Semana 2
Matriz Transpuesta, Simétrica, Antisimétrica
Matriz Idempotente e Involutiva, Nilpotente, Ortogonal
Determinante de una matriz

Henry R Moncada

UNIVERSIDAD NACIONAL TECNOLÓGICA DE LIMA SUR

September 9, 2024

Outline

Matriz Transpuesta

- **Definición:** La matriz transpuesta de una matriz A es una nueva matriz A^T obtenida cambiando las filas por columnas.
- **Notación:** Si $A = [a_{ij}]$, entonces $A^T = [a_{ji}]$.

Propiedades:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$

Ejemplo :

Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Calculemos su transpuesta.Intercambiar filas por columnas.

Solucion:

Paso 1: La primera columna de A se convierte en la primera fila de A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

Paso 2: La segunda columna de A se convierte en la segunda fila de A^T:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

Paso 3: Finalmente, la tercera columna de A se convierte en la tercera fila de A^T. La matriz transpuesta de A es:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Ejemplos: Matriz Transpuesta

- La transposición de una matriz es una operación que invierte sus filas y columnas.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- La fila 1 de A se convierte en la columna 1 de A^T.
- La fila 2 de A se convierte en la columna 2 de A^T.

- Propiedad:

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \quad A^T + B^T = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Ejemplos: Matriz Transpuesta

- Propiedad:

$$(A^T)^T = A$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Propiedad:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 60 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}^T \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 60 \end{bmatrix}$$

Matriz Simétrica

- **Definición:** Una matriz A es simétrica si $A = A^T$.
- **Propiedades:**
  1. Todos los elementos fuera de la diagonal son simétricos.
  2. Si A y B son matrices simétricas, entonces $A + B$ es simétrica.
  3. Si A es simétrica y λ es un escalar, entonces λA es simétrica.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

- Como $A = A^T$, la matriz A es simétrica.

Matrices Simétricas

Ejemplo 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A$$

Ejemplo 2:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 7 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 7 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix} = B$$

Ejemplo 3:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = C$$

Matriz Antisimétrica (o skew-symmetric)

- **Definición:** Una matriz A es antisimétrica si $A^T = -A$.
- **Propiedades:**
  1. Las entradas de la diagonal principal de una matriz antisimétrica deben ser cero (Todos los elementos de la diagonal son cero).
  2. Si A es antisimétrica, entonces λA es antisimétrica si λ es un escalar.
  3. La suma de dos matrices antisimétricas es antisimétrica.
  4. La multiplicación de una matriz antisimétrica por una matriz escalar (excepto cero) no necesariamente resulta en una matriz antisimétrica

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

- Como $A^T = -A$, la matriz A es antisimétrica.

Matrices Antisimétricas

Ejemplo 1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

Ejemplo 2:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -B$$

Ejemplo 3:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ 3 & 0 & -1 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ -3 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -C$$

Matrices Idempotentes

Una matriz A es idempotente si cumple que $A^2 = A$.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Ejemplo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B$$

Nota: En realidad, este ejemplo no es idempotente. Para un ejemplo verdadero, usa matrices diferentes.

Ejemplo

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Matrices Involutivas

Una matriz A es involutiva si cumple que $A^2 = I$, donde I es la matriz identidad.

Ejemplo

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Ejemplo

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$F^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Definición de Matrices Nilpotentes

Una matriz A es nilpotente si existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$, donde 0 es la matriz nula.

Ejemplo

Consideremos la matriz A dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollamos A^2 y A^3:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Por lo tanto, A es nilpotente.

Ejemplo : Matriz Nilpotente

Ejemplo

Consideremos la matriz B dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hemos visto que:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Así que B también es nilpotente.

Ejemplo : Matriz Nilpotente

Ejemplo

Consideremos la matriz C dada por:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollamos C^2:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Así que C también es nilpotente.

Definición de Matrices Ortogonales

Una matriz Q es ortogonal si cumple que $Q^T Q = I$, donde Q^T es la transpuesta de Q e I es la matriz identidad.

Ejemplo

Consideremos la matriz D dada por:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos que $D^T D = I$:

$$D^T = D$$

$$D^T D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Entonces, D es ortogonal.

Ejemplo : Matriz Ortogonal

Ejemplo

Consideremos la matriz E dada por:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos que $E^T E = I$:

$$E^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^T E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Entonces, E es ortogonal.

Ejemplo : Matriz Ortogonal

Ejemplo

Consideremos la matriz F dada por:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Verificamos que $F^T F = I$:

$$F^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$F^T F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Entonces, F es ortogonal.

Determinante de una Matriz

Vamos a calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de una matriz 3×3, usamos la fórmula:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

donde los a_{ij} son los elementos de la matriz A.
Para la matriz dada, el determinante se calcula de la siguiente manera:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Ahora calculamos los menores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0) - (4 \cdot 6) = -24$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0) - (4 \cdot 5) = -20$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (0 \cdot 6) - (1 \cdot 5) = -5$$

Sustituyendo en la fórmula del determinante:

$$\det(A) = 1 \cdot (-24) - 2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-5)$$

$$\det(A) = -24 + 40 - 15 = 1$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz A es $\boxed{1}$.

Determinante de una Matriz

Definición: Sea $A = (a_{i,j}) \in M_n(K)$ una matriz cuadrada de orden n, se denota como $\det(A) = |A|$, y se calcula:

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\ a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} +$$

$$(\text{-}1)^{1+2}\ a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}\ a_{1n} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

- Si $n = 1$ entonces

$$|A| = |a_{11}| = (-1)^{1+1}\ a_{1,1} = a_{1,1}$$

- Si $n = 2$ entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\ a_{1,1} \left|a_{2,2}\right| + (-1)^{1+2}\ a_{1,2} \left|a_{2,1}\right| = a_{1,1}\ a_{2,2} - a_{1,2}\ a_{2,1}$$

- Si $n = 3$ entonces

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\ a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\ a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} +$$

$$(\text{-}1)^{1+3}\ a_{13} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} =$$
$$a_{1,1}(a_{2,2}\ a_{3,3} - a_{2,3}\ a_{3,2}) - a_{1,2}(a_{2,1}\ a_{3,3} - a_{2,3}\ a_{3,1}) + a_{13}(a_{2,1}\ a_{3,2} - a_{2,2}\ a_{3,1})$$

Método de Sarrus

- El método de Sarrus es un método para calcular el determinante de matrices 3×3.
- Para una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, el determinante se calcula sumando el producto de las diagonales principales y restando el producto de las diagonales secundarias:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & g \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{(aei + bfg + cdh)}_{\text{Diagonales principal}}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right|$$

-

$$\underbrace{(ceg + bdi + afh)}_{\text{Diagonales secundaria}}$$

$$\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

Ejemplos

Ejemplo

Calcular el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Diagonales principales:

$$1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$$
$$2 \cdot 6 \cdot 7 = 84$$
$$3 \cdot 4 \cdot 8 = 96$$

- Diagonales secundarias:

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$
$$2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$$
$$1 \cdot 6 \cdot 8 = 48$$

- Determinante:

$$\det(A) = (45 + 84 + 96) - (105 + 72 + 48) = 225 - 225 = 0$$

Conclusión: $\det(A) = 0$, lo que significa que la matriz es singular.

Ejemplos

Ejemplo

Calcular el determinante de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Diagonales principales:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 5 \cdot 8 &= 80 \\ 1 \cdot 6 \cdot 4 &= 24 \\ 3 \cdot 0 \cdot 7 &= 0 \end{aligned}$$

- Diagonales secundarias:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 \cdot 4 &= 60 \\ 1 \cdot 0 \cdot 8 &= 0 \\ 2 \cdot 6 \cdot 7 &= 84 \end{aligned}$$

- Determinante:

$$\det(B) = (80 + 24 + 0) - (60 + 0 + 84) = 104 - 144 = -40$$

Conclusión: $\det(B) = -40$.

Ejemplos

Ejemplo

Calcular el determinante de la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución:

- Diagonales principales:

$$3 \cdot 4 \cdot 9 = 108$$
$$0 \cdot 5 \cdot 7 = 0$$
$$1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$$

- Diagonales secundarias:

$$1 \cdot 4 \cdot 7 = 28$$
$$0 \cdot 2 \cdot 9 = 0$$
$$3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$$

- Determinante:

$$\det(C) = (108 + 0 + 16) - (28 + 0 + 120) = 124 - 148 = -24$$

Conclusión: $\det(C) = -24$.

Determinantes y sus Propiedades

- **Determinante de la transpuesta :** El determinante de una matriz coincide con el determinante de su transpuesta, $\det(A) = \det(A^T)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(A^T) = 16$$

- Si B se obtiene **intercambiando dos filas (o de dos columnas) de** A , entonces el determinante cambia de signo, $\det(B) = -\det(A^T)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}, \quad = -\begin{vmatrix} a & c & b \\ g & i & h \\ d & f & e \end{vmatrix}$$

- Si B se obtiene **multiplicando una fila de** A **por el escalar** c, entonces el determinante queda multiplicado por c, $\det(B) = c\det(A)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & ca_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

- Si una **matriz cuadrada tiene una fila o columna formada por ceros**, su determinante es cero, $\det(B) = \det(A) = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = \det(A) = 0$$

Determinantes y sus Propiedades

- **Si B se obtiene sumando a una fila de A un múltiplo de otra fila de A**, entonces el determinante no se altera. Sumar una fila a otra no cambia el valor del determinante, $\det(B) = \det(A)$

  Sea la matriz A:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

  Determinante de A:

  $$\det(A) = 0$$

  Ahora, sumamos la primera fila a la segunda fila:

  $$B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} (1) + (2) \to (2)$$

  Determinante de B:

  $$\det(B) = \det(A) = 0$$

- El determinante de una matriz triangular es el **producto de los elementos en la diagonal principal**.

  $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 5 \times 6$$

  El determinante de A es:

  $$\det(A) = 60$$

Determinantes y sus Propiedades

- Si una matriz cuadrada tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante es cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = \det(A) = 0$$

- Si multiplicamos por un mismo número todos los elementos de una línea (fila o columna) de una matriz cuadrada, su determinante queda multiplicado por ese mismo número.
- Si un determinante tiene dos filas o columnas proporcionales el determinante vale cero:
- Si en un determinante una línea (fila o columna) está descompuesta en sumas, podemos descomponer el determinante en suma de determinantes:
- Si a una línea le sumamos otra línea paralela multiplicada por una constante, el determinante no varía:
- Si un determinante tiene una línea (fila o columna) que es combinación lineal de otras líneas paralelas, el determinante es cero, y también recíprocamente si el determinante de una matriz es cero entonces una fila (y una columna) es combinación lineal de las demás.
- El determinante es un número asociado a una matriz cuadrada.
- Tiene muchas propiedades útiles para la teoría de matrices.
- En esta presentación, cubriremos las siguientes propiedades:
  1. Intercambio de filas.
  2. Multiplicación de una fila por un escalar.
  3. Suma de filas.
  4. Determinante de una matriz triangular.

Conclusión

Matriz Transpuesta

- Las matrices transpuestas, simétricas, y antisimétricas tienen propiedades únicas que son útiles en varias áreas de matemáticas y física.
- Entender estas propiedades permite simplificar cálculos y entender mejor las transformaciones lineales.

- El método de Sarrus es una técnica eficiente para calcular determinantes de matrices 3×3.
- Se basa en el cálculo de las diagonales principales y secundarias.
- En los ejemplos, hemos visto cómo este método se aplica para obtener los determinantes de diversas matrices.