ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -17 \quad \square$$

7.11. En $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio vectorial formado por los polinomios con coeficientes reales y grado menor igual que dos, considere la forma bilineal

$$f(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$$

Determine las matrices de f en las bases $\mathcal{B} = \{1,\, x,\, x^2\}$ y $\mathcal{B}' = \{x^2-2x+1,\, 3x,\, x+1\}$ utilizando la definición de f. Después, compruebe que son congruentes.

Solución: La matriz en la base canónica $\mathcal{B}' = \{p_1(x) = 1,\ p_2(x) = x,\ p_3(x) = x^2\}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = (f(p_i, p_j)) = \left(\int_0^1 p_i(x)p_j(x)\ dx\right)$$

Calculando las integrales definidas y teniendo en cuenta que la forma bilineal es simétrica, se obtiene la matriz

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, para la base $\mathcal{B}' = \{q_1(x) = x^2 - 2x + 1,\ q_2(x) = 3x,\ q_3(x) = x + 1\}$,

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = (f(q_i, q_j)) = \left(\int_0^1 q_i(x)q_i(x)\ dx\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{2} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, la entrada $(1,2)$ es $\int_0^1 q_1(x)q_2(x)\ dx$ igual a

$$\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)3x\ dx = \int_0^1 (3x^3 - 6x^2 + 3x)\ dx = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2\Big]_0^1 = \frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

Comprobamos que las matrices obtenidas son congruentes, verificando que se cumple la relación $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = P^t\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)P$, siendo P la matriz (regular) de cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$.

$$\begin{aligned} P^t\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)P &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{12} & \frac{5}{2} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) \quad \square \end{aligned}$$

7.12. Sea $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ y $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \times \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ la aplicación dada por

$$f(X, Y) = \operatorname{tr}(XAY^t)$$

(a) Demuestre que es bilineal y simétrica.

(b) Determine la matriz de f en la base canónica.

(c) Determine los valores $a, b, c \in \mathbb{K}$ para los cuales f no es degenerada.

(d) Si $a = b = c = 1$ calcule el subespacio $\operatorname{Ker}(f)$ y el conjunto $\operatorname{Is}(f)$ de matrices autoconjugadas o isótropas. Compárelos.

Solución: (a) Sean $X, Y \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$, utilizando la siguiente propiedad de la traza: $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^t)$, podemos comprobar que la aplicación es simétrica.

$$f(X, Y) = \operatorname{tr}(XAY^t) = \operatorname{tr}((XAY^t)^t) = \operatorname{tr}((Y^t)^t A^t X^t) = \operatorname{tr}(YAX^t) = f(Y, X)$$

donde en la penúltima igualdad hemos utilizado que la matriz A es simétrica, es decir $A = A^t$.

Demostramos la linealidad en la primera componente y por simetría se cumple también en la segunda. Para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$, $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ se cumple que

$$\begin{aligned} f(a_1X_1 + a_2X_2, Y) &= \operatorname{tr}((a_1X_1 + a_2X_2)AY^t) \\ &= \operatorname{tr}(a_1X_1AY^t + a_2X_2AY^t) \\ &= a_1 \operatorname{tr}(X_1AY^t) + a_2 \operatorname{tr}(X_2AY^t) \\ &= a_1 f(X_1, Y) + a_2 f(X_2, Y) \end{aligned}$$

(b) La base canónica de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ es $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ con

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ es $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = (f(B_i, B_j))$. Calculamos una de las entradas a modo de ejemplo

$$f(B_1, B_2) = \operatorname{tr}(B_1AB_2^t) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = c$$

Calculando el resto de entradas se obtiene la matriz

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & c & b \end{pmatrix}$$

(c) La forma bilineal f no es degenerada si y sólo si $\det(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)) = (ab - c^2)^2 \neq 0$, lo que es equivalente a $ab - c^2 \neq 0$.

(d) Si $a = b = c = 1$, se cumple $ab - c^2 = 0$, por lo que, f es degenerada. El subespacio $\operatorname{Ker}(f)$ está formado por las matrices $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $\operatorname{Ker}(f) \equiv \{x + y = 0,\ z + t = 0\}$, es decir está formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \end{pmatrix}, \quad \text{con } x, z \in \mathbb{K}$$

Las matrices autoconjugadas son de la forma $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ tales que

$$(x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ z + t \\ z + t \end{pmatrix} = 0$$

de donde

$$x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2zt + t^2 = (x + y)^2 + (z + t)^2 = 0$$

La ecuación anterior se cumple si y sólo si

$$x + y = 0, \ z + t = 0$$

y éstas son unas ecuaciones que definen el conjunto $\operatorname{Is}(f)$.

En este caso se cumple que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Is}(f)$, es decir que todas las matrices isótropas están en el núcleo de f. Veremos en otros ejemplos que esto no se cumple en general. □

7.13. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Demuestre que si n es impar y $f : V \times V \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal antisimétrica, entonces f es degenerada.

Solución: En primer lugar, observamos que si A es la matriz de la forma bilineal f respecto de una base $\mathcal{B}$, entonces A es antisimétrica, es decir $A = -A^t$.

Por otro lado, de las propiedades del determinante se deduce que

$$\det A = \det(-A^t) = (-1)^n \det(A^t) = (-1)^n \det(A)$$

Si n es impar, entonces $\det(A) = -\det(A)$, luego $\det(A) = 0$ y f es degenerada. □

7.14. Sean V un $\mathbb{K}$−espacio vectorial, $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal y $g : V \to V$ un endomorfismo. Demuestre que la siguiente aplicación también es una forma bilineal

$$h(u, v) = f(g(u), g(v))$$

Además, si $\mathcal{B}$ es una base de V, se tiene la siguiente relación entre las matrices de f, g y h

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(h) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)^t \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)$$

Solución: Comprobamos la linealidad de h en la primera componente y de modo análogo se haría respecto de la segunda. Sean $u_1, u_2, v \in V$ y $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ cualesquiera, entonces se cumple

$$\begin{array}{rcll} h(\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, v) & = & f(g(\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2), g(v)) & \text{por definición de } h \\ & = & f(\mu_1 g(u_1) + \mu_2 g(u_2), g(v)) & \text{por ser } g \text{ lineal} \\ & = & \mu_1 f(g(u_1), g(v)) + \mu_2 f(g(u_2), g(v)) & \text{por linealidad de } f \text{ en la} \\ & & & \text{primera componente} \\ & = & \mu_1 h(u_1, v) + \mu_2 h(u_2, v) & \text{por definición de } h. \end{array}$$

A continuación, demostramos la relación entre las matrices de f, g y h. Sean u y v dos vectores de V cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ son

$$u = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}, \ v = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$$

Llamando X e Y a las matrices columna de coordenadas de u y v se tiene que

$$h(u, v) = X^t \, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(h) Y \qquad (*)$$

Por otro lado, las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de los vectores $g(u)$ y $g(v)$ son

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)X \ \text{ y } \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)Y$$

por tanto

$$h(u, v) = f(g(u), g(v)) = (\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)X)^t \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \, (\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)Y)$$

de donde

$$h(u, v) = X^t \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)^t \, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) \, Y \qquad (**)$$

Las igualdades $(*)$ y $(**)$ se cumplen para todo $u, v \in V$, por lo que

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(h) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)^t \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) \ \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) \quad \square$$

7.15. En cada caso, determine las formas cuadráticas asociadas a las siguientes formas bilineales de $\mathbb{K}^n$, su matriz en la base canónica, y la forma polar.

(a) $n=2$, $f_1((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$.

(b) $n=2$, $f_2((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$.

(c) $n=3$, $g((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 - 2x_2y_2 + 4x_3y_1 - 5x_3y_2$.

(d) $n=3$, $h((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} 2^{i+j}x_iy_j$.

(e) $n=4$, $l((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) = \sum_{i,j=1}^{4}(-1)^{i+j}(1-\delta_{ij})x_iy_j$, con δ_{ij} una delta de Kronecker.

Solución: En cada caso, la forma cuadrática Φ asociada a la bilineal f es $\Phi(v) = f(v,v)$. Si f es simétrica, entonces f es la forma polar de Φ, que denotamos por f_Φ. Si f no es simétrica, la forma polar se calcula teniendo en cuenta la relación:

$$f_\Phi(u,v) = \frac{1}{2}[\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)]$$

También podemos utilizar el hecho de que la matriz de f_Φ es igual a $\frac{A+A^t}{2}$ siendo A la matriz de f.

(a) La forma cuadrática asociada a f_1 es

$$\Phi((x_1,x_2)) = f_1((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

La matriz de la forma bilineal f_1 respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

no simétrica. Entonces, f_1 no es la forma polar de Φ. La matriz de la forma polar es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_\Phi) = \frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_1) + \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_1)^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La ecuación de la forma polar es

$$f_\Phi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$$

(b) La forma cuadrática asociada a f_2 es

$$\Phi((x_1,x_2)) = f_2((x_1,x_2),(x_1,x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2$$

Es la misma forma cuadrática obtenida en el apartado anterior

$$\Phi((x_1, x_2)) = f_2((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = f_1((x_1, x_2), (x_1, x_2))$$

por lo que la forma polar también es la misma.

(c) La forma cuadrática asociada a g es

$$\begin{aligned}\Phi((x_1, x_2, x_3)) &= g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - x_2x_1 - 2x_2x_2 + 4x_3x_1 - 5x_3x_2 \\ &= x_1^2 + x_1x_2 + 7x_1x_3 - 2x_2^2 - 5x_3x_2\end{aligned}$$

La entrada (i, j) de la matriz de g, respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$, es igual al coeficiente de x_iy_j en la ecuación de g:

$$g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - x_2y_1 - 2x_2y_2 + 4x_3y_1 - 5x_3y_2$$

Por tanto

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = (g(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} g(v_1, v_1) & g(v_1, v_2) & g(v_1, v_3) \\ g(v_2, v_1) & g(v_2, v_2) & g(v_2, v_3) \\ g(v_3, v_1) & g(v_3, v_2) & g(v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Como g no es simétrica, no es la forma polar de Φ. La matriz de la forma polar f_Φ en la base $\mathcal{B}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_\Phi) = \frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) + \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}^t(g)}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 7/2 \\ 1/2 & -2 & -5/2 \\ 7/2 & -5/2 & 0 \end{pmatrix}$$

y esta es también la matriz de Φ.

(d) La forma cuadrática asociada a h es

$$\Phi((x_1, x_2, x_3)) = h((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} 2^{i+j} x_i x_j$$

La matriz de h respecto de la base canónica se calculó en el Ejercicio 7.8.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(h) = (h(v_i, v_j)) = (2^{i+j}) = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 \end{pmatrix}$$

Como h es simétrica, entonces es la forma polar de Φ: $f_\Phi = h$. La matriz de Φ es exactamente $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(h)$.

(e) La forma cuadrática asociada a l es

$$\Phi((x_1, x_2, x_3)) = l((x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3)) = \sum_{i,j=1}^{3} (-1)^{i+j}(1 - \delta_{ij}) x_i x_j$$

La matriz de l respecto de la base canónica se calculó en el Ejercicio 7.8.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(l) = (l(v_i, v_j)) = (-1)^{i+j}(1 - \delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La forma bilineal l es simétrica, por lo que es la forma polar de Φ. La matriz de Φ en la base $\mathcal{B}$ es $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(l)$. □

7.16. Sean $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ fijos. Demuestre que la aplicación $\Phi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(p) = \int_a^b p(x + x_0)\, p'(x_0)\, dx$$

es una forma cuadrática y calcule su forma polar.

Solución: Para todo $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que verificar que se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\Phi(\lambda p) = \lambda^2\, \Phi(p)$.

(2) La aplicación $f_\Phi(p, q) = \frac{1}{2}[\Phi(p + q) - \Phi(p) - \Phi(q)]$ es una forma bilineal simétrica.

(1)

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda\, p) &= \int_a^b (\lambda\, p)(x + x_0)\, (\lambda\, p)'(x_0)\, dx = \int_a^b \lambda\, p(x + x_0)\, \lambda\, p'(x_0)\, dx \\ &= \lambda^2 \int_a^b p(x + x_0)\, p'(x_0)\, dx = \lambda^2\, \Phi(p) \end{aligned}$$

(2) La aplicación $f_\Phi(p, q) = \frac{1}{2}[\Phi(p + q) - \Phi(p) - \Phi(q)]$ es

$$\begin{aligned} f_\Phi(p, q) &= \frac{1}{2}\left(\left(\int_a^b [(p + q)(x + x_0)]\, [(p + q)'(x_0)]\, dx\right)\right. \\ &\quad \left. - \int_a^b p(x + x_0)\, p'(x_0)\, dx - \int_a^b q(x + x_0)\, q'(x_0)\, dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\int_a^b (p(x + x_0) + q(x + x_0))\, (p'(x_0) + q'(x_0))\, dx\right.\right. \\ &\quad \left. - \int_a^b p(x + x_0)\, p'(x_0)\, dx - \int_a^b q(x + x_0)\, q'(x_0)\, dx\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (p(x + x_0) q'(x_0) + q(x + x_0) p'(x_0))\, dx \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $f_\Phi(p, q)$ es bilineal y simétrica a partir de las propiedades de linealidad de la integral, la derivada y la evaluación de polinomios.

Por tanto,

$$f_\Phi(p,q) = \frac{1}{2}\int_a^b (p(x+x_0)q'(x_0) + q(x+x_0)p'(x_0))\ dx$$

es a forma polar de Φ. Comprobamos que $f_\Phi(p,p) = \Phi(p)$

$$\begin{aligned} f_\Phi(p,p) &= \frac{1}{2}\int_a^b (p(x+x_0)p'(x_0) + p(x+x_0)p'(x_0))\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b 2\,(p(x+x_0)p'(x_0))\ dx = \Phi(p) \quad \square \end{aligned}$$

7.17. Estudie si la aplicación $\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definida por

$$\Phi(A) = \operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}^2(A)$$

es una forma cuadrática. Para $n = 2$ determine la expresión analítica de Φ respecto de la base canónica de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Solución: En primer lugar, comprobamos si $\Phi(\lambda\, A) = \lambda^2\, \Phi(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y toda matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda\, A) &= \operatorname{tr}((\lambda\, A)^2) - \operatorname{tr}^2(\lambda\, A) = \operatorname{tr}(\lambda^2\, A^2) - (\lambda \operatorname{tr}(A))^2 \\ &= \lambda^2 \operatorname{tr}(A^2) - \lambda^2 \operatorname{tr}^2(A) = \lambda^2(\operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}^2(A)) = \lambda^2\, \Phi(A) \end{aligned}$$

Después, estudiamos si la aplicación $f_\Phi(A,B) = \frac{1}{2}\,(\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B))$ es bilineal y simétrica. Para ello usaremos las siguientes propiedades de la traza

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B),\ \operatorname{tr}(\lambda\, A) = \lambda \operatorname{tr}(A),\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

$$\begin{aligned} f_\Phi(A,B) &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}((A+B)^2) - \operatorname{tr}^2(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A^2 + B^2 + AB + BA) - (\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B))^2 - \Phi(A) - \Phi(B)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(A^2) + \operatorname{tr}(B^2) + 2\operatorname{tr}(AB) - (\operatorname{tr}^2(A) + \operatorname{tr}^2(B) + 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B))\right. \\ &\quad \left. -(\operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}^2(A)) - (\operatorname{tr}(B^2) - \operatorname{tr}^2(B))\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(2\operatorname{tr}(AB) - 2\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)) \end{aligned}$$

Por tanto

$$f_\Phi(A,B) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

De la propiedad $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ se deduce que f_Φ es simétrica. Por tanto, sólo habría que demostrar que es lineal en una de las dos componentes y la linealidad en la otra se tendría por simetría.

Dadas $A_1, A_2, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ y $a, b \in \mathbb{K}$ se cumple

$$\begin{aligned}
f_\Phi(a_1A_1 + a_2A_2,\ B) &= \operatorname{tr}((a_1A_1 + a_2A_2)B) - \operatorname{tr}(a_1A_1 + a_2A_2)\operatorname{tr}(B) \\
&= \operatorname{tr}(a_1A_1B + a_2A_2B) - ((a_1\operatorname{tr}(A_1) + a_2\operatorname{tr}(A_2))\operatorname{tr}(B) \\
&= a_1\operatorname{tr}(A_1B) + a_2\operatorname{tr}(A_2B) - a_1\operatorname{tr}(A_1)\operatorname{tr}(B) - a_2\operatorname{tr}(A_2)\operatorname{tr}(B) \\
&= a_1(\operatorname{tr}(A_1B) - \operatorname{tr}(A_1)\operatorname{tr}(B)) + a_2(\operatorname{tr}(A_2B) - \operatorname{tr}(A_2)\operatorname{tr}(B)) \\
&= a_1f_\Phi(A_1, B) + a_2f_\Phi(A_2, B)
\end{aligned}$$

Entonces, f_Φ es bilineal y por tanto Φ es una forma cuadrática. Además, f_Φ es la forma polar de Φ.

Supongamos $n = 2$. La base canónica de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ es $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ con

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y, la expresión analítica de Φ respecto de $\mathcal{B}$, es la ecuación que nos permite calcular $\Phi(A)$ a partir de las coordenadas de A respecto de $\mathcal{B}$. Podemos obtenerla de dos formas distintas:

(1) Las coordenadas de la matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{smallmatrix}\right)$ respecto de $\mathcal{B}$ son (x_1, x_2, x_3, x_4) y

$$\begin{aligned}
\Phi((x_1, x_2, x_3, x_4)_\mathcal{B}) &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^2 - \left(\operatorname{tr}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\right)^2 \\
&= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2x_3 & x_1x_2 + x_2x_4 \\ x_3x_1 + x_4x_3 & x_3x_2 + x_4^2 \end{pmatrix} - (x_1 + x_4)^2 \\
&= 2x_2x_3 - 2x_1x_4 \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

(2) El segundo método consiste en utilizar la matriz de Φ:

$$\Phi((x_1, x_2, x_3, x_4)_\mathcal{B}) = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\ \mathfrak{M}_\mathcal{B}(\Phi) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Esta matriz es $\mathfrak{M}_\mathcal{B}(\Phi) = (f_\Phi(B_i, B_j)) = \operatorname{tr}(B_iB_j) - \operatorname{tr}(B_i)\operatorname{tr}(B_j)$. Mostramos el cálculo de una de las entradas de esta matriz y el resto se haría de forma análoga.

$$f_\Phi(B_2, B_3) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) - \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 0 = 1$$

La matriz es

$$\mathfrak{M}_\mathcal{B}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, vemos que se obtiene la misma expresión analítica que en (7.5)

$$\Phi((x_1,x_2,x_3,x_4)_{\mathcal{B}}) = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 2x_2x_3 - 2x_1x_4 \quad \square$$

Observación: Utilizando una matriz simétrica $B \in \mathfrak{M}_4(\mathbb{K})$ podemos definir una forma cuadrática $\Phi : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ de la forma

$$\Phi((x_1,x_2,x_3,x_4)_{\mathcal{B}}) = (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\ B\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

aunque no siempre tendrá una interpretación en términos de funciones matriciales conocidas como: la traza, el determinante, etc; como sí ha ocurrido en el ejemplo anterior.

7.18. Estudie si la aplicación $\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, definida por $\Phi(A) = \det(A)$ es una forma cuadrática.

Solución: En primer lugar, comprobamos si se cumple $\Phi(\lambda A) = \lambda^2\,\Phi(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y toda matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\Phi(\lambda A) = \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) = \lambda^2\,\Phi(A) \quad \text{si y sólo si} \quad n = 2.$$

Por tanto si $n \neq 2$ la aplicación Φ no es una forma cuadrática.

Supuesto $n = 2$, estudiamos si

$$f_\Phi(A,B) = \frac{1}{2}\left(\Phi(A+B) - \Phi(A) - \Phi(B)\right) = \frac{1}{2}\left(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)\right)$$

es bilineal y simétrica. La simetría se comprueba fácilmente: $f_\Phi(A,B) = f_\Phi(B,A)$.

Linealidad en la primera componente: comenzamos comprobando si

$$f_\Phi(aA,B) = af_\Phi(A,B)$$

es decir si

$$\det(aA+B) - \det(aA) - \det(B) = a\left(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)\right)$$

Desarrollamos por separado los dos miembros de la igualdad para comprobar si obtenemos el mismo resultado. Denotamos $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

$$\begin{aligned} a(\det(A+B) - \det(A) - \det(B)) &= a[(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22}) - (a_{21}+b_{21})(a_{12}+b_{12}) \\ &\quad -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})] \\ &= a(a_{11}b_{22} + b_{11}a_{22} - a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(aA+B)-\det(aA)-\det(B) &= (aa_{11}+b_{11})(aa_{22}+b_{22})-(aa_{21}+b_{21})(aa_{12}+b_{12})\\ &\quad -a^2(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})-(b_{11}b_{22}-b_{21}b_{12})\\ &= a(a_{11}b_{22}+b_{11}a_{22}-a_{21}b_{12}-b_{21}a_{12})\end{aligned}$$

Del mismo modo se demuestra que $f_\Phi(A+C,B)=f_\Phi(A,B)+f_\Phi(C,B)$, por lo que podemos afirmar que f_Φ es lineal en la primera componente, y por simetría se tiene la linealidad en la segunda.

Otro modo de demostrar que $\Phi(A)=\det(A)$ es una forma cuadrática es a partir de su expresión analítica. Si $A=\left(\begin{smallmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{smallmatrix}\right)$ sus coordenadas respecto de la base canónica, $\mathcal{B}$, son (x_1,x_2,x_3,x_4) y

$$\Phi(A)=\Phi((x_1,x_2,x_3,x_4)_{\mathcal{B}})=\det\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=x_1x_4-x_2x_3$$

Se puede comprobar que

$$\Phi((x_1,x_2,x_3,x_4)_{\mathcal{B}})=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix}0&0&0&1/2\\0&0&-1/2&0\\0&-1/2&0&0\\1/2&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

Al ser la matriz simétrica, automáticamente Φ es una forma cuadrática. La forma polar es

$$f_\Phi((x_1,x_2,x_3,x_4)_{\mathcal{B}},(y_1,y_2,y_3,y_4)_{\mathcal{B}})=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)\begin{pmatrix}0&0&0&1/2\\0&0&-1/2&0\\0&-1/2&0&0\\1/2&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

Es decir

$$f_\Phi((x_1,x_2,x_3,x_4)_{\mathcal{B}},(y_1,y_2,y_3,y_4)_{\mathcal{B}})=\frac{1}{2}x_1y_4-\frac{1}{2}x_2y_3-\frac{1}{2}x_3y_2+\frac{1}{2}x_4y_1$$

Esta es la expresión analítica de la forma bilineal simétrica:

$$f_\Phi(A,B)=\frac{1}{2}\left(\det(A+B)-\det(A)-\det(B)\right)\quad\square$$

7.2. Conjugación. Diagonalización de formas cuadráticas y bilineales simétricas

Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica. Dos vectores $u, v \in V$ son **conjugados** respecto a f si $f(u,v) = 0$.

Un vector $u \in V$ es **autoconjugado** o **isótropo** si es conjugado de sí mismo respecto a f, es decir $f(u,u) = 0$. El conjunto formado por todos los vectores isótropos se denotará por $\mathrm{Is}(f)$. Este conjunto no es necesariamente un subespacio vectorial.

El **núcleo** o **radical** de f es el subespacio vectorial formado por los vectores que son conjugados a todos los del espacio vectorial. Es decir

$$\mathrm{Ker}(f) = \{u \in V : f(u,v) = 0 \text{ para todo } v \in V\}$$

La forma bilineal f es **degenerada** si $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}$, lo que equivale a que la matriz de f respecto de una base $\mathcal{B}$ de V sea singular, es decir $\det(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)) = 0$, o también $\mathrm{rg}(f) < \dim V$. Unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}(f)$ respecto de la base $\mathcal{B}$ se obtienen del sistema lineal homogéneo $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)X = 0$.

Los mismos conceptos existen para formas cuadráticas. Sean Φ una forma cuadrática y f_Φ su forma polar. Dos vectores son **conjugados** respecto a Φ si lo son respecto a f_Φ. Un vector es **autoconjugado** respecto a Φ si lo es respecto a f_Φ. El **núcleo** de Φ es el núcleo de f_Φ. Y Φ es **degenerada** si y sólo si lo es f_Φ.

Si S es un conjunto de vectores se denomina **conjugado de** S respecto de f, y se denota por S^c, al conjunto formado por los vectores de V que son conjugados a todos los de S:

$$S^c = \{v \in V : f(u,v) = 0 \text{ para todo } u \in U\}$$

S^c es siempre un subespacio vectorial y $S^c = L(S)^c$.

El conjugado de S respecto de una forma cuadrática Φ es igual al conjugado de S respecto de f_Φ.

Una **base de vectores conjugados** respecto de f está formada por vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ tales que son conjugados dos a dos, es decir $f(u_i, u_j) = 0$ para todo $i \neq j$. El **Teorema de existencia** ([BE], pág. 283) garantiza la existencia de una base tal para toda forma bilineal simétrica. La demostración del Teorema muestra un **método de construcción directa** de dicha base que aplicamos en distintos ejercicios.

La matriz de una forma bilineal respecto de una base de vectores conjugados $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es diagonal: $D = \mathrm{diag}(f(u_1,u_1), \ldots, f(u_n,u_n))$. Si el rango de f es r, entonces hay exactamente r elementos no nulos en la diagonal de D, y exactamente $n - r$ elementos nulos en la diagonal que se corresponden con $n - r$ vectores que pertenecen al núcleo de f entre los $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Toda matriz real simétrica es congruente con una matriz diagonal D tal que $d_{ii} \in \{0, 1, -1\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Toda matriz compleja simétrica es congruente con una matriz diagonal D tal que $d_{ii} \in \{0, 1\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Método de diagonalización por congruencia: Si $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ el método consiste en realizar operaciones elementales de filas, y las mismas operaciones elementales a las columnas, de la matriz $(A|I_n)$ hasta convertirla en una matriz $(D|P^t)$ con D diagonal. En tal caso $D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ con $\mathcal{B}'$ una base de vectores conjugados, y P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Clasificación de formas reales. Signatura

Dada $f : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica real, se cumple que, para toda base de vectores conjugados $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, en la matriz diagonal $D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ siempre hay el mismo número de entradas positivas, p, y negativas, q. Al par (p, q), con $p + q = \mathrm{rg}(f)$ se le llama **signatura** de f y se denota por $\mathrm{sg}(f)$. La signatura de una forma cuadrática Φ es igual a la signatura de su forma polar f_Φ.

Tipos de formas bilineales simétricas reales:

- **Definida positiva** si $f(v, v) > 0$ para todo $v \in V$, $v \neq 0$. Es decir, si $\mathrm{sg}(f) = (n, 0)$.
- **Semidefinida positiva** si $f(v, v) \geq 0$ para todo $v \in V$ y $f(v, v) = 0$ para algún $v \neq 0$. Es decir, si $\mathrm{sg}(f) = (p, 0)$, con $p < n$.
- **Definida negativa** si $f(v, v)\langle 0$ para todo $v \in V$, $v \neq 0$. Es decir, si $\mathrm{sg}(f) = (0, n)$
- **Semidefinida negativa** si $f(v, v) < 0$ para todo $v \in V$ y $f(v, v) = 0$ para algún $v \neq 0$. Es decir, si $\mathrm{sg}(f) = (0, q)$, con $q < n$.
- **Indefinida** en cualquier otro caso.

Una forma cuadrática es del mismo tipo que su forma polar.

Signatura de una matriz simétrica real. Toda matriz simétrica real A es congruente con una matriz diagonal D. Se denomina **signatura de** A, $\mathrm{sg}(A)$, al par (p, q), con p igual al número de entradas positivas y q el de negativas de D. Se cumple que $p + q = \mathrm{rg}(A)$. La signatura de A es igual a la signatura de la forma bilineal cuya matriz en cierta base es A.

Tipos de matrices simétricas reales. Una matriz A real, simétrica, de orden n es:

- **Definida positiva** si $\mathrm{sg}(A) = (n, 0)$.
- **Semidefinida positiva** si $\mathrm{sg}(A) = (p, 0)$, con $p < n$.
- **Definida negativa** si $\mathrm{sg}(A) = (0, n)$
- **Semidefinida negativa** si $\mathrm{sg}(A) = (0, q)$, con $q < n$.
- **Indefinida** en cualquier otro caso.

Caracterización de la congruencia de matrices:

- Dos matrices simétricas reales son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura.
- Dos matrices simétricas complejas son congruentes si y sólo si tienen el mismo rango.

Criterio de Sylvester. Una matriz A real, simétrica, de orden n es definida positiva si y sólo si los menores principales Δ_i son todos positivos. Y es definida negativa si y sólo si $(-1)^i \Delta_i > 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

7.19. Sea $f : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ la forma bilineal simétrica de ecuación

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = -x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 - x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 - x_3y_3$$

Determine $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Is}(f)$ y los subespacios conjugados de los planos $P_1 \equiv \{x_2 - x_3 = 0\}$ y $P_2 \equiv \{x_1 - x_2 = 0\}$ y de las rectas $R_1 = L((0,1,1))$ y $R_2 = L((1,1,1))$.

Solución: La matriz de f en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El subespacio $\mathrm{Ker}(f)$ está formado por los vectores (x_1,x_2,x_3) tales que

$$f((y_1,y_2,y_3),(x_1,x_2,x_3)) = 0 \text{ para todo } (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{K}^3$$

Unas ecuaciones implícitas de $\mathrm{Ker}(f)$ se obtienen a partir del sistema lineal

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene $\mathrm{Ker}(f) \equiv \{-x_2 + x_3 = 0,\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0\} = L((0,1,1))$.

Para determinar el subespacio conjugado del plano $P_1 \equiv \{x_2 - x_3 = 0\}$ calculamos una base de este subespacio

$$\mathcal{B}_{P_1} = \{u_1 = (0,1,1),\ u_2 = (1,1,2)\}$$

P_1^c está formado por los vectores $x = (x_1,x_2,x_3)$ que son conjugados a todos los de P_1, lo que equivale a que sean conjugados tanto de u_1 como de u_2:

$$P_1^c = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x,u_1) = 0 \ \text{ y } \ f(x,u_2) = 0\}$$

$$f(x,u_1) = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

La primera condición se cumple siempre. Esto ocurre porque $(0,1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$. La segunda es

$$f(x,u_2) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0$$

Por tanto P_1^c es el plano de ecuación $x_1 = 0$.

El conjugado del plano $P_2 = L((1,1,0),(1,1,1))$ está formado por los vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ que son conjugados tanto de $w_1 = (1,1,0)$ como de $w_2 = (1,1,1)$:

$$P_2^c = \{x \in \mathbb{K}^3 : f(x, w_1) = 0 \text{ y } f(x, w_2) = 0\}$$

$$f(x, w_1) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$f(x, w_2) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -x_2 + x_3 = 0$$

Por tanto, P_2^c es la recta de ecuaciones $\{-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0,\ -x_2 + x_3 = 0\}$.

La recta $R_1 = L((0,1,1))$ es exactamente el subespacio $\operatorname{Ker}(f)$, por tanto el subespacio conjugado es $R_1^c = \mathbb{K}^3$ ya que para todo (x_1, x_2, x_3) se cumple

$$f((x_1, x_2, x_3), (0,1,1)) = 0$$

El conjugado de la recta $R_2 = L((1,1,1))$ está formado por los vectores que son conjugados a $w_2 = (1,1,1)$:

$$R_2^c = \{x \in \mathbb{K}^3 : f(x, w_2) = 0\}$$

$$f(x, w_2) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -x_2 + x_3 = 0$$

Entonces, el conjugado de R_2 es el plano $R_2^c \equiv \{-x_2 + x_3 = 0\}$.

El conjunto formado por todos los vectores isótropos es $\operatorname{Is}(f) = \{x \in \mathbb{K}^3 : f(x,x) = 0\}$

$$\begin{aligned} f(x,x) &= (x_1\ \ x_2\ \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2 \\ &= -2x_1(x_2 - x_3) - (x_2 - x_3)^2 \\ &= (x_2 - x_3)(-2x_1 - x_2 + x_3) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, los vectores (x_1, x_2, x_3) isótropos tienen que cumplir

$$x_2 - x_3 = 0 \text{ o bien } 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Es decir,

$$\operatorname{Is}(f) = P_1 \cup P_3$$

siendo P_1 el plano de ecuación $x_2 - x_3 = 0$ y P_3 el plano de ecuación $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$. En este caso $\operatorname{Is}(f)$ no es un subespacio vectorial.

Se cumple que $\operatorname{Ker}(f) = R_1 \subset P_1 \subset P_1 \cup P_3 = \operatorname{Is}(f)$. $\square$

7.20. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ y $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \times \mathfrak{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ la forma bilineal dada por

$$f(X,Y) = \operatorname{tr}(XAY^t)$$

Si $a = b = c = 1$ calcule el subespacio $\operatorname{Ker}(f)$ y el conjunto $\operatorname{Is}(f)$ de matrices isótropas. Compárelos.

Solución: En el Ejercicio 7.12. se determinó la matriz de esta forma bilineal respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Además, se comprobó que la forma es simétrica y degenerada, por lo que $\operatorname{Ker}(f) \neq \{0\}$. El subespacio $\operatorname{Ker}(f)$ está formado por las matrices $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, $\operatorname{Ker}(f) \equiv \{x + y = 0,\ z + t = 0\}$, es decir está formado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} x & -x \\ z & -z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad x, z \in \mathbb{K}$$

Las matrices autoconjugadas son de la forma $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ tales que

$$(x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x\ y\ z\ t) \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \\ z + t \\ z + t \end{pmatrix} = 0$$

de donde

$$x^2 + 2xy + y^2 + z^2 + 2zt + t^2 = (x + y)^2 + (z + t)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 0,\ z + t = 0$$

En este caso se cumple que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Is}(f)$, un plano de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. $\square$

Observación: En general, para toda forma bilineal simétrica f, se cumple que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Is}(f)$ si y sólo si $\operatorname{Is}(f)$ es un subespacio vectorial.

7.21. Dada la forma bilineal simétrica f de $\mathbb{K}^3$ de ecuación

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3$$

Determine una base de vectores conjugados y una matriz diagonal de f por dos métodos distintos:

(1) Construcción directa de la base.

(2) Diagonalización por congruencia de la matriz de f.

Solución: (1) **Construcción directa de una base de vectores conjugados.**

El método de construcción está descrito en la demostración del Teorema de existencia de base de vectores conjugados ([BE], Teorema 7.28).

En primer lugar interesa saber el rango de la forma bilineal, que es igual al rango de la matriz de f respecto de cualquier base. Por ejemplo, consideramos la matriz en la base canónica de $\mathbb{K}^3$:

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A simple vista vemos que la matriz tiene sólo dos filas linealmente independientes, es decir $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) = 2$ y, por tanto, la forma bilineal es degenerada. La matriz diagonal D congruente con A tendrá el mismo rango que A, es decir será de la forma $D = \operatorname{diag}(a, b, 0)$ con a y b no nulos. En concreto

$$D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(v_1,v_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(v_2,v_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(v_3,v_3) \end{pmatrix}$$

siendo $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de vectores conjugados tal que v_1 y v_2 no sean isótropos. El tercer vector v_3 pertenecerá a $\operatorname{Ker}(f)$, que tiene dimensión $3 - \operatorname{rg}(A) = 1$, por lo que se cumplirá $f(v_3, v_3) = 0$.

Comenzamos con la construcción directa de la base:

Tomamos v_1 un vector no isótropo, es decir tal que $f(v_1, v_1) \neq 0$. Nos sirve $v_1 = (1,0,0)$ ya que cumple $f(v_1, v_1) = 1 = a_{11} \neq 0$.

El segundo vector v_2 será conjugado de v_1. Por tanto, determinaremos el hiperplano v_1^c al que pertenecerá el vector v_2

$$v_1^c = \{(x,y,z) : f((x,y,z), v_1) = 0\}$$

$$v_1^c \equiv \left\{ (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\} \equiv \{x + y + z = 0\}$$

y tomamos $v_2 \in v_1^c$ tal que $f(v_2, v_2) \neq 0$. Esto se puede hacer pues $f|v_1^c$ es no nula; f es la forma nula en el subespacio $\operatorname{Ker}(f)$. Tomamos $v_2 = (1,-1,0)$ y calculamos $f(v_2, v_2) = -1$.

El tercer vector será conjugado de v_1 y de v_2, es decir

$$v_3 \in v_1^c \cap v_2^c = L(v_1, v_2)^c$$

Determinamos el hiperplano $v_2^c = \{(x,y,z) : f((x,y,z), v_2) = 0\}$

$$v_2^c \equiv \left\{ (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \right\} \equiv \{y = 0\}$$

y tomamos $v_3 \in v_1^c \cap v_2^c = L(v_1, v_2)^c$. En este caso no es posible encontrar v_3 no isótropo, que cumpla $f(v_3, v_3) \neq 0$ pues $L(v_1, v_2)^c = \operatorname{Ker}(f)$. Nos sirve $v_3 = (1, 0, -1)$ y para este vector $f(v_3, v_3) = 0$.

La base de vectores conjugados es

$$\mathcal{B}' = \{(1,0,0),\ (1,-1,0),\ (1,0,-1)\}$$

La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ es la matriz diagonal:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = (f(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La signatura de f es el par (p, q) determinado por el número de elementos positivos, p, y negativos, q, entre los elementos de $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$. Es decir, entre

$$f(v_1, v_1) = 1,\ f(v_2, v_2) = -1,\ f(v_3, v_3) = 0$$

Entonces, $\operatorname{sg}(f) = (1, 1)$.

(2) **Diagonalización por congruencia de la matriz A**

Tomamos la matriz $(A|I_3)$ de orden 3×6 y le aplicamos operaciones elementales de filas, y las mismas operaciones de columnas, hasta transformarla en una matriz $(D|P^t)$ con D diagonal. Entonces, se cumple que $D = P^tAP$, donde $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''\mathcal{B}}$ es la matriz de cambio de la base de vectores conjugados, $\mathcal{B}''$, a la base $\mathcal{B}$; y $D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f)$.

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - c_1 \\ c_3 \to c_3 - c_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (D|P^t)$$

Las filas de la matriz P^t son las coordenadas, respecto de $\mathcal{B}$, de los vectores de una base $\mathcal{B}''$ de vectores conjugados:

$$\mathcal{B}'' = \{(1,0,0),\ (-1,1,0),\ (-1,0,1)\}$$

En este caso se parece bastante a la base obtenida por el método anterior, pero esto no tiene por qué ocurrir. Hay infinitas bases de vectores conjugados. □

7.22. Diagonalice la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}$ cuya ecuación respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ es

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + x_3^2 + 4x_3x_4 + 4x_4^2$$

y encuentre una base de vectores conjugados $\mathcal{B}'$ tal que la matriz diagonal $D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ cumpla $d_{ii} \in \{0, 1, -1\}$ para $i = 1, 2, 3$.

Solución: La matriz de Φ en la base canónica, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_4\}$, es la matriz simétrica

$$A = f_\Phi(v_i, v_j) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si denotamos la ecuación de Φ por $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i \leq j} b_{ij} x_i x_j$, entonces la matriz A de Φ, que es la de la forma polar f_Φ, se obtiene del siguiente modo: en la diagonal aparecen los coeficientes b_{ii} de los sumandos cuadráticos x_i^2, y los coeficientes b_{ij} de los sumandos $x_i x_j$ se reparten en la matriz simétrica del siguiente modo $a_{ij} = a_{ji} = \frac{b_{ij}}{2}$.

Para determinar la base de vectores conjugados, calculamos el rango de Φ, que es el rango de la matriz A. A simple vista, comprobamos que las filas 1, 2 son iguales y las filas 3 y 4 son proporcionales. Sólo hay dos filas linealmente independientes, por lo que $\mathrm{rg}(\Phi) = 2$. Esto nos indica que si $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_4\}$ es una base de vectores conjugados, sólo dos de ellos serán no isótropos y los otros dos pertenecerán a $\mathrm{Ker}(f)$.

Si utilizamos el método de construcción directa, vamos añadiendo a la base los vectores no isótropos mientras se pueda. De este modo, la matriz diagonal de Φ respecto de dicha base será $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \mathrm{diag}(a, b, 0, 0)$ con a y b no nulos.

Empezamos la construcción directa de la base teniendo en cuenta lo anterior. Tomamos un vector no isótropo v'_1. Nos sirve $v'_1 = v_1 = (1, 0, 0, 0)$ ya que $\Phi(v_1) = f_\Phi(v_1, v_1) = 2$.

El segundo vector v'_2, no isótropo, debe ser conjugado de v'_1, es decir $v'_2 \in (v'_1)^c$. El subespacio $(v'_1)^c$ está formado por los vectores $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tales que $f_\Phi(x, v'_1) = 0$. Unas ecuaciones de este subespacio vienen determinadas por

$$f_\Phi(x, v'_1) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0$$

Probamos con $v'_2 = (1, -1, 0, 0) \in (v'_1)^c$, pero no nos sirve ya que $\Phi((1, -1, 0, 0)) = 0$. Sí podemos tomar $v'_2 = (1, 0, -2, 0) \in (v'_1)^c$ ya que $\Phi((1, 0, -2, 0)) = 2$.

El resto de vectores de la base v_3' y v_4' pertenecerán a $\mathrm{Ker}(\Phi)$, que coincide con el subespacio de vectores conjugados tanto a v_1' como a v_2'. Es decir:

$$(v_1')^c \cap (v_2')^c = L(v_1', v_2')^c = \mathrm{Ker}(\Phi)$$

Unas ecuaciones de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ se obtienen del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que simplificado da lugar al sistema

$$\mathrm{Ker}(\Phi) \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + 2x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Tomamos $v_3', v_4' \in \mathrm{Ker}(\Phi)$ linealmente independientes. Nos sirven

$$v_3' = (1, -1, 0, 0) \quad \text{y} \quad v_4' = (0, 0, 2, -1)$$

Comprobamos que hemos calculado bien la base. Para ello, determinamos la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, y se debe cumplir $D = P^t A P$, con

$$D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \mathrm{diag}(\Phi(v_1'), \Phi(v_2'), \Phi(v_3'), \Phi(v_4')) = \mathrm{diag}(2, 2, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} P^t A P &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

La signatura de Φ es $(2, 0)$, por lo que Φ es semidefinida positiva. Finalmente, la ecuación de Φ respecto de la base $\mathcal{B}'$ es

$$\Phi(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x_1' \ x_2' \ x_3' \ x_4') \ D \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = 2(x_1')^2 + 2(x_2')^2$$

En esta base Φ está diagonalizada o, como también decimos, escrita como suma de cuadrados.

Para obtener la base $\mathcal{B}''$ en las condiciones pedidas, es decir tal que los elementos de la diagonal de $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(\Phi)$ sean iguales a 1, -1 o 0; transformamos la base de vectores conjugados $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3', v_4'\}$ en la base

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{v_1'}{\sqrt{|\Phi(v_1')|}},\ \frac{v_2'}{\sqrt{|\Phi(v_2')|}},\ v_3',\ v_4' \right\}$$

obteniendo

$$\mathcal{B}'' = \left\{ v_1'' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, 0\right),\ v_2'' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\sqrt{2}, 0\right),\ v_3' = (1,-1,0,0),\ v_4' = (0,0,2,-1) \right\}$$

Para esta base, la matriz de Φ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

7.23. Dada la forma bilineal simétrica $f : \mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(p,q) = p(1)q(-1) + p(-1)q(1)$$

Encuentre una base de vectores conjugados y una matriz diagonal de f.

Solución: Para determinar el rango de f nos va a resultar útil calcular la matriz de f en la base canónica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$. Hacemos los cálculos teniendo en cuenta que es simétrica.

Utilizando la notación $1 = x^0$ tenemos que para $i, j = 0, 1, 2, 3$

$$f(x^i, x^j) = 1^i \cdot (-1)^j + (-1)^i \cdot 1^j = (-1)^j + (-1)^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ y } j \text{ tienen distinta paridad} \\ 2 & \text{si } i \text{ y } j \text{ son pares} \\ -2 & \text{si } i \text{ y } j \text{ son impares} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la entrada (i,j) de la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es $f(x^{i-1}, x^{j-1})$, se obtiene la matriz

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es dos, por lo que en la base $\mathcal{B}' = \{p_1', p_2', p_3', p_4'\}$, de vectores conjugados, sólo habrá dos vectores no isótropos.

Comenzamos a construir la base. Para ello observamos que los dos primeros vectores de la base canónica son conjugados y no isótropos (estos datos están en la submatriz principal 2×2)

$$f(1,1) = 2,\ f(x,x) = -2,\ f(1,x) = 0$$

Entonces, podemos tomar estos dos vectores para formar a base $\mathcal{B}'$: $p_1' = 1$ y $p_2' = x$.

Como $\operatorname{rg}(f) = 2$, entonces los otros dos vectores p_3' y p_4' son dos vectores linealmente independientes de $\operatorname{Ker}(f)$. Unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{Ker}(f)$ se obtiene del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que simplificado da lugar al sistema

$$\operatorname{Ker}(f) \equiv \left\{ \begin{array}{l} x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Es decir, $\operatorname{Ker}(f) = \{a + bx - ax^2 - bx^3 : \ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Tomamos p_3', $p_4' \in \operatorname{Ker}(f)$ linealmente independientes. Nos sirven

$$p_3' = (1, 0, -1, 0)_{\mathcal{B}} = 1 - x^2 \quad \text{y} \quad p_4' = (0, 1, 0, -1)_{\mathcal{B}} = x - x^3$$

La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}' = \{1,\ x,\ 1 - x^2,\ x - x^3\}$ es

$$D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \operatorname{diag}(f(1,1),\ f(x,x),\ f(1-x^2, 1-x^2),\ f(x-x^3, x-x^3)) = \operatorname{diag}(2, -2, 0, 0)$$

Comprobamos que hemos calculado bien la base. Para ello, determinamos la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, y verificamos la relación de congruencia $D = P^t\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) P$.

$$\begin{aligned} P^tAP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

La signatura de f es $(1, -1)$, por lo que f es indefinida y degenerada. $\square$.

7.24. Clasifique la siguiente familia de formas cuadráticas de $\mathbb{R}^3$ para todos los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\Phi_a(x,y,z) = (1-a)x^2 + (6-3a)y^2 + z^2 + (2a-2)xy - 4yz$$

Solución: La matriz de Φ_a en la base canónica es

$$M_a = \begin{pmatrix} 1-a & a-1 & 0 \\ a-1 & 6-3a & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizaremos el método de diagonalización por congruencia para determinar una matriz diagonal de Φ. Realizamos operaciones elementales de filas y las mismas operaciones de columnas. No añadimos la matriz identidad pues no necesitamos una base de vectores conjugados.

$$M_a = \begin{pmatrix} 1-a & a-1 & 0 \\ a-1 & 6-3a & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 \to f_2 + f_1]{} \begin{pmatrix} 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 5-2a & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2 \to c_2 + c_1]{} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 5-2a & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 + 2f_3]{} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2 \to c_2 + 2c_3]{} \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-2a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_a$$

Determinamos la signatura de Φ_a según los valores de a. Para ello, estudiamos el signo de las entradas de la diagonal principal de D_a. Se tienen los siguientes casos:

- Si $a \in (-\infty, \frac{1}{2})$, entonces $1-a > 0$ y $1-2a > 0$, luego $\text{sg}(\Phi_a) = (3,0)$ y Φ_a es definida positiva.
- Si $a = \frac{1}{2}$, entonces $1-a > 0$ y $1-2a = 0$, luego $\text{sg}(\Phi_a) = (2,0)$ y $\Phi_{\frac{1}{2}}$ es semidefinida positiva.
- Si $a \in (\frac{1}{2}, 1)$, entonces $1-a > 0$ y $1-2a < 0$, luego $\text{sg}(\Phi_a) = (2,1)$ y Φ_a es indefinida y no degenerada.
- Si $a = 1$, entonces $1-a = 0$ y $1-2a < 0$, luego $\text{sg}(\Phi_a) = (1,1)$ y Φ_a es indefinida y degenerada.
- Si $a \in (1, +\infty)$, entonces $1-a < 0$ y $1-2a < 0$, luego $\text{sg}(\Phi_a) = (1,2)$ y Φ_a es indefinida y no degenerada.

Se cumple que Φ_a no es definida negativa, ni semidefinida negativa, para ningún valor del parámetro a. $\square$

7.25. Dada la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya expresión analítica es:

$$\Phi(x, y, z) = 4xy + 2xz - 2yz - z^2 = 0$$

obtenga una base de vectores conjugados y utilícela para calcular el conjunto $\mathrm{Is}(\Phi)$ formado por todos los vectores isótropos de Φ. ¿Es $\mathrm{Is}(\Phi)$ un subespacio vectorial? ¿Existen vectores isótropos no contenidos en $\mathrm{Ker}(\Phi)$?

Solución: La matriz de Φ en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Escogemos el método de diagonalización por congruencia para determinar la base de vectores conjugados y la signatura

$$(A|I_3) \xrightarrow[f_1 \leftrightarrow f_3,\ c_1 \leftrightarrow c_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - f_1,\ f_3 \to f_3 + f_1 \\ c_2 \to c_2 - c_1,\ c_3 \to c_3 + c_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to f_3 - f_2,\ c_3 \to c_3 + c_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = (D|P^t)$$

Las entradas de la diagonal de $D = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi)$ son una positiva, una negativa y otra igual a 0, por tanto, la signatura de Φ es $(1, 1)$. Entonces, Φ es una forma cuadrática indefinida y degenerada. En las filas de la matriz P^t están las coordenadas, respecto de la base canónica, de los vectores que forman la base $\mathcal{B}'$ y son conjugados dos a dos:

$$\mathcal{B}' = \{v_1' = (0, 0, 1),\ v_2' = (0, 1, -1),\ v_3' = (1, -1, 2)\}$$

En la base $\mathcal{B}'$ la forma cuadrática se escribe como suma de cuadrados. Es decir, su ecuación en dicha base es

$$\Phi(x', y', z') = (x'\ y'\ z')\ D \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -(x')^2 + (y')^2$$

En esta base, el conjunto de vectores isótropos se calcula con facilidad

$$\mathrm{Is}(\Phi) = \{(x', y', z')_{\mathcal{B}'} :\ -(x')^2 + (y')^2 = 0\} = \{(x', y', z')_{\mathcal{B}'} :\ |x'| = |y'|\}$$

Este conjunto es igual a la unión de dos planos $\mathrm{Is}(\Phi) = P_1 \cup P_2$ con

$$P_1 \equiv \{x' = y'\} \quad \text{y} \quad P_2 \equiv \{x' = -y'\}$$

Por tanto $\mathrm{Is}(\Phi)$ no es un subespacio vectorial.

Unas ecuaciones del subespacio $\mathrm{Ker}(\Phi)$, respecto de $\mathcal{B}'$, se obtienen a partir del sistema lineal homogéneo $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi)X' = DX' = 0$, de donde

$$\mathrm{Ker}(\Phi) = (x', y', z')_{\mathcal{B}'} : \ x' = y' = 0\}$$

Este subespacio es una recta contenida en P_1, por lo que, $\mathrm{Ker}(f) \subsetneq \mathrm{Is}(\Phi)$. Así que, podemos afirmar que sí existen vectores isótropos no contenidos en $\mathrm{Ker}(\Phi)$. $\square$

Observación: Es interesante comparar la simplicidad de los cálculos realizados respecto de la base $\mathcal{B}'$, con los necesarios utilizando la base $\mathcal{B}$. Las bases de vectores conjugados simplifican mucho las ecuaciones de las formas cuadráticas, y el estudio de conjuntos conjugados de vectores.

7.26. Sea f una forma bilineal simétrica de un espacio vectorial real V de dimensión n con signatura (p, q), $p + q \leq n$. Demuestre que para todo subespacio vectorial U de V la forma bilineal restricción de f a U, $f|_U : U \times U \to \mathbb{R}$ definida por $f|_U(u, v) = f(u, v)$ para todo $u, v \in U$, tiene signatura $\mathrm{sg}(f|_U) = (r, s)$ con $r \leq p$, $s \leq q$ y $r + s \leq \dim U$.

Solución: Sea U un subespacio vectorial de V de dimensión $k \leq n$ y $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_k\}$ una base de U de vectores conjugados respecto de f. Entonces, la signatura de $f|_U$ es $\mathrm{sg}(f|_U) = (r, s)$ con $r + s \leq k$ donde[1]

$$r = |\{u_i \in \mathcal{B}_U : \ f|_U(u_i, u_i) = f(u_i, u_i) > 0\}| \quad \text{y}$$

$$s = |\{u_i \in \mathcal{B}_U : \ f|_U(u_i, u_i) = f(u_i, u_i) < 0\}|$$

Podemos ampliar $\mathcal{B}_U$ con vectores $u_{r+1}, \ldots, u_n$, tales que $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_r, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$ sea una base de vectores conjugados de V respecto de f.

Entonces, la signatura de f es $\mathrm{sg}(f) = (p, q)$ con

$$p = |\{u_i \in \mathcal{B} : \ f(u_i, u_i) > 0\}| \geq |\{u_i \in \mathcal{B}_U : \ f(u_i, u_i) > 0\}| = r \quad \text{y}$$

$$q = |\{u_i \in \mathcal{B} : \ f(u_i, u_i) < 0\}| \geq |\{u_i \in \mathcal{B}_U : \ f(u_i, u_i) < 0\}| = s$$

Como queríamos demostrar. $\square$

[1] Hemos utilizado la notación $|\mathcal{C}|$ para denotar el cardinal de un conjunto $\mathcal{C}$.

7.27. Sea f una forma bilineal simétrica de un espacio vectorial real V de dimensión n con signatura (p,q), $p>0$, $q>0$ y $p+q<n$. Demuestre que existen subespacios vectoriales U y W, tales que, $\dim(U)=p$, $\dim(W)=q$ y

$$V = U \oplus W \oplus \mathrm{Ker}(f)$$

con $f|_U$ definida positiva y $f|_W$ definida negativa.

Solución: Sea $\mathcal{B}=\{v_1,\ldots,v_n\}$ una base de vectores conjugados respecto a f. Como la signatura de f es (p,q), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$f(v_i,v_i)>0 \text{ para } i=1,\ldots,p;$$

$$f(v_i,v_i)<0 \text{ para } j=p+1,\ldots,\ p+q;$$

$$f(v_i,v_i)=0 \text{ para } i=p+q+1,\ldots,n.$$

Entonces los subespacios

$$U=L(v_1,\ldots,v_p),\quad W=L(v_{p+1},\ldots,v_{p+q}),\quad S=L(v_{p+q+1},\ldots,v_n)$$

cumplen la condición

$$V=U\oplus W\oplus S$$

La restricción de f a U, $f_U: U\times U\to\mathbb{R}$, es definida positiva. Su signatura es $(p,0)$, ya que $\{v_1,\ldots,v_p\}$ es una base de U de vectores conjugados respecto a f_U y $f_U(v_i,v_i)>0$ para $i=1,\ldots,p$.

La restricción de f a W, $f_W: W\times W\to\mathbb{R}$, es definida negativa. Su signatura es $(0,q)$, ya que $\{v_{p+1},\ldots,v_{p+q}\}$ es una base de W de vectores conjugados respecto a f_W, y $f_W(v_i,v_i)<0$ para $i=p+1,\ldots,p+q$.

Para finalizar la demostración, falta comprobar que $S=\mathrm{Ker}(f)$. Por un lado, tenemos que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n-\mathrm{rg}(f) = n-(p+q)$. Si demostramos que $S\subseteq \mathrm{Ker}(f)$, como ambos subespacios vectoriales tienen la misma dimensión, entonces podremos afirmar que $S=\mathrm{Ker}(f)$.

Sea $u\in S$, es decir $u=\lambda_{p+q+1}\,v_{p+q+1}+\cdots+\lambda_n\,v_n$. El vector $u\in\mathrm{Ker}(f)$, si y sólo si, para todo $v\in V$ se cumple que $f(u,v)=0$. Sea $v\in V$, que será de la forma

$$v=\mu_1 v_1+\cdots+\mu_n v_n,$$

entonces

$$f(u,v) = \ f\left(\sum_{i=p+q+1}^{n}\lambda_i\,v_i,\ \sum_{j=1}^{n}\mu_j v_j\right) = \sum_{i=p+q+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\,\mu_j\,f(v_i,\,v_j)$$

Teniendo en cuenta que la base $\{v_1,\ldots,v_n\}$ está formada por vectores conjugados, es decir $f(v_i,v_j)=0$ para todo $i\neq j$, entonces se cumple que

$$f(u,v) = \sum_{i=p+q+1}^{n}\lambda_i\,\mu_i\,f(v_i,\,v_i)$$

Como los vectores $v_{p+q+1}, \ldots, v_n$ pertenecen a S y cumplen $f(v_i, v_i) = 0$, para $i = p+q+1, \ldots, n$. Entonces, $f(u, v) = 0$ para todo $v \in V$. Es decir, $u \in \operatorname{Ker}(f)$. Hemos demostrado que $S \subseteq \operatorname{Ker}(f)$, como queríamos. $\square$

7.28. (a) Determine una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la siguiente forma cuadrática tenga una matriz diagonal, tal que, los elementos de la diagonal principal sean iguales a 1, -1 o 0; e indique su signatura.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 6x_1x_3 - 2x_2^2 - 6x_2x_3 - 9x_3^2$$

(b) Encuentre, si es posible, un plano P de modo que la restricción de Φ a P sea una forma cuadrática definida negativa.

Solución: (a) La matriz en la base canónica $\mathcal{B}$ es:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Hacemos la diagonalización por congruencia para determinar la matriz diagonal pedida y una base de vectores conjugados para determinar el plano P, si existe.

$$(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)|I_3) \xrightarrow[\substack{c_3 \to c_3 - 3c_1,\ c_3 \to c_3 - \frac{3}{2}c_2}]{f_3 \to f_3 - 3f_1,\ f_3 \to f_3 - \frac{3}{2}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) = (D|P^t)$$

Después de llegar a una matriz diagonal, convertimos los elementos positivos en 1 y los negativos en -1, realizando operaciones elementales de filas y las mismas de columnas.

$$\xrightarrow[f_2 \to \frac{1}{\sqrt{2}}f_2,\ c_2 \to \frac{1}{\sqrt{2}}c_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & -3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_3 \to \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}}f_3,\ c_3 \to \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{2}}}c_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array}\right) = (D'|P'^t)$$

La matriz pedida es $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) = D'$ y la base

$$\mathcal{B}' = \left\{(1,0,0),\ \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),\ \left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$$

La forma cuadrática es indefinida y no degenerada, su signatura es $(1,2)$.

(b) Consideramos la base de vectores conjugados $\mathcal{B}'$. Tomando dos vectores u_1 y u_2, de esta base, tales que $\Phi(u_1) < 0$ y $\Phi(u_2) < 0$; el plano $P = L(u_1, u_2)$ cumplirá que $\Phi|_P$ es definida negativa. En efecto, si $u_1 = (1,0,0)$ y $u_2 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ se cumple $\Phi(u_1) = -1$, $\Phi(u_2) = -1$ y la matriz de $\Phi|_P$ respecto de la base $\mathcal{B}_P = \{u_1, u_2\}$ es la matriz diagonal

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}_P}(\Phi|_P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto $\Phi|_P$ es definida negativa ya que su signatura es $(0,2)$. □

7.29. Sea f una forma bilineal de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determine una recta R y un plano P tales que $R \subset P$, la restricción de f a R sea definida positiva y la restricción de f a P sea indefinida.

(b) ¿Existe algún plano P tal que la restricción de f a P sea definida positiva?

Solución: En el Ejercicio 7.21. se determinó la siguiente base de vectores conjugados

$$\mathcal{B}' = \{v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (1,-1,0),\ v_3 = (1,0,-1)\}$$

La matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ es la matriz diagonal

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = (f(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizando la base de vectores conjugados podemos afirmar que la recta $R = L(v_1)$ cumple la condición $f|_R$ es definida positiva, ya que una base de vectores conjugados de R es $\mathcal{B}_R = \{v_1\}$ y $f(v_1, v_1) > 0$. La forma bilineal $f|_R$ tiene signatura $(1,0)$.

El plano $P = L(v_1, v_2)$ cumple las condición $f|_P$ es indefinida y no degenerada, ya que una base de vectores conjugados de P es $\mathcal{B}_P = \{v_1, v_2\}$ con $f(v_1, v_1) > 0$ y $f(v_2, v_2) < 0$. La forma bilineal $f|_P$ tiene signatura $(1,1)$.

(b) Si P es un plano tal que $f|_P$ es definida positiva, entonces la signatura de $f|_P$ tiene que ser $(2,0)$. Pero como la signatura de f es $(1,1)$ entonces, para todo subespacio U de $\mathbb{R}^3$ se tiene que la signatura de $f|_U$ es (r,s) con $r \leq 1$ y $s \leq 1$, véase el Ejercicio 7.26. Entonces, no existe un plano en las condiciones dadas en este apartado. □

7.30. Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la forma bilineal $f_a : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cumpla las siguientes condiciones:

(a) existe un plano $P \subset \mathbb{R}^4$ tal que $f|_P$ es definida positiva; y

(b) no existe ningún hiperplano $H \subset \mathbb{R}^4$ tal que $f|_H$ es definida positiva.

Solución: Para dar respuesta a la pregunta necesitamos calcular una base de vectores conjugados y la signatura. Lo hacemos realizando la diagonalización por congruencia de la matriz de f_a. Transformamos la matriz $(A|I_4)$ en $(D|P^t)$ con D diagonal congruente con A.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \to f_2 - af_1]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_2 \to c_2 - ac_1]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1 & 0 & -a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \to f_2 - f_3]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & -1 & -a & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_2 \to c_2 - c_3]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & -1 & -a & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_4 \to f_4 - f_3 \\ c_4 \to c_4 - c_3}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & -1 & -a & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - f_4 \\ c_2 \to c_2 - c_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 & 0 & -a & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Podemos comprobar que hamos hecho bien las operaciones verificando la relación $P^tAP = D$.

La signatura de f_a es

$$\operatorname{sg}(f_a) = \begin{cases} (3,1) & \text{si } |a| < 1 \\ (2,1) & \text{si } |a| = 1 \\ (2,2) & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

y una base de vectores conjugados está formada por las filas de P^t

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),\ (-a,1,0,-1),\ (0,0,1,0),\ (0,0,-1,1)\}$$

Si la signatura es (p,q), entonces existe un subespacio U de dimensión p tal que $f_a|_U$ es definida positiva. Por tanto, para que se cumpla la condición (b) y no exista ningún hiperplano de $\mathbb{R}^4$ tal que $f_a|_H$ sea definida positiva, es necesario que $p < 3$. Es decir, $|a| \geq 1$.

Ahora bien, si $|a| \geq 1$, la signatura de f_a es igual a $(2,q)$ y siempre existe un plano P tal que $f_a|_P$ es definida positiva. Para determinar dicho plano basta tomar dos vectores v_1 y v_2, de la base de vectores conjugados obtenida en la diagonalización por congruencia, tales que

$$f_a(v_1,v_1) > 0 \ \text{ y } \ f_a(v_2,v_2) > 0$$

Podemos tomar el primer y el tercer vector obtenidos

$$v_1 = (1,0,0,0), \quad v_2 = (0,0,1,0)$$

ya que $f_a(v_1,v_1) = f_a(v_2,v_2) = 1$. El plano $P = L(v_1,v_2)$ cumple las condiciones requeridas. $\square$

Método de Lagrange o de Gauss

Este método sirve para diagonalizar una forma cuadrática y consiste en manipular su ecuación hasta convertirla en suma de cuadrados. Una forma cuadrática $\Phi : V \to \mathbb{K}$ respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, de V, tiene una ecuación que es un polinomio homogéneo de grado dos en las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ que son las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ de un vector genérico $x \in V$. Es decir

$$\Phi(x) = \Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^{n} a_{ij}x_ix_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

En esta expresión distinguimos los sumandos cuadráticos, cuando $i = j$, del resto

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij}x_ix_j, \ a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Vemos un ejemplo antes de enunciar el método.

7.31. Dada la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ de ecuación

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$$

utilice el método de Lagrange para diagonalizarla.

Solución: Empezamos con el primer término cuadrático x_1^2 e intentamos agrupar términos en un cuadrado en el que aparezca x_1 y las coordenadas x_j para las que existan sumandos de la forma x_1x_j, en este caso sólo tenemos x_1x_2

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2\\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + (4x_2^2 - x_2^2) + 2x_2x_3 - x_3^2\\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2\end{aligned}$$

Así, podemos escribir

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2)^2 + \Phi'(x_2, x_3) \quad \text{con} \quad \Phi'(x_2, x_3) = -x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$$

siendo $\Phi'(x_2, x_3)$ una forma cuadrática en una dimensión menos, y en la que no aparece la coordenada x_1. A continuación, se convierte a $\Phi'(x_2, x_3)$ en una suma de cuadrados:

$$\Phi'(x_2, x_3) = -(x_2 - x_3)^2$$

Entonces

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2)^2 - (x_2 - x_3)^2$$

Si llamamos $y_1 = x_1 + 2x_2$, $y_2 = x_2 - x_3$, $y_3 = x_3$, entonces podemos escribir la ecuación anterior como:

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2,$$

Tenemos las ecuaciones de un cambio de base

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = x_1 + 2x_2\\ y_2 = x_2 - x_3\\ y_3 = x_3\end{array}\right.$$

siendo (y_1, y_2, y_3) coordenadas en una base $\mathcal{B}'$. Podemos determinar los vectores de esta base ya que las ecuaciones nos dan la matriz de cambio de base:

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

La inversa de esta matriz es la de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, y sus columnas son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$, que es una base de vectores conjugados.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = P$$

La base de vectores conjugados es

$$\mathcal{B}' = \{v_1' = (1,0,0),\ v_2' = (-2,1,0),\ v_3' = (-2,1,1)\}$$

Podemos comprobar el cambio de base:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) = P^t\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)P = P^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, si consideramos coordenadas en $\mathcal{B}'$, $x = (y_1, y_2, y_3)_{\mathcal{B}'}$, entonces la ecuación de Φ es

$$\Phi(x) = \Phi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_2^2 = (y_1\ y_2\ y_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \square$$

A continuación vemos en un ejemplo cómo proceder con este método cuando no hay sumandos cuadráticos. La idea es transformar los sumandos del tipo $a_{ij}x_ix_j$ con $i \neq j$ en sumas de cuadrados utilizando propiedades tales como:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \quad ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2$$

7.32. Utilice el método de Lagrange para diagonalizar las siguiente forma cuadrática de $\mathbb{K}^3$

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 5x_1x_3$$

Solución: En primer lugar, vemos que hay un sumando cuadrático, x_2^2, pero no hay ningún otro en el que intervenga x_2, por lo que no es necesario modificarlo. En realidad, podemos ver esta forma cuadrática como

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + \Phi'(x_1, x_3) \quad \text{con} \quad \Phi'(x_1, x_3) = 5x_1x_3$$

y tendríamos que diagonalizar la forma cuadrática Φ' de $\mathbb{K}^2$.

Transformamos x_1x_3 en suma de cuadrados del siguiente modo

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + 5\left(\frac{1}{4}(x_1+x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_3)^2\right)$$

haciendo el cambio de coordenadas

$$y_1 = x_2,\ y_2 = \frac{1}{2}(x_1+x_3),\ y_3 = \frac{1}{2}(x_1-x_3)$$

se tiene que $x_1x_3 = y_2^2 - y_3^2$, por lo que la ecuación de Φ queda

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + 5y_2^2 - 5y_3^2$$

que está expresada como suma de cuadrados. La signatura de Φ es $(2,1)$. $\square$

Algoritmo de Lagrange. Dada la forma cuadrática $\Phi : V \to \mathbb{R}$ que respecto de una base $\mathcal{B}$ tiene ecuación

$$\Phi(x) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j \quad \text{con} \quad x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$$

se repiten los siguientes pasos hasta que la ecuación de Φ esté expresada como una suma de cuadrados:

1. Si existe algún i tal que $a_{ii} \neq 0$, se agrupan en un cuadrado la variable x_i con todas las x_j tales que existe el sumando $a_{ij}x_ix_j$. Para ello, tomamos

$$y_i = x_i + \sum_{i \neq j} \frac{a_{ij}}{2a_{ii}} x_j$$

y expresamos la ecuación de Φ como

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = a_{ii}y_i^2 + \Phi'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

con Φ' una forma cuadrática con $n-1$ variables entre las cuales no aparece x_i. A continuación le volvemos a aplicar los pasos 1 y 2 a Φ'.

2. Si $a_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$; y existe $a_{ij} \neq 0$ para $i \neq j$, entonces haciendo el siguiente cambio de coordenadas

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_j), \; y_j = \frac{1}{2}(x_i - x_j), \; y_k = x_k \text{ para } k \neq i, j;$$

y teniendo en cuenta que $x_ix_j = y_i^2 - y_j^2$, entonces se obtiene la siguiente ecuación de Φ

$$\Phi(x) = \Phi(y_1, \ldots, y_n) = a_{ij}y_i^2 - a_{ij}y_j^2 + \Phi'(y_1, \ldots, y_n)$$

con Φ' una forma cuadrática a la que le aplicamos nuevamente los pasos 1 y 2.

Observación: Nótese, que en el paso 1, si $a_{ii} \neq 0$ y $a_{ij} = 0$ para todo $j \neq i$, entonces no se hace nada, es decir $y_i = x_i$. Y en el paso 2, el cambio de coordenadas es equivalente a $x_i = y_i + y_j$, $x_j = y_i - y_j$, $x_k = y_k$ para $k \neq i, j$. $\square$

7.33. Utilice el método de Lagrange para diagonalizar las siguientes formas cuadráticas reales cuya ecuación está dada en la base canónica.

(a) $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - x_3^2$

(b) $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4$

Solución: (a) Esta forma cuadrática se diagonalizó por congruencia en el Ejercicio 7.25. Ahora, lo hacemos con el método de Lagrange:

Paso 1: el único sumando cuadrático es $-x_3^2$ y los términos de la forma x_3x_j son: $2x_1x_3 - 2x_2x_3$. Entonces, agrupamos estas tres componentes haciendo

$$y_3 = x_3 - x_1 + x_2$$

y la ecuación de Φ se puede expresar como sigue:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -(x_3 - x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = -y_3^2 + \Phi'(x_1, x_2)$$

con $\Phi'(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, a la que volvemos a aplicar el mismo método.

Paso 1: consideramos el primer sumando cuadrático de Φ', x_1^2, y hacemos el cambio $y_1 = x_1 + x_2$ para agrupar x_1 y x_2 en un cuadrado. Obtenemos Φ' ya diagonalizada

$$\Phi'(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2 = y_1^2$$

Entonces, haciendo el cambio de base

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 - x_1 + x_2 \end{array}\right. \tag{7.6}$$

se tiene la ecuación

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - y_3^2$$

La signatura de Φ es $(1, 1)$.

Comprobamos si el cambio de base es correcto: $\mathcal{B}$ es la base canónica, $\mathcal{B}'$ es la nueva base, y se tiene que cumplir

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = P^t\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) P \quad \text{con} \quad P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

La matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ la obtenemos de las ecuaciones (7.6)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Las matrices de Φ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y se comprueba fácilmente la relación $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = P^t\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) P$.

(b) $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4$

Paso 1. No hay sumandos cuadráticos.

Paso 2. Consideramos el sumando x_1x_2 y hacemos el cambio de coordenadas

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \; y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \; y_3 = x_3, \; y_4 = x_4$$

Entonces, $x_1 = y_1 + y_2$ y $x_2 = y_1 - y_2$, $x_1x_2 = y_1^2 - y_2^2$ y la ecuación de Φ queda

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 + y_1y_4 + y_2y_3 + y_2y_4$$

A esta ecuación le aplicamos el paso 1: tenemos en cuenta el sumando cuadrático y_1^2 y agrupamos junto con y_1 las variables y_3 e y_4. Hacemos

$$z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4$$

y la ecuación de Φ queda

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - \frac{1}{4}y_3^2 - \frac{1}{4}y_4^2 - \frac{1}{2}y_3y_4 - y_2^2 + y_2y_3 + y_2y_4$$

A continuación, aplicamos otra vez el paso 1. Tenemos en cuenta el sumando cuadrático $-y_2^2$ y agrupamos y_2 con las variables y_3 e y_4. Hacemos

$$z_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4$$

y la ecuación de Φ ya se obtiene como suma de cuadrados

$$\Phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4\right)^2 - \left(y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4\right)^2$$

Haciendo el cambio de base

$$z_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4,\ z_2 = y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4,\ z_3 = y_3,\ z_4 = y_4$$

tenemos

$$\Phi(z_1, z_2, z_3, z_4) = z_1^2 - z_2^2 = (z_1\, z_2\, z_3\, z_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

La signatura de Φ es $(1, 1)$.

Vamos a comprobar que hemos hecho bien el cambio de base verificando que se cumple

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = (\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'})^t\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi)\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} \quad (*)$$

Calculamos $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}$ que transforma las coordenadas (x_1, x_2, x_3, x_4) en $\mathcal{B}$ en las coordenadas (z_1, z_2, z_3, z_4) en $\mathcal{B}'$

$$\begin{cases} z_1 & = y_1 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ z_2 & = y_1 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ z_3 & = y_3 = x_3 \\ z_4 & = y_4 = x_4 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de Φ en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se deja al lector la comprobación de la ecuación $(*)$.

Si queremos determinar la base de vectores conjugados, $\mathcal{B}'$, calculamos la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \mathfrak{M}^{-1}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}$$

Las columnas de esta matriz son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ respecto de $\mathcal{B}$.

También podemos obtener $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$ despejando (x_1, x_2, x_3, x_4) en función de (z_1, z_2, z_3, z_4), lo que nos da las ecuaciones del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

$$\begin{cases} x_1 &= z_1 + z_2 \\ x_2 &= z_1 - z_2 - z_3 - z_4 \\ x_3 &= z_3 \\ x_4 &= z_4 \end{cases}$$

que en forma matricial tienen la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que la base de vectores conjugados es

$$\mathcal{B}' = \{(1,1,0,0),\ (1,-1,0,0),\ (0,-1,1,0),\ (0,-1,0,1)\} \quad \square$$

Congruencia de matrices reales y complejas

7.34. Dadas las matrices complejas

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

demuestre que son congruentes y encuentre una matriz regular $P \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$ tal que $P^tAP = B$.

Solución: Las matrices A y B son congruentes, si y sólo si, tienen el mismo rango. Es fácil ver que ambas matrices tienen rango 2 pues sus filas (y columnas) son linealmente independientes. También se cumple $\det(A) = -1 \neq 0$ y $\det(B) = 2 - i^2 = 3 \neq 0$, por tanto, A y B son congruentes.

Para determinar la matriz P regular tal que $P^tAP = B$ seguimos los siguientes pasos:

(1) Hacemos la diagonalización por congruencia de A, determinando una matriz regular P_1 tal que $P_1^tAP_1 = I_2$.

(2) Hacemos la diagonalización por congruencia de B, determinando una matriz regular P_2 tal que $P_2^tBP_2 = I_2$.

(3) De la igualdad $P_1^tAP_1 = P_2^tBP_2$ se deduce que

$$(P_2^t)^{-1}P_1^tAP_1(P_2)^{-1} = B \Leftrightarrow (P_1P_2^{-1})^t\, A\, (P_1P_2^{-1}) = B$$

por lo que $P = P_1P_2^{-1}$ es la matriz pedida.

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - 2f_1 \\ c_2 \to c_2 - 2c_1}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to \frac{1}{i\sqrt{3}}f_2 \\ c_2 \to \frac{1}{i\sqrt{3}}c_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{i\sqrt{3}} & \frac{1}{i\sqrt{3}} \end{array}\right) = (I_2|P_1^t)$$

$$(B|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & i & 1 & 0 \\ i & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 - if_1 \\ c_2 \to c_2 - ic_1}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -i & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_2 \to \frac{1}{\sqrt{3}}f_2 \\ c_2 \to \frac{1}{\sqrt{3}}c_2}]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right) = (I_2|P_2^t)$$

Entonces

$$P = P_1P_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2i}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Finalmente comprobamos la relación de congruencia $P^tAP = B$

$$P^tAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2 & 5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{pmatrix} = B \quad \square$$

7.35. Demuestre que las siguientes matrices reales son congruentes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y determine una matriz regular $P \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $P^tAP = D$.

Solución: Las matrices reales A y B son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura. Además las columnas de la matriz P estarán formadas por una base de vectores conjugados $\mathcal{B}'$ respecto de la forma bilineal f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es A. En tal caso, D es la matriz de f en la base $\mathcal{B}'$.

Método 1: Tomar A como la matriz de una forma bilineal simétrica $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Construir una base de vectores conjugados $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que

$$f(v_1, v_1) = 2,\ f(v_2, v_2) = 2,\ f(v_3, v_3) = -3$$

y en tal caso

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) & 0 & 0 \\ 0 & f(v_2, v_2) & 0 \\ 0 & 0 & f(v_3, v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = D$$

Comenzamos construyendo una base de vectores conjugados $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$. A la vista de la matriz A nos sirven los vectores $u_1 = (1, 0, 0)$ y $u_2 = (0, 1, 0)$ de la base canónica ya que son conjugados. Buscamos u_3 que sea conjugado con u_1 y también con u_2. Es decir, $u_3 \in L(u_1, u_2)^c = u_1^c \cap u_2^c$.

$$u_1^c = \{(x, y, z) : f((x, y, z), (1, 0, 0)) = 0\} \equiv \{x + z = 0\}$$
$$u_2^c = \{(x, y, z) : f((x, y, z), (0, 1, 0)) = 0\} \equiv \{y + 4z = 0\}$$

Nos sirve $u_3 = (-1, -4, 1)$. A continuación, basta escalar los vectores u_1, u_2 y u_3 convenientemente para tener el resultado deseado:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|f(u_1, u_1)|}}\, u_1 = \frac{\sqrt{2}}{1}\, u_1 = (\sqrt{2}, 0, 0)$$
$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|f(u_2, u_2)|}}\, u_2 = \frac{\sqrt{2}}{1}\, u_2 = (0, \sqrt{2}, 0)$$
$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{|f(u_3, u_3)|}}\, u_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\, u_3 = \frac{1}{2}\, u_3 = (-\tfrac{1}{2}, -2, \tfrac{1}{2})$$

La matriz P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a la base canónica, cuyas columnas son las coordenadas de los vectores u_1, u_2 y u_3 respecto de $\mathcal{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Método 2: Se hace la diagonalización por congruencia de A hasta llegar a una matriz diagonal D', y se continúa hasta transformar los elementos positivos en 2 y el negativo en -3.

$$(A|I_3) \xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 - f_1,\ c_3 \to c_3 - c_1 \\ f_3 \to f_3 - 4f_2,\ c_3 \to c_3 - 4c_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) = (D'|Q)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_1 \to \sqrt{2}f_1,\ c_1 \to \sqrt{2}c_1 \\ f_2 \to \sqrt{2}f_2,\ c_2 \to \sqrt{2}c_2 \\ f_3 \to \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}f_3,\ c_3 \to \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}c_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right) = (D|P^t)$$

7.36. Determine para qué valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{K}$ las siguientes matrices son congruentes

$$A = \begin{pmatrix} -a & 1-a & -a \\ 1-a & 1-a & 1-a \\ -a & 1-a & 1-a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & b+1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Distinga el caso real y el complejo. En el caso $a = 1$ y $b = 0$ determine una matriz regular $P \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ tal que $P^tAP = B$.

Solución: En primer lugar, hacemos la diagonalización por congruencia de las dos matrices para determinar su rango y signatura.

Diagonalización por congruencia de A:

$$(A|I_3) \xrightarrow[\substack{f_1 \to f_1 - f_2 \\ c_1 \to c_1 - c_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1-a & 1-a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 - f_1 \\ c_3 \to c_3 - c_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & 2-a & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_3 \to f_3 - f_2 \\ c_3 \to c_3 - c_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (D_1|Q_1^t)$$

Diagonalización por congruencia de B

$$(B|I_3) \xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 - \frac{1}{2}c_1}]{f_2 \to f_2 - \frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b+\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{c_2 \to c_2 + \frac{1}{2}c_1}]{f_2 \to f_2 + \frac{1}{2}f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (D_2|Q_2^t)$$

Supongamos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Las matrices A y B son congruentes como matrices reales, si y sólo, si tienen la misma signatura.

A es congruente con $D_1 = \operatorname{diag}(-1, 1-a, 1)$, entonces la signatura de A es

$$\operatorname{sg}(A) = \operatorname{sg}(D_1) = \begin{cases} (2,1) & \text{si } a < 1 \\ (1,1) & \text{si } a = 1 \\ (1,2) & \text{si } a > 1 \end{cases}$$

B es congruente con $D_2 = \operatorname{diag}(2, b, 2)$, entonces la signatura de B es

$$\operatorname{sg}(B) = \operatorname{sg}(D_2) = \begin{cases} (2,1) & \text{si } b < 0 \\ (2,0) & \text{si } b = 0 \\ (3,0) & \text{si } b > 0 \end{cases}$$

Entonces, $\operatorname{sg}(A) = \operatorname{sg}(B)$ si y sólo si $a < 1$ y $b < 0$.

Supongamos ahora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Las matrices A y B son congruentes como matrices complejas si y sólo si tienen el mismo rango.

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(D_1) = \begin{cases} 3 & \text{si } a \neq 1 \\ 2 & \text{si } a = 1 \end{cases} \qquad \operatorname{rg}(B) = \operatorname{rg}(D_2) = \begin{cases} 3 & \text{si } b \neq 0 \\ 2 & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

Entonces, A y B son congruentes como matrices complejas si y sólo si $a = 1$ y $b = 0$, o bien $a \neq 1$ y $b \neq 0$.

Las matrices A y B no son congruentes como matrices reales ni como matrices complejas si $a = 1$ y $b \neq 0$, o bien $a \neq 1$ y $b = 0$.

En el caso $a = 1$ y $b = 0$ las matrices no son congruentes como matrices reales, pues tienen distinta signatura, pero sí como matrices complejas, ya que las dos tienen rango 2. Ambas son congruentes con la matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(1, 1, 0)$. Ahora, para determinar la matriz $P \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $P^tAP = B$, seguimos los mismos pasos que en el Ejercicio 7.34.

(1) Calculamos una matriz regular P_1 tal que $P_1^tAP_1 = D$.

(2) Calculamos una matriz regular P_2 tal que $P_2^tBP_2 = D$.

(3) De la igualdad $P_1^tAP_1 = P_2^tBP_2$ se deduce que

$$(P_2^t)^{-1}P_1^tAP_1(P_2)^{-1} = B \Leftrightarrow (P_1P_2^{-1})^t\ A\ (P_1P_2^{-1}) = B$$

por lo que $P = P_1P_2^{-1}$ es la matriz pedida.

$$(A|I_3) \qquad \cdots \longrightarrow \cdots \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = (D_1|Q_1^t)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_1 \to i f_1,\ c_1 \to i c_1 \\ \text{transformamos el } -1 \text{ en } 1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3,\ c_2 \leftrightarrow c_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = (D|P_1^t)$$

$$(B|I_3) \qquad \cdots \longrightarrow \cdots \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = (D_2|Q_2^t)$$

$$\xrightarrow[\substack{f_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}} f_1,\ c_1 \to \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 \\ f_3 \to \frac{1}{\sqrt{2}} f_3,\ c_3 \to \frac{1}{\sqrt{2}} c_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[f_2 \leftrightarrow f_3,\ c_2 \leftrightarrow c_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) = (D|P_2^t)$$

Entonces

$$P = P_1 P_2^{-1} = \begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} i & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i & -1 \\ -i & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que los cálculos están bien hechos faltaría verificar la igualdad $P^t A P = B$, con

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \square$$

7.37. Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente matriz sea definida positiva

$$\begin{pmatrix} a^2+1 & a^2 & 1 \\ a^2 & a^2 & 0 \\ 1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz es definida positiva si tiene signatura $(3,0)$. Según el Criterio de Sylvester, esta condición es equivalente a que todos los menores principales de la matriz sean positivos. Los calculamos

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a^2+1 \\ \Delta_2 &= \det\begin{pmatrix} a^2+1 & a^2 \\ a^2 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 \\ \Delta_3 &= \det\begin{pmatrix} a^2+1 & a^2 & 1 \\ a^2 & a^2 & 0 \\ 1 & 0 & 2-a \end{pmatrix} = a^2 - a^3 = a^2(a-1) \end{aligned}$$

Observamos que $\Delta_1 > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$; $\Delta_2 > 0$ para todo $a \neq 0$; y $\Delta_3 > 0$ si y sólo si $a > 1$.

Como se tienen que cumplir las tres condiciones: $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 > 0$ entonces, la matriz es definida positiva, si y sólo si, $a > 1$. □

7.38. Determine ejemplos que demuestren la veracidad de las siguientes afirmaciones. Sean $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ matrices simétricas.

(a) Si A y B son congruentes, no tienen por qué ser semejantes.

(b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y A y B tienen el mismo rango, no tienen por qué ser congruentes.

Solución:

(a) Las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son congruentes como matrices reales porque tienen la misma signatura $(2,0)$ y también como matrices complejas porque tienen el mismo rango. Sin embargo, no son semejantes porque tienen distintos autovalores.

(b) Las matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo rango, pero no son congruentes porque no tienen la misma signatura: $\mathrm{sg}(A) = (1,1) \neq \mathrm{sg}(B) = (2,0)$. □

7.39. De una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se sabe que:

(a) Los vectores $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ son conjugados respecto a Φ

(b) $(1,1,1)$ es un vector del núcleo de Φ.

(c) $\Phi(0,1,0) = 2$.

(d) La traza de la matriz de Φ en la base canónica es igual a 4.

Determine la matriz de Φ en la base canónica y clasifíquela obteniendo su signatura.

Solución: Supongamos que la matriz de la forma cuadrática Φ en la base canónica, $\mathcal{B}$, es la matriz simétrica

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

De la condición (a) se deduce que $f_\Phi((0,1,0),(0,0,1)) = 0$, en términos matriciales

$$(0\ 1\ 0) \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e = 0$$

y de la condición (c) $\Phi(0,1,0) = f_\Phi((0,1,0),(0,1,0)) = 2$, se deduce que $d = 2$. Por tanto, la matriz de Φ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 2 & 0 \\ c & 0 & f \end{pmatrix}$$

De la condición (b), el vector $(1,1,1)$ pertenece al núcleo de Φ, se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 2 & 0 \\ c & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} a+b+c=0 \\ b+2=0 \\ c+f=0 \end{array} \right.$$

por lo que la matriz queda de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & -2 & 2-a \\ -2 & 2 & 0 \\ 2-a & 0 & a-2 \end{pmatrix}$$

Ahora, utilizando la condición (d), la traza de la matriz de Φ es $\operatorname{tr}(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)) = 2a = 4$, se tiene que $a = 2$.

Finalmente, la matriz de Φ en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La signatura de Φ se obtiene de forma sencilla viendo, por un lado, que el rango de Φ es igual a 1 y, por otro, que podemos iniciar la construcción de una base de vectores conjugados con $v_1 = (1,0,0)$ siendo $\Phi(v_1) = 2 > 0$. Por tanto, $\mathrm{sg}(\Phi) = (1,0)$, por lo que Φ es semidefinida positiva.

También podemos hacer la diagonalización por congruencia de la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 + f_1 \\ c_2 \to c_2 + c_1}]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

7.40. Determine la matriz de una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$ que cumple las siguientes propiedades:

(a) El vector $(1,1)$ es isótropo y conjugado del vector $(1,0)$.

(b) Su signatura es $(1,0)$.

Solución:

Supongamos que la matriz de Φ respecto de la base canónica es la matriz simétrica

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Los vectores $(1,1)$ y $(1,0)$ son conjugados, luego

$$(1\ 1)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$$

El vector $(1,1)$ es isótropo, es decir

$$(1\ 1)\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -a + c = 0 \Leftrightarrow c = a$$

Hacemos la diagonalización por congruencia para determinar la signatura

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2 \to f_2 + f_1 \\ c_2 \to c_2 + c_1}]{} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, la signatura es $(1,0)$ si y sólo si $a > 0$.

Por tanto, sirve cualquier forma cuadrática cuya matriz, en la base canónica de $\mathbb{K}^2$, sea

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} \text{ con } a > 0. \quad \square$$

7.41. Determine la signatura y la matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$ de una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ que cumpla las siguientes propiedades:

(a) La restricción de Φ al plano $P = L(v_1, v_2)$ es definida positiva y $\{v_1 + v_2, v_1 - 2v_2\}$ es una base de vectores conjugados de P respecto de Φ.

(b) El subespacio conjugado de P es la recta $R = L(v_1 + v_3)$ y $\Phi(v_1 + v_3) = -2$.

Solución: Con los datos del problema deducimos que

$$\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2,\ v_1 - 2v_2,\ v_1 + v_3\}$$

es una base de vectores conjugados y $\Phi(v_1 + v_3) = -2 < 0$. Además por ser la forma cuadrática definida positiva restringida a P, y $\{v_1 + v_2, v_1 - 2v_2\}$ es una base de vectores conjugados de P, entonces

$$\Phi(v_1 + v_2) = k > 0 \ \text{ y } \ \Phi(v_1 - 2v_2) = l > 0$$

Por tanto, la signatura de Φ es $(2, 1)$.

Para obtener la matriz presentamos dos métodos:

Método 1: La matriz respecto de la base $\mathcal{B}'$ de vectores conjugados es diagonal.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi(v_1 + v_2) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(v_1 - 2v_2) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(v_1 + v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Como se pide una en particular, entonces podemos dar valores concretos, positivos, a los parámetros $k, l \in \mathbb{R}^+$ y obtener una forma cuadrática en las condiciones pedidas, hacer el cambio de base, y habríamos terminado. Si dejamos sin fijar esos valores, obtenemos todas las posibles formas cuadráticas, aunque esto no lo pedía el ejercicio.

Vamos a considerar la matriz con los parámetros k y l. La matriz de Φ en la base $\mathcal{B}$ debe cumplir:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = P^t \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) P, \quad \text{con} \quad P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}^{-1}$$

Calculamos P

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz en la base canónica es

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi_{k,l}) &= \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \tfrac{1}{9} \begin{pmatrix} 4k + l & 2k - l & -4k - l \\ 2k - l & k + l & -2k - l \\ -4k - l & -2k - l & 4k + l - 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Método 2: La matriz de la forma cuadrática Φ en la base $\mathcal{B}$ es una matriz simétrica, es decir es de la forma

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

con $a_{ij} = f_\Phi(v_i, v_j)$ y f_Φ la forma polar asociada a Φ. A esta matriz le vamos imponiendo las condiciones del enunciado:

(a) $v_1 + v_2$ y $v_1 - 2v_2$ son conjugados si y sólo si $f_\Phi(v_1 + v_2, v_1 - 2v_2) = 0$

$$f_\Phi(v_1+v_2, v_1-2v_2) = f_\Phi(v_1,v_1) - 2f_\Phi(v_1,v_2) + f_\Phi(v_2,v_1) - 2f_\Phi(v_2,v_2) = a - b - 2d = 0$$

luego $v_1 + v_2$ y $v_1 - 2v_2$ son conjugados si y sólo si $d = \frac{a-b}{2}$.

(b) Por ser $R = P^c$ se cumple que

$$f_\Phi(v_1, v_1 + v_3) = 0, \quad f_\Phi(v_2, v_1 + v_3) = 0$$

de donde

$$\begin{aligned} f_\Phi(v_1, v_1 + v_3) &= f_\Phi(v_1, v_1) + f_\Phi(v_1, v_3) = a + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -a \\ f_\Phi(v_2, v_1 + v_3) &= f_\Phi(v_2, v_1) + f_\Phi(v_2, v_3) = b + e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e = -b \end{aligned}$$

Además, como $\Phi(v_1 + v_3) = -2$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(v_1 + v_3) = f_\Phi(v_1 + v_3, v_1 + v_3) &= f_\Phi(v_1, v_1) + 2f_\Phi(v_1, v_3) + f_\Phi(v_3, v_3) \\ &= a + 2c + f = -a + f = -2 \end{aligned}$$

La matriz de Φ

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b & -a \\ b & \dfrac{a-b}{2} & -b \\ -a & -b & a-2 \end{pmatrix}$$

Falta por usar el dato de la signatura que se indica en la condición (a): Φ es definida positiva restringida a P. Es decir $\Phi(v_1 + v_2) > 0$ y $\Phi(v_1 - 2v_2) > 0$:

$$\begin{aligned} \Phi(v_1 + v_2) &= f(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = a + 2b + d = a + 2b + \tfrac{a-b}{2} = \tfrac{3}{2}(a + b) \\ \Phi(v_1 - 2v_2) &= f(v_1 - 2v_2, v_1 - 2v_2) = a - 4b + 4d = 3a - 6b \end{aligned}$$

por lo que, se tienen que cumplir las siguientes condiciones

$$\Phi(v_1 + v_2) = \frac{3}{2}(a + b) > 0 \;\Leftrightarrow\; a + b > 0$$

$$\Phi(v_1 - 2v_2) = 3a - 6b > 0 \;\Leftrightarrow\; a - 2b > 0$$

Basta tomar dos valores concretos de los parámetros a y b que cumplan las dos condiciones, y se tiene una forma cuadrática válida. $\square$

7.42. Dada la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ de ecuación

$$\Phi(x,y,z) = 3x^2 + 4xy + 2bxz + 2y^2 + (b^2+a)z^2$$

Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente base

$$u_1 = (1,-1,0),\ u_2 = (b,-b,-1),\ u_3 = (0,1,0)$$

es una base de vectores conjugados respecto de Φ y tal que Φ sea definida positiva.

Solución: La matriz de Φ en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & b^2+a \end{pmatrix}$$

La base $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ es de vectores conjugados si y sólo $f_\Phi(u_i, u_j) = 0$ para $i \neq j$. Calculamos estos valores:

$$f_\Phi(u_1,u_2) = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & b^2+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ -b \\ -1 \end{pmatrix} = (1\ 0\ b)\begin{pmatrix} b \\ -b \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$f_\Phi(u_1,u_3) = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & b^2+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ b)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$f_\Phi(u_2,u_3) = (b\ -b\ -1)\begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & b^2+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0\ 0\ -a)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Entonces, $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de vectores conjugados para todo $a, b \in \mathbb{K}$.

Dado que $\mathcal{B}'$ es una base de vectores conjugados, entonces Φ es definida positiva si y sólo si se cumple

$$f_\Phi(u_1,u_1) > 0,\ f_\Phi(u_2,u_2) > 0,\ f_\Phi(u_3,u_3) > 0$$

Calculamos estos valores:

$$f_\Phi(u_1,u_1) = (1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & b^2+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$f_\Phi(u_2,u_2) = (b\ -b\ -1)\begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & b^2+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ -b \\ -1 \end{pmatrix} = (0\ 0\ -a)\begin{pmatrix} b \\ -b \\ -1 \end{pmatrix} = a$$

$$f_\Phi(u_3,u_3) = (0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 3 & 2 & b \\ 2 & 2 & 0 \\ b & 0 & b^2+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2\ 2\ 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

Entonces, la matriz de Φ en la base $\mathcal{B}'$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo que Φ es definida positiva para todo $b \in \mathbb{R}$ y $a > 0$. $\square$

7.43. Sea A una matriz real de orden n y rango n. Demuestre que la matriz A^tA es definida positiva.
Sugerencia: utilice la forma cuadrática definida por la matriz AA^t.

Solución: En primer lugar, observamos que la matriz A^tA es simétrica ya que

$$(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$$

A continuación, consideramos la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por la matriz simétrica A^tA.

$$\Phi(x) = (x_1 \ \cdots \ x_n)A^tA \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; y vamos a demostrar que Φ es definida positiva.

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y denotemos por $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a la matriz columna de coordenadas de x. Entonces

$$\Phi(x) = X^t(A^tA)X = (AX)^t(AX)$$

Si las entradas de la matriz columna AX son $[AX]_{11}, \ldots, [AX]_{n1}$, se tiene que

$$\Phi(x) = (AX)^t(AX) = ([AX]_{11} \ \cdots \ [AX]_{n1}) \begin{pmatrix} [AX]_{11} \\ \vdots \\ [AX]_{n1} \end{pmatrix} = [AX]_{11}^2 + \cdots + [AX]_{n1}^2 \geq 0$$

por lo que la forma cuadrática Φ es definida o semidefinida positiva.

Además, si $X \neq 0$, por ser A una matriz de regular (de rango n) se cumple que $AX \neq 0$, es decir $[AX]_{i1} \neq 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, si $x \neq 0$ se tiene que $\Phi(x) > 0$. Por tanto, Φ es definida positiva, es decir, A^tA es una matriz definida positiva. $\square$

7.3. Autoevaluación 7

Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

A7.1. Si $f, g \in \mathcal{BL}(V)$ son dos formas bilineales, entonces $f+g \in \mathcal{BL}(V)$ y $\lambda f \in \mathcal{BL}(V)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

A7.2. Si $f \in \mathcal{BL}(V)$ y $f(v,v) = a$, entonces $f(2v, 2v) = 4a$.

A7.3. Si A es la matriz de $f \in \mathcal{BL}(\mathbb{K}^2)$ respecto de una base $\mathcal{B}$, entonces $4A$ es la matriz de la forma bilineal $2f \in \mathcal{BL}(\mathbb{K}^2)$.

A7.4. Si $f, g \in \mathcal{BL}(V)$ son dos formas bilineales, tales que $f(v,v) = g(v,v)$ para todo $v \in V$, entonces $f = g$.

A7.5. Si f es una forma bilineal no simétrica y $\Phi(v) = f(v,v)$ es una forma cuadrática, entonces f no es la forma polar de Φ.

A7.6. El vector $(1,1)$ es conjugado del vector $(-3,2)$ respecto de la forma cuadrática $\Phi(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$.

A7.7. Si una forma bilineal no admite ningún vector isótropo no nulo, entonces no es degenerada.

A7.8. Si u es un vector autoconjugado respecto de una forma bilineal simétrica f, es decir $f(u,u) = 0$, entonces $u \in \operatorname{Ker}(f)$.

A7.9. Si u y v son dos vectores no isótropos y conjugados respecto de una forma bilineal simétrica $f \in \mathcal{BL}(V)$, entonces siempre existe una base de vectores conjugados de V que contiene a u y v.

A7.10. Sea f la forma bilineal simétrica de V. Si $u \in \operatorname{Ker}(f)$, entonces $u^c = V$.

A7.11. Sea f la forma bilineal cuya matriz respecto de una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces los vectores v_1 y v_2 son conjugados respecto de f.

A7.12. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ no es la matriz de ninguna forma cuadrática de $\mathbb{K}^3$.

A7.13. La matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ no son congruentes en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

A7.14. La matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ no son congruentes en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

A7.15. Si $f \in \mathcal{BL}(\mathbb{K}^4)$ es una forma bilineal simétrica y R es una recta de $\mathbb{K}^4$, entonces el subespacio conjugado de R, R^c, es un plano de $\mathbb{K}^4$.

A7.16. Sea U un subespacio vectorial de V y $f \in \mathcal{BL}(V)$ simétrica. Si se cumple $\dim U + \dim U^c \neq \dim V$, entonces f es degenerada.

A7.17. Dos matrices complejas, simétricas y congruentes pueden tener distinto rango.

A7.18. Una matriz real simétrica de orden n es definida positiva si y sólo si es congruente con la matriz identidad I_n.

A7.19. Si A es una matriz real congruente con la matriz identidad I_n, entonces $a_{ii} > 0$ para $i = 1, \dots, n$.

A7.20. Si A es una matriz real de orden n y $a_{ii} > 0$ para $i = 1, \dots, n$; entonces A es congruente con la matriz identidad I_n. F

A7.21. Si A es una matriz real de orden n y $a_{ii} > 0$ para $i = 1, \dots, n$; entonces A tiene signatura $(n, 0)$.

A7.22. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ es la matriz de una forma cuadrática degenerada, entonces $a_{ii} = 0$ para algún $i = 1, \dots, n$.

A7.23. La forma cuadrática $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2$ es semidefinida positiva.

A7.24. La forma cuadrática $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = bx_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - ax_4^2$ es degenerada si $a = 0$.

A7.25. La forma cuadrática $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = bx_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - ax_4^2$ no puede ser definida positiva.

A7.26. La forma cuadrática $\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = bx_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - ax_4^2$ es indefinida si $a > 0$.

A7.27. Si $f \in \mathcal{BL}(\mathbb{R}^3)$ y existe un plano P tal que $f|_P$ es definida negativa, entonces la signatura de f es (p, q) con $q \geq 2$.

A7.28. Si $f \in \mathcal{BL}(\mathbb{R}^3)$ y existe un plano P tal que $f|_P$ es definida positiva, entonces la signatura de f es (p, q) con $q \leq 1$.

A7.29. Si los menores principales de una matriz simétrica real son positivos, entonces la matriz es definida positiva.

A7.30. Si los menores principales de una matriz simétrica real son todos no nulos y van alternando su signo, entonces la matriz es definida negativa.

A7.31. Si una matriz $A = (a_{ij})$ simétrica y real de orden n es definida negativa, entonces $a_{11} < 0$.

A7.32. Si una matriz $A = (a_{ij})$ simétrica y real de orden n es definida negativa, entonces $a_{ii} < 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

A7.33. Si una matriz $A = (a_{ij})$ simétrica y real de orden n cumple $a_{ii} < 0$ para todo $i = 1, \dots, n$; entonces es definida negativa.

A7.34. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ simétrica y real de orden n, la condición $a_{ii} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, es necesaria, pero no suficiente, para que A sea definida positiva.

A7.35. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene signatura $(3, 0)$ ya que en la diagonal hay tres entradas positivas y ninguna negativa.

Capítulo 8

Espacio Vectorial Euclídeo

Dado un espacio vectorial real V, una aplicación $\langle\,,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es un **producto escalar** si y sólo si para cualesquiera vectores $u, v, w \in V$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, cumple las siguientes propiedades:

(1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$.

(2) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(3) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$.

(4) $\langle u, u\rangle \geq 0$ y $\langle u, u\rangle = 0$ si y sólo si $u = 0$.

Es decir, un producto escalar es una forma bilineal simétrica y definida positiva. Se llama **espacio vectorial euclídeo** a un espacio vectorial real, V, en el que hay definido un producto escalar, $\langle\,,\rangle$, y se denota normalmente como un par $(V, \langle\,,\rangle)$.

Dada una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\,,\rangle)$, la **matriz del producto escalar** en dicha base es la matriz real de orden n y simétrica: $G_{\mathcal{B}} = (\langle v_i, v_j\rangle)$

Esta matriz se suele llamar también **matriz métrica o matriz de Gram**.

La **expresión analítica o ecuación** del producto escalar $\langle\,,\rangle$ en la base $\mathcal{B}$ es

$$\langle x, y\rangle = (x_1 \, \ldots \, x_n)\, G_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^t\, G_{\mathcal{B}}\, Y \tag{8.1}$$

con $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$. Esta ecuación expresa una forma de calcular el producto escalar de dos vectores a partir de sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$.

Todo lo estudiado para formas bilineales simétricas reales se aplica a los productos escalares: matrices en distintas bases, relación de congruencia entre dichas matrices, bases de vectores conjugados, etc. Toda matriz de un producto escalar es definida positiva, es decir, tiene signatura $(n, 0)$ con $n = \dim V$; por tanto, será congruente con la matriz I_n.

Algunos ejemplos de productos escalares

El producto escalar estándar en $\mathbb{R}^n$ es

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Un producto escalar en el espacio de polinomios $\mathbb{R}_n[x]$ es

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_a^b p(x) q(x) dx$$

Un producto escalar en el espacio $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de las matrices reales cuadradas de orden n es

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$$

8.1. Producto escalar. Norma y ángulo.

Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se define la **norma** o **longitud** de un vector $v \in V$ como el número real no negativo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Un vector de norma 1 se denomina **vector unitario**.

Propiedades de la norma:

(1) $\|v\| > 0$ para todo $v \neq 0_V$ y $\|0_V\| = 0$.

(2) $\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$

(3) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle$

(4) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

(5) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Desigualdad triangular o de Minkowski)

(6) $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y sólo si $\langle u, v \rangle = 0$ (Teorema de Pitágoras)

(7) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (Ley del paralelogramo)

La desigualdad de Cauchy-Schwartz implica que $-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$, lo que permite definir el **ángulo entre dos vectores** no nulos u y v, que denotamos por $\measuredangle(u, v)$, como

$$\measuredangle(u, v) = \arccos\left(\frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \right) \qquad \text{con} \quad \measuredangle(u, v) \in [0, \pi]$$

o lo que es lo mismo

$$\cos \measuredangle(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Dos vectores u y v se dice que son **ortogonales**, y se denota por $u \perp v$, si son conjugados por $\langle\, , \rangle$, es decir si $\langle u, v \rangle = 0$. Un conjunto de vectores no nulos $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es un **conjunto ortogonal** si los vectores son ortogonales dos a dos, es decir $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$.

8.1. Sean $(V, \langle\,,\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$. Demuestre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

(a) si u y v son vectores unitarios tales que $\langle u, v\rangle = 1$, entonces $u = v$.

(b) $\langle u, v\rangle = \dfrac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$

(c) $\langle u, v\rangle = 0$ si y sólo si $\|u\| \leq \|u + av\|$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Solución:

(a) Sean u y v vectores unitarios de V tales que $\langle u, v\rangle = 1$. Vamos a demostrar que la norma del vector $u - v$ es igual a 0, de lo que se deduce que $u - v = 0_V$, ya que el único vector de norma 0 es el vector 0_V; y por tanto, se cumple $u = v$.
Aplicamos las propiedades de bilinealidad

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v,\, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - 2\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle = 1 - 2 + 1 = 0$$

Por tanto, $\|u - v\| = \sqrt{\langle u-v,\, u-v\rangle} = 0$, como queríamos demostrar.

(b) Por un lado,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u,v\rangle$$

y, por otro,

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|-v\|^2 + 2\langle u,-v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u,v\rangle$$

Por tanto,

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle$$

que es una igualdad equivalente a la que queríamos demostrar.

(c) Demostramos la equivalencia: $\langle u,v\rangle = 0$ si y sólo si $\|u\| \leq \|u+av\|$ para todo $a \in \mathbb{R}$, en dos partes:

$\Rightarrow$) Supongamos que $\langle u,v\rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|u+av\|^2 &= \langle u+av,\, u+av\rangle \\
&= \langle u,\, u+av\rangle + \langle av,\, u+av\rangle \\
&= \langle u,u\rangle + a\langle u,v\rangle + a\langle v,u\rangle + a^2\langle v,v\rangle \\
&= \|u\|^2 + a^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2 \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|u\| \leq \|u+av\| \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R}.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $\|u\| \leq \|u+av\|$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 \leq \|u+av\|^2 &= \langle u+av,\, u+av\rangle \\
&= \langle u,u\rangle + a\langle u,v\rangle + a\langle v,u\rangle + a^2\langle v,v\rangle \\
&= \|u\|^2 + a^2\|v\|^2 + 2a\langle u,v\rangle
\end{aligned}$$

De la desigualdad anterior se deduce que

$$0 \leq a^2\|v\|^2 + 2a\langle u, v\rangle \quad \text{para todo} \quad a \in \mathbb{R}$$

Ahora, procedemos por reducción al absurdo suponiendo que $\langle u, v\rangle \neq 0$, y vamos a llegar a una contradicción encontrando valores de a que hacen $a^2\|v\|^2 + 2a\langle u, v\rangle$ negativo. Distinguimos dos casos:

1) Si $a > 0$ entonces $a^2\|v\|^2 + 2a\langle u, v\rangle = a(a\|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle) < 0 \Leftrightarrow a < \frac{-2\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$

2) Si $a < 0$ entonces $a^2\|v\| + 2a\langle u, v\rangle = a(a\|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle) < 0 \Leftrightarrow a > \frac{-2\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$

Por tanto,

- Si $\langle u, v\rangle < 0$ y $a \in \left(0, \frac{-2\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\right)$, entonces $a^2\|v\|^2 + 2a\langle u, v\rangle < 0$.
- Si $\langle u, v\rangle > 0$ y $a \in \left(\frac{-2\langle u,v\rangle}{\|v\|^2},\ 0\right)$, entonces $a^2\|v\|^2 + 2a\langle u, v\rangle < 0$.

La contradicción viene de suponer $\langle u, v\rangle \neq 0$, luego $\langle u, v\rangle = 0$. □

8.2. Sea $(V, \langle\, ,\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$. Determine la norma del vector v en los siguientes casos

(a) $\|u\| = 1$, $\|u + v\| = 2$ y $\|u - v\| = 3$.

(b) $\|u\| = 2$, $\|u + v\| = \sqrt{6}$ y el ángulo entre u y v es $\pi/4$.

(c) Demuestre que si $u + v$ y $u - v$ son ortogonales, entonces u y v tienen la misma norma.

Solución:

(a) Con los datos $\|u\| = 1$, $\|u + v\| = 2$ y $\|u - v\| = 3$, podemos utilizar la Ley del paralelogramo que relaciona la norma de los cuatro vectores: u, v, $u + v$ y $u - v$. Los dos últimos tienen longitudes igual a las diagonales del paralelogramo que determinan u y v. Esta igualdad es

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

de donde

$$\|v\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 - 2\|u\|^2\right) = \frac{1}{2}(4 + 9 - 2) = \frac{11}{2}$$

Por tanto la norma del vector v es $\|v\| = \frac{\sqrt{22}}{2}$.

(b) En la igualdad $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$ despejamos $\|v\|^2$ obteniendo

$$\|v\|^2 = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle = 2 - 2\langle u, v\rangle \tag{8.2}$$

Por otro lado, el producto escalar de $\langle u, v\rangle$ es

$$\langle u, v\rangle = \|u\|\,\|v\|\,\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\|v\| \tag{8.3}$$

De las ecuaciones (8.2) y (8.3) se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado

$$\|v\|^2 + 2\sqrt{2}\,\|v\| - 2 = 0$$

cuyas soluciones son $\|v\| = -\sqrt{2} + 2$ y $\|v\| = -\sqrt{2} - 2$. La única opción posible es $\|v\| = -\sqrt{2} + 2$, ya que la norma de un vector no puede ser negativa.

(c) Supongamos que u y v son dos vectores tales que $u + v$ y $u - v$ son ortogonales. Entonces,

$$0 = \langle u + v,\, u - v\rangle = \langle u,\, u\rangle - \langle u,\, v\rangle + \langle v,\, u\rangle - \langle v,\, v\rangle$$

Por ser el producto escalar una forma bilineal simétrica se cumple $\langle u,\, v\rangle = \langle v,\, u\rangle$, por lo que de la ecuación anterior se tiene

$$0 = \langle u,\, u\rangle - \langle v,\, v\rangle = ||u||^2 - ||v||^2$$

Es decir, $\|u\|^2 = \|v\|^2$, y por ser las normas no negativas, se tiene $\|u\| = \|v\|$. □

8.3. Identidad de Apolonio (o Teorema de la mediana). Dado un triángulo con longitudes de sus lados a, b y c, sea m la longitud de la mediana sobre el lado de longitud c. Entonces, se cumple la siguiente igualdad

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2m^2$$

Ayuda: utilice el paralelogramo construido sobre los lados de longitud a y b, y la Ley del paralelogramo.

Solución: Llamemos u y v a dos vectores de $\mathbb{R}^2$ que determinan los lados de longitud a y b, por lo que $\|u\| = a$ y $\|v\| = b$, y consideremos el paralelogramo con lados u y v. Véase la Figura 8.1.

La longitud del tercer lado del triángulo, c, coincide con la longitud o norma del vector $u - v$. Es decir

$$c = \|u - v\|$$

Además, este lado coincide con una de las diagonales del paralelogramo. La otra diagonal contiene a la mediana sobre c y es exactamente el vector $u + v$, por lo que si m es la longitud de la mediana se cumple:

$$2m = \|u + v\|$$

Entonces, la Identidad de Apolonio resulta ser

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \frac{1}{2}\|u - v\|^2 + \frac{1}{2}\|u + v\|^2$$

o equivalentemente

$$2(\|u\|^2 + \|v\|^2) = \|u - v\|^2 + \|u + v\|^2$$

Esta ecuación es la Ley del Paralelogramo, propiedad que cumple toda norma definida a partir de un producto escalar. □

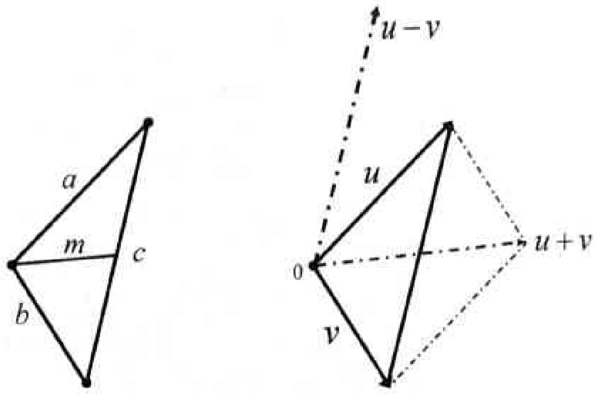


Figura 8.1: Teorema de la mediana

8.4. Estudie si las siguientes formas bilineales simétricas son productos escalares

(a) En $\mathbb{R}^2$: $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$

(b) En $\mathbb{R}^3$: $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + 6x_3y_3$

(c) $\langle\, ,\rangle : \mathbb{R}_n[x]\times\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}$ definida por $\langle p(x),q(x)\rangle = p(x_0)q(x_0)$, con $x_0\in\mathbb{R}$ fijo.

(d) $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}$ definida por

$$\langle p(x),q(x)\rangle = p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0)$$

(e) En $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB^t)$

(f) En $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$

Solución: En todos los casos se indica que las aplicaciones dadas son formas bilineales simétricas, por lo que para que sean productos escalares hay que comprobar si son definidas positivas. Es decir, si cumplen la propiedad:

$$\langle u,u\rangle \geq 0 \ \text{ para todo } u\in V \ \text{ y } \ \langle u,u\rangle = 0 \text{ si y sólo si } u=0$$

siendo V el espacio vectorial correspondiente en cada caso.

(a) En $\mathbb{R}^2$: $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1$ no es un producto escalar ya que podemos encontrar algún vector $u\neq 0$ tal que $\langle u,u\rangle < 0$. Por ejemplo, si $u=(1,4)$ se cumple $\langle u,u\rangle = \langle (1,4),(1,4)\rangle = 1-8-8=-15<0$.

(b) En $\mathbb{R}^3$, la forma bilineal

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2 + 6x_3y_3$$

Será un producto escalar si es definida positiva. Para determinarlo tenemos que diagonalizar la forma bilineal por alguno de los métodos conocidos. En este caso elegimos aplicar el Criterio de Sylvester a la matriz de la forma bilineal.

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$G_{\mathcal{B}} = (\langle v_i, v_j \rangle) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son todos positivos

$$\Delta_1 = 2,\ \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 4,\ \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 24$$

Por tanto, sí es un producto escalar.

(c) En $\mathbb{R}_n[x]$, $n \geq 1$, $\langle p(x), q(x) \rangle = p(x_0)q(x_0)$ cumple

$$\langle p(x), p(x) \rangle = p(x_0)^2 \geq 0$$

Sin embargo, no se cumple $\langle p(x), p(x) \rangle = 0$ si y sólo si $p(x) = 0$. Es decir, podemos encontrar polinomios no nulos, $p(x)$, tales que $\langle p(x), p(x) \rangle = p(x_0)^2 = 0$. Por ejemplo, nos sirve el polinomio $p(x) = x - x_0$.

(d) En $\mathbb{R}_2[x]$, $\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0)$ cumple

$$\langle p(x), p(x) \rangle = p(-1)^2 + p(1)^2 + p(0)^2 \geq 0$$

Además, si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, entonces $\langle p(x), p(x) \rangle = 0$, si y sólo si,

$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = 0,\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0 \ \text{ y } \ p(0) = a_0 = 0$$

Las tres ecuaciones determinan un sistema lineal cuya solución es $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, es decir $p(x) = 0$. Por tanto, $\langle\, ,\, \rangle$ sí es un producto escalar.

(e) En $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^t)$ sí es un producto escalar ya que

$$\langle A, A \rangle = \operatorname{tr}(AA^t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$$

y, además, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$ si y sólo si $a_{ij} = 0$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir $\langle A, A \rangle = 0$ si y sólo si $A = 0_n$, la matriz nula de orden n.

(d) En $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB)$ no es un producto escalar, para $n \geq 2$, ya que podemos encontrar matrices no nulas verificando $\langle A, A \rangle = 0$. Por ejemplo, la matriz A de orden n definida por:

$$a_{12} = 1 \ \text{ y } \ a_{ij} = 0 \text{ para el resto de entradas,}$$

cumple $AA = 0_n$ y por tanto $\langle A, A \rangle = \operatorname{tr}(0_n) = 0$. $\square$

8.5. Sean $x_0, \ldots, x_n$ números reales. Utilice el Teorema Fundamental del Álgebra para demostrar que la forma bilineal simétrica $\langle\,,\rangle : \mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(x_0)q(x_0) + \cdots + p(x_n)q(x_n)$$

es un producto escalar si y sólo si $x_0, \ldots, x_n$ son $n+1$ números reales distintos.

Solución: En primer lugar, para todo $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ se cumple

$$\langle p(x), p(x)\rangle = p(x_0)^2 + \cdots + p(x_n)^2 \geq 0$$

Además, $\langle p(x), p(x)\rangle = 0$ si y sólo si $p(x_i) = 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Es decir,

$$\langle p(x), p(x)\rangle = 0 \text{ si y sólo si } x_0, \ldots, x_n \text{ son raíces de } p(x)$$

El Teorema Fundamental del Álgebra afirma que todo polinomio con coeficientes complejos tiene una raíz compleja. Como consecuencia de ello, se cumple que todo polinomio complejo de grado n tiene exactamente n raíces complejas (no necesariamente distintas). En particular, un polinomio real de grado n tiene exactamente n raíces reales o complejas y, a lo más, n raíces reales.

Entonces, si $x_0, \ldots, x_n$ son $n+1$ números reales distintos, el único polinomio $p(x)$ real o complejo, de grado menor o igual que n, con $n+1$ raíces es el polinomio nulo. Así, se cumple que $\langle p(x), p(x)\rangle = 0$ si y sólo si $p(x) = 0$, por lo que $\langle\,,\rangle$ es un producto escalar.

Ahora, supongamos que $x_0, \ldots, x_n$ no son todos distintos. Sean $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ los números distintos, entre los anteriores, con $k \leq n$. Entonces, el polinomio no nulo $p(x) = (x - x_{i_1}) \cdots (x - x_{i_k})$, de grado k, cumple la condición $\langle p(x), p(x)\rangle = 0$, por lo que $\langle\,,\rangle$ no es un producto escalar. $\square$

8.6. Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la forma bilineal $f_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya matriz en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_a) = \begin{pmatrix} a & a-1 & 0 \\ a-1 & 2a & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$$

es un producto escalar.

Solución: La forma bilineal es un producto escalar si y sólo si es definida positiva. Aplicamos el Criterio de Sylvester, según el cual, f_a es definida positiva, si y sólo si, los menores principales de la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f_a)$ son todos positivos. Los menores principales son

$$\Delta_1 = \det(a) = a, \quad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & 2a \end{pmatrix} = a^2 + 2a - 1$$

$$\Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a & a-1 & 0 \\ a-1 & 2a & a+1 \\ 0 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} = a^2 - 1$$

Condiciones de positividad:

$$\begin{array}{lcl} \Delta_1 = a > 0 & \Leftrightarrow & a > 0 \\ \Delta_2 = a^2 + 2a - 1 > 0 & \Leftrightarrow & a \in (-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty) \\ \Delta_3 = a^2 - 1 > 0 & \Leftrightarrow & |a| > 1 \end{array}$$

Las tres condiciones se cumplen si y sólo si $a > 1$. □

8.7. Sea $\langle\, , \rangle$ un producto escalar definido en un espacio vectorial real V y $g : V \to V$ un isomorfismo. Demuestre que la aplicación bilineal $[\, ,] : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$[u, v] = \langle g(u), g(v) \rangle$$

es un producto escalar en V. Además, si $\mathcal{B}$ es una base de V, se tiene la siguiente relación entre las matrices de los productos escalares $\langle\, , \rangle$ y $[\, ,]$, y la de g:

$$G_{\mathcal{B}}([\, ,]) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)^t\, G_{\mathcal{B}}(\langle\, , \rangle)\; \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) \tag{8.4}$$

Solución: En el Ejercicio 7.14. se demostró que $[\, ,]$ es una forma bilineal de V y, también, se demostró la relación entre la matriz de la forma bilineal $[\, ,]$ y la de $\langle\, , \rangle$ que se expresa en la ecuación (8.4).

Entonces, sólo faltaría demostrar que $[\, ,]$ es simétrica y definida positiva.

Simetría:

$$[u\, , v] = \langle g(u), g(v) \rangle = \langle g(v), g(u) \rangle = [v\, , u]$$

donde en la segunda igualdad hemos aplicado la propiedad de simetría del producto escalar $\langle\, , \rangle$.

Positividad: para todo $v \in V$ se cumple

$$[v\, , v] = \langle g(v), g(v) \rangle \geq 0$$

ya que $\langle\, , \rangle$ es un producto escalar. Además,

$$\langle g(v), g(v) \rangle = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad g(v) = 0$$

Por ser f un isomorfismo, y en particular una aplicación inyectiva, $g(v) = 0$ si y sólo si $v = 0$. Es decir,

$$[v\, , v] = 0 \;\; \text{si y sólo si} \;\; v = 0$$

Finalmente, $[\, ,]$ es un producto escalar. □

Observación: Nótese la utilidad de este resultado para definir nuevos productos escalares a partir de uno dado.

8.8. Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica definida positiva. Demuestre que la siguiente forma bilineal es un producto escalar

$$[X, Y] = \operatorname{tr}(XAY^t) \quad \text{con} \quad X, Y \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$$

Solución: Vamos a utilizar lo demostrado en el ejercicio anterior.

Previamente, observamos que si A es definida positiva, es congruente con la matriz identidad, por lo que existe una matriz regular P tal que $A = PI_nP^t = PP^t$. Entonces

$$[X, Y] = \operatorname{tr}(XAY^t) = \operatorname{tr}(X(PP^t)Y^t) = \operatorname{tr}((XP)(YP)^t)$$

A continuación, utilizamos el hecho de que $\langle B, C\rangle = \operatorname{tr}(BC^t)$ es un producto escalar, y que la aplicación lineal $g : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: $g(X) = XP$ es un isomorfismo por ser P regular. Por tanto,

$$[X, Y] = \operatorname{tr}((XP)(YP)^t) = \langle g(X), g(Y)\rangle$$

es un producto escalar. □

8.9. Sean $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ y $\langle\, ,\rangle : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ el producto escalar definido por

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(XAY^t) \quad \text{con} \quad X, Y \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

Obtenga una matriz $M \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ cuya norma sea igual a $\sqrt{2}$.

Solución: Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, su norma es

$$\|M\| = \sqrt{\langle M, M\rangle} = \sqrt{\operatorname{tr}(MAM^t)}$$

Calculamos la traza

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(MAM^t) &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_1 + 2x_2 \\ x_3 + x_4 & x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} (x_1 + x_2)x_1 + (x_1 + 2x_2)x_2 & (x_1 + x_2)x_3 + (x_1 + 2x_2)x_4 \\ (x_3 + x_4)x_1 + (x_3 + 2x_4)x_2 & (x_3 + x_4)x_3 + (x_3 + 2x_4)x_4 \end{pmatrix} \\
&= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_3x_4 \\
&= (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + (x_3 + x_4)^2 + x_4^2
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\|M\| = \sqrt{2} \text{ si y sólo si } (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + (x_3 + x_4)^2 + x_4^2 = 2$$

Nos piden una matriz que cumpla esa condición, por lo que basta escoger unos valores de las entradas x_1, x_2, x_3 y x_4 que lo cumplan. Nos sirven $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_4 = 0$. Es decir, una matriz de norma $\sqrt{2}$, para el producto escalar dado, es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

8.10. Dados los siguientes productos escalares de $\mathbb{R}^3$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_2 = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

Compruebe que los vectores $u_1 = (1, 1, 0)$ y $u_2 = (1, -1, 1)$ son ortogonales respecto al producto escalar estándar $\langle\, , \rangle_1$ pero no respecto al producto escalar $\langle\, , \rangle_2$.

Solución: Basta calcular los productos escalares, sustituyendo las coordenadas de los vectores en las ecuaciones correspondientes:

$$\langle (1, 1, 0), (1, -1, 1) \rangle_1 = 1 - 1 + 0 = 0,$$

$$\langle (1, 1, 0), (1, -1, 1) \rangle_2 = 3 - 1 + 1 - 1 + 0 = 2 \neq 0$$

por tanto u y v son ortogonales respecto a $\langle\, , \rangle_1$ y no lo son respecto a $\langle\, , \rangle_2$. $\square$

8.11. Dado el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

(a) Determine la matriz de Gram respecto de la base canónica.

(b) Determine un vector $v \in \mathbb{R}^3$, unitario, que forme un ángulo de 45^0 con el vector $(1, -1, 0)$.

Solución: (a) La matriz de Gram en la base canónica $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es $G_{\mathcal{B}} = (\langle v_i, v_j \rangle)$, y $\langle v_i, v_j \rangle$ es el coeficiente de $x_i x_j$ en la ecuación del producto escalar:

$$G_{\mathcal{B}} = (\langle v_i, v_j \rangle) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Si $v = (x, y, z)$ es el vector pedido, tendrá que cumplir

$$\langle (x, y, z), (1, -1, 0) \rangle = \|v\| \cdot \|(1, -1, 0)\| \cdot \cos \frac{\pi}{4} \tag{8.5}$$

Calculamos las normas y productos escalares:

$$\|(1, -1, 0)\|^2 = (1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

La norma del vector v es, por hipótesis, $\|v\| = 1$.

$$\begin{aligned} \langle (x, y, z), (1, -1, 0) \rangle &= (x \ \ y \ \ z) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (3x + y \ \ x + y \ \ 2z) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (8.5) se tiene

$$2x = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \iff x = \frac{1}{2}$$

por lo que v es de la forma $\left(\frac{1}{2}, y, z\right)$. Para que este vector tenga norma 1, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} \left\|\left(\tfrac{1}{2}, y, z\right)\right\|^2 &= \left(\tfrac{1}{2} \ \ y \ \ z\right) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \left(\tfrac{3}{2} + y \ \ \ \tfrac{1}{2} + y \ \ \ 2z\right) \begin{pmatrix} 1/2 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tfrac{3}{4} + y + y^2 + 2z^2 = 1 \end{aligned}$$

Basta tomar dos valores de y y z que cumplan la última ecuación.
Por ejemplo, si $y = 0$ entonces $\frac{3}{4} + 2z^2 = 1$, de donde

$$z^2 = \frac{1}{8} \ \Rightarrow \ z = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Tomando $z = \frac{\sqrt{2}}{4}$, obtenemos el vector

$$v = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

que cumple las condiciones pedidas. □

8.2. Bases ortogonales. Proyección ortogonal.

Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Un conjunto de vectores no nulos $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de V es un **conjunto ortogonal** si los vectores son ortogonales dos a dos, es decir:

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ para todo } i \neq j$$

Un conjunto ortogonal está formado por vectores linealmente independientes.

Una **base ortogonal** de V es una base formada por un conjunto ortogonal, y una **base ortonormal** es una base ortogonal cuyos vectores son unitarios, es decir, de norma 1.

Caracterización: Una base es ortogonal, si y sólo si, la matriz del producto escalar en dicha base es diagonal. Una base es ortonormal, si y sólo si, la matriz del producto escalar en dicha base es la identidad. En un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\, , \rangle)$ la matriz de cambio de base entre bases ortonormales es una matriz ortogonal.

Existencia de bases ortogonales: una base ortogonal es una base de vectores conjugados respecto de la forma bilineal simétrica definida positiva que es el producto escalar. El Teorema de existencia de bases de vectores conjugados (para formas bilineales simétricas) garantiza su existencia y aporta el que hemos llamado Método de construcción directa ([BE], Teorema 7.28). También podemos utilizar otros métodos de diagonalización vistos en el capítulo anterior: Método de diagonalización por congruencia y Método de Lagrange. Utilizando propiedades del producto escalar, se dispone de un método adicional para construir bases ortogonales: el Método de Gram-Schmidt.

Teorema de Gram-Schmidt Sean $(V, \langle\, , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces los vectores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ definidos por

$$\begin{aligned} e_1 &= v_1 \\ e_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, e_1 \rangle}{||e_1||^2}\, e_1 \\ &\ldots \\ e_i &= v_i - \frac{\langle v_i, e_1 \rangle}{||e_1||^2}\, e_1 - \cdots - \frac{\langle v_i, e_{i-1} \rangle}{||e_{i-1}||^2}\, e_{i-1},\ i = 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{8.6}$$

forman una base ortogonal de V y satisfacen

$$L(e_1, \ldots, e_i) = L(v_1, \ldots, v_i) \text{ para todo } \ i = 1, \ldots, n. \tag{8.7}$$

Dada una base ortogonal $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, las coordenadas de un vector $u \in V$, respecto de $\mathcal{B}$, se denominan **coeficientes de Fourier** de u y son los siguientes

$$u = \left(\frac{\langle u, v_1 \rangle}{||v_1||^2}, \ldots, \frac{\langle u, v_n \rangle}{||v_n||^2} \right)_{\mathcal{B}} \tag{8.8}$$

Dado un conjunto de vectores $S \subset V$ se llama **ortogonal de** S, y lo denotaremos por $S^\perp$, al conjunto conjugado de S por $\langle\, , \rangle$. Es decir, $S^\perp$ está formado por los vectores $v \in V$, tales que son ortogonales a todos los de S,

$$S^\perp = \{v \in V : \ v \perp s \text{ para todo } s \in S\}$$

Propiedades del subespacio ortogonal

(1) $S^\perp$ es un subespacio vectorial de V y $L(S)^\perp = S^\perp$.

(2) Si $U = L(v_1, \ldots, v_k)$ entonces $U^\perp = \{v \in V : v \perp v_1, \ldots, v \perp v_k\} = v_1^\perp \cap \cdots \cap v_k^\perp$.

(3) $(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

(4) $(U^\perp)^\perp = U$ y $V = U \oplus U^\perp$.

Dado un subespacio vectorial U de V y un vector $v \in V$, se llama **proyección ortogonal** de v sobre U, y se denota $\mathrm{proy}_U(v)$, al único vector tal que

$$\mathrm{proy}_U(v) \in U \quad \text{y} \quad v - \mathrm{proy}_U(v) \in U^\perp$$

Si $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k\}$ es una base ortogonal de U, entonces

$$\mathrm{proy}_U(v) = \frac{\langle v, u_1\rangle}{||u_1||^2}\, u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_k\rangle}{||u_k||^2}\, u_k$$

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es la base obtenida tras aplicar el Método de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$, entonces $e_1 = v_1$ y

$$e_i = v_i - \mathrm{proy}_{L(e_1,\ldots,e_{i-1})}(v_i) \quad \text{para} \quad i = 2, \ldots, n.$$

La **aplicación proyección ortogonal** sobre U es el endomorfismo $\mathrm{proy}_U : V \to V$ proyección de base U y dirección $U^\perp$. Es decir cumple: $\mathrm{proy}_U(v) = v$ para todo $v \in U$ y $\mathrm{proy}_U(v) = 0$ para todo $v \in U^\perp$.

Distancia definida por un producto escalar

La distancia entre los vectores v y u de define como: $\mathrm{dist}(v, u) = ||v - u||$.

La distancia de un vector v a un subespacio vectorial U se define como:

$$\mathrm{dist}(v, U) = \mathrm{mín}\{||v - u||,\ u \in U\} = \|v - \mathrm{proy}_U(v)\|$$

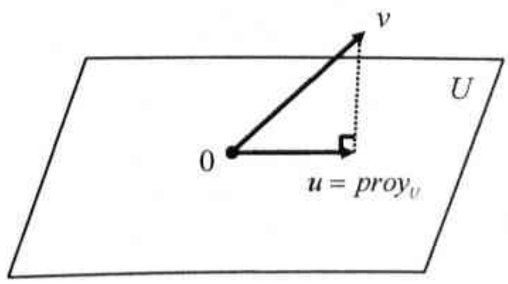


Figura 8.2: El vector u es la proyección ortogonal de v sobre U.

8.12. Dados los siguientes productos escalares de $\mathbb{R}^3$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle_2 = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

y la base $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (0,1,1),\ v_3 = (1,1,1)\}$, utilice el método de Gram-Schmidt para determinar una base ortogonal en los espacios euclídeos $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_1)$ y $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_2)$.

Solución: Comenzamos aplicando el método de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$ en $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_1)$, es decir considerando el producto escalar estándar.

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 = (1,1,0) \\
e_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, e_1\rangle_1}{\langle e_1, e_1\rangle_1} e_1 = (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1),(1,1,0)\rangle_1}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle_1}(1,1,0) \\
&= (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \\
e_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, e_1\rangle_1}{\langle e_1, e_1\rangle_1} e_1 - \frac{\langle v_3, e_2\rangle_1}{\langle e_2, e_2\rangle_1} e_2 \\
&= (0,1,1) - \frac{\langle (1,1,1),(1,1,0)\rangle_1}{\langle (1,1,0),(1,1,0)\rangle_1}(1,1,0) - \frac{\langle (1,1,1),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\rangle_1}{\langle (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\rangle_1}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) \\
&= (1,1,1) - \frac{2}{2}(1,1,0) - \frac{1}{3/2}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

Se obtiene la siguiente base ortogonal respecto al producto escalar $\langle\,,\rangle_1$

$$\mathcal{B}' = \left\{ e_1 = (1,1,0),\ e_2 = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\ e_3 = \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \right\}$$

A continuación aplicamos el método de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$ en $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\rangle_2)$ para obtener una base $\mathcal{B}'' = \{u_1, u_2, u_3\}$ ortogonal .

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = (1,1,0) \\
u_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, u_1\rangle_2}{\langle u_1, u_1\rangle_2} u_1 = (0,1,1) - \frac{2}{6}(1,1,0) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) \\
u_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, u_1\rangle_2}{\langle u_1, u_1\rangle_2} u_1 - \frac{\langle v_3, u_2\rangle_2}{\langle u_2, u_2\rangle_2} u_2 \\
&= (1,1,1) - \frac{6}{6}(1,1,0) - \frac{2}{7/3}\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right) = \left(\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, \frac{1}{7}\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

8.13. En $\mathbb{R}_3[x]$ se considera el producto escalar

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-b}^{b} p(x)q(x)\ dx \quad \text{con} \quad b > 0$$

(a) Determine una base ortogonal utilizando el método de Gram-Schmidt.

(b) Compruebe si la base canónica es ortogonal para algún valor $b \in \mathbb{R}$.

(c) Para $b = 1$ determine un polinomio unitario de grado uno.

Solución: (a) Aplicando el método de Gram-Schmidt a una base cualquiera de $\mathbb{R}_3[x]$ obtendríamos una base ortogonal. Lo hacemos con la base canónica

$$\mathcal{B} = \{p_1 = 1,\ p_2 = x,\ p_3 = x^2\}$$

A partir de $\mathcal{B}$ obtendremos la base ortogonal $\mathcal{B}' = \{q_1,\ q_2,\ q_3\}$ del siguiente modo:

$$q_1 = p_1 = 1$$

$$q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle}\, q_1 = x - \frac{\int_{-b}^{b} x\ dx}{\int_{-b}^{b} 1\ dx}\, q_1 = x - \frac{\left.\frac{x^2}{2}\right]_{-b}^{b}}{\left.x\right]_{-b}^{b}} = x - \frac{b^2-b^2}{2b} = x$$

$$q_3 = p_3 - \frac{\langle p_3, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle}\, q_1 - \frac{\langle p_3, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle}\, q_2 = x^2 - \frac{\int_{-b}^{b} x^2\ dx}{\int_{-b}^{b} 1\ dx} - \frac{\int_{-b}^{b} x^3\ dx}{\int_{-b}^{b} x^2\ dx}\, x$$

$$= x^2 - \frac{\left.\frac{x^3}{3}\right]_{-b}^{b}}{\left.x\right]_{-b}^{b}} - \frac{\left.\frac{x^4}{4}\right]_{-b}^{b}}{\left.\frac{x^3}{3}\right]_{-b}^{b}}\, x = x^2 - \frac{(b^3+b^3)/3}{2b} - \frac{(b^4-b^4)/4}{(b^3+b^3)/3}\, x = x^2 - \frac{1}{3}\, b^2$$

Se obtiene la base ortogonal

$$\mathcal{B}' = \left\{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3}b^2\right\}$$

(b) A la vista de los cálculos hechos en el apartado anterior, podemos afirmar que la base canónica no es ortogonal, respecto de este producto escalar, para ningún $b > 0$ ya que

$$\langle 1,\ x^2\rangle = \int_{-b}^{b} x^2\ dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_{-b}^{b} = \frac{2}{3}b^3 \neq 0 \quad \text{para todo} \quad b > 0$$

También se cumple, que los dos primeros polinomios de la base canónica: $p_1 = 1$ y $p_2 = x$ son ortogonales para todo $b > 0$, y lo mismo ocurre con los polinomios $p_2 = x$ y $p_3 = x^2$ ya que

$$\langle x,\ x^2\rangle = \int_{-b}^{b} x^3\ dx = \frac{b^4 - (-b)^4}{4} = 0 \quad \text{para todo} \quad b > 0$$

(c) Supongamos $b = 1$. Un polinomio de grado uno, $q(x) = a + cx$ con $c \neq 0$, es unitario si

$$\|q(x)\|^2 = \langle q(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} (a + cx)^2\, dx = 1$$

Es decir,

$$\int_{-1}^{1} (a^2 + 2acx + c^2x^2)\, dx = a^2x + acx^2 + \frac{c^2}{3}x^3\Big]_{-1}^{1} = 2a^2 + \frac{2c^2}{3} = 1$$

Como nos piden un polinomio que cumpla esa condición, damos valores para obtener uno. Por ejemplo, tomando $a = 0$, se debe cumplir $\frac{2c^2}{3} = 1$, es decir $c = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$. Entonces,

$$q(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x$$

es un polinomio unitario de grado uno. □

8.14. En $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ se considera el producto escalar

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(XAY^t) \quad \text{con} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine una base ortogonal del subespacio S formado por las matrices simétricas.

Solución: En primer lugar, determinamos una base cualquiera de S y después le aplicamos el Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Las matrices de S son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = aA_1 + bA_2 + cA_3$$

con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que $\{A_1, A_2, A_3\}$ son un sistema generador de S. Es fácil comprobar que las matrices son linealmente independientes, por lo que son una base de S.

Método de Gram-Schmidt aplicado a $\{A_1, A_2, A_3\}$:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \\ B_2 &= A_2 - \frac{\langle A_2, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 \\ B_3 &= A_3 - \frac{\langle A_3, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2\rangle}{\langle B_2, B_2\rangle} B_2 \end{aligned}$$

Calculamos B_2:

$$\begin{aligned}
\langle B_1, B_1\rangle &= \operatorname{tr}(B_1 A B_1^t) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle A_2, B_1\rangle &= \operatorname{tr}(A_2 A B_1^t) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \\
B_2 &= A_2 - \frac{\langle A_2, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 = A_2 + 0B_1 = A_2
\end{aligned}$$

Calculamos B_3:

$$\begin{aligned}
\langle A_3, B_1\rangle = \operatorname{tr}(A_3 A B_1^t) &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle A_3, B_2\rangle = \operatorname{tr}(A_3 A B_2^t) &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \\
\langle B_2, B_2\rangle = \operatorname{tr}(B_2 A B_2^t) &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
B_3 &= A_3 - \frac{\langle A_3, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2\rangle}{\langle B_2, B_2\rangle} B_2 = A_3 - B_1 - \tfrac{1}{2} B_2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La base ortogonal de S obtenida es $\{B_1, B_2, B_3\}$ con

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \square$$

8.15. Determine la ecuación en la base canónica de un producto escalar $\langle\, ,\, \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ para el cual los siguientes vectores sean una base ortogonal

$$u_1 = (1,1,0),\ u_2 = (1,-1,1),\ u_3 = (1,1,1);$$

y, además, se cumpla $\|u_1\| = 1$, $\|u_2\| = \sqrt{2}$ y $\|u_3\| = \sqrt{3}$, siendo $\|\cdot\|$ la norma definida a partir de dicho producto escalar.

Solución: Llamemos $\mathcal{B}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$. La base $\mathcal{B}'$ es ortogonal respecto a un producto escalar, si y sólo si, la matriz del producto escalar en dicha base, $G_{\mathcal{B}'} = (\langle u_i, u_j\rangle)$, es una matriz diagonal. Además, teniendo en cuenta que $\|u_i\|^2 = \langle u_i, u_i\rangle$, se tiene la siguiente matriz

$$G_{\mathcal{B}'} = (\langle u_i, u_j\rangle) = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle u_2, u_2\rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle u_3, u_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como nos piden la ecuación del producto escalar en la base canónica, entonces tenemos que calcular la matriz $G_{\mathcal{B}}$. Para ello, utilizamos la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, que denotamos por $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$, y la relación de congruencia entre las matrices del producto escalar en distintas bases

$$G_{\mathcal{B}} = P^t\, G_{\mathcal{B}'}\, P$$

Calculamos $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ teniendo en cuenta que es la inversa de la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Ésta última, la obtenemos de forma directa, pues sus columnas están formadas por las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ respecto de $\mathcal{B}$:

$$P = (\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la matriz del producto escalar en la base canónica es

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

y la ecuación del producto escalar en $\mathcal{B}$ se obtiene de la siguiente expresión

$$\langle (x_1, x_2, x_3),\ (y_1, y_2, y_3)\rangle = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \square$$

8.16. Calcule los subespacios ortogonales de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$P \equiv \{x_1 + x_2 = 0,\ x_3 + x_4 = 0\},\ R \equiv \{x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0\}$$

Determine la proyección ortogonal del vector $v = (1,1,1,0)$ sobre P y sobre R.

Solución Para calcular el subespacio ortogonal de un subespacio, se procede del mismo modo que al calcular el subespacio conjugado respecto de una forma bilineal simétrica. En primer lugar, determinamos una base. Para los subespacios dados es muy fácil obtenerla de modo directo por la simplicidad de las ecuaciones

$$P = L((1,-1,0,0),\ (0,0,1,-1)) \quad \text{y} \quad R = L((1,-1,0,0))$$

Entonces, el subespacio ortogonal de P es el plano

$$P^\perp = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : (x_1,x_2,x_3,x_4) \perp (1,-1,0,0) \text{ y } (x_1,x_2,x_3,x_4) \perp (0,0,1,-1)\}$$

Dado que no se indica ningún producto escalar, siempre suponemos que se trata del producto escalar estándar

$$\langle (x_1,x_2,x_3,x_4),\ (y_1,y_2,y_3,y_4) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Por tanto, unas ecuaciones implícitas de $P^\perp$ son

$$P^\perp \equiv \{x_1 - x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 0\} \tag{8.9}$$

Del mismo modo, se obtiene el hiperplano $R^\perp$

$$R^\perp = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : (x_1,x_2,x_3,x_4) \perp (1,-1,0,0)\}$$

por lo que una ecuación implícita de este subespacio es

$$R^\perp \equiv \{x_1 - x_2 = 0\} \tag{8.10}$$

Nótese que $R \subset P$ implica $P^\perp \subset R^\perp$; y también se cumple $\mathbb{R}^4 = P \oplus P^\perp = R \oplus R^\perp$.

La proyección ortogonal del vector $v = (1,1,1,0)$ sobre el plano P, que denotamos por $\operatorname{proy}_P(v)$, podemos calcularla de dos formas distintas:

(1) Utilizando coeficientes de Fourier. En este caso sería el método más rápido ya que tenemos una base ortogonal de P: $\mathcal{B}_P = \{v_1 = (1,-1,0,0),\ v_2 = (0,0,1,-1)\}$.

$$\operatorname{proy}_P(v) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle v, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 = \frac{0}{2}(1,-1,0,0) + \frac{1}{2}(0,0,1,-1) = \left(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

(2) A partir de la definición. El vector $\operatorname{proy}_P(v)$ pertenece a P, luego es de la forma $\operatorname{proy}_P(v) = (\lambda, -\lambda, \mu, -\mu)$; y el vector $v - \operatorname{proy}_P(v) = (1-\lambda, 1+\lambda, 1-\mu, \mu)$ pertenece a $P^\perp$, luego tiene que cumplir las ecuaciones (8.9):

$$1 - \lambda - (1+\lambda) = 0,\ 1 - \mu - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,\ \mu = \frac{1}{2}$$

Obviamente, se obtiene el mismo vector $\operatorname{proy}_P(v) = (0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

La proyección de v sobre la recta R utilizando coeficientes de Fourier es

$$\text{proy}_R(v) = \frac{\langle v, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 = 0v_1 = (0,0,0,0)$$

ya que el vector $v_1 = (1,-1,0,0)$ forma una base ortogonal de R (cualquier base de R es una base ortogonal). El vector $\text{proy}_R(v) = (0,0,0,0)$ significa que $v \in R^\perp$.

Observación: Nótese que, aunque $R \subset P$, no tienen por qué coincidir la proyección de v sobre R y sobre P. □

8.17. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$

(a) Determine una base ortogonal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que v_1, v_2 y v_3 pertenezcan al hiperplano $H \equiv \{x_1 + x_2 = 0\}$.

(b) Determine el conjunto formado por los vectores de $\mathbb{R}^4$ cuya proyección ortogonal sobre H sea un vector del plano $P \equiv \{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$ contenido en H.

Solución: Como no se indica ningún producto escalar, se considera el estándar.

(a) Vamos a resolver este apartado teniendo en cuenta lo que nos piden en (b). Para ello, nos interesa calcular una base ortogonal de H, $\mathcal{B}_H = \{v_1, v_2, v_3\}$, tal que $\{v_1, v_2\}$ sea una base ortogonal de P. Determinaremos primero la base ortogonal $\{v_1, v_2\}$ de P y la ampliaremos hasta una base ortogonal de H.

Base ortogonal de P: $\{v_1 = (0,0,1,0),\ v_2 = (0,0,0,1)\}$.
Base ortogonal de H: $\{v_1 = (0,0,1,0),\ v_2 = (0,0,0,1),\ v_3 = (1,-1,0,0)\}$.

Una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ en las condiciones pedidas se obtiene ampliando la base ortogonal de H a la que añadimos un vector de $H^\perp$.

$$H^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ x \perp v_1,\ x \perp v_2, x \perp v_3\}$$

es decir

$$H^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 :\ \langle x, v_1\rangle = 0, \langle x, v_2\rangle = 0, \langle x, v_3\rangle = 0\}$$

de donde se obtienen las ecuaciones

$$H^\perp \equiv \{x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\}$$

Así, podemos tomar $v_4 = (1,1,0,0) \in H^\perp$ y completar la base pedida

$$\mathcal{B} = \{(0,0,1,0),\ (0,0,0,1), (1,-1,0,0),\ (1,1,0,0)\}.$$

En este caso, se puede escoger fácilmente una base ortogonal, a simple vista, por lo que no se debe perder tiempo en buscar una base genérica y luego ortogonalizar.

(b) Sea u un vector no nulo de V. Su proyección sobre H se puede escribir en términos de los coeficientes de Fourier relativos a la base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de H

$$\text{proy}_H(u) = \frac{\langle u, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1 + \frac{\langle u, v_2\rangle}{\langle v_2, v_2\rangle} v_2 + \frac{\langle u, v_3\rangle}{\langle v_3, v_3\rangle} v_3. \tag{8.11}$$

La condición $\text{proy}_H(u) \in P$ se cumple, si y sólo si, $\text{proy}_H(u)$ es combinación lineal de los vectores v_1 y v_2, que son una base ortogonal de P. Esta condición es equivalente a que el coeficiente de v_3 en la ecuación (8.11) sea igual a 0. Es decir

$$\langle u, v_3\rangle = 0$$

Es decir, la proyección ortogonal de u sobre H pertenece a P, si y sólo si, u es ortogonal a $v_3 = (1, -1, 0, 0)$. Entonces, los vectores u que cumplen las condiciones del ejercicio son todos los del hiperplano $v_3^\perp$, que es el subespacio de ecuación

$$\{x_1 - x_2 = 0\} \quad \square$$

8.18. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que 2, se considera el producto escalar

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0).$$

(a) Determine una base ortonormal.

(b) Calcule el subespacio ortogonal de la recta $R = L(x^2 - 1)$.

(c) Calcule la proyección ortogonal del polinomio $x + 1$ sobre el hiperplano $R^\perp$.

Solución:

(a) Para construir una base ortonormal aplicamos el método de Gram-Schmidt a una base cualquiera. Tomamos la canónica $\mathcal{B} = \{p_1 = 1,\ p_2 = x,\ p_3 = x^2\}$:

$$\begin{aligned}
q_1 &= p_1 = 1 \\
q_2 &= p_2 - \frac{\langle p_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = x - \frac{-1+1-0}{1+1+1} = x \\
q_3 &= p_3 - \frac{\langle p_3, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} q_1 - \frac{\langle p_3, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} q_2 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x = x^2 - \frac{2}{3} - \frac{0}{2} x.
\end{aligned}$$

Ya tenemos una base ortogonal para este producto escalar

$$\mathcal{B}' = \left\{q_1 = 1,\ q_2 = x,\ q_3 = x^2 - \frac{2}{3}\right\}$$

Para convertirla en una base ortonormal hay que dividir cada vector por su norma.

$$\begin{aligned}
||q_1||^2 &= \langle q_1, q_1\rangle = q_1(-1)^2 + q_1(1)^2 + q_1(0)^2 = 3 \\
||q_2||^2 &= \langle q_2, q_2\rangle = q_2(-1)^2 + q_2(1)^2 + q_2(0)^2 = 2 \\
||q_3||^2 &= \langle q_3, q_3\rangle = q_3(-1)^2 + q_3(1)^2 + q_3(0)^2 = (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (-\tfrac{2}{3})^2 = \tfrac{2}{3}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{q_1}{\|q_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{q_2}{\|q_2\|} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad \frac{q_3}{\|q_3\|} = \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$$

de donde se obtiene la base ortonormal

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}x, \ \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3} \right\}$$

(b) El subespacio ortogonal de la recta $R = L(x^2 - 1)$ está formado por los polinomios $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tales que $\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \ x^2 - 1 \rangle = 0$.

$$\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \ x^2 - 1 \rangle = (a_0 - a_1 + a_2)0 + (a_0 + a_1 + a_2)0 + a_0(-1) = 0$$

La igualdad se cumple si y sólo si $a_0 = 0$. Por tanto,

$$R^\perp = \{a_1 x + a_2 x^2 : \ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

Es decir, $R^\perp$ está formado por los polinomios cuyo término independiente es 0.

(c) Calculamos la proyección ortogonal del polinomio $x + 1$ sobre el subespacio $R^\perp$. El polinomio $\text{proy}_{R^\perp}(x+1)$ es el único polinomio de $\mathbb{R}_2[x]$ que cumple las siguientes condiciones

$$\text{proy}_{R^\perp}(x+1) \in R^\perp \ \text{ y } \ (x+1) - \text{proy}_{R^\perp}(x+1) \in (R^\perp)^\perp = R$$

De la primera condición, se deduce que $\text{proy}_{R^\perp}(x+1) = a_1 x + a_2 x^2$ y, de la segunda,

$$(x+1) - \text{proy}_{R^\perp}(x+1) = 1 + (1 - a_1)x - a_2 x^2 \in R$$

lo que equivale a

$$1 + (1 - a_1)x - a_2 x^2 = \lambda(x^2 - 1), \ \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}$$

Entonces, se tienen que cumplir las ecuaciones

$$1 = -\lambda, \ 1 - a_1 = 0, \ -a_2 = \lambda$$

de las que se deduce que $a_1 = a_2 = 1$.
Finalmente, la proyección ortogonal de $x + 1$ sobre $R^\perp$ es el polinomio

$$\text{proy}_{R^\perp}(x+1) = x + x^2 \quad \square$$

8.19. Sean $P_1 \equiv \{x + 2y - z = 0\}$ y $P_2 \equiv \{x + 2y + z = 0\}$ dos planos del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$. Considerando el producto escalar estándar, halle una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$, tal que, el subespacio generado por los vectores u_1 y u_2 esté contenido en el plano P_1, y el subespacio generado por los vectores u_1 y u_3 no esté contenido en el plano P_2.

Solución:

Método 1: Utilizando el Método de Gram-Schmidt.

Partimos de una base de $\mathbb{R}^3$, no necesariamente ortonormal, $\{v_1, v_2, v_3\}$ que cumpla las condiciones pedidas a la base $\mathcal{B}$. Es decir tal que

$$P_1 = L(v_1, v_2) \text{ y } L(v_1, v_3) \not\subseteq P_2$$

Para garantizar estas condiciones basta con que $\{v_1, v_2\}$ sea una base de P_1 y $v_1 \notin P_2$.

Al aplicar el método de Gram-Schmidt a esta base, se obtiene una base $\{e_1, e_2, e_3\}$ ortogonal que además satisface las siguientes condiciones:

$$e_1 = v_1, \quad L(e_1, e_2) = L(v_1, v_2), \quad L(e_1, e_2, e_3) = L(v_1, v_2, v_3)$$

Esta condición garantiza que la base ortogonal obtenida cumple las mismas condiciones que la de partida

$$P_1 = L(e_1, e_2) \text{ y } L(e_1, e_3) \not\subseteq P_2$$

Nos sirve la base $\{v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (0, 1, 2),\ v_3 = (0, 0, 1)\}$, y le aplicamos el método de ortogonalización:

$$\begin{aligned}
e_1 &= v_1 = (1, 0, 1) \\
e_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 = v_2 - \frac{\langle (0,1,2), (1,0,1)\rangle}{\langle (1,0,1), (1,0,1)\rangle} e_1 = (0, 1, 2) - \tfrac{2}{2}(1, 0, 1) = (-1, 1, 1) \\
e_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 - \frac{\langle v_3, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2 \\
&= (0, 0, 1) - \frac{\langle (0,0,1), (1,0,1)\rangle}{\langle (1,0,1), (1,0,1)\rangle}(1, 0, 1) - \frac{\langle (0,0,1), (-1,1,1)\rangle}{\langle (-1,1,1), (-1,1,1)\rangle}(-1, 1, 1) \\
&= (0, 0, 1) - \tfrac{1}{2}(1, 0, 1) - \tfrac{1}{3}(-1, 1, 1) = \left(-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

Hemos obtenido la base ortogonal

$$\left\{ e_1 = (1, 0, 1)\,,\ e_2 = (-1, 1, 1)\,,\ e_3 = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \right\}$$

Después, se normalizan los vectores para convertirlos en unitarios y obtener la base ortonormal $u_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, $u_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}$ y $u_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|}$.

$$\left\{ u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ u_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\ u_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \right\}$$

Método 2: Construcción directa de la base.

1º) Tomamos $v_1 \in P_1$ tal que $v_1 \notin P_2$. Nos sirve $v_1 = (1, 0, 1)$.

2º) Calculamos $v_2 \in P_1$ y ortogonal a v_1. El subespacio ortogonal de v_1 es

$$v_1^\perp \equiv \{x + z = 0\}$$

Por tanto

$$v_2 \in P_1 \cap v_1^\perp \equiv \{x + 2y - z = 0,\ x + z = 0\}$$

Nos sirve el vector $v_2 = (1, -1, -1)$.

3º) Calculamos v_3 ortogonal a v_1 y v_2. Es decir

$$v_3 \in v_1^\perp \cap v_2^\perp \equiv \{x + z = 0, x - y - z = 0\}$$

Nos sirve el vector $v_3 = (1, 2, -1)$. Después, habría que normalizar los vectores, igual que se hizo antes, obteniendo una base muy similar. □

8.20. Dado el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$$

Calcule la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 2)$ sobre el plano $P \equiv \{x_1 + x_2 = 0\}$ y sobre la recta $P^\perp$.

Solución: Para calcular los productos escalares utilizaremos la matriz de Gram en la base canónica, $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, que es

$$G_\mathcal{B} = (\langle e_i, e_j \rangle) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Unas ecuaciones paramétricas del plano son $P = \{(\alpha, -\alpha, \beta) :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ y una base es

$$\mathcal{B}_P = \{v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 0, 1)\}$$

El subespacio ortogonal al plano es la recta formada por los vectores $v = (x, y, z)$ ortogonales a v_1 y a v_2. Sus ecuaciones vienen dadas por:

$$\langle v, v_1 \rangle = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2x_3 = 0,$$

$$\langle v, v_2 \rangle = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x_1 = 0$$

Es decir, $P^\perp \equiv \{x_1 = 0, x_3 = 0\}$.

La proyección ortogonal del vector $v = (1,1,2)$ sobre P es un vector de la forma $\text{proy}_P(v) = (\alpha, -\alpha, \beta)$, ya que pertenece a P, y, además, $v - \text{proy}_P(v) \in P^\perp$.

$$v - \text{proy}_P(v) = (1-\alpha, 1+\alpha, 2-\beta) \in P^\perp \quad \Leftrightarrow \quad 1-\alpha = 0,\ 2-\beta = 0$$

Entonces, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ y

$$\text{proy}_P(v) = (1,-1,2)$$

La proyección de v sobre la recta $P^\perp$ es el vector

$$\text{proy}_{P^\perp}(v) = v - \text{proy}_P(v) = (1,1,2) - (1,-1,2) = (0,2,0) \quad \square$$

8.21. Sean $A = \left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ y $\langle\, ,\rangle : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ el producto escalar definido por

$$\langle X, Y\rangle = \text{tr}(XAY^t) \;\text{ con }\; X, Y \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$$

(a) Determine una base del subespacio ortogonal del plano P generado por las matrices

$$B = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

(b) Descomponga la matriz $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ como suma de una matriz de P y una de $P^\perp$.

Solución: (a) Sea $P = L(B,C)$ el plano generado por las matrices B y C. El subespacio ortogonal de P está formado por la matrices $X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ tales que $\langle X, B\rangle = \langle X, C\rangle = 0$. Es decir

$$P^\perp = \{X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) : \text{tr}(XAB^t) = \text{tr}(XAC^t) = 0\}$$

Sea $X = \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{tr}(XAB^t) &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\right)\\
&= \text{tr}\begin{pmatrix}x_1+x_2&x_1+2x_2\\x_3+x_4&x_3+2x_4\end{pmatrix} = x_1+x_2+x_3+2x_4 = 0\\
\text{tr}(XAC^t) &= \text{tr}\left(\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = \text{tr}\left(\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\right)\\
&= \text{tr}\begin{pmatrix}x_1+2x_2&x_1+x_2\\x_3+2x_4&x_3+x_4\end{pmatrix} = x_1+2x_2+x_3+x_4 = 0
\end{aligned}$$

Por tanto, unas ecuaciones implícitas de $P^\perp$ respecto de la base canónica son

$$P^\perp \equiv \{x_1+x_2+x_3+2x_4 = 0,\ x_1+2x_2+x_3+x_4 = 0\} \tag{8.12}$$

Resolviendo el sistema encontramos unas ecuaciones paramétricas de $P^\perp$:

$$x_1 = -\lambda - 3\mu,\ x_2 = \mu,\ x_3 = \lambda,\ x_4 = \mu \ \text{ con } \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

O lo que es lo mismo:

$$P^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} -\lambda - 3\mu & \mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Dando valores a los parámetros podemos determinar una base de $P^\perp$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Dada la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, siempre existen matrices $D_1 \in P$ y $D_2 \in P^\perp$, y son únicas, tales que $D = D_1 + D_2$. La existencia está garantizada por la descomposición en suma directa

$$\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) = P \oplus P^\perp$$

De hecho, $D_1 = \text{proy}_P(D)$ y $D_2 = D - D_1 = \text{proy}_{P^\perp}(D)$. Las calculamos.

Como $D_1 \in P$, entonces es de la forma

$$D_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \ \text{ con } \ a, b \in \mathbb{R}$$

Por otro lado, $D_2 = D - D_1 \in P^\perp$ si sus coordenadas respecto de la base canónica cumplen las ecuaciones (8.12), por lo que

$$D - D_1 = \begin{pmatrix} 1-a & 2-b \\ 3-b & 4-a \end{pmatrix} \in P^\perp \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{l} (1-a) + (2-b) + (3-b) + 2(4-a) = 0 \\ (1-a) + 2(2-b) + (3-b) + (4-a) = 0 \end{array} \right.$$

de donde se obtiene el sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} 14 - 3a - 2b = 0 \\ 12 - 2a - 3b = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad a = \frac{18}{5},\ b = \frac{8}{5}$$

Entonces, las matrices pedidas son:

$$D_1 = \begin{pmatrix} \frac{18}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{18}{5} \end{pmatrix}, \quad D_2 = D - D_1 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \quad \square$$

Podemos comprobar que D_1 y D_2 son ortogonales. En efecto,

$$\langle D_1, D_2 \rangle = \text{tr}(D_1 A D_2^t) = \text{tr} \begin{pmatrix} -\frac{54}{5} & 10 \\ -10 & \frac{54}{5} \end{pmatrix} = 0$$

8.22. Dados el plano $P = L((1,0,2),\ (2,0,-1))$ de $\mathbb{R}^3$ y el vector $v = (1,1,1)$, determine el vector $u \in P$ tal que $\|u - v\|$ sea el valor mínimo posible.

Solución: Se denomina distancia de v al plano P a ese valor mínimo. Es decir,

$$\text{dist}(v, P) = \text{mín}\{\|u - v\| : u \in P\}$$

y ese valor se alcanza cuando u es la proyección ortogonal de v sobre P.

Para calcular la proyección, vamos a utilizar coeficientes de Fourier ya que la base de P es ortogonal:

$$\langle (1,0,2),\ (2,0,-1)\rangle = 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u = \text{proy}_P((1,1,1)) &= \frac{\langle (1,1,1),(1,0,2)\rangle}{\langle (1,0,2),(1,0,2)\rangle}\,(1,0,2) + \frac{\langle (1,1,1),(2,0,-1)\rangle}{\langle (2,0,-1),(2,0,-1)\rangle}\,(2,0,-1) \\ &= \frac{3}{5}(1,0,2) + \frac{1}{5}(2,0,-1) = (1,0,1) \end{aligned}$$

El valor mínimo es $\|u - v\| = \|(1,0,1) - (1,1,1)\| = \|(0,-1,0)\| = 1$. $\square$

8.23. Considerando el producto escalar $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\ dx$ en $\mathbb{R}_3[x]$ y el polinomio $p(x) = x^3 + x$, calcule el polinomio $q(x)$, de grado menor o igual que dos, que minimice el valor

$$\int_0^1 (p(x) - q(x))^2 dx$$

Solución: En primer lugar, observamos la relación del valor a minimizar con el producto escalar:

$$\int_0^1 (p(x) - q(x))^2 dx = \langle p(x) - q(x),\ p(x) - q(x)\rangle = \|p(x) - q(x)\|^2$$

Siendo $p(x)$ un polinomio fijo, el mínimo

$$\text{mín}\{\|p(x) - q(x)\|^2 :\ q(x) \in \mathbb{R}_2[x]\}$$

se alcanza cuando $q(x)$ es la proyección ortogonal de $p(x)$ sobre el subespacio de $\mathbb{R}_3[x]$, $U = \mathbb{R}_2[x]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que 2.

Calculamos esta proyección: $\text{proy}_U(p(x))$ es el único vector que cumple

$$\text{proy}_U(p(x)) \in U \ \text{ y } \ p(x) - \text{proy}_U(p(x)) \in U^{\perp}$$

Por tanto, tenemos que determinar $U^{\perp}$. Para ello consideramos una base de U que es $\{1, x, x^2\}$ y

$$U^{\perp} = \{r(x) \in \mathbb{R}_3[x] :\ \langle r(x), 1\rangle = 0,\ \langle r(x), x\rangle = 0,\ \langle r(x), x^2\rangle = 0\ \}$$

Sea $r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$, entonces $r(x) \in U^\perp$ si y sólo si

$$\langle r(x), 1\rangle = \int_0^1 r(x)dx = a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \frac{1}{4}a_3x^4\Big]_0^1 = 0$$

$$\langle r(x), x\rangle = \int_0^1 xr(x)dx = \frac{1}{2}a_0x^2 + \frac{1}{3}a_1x^3 + \frac{1}{4}a_2x^4 + \frac{1}{5}a_3x^5\Big]_0^1 = 0$$

$$\langle r(x), x^2\rangle = \int_0^1 x^2r(x)dx = \frac{1}{3}a_0x^3 + \frac{1}{4}a_1x^4 + \frac{1}{5}a_2x^5 + \frac{1}{6}a_3x^6\Big]_0^1 = 0$$

de donde se obtiene el sistema lineal

$$\begin{cases} a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{4}a_3 = 0 \\ \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{5}a_3 = 0 \\ \frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{5}a_2 + \frac{1}{6}a_3 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son

$$a_0 = -\lambda,\ a_1 = 12\,\lambda,\ a_2 = -30\,\lambda,\ a_3 = 20\,\lambda$$

Por tanto, unas ecuaciones paramétricas de $U^\perp$ son

$$U^\perp = \{-\lambda + 12\,\lambda\,x - 30\,\lambda\,x^2 + 20\,\lambda\,x^3 :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Para calcular la proyección de $p(x) = x^3 + x$, tenemos en cuenta que $p(x) - \mathrm{proy}_U(p(x))$ pertenece a $U^\perp$, por lo que será de la forma

$$p(x) - \mathrm{proy}_U(p(x)) = -\lambda + 12\,\lambda\,x - 30\,\lambda\,x^2 + 20\,\lambda\,x^3, \quad \text{para algún } \lambda \in \mathbb{R}.$$

El vector $\mathrm{proy}_U(p(x))$ es

$$\mathrm{proy}_U(p(x)) = p(x) - (-\lambda + 12\,\lambda\,x - 30\,\lambda\,x^2 + 20\,\lambda\,x^3) = \lambda + (1 - 12\,\lambda)x + 30\,\lambda\,x^2 + (1 - 20\,\lambda)x^3$$

que por pertenecer a U es un polinomio de grado menor o igual que 2. Es decir, se tiene que cumplir $1 - 20\,\lambda = 0$.

Entonces, si $\lambda = \frac{1}{20}$

$$q(x) = \mathrm{proy}_U(p(x)) = \frac{1}{20} + \frac{2}{5}\,x + \frac{3}{2}\,x^2$$

es el polinomio que minimiza el valor $\displaystyle\int_0^1 (x^3 + x - q(x))^2\, dx$. Este valor es la distancia de $p(x) = x^3 + x$ al subespacio $U = \mathbb{R}_2[x]$ y es igual a

$$\int_0^1 \left(x^3 + x - \frac{1}{20} - \frac{2}{5}\,x - \frac{3}{2}\,x^2\right)^2\, dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{20}\right)^2\, dx = \frac{1}{2800} \quad \square$$

8.24. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ determine la matriz en la base canónica del endomorfismo proyección ortogonal sobre el subespacio

$$U \equiv \{x + y + z = 0\}$$

Solución: La proyección ortogonal sobre $U \equiv \{x + y + z = 0\}$ es la proyección de base el subespacio U y dirección $U^{\perp}$. Por simplificar la notación, llamamos $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a esta proyección.

Recordamos que estos endomorfismos están definidos por la siguiente propiedad:

$$p(v) = v \text{ para todo } v \in U$$

es decir, los vectores del subespacio sobre el que se proyecta quedan fijos, y

$$p(v) = 0 \text{ para todo } v \in U^{\perp}$$

es decir, la dirección de la proyección es el núcleo de p.

En definitiva si formamos una base $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ con $u_1, u_2 \in U$ y $u_3 \in U^{\perp}$, entonces

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ y $f(u_3) = 0$. Por ejemplo, podemos tomar

$$u_1 = (1, -1, 0),\ u_2 = (1, 0, -1),\ u_3 = (1, 1, 1)$$

Ahora, para determinar la matriz en la base canónica $\mathcal{B}$, sólo hay que hacer el cambio de base:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(p) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(p)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}$$

Esto es

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(p) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Esta matriz nos permite calcular la proyección ortogonal de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ sobre U.

Otro modo de resolver el ejercicio consiste en plantear como incógnitas todas las entradas de la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(p)$ e imponer las condiciones $f(u_1) = u_1$, $f(u_2) = u_2$ y $f(u_3) = 0$. $\square$

8.25. Sean $(V, \langle\,,\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y U y W subespacios de V. Denotamos por p_U, $p_{U^\perp}$ y p_W a las proyecciones ortogonales sobre U, $U^\perp$ y W, respectivamente. Demuestre que se cumple

$$p_U + p_{U^\perp} = \mathrm{Id}$$

siendo Id el endomorfismo identidad de V, y

$$p_U \circ p_W = \mathbf{0} \ \text{ si y sólo si } \ W \subseteq U^\perp$$

donde $\mathbf{0}$ denota el endomorfismo nulo de V.

Solución: La descomposición en suma directa $V = U \oplus U^\perp$ garantiza que para todo $v \in V$ existen vectores $u \in U$ y $w \in U^\perp$, y son únicos, tales que $v = u + w$. En estas condiciones, las proyecciones ortogonales $p_U : V \to V$ y $p_{U^\perp} : V \to V$ quedan definidas del siguiente modo:

$$p_U(v) = u \ \text{ y } \ p_{U^\perp}(v) = w, \quad \text{para todo } \ v \in V$$

Entonces,

$$(p_U + p_{U^\perp})(v) = p_U(v) + p_{U^\perp}(v) = u + w = v, \quad \text{para todo } \ v \in V$$

por tanto $p_U + p_{U^\perp} = \mathrm{Id}$.

Para la segunda parte del ejercicio, hacemos la demostración en dos partes:

$\Rightarrow$) Sean U y W subespacios vectoriales de V tales que $p_U \circ p_W$ es la aplicación nula, y sea $v \in W$. Entonces, por un lado $p_W(v) = v$, y por otro $p_U \circ p_W(v) = p_U(v) = 0$. Entonces, por definición de p_U, v es un vector de la dirección de p_U, es decir $v \in U^\perp$. Hemos demostrado que $W \subseteq U^\perp$.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que U y W son subespacios vectoriales de V tales que $W \subseteq U^\perp$. Consideramos la descomposición en suma directa $V = W \oplus W^\perp$ que garantiza que para todo $v \in V$ existen únicos vectores $w \in W$ y $w' \in W^\perp$ tales que $v = w + w'$. Entonces

$$p_U \circ p_W(v) = p_U(w) = 0$$

La última igualdad se cumple porque $w \in W \subseteq U^\perp$. Entonces, $p_U \circ p_W = \mathbf{0}$, como queríamos demostrar. □

8.26. Sean $(V, \langle\,,\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y f un endomorfismo de V. Demuestre que un subespacio U de V es f−invariante si y sólo si

$$\mathrm{proy}_U \circ f \circ \mathrm{proy}_U = f \circ \mathrm{proy}_U$$

Solución: La descomposición en suma directa $V = U \oplus U^\perp$ garantiza que para todo $v \in V$ existen vectores $u \in U$ y $w \in U^\perp$, y son únicos, tales que $v = u + w$. En tal caso, $p_U(v) = u$.

Entonces, para todo $v = u + w$ se cumple que

$$\begin{aligned}(\mathrm{proy}_U \circ f \circ \mathrm{proy}_U)(v) &= \mathrm{proy}_U(f(\mathrm{proy}_U(v))) = \mathrm{proy}_U(f(u)) \ \text{ y} \\ (f \circ \mathrm{proy}_U)(v) &= f(\mathrm{proy}_U(v)) = f(u)\end{aligned}$$

Por tanto, $\mathrm{proy}_U \circ f \circ \mathrm{proy}_U = f \circ \mathrm{proy}_U$, si y sólo si,

$$\mathrm{proy}_U(f(u)) = f(u)$$

Como los vectores fijos de proy_U son los vectores de U, entonces la última igualdad equivale a $f(u) \in U$, para todo $u \in U$. Es decir, U es $f-$invariante. □

8.27. (Teorema de representación de Riesz en dimensión finita). Sea $(V, \langle\,,\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y $f : V \to \mathbb{R}$ una forma lineal. Demuestre que existe un único vector $u \in V$ tal que

$$f(v) = \langle v, u\rangle \quad \text{para todo} \quad v \in V$$

Sugerencia: utilice coordenadas respecto de una base ortonormal.

Solución: Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormal de V y $v \in V$. Las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}$ son los coeficientes de Fourier, que por ser $\mathcal{B}$ ortonormal son

$$v = \langle v, v_1\rangle\, v_1 + \cdots + \langle v, v_n\rangle\, v_n$$

Entonces, por ser f lineal se cumple que

$$f(v) = \langle v, v_1\rangle\, f(v_1) + \cdots + \langle v, v_n\rangle\, f(v_n)$$

Por otro lado, al ser el producto escalar bilineal se tiene que

$$f(v) = \langle v,\ f(v_1)v_1 + \cdots + f(v_n)v_n\rangle$$

Por tanto, el vector $u = f(v_1)v_1 + \cdots + f(v_n)v_n$ cumple la propiedad requerida. □

8.28. Como aplicación del ejercicio anterior, encuentre un polinomio $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$p'(2) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx \quad \text{para todo } p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$$

Solución: Consideramos la forma lineal $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por $f(p(x)) = p'(2)$ y el producto escalar

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

El resultado demostrado en el ejercicio anterior afirma que existe $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $f(p(x)) = p'(2) = \langle p(x), q(x)\rangle$ para todo $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, que es exactamente la condición del enunciado.

Entonces, si $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[x]$, el polinomio buscado es

$$q = f(p_1(x))\, p_1(x) + f(p_2(x))\, p_2(x) + f(p_3(x))\, p_3(x)$$

Para determinar esta base, tenemos en cuenta la base ortogonal que se calculó en el Ejercicio 8.13.

$$\left\{1,\ x,\ x^2 - \frac{1}{3}\right\}$$

y la convertimos en ortonormal.

$$\|1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\, dx = x\big]_{-1}^{1} = 2$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3\bigg]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\|x^2 - \tfrac{1}{3}\|^2 = \langle x^2 - \tfrac{1}{3}, x^2 - \tfrac{1}{3}\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2\, dx = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\bigg]_{-1}^{1} = \frac{8}{45}$$

Entonces, una base ortonormal, para este producto escalar es $\left\{\frac{1}{\|1\|}, \frac{x}{\|x\|}, \frac{x^2-\frac{1}{3}}{\|x^2-\frac{1}{3}\|}\right\}$, que es igual a

$$\left\{p_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2},\ p_2(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x,\ p_3(x) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)\right\}$$

Finalmente, para calcular el polinomio $q(x)$ tenemos en cuenta que

$$f(p_1(x)) = p_1'(2) = 0,\ f(p_2(x)) = p_2'(2) = \frac{\sqrt{6}}{2},\ f(p_3(x)) = p_3'(2) = 3\sqrt{10}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} q(x) &= f(p_1(x))\, p_1(x) + f(p_2(x))\, p_2(x) + f(p_3(x)) \\ &= 0\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{6}}{2}\left(\tfrac{\sqrt{6}}{2}\, x\right) + 3\sqrt{10}\left(\tfrac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1)\right) \\ &= \frac{45}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Entonces, para todo $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ se cumple

$$p'(2) = \int_{-1}^{1} p(x)\left(\frac{45}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}\right) dx = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} p(x)\left(15x^2 + x - 5\right) dx$$

Se deja al lector hacer la comprobación con algún polinomio concreto. □

8.29. En un espacio vectorial real, V, determine un producto escalar que, respecto a una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, cumpla las siguientes condiciones:

(a) $||v_1|| = \sqrt{2}$, $||v_2|| = \sqrt{7}$ y $||v_3|| = \sqrt{4}$.

(b) El subespacio ortogonal de la recta $L(v_3)$ es el plano de ecuación $5x_2 + 4x_3 = 0$.

(c) La proyección ortogonal del vector $v_2 + v_3$ sobre la recta $L(v_1 + v_2 + v_3)$ es el vector $\frac{22}{25}(v_1 + v_2 + v_3)$.

Determine la matriz de Gram del producto escalar en la base $\mathcal{B}$.

Solución: Sea $G_{\mathcal{B}} = (\langle v_i, v_j \rangle)$ la matriz de Gram del producto escalar en la base $\mathcal{B}$. Del apartado (a) deducimos que

$$\langle v_1, v_1 \rangle = ||v_1||^2 = 2, \ \langle v_2, v_2 \rangle = ||v_2||^2 = 7 \ \text{ y } \ \langle v_3, v_3 \rangle = ||v_3||^2 = 4$$

por lo tanto, la matriz simétrica $G_{\mathcal{B}}$ será de la forma

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 7 & d \\ b & d & 4 \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, d \in \mathbb{R}.$$

Consideramos la condición (b) y tomamos dos vectores que sean una base del plano de ecuación $5x_2 + 4x_3 = 0$, por ejemplo

$$u_1 = (1, 0, 0)_{\mathcal{B}} \ \text{ y } \ u_2 = (0, 4, -5)_{\mathcal{B}}$$

Entonces, se tiene que cumplir $\langle v_3, u_1 \rangle = \langle v_3, u_2 \rangle = 0$, es decir

$$\langle v_3, u_1 \rangle = (0 \ \ 0 \ \ 1) \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 7 & d \\ b & d & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \ \ 0 \ \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix} = b = 0$$

$$\langle v_3, u_2 \rangle = (0 \ \ 0 \ \ 1) \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 7 & d \\ 0 & d & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = (0 \ \ 0 \ \ 1) \begin{pmatrix} 4a \\ 28 - 5d \\ 4d - 20 \end{pmatrix} = 4d - 20 = 0 \ \Rightarrow \ d = 5$$

Por tanto,

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ a & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Considerando la condición (c) y aplicando los coeficientes de Fourier para el cálculo de la proyección ortogonal del vector $v_2 + v_3$ sobre la recta $R = L(v_1 + v_2 + v_3)$, tenemos que

$$\text{proy}_R(v_2 + v_3) = \frac{\langle v_2 + v_3, \ v_1 + v_2 + v_3 \rangle}{\langle v_1 + v_2 + v_3, \ v_1 + v_2 + v_3 \rangle} (v_1 + v_2 + v_3) = \tfrac{22}{25}(v_1 + v_2 + v_3)$$

si y sólo si

$$\frac{\langle v_2+v_3,\, v_1+v_2+v_3\rangle}{\langle v_1+v_2+v_3,\, v_1+v_2+v_3\rangle}=\frac{22}{25}$$

Calculamos los productos escalares:

$$\begin{aligned}
\langle v_2+v_3,\, v_1+v_2+v_3\rangle &= (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}2 & a & 0\\ a & 7 & 5\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=a+21\\
\langle v_1+v_2+v_3,\, v_1+v_2+v_3\rangle &= (1\ 1\ 1)\begin{pmatrix}2 & a & 0\\ a & 7 & 5\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2a+23
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{a+21}{2a+23}=\frac{22}{25}$$

por lo que $a=1$ y la matriz del producto escalar queda completamente determinada. La ecuación del producto escalar $\langle\, ,\, \rangle$ de V respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$\langle (x_1,x_2,x_3),\,(y_1,y_2,y_3)\rangle = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 7 & 5\\ 0 & 5 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \quad \square$$

8.3. Semejanza ortogonal de matrices simétricas

Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Un endomorfismo $f : V \to V$ se dice que es simétrico si cumple $\langle u, f(v)\rangle = \langle f(u), v\rangle$ para todo $u, v \in V$. Una caracterización de los endomorfismos simétricos es que su matriz respecto de una base ortonormal es simétrica.

Si f es un endomorfismo simétrico de un espacio vectorial euclídeo, entonces

(1) Todos los autovalores de f son reales.

(2) Los subespacios propios asociados a autovalores distintos son ortogonales.

Teorema espectral: Sea f un endomorfismo simétrico de $(V, \langle,\rangle)$ de dimensión finita, $V \neq 0$. Entonces, existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f.

El mismo resultado en términos matriciales tendría el siguiente enunciado: Toda matriz simétrica real A de orden n es **ortogonalmente diagonalizable**, es decir, existen una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D, tales que $D = P^{-1}AP = P^tAP$. Es decir, que A es, a la vez, congruente y semejante una matriz diagonal D. Las entradas de la diagonal principal de D son los autovalores de A.

Autovalores y signatura. La signatura de una matriz simétrica real A es (p, q), si y sólo si, tiene p autovalores positivos y q autovalores negativos (en ambos casos contados con su multiplicidad).

Regla de Descartes. Sea $p(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$, con $a_n \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, \ldots, n$; un polinomio de grado n que tiene n raíces reales, no necesariamente distintas. Consideramos la sucesión formada por sus coeficientes

$$(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

y eliminamos los que sean iguales a 0. Entonces, el número de raíces positivas de $p(x)$, contadas con su multiplicidad, es igual al número de cambios de signo entre los coeficientes consecutivos de la sucesión obtenida.

Siempre se puede aplicar la Regla de Descartes al polinomio característico de una matriz real simétrica, ya que es un polinomio real de grado n con n raíces reales.

8.30. Sean $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ y $u_1, \ldots, u_n$ vectores de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son las columnas de P, es decir $u_i = (p_{1i}, \ldots, p_{ni})$. Demuestre que P es una matriz ortogonal si y sólo si los vectores $\{u_1, \ldots, u_n\}$ son una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Solución: Si P es la matriz de coordenadas por columnas de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ respecto de la base canónica, lo que denotamos por $P = (u_1|u_2|\cdots|u_n)$, entonces P^t es la matriz de coordenadas por filas del mismo conjunto de vectores. Es decir

$$P^t = \begin{pmatrix} u_1 \\ \hline \vdots \\ \hline u_i \\ \hline \vdots \\ \hline u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ \vdots & & & \\ p_{1i} & p_{2i} & \cdots & p_{ni} \\ \vdots & & & \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

La entrada (i,j) de la matriz P^tP es igual al producto de la fila i de P^t por la columna j de P. Es decir,

$$[P^tP]_{ij} = F_i(P^t)C_j(P) = (p_{1i} \; \cdots \; p_{ni}) \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix} = p_{1i}p_{1j} + \cdots + p_{ni}p_{nj} = \langle u_i, u_j \rangle$$

donde $\langle\, , \,\rangle$ es el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$.

Entonces, la matriz P es ortogonal, si y sólo si, $P^tP = I_n$, lo que equivale a $\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$[1]. Es decir, P es ortogonal, si y sólo si, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal para el producto escalar estándar de $\mathbb{R}^n$. $\square$

8.31. Determine una base ortonormal de autovectores del endomorfismo f de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y calcule una matriz diagonal D, y una ortogonal P, tales que $P^t\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)P = D$.

Solución: Se trata de un endomorfismo real simétrico por lo que la existencia de base ortonormal de autovectores queda garantizada por el Teorema Espectral.

Calculamos los autovalores y subespacios propios asociados. El polinomio característico es

$$\begin{aligned} p_f(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 + 2\,\lambda)(\lambda^2 - 2\,\lambda) \end{aligned}$$

Por tanto, los autovalores y sus multiplicidades algebraicas son

$$\lambda_1 = 0,\; a_1 = 2;\; \lambda_2 = 2,\; a_2 = 1;\; \lambda_3 = -2,\; a_3 = 1$$

Entonces la matriz D será de la forma

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

[1] δ_{ij} es una delta de Kronecker

donde $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es la base ortonormal de autovectores con

$$u_1, u_2 \in V_0, \ u_3 \in V_2, \ u_4 \in V_{-2}$$

y se tiene la descomposición en suma directa ortogonal $\mathbb{R}^4 = V_0 \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} V_{-2}$.

Ecuaciones de los subespacios propios asociados a los autovalores:

V_0 : Unas ecuaciones $V_0 = \mathrm{Ker}(f)$ se obtienen a partir del sistema $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema

$$\{-x_1 + x_2 = 0, \ x_3 + x_4 = 0\}$$

Es fácil extraer una base ortogonal de este subespacio dadas sus ecuaciones. Por ejemplo, la formada por los vectores $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -1)$. Normalizando los vectores tenemos una base ortonormal de V_0:

$$u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \quad u_2 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

V_2 : Unas ecuaciones de $V_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ se obtienen del sistema $(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - 2I_4)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

que es equivalente al sistema lineal $\{x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ -x_3 + x_4 = 0\}$.
Un vector unitario de este subespacio de dimensión 1 es

$$u_3 = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

V_{-2} : Unas ecuaciones de $V_{-2} = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$ se obtienen del sistema $(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) + 2I_4)X = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema lineal homogéneo $\{x_1 + x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ x_4 = 0\}$.
Un vector unitario de este subespacio de dimensión 1 es

$$u_4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$$

La matriz ortogonal P tal que $D = P^t \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)P$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$. Las columnas de esta matriz son las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ respecto de $\mathcal{B}$. Esto es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \square$$

8.32. Compruebe que las siguientes matrices reales son semejantes pero no congruentes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: En primer lugar, observamos que la matriz A es simétrica, pero la matriz B no, por tanto no pueden ser congruentes.

Estudiamos la relación de semejanza. Las matrices A y B son semejantes si y sólo si tienen la misma forma canónica de Jordan. En el caso de la matriz A su forma canónica, $J(A)$, se calculó en el ejercicio anterior

$$J(A) = D = \operatorname{diag}(0, 0, 2, -2)$$

Determinamos la forma canónica de B. Su polinomio característico es

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_4) = \lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4) = \lambda^2(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Por tanto, B tiene los mismos autovalores y con las mismas multiplicidades que A. En este caso, para que B sea semejante a A es suficiente con que sea diagonalizable, es decir, que la multiplicidad geométrica, g_1, del autovalor doble $\lambda_1 = 0$ sea igual a la multiplicidad algebraica, que es igual a 2.

El rango de B es igual a 2 ya que esta matriz sólo tiene dos filas linealmente independientes. Entonces,

$$g_1 = 4 - \operatorname{rg}(B) = 2$$

Así que, B es diagonalizable y su forma canónica de Jordan es $J(B) = D = J(A)$.

Finalmente, podemos afirmar que A y B son semejantes pero no congruentes. $\square$

8.33. Compruebe que las siguientes matrices reales son congruentes pero no semejantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Solución: Las matrices simétricas A y C son congruentes, si y sólo si, tienen la misma signatura.

La signatura de A la deducimos de los cálculos hechos en el ejercicio anterior. Los autovalores de se A son 0 (doble), 2 y -2. Uno positivo y uno negativo, entonces $\text{sg}(A) = (1, 1)$.

Para determinar la signatura de C utilizamos la Regla de Descartes. La podemos aplicar ya que el polinomio característico de C tiene todas sus raíces reales por ser C simétrica.

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_4) = \lambda^4 - \lambda^2$$

Tenemos un único cambio de signo entre los coeficientes no nulos del polinomio, por lo que $\text{sg}(C) = (1, q)$. Por otro lado, 0 es una raíz doble de $p_C(\lambda)$, lo que implica que la cuarta raíz es negativa. Por tanto, $\text{sg}(C) = (1, 1)$, igual a la signatura de A, es decir, A y C son congruentes.

Dada la sencillez del polinomio característico de C, en realidad no era necesario aplicar la Regla de Descartes, ya que se pueden obtener de forma muy sencilla sus raíces, que son los autovalores de C. Estos son:

$$\lambda_1 = 0 \,(\text{doble}), \ \lambda_2 = 1, \ \lambda_3 = -1$$

Las matrices A y C tienen distintos autovalores, por tanto no son semejantes. □

8.34. Utilice la Regla de Descartes para estudiar las posibles relaciones de congruencia entre las siguientes matrices simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

Después, estudie si son semejantes.

Solución: Sabemos que dos matrices simétricas, reales, son congruentes, si y sólo si, tienen la misma signatura. Para determinar la signatura, utilizamos la Regla de Descartes, que es el método más sencillo, pues evita la diagonalización y el cálculo de autovalores. Para ello calculamos los polinomios característicos de cada matriz.

El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda$$

La sucesión de coeficientes no nulos de este polinomio es:

$$-1,\ 4,\ -3$$

Se producen dos cambios de signo entre los elementos consecutivos de esta sucesión, por tanto $p_A(\lambda)$ tiene dos raíces positivas. Por otro lado, vemos que $\lambda = 0$ es raíz simple de $p_A(\lambda)$, por tanto la signatura de A es $(2,0)$.

El polinomio característico de B es

$$p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \frac{8}{3}\lambda^2 - \frac{7}{3}\lambda + \frac{2}{3}$$

La sucesión de coeficientes no nulos de este polinomio es:

$$-1,\ \frac{8}{3},\ -\frac{7}{3},\ \frac{2}{3}$$

Se producen tres cambios de signo entre los elementos consecutivos de esta sucesión, por tanto $p_B(\lambda)$ tiene tres raíces positivas y la signatura de B es $(3,0)$.

El polinomio característico de C es

$$p_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = -\lambda^3 + (\sqrt{2}+2)\lambda^2 - 2\sqrt{2}\lambda$$

La sucesión de coeficientes no nulos de este polinomio es:

$$-1,\ \sqrt{2}+2,\ -2\sqrt{2}$$

Se producen dos cambios de signo entre los elementos consecutivos de esta sucesión, por tanto $p_C(\lambda)$ tiene dos raíces positivas. Por otro lado, vemos que $\lambda = 0$ es raíz simple de $p_C(\lambda)$, por tanto la signatura de C es $(2,0)$.

Concluimos que sólo son congruentes las matrices A y C ya que tienen la misma signatura.

Relación de semejanza:

Dado que las tres matrices son simétricas, es necesario que sean congruentes para que sean semejantes. Entonces, las únicas matrices que podrían ser semejantes son A y C.

Las matrices A y C son semejantes, si y sólo si, tienen la misma forma canónica. Como ambas son simétricas, entonces son diagonalizables, por lo que sus formas canónicas son matrices diagonales cuyos elementos de la diagonal son los autovalores. En definitiva, A y C son semejantes, si y sólo si, tienen los mismos autovalores, es decir si tienen el mismo polinomio característico. Como esta condición no se cumple, $p_A(\lambda) \neq p_C(\lambda)$, entonces A y C no son semejantes. $\square$

8.35. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica congruente con una matriz diagonal $D = \text{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn})$, entonces $d_{11}, \ldots, d_{nn}$ son los autovalores de A.

(b) Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica y todos sus autovalores son positivos, entonces es definida positiva.

(c) Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz no simétrica y todos sus autovalores son positivos, entonces es congruente con I_n.

(d) Dos matrices reales y simétricas de orden n son congruentes, si y sólo si, tienen el mismo número de autovalores positivos y el mismo número de autovalores negativos.

(e) Si una matriz simétrica real de orden n tiene un único autovalor $\lambda \neq 0$ de multiplicidad n, entonces es definida positiva o definida negativa.

Solución:

(a) Falsa. Para poder asegurar que $d_{11}, \ldots, d_{nn}$, son los autovalores de A tiene que ser D semejante a A. Dos matrices semejantes tienen los mismos autovalores, pero dos matrices congruentes pueden tener autovalores distintos. Por ejemplo, las matrices

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

son congruentes pues ambas tienen signatura $(2, 0)$, pero no son semejantes pues tienen distintos autovalores.

(b) Verdadera. El Teorema de espectral nos asegura que A es, a la vez, semejante y congruente a una matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con λ_i, $i = 1, \ldots, n$, los autovalores de A. La matriz D es definida positiva y, por tanto, también lo es A por ser congruente con D.

(c) Falsa. Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ no es simétrica, entonces no puede ser congruente con una matriz simétrica como es el caso de I_n. Eso se cumple con independencia de cómo sean sus autovalores.

(d) Verdadera. Dos matrices reales y simétricas de orden n son congruentes, si y sólo si, tienen la misma signatura. Y la signatura es igual al par (p, q) donde p es el número de autovalores positivos y q el número de autovalores negativos.

(e) Verdadera. Supongamos que A es una matriz simétrica real de orden n que tiene un único autovalor $\lambda \neq 0$ de multiplicidad n. Como A es diagonalizable, entonces, según el Teorema Espectral, es ortogonalmente semejante a la matriz diagonal

$$D = \text{diag}(\lambda, \ldots, \lambda) = \lambda I_n$$

Es decir, existe una matriz ortogonal P tal que $A = PDP^t$. Como $D = \lambda I_n$ es una matriz escalar, entonces conmuta con todas las matrices de orden n, por lo que $A = PDP^t = PP^tD = D$.

La signatura de A es $(n, 0)$ si $\lambda > 0$, o bien $(0, n)$ si $\lambda < 0$. Entonces, A es definida positiva si $\lambda > 0$, o definida negativa si $\lambda < 0$. □

8.36. Demuestre la veracidad de las siguientes afirmaciones:

(a) Si A y B son matrices reales y simétricas con el mismo polinomio característico, entonces son congruentes y semejantes.

(b) Si A y B son matrices reales con el mismo polinomio característico, entonces no tienen por qué ser congruentes.

(b) Si A y B son matrices reales con el mismo polinomio característico, entonces no tienen por qué ser semejantes ni congruentes.

Solución:

(a) Si A y B son matrices reales y simétricas de orden n con el mismo polinomio característico, entonces tienen los mismos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, contados con su multiplicidad. Además, por ser diagonalizables, ambas tienen la misma forma canónica de Jordan, que es la matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, es decir son semejantes. Por otro lado, el Teorema Espectral garantiza la existencia de matrices P_1 y P_2 ortogonales tales que

$$D = P_1^t A P_1 \ \text{ y } \ D = P_2^t B P_2$$

por tanto, A y B son congruentes ya que tendrían la misma signatura. Además, la matriz P tal que $B = P^t A P$ es $P = P_1 P_2^t$ ya que

$$P_2^t B P_2 = P_1^t A P_1 \ \Rightarrow \ P_2 P_2^t B P_2 P_2^t = P_2 P_1^t A P_1 P_2^t \ \Rightarrow \ B = (P_1 P_2^t)^t A \, (P_1 P_2^t)$$

(b) La diferencia entre este apartado y el anterior es que no se exige que las matrices sean simétricas. Esa es la clave. Las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

son matrices reales con el mismo polinomio característico

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 - 2\lambda = p_B(\lambda)$$

Sin embargo, las matrices no son congruentes ya que una es simétrica y la otra no. Es decir, si A simétrica fuese congruente con B, entonces existiría P regular tal que $B = P^t A P$, de donde $B^t = P^t A^t P = P^t A P = B$, por lo que B sería simétrica.

En este caso las matrices sí son semejantes pues la forma canónica de ambas es la matriz $\text{diag}(0, 2)$.

(b) Ya vimos en muchos ejercicios del capítulo 5, que tener el mismo polinomio característico no es una condición suficiente para que dos matrices A y B sean semejantes. Por ejemplo, las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo polinomio característico $(\lambda - 1)^2$, pero no son semejantes pues son dos formas canónicas distintas, y tampoco son congruentes pues una es simétrica y la otra no. $\square$

8.4. Autoevaluación 8

Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

A8.1. Si u y v son vectores de un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\, ,\, \rangle)$, entonces $\langle u, v\rangle \geq 0$ ya que $\langle\, ,\, \rangle$ es una forma bilineal definida positiva.

A8.2. Los vectores $u = (1, 1)$ y $v = (1, -1)$ de $\mathbb{R}^2$ son ortogonales respecto al producto escalar $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

A8.3. El vector $u = (1, 1)$ de $\mathbb{R}^2$ tiene norma igual a $\sqrt{5}$ respecto al producto escalar $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

A8.4. La forma bilineal simétrica $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$ de $\mathbb{R}^2$ no es un producto escalar.

A8.5. En $\mathbb{R}_2[x]$ la forma bilineal simétrica $\langle p, q\rangle = p(10)q(10) + p(100)q(100)$ es un producto escalar.

A8.6. Si u y v son vectores de un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ tales que $||u|| = 3$, $||v|| = 4$ y $||u + v|| = 5$, entonces u y v son ortogonales.

A8.7. En un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ existen vectores unitarios u y v tales que $\langle u, v\rangle = 2$.

A8.8. Si u y v son dos vectores unitarios de un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ que forman un ángulo α, entonces $\langle u, v\rangle = \cos\alpha$.

A8.9. Si u y v son dos vectores no nulos ortogonales de un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\, ,\, \rangle)$, entonces no pueden ser proporcionales.

A8.10. Si la matriz de Gram de un producto escalar respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces, los vectores v_1 y v_3 son ortogonales, y los vectores v_2 y v_3 no.

A8.11. Si la matriz de Gram de un producto escalar respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces, el ortogonal del plano $L(v_1, v_2)$ es la recta $L(v_3)$.

A8.12. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}^3, \langle\, ,\, \rangle)$ tal que la matriz de Gram de $\langle\, ,\, \rangle$ respecto de $\mathcal{B}$ es $G_{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$, entonces $\mathcal{B}$ es una base ortogonal pero no es ortonormal.

A8.13. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortogonal de $(V, \langle\,,\,\rangle)$, entonces las coordenadas de un vector $u \in V$ respecto de $\mathcal{B}$ son $(\langle u\,, v_1\rangle, \ldots, \langle u\,, v_n\rangle)$.

A8.14. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de $(V, \langle\,,\,\rangle)$, entonces las coordenadas de un vector $u \in V$ respecto de $\mathcal{B}$ son $(\langle u\,, v_1\rangle, \ldots, \langle u\,, v_n\rangle)$.

A8.15. Existen productos escalares en $\mathbb{R}^n$ para los cuales la base canónica no es una base ortogonal.

A8.16. La base canónica $\{1, x\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ es una base ortonormal para el producto escalar $\langle p\,, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\; dx$. F

A8.17. La base canónica $\{1, x\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ es una base ortogonal para el producto escalar $\langle p\,, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\; dx$.

A8.18. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de $(V, \langle\,,\,\rangle)$ y U es el subespacio vectorial generado por $v_1, \ldots v_k$, con $k < n$, entonces $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base ortonormal de U.

A8.19. Si $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base ortogonal de un subespacio vectorial U de un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle\,,\,\rangle)$, entonces existe una base ortogonal de V que contiene a $\mathcal{B}_U$.

A8.20. Si $S = \{u, v, w\}$ es un conjunto de vectores no nulos de $(V, \langle\,,\,\rangle)$ linealmente dependientes, entonces S no es un conjunto ortogonal.

A8.21. Una condición necesaria para que una base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial euclídeo sea ortogonal es que la matriz del producto escalar, respecto de dicha base, sea una matriz ortogonal.

A8.22. Una condición necesaria y suficiente para que una base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial euclídeo sea ortogonal es que la matriz del producto escalar, respecto de dicha base, sea una matriz diagonal.

A8.23. La proyección ortogonal del vector $v = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano de ecuación $x + y + z = 0$ es el vector $(2, -1, 1)$.

A8.24. Si la proyección ortogonal del vector $v = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$ sobre un plano P es el vector $u = (0, 2, 0)$, entonces la recta ortogonal a P es la recta generada por el vector $(1, -1, 1)$.

A8.25. Si la proyección ortogonal de un vector v de $(V, \langle\,,\,\rangle)$ sobre un subespacio vectorial U es igual al vector 0, entonces $u \in U^{\perp}$.

A8.26. En $(V, \langle\,,\,\rangle)$ el subespacio ortogonal a una recta es siempre un hiperplano.

A8.27. Si U y $U^{\perp}$ son dos planos de $(V, \langle\,,\,\rangle)$, entonces la dimensión de V es igual a cuatro.

A8.28. Si U y W son dos subespacios vectoriales de $(V, \langle\,,\,\rangle)$ tales que $V = U \oplus W$, entonces $W = U^{\perp}$.

A8.29. La matriz de un producto escalar no puede tener entradas negativas.

A8.30. Toda matriz simétrica real es diagonalizable.

A8.31. Si $f \in \mathcal{BL}(V)$ es una forma bilineal simétrica y A es la matriz de f respecto de alguna base, entonces f es un producto escalar, si y sólo si, A es congruente con la matriz identidad I_n.

A8.32. Si los polinomios característicos de dos matrices simétricas reales A y B son $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 1$ y $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 2$, entonces A y B no son congruentes.

A8.33. Si A y B son dos matrices simétricas reales de orden 3 con autovalores: $\{1, 2, -1\}$ y $\{2, 3, -4\}$, respectivamente, entonces A y B son congruentes pero no semejantes.

A8.34. Si A es una matriz real, simétrica y su traza es igual a 0, entonces no es la matriz de un producto escalar.

A8.35. Si A es una matriz real simétrica cuyo polinomio característico es $p_a(\lambda) = -\lambda^5 - 3\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda + 1$, entonces su signatura es $(3, 2)$.

A8.36. Si el polinomio característico de una matriz A real y simétrica es $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1$, entonces A es la matriz de Gram de un producto escalar de $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 9

Isometrías vectoriales

Este capítulo se dedica a las aplicaciones lineales de un espacio vectorial euclídeo en sí mismo que conservan el producto escalar, a las que se denomina isometrías vectoriales o aplicaciones ortogonales. Formalmente, si V es un espacio vectorial euclídeo y $\langle\, ,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ es el producto escalar definido en V; una **isometría** es una aplicación lineal $f : V \to V$ que cumple la condición:

$$\langle u, v\rangle = \langle f(u), f(v)\rangle, \quad \text{para todo } u, v \in V \tag{9.1}$$

Esta propiedad se enuncia diciendo que f conserva el producto escalar. Si f es una isometría de V se cumplen las siguientes propiedades:

- $\|v\| = \|f(v)\|$, para todo $v \in V$ (f conserva la norma).
- $\measuredangle(u, v) = \measuredangle(f(u), f(v))$, para todo $u, v \in V$ (f conserva el ángulo entre vectores).
- f es biyectiva, es decir, f es un automorfismo de V.
- Las raíces del polinomio característico de f (reales o complejas) tienen módulo igual a 1. Es decir, pueden ser: 1, -1 o complejas conjugadas de la forma $a \pm bi$ con $a^2 + b^2 = 1$. Por tanto, los únicos autovalores posibles son 1 o -1.

Caracterizaciones: Dada $f : V \to V$ una aplicación lineal, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f es una isometría vectorial, es decir, f conserva el producto escalar.

(2) f conserva la norma de los vectores.

(3) f transforma toda base ortonormal en otra base ortonormal.

(4) f transforma una base ortonormal en otra base ortonormal.

(5) La matriz de f respecto de una base ortonormal es una matriz ortogonal.

(6) Si $\mathcal{B}$ es una base cualquiera y $G_{\mathcal{B}}$ la matriz de Gram del producto escalar en V, entonces la matriz de f satisface la condición $G_{\mathcal{B}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)^t\, G_{\mathcal{B}}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Se denomina **grupo ortogonal** de V, $\mathcal{O}(V)$, al conjunto de los isomorfismos ortogonales o isometrías de V que, para la composición de aplicaciones, tiene estructura de grupo no conmutativo. $\mathcal{O}(V)$ es un subgrupo del grupo lineal general $GL(V)$ formado por los automorfismos de V.

Dos isometrías f y g son **métricamente equivalentes**, si y sólo si, existe otra isometría h tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$. Esto equivale a decir que las matrices de f y g sean ortogonalmente semejantes, es decir, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = P^{-1}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)P$ con P ortogonal y $\mathcal{B}$ ortonormal.

Isometrías y subespacios invariantes. Si $f \in \mathcal{O}(V)$ y U es un subespacio vectorial $f-$invariante, entonces $U^{\perp}$ es $f-$invariante. Además, el espacio V se descompone en suma directa ortogonal de rectas y planos $f-$invariantes. La forma de Jordan real de una isometría es una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & & C(\lambda_1) & {\scriptstyle a_1} & & & \\
 & & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & & & C(\lambda_1) & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & C(\lambda_r) \;\; {\scriptstyle a_r} \\
 & & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & C(\lambda_r)
\end{pmatrix}$$

donde $\lambda_j = \cos\theta_j + i\,\mathrm{sen}\,\theta_j$, $C(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\mathrm{sen}\,\theta_j \\ \mathrm{sen}\,\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$, $\theta_j \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

Una simetría $s : V \to V$ de base B y dirección D, subespacios de V tales que $V = B \oplus D$, es una **simetría ortogonal** si $B^{\perp} = D$. Una simetría es una isometría, si y sólo si, es una simetría ortogonal. Además, si B es un hiperplano de V, entonces s se denomina simetría ortogonal **hiperplano**.

Tipos de isometrías. Si A es la matriz de una isometría f respecto de una base ortonormal, entonces: f es una **rotación** si $\det A = 1$ y una **reflexión** si $\det A = -1$. El grupo $\mathcal{O}^{+}(V)$ formado por las rotaciones de V, es un subgrupo del grupo ortogonal $\mathcal{O}(V)$.

Tipos de isometrías en dimensión dos.

Según la forma canónica respecto de una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Simetría ortogonal de base $R = L(v_1)$ — Giro de ángulo $\theta \in [0, 2\pi)$

En un espacio euclídeo de dimensión 2 toda reflexión es una simetría ortogonal y toda rotación es un giro.

Tipos de isometrías en dimensión tres. Hay tres tipos distintos según la forma canónica, respecto de una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ positivamente orientada. Además, cada tipo se identifica por la dimensión del subespacio de vectores fijos $V_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

$\dim V_2 = 2$	$\dim V_1 = 1$	$\dim V_1 = 0$
$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$	$J_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
Simetría ortogonal de base el plano $L(v_1, v_2)$	Giro de eje orientado $\vec{L}(v_1)$ y ángulo θ	Giro de eje orientado $\vec{L}(v_1)$ y ángulo θ compuesto con simetría ortogonal de base $L(v_2, v_3)$ ortogonal al eje.

De estas isometrías son reflexiones: J_1 y J_3; y J_2 es una rotación.

Espacio vectorial euclídeo n–dimensional

Dados dos vectores u y v de igual norma existe una simetría ortogonal hiperplano que transforma uno en otro. Es la simetría ortogonal de base $H = (L(u - v))^{\perp}$. Véase [BE], Proposición 9.18.

Teorema de Cartan-Dieudonné ([BE], Teorema 9.19). Toda isometría f, de un espacio vectorial euclídeo de dimensión n, es igual a la composición de, a lo más, n simetrías ortogonales hiperplano. Además, si $\dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = k$, entonces f es igual a la composición de $n - k$ simetrías ortogonales hiperplano.

Corolario:

- Si $\dim V = 2$, todo giro de ángulo θ es igual a la composición dos simetrías ortogonales hiperplano, que son simetrías respecto a rectas que se cortan en un ángulo $\frac{\theta}{2}$.
- Si $\dim V = 3$, todo giro de ángulo θ es igual a la composición dos simetrías ortogonales hiperplano, que son simetrías respecto a planos que se cortan en un ángulo $\frac{\theta}{2}$.

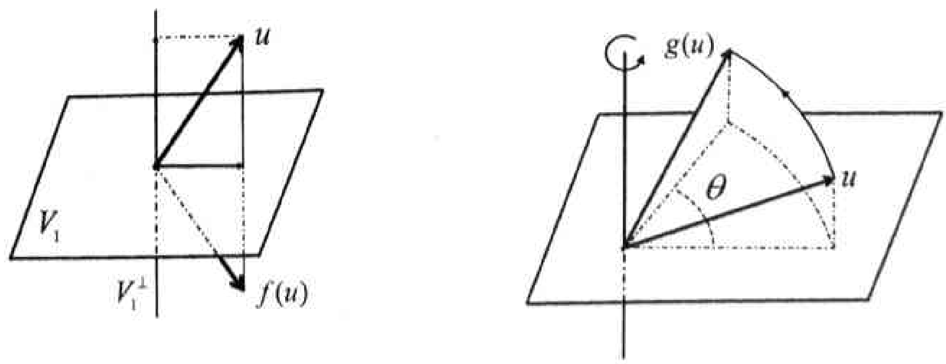


Figura 9.1: Simetría ortogonal hiperplano (izquierda) y giro en $\mathbb{R}^3$ (derecha).

9.1. Sea $(V, \langle\, , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Demuestre que si $f : V \to V$ es una aplicación que preserva el producto escalar, entonces f es lineal.
Sugerencia: demuestre que los vectores $f(x+y) - f(x) - f(y)$ y $f(ax) - af(x)$ tienen norma cero.

Solución: Vamos a demostrar que para todo $x, y \in V$ los vectores $f(x+y) - f(x) - f(y)$ y $f(ax) - af(x)$ tienen norma cero; de lo cual deduciremos que ambos vectores son el vector cero de V, y de ahí podremos concluir que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{y} \quad f(ax) = af(x),$$

lo que equivale a decir que f es una aplicación lineal.

La aplicación f preserva el producto escalar, es decir

$$\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle \text{ para todo } x, y \in V \tag{9.2}$$

Sean $x, y \in V$ vectores cualesquiera, entonces

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|^2 = \langle f(x+y) - f(x) - f(y),\ f(x+y) - f(x) - f(y)\rangle = k$$

Desarrollamos el producto escalar aplicando las propiedades de linealidad, y obtenemos:

$$\begin{aligned} k &= \langle f(x+y), f(x+y)\rangle + \langle f(x+y), -f(x)\rangle + \langle f(x+y), -f(y)\rangle + \\ &\quad + \langle -f(x), f(x+y)\rangle + \langle -f(x), -f(x)\rangle + \langle -f(x), -f(y)\rangle + \\ &\quad + \langle -f(y), f(x+y)\rangle + \langle -f(y), -f(x)\rangle + \langle -f(y), -f(y)\rangle \end{aligned}$$

Continuamos aplicando propiedades de linealidad y simetría, y agrupamos términos para obtener

$$\begin{aligned} k &= \langle f(x+y), f(x+y)\rangle - 2\langle f(x+y), f(x)\rangle - 2\langle f(x+y), f(y)\rangle + 2\langle f(x), f(y)\rangle \\ &\quad + \langle f(x), f(x)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle \end{aligned}$$

Ahora, usamos (9.2), esto es, que f preserva el producto escalar,

$$k = \langle x+y, x+y\rangle - 2\langle x+y, x\rangle - 2\langle x+y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Seguimos aplicando las propiedades de bilinealidad y obtenemos

$$\begin{aligned} k &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle - 2\langle x, x\rangle - 2\langle x, y\rangle - 2\langle x, y\rangle - 2\langle y, y\rangle \\ &\quad + 2\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = 0 \end{aligned}$$

Análogamente se demuestra que $\|f(ax) - af(x)\|^2 = 0$. Para simplificar, llamamos $c = \langle f(ax) - af(x),\ f(ax) - af(x)\rangle$

$$\begin{aligned} c &= \langle f(ax),\ f(ax)\rangle - a\langle f(ax),\ f(x)\rangle - a\langle f(x),\ f(ax)\rangle + a^2\langle f(x),\ f(x)\rangle \\ &= \langle ax,\ ax\rangle - a\langle ax,\ x\rangle - a\langle x,\ ax\rangle + a^2\langle x,\ x\rangle \\ &= a^2\langle x,\ x\rangle - a^2\langle x,\ x\rangle - a^2\langle x,\ x\rangle + a^2\langle x,\ x\rangle = 0 \quad \square \end{aligned}$$

9.2. Sean $(V, \langle\, ,\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión n y f un endomorfismo de V. Si existe una base ortonormal de autovectores de f, y los autovalores de f son 1 y -1, entonces f es una isometría.

Solución: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de autovectores de f, tal que, $f(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, \dots, n$; con $\lambda_i = 1$ o $\lambda_i = -1$. En particular, $\lambda_i^2 = 1$ para $i = 1, \dots, n$.

Vamos a demostrar que f conserva la norma, es decir, que $\|f(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$.

Sea $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, entonces la norma del vector v es

$$\begin{aligned}\|v\|^2 = \langle v, v\rangle &= \langle a_1v_1 + \cdots + a_nv_n,\ a_1v_1 + \cdots + a_nv_n\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_ia_j\langle v_i, v_j\rangle = a_1^2 + \cdots + a_n^2\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos aplicado que $\mathcal{B}$ es ortonormal, es decir $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.

Por otro lado, la norma de $f(v)$ es

$$\begin{aligned}\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle &= \langle a_1f(v_1) + \cdots + a_nf(v_n),\ a_1f(v_1) + \cdots + a_nf(v_n)\rangle \\ &= \langle a_1\,\lambda_1\,v_1 + \cdots + a_n\,\lambda_n\,v_n,\ a_1\,\lambda_1\,v_1 + \cdots + a_n\,\lambda_n\,v_n\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\,\lambda_i\;a_j\,\lambda_j\langle v_i, v_j\rangle = a_1^2\,\lambda_1^2\langle v_1, v_1\rangle + \cdots + a_n^2\,\lambda_n^2\langle v_n, v_n\rangle \\ &= a_1^2\,\lambda_1^2 + \cdots + a_n^2\,\lambda_n^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2\end{aligned}$$

Hemos demostrado que $\|f(v)\|^2 = \|v\|^2$. Además, como $\|f(v)\|$ y $\|v\|$ son valores no negativos, esta igualdad es equivalente a $\|f(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in V$. Como f es lineal y conserva la norma, entonces es una isometría.

El ejercicio se puede demostrar de modo más sencillo viendo que la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ es ortogonal. Hemos procedido de este modo para utilizar las propiedades del producto escalar. $\square$

9.3. Demuestre con un contraejemplo la falsedad de la siguiente afirmación. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de $(V, \langle\, ,\rangle)$. Si f es un endomorfismo de V que conserva la norma de los vectores de $\mathcal{B}$, entonces es una isometría. Es decir, si

$$\|f(v_i)\| = \|v_i\| \text{ para todo } i = 1, \dots, n;$$

entonces f es una isometría.

Solución: El endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de la base canónica, ortonormal, $\mathcal{B} = \{v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,1)\}$, es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cumple las condiciones del enunciado ya que

$$f(1,0) = (1,0), \quad f(0,1) = (1,0)$$

por lo que, $\|f(v_i)\| = \|v_i\| = 1$, para $i = 1,2$.

Sin embargo, f no es una isometría ya que no es biyectivo. Es inmediato ver que no es inyectivo pues hay dos vectores distintos con la misma imagen $f(1,0) = f(0,1)$. □

9.4. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones

(a) No existe ninguna isometría en $\mathbb{R}^2$ que transforme el vector $(1,0)$ en el $(1,1)$.

(b) El endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ definido por $f(1,1) = (1,-1)$, $f(1,-1) = (1,-1)$ es una isometría.

(c) Existe una isometría f de $\mathbb{R}^2$ definida por $f(1,1) = (1,1)$ y $f(1,0) = (-1,0)$.

(d) Si f es un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo $(V;\langle\,,\rangle)$ que transforma la base $\mathcal{B} = \{u,v\}$ ortogonal en la base $\mathcal{B}' = \{u+v, u-v\}$ ortogonal, entonces f es una isometría de V.

Solución:

(a) Verdadera. Las isometrías conservan la norma o longitud de los vectores. En este caso, para el producto escalar estándar se tiene que

$$\|(1,0)\| = 1, \quad \|(1,1)\| = \sqrt{2}$$

Dado que los vectores tienen distinta norma no existe ninguna isometría f de $\mathbb{R}^2$ que cumpla $f(1,0) = (1,1)$.

(b) Falsa. Las isometrías son automorfismos, es decir endomorfismos biyectivos, mientras que la aplicación f dada no es biyectiva. Tenemos que dos vectores distintos $(1,1)$ y $(1,-1)$ tienen la misma imagen por f, por tanto f no es inyectiva y tampoco biyectiva.

(c) Falsa. En una primera inspección vemos que f conserva las normas de los vectores de una base, aunque sabemos que esa no es una condición suficiente. Sin embargo, no conserva los ángulos entre vectores:

$$\begin{aligned} &\measuredangle((1,1),(1,0)) = \tfrac{\pi}{4} \\ &\measuredangle(f(1,1), f(1,0)) = \measuredangle((1,1),(-1,0)) = \tfrac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

(d) Falsa. Con los datos del ejercicio, conocemos a matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$ que no es ortonormal.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por lo que vamos a usar la caracterización (6), pág. 259. La matriz del producto escalar en la base $\mathcal{B}$, ortogonal, es una matriz diagonal

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{con } a > 0 \text{ y } b > 0$$

Entonces, f es isometría si y sólo si $G_{\mathcal{B}} = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)^t\, G_{\mathcal{B}}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Lo comprobamos.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)^t G_{\mathcal{B}}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \neq G_{\mathcal{B}}$$

Por tanto, f no es una isometría. □

9.5. Sean $(V, \langle\, ,\rangle)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión 2, y

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}, \quad \mathcal{B}' = \{u_1 = v_1 + v_2,\ u_2 = 2v_1 + v_2\}$$

dos bases de V, siendo $\mathcal{B}$ ortonormal. Determine si la aplicación lineal f definida por $f(u_1) = 3u_1 - 2u_2$ y $f(u_2) = 5u_1 - 3u_2$ es una isometría.

Solución: Vamos a demostrar que es isometría utilizando distintas caracterizaciones.
(1) Con los datos del ejercicio podemos determinar la matriz de f en la base $\mathcal{B}'$,

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Esta base no es ortonormal ya que

$$\|u_1\| = \|v_1 + v_2\| \neq \|v_2\| = 1$$

por lo que, si queremos utilizar esta matriz para estudiar si f es isometría, tenemos que aplicar la caracterización (6), pág. 259, para lo cual calcularemos la matriz de Gram del producto escalar en la base $\mathcal{B}'$. Sabemos que la matriz de Gram en la base $\mathcal{B}$ es $G_{\mathcal{B}} = I_2$ ya que $\mathcal{B}$ es ortonormal. Hacemos el cambio de base para determinar $G_{\mathcal{B}'}$.

$$G_{\mathcal{B}'} = P^t G_{\mathcal{B}} P \quad \text{con} \quad P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$$

Entonces,

$$G_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

La aplicación f es una isometría si y sólo si $G_{\mathcal{B}'} = \mathfrak{M}^t_{\mathcal{B}'}(f)\, G_{\mathcal{B}'}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$. Lo comprobamos:

$$\mathfrak{M}^t_{\mathcal{B}'}\, G_{\mathcal{B}'}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(2) Utilizando la caracterización (5), pág. 259, vamos a calcular la matriz de f en la base ortonormal $\mathcal{B}$. Para ello determinamos las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ respecto de $\mathcal{B}'$ y aplicamos la linealidad de f.

$$\begin{aligned} v_1 = u_2 - u_1 \quad \Rightarrow \quad f(v_1) &= f(u_2) - f(u_1) = (5u_1 - 3u_2) - (3u_1 - 2u_2) \\ &= 2u_1 - u_2 = 2(v_1 + v_2) - (2v_1 + v_2) = v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 = 2u_1 - u_2 \quad \Rightarrow \quad f(v_2) &= 2f(u_1) - f(u_2) = 2(3u_1 - 2u_2) - (5u_1 - 3u_2) \\ &= u_1 - u_2 = (v_1 + v_2) - (2v_1 + v_2) = -v_1 \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, f es isometría si y sólo si la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ es ortogonal, es decir, si $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)^t = I_2$, lo que se comprueba fácilmente.

(3) Utilizando la caracterización (4), pág. 259, vamos a comprobar que f transforma la base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, en otra base ortonormal $\mathcal{B}'' = \{f(v_1), f(v_2)\}$. Para ello, aprovechamos los cálculos anteriores: $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = -v_1$; por lo que $\mathcal{B}'' = \{v_2, -v_1\}$. Los dos vectores tienen norma 1 y son ortogonales ya que $\langle -v_1, v_2\rangle = -\langle v_1, v_2\rangle = 0$. Luego, $\mathcal{B}''$ es ortonormal. □

9.6. Demuestre que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal y n es impar, entonces

$$\det(A - I_n) = 0 \text{ o bien } \det(A + I_n) = 0$$

Solución: En primer lugar, observamos que $\det(A-I_n) = 0$ significa que 1 es un autovalor de A, y $\det(A + I_n) = 0$ implica que -1 es autovalor de A.

Como el polinomio característico de A, $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \,\mathrm{Id})$ tiene grado n impar, necesariamente tendrá algún autovalor real, que será 1 o -1. Esto se debe a que las raíces complejas, si las hubiera, aparecen por pares conjugados. Si $\lambda = 1$ es raíz de $p_A(\lambda)$, entonces $\det(A - I) = 0$; y si lo es $\lambda = -1$, entonces $\det(A + I) = 0$. □

9.7. Calcule la matriz en la base canónica de la simetría ortogonal de $\mathbb{R}^2$ respecto de la recta R de ecuación $2x + 3y = 0$.

Solución: Podemos calcular la matriz de dos formas distintas:

(1) Utilizando la forma canónica.

La forma canónica de una simetría ortogonal de base una recta es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ tal que $v_1 \in R$ (que es la base de la simetría) y $v_2 \in R^{\perp}$ (que es la dirección). Tomando

$$v_1 = (3, -2) \text{ y } v_2 = (2, 3)$$

y haciendo el cambio de base de $\mathcal{B}'$ a la base canónica $\mathcal{B}$ obtenemos la matriz

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

de donde se obtiene

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

(2) Sabiendo que la simetría deja fijos los vectores de R y transforma en sus opuestos los vectores de $R^{\perp}$, podemos calcular la matriz de f

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

imponiendo que cumpla las condiciones

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

De estas condiciones se obtiene el sistema lineal

$$\begin{cases} 3a - 2b = 3 \\ 3c - 2d = -2 \\ 2a + 3b = -2 \\ 2c + 3d = -3 \end{cases}$$

En realidad son dos sistemas de dos incógnitas independientes, y la solución de cada uno es

$$a = \frac{5}{13}, \; b = c = -\frac{12}{13}, \; d = -\frac{5}{13} \quad \square$$

9.8. Demuestre o refute la veracidad de la siguiente afirmación: ninguna isometría de $\mathbb{R}^2$ tiene una única recta invariante.

Solución: Para toda isometría de $\mathbb{R}^2$ existe alguna base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ respecto de la cual la matriz es alguna de las siguientes

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; J_4 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \; \theta \notin \{0, \pi\}$$

Las rectas invariantes son todas las contenidas en los subespacios propios.

En los dos primeros casos J_1 y J_2 se tienen infinitas rectas invariantes, de hecho toda recta de $\mathbb{R}^2$ es invariante ya que

$$\mathbb{R}^2 = V_1 \text{ para } J_1 \quad \text{o bien} \quad \mathbb{R}^2 = V_{-1} \text{ para } J_2$$

En el tercer caso, las dos rectas invariantes de J_3 son los dos subespacios propios asociados a los dos autovalores: V_1 y V_{-1}. Se cumple $\mathbb{R}^2 = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_{-1}$.

En el último caso, J_4 no tiene ningún autovalor y por tanto ninguna recta invariante.

Finalmente, podemos concluir que ninguna isometría de $\mathbb{R}^2$ tiene una única recta invariante. $\square$

9.9. Dados dos vectores distintos $u, v \in \mathbb{R}^2$ que tengan la misma norma, demuestre que existe una única rotación f tal que $f(u) = v$.

Solución: Supongamos que u y v son dos vectores con la misma norma, pongamos $\|u\| = \|v\| = \rho$, entonces los vectores unitarios $u' = \frac{u}{\|u\|}$ y $v' = \frac{v}{\|v\|}$ son de la forma:

$$u' = \frac{1}{\rho}u, \ v' = \frac{1}{\rho}v,$$

Se cumple que f es una rotación tal que $f(u) = f(v)$ si y sólo si $f(u') = f(v')$, ya que la linealidad de f implica

$$f(u') = f\left(\frac{u}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}f(u), \quad f(v') = f\left(\frac{v}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}f(v)$$

Entonces, vamos a demostrar que existe una rotación de transforma u' en v'. Por ser u' y v' vectores de norma 1, son de la forma (véase la Figura 9.2)

$$u' = (\cos\alpha, \ \operatorname{sen}\alpha), \quad v' = (\cos(\alpha+\theta), \ \operatorname{sen}(\alpha+\theta))$$

En $\mathbb{R}^2$, toda rotación es un giro, y podemos comprobar que el giro f de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$, cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

cumple $f(u') = v'$. En efecto,

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\alpha - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

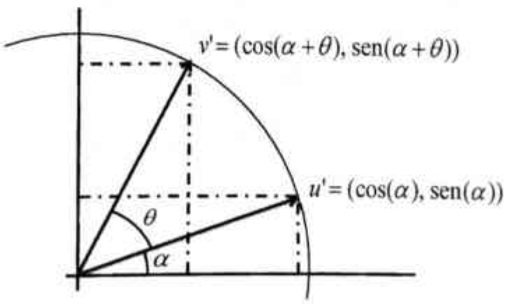


Figura 9.2: Los vectores unitarios u' y v'.

Queda por demostrar la unicidad. Si existiese otro giro f' de ángulo $\theta' \in (0, 2\pi)$ tal que $f'(u') = v'$, entonces

$$\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\operatorname{sen}\theta' \\ \operatorname{sen}\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta') \\ \operatorname{sen}(\alpha+\theta') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\theta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$$

por lo que $\theta = \theta'$, es decir, $f = f'$. $\square$

9.10. Dados dos vectores distintos $u, v \in \mathbb{R}^2$ que tengan la misma norma, demuestre que existe una única reflexión f tal que $f(u) = v$.

Solución: Una reflexión en $\mathbb{R}^2$ es una simetría ortogonal hiperplano, es decir una simetría ortogonal de base una recta R. Es un resultado conocido, ([BE], Proposición 9.18), que si u y v son dos vectores de un espacio vectorial euclídeo V, de igual norma, la simetría ortogonal hiperplano de base $H = (L(u-v))^{\perp}$ transforma u en v, y viceversa, transforma v en u.

Aplicado a esta dimensión, la simetría ortogonal de base la recta $H = L(u-v)^{\perp}$ es una reflexión que transforma u en v. Como u y v tiene la misma norma, entonces los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales (véase el Ejercicio 8.2.), de hecho estos vectores determinan las diagonales del rombo de lados u y v. En definitiva, $H = L(u+v)$. Véase la Figura 9.3.

Vamos a ver que esta reflexión es la única que transforma u en v.

Supongamos que s es una simetría ortogonal de base una recta $L(w)$, tal que $s(u) = v$ y, por tanto, $s(v) = u$. Entonces, el ángulo entre w y u, $\measuredangle(w, u)$, es igual al ángulo entre w y v, $\measuredangle(w, u)$, ya que

$$\langle w, u\rangle = \langle s(w), s(u)\rangle = \langle w, v\rangle$$

implica que

$$\cos \measuredangle(w, u) = \frac{\langle w, u\rangle}{\|w\|\|u\|} = \frac{\langle w, v\rangle}{\|w\|\|v\|} = \cos \measuredangle(w, v)$$

Esto significa que w es un vector que está en la recta bisectriz del ángulo que forman las rectas $L(u)$ y $L(v)$, que es precisamente $L(u+v)$.

Por tanto, se trata de la misma reflexión. $\square$

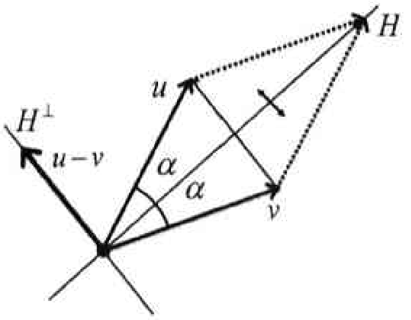


Figura 9.3: Simetría ortogonal de base $H = L(u + v)$.

9.11. Demuestre que el conjunto $\mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ de rotaciones del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ tiene estructura de grupo conmutativo para la composición.

Solución: En primer lugar, vamos a ver que la composición de aplicaciones es una operación interna en $\mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$. Sean $g_1, g_2 \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ dos rotaciones o giros de ángulos θ_1 y θ_2, respectivamente. Vamos a ver que

$$g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 = g$$

siendo g un giro de ángulo $\theta_1 + \theta_2$.

Las matrices de g_1 y g_2 en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ son

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de la composición $g_1 \circ g_2$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g_1)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 \\ \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

Utilizando las fórmulas trigonométricas para el coseno y seno de la suma de dos ángulos, se tiene que,

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g_1)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

que es la matriz del giro de ángulo $\theta_1 + \theta_2$. Además, podemos comprobar fácilmente que la matriz de $g_2 \circ g_1$ coincide con la de $g_1 \circ g_2$, por lo que la composición es conmutativa.

La aplicación identidad es una rotación, pues su matriz tiene determinante igual a 1, y es el elemento neutro para la composición

$$f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$$

Además, todo giro $g \in \mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ de ángulo θ tiene aplicación inversa que es el giro g' de ángulo $2\pi - \theta$ ya que, por lo que acabamos de ver $g \circ g' = g' \circ g$ es el giro de ángulo $\theta + 2\pi - \theta = 2\pi$, y este giro es la aplicación identidad.

Por tanto, $\mathcal{O}^+(\mathbb{R}^2)$ es un subgrupo conmutativo del grupo ortogonal $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. $\square$

9.12. Determine la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la simetría ortogonal de base el plano de ecuación $2x + y + z = 0$.

Solución: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Resolvemos el ejercicio por dos métodos distintos.

Método 1: Usando la forma canónica.

Tomamos una base ortonormal de plano $\{v'_1, v'_2\}$ y la completamos hasta formar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}' = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$. Entonces, la matriz de la simetría ortogonal respecto a dicha base es:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ya que $f(v'_1) = v'_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}'}$, $f(v'_2) = v'_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}'}$, $f(v'_3) = -v'_3 = (0,0,-1)_{\mathcal{B}'}$.

Calculamos la base $\mathcal{B}'$. En primer lugar, tomamos $\{(0,1,-1), (-1,1,1)\}$, una base ortogonal del plano, y añadimos un tercer vector ortogonal a los anteriores, por ejemplo: $(2,1,1)$. Los normalizamos y ya tenemos la base:

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

Para obtener la matriz en la base canónica hacemos el cambio de base.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}$$

La matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$ es una matriz ortogonal, por lo que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} = (\mathfrak{M}^{-1}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}) = \mathfrak{M}^t_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$. Esta matriz es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Finamente se obtiene la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}\, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) (\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}})^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

Podemos comprobar que hemos obtenido una simetría, es decir, se cumple $\mathfrak{M}^2_{\mathcal{B}'}(f) = I_3$.

Observación: podríamos haber resuelto el problema igualmente tomando una base $\mathcal{B}'' = \{u_1, u_2, u_3\}$, tal que $\{u_1, u_2\}$ son una base cualquiera del plano y u_3 un vector de la recta ortogonal al plano. La matriz de la simetría respecto a dicha base es:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ya que se sigue cumpliendo $f(u_1) = u_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}''}$, $f(u_2) = u_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}''}$ y $f(u_3) = -u_3 = (0,0,-1)_{\mathcal{B}''}$. La diferencia está en que, para obtener la matriz en la base canónica, hay que hacer el cambio de base por semejanza, es decir, teniendo en cuenta la matriz de cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}''\mathcal{B}}$ y su inversa P^{-1}. Es decir,

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = P\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(f)P^{-1}$$

La diferencia entre ambos procedimientos es que si tomamos la base ortonormal, no hay que calcular la inversa de P ya que $P^{-1} = P^t$. A cambio hay que dedicar algo más de esfuerzo en el cálculo de la base.

Método 2: Planteamos la matriz de f en la base canónica como una matriz genérica

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

y le imponemos las condiciones:

$$f(0,1,-1) = (0,1,-1),\ f(-1,1,1) = (-1,1,1),\ f(2,1,1) = -(2,1,1)$$

ya que la isometría fija los dos primeros vectores, por pertenecer al plano base, y transforma en el opuesto al vector $(2,1,1)$, por pertenecer a la dirección. La aplicación queda así completamente determinada pues se dan las imágenes de los vectores de una base.

Las condiciones se van imponiendo de una en una. Empezamos con $f(0,1,-1) = (0,1,-1)$.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b-c=0 \\ e-f=1 \\ h-i=-1 \end{array}\right.$$

de donde se tiene que

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ d & e & e-1 \\ g & h & h+1 \end{pmatrix}$$

A esta matriz en la que hemos eliminado tres parámetros le imponemos que fije el segundo vector:

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ d & e & e-1 \\ g & h & h+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -a+2b=-1 \\ -d+2e-1=1 \\ -g+2h+1=1 \end{array}\right.$$

por lo que la matriz queda de la forma

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2b+1 & b & b \\ 2e-2 & e & e-1 \\ 2h & h & h+1 \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

Imponemos la última condición $f(2,1,1) = -(2,1,1)$

$$\begin{pmatrix} 2b+1 & b & b \\ 2e-2 & e & e-1 \\ 2h & h & h+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6b+2=-2 \\ 6e-5=-1 \\ 6h+1=-1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b=-\frac{2}{3} \\ e=\frac{2}{3} \\ h=-\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Sustituyendo estos valores en la matriz (9.4) se obtiene la misma matriz que por el procedimiento anterior. □

9.13. En un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle,\rangle)$, sean s_U la simetría ortogonal de base un subespacio U de V, y p_U la proyección ortogonal de base U. Demuestre que se cumple

$$s_U = 2\,p_U - \mathrm{Id} = \mathrm{Id} - 2\,p_{U^\perp}$$

Utilice este resultado para obtener la matriz de la simetría del ejercicio anterior.

Solución: Si consideramos la descomposición del espacio vectorial $V = U \oplus U^\perp$, se cumple que para todo $v \in V$ existen vectores $u \in U$ y $w \in U^\perp$, y son únicos, tales que $v = u + w$. Estos vectores son

$$u = p_U(v) \;\text{ y }\; w = p_{U^\perp}(v) = v - p_U(v)$$

En tal caso, para la simetría se cumple

$$s(v) = s(u) + s(w) = u - w = p_U(v) - p_{U^\perp}(v) = 2p_U(v) - v = (2p_U - \mathrm{Id})(v)$$

y también

$$s(v) = p_U(v) - p_{U^\perp}(v) = (v - p_{U^\perp}(v)) - p_{U^\perp}(v) = v - 2p_{U^\perp}(v) = (\mathrm{Id} - 2p_{U^\perp})(v)$$

como queríamos demostrar.

Consideramos ahora la simetría ortogonal f del Ejercicio 9.12, cuya base es el plano U de ecuación $2x + y + z = 0$, y dirección la recta $U^\perp = L((2,1,1))$. Calculamos las imágenes de los vectores de la base canónica utilizando que $f = \mathrm{Id} - 2p_{U^\perp}$ y determinamos la proyección utilizando coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0,0) - 2\,p_{U^\perp}(1,0,0) \\ &= (1,0,0) - 2\,\frac{\langle (1,0,0),\,(2,1,1)\rangle}{\langle (2,1,1),\,(2,1,1)\rangle}\,(2,1,1) \\ &= (1,0,0) - 2\,\frac{2}{6}\,(2,1,1) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Obteniendo así la primera columna de la matriz pedida, que podemos ver en (9.3). Del mismo modo, se calcularían las imágenes de $f(0,1,0)$ y $f(0,0,1)$, completando la matriz de la simetría

$$\begin{aligned} f(0,1,0) &= (0,1,0) - 2\,p_{U^\perp}(0,1,0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \\ f(0,0,1) &= (0,0,1) - 2\,p_{U^\perp}(0,0,1) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \quad \square \end{aligned}$$

9.14. Determine la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ del giro g de ángulo $\frac{3\pi}{2}$ y eje la recta R de ecuaciones $\{x+y=0,\ z=0\}$.

Solución: En primer lugar, tenemos que fijar una orientación en el eje de giro. Para lo cual, basta fijar un vector unitario de R. Hay dos opciones:

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \quad \text{o} \quad -v_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Fijamos uno, por ejemplo,

$$R = \overrightarrow{L}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right)$$

Entonces, si $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ es una base ortonormal positivamente orientada de $\mathbb{R}^3$, tal que $v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, la matriz del giro es la forma de Jordan real

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para determinar la base ortonormal positivamente orientada, tomamos un vector unitario ortogonal a v_1, por ejemplo $v_2 = (0,0,1)$; y el vector v_3 igual al producto vectorial de v_1 por v_2. La base $\{v_1, v_2, v_1 \wedge v_2\}$ está positivamente orientada. Calculamos este vector.

$$v_1 \wedge v_2 = \left(\det\begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

A continuación, hacemos el cambio de base para determinar la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$. Si $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$ denota la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, entonces se cumple que es una matriz ortogonal. Es decir, $P^t = P^{-1}$ y

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} = P\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(g)P^{-1} = P\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)P^t$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

de donde se obtiene la matriz

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \square$$

9.15. Demuestre que toda simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$, de base una recta R, es una rotación.

Solución: Sean s la simetría ortogonal de $\mathbb{R}^3$ de base $R = L(v_1)$, con v_1 unitario, y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal. Entonces, la dirección de s es el plano $R^\perp = L(v_2, v_3)$. Por tanto, la matriz de s en la base $\mathcal{B}$ es

$$\mathfrak{M}_\mathcal{B}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $\det \mathfrak{M}_\mathcal{B}(s) = 1$, por lo que, f es una rotación. De hecho, la matriz canónica puede verse del siguiente modo:

$$\mathfrak{M}_\mathcal{B}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \theta = \pi$$

Por lo que s es igual al giro de eje orientado $R = \overrightarrow{L}(v_1)$ y ángulo π. $\square$

9.16. Demuestre que si g es un giro de $\mathbb{R}^3$ de eje una recta R y v es un vector que no pertenece a R, entonces $g(v) - v$ es un vector de $R^\perp$.

Solución: Sea u un vector no nulo de $\mathbb{R}^3$, tal que $R = L(u)$, y v un vector que no pertenece a R. Por definición de giro de eje R, se cumple que $g(u) = u$ pues el eje es el subespacio de vectores fijos.

Vamos a demostrar que el producto escalar $\langle u, g(v) - v\rangle$ es igual a 0, de lo que podremos deducir que los vectores u y $g(v) - v$ son ortogonales.

Dado que el producto escalar es una forma bilineal se cumple que

$$\langle u, g(v) - v\rangle = \langle u, g(v)\rangle - \langle u, v\rangle$$

Por otro lado, como g es una isometría, conserva el producto escalar, es decir

$$\langle u, v\rangle = \langle g(u), g(v)\rangle$$

Además, como $g(u) = u$, se tiene que

$$\langle u, v\rangle = \langle u, g(v)\rangle$$

Por lo que, $\langle u, g(v) - v\rangle = 0$, como queríamos demostrar. $\square$

A continuación, se realizan varios ejercicios en los que se estudia cómo son las isometrías que son composición de un giro y una simetría ortogonal hiperplano en $\mathbb{R}^3$.

9.17. Sea f la isometría de $\mathbb{R}^3$ composición del giro g del Ejercicio 9.14. y la simetría ortogonal s de base el plano P de ecuación $x+y=0$.

(a) Determine s y la composición $f = s \circ g$.

(b) Compruebe que s y g no conmutan, es decir $s \circ g \neq g \circ s$.

(c) Estudie si puede descomponer f como $f = g' \circ s'$ con g' giro cuyo eje sea ortogonal al plano base de la simetría s'.

Solución:

(a) Comenzamos determinando la simetría ortogonal s igual que hicimos en el Ejercicio 9.12. Tomamos una base ortonormal $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{v_1', v_2'\}$ sean base de P. Nos sirve la base

$$\mathcal{B}' = \left\{(0, 0, 1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\}$$

La matriz de la simetría respecto a dicha base es:

$$M_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz en la base canónica, $\mathcal{B}$, se obtiene haciendo el cambio de base.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) &= \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(s)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz de la isometría $f = s \circ g$ en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Comprobamos que g y s no conmutan, es decir, que $g \circ s \neq f$. Para ello, basta hacer el producto matricial $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s)$ y ver que no coincide con la matriz de f.

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g \circ s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

En efecto, $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g \circ s) \neq \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s \circ g)$.

(c) Si $f = s' \circ g'$ con s' una simetría ortogonal de base un plano P, y g' un giro cuyo eje es ortogonal a P, entonces la forma canónica de f es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

En particular, f no tendría vectores fijos no nulos, es decir $\dim V_1 = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = 0$. Estudiamos el rango de la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3$ para determinar la dimensión de V_1.

$$\operatorname{rg}(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} = 1$$

Entonces, $\dim V_1 = 2$, lo que implica que f tiene un plano de vectores fijos, es decir, f es una simetría ortogonal hiperplano de $\mathbb{R}^3$. Una ecuación de plano base de la simetría f se obtiene del sistema lineal $(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3)X = 0$. Se trata el plano $x + y + \sqrt{2}z = 0$.

Finalmente, f no se puede descomponer de la forma indicada en este apartado. □

Observación: Lo que ocurre en este caso es que la composición $f = s \circ g$ es una simetría ortogonal hiperplano, y $f' = g \circ s$ es otra simetría ortogonal hiperplano distinta. El motivo de este resultado reside en que el eje del giro está contenido en el plano base de la simetría. En el siguiente ejercicio se demuestra este hecho de forma general.

9.18. Dadas las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$: g un giro de eje una recta R y s una simetría ortogonal de base un plano P, demuestre que si R está contenida en P, entonces la composición $s \circ g$ es una simetría ortogonal de base un plano. Además, $s \circ g \neq g \circ s$, salvo en el caso en que el ángulo de giro sea igual a π.

Solución: Vamos a determinar la forma canónica de $s \circ g$. Para ello, fijamos una orientación en el eje $R = \vec{L}(v_1)$ y consideramos una base ortonormal del plano P, $\mathcal{B}_P = \{v_1, v_2\}$, que contiene a v_1. La existencia de esta base está garantizada porque $R \subset P$. Completamos la base con un tercer vector, v_3, hasta determinar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ positivamente orientada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Se cumple que

$$R = L(v_1),\ P = L(v_1, v_2),\ R^{\perp} = L(v_2, v_3),\ P^{\perp} = L(v_3)$$

La simetría s deja fijos los vectores de P y transforma los vectores de la dirección, $P^{\perp}$, en sus opuestos, por lo que

$$s(v_1) = v_1,\ s(v_2) = v_2,\ s(v_3) = -v_3$$

y la matriz de s respecto de $\mathcal{B}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El giro g deja fijos los vectores del eje: $g(v_1) = v_1$ y actúa como una rotación de $\mathbb{R}^2$ en el plano $R^{\perp}$, por lo que su matriz respecto de $\mathcal{B}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de la isometría $f = s \circ g$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s \circ g) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

La matriz en la base $\mathcal{B}$ de $g \circ s$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g \circ s) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(g)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

con lo que comprobamos que g y s no conmutan salvo que $\operatorname{sen}\theta = 0$, es decir si $\theta = 0$, en cuyo caso g sería la identidad y el ejercicio no tendría sentido; o bien $\theta = \pi$.

Para demostrar que $f = s \circ g$ es una simetría ortogonal hiperplano, en primer lugar, calculamos su determinante para comprobar que es una reflexión:

$$\det(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s \circ g)) = -(\cos\theta)^2 - (\operatorname{sen}\theta)^2 = -1$$

Por lo que f puede ser una simetría ortogonal de base un plano, o bien, la composición de una simetría ortogonal de base un plano con un giro de eje ortogonal al plano. En el primer caso, f tendría vectores fijos (autovalor 1) y en el segundo caso no.

De la primera columna de la matriz de f, se deduce que v_1 es un vector fijo, por lo que podemos afirmar que f es una simetría ortogonal de base un plano P'.

El plano P' está formado por los vectores fijos: $P' = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Unas ecuaciones de este subespacio se obtienen del sistema lineal $(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3)X = 0$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

La matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3$ tiene rango 1 ya que

$$\det \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix} = 1 - \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 0$$

por lo que sólo tiene una fila linealmente independiente.

Entonces, una ecuación implícita del plano P' respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$P' \equiv \{(\cos\theta - 1)y - \operatorname{sen}\theta\, z = 0\}$$

Con el mismo razonamiento podemos demostrar que $f' = g \circ s$ es una simetría ortogonal hiperplano. En este caso, el plano base de f' es

$$P'' \equiv \{(\cos\theta - 1)y + \operatorname{sen}\theta\, z = 0\} \quad \square$$

9.19. Dadas las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$: g un giro de eje una recta R y s una simetría ortogonal de base un plano P, demuestre que si R no está contenida en P, entonces la composición $f = s \circ g$ es una isometría sin vectores fijos no nulos.

Solución: Sea $f = s \circ g$. En primer lugar, observamos que si R y P son ortogonales, se cumple el resultado trivialmente, pues su forma canónica es la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

que no tiene a 1 por autovalor. Es decir, f no tiene vectores fijos no nulos.

Supongamos que R no es ortogonal a P. Por ser s una simetría se cumple que

$$s^2 = s \circ s = \mathrm{Id} \Rightarrow s = s^{-1}$$

Entonces, $f(v) = s(g(v)) = v$ si y sólo si $s \circ s \circ g(v) = s(v)$. Es decir,

$$f(v) = v \quad \text{si y sólo si} \quad g(v) = s(v) \tag{9.5}$$

Vamos a demostrar que si $g(v) = s(v)$, entonces $v = 0$. La descomposición en suma directa $V = R \oplus P$ garantiza que, para todo v, existen $v_R \in R$ y $v_P \in P$, y son únicos, tales que $v = v_R + v_P$. Entonces,

$$g(v) = g(v_R) + g(v_P) = v_R + g(v_P) \;\; \text{y} \;\; s(v) = s(v_R) + s(v_P) = s(v_R) + v_P$$

Por tanto, si $g(v) = s(v)$, se cumple que

$$g(v_P) - v_P = s(v_R) - v_R$$

Ahora bien, $g(v_P) - v_P \in R^\perp$ (como se demostró en el Ejercicio 9.16.), $s(v_R) - v_R \in P^\perp$ y $R^\perp \cap P^\perp = \{0\}$. Por lo que, $g(v_P) - v_P = 0$, es decir, $g(v_P) = v_P$, lo que contradice que v_P no es un vector del eje de g, salvo si $v_P = 0$.

Ahora bien, si $v_P = 0$, entonces $v = v_R$, es decir, v es un vector del eje de giro. Además, debe cumplir (9.5), por lo que $g(v_R) = v_R = s(v_R)$, y eso es imposible pues los únicos vectores que fija la simetría s pertenecen al plano P.

Finalmente, f no tiene vectores fijos no nulos, como queríamos demostrar. $\square$

9.20. Dadas las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$: g un giro de eje una recta R y ángulo $\theta \notin \{0, \pi\}$ y s una simetría ortogonal de base un plano P, demuestre que s y g conmutan si y sólo si R es ortogonal a P.

Solución: Demostramos la equivalencia en dos partes.

$\Leftarrow$) Supongamos que R es ortogonal a P, entonces respecto de una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $R = \overrightarrow{L}(v_1)$ y $P = L(v_2, v_3)$ se tiene que

$$\mathfrak{M}_\mathcal{B}(s)\,\mathfrak{M}_\mathcal{B}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

y se cumple $\mathfrak{M}_\mathcal{B}(g)\,\mathfrak{M}_\mathcal{B}(s) = \mathfrak{M}_\mathcal{B}(s)\,\mathfrak{M}_\mathcal{B}(g)$. Por tanto, s y g conmutan.

$\Rightarrow$) Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que s y g conmutan y R no es ortogonal a P. En primer lugar, observamos que R no puede estar contenida en P, pues si $R \subset P$ del Ejercicio 9.18. se deduciría que s y g no conmutan.

Consideramos una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $P = L(v_1, v_2)$. Entonces, $P^\perp = L(v_3)$.

Sea $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ un vector del eje de giro, $v \in R \neq L(v_3)$. En particular no se puede dar el caso $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$. Tampoco puede ocurrir $a_3 = 0$, pues en tal caso $v = a_1v_1 + a_2v_2$, que es un vector del plano P, implicaría que R está contenida en P.

Entonces

$$s \circ g(v) = s(g(v)) = s(v) = a_1s(v_1) + a_2s(v_2) + a_3s(v_3) = a_1v_1 + a_2v_2 - a_3v_3$$

y

$$g \circ s(v) = g(s(v)) = g(a_1v_1 + a_2v_2 - a_3v_3)$$

De ambas expresiones se deduce que

$$g(a_1v_1 + a_2v_2 - a_3v_3) = a_1v_1 + a_2v_2 - a_3v_3$$

por lo que $a_1v_1 + a_2v_2 - a_3v_3$ debe ser un vector del eje de g. El eje de giro es

$$R = L(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) \text{ con } (a_1, a_2) \neq (0,0) \text{ y } a_3 \neq 0$$

Estas condiciones hacen que los vectores $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ y $a_1v_1 + a_2v_2 - a_3v_3$ no puedan ser proporcionales, decir $a_1v_1 + a_2v_2 - a_3v_3 \notin R$.

La contradicción viene de suponer $R \neq P^\perp$, por lo que necesariamente $R = P^\perp$. □

9.21. Se consideran las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$: g un giro de eje una recta R, s una simetría ortogonal de base un plano P y $f = s \circ g$. Demuestre que si R no está contenida en P, y no es ortogonal a P, existen un giro g' de eje R' y una simetría s' de base un plano P', ortogonal a R', tales que

$$f = s' \circ g' = g' \circ s'$$

Solución: Para la demostración es suficiente probar que la forma canónica de f es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

En tal caso f es la composición de un giro g' de eje R' y una isometría ortogonal de base un plano P' ortogonal al eje de g' y, además g' y s' conmutan.

Ahora bien, demostrar que la forma canónica de f es como en (9.6) equivale a demostrar que $\lambda = 1$ no es autovalor de f, pues ésta es la única forma canónica, de las tres posibles, con esta propiedad.

La condición $\lambda = 1$ no es autovalor de f es equivalente a que f no tenga vectores fijos no nulos. Esto último queda garantizado aplicando el Ejercicio 9.19. dado que el eje de giro R no está contenido en el plano P. □

9.22. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación que respecto a la base canónica tiene la expresión analítica

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(x - y + \sqrt{2}z,\ -x + y + \sqrt{2}z,\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y\right)$$

Demuestre que es una isometría comprobando que conserva la norma de los vectores, y descríbala geométricamente.

Solución: Dado que la aplicación f es lineal, entonces es una isometría, si y sólo, si conserva la norma. Es decir, si se cumple $\|v\| = \|f(v)\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Sea $v = (x,y,z)$, entonces $\|v\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Calculamos $\|f(v)\|^2$.

$$\|f(v)\|^2 = \frac{1}{4}\left((x - y + \sqrt{2}z)^2 + (-x + y + \sqrt{2}z)^2 + (\sqrt{2}x + \sqrt{2}y)^2\right)$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando la expresión anterior obtenemos:

$$\|f(v)\|^2 = \frac{1}{4}(4x^2 + 4y^2 + 4z^2) = x^2 + y^2 + z^2 = \|v\|^2$$

de donde deducimos que f es una isometría.

Para clasificar f determinamos la dimensión del conjunto de vectores fijos, $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, y para ello necesitamos una matriz de f. La matriz en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rg}(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3) = 3 - \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Es fácil ver que la matriz tiene rango 1 pues todas sus filas son proporcionales. Entonces, f es una simetría ortogonal hiperplano. La base de la simetría es el plano $P = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ formado por los vectores fijos, cuya ecuación se obtiene del sistema lineal $(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3)X = 0$,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, una ecuación de P es

$$P \equiv \{x + y - \sqrt{2}z = 0\} \quad \square$$

9.23. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y f un endomorfismo tal que

$$3f(v_1) = 2v_1 - 2v_2 + v_3, \quad 3f(v_2) = av_1 + v_2 - 2v_3, \quad 3f(v_3) = bv_1 + cv_2 + 2v_3$$

(a) Encuentre los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales f es una isometría vectorial.

(b) Para los valores obtenidos, clasifique el tipo de isometría y describa los elementos geométricos que la caracterizan.

Solución: (a) La matriz de la aplicación lineal f en la base canónica, $\mathcal{B}$, es

$$A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ -2 & 1 & c \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como la base $\mathcal{B}$ es ortonormal, f es una isometría si y sólo si $AA^t = I_3$

$$\begin{aligned} AA^t &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & a & b \\ -2 & 1 & c \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ b & c & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} a^2+b^2+4 & a+bc-4 & 2b-2a+2 \\ a+bc-4 & c^2+5 & 2c-4 \\ 2b-2a+2 & 2c-4 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estudiamos los valores de a, b y c tales que

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} a^2+b^2+4 & a+bc-4 & 2b-2a+2 \\ a+bc-4 & c^2+5 & 2c-4 \\ 2b-2a+2 & 2c-4 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando entradas de ambas matrices se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\left\{ \begin{aligned} 2c-4 &= 0 \\ a+bc-4 &= 0 \\ 2b-2a+2 &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow a=2, b=1, c=2$$

Comprobamos que para estos valores se cumplen las demás ecuaciones:

$$\frac{1}{9}(a^2+b^2+4) = 1, \ \frac{1}{9}(c^2+5) = 1$$

Por lo tanto, f es isometría si y sólo si $a = c = 2$ y $b = 1$.

(b) Para saber de qué tipo de isometría se trata, determinamos la dimensión del subespacio de vectores fijos $\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3)$

$$A - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

A simple vista, se aprecia que la matriz tiene sólo dos filas linealmente independientes, por lo que $\operatorname{rg}(A - I_3) = 2$ y $\dim V_1 = 1$. Es decir, f es un giro.
El eje del giro es el subespacio propio asociado al autovalor 1 cuyas ecuaciones se obtienen a partir del sistema lineal $(A - I_3)X = 0$.

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 2y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right.$$

Resolviendo el sistema obtenemos un vector generador del eje que es la recta

$$R = L((1,0,1))$$

Para determinar el ángulo de giro, θ, fijamos una orientación en el eje, lo cual se hace eligiendo uno de los dos vectores unitarios de R. Por ejemplo, $R = \vec{L}((\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}))$. Entonces, la matriz de f respecto de una base ortonormal $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$, positivamente orientada, tal que $u_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Para la base nos sirven los vectores $u_2 = (0,1,0)$ y $u_3 = u_1 \wedge u_2$, el producto vectorial

$$\mathcal{B}' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

y la matriz de f en la base $\mathcal{B}'$ es

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) &= \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)\,\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^t \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto, g es el giro de eje orientado $\vec{L}(u_1)$ y ángulo θ, tal que, $\cos\theta = \frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. $\square$

9.24. Clasifique y describa geométricamente la isometría de $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación

$$f(x, y, z) = (z, y, x)$$

Solución: La matriz de f en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se ve de forma inmediata que el determinante es igual a -1, por lo que se trata de una reflexión. Necesitamos calcular el subespacio de los vectores fijos, $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, para determinar el tipo de isometría.

$$\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rg}(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3) = 3 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto, hay un plano de vectores fijos que es el subespacio propio asociado al autovalor 1, por lo que f es una simetría ortogonal hiperplano. Una ecuación del plano base de la simetría se obtiene a partir del sistema lineal $(\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) - I_3)X = 0$. Se trata del plano de ecuación

$$\{x - z = 0\} \quad \square$$

9.25. Determine las isometrías vectoriales de $\mathbb{R}^3$ que transforman el plano $y = 0$ en el plano $z = 0$, y viceversa, el plano $z = 0$ en el $y = 0$.

Solución: Respecto de la base canónica $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ los planos son

$$P_{x,z} \equiv \{y = 0\} = L(v_1, v_3), \ P_{x,y} \equiv \{z = 0\} = L(v_1, v_2)$$

Observamos que son ortogonales y se cortan en el eje x, que es la recta $R = L(v_1)$

$$P_{x,z} \cap P_{x,y} = R$$

Véase la Figura 9.4.

Como $R \subset P_{x,z}$, entonces

$$f(R) \subset f(P_{x,z}) = P_{x,y}$$

Por otro lado, como $R \subset P_{x,y}$, entonces

$$f(R) \subset f(P_{x,y}) = P_{x,z}$$

Por tanto,

$$f(R) \subseteq P_{x,z} \cap P_{x,y} = R$$

lo que indica que la recta R es $f-$invariante. Además, como toda isometría es una biyección, se tiene que $f(R) = R$.

Además, como f conserva la norma de los vectores, el vector $f(v_1)$ tendrá norma 1 y, como pertenece a R, se tienen las siguientes opciones:

$$f(v_1) = \pm v_1$$

El vector $v_2 \in P_{x,y}$ y es ortogonal a v_1, luego se transformará en un vector unitario, $f(v_2)$, perteneciente al plano $P_{x,z}$ y ortogonal a $f(v_1) = \pm v_1$. Por tanto,

$$f(v_2) = \pm v_3$$

Con el mismo razonamiento llegamos a la condición

$$f(v_3) = \pm v_2$$

Contemplando todas las opciones se tienen ocho isometrías posibles.

- Isometrías que dejan fijo v_1, es decir $f(v_1) = v_1$.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

s_1: Simetría ortogonal de base $y - z = 0$ | g_1 : Giro de eje R y ángulo $\frac{\pi}{2}$ | g_2 : Giro de eje R y ángulo $\frac{3\pi}{2}$ | s_2 : Simetría ortogonal de base $y + z = 0$

- Isometrías que no fijan v_1, es decir $f(v_1) = -v_1$.

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

g_3: Giro de eje $\{x = 0,\ y = z\}$ y ángulo $\frac{\pi}{2}$ | $g_1 \circ s$ | $g_2 \circ s$ | g_4: Giro de eje $\{x = 0,\ y = -z\}$ y ángulo $\frac{\pi}{2}$

Siendo s la simetría ortogonal de base el plano $L(v_2, v_3)$, de ecuación $x = 0$, cuya matriz es:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Obsérvese que todas las isometrías de la segunda fila resultan de componer las de la primera con s.

Como conclusión, se tienen dos simetrías ortogonales hiperplano: s_1 y s_2; cuatro giros: g_1 a g_4; y dos isometrías del tipo giro compuesto con simetrías hiperplano con eje de giro ortogonal al plano base de la simetría: $g_1 \circ s$ y $g_2 \circ s$. $\square$

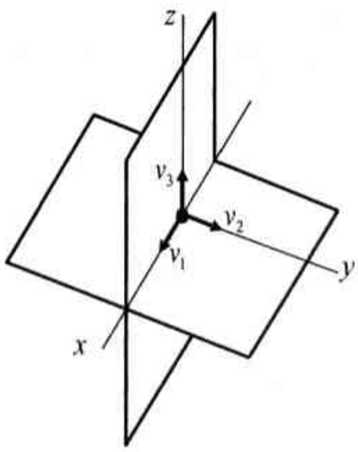


Figura 9.4: La base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y los planos $z = 0$ e $y = 0$.

9.26. Sea f la isometría de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Clasifique la isometría determinando los elementos geométricos que la caracterizan (eje y ángulo de giro y/o base de simetría, según corresponda).

(b) Halle todos los planos f−invariantes que contengan exactamente dos rectas invariantes.

(c) Halle las ecuaciones de una recta invariante cuyos vectores no queden fijos por la isometría. ¿Cuántas hay?

Solución: (a) Para determinar el tipo de isometría calculamos la dimensión del subespacio vectorial de los vectores fijos por f:

$$\dim V_1 = \dim \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 3 - \mathrm{rg}(A - I_3) = 3 - \mathrm{rg}\,\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

Al ser V_1 un plano, entonces f es una simetría ortogonal de base dicho plano.

Unas ecuaciones implícitas del plano base de la simetría f son $(A - I_3)X = 0$, es decir:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las tres filas de la matriz son proporcionales, por lo que se obtiene una única ecuación linealmente independiente que determina el plano

$$V_1 \equiv \{2x + y + z = 0\}$$

La dirección de la simetría es la recta ortogonal a V_1, que es el subespacio propio asociado al autovalor -1,

$$V_{-1} \equiv \{x - 2y = 0,\ y - z = 0\}$$

Se tiene la descomposición en suma directa ortogonal del espacio $\mathbb{R}^3 = V_1 \overset{\perp}{\oplus} V_{-1}$.

(b) Si P es un plano invariante que contiene exactamente dos rectas invariantes, pongamos $R_1 = L(u_1)$ y $R_2 = L(u_2)$, entonces u_1 y u_2 son dos autovectores asociados a autovalores distintos. En este caso, los únicos autovalores posibles son 1 y -1, y la matriz de la restricción de f a P en la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$, de P, debe ser de la forma

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f|_P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, tomando todos los posibles $u_1 \in V_1$ y $u_2 \in V_{-1}$ determinaremos todos los planos pedidos.

El subespacio V_{-1}, en el caso de una simetría ortogonal hiperplano, es la recta ortogonal a la base de la simetría:

$$V_{-1} = V_1^{\perp} = L((2,1,1)) \Rightarrow u_2 = (2,1,1)$$

Los vectores del plano V_1 se obtienen resolviendo la ecuación lineal $2x + y + z = 0$ y son de la forma

$$V_1 = \{(\alpha, \beta, -2\alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Entonces, los planos pedidos son de la forma:

$$P_{\alpha,\beta} = L((\alpha, \beta, -2\alpha - \beta),\ (2,1,1)) \quad \text{con} \quad (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

se trata del haz de planos que contiene a la recta $L((2,1,1))$.

(c) Toda recta invariante, R, está generada por un autovector. Es decir, $R = L(v)$ con $v \neq 0$ y $v \in V_1$ o $v \in V_{-1}$. Si los vectores de R no pueden quedar fijos por la isometría, entonces $v \in V_{-1}$ y, por tanto, $R = V_{-1}$ es la única recta que cumple esa condición. □

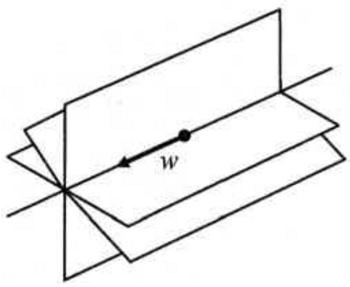


Figura 9.5: Algunos planos del haz que contiene a la recta generada por el vector w.

9.27. Describa geométricamente las isometrías de $\mathbb{R}^3$ que tienen infinitos planos invariantes.

Solución: En dimensión tres, siendo los planos hiperplanos, se cumple que un endomorfismo tiene infinitos planos invariantes, si y sólo si, tiene infinitas rectas invariantes. Para ello, es necesario que tenga algún autovalor real múltiple, $\lambda = 1$ o $\lambda = -1$, con $\dim V_\lambda \geq 2$.

Así, si la isometría no es la identidad, respecto de alguna base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ las posibles formas de Jordan son:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Primer caso: J_1. Se trata de una simetría ortogonal de base el plano $P = L(v_1, v_2)$. Además de P, son invariantes todos los planos perpendiculares a P que son de la forma

$$P_{a,b} = L(av_1 + bv_2) \oplus L(v_3), \quad (a,b) \neq (0,0)$$

cada plano $P_{a,b}$ contiene exactamente dos rectas invariantes:

$$L(v_3) \quad \text{y} \quad R_{a,b} = P_{a,b} \cap P$$

$P_{a,b}$ es el haz de planos que contiene al eje, la recta $L(v_3)$.

Segundo caso: J_2. Se trata de un giro de eje la recta $R = L(v_1)$ y ángulo π. Son invariantes todos los planos que contienen al eje de giro, $L(v_1)$, y el plano perpendicular al eje $P = L(v_2, v_3)$. Los planos que contienen al eje son de la forma

$$P_{c,d} = L(cv_2 + dv_3) \oplus L(v_1), \quad (c,d) \neq (0,0)$$

Tercer caso: J_3. Se trata de una simetría s de base el plano $L(v_2, v_3)$ compuesta con el giro g de eje $L(v_1)$ y ángulo π. Este giro tiene como forma canónica J_2. La composición conmutable $s \circ g = g \circ s$ es

$$J_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Este tipo de isometría se denomina simetría central, y en particular es una homotecia de razón -1:

$$f(v) = -v, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^3$$

Todos los vectores de $\mathbb{R}^3$ son autovectores asociados al mismo autovalor, por lo que todos subespacios de $\mathbb{R}^3$ son invariantes. $\square$

9.28. Dadas R_1 y R_2, dos rectas distintas de $\mathbb{R}^3$ determine una isometría que transforme R_1 en R_2 y no deje fija ninguna recta de $\mathbb{R}^3$.

Solución: Sea θ el ángulo ente las rectas R_1 y R_2. Consideremos dos vectores unitarios u_1 y u_2 tales que $R_1 = L(u_1)$ y $R_2 = L(u_2)$. Si u_3 es un vector ortogonal al plano $P = L(u_1, u_2)$ que contiene a las rectas R_1 y R_2, entonces el giro, g, de eje $E = L(u_3)$ y ángulo θ transforma R_1 en R_2. Véase la Figura 9.6. Esta isometría no nos sirve pues fija una recta de $\mathbb{R}^3$, el eje de giro.

Si componemos el giro anterior con la simetría ortogonal de base el plano P, ortogonal al eje del giro, entonces sí obtenemos la isometría deseada. En efecto, la simetría s dejaría fijas las rectas R_1 y R_2 por estar contenidas en P, por lo que

$$s \circ g(R_1) = s(R_2) = R_2$$

Además, la composición conmutable $s \circ g$ no fija ninguna recta ya que su forma canónica es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Es decir, 1 no es autovalor de $s \circ g$. $\square$

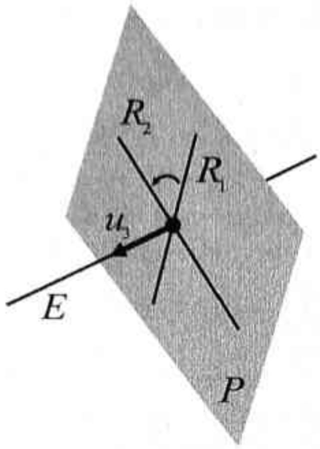


Figura 9.6: El plano P contiene a R_1 y R_2 y es perpendicular a E.

9.29. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^5$ determine la simetría ortogonal hiperplano que transforma el vector $u = (1,0,1,0,0)$ en el vector $v = (1,0,0,1,0)$.

Solución: La isometría viene descrita, en general, en la demostración de ([BE], Proposición 9.18). Su existencia está garantizada por el hecho de que los vectores u y v tienen la misma norma. Se trata de la simetría ortogonal, s, de base el hiperplano

$$H = (L(u-v))^{\perp} \quad \text{con} \quad u - v = (0,0,1,-1,0)$$

El hiperplano H está formado por los vectores $(x_1, \dots, x_5)$ tales que son ortogonales a $u - v$. Es decir, los vectores que cumplen la condición cumplen

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (0,0,1,-1,0) \rangle = x_3 - x_4 = 0$$

lo que determina una ecuación implícita de H.

La matriz de la simetría s, respecto de una base ortonormal $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, donde $u_1, u_2, u_3, u_4 \in H$ y $u_5 \in H^{\perp}$ es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ya que $f(u_i) = u_i$ para todo $u_i \in H$, y $f(u_5) = -u_5$, pues u_5 pertenece al subespacio dirección de la simetría, que es la recta $H^{\perp} = L(u - v)$.

Una base tal es la formada por los vectores

$$u_1 = (1,0,0,0,0),\ u_2 = (0,1,0,0,0),\ u_3 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),\ u_4 = (0,0,0,0,1)$$

$$u_5 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

La matriz de la simetría en la base canónica $\mathcal{B}$ es $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(s)\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'}$. Dado que la base $\mathcal{B}'$ es ortonormal, se tiene que la matriz de cambio de base $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$ es una matiz ortogonal y

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} = \mathfrak{M}^{-1}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \mathfrak{M}^{t}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$$

Entonces

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{t}$$

de donde se obtiene

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que la matriz transforma el vector u en el vector v. □

9.30. Demuestre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, $f \neq \text{Id}$. Si $\mathbb{R}^3$ se descompone en suma directa de rectas $f-$invariantes, entonces f es una simetría ortogonal.

(b) Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ tal que el polinomio característico de f tiene sólo una raíz real. Entonces, f es un giro si y sólo si f tiene una recta de vectores fijos.

(c) Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ y el subespacio formado por los vectores fijos por f es un hiperplano de $\mathbb{R}^n$, entonces f es una simetría ortogonal hiperplano.

(d) La composición de dos simetrías ortogonales hiperplano de $\mathbb{R}^3$ cuyas bases son dos planos ortogonales, es igual a un giro de ángulo π.

Solución:

(a) Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, $f \neq \text{Id}$, y R_1, R_2 y R_3 tres rectas $f-$invariantes tales que

$$\mathbb{R}^3 = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$$

Consideramos un vector generador de cada recta: $R_i = L(v_i)$, $i = 1, 2, 3$. Como las rectas R_i son $f-$invariantes, los vectores v_i son autovectores. Además, como los únicos autovalores posibles de una isometría son 1 y -1, entonces, respecto de la base $\{v_1, v_2, v_3\}$, reordenando los vectores si fuese necesario, la matriz de f es de alguna de las siguientes formas

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad J_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Los dos primeros casos son simetrías ortogonales: hiperplano en el primer caso y de base una recta en el segundo. Pero el tercer caso no es una simetría ortogonal. Por tanto, la afirmación (a) afirmación es falsa.

(b) Sea $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ tal que el polinomio característico de f tiene raíces complejas, no reales. Estas raíces son de la forma $\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta$ con $\theta \notin \{0, \pi\}$. La tercera raíz, la real, es igual a 1 o -1. La isometría f es un giro, si y sólo si, su forma canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

lo que equivale a decir que 1 es autovalor simple de f, es decir, f tiene una recta de vectores fijos. Por tanto, la afirmación (b) es verdadera.

(c) Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ y H es el hiperplano formado por los vectores fijos por f, entonces $H = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$. Por ser f una isometría, el subespacio ortogonal a H es una recta $f-$invariante, $R = L(v)$, no contenida en H. El vector v es un autovector que no pertenece a $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$, por lo que está asociado al autovalor -1. Finalmente, la forma canónica de f respecto de una base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_H \cup \{v\}$, con $\mathcal{B}_H$ una base de H, es $\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, -1)$, por lo que f es una simetría ortogonal hiperplano. El subespacio H es la base de la simetría y $R = H^{\perp}$ la dirección. Por tanto, la afirmación (c) es verdadera.

(d) Sean s_1 y s_2 dos simetrías ortogonales hiperplano de $\mathbb{R}^3$ cuyas bases son los planos ortogonales P_1 y P_2, respectivamente. Sea $R = L(v_1)$ la recta intersección de ambos planos. Consideramos una base ortonormal de cada plano que contenga a v_1:

$$\mathcal{B}_{P_1} = \{v_1, v_2\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_{P_2} = \{v_1, v_3\}$$

Se cumple que $P_1^{\perp} = L(v_3)$ y $P_2^{\perp} = L(v_2)$, por lo que las matrices de las aplicaciones, respecto de la base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, son

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(s_1 \circ s_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces, $s_2 \circ s_2$ es un giro de eje $\overrightarrow{L}(v_1)$ y ángulo π. Entonces, la afirmación (d) es correcta. $\square$

9.1. Autoevaluación 9

Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{O}(V)$ el grupo ortogonal formado por las isometrías vectoriales de V. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

A9.1. Si $f : V \to V$ es una aplicación que conserva la norma de los vectores, entonces f es una isometría.

A9.2. Si $f : V \to V$ es una aplicación lineal que conserva la norma de los vectores, entonces f es una isometría.

A9.3. No existe ninguna aplicación $f : V \to V$ que conserve el producto escalar y no sea lineal.

A9.4. Sean $f : V \to V$ una aplicación lineal y $\{v_1, \dots, v_n\}$ y $\{u_1, \dots, u_n\}$ dos bases ortonormales de V. Puede ocurrir que $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ sea una base ortonormal y $\{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ no sea una base ortonormal.

A9.5. Si f es una isometría de un espacio vectorial euclídeo V y u y v son autovectores asociados a autovalores distintos de f, entonces u y v son ortogonales.

A9.6. Si la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ respecto de una base $\mathcal{B}$ es

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

entonces f no es una isometría ya que la matriz no es ortogonal.

A9.7. Si la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ respecto de la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

entonces f no es una isometría ya que la matriz no es ortogonal.

A9.8. Dados dos vectores u y v de $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ con la misma norma, existe $f \in \mathcal{O}(V)$ tal que $f(u) = v$.

A9.9. Si la forma canónica de un endomorfismo de $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ tiene algún bloque de Jordan de orden mayor o igual que dos, entonces no es una isometría.

A9.10. Si f es un endomorfismo diagonalizable de $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ con autovalores 1 y -1, entonces f es una isometría.

A9.11. Si un endomorfismo de $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ tiene como autovalores 1 y 2, entonces no es una isometría.

A9.12. Si f es una rotación de $\mathbb{R}^2$ con algún vector fijo $v \neq 0$, entonces f es la identidad.

A9.13. Toda reflexión de $\mathbb{R}^2$ es una simetría ortogonal.

A9.14. Toda reflexión de $\mathbb{R}^3$ es una simetría ortogonal.

A9.15. Si f es una rotación de $\mathbb{R}^3$, entonces no necesariamente es un giro.

A9.16. Si R_1 y R_2 son dos rectas ortogonales de $\mathbb{R}^2$ y R_1 es f−invariante por una isometría f, entonces R_2 también es f−invariante.

A9.17. Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ admite una única recta invariante, entonces f es un giro.

A9.18. Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ admite una única recta fija, entonces f es un giro.

A9.19. Todo giro de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ deja una única recta invariante.

A9.20. Toda simetría de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ deja infinitas rectas invariantes.

A9.21. La composición de un giro y una simetría ortogonal hiperplano de $\mathbb{R}^3$ no puede ser una simetría ortogonal hiperplano.

A9.22. La composición de un giro y una simetría ortogonal hiperplano de $\mathbb{R}^3$ no puede ser un giro.

A9.23. Si s una simetría ortogonal hiperplano de $\mathbb{R}^3$ y g un giro de eje ortogonal a la base de la simetría, entonces el eje del giro es el subespacio $\mathrm{Ker}(s \circ g + \mathrm{Id})$.

A9.24. Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ es tal que el conjunto de vectores v tales que $f(v) = -v$ es una recta, entonces f no puede ser una simetría ortogonal.

A9.25. Toda simetría ortogonal hiperplano es una reflexión.

A9.26. Toda simetría ortogonal es una reflexión.

A9.27. La composición de dos simetrías ortogonales hiperplano distintas de $\mathbb{R}^3$ es un giro de eje la recta intersección de los planos base de las simetrías.

Soluciones de las autoevaluaciones

Autoevaluación 5: Formas canónicas de endomorfismos

1 V	2 F	3 V	4 V	5 V	6 F	7 V	8 F	9 V	10 V
11 F	12 V	13 V	14 V	15 V	16 F	17 V	18 F	19 V	20 F
21 F	22 F	23 V	24 V	25 V	26 F	27 V	28 V	29 F	30 V
31 F	32 V	33 F	34 F	35 V	36 V	37 V	38 V	39 F	

Autoevaluación 6: Subespacios invariantes

1 V	2 V	3 F	4 V	5 F	6 V	7 V	8 V	9 F	10 V
11 V	12 V	13 F	14 F	15 V	16 V	17 V	18 F	19 F	20 V
21 F	22 F	23 V	24 V	25 F	26 V	27 F	28 V	29 V	30 F
31 F	32 F	33 V	34 V	35 V	36 F	37 V	38 V		

Autoevaluación 7: Formas bilineales y cuadráticas

1 V	2 V	3 F	4 F	5 V	6 V	7 V	8 F	9 V	10 V
11 V	12 V	13 V	14 F	15 F	16 V	17 F	18 V	19 V	20 F
21 F	22 F	23 V	24 V	25 F	26 V	27 V	28 V	29 V	30 F
31 V	32 V	33 F	34 V	35 F					

Autoevaluación 8: Espacio vectorial euclídeo

1 F	2 F	3V	4 V	5 F	6 V	7 F	8 V	9 V	10 F
11 V	12 V	13 F	14 V	15 V	16 F	17 V	18 V	19 V	20 V
21 F	22 V	23 F	24 V	25 V	26 V	27 V	28 F	29 F	30 V
31 V	32 F	33 V	34 V	35 V	36 V				

Autoevaluación 9: Isometrías

1 F	2 V	3 V	4 F	5 V	6 F	7 V	8 V	9 V	10 V
11 V	12 V	13 V	14 F	15 F	16 V	17 F	18 V	19 F	20 V
21 F	22 V	23 V	24 F	25 V	26 F	27 V			

Índice alfabético