Espacios vectoriales y Aplicaciones lineales

Espacios vectoriales. Subespacios vectoriales

Espacios vectoriales

Definición
Sea V un conjunto dotado de una operación interna " + " que llamaremos **suma**, y sea $\mathbb{K}$ un cuerpo conmutativo que define sobre V una operación externa " $\cdot$ ", que llamaremos **producto por escalares**.

$$\alpha \cdot \vec{a} \in V, \alpha \in \mathbb{K} \ y \ \vec{a} \ \in \ V$$

Diremos que $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ es un **espacio vectorial sobre** $\mathbb{K}$, o también que V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, respecto de las operaciones **suma** y **producto por escalares** si se verifican las siguientes condiciones:

1. $(V, \ +)$ es un grupo conmutativo.
2. El producto por escalares cumple las siguientes propiedades:

   2.1 $1 \cdot \vec{a} \ = \ \vec{a} \qquad \forall \ \vec{a} \ \in V$
   2.2 $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) \ = \ (\alpha\beta) \cdot \vec{a} \qquad \forall \ \alpha, \ \beta \ \in \mathbb{K}, \ \forall \ \vec{a} \ \in V$
   2.3 $\alpha \cdot (\vec{a} \ + \ \vec{b}) \ = \ (\alpha \cdot \vec{a}) \ + \ (\alpha \cdot \vec{b}) \qquad \forall \ \alpha \ \in \mathbb{K}, \ \forall \ \vec{a}, \ \vec{b} \ \in V$
   2.4 $(\alpha \ + \ \beta) \cdot \vec{a} \ = \ (\alpha \cdot \vec{a}) \ + \ (\beta \cdot \vec{a}) \qquad \forall \ \alpha, \ \beta \ \in \mathbb{K}, \ \forall \ \vec{a} \ \in V$

Los elementos de V se denominan **vectores** y los de $\mathbb{K}$ **escalares**.

Propiedades

1. $\forall \vec{a} \in V : 0 \cdot \vec{a} \ = \ \vec{0}$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha \cdot \vec{0} \ = \ \vec{0}$.
3. $\forall \vec{a} \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{K} : -(\alpha \cdot \vec{a}) \ = \ (-\alpha) \cdot \vec{a} \ = \ \alpha \cdot (-\vec{a})$.

Subespacios vectoriales.

Definición[Subespacio vectorial]
Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y F una parte no vacía de V, se dice que F es **subespacio vectorial** de V, si las restricciones a F de las dos operaciones de V, dotan a F de una estructura de espacio vectorial, es decir si:

1. $(F, +)$ es subgrupo de $(V, +)$ $(\vec{a}, \vec{b} \in F \Rightarrow \vec{a} - \vec{b} \in F)$
2. $\alpha \in \mathbb{K},\ \vec{a} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in F$

Teorema[Caracterización de subespacios vectoriales]
Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea F una parte no vacía de V. F es subespacio vectorial de V si y sólo si:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K},\ \forall \vec{a}, \vec{b} \in F \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} \in F$$

Obsérvese que:

- El vector nulo $\vec{0}$ pertenece a todos los subespacios de un espacio V.
- Un espacio vectorial V tiene como subespacios, entre otros posibles, al conjunto $\{\vec{0}\}$, formado sólo por el vector nulo, que se llamará **subespacio nulo.** El mismo espacio V es un subespacio de sí mismo. Los demás subespacios de V, distintos de V y $\{\vec{0}\}$, se llaman **subespacios propios.**

Intersección y suma de subespacios.

Definición[Intersección de subespacios vectoriales]
Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Se define la **intersección** $(\cap)$ de dos subespacios vectoriales U y W de V, como el subconjunto de V que verifica:

$$\vec{a} \in U \cap W \iff \vec{a} \in U \wedge \vec{a} \in W$$

Teorema
La intersección de un número cualquiera de subespacios vectoriales de un espacio vectorial V es, a su vez, un subespacio vectorial de V.

Nota: La unión de subespacios de un espacio vectorial V, en general no es un subespacio de V.

Definición[Suma de subespacios]
Sea $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ y sean U_1 y U_2 dos subespacios de V. Se llama suma de U_1 y U_2 al conjunto, que se denota $U_1 + U_2$:

$$U_1 + U_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \ / \ \vec{u}_1 \in U_1, \ \vec{u}_2 \in U_2\}$$

Teorema
El conjunto $U_1 + U_2$ es un subespacio de V; es más, se trata del menor de todos los subespacios que contienen a U_1 y U_2 y, por lo tanto, a $U_1 \cup U_2$.

Definición[Suma directa]
Sean U_1 y U_2 subespacios de un espacio vectorial $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ y sea $L \subseteq V$, $U_1 + U_2$ es **suma directa de L**, lo que se denota poniendo $U_1 \oplus U_2 = L$, si se verifica que $U_1 + U_2 = L$ y $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

Si $L = V$ los subespacios U_1, U_2 se denominan **subespacios suplementarios**.

Dependencia e independencia lineal

Combinación lineal. Subespacio generado por un conjunto de vectores.

Definición[Combinación lineal]

$(V, +, \cdot\mathbb{K})$: espacio vectorial.
Se llama **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_p \in V$ a todo vector $\vec{x}$ de V de la forma:

$$\vec{x} \ = \ \lambda_1\vec{v}_1 \ + \ \lambda_2\vec{v}_2 \ + \ ... \ + \ \lambda_p \ \vec{v}_p, \quad \text{con } \lambda_1, \ \lambda_2, ..., \ \lambda_p \ \in \mathbb{K}.$$

Definición[Subespacio vectorial generado por un conjunto de vectores]

Consideremos $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y sea $H \ = \ \{\vec{v}_1, \ \vec{v}_2, ..., \ \vec{v}_p\} \ \subset V$.

$L(H) = \langle H \rangle = \{\lambda_1\vec{v}_1 \ + \ \lambda_2\vec{v}_2 \ + \ ... \ + \lambda_p\vec{v}_p \ / \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ ..., \ \lambda_p \ \in \mathbb{K}\}$: se denomina **subespacio vectorial generado por el conjunto** H.

Teorema
Se verifican las siguientes propiedades:

1. $L(L(H)) \ = \ L(H)$
2. $H \ \subset \ L(H)$
3. $H \ \subset \ H' \ \Rightarrow \ L(H) \ \subset \ L(H')$
4. $L(H \ \cap \ H') \ \subset \ L(H) \ \cap \ L(H') \ \subset \ L(H) \ \cup \ L(H') \ \subset \ L(H \ \cup \ H')$

<u>Dependencia lineal.</u>

<u>Definición</u>[Dependencia lineal]
Sea $H = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_p\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

- Se dice que H es un sistema **linealmente independiente** o sistema **libre**, si la única combinación lineal de ellos que vale $\vec{0}$ es la que tiene todos sus coeficientes nulos; esto es, si
$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0} \\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ ..., \lambda_p \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$$

- Se dice que H es un sistema **linealmente dependiente** o sistema **ligado** si no es un sistema libre, esto es, si existen algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$, no todos nulos tales que $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + ... + \lambda_p\vec{v}_p = \vec{0}$.
  Se dice que un vector **depende linealmente** de otros si es combinación lineal de éstos.

<u>Propiedades</u>

1. El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier familia de vectores. Por tanto, Si un sistema contiene al vector nulo, entonces el sistema es ligado.
2. El vector $\vec{v}$ es combinación lineal de toda familia que contenga a $\vec{v}$.
3. Un sistema de vectores es ligado si y sólo si alguno de sus vectores depende linealmente de los demás. Por tanto, si $\vec{u} \neq \vec{0}$, entonces el sistema $S = \{\vec{u}\}$ es libre. Un sistema $\{\vec{u},\ \vec{v}\}$, formado por dos vectores, es ligado si y sólo si uno de ellos es proporcional al otro.
4. Si un sistema S de vectores es ligado, entonces también lo es cualquier sistema que resulte de añadir algún vector a S.
5. Si un sistema S de vectores es libre, entonces también lo es cualquier sistema que resulte de prescindir de alguno de los vectores de S.

Sistema de generadores.

Definición[Sistema de generadores de un espacio o subespacio vectorial]

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Se dice que los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \ \vec{v}_p\}$ de L son un **sistema de generadores** del subespacio vectorial L, si y sólo si, todo vector de L es combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_p\}$.

Teorema[Teorema Fundamental de la independencia lineal]

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial que está generado por un cierto sistema $G = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$. Si $I = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_h\}$ es un sistema libre de vectores de L entonces se verifica que $h \leq p$.

Base y dimensión

Definición[Base de un espacio o subespacio vectorial]

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Diremos que el sistema $H = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\} \subset L$ es una **base** de L si y sólo si verifica:

1. Forman un sistema de generadores de L.
2. Son linealmente independientes.

Teorema[Teorema de existencia de la Base]

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito (es decir, generado por un número finito de vectores) y sea $L \subseteq V,\ L \neq \{\vec{0}\}$ subespacio vectorial. Cualquier sistema generador de L incluye una base. En consecuencia, todo subespacio vectorial de tipo finito posee alguna base.

Teorema[Teorema de la dimensión]

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Todas las bases de L tienen igual número de vectores. A este número se le llama **dimensión** del subespacio L y se representa por $dim(L)$.

Se conviene en que el espacio $\{\vec{0}\}$ tiene dimensión 0.

Teorema
Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de tipo finito y $L \subseteq V$ un subespacio vectorial. Sea $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$ un sistema de vectores de L, entonces se verifica que:

1. Si S es un sistema generador de L, entonces $p \geq dim(L)$.
2. Si S es un sistema libre , entonces $p \leq dim(L)$.
3. Si S es generador de L y $dim(L) = p$, entonces S es base de L.
4. Si S es libre y $dim(L) = p$, entonces S es base de L.

Teorema[Teorema de Steinitz o de la base incompleta]

Sean $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n, $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ una base de V y el conjunto $S = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2,\ ...,\ \vec{v}_p\}$ un sistema libre de vectores de V, donde $p < n$. Entonces existe algún sistema S' de $n - p$ vectores de V, tal que $S \cup S'$ sea una base de V. Es más, los vectores de S' se pueden tomar de entre los de una base cualquiera $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ de V.

Teorema[Fórmula de Grassmann]

Si U_1 y U_2 son dos subespacios de un espacio vectorial de tipo finito, se verifica:

$$dim(U_1)\ +\ dim(U_2)\ =\ dim(U_1 + U_2)\ +\ dim(U_1 \cap U_2)$$

Coordenadas de un vector. Unicidad.

Teorema[Unicidad de la expresión de un vector en una base]

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial. Todo vector de un subespacio vectorial $L \subseteq V, L \neq \{\vec{0}\}$ se expresa de manera única como combinación lineal de los vectores de una base de L.

Definición

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ espacio vectorial de tipo finito sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $L \subseteq V,\ L \neq \{\vec{0}\}$ un subespacio vectorial de V. Dada una base $B = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ de L, (según el teorema anterior) para cada $\vec{x} \in L$ existen unos únicos escalares $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in \mathbb{K}$ tales que $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + ... + x_n\vec{e}_n$. Entonces se dice que la n-upla $(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ es el sistema de **coordenadas** del vector $\vec{x}$ en la base B.

Rango de un conjunto finito de vectores.

Definición

Se llama **rango** de un sistema S con un número finito de vectores de un cierto espacio vectorial V, y se denota por $\text{rg}(S)$, a la dimensión del subespacio que engendra S.

$$\text{rg}(S) \ = \ dim(L(S))$$

En consecuencia, la familia $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_p\}$ es libre si y sólo si su rango es igual al número p de vectores que lo forman.

Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial

Sea $(V, +, \cdot\mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión n.

$U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_k \rangle$.

$\mathcal{B} = \{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2, ...,\ \vec{e}_n\}$ base de V

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & \lambda_1 u_{11} \ + \ \lambda_2 u_{21} \ + \ ... \ + \lambda_k u_{k1} \\ x_2 & = & \lambda_1 u_{12} \ + \ \lambda_2 u_{22} \ + \ ... \ + \lambda_k u_{k2} \\ & \vdots & \\ x_n & = & \lambda_1 u_{1n} \ + \ \lambda_2 u_{2n} \ + \ ... \ + \lambda_k u_{kn} \end{array} \right.$$

A las ecuaciones (1) se le llaman **ecuaciones paramétricas** de la variedad lineal U.

Eliminando parámetros en las ecuaciones (1), aplicando el método de Gauss y considerando como incógnitas los parámetros λ_i obtendremos $n-k$ relaciones entre las componentes $(x_1, x_2, , ..., x_n)$, que se llaman **ecuaciones implícitas** de U.

Cambio de base en un espacio vectorial.

$\mathcal{B} = \{\vec{u}_1,\ \vec{u}_2, ...,\ \vec{u}_n\},\ B' = \{\vec{v}_1,\ \vec{v}_2, ...,\ \vec{v}_n\}$ bases de V.

$\vec{v}_j = a_{j1}\vec{u}_1 + a_{j2}\vec{u}_2 + ... + a_{jn}\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\vec{u}_i \quad (j = 1, ..., n).$

En estas condiciones, cualquier vector $\vec{x} \in V$ puede expresarse en una u otra base de la siguiente manera:

$$\text{En } B, \quad \vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + ... + x_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{u}_i$$

$$\text{En } B', \quad \vec{x} = x'_1\vec{v}_1 + x'_2\vec{v}_2 + ... + x'_n\vec{v}_n = \sum_{j=1}^{n} x'_j\vec{v}_j$$

En consecuencia:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j\vec{v}_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\vec{u}_i) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}x'_j\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} x'_j a_{ji})\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{u}_i$$

es decir:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}x'_j\ , \quad \forall\ i = 1, ..., n$$

que son las relaciones buscadas entre ambas coordenadas.

Explícitamente:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + ... + a_{n1}x'_n \\ x_2 & = & a_{12}x'_1 + a_{22}x'_2 + ... + a_{n2}x'_n \\ & \vdots & \\ x_n & = & a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + ... + a_{nn}x'_n \end{array}\right.$$

Aplicaciones lineales. Definición y propiedades.

Definición

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que la aplicación $f : V \longrightarrow W$ es una **aplicación lineal** u **homomorfismo** de V en W si se verifica:

(1) $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$

(2) $f(\lambda\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $\vec{x} \in V$.

Las dos condiciones anteriores se pueden resumir en una:

$$f(\lambda\vec{x} + \mu y) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}) \quad \forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \ \vec{x}, \vec{y} \in V.$$

En el caso en el que ambos espacios vectoriales coincidan, es decir, $U \equiv V$, recibe el nombre de **endomorfismo**.

Propiedades

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre ellos. Se verifican las siguientes propiedades:

(1) $f(\vec{0}) = \vec{0}$.

(2) $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

(3) Si $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es una base de V y $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$ son n elementos arbitrarios de W, existe una y sólo una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que

$$f(\vec{e}_k) = \vec{w}_k \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

(4) Las aplicaciones lineales conservan la dependencia lineal pero, en general, no conservan la independencia lineal.

(5) Si L es un subespacio vectorial de V, entonces $f(L)$ es un subespacio vectorial de W.

(6) Si E es un subespacio vectorial de W, entonces $f^{-1}(E)$ es un subespacio vectorial de V. (Recuérdese que si A y B son dos conjuntos y $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación entre ellos, si $E \subset B$ se define $f^{-1}(E) = \{a \in A : f(a) \in E\}$.)

Operaciones con las aplicaciones lineales.

Suma de aplicaciones lineales

$$\begin{array}{rccl} f+g: & V & \longrightarrow & W \\ & \vec{x} & \longrightarrow & (f+g)(\vec{x}) := f(\vec{x}) + g(\vec{x}). \end{array}$$

Producto de una aplicación lineal por un escalar

$$\begin{array}{rccl} \lambda f: & V & \longrightarrow & W \\ & \vec{x} & \longrightarrow & (\lambda f)(\vec{x}) := \lambda f(\vec{x}). \end{array}$$

Teorema
$\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \longrightarrow W, \text{ lineales}\}$ tiene estructura de espacio vectorial respecto de las operaciones anteriores.

Composición de aplicaciones lineales

$$\begin{array}{rccccl} g \circ f: & V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U \\ & \vec{x} & \longrightarrow & f(\vec{x}) & \longrightarrow & (g \circ f)(\vec{x}) := g(f(\vec{x})). \end{array}$$

Nota: Esta operación no utiliza la estructura algebraica de espacio vectorial y puede definirse entre conjuntos cualesquiera.

- La composición de aplicaciones es asociativa.
- Si f y g son lineales, entonces $g \circ f$ es lineal.

Definición
Si $f \in End(V)$:

$$f^0 = i, \qquad f^n = f \circ f^{n-1}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

donde $i(\vec{x}) = \vec{x}, \ \forall \ \vec{x} \in V$.

Representación matricial de las aplicaciones lineales.

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}, \text{ base de } V \\ \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\} \in W\end{array}\right\} \Rightarrow$$

existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que $f(\vec{e}_k) = \vec{w}_k$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

$\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$, base de W.

$$f(\vec{e}_k) \in W \;\Rightarrow\; f(\vec{e}_k) = a_{1k}\vec{u}_1 + a_{2k}\vec{u}_2 + \cdots + a_{mk}\vec{u}_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\vec{u}_i, \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots, n.$$

Ahora bien, si $\vec{x}$ es un vector cualquiera de V se podrá expresar de manera única como una combinación lineal de los elementos $\vec{e}_k$ por ser $\mathcal{B}$ una base:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k.$$

Aplicando f a los dos miembros de esta igualdad se obtiene:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\vec{e}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(\vec{e}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\vec{u}_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right)\vec{u}_i. \end{aligned}$$

Por otra parte, $f(\vec{x}) \in W$ y como $\mathcal{B}_1$ es una base se podrá expresar como una combinación lineal de sus elementos:

$$f(\vec{x}) = y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2 + \cdots + y_m\vec{u}_m = \sum_{i=1}^{m} y_i\vec{u}_i.$$

Como las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, se sigue que

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \qquad \text{para } i = 1, 2, \dots, m.$$

Se deduce de aquí que **fijadas las bases $\mathcal{B}$ en V y $\mathcal{B}_1$ en W**,
a cada aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ le corresponde una matriz $A = [a_{ik}]$ de dimensiones $m \times n$ unívocamente determinada.

Recíprocamente, dados los espacios vectoriales V y W de dimensiones n y m, respectivamente, fijadas en ellos las bases $\mathcal{B}$ en V y $\mathcal{B}_1$ en W, a la matriz $B = [b_{ik}] \in \mathcal{M}_{m\times n}$ le corresponde la aplicación lineal $g : V \longrightarrow W$ unívocamente determinada en virtud de la propiedad (3) antes señalada, definiendo

$$g(\vec{e}_k) = \sum_{i=1}^{m} b_{ik}\vec{u}_i, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones n y m, respectivamente. Fijadas sendas bases en V y W, se verifica que los espacios vectoriales de las aplicaciones lineales $\mathcal{L}(V, W)$ y de las matrices $\mathcal{M}_{m\times n}$ son isomorfos.

En el caso en que $V = \mathbb{K}^n$ y $W = \mathbb{K}^m$ se suponen fijadas las respectivas bases canónicas en $\mathbb{K}^n$ y en $\mathbb{K}^m$ y, en virtud del isomorfismo anterior, se suele identificar la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ con la matriz correspondiente $A = [a_{ij}]$, donde cada columna

$$f(\vec{e}_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$, está formada por las coordenadas del vector $f(\vec{e}_j)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^m$.

Nota:

V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, se denomina **forma lineal** o **funcional lineal de** V a cualquier aplicación lineal $f : V \longrightarrow \mathbb{K}$.
Si $\mathcal{B}$ es una base de V a cada forma lineal de V le corresponde una matriz fila, es decir, un vector $\overrightarrow{\omega} \in \mathbb{K}^n$ tal que $f(\vec{x}) = \overrightarrow{\omega}^t\vec{x}$ para todo $\vec{x} \in V$.

Proposición

$$\left.\begin{array}{l} V,\ W,\ U:\ \mathbb{K}-\text{espacios vectoriales}, \\ \dim(V) = n,\ \dim(W) = m,\ \dim(U) = p \\ \mathcal{B} \text{ base de } V,\ \mathcal{B}_1 \text{ base de } W,\ \mathcal{B}_2 \text{ base de } U \\ A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_1),\ B = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2),\ C = \mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}_2) \end{array}\right\} \Rightarrow C = BA.$$

Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sean V y W, $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre ellos.

Definición[Núcleo]
Se denomina **núcleo** de la aplicación lineal f al conjunto

$$\mathcal{N}(f) = Ker(f) = \{\vec{x} \in V : f(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

- $\mathcal{N}(f) = f^{-1}(\vec{0})$
- $\mathcal{N}(f)$ es un subespacio vectorial de V
- $\dim(\mathcal{N}(f)$ = Nulidad de f

Definición[Imagen]
Se denomina **imagen** de la aplicación lineal f al conjunto

$$\mathcal{R}(f) = Im(f) = \{\vec{y} \in W : \ \exists\, \vec{x} \in V, \quad f(\vec{x}) = \vec{y}\}.$$

- $\mathcal{R}(f)$ es un subespacio vectorial de W ($\mathcal{R}(f) = f(V)$)
- $\dim(\mathcal{R}(f))$=**rango** de f.

Proposición
Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal se verifica que

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \ \dim\ (V).$$

Proposición
Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal se verifica que

$$f \text{ es inyectiva} \Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}\}$$

Aplicaciones lineales biyectivas.

Definición

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal que es biyectiva, entonces se dice que es un **isomorfismo** entre esos espacios vectoriales.

$$V \approx W.$$

Propiedades

(7) Si $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo, entonces la aplicación inversa $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es una aplicación lineal.

(8) Los isomorfismos conservan la independencia lineal.

(9) Si f es una aplicación lineal sobreyectiva de V en W, entonces f es un isomorfismo si, y sólo si, $\mathcal{N}(f) = \{\vec{0}\}$.

(10) Dos espacios vectoriales son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.

Nota:

Todos los espacios vectoriales de dimensión n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, son isomorfos a $\mathbb{K}^n$.

$\boxed{\text{Cambio de base y aplicaciones lineales.}}$

Fijadas unas bases $\mathcal{B}$ en V y $\mathcal{B}_1$ en W, $F \in \mathcal{L}(V, W)$

$$f \longleftrightarrow A,\ \ A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$$

Si consideramos la bases $\mathcal{B}'$ en V y $\mathcal{B}'_1$ en W,

$$f \longleftrightarrow C,\ \ C = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)$$

$\boxed{\text{¿qué relación existe entre las matrices } A \text{ y } C\text{?}}$

1. Si $A = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$, la representación matricial de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_1$ será $\vec{y} = C\vec{x}$, es decir
$$Y_{\mathcal{B}_1} = AX_{\mathcal{B}}$$
2. Si $C = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}'_1)$, la representación matricial de f respecto de las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}'_1$ será $\vec{y}' = Cx'$, es decir
$$Y_{\mathcal{B}'_1} = CX_{\mathcal{B}'}$$
3. Si las fórmulas de cambio de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ son $\vec{x} = P\vec{x}'$, es decir
$$X_{\mathcal{B}} = PX_{\mathcal{B}'}$$
4. y las del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}'_1$ son $\vec{y} = Q\vec{y}'$,
$$Y_{\mathcal{B}_1} = QY_{\mathcal{B}'_1}$$

entonces basta sustituir en $\vec{y} = A\vec{x}$ y se tiene que

$$QY_{\mathcal{B}'_1} = APX_{\mathcal{B}'} \ \Rightarrow\ Y_{\mathcal{B}'_1} = Q^{-1}APX_{\mathcal{B}'}$$

$$\boxed{C = Q^{-1}AP}$$

Teorema
Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases en el espacio vectorial V, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_1'$ bases en el espacio W y sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal representada por la matriz A respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_1$. Entonces la matriz que representa a f respecto de las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}_1'$ es $Q^{-1}AP$, siendo P la matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ y Q la matriz de paso de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_1'$.

Corolario
Sea $\mathcal{B}$ una base del espacio vectorial V y $f : V \longrightarrow V$ una aplicación lineal representada por la matriz A respecto de la base $\mathcal{B}$. Entonces la matriz que representa a f respecto de la base $\mathcal{B}'$ es $P^{-1}AP$, siendo P la matriz de paso de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Definición[Matrices semejantes]
Diremos que dos matrices cuadradas A y C son semejantes si existe una matriz no singular P tal que $C = P^{-1}AP$. O equivalentemente, si A y C representan a la misma aplicación lineal respecto de bases distintas.

(*)Rango de una matriz.

Definición
Se denomina **rango de la matriz** A y se representa por $r(A)$ a la dimensión del espacio imagen de f donde f es la aplicación lineal con matriz A respecto de ciertas bases (coincide con la dimensión del espacio generado por las columnas de A, $\mathcal{R}(A)$);
Se denomina **nulidad** de A a la dimensión del núcleo de A ($\mathcal{N}(A)$), representándose por $n(A)$.

La dimensión de la imagen de una aplicación lineal no depende de las bases de referencia utilizadas en cada uno de los espacios vectoriales, por tanto $r(BAC) = r(A)$, con B y C matrices no singulares.
El mismo razonamiento es trasladable a la nulidad; $n(BAC) = n(A)$, con B y C matrices no singulares.

Teorema
Sea A una matriz no nula $m \times n$. Entonces $r(A) = r$ si y sólo si existen matrices no singulares X e Y, de órdenes m y n, respectivamente tales que

$$XAY = \begin{bmatrix} I_r & \Theta_1 \\ \Theta_2 & \Theta_3 \end{bmatrix}$$

donde I_r es la matriz unidad de orden r, $\Theta_1 \in \mathcal{M}_{n-r},\ \Theta_2 \in \mathcal{M}_{m-r}$ y $\Theta_3 \in \mathcal{M}_{(m-r)\times(n-r)}$

Corolario
Sea A una matriz $m \times n$ y B una matriz $n \times p$. Entonces se tiene:

1. $r(A) = r(A^t)$.
2. $r(AB) \leq r(A)$.
3. $r(AB) \leq r(B)$.

Teorema[Rouché-Frobenius]
Sea A una matriz $m \times n$.
El sistema de ecuaciones $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución si y sólo si $r([A, b]) = r(A)$. En dicho caso si:

1. $r([A, b]) = r(A) = n$ (número de incógnitas), el sistema es compatible determinado.
2. $r([A, b]) = r(A) < n$ el sistema es compatible indeterminado.

Teorema[Estructura de las soluciones]
Sea x_0 una solución de $A\vec{x} = \vec{b}$. Entonces el conjunto de todas las soluciones de $A\vec{x} = \vec{b}$ es la variedad lineal $\vec{x}_0 + \mathcal{N}(A)$.

Nota: Sea A una matriz $m \times n$, entonces, como consecuencia de los teoremas anteriores, se verifica:

- Si $r(A) = m$, entonces $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene solución.
- Una solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ es única si y sólo si $n(A) = 0$.
- Si $n > m$ entonces $n(A) \neq 0$; luego si hay solución hay infinitas.