Objetivos de aprendizaje

2.4.1 Calcular el producto vectorial de dos vectores dados.
2.4.2 Utilizar los determinantes para calcular un producto vectorial.
2.4.3 Hallar un vector ortogonal a dos vectores dados.
2.4.4 Determinar áreas y volúmenes utilizando el producto vectorial.
2.4.5 Calcular el torque de una fuerza y un vector de posición dados.

Imagine a un mecánico que gira una llave inglesa para apretar un tornillo. El mecánico aplica una fuerza en el extremo de l llave. Esto crea una rotación, o torque, que aprieta el tornillo. Podemos utilizar vectores para representar la fuerza aplicada por el mecánico y la distancia (radio) del tornillo al extremo de la llave. Luego, podemos representar el torque mediante un vector orientado a lo largo del eje de rotación. Observe que el vector torque es ortogonal al vector fuerza y al vector radio.

En esta sección desarrollamos una operación llamada *producto vectorial,* la cual nos permite hallar un vector ortogonal a l dos vectores dados. El cálculo del torque es una aplicación importante de los productos vectoriales, y examinamos el torque con más detalle más adelante en la sección.

El producto vectorial y sus propiedades

El producto escalar es una multiplicación de dos vectores que da como resultado un escalar. En esta sección, introducimo un producto de dos vectores que genera un tercer vector ortogonal a los dos primeros. Piense en cómo podríamos hallar ese vector. Supongamos que $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son vectores distintos de cero. Queremos hallar un vector $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$; es decir, queremos hallar $\mathbf{w}$ tal que $\mathbf{u}.\,\mathbf{w} = 0$ y $\mathbf{v}.\,\mathbf{w} = 0$. Por lo tanto, w_1, w_2, y w_3 deben satisfacer

$$\begin{aligned} u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 &= 0 \\ v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 &= 0, \end{aligned}$$

Si multiplicamos la ecuación superior por v_3 y la ecuación inferior por u_3 y restamos, podemos eliminar la variable w_3, qu da

$$\left(u_1 v_3 - v_1 u_3\right) w_1 + \left(u_2 v_3 - v_2 u_3\right) w_2 = 0.$$

Si seleccionamos

$$\begin{aligned} w_1 &= u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ w_2 &= -\left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right), \end{aligned}$$

obtenemos un posible vector de solución. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones originales se obtiene

$$w_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Es decir, el vector

$$\mathbf{w} = \left\langle u_2 v_3 - u_3 v_2, -\left(u_1 v_3 - u_3 v_1\right), u_1 v_2 - u_2 v_1 \right\rangle$$

es ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, lo que nos lleva a definir la siguiente operación, denominada producto vectorial.

DEFINICIÓN

Supongamos que $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Entonces, el **producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$** es un vector

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\,\mathbf{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\,\mathbf{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\,\mathbf{k} \\ &= \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Por la forma en que hemos desarrollado $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, debe quedar claro que el producto vectorial es ortogonal a ambos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ Sin embargo, nunca está de más comprobarlo. Para demostrar que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$, calculamos el producto escalar de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \langle u_1, u_2, u_3 \rangle . \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle \\ &= u_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2 (-u_1 v_3 + u_3 v_1) + u_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1) \\ &= u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 - u_1 u_2 v_3 + u_2 u_3 v_1 + u_1 u_3 v_2 - u_2 u_3 v_1 \\ &= (u_1 u_2 v_3 - u_1 u_2 v_3) + (-u_1 u_3 v_2 + u_1 u_3 v_2) + (u_2 u_3 v_1 - u_2 u_3 v_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De manera similar, podemos demostrar que el producto vectorial también es ortogonal a $\mathbf{v}$.

EJEMPLO 2.31

Hallar un producto vectorial

Supongamos que $\mathbf{p} = \langle -1, 2, 5 \rangle$ y $\mathbf{q} = \langle 4, 0, -3 \rangle$ (Figura 2.53). Halle $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$.

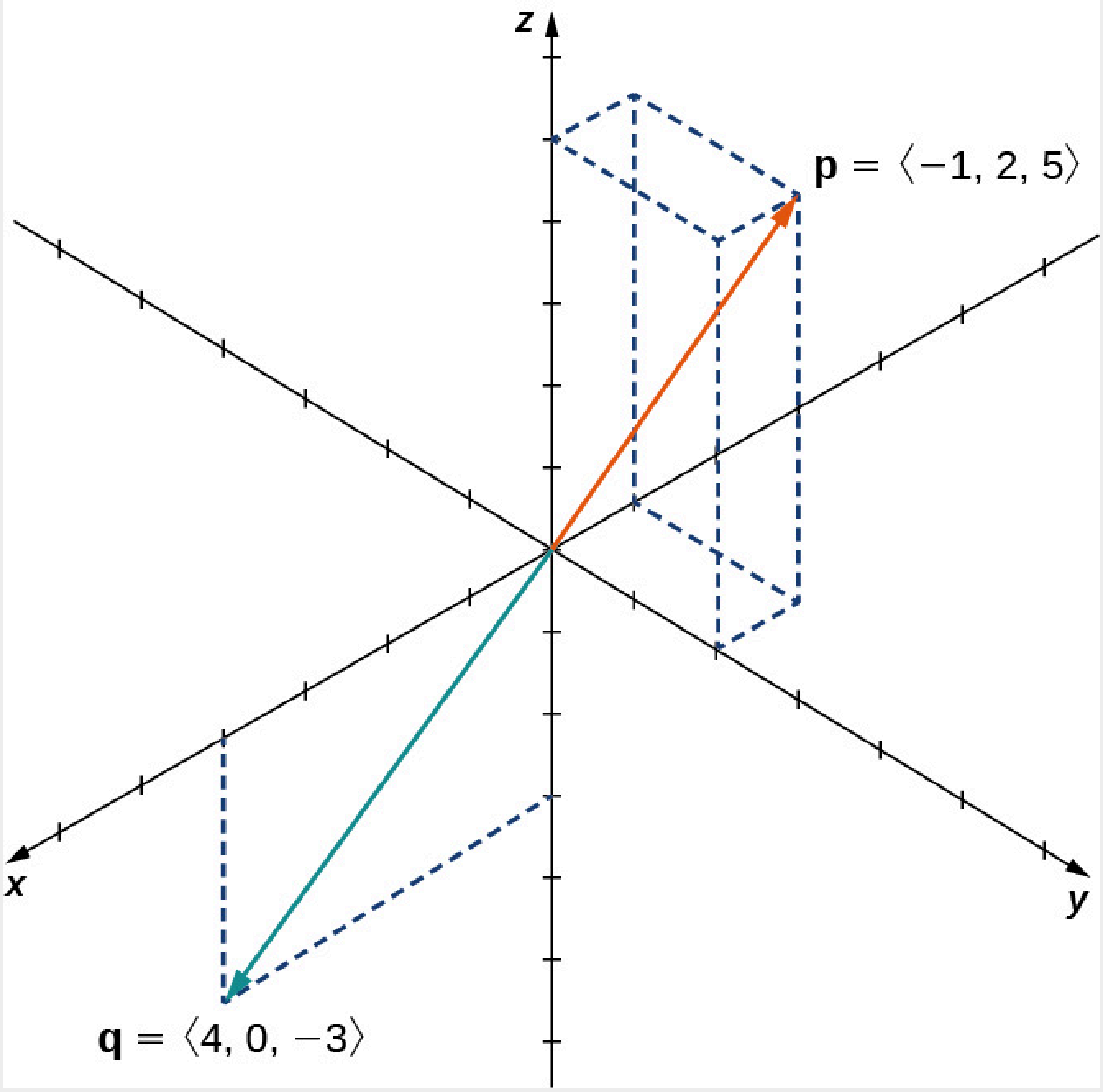


Figura 2.53 Hallar un producto vectorial a dos vectores dados.

[Show/Hide Solution]

Solución

Sustituya los componentes de los vectores en la Ecuación 2.9:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \times \mathbf{q} &= \langle -1, 2, 5 \rangle \times \langle 4, 0, -3 \rangle \\ &= \langle p_2 q_3 - p_3 q_2, p_3 q_1 - p_1 q_3, p_1 q_2 - p_2 q_1 \rangle \\ &= \langle 2(-3) - 5(0), -(-1)(-3) + 5(4), (-1)(0) - 2(4) \rangle \\ &= \langle -6, 17, -8 \rangle . \end{aligned}$$

PUNTO DE CONTROL 2.30

Halle $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ para $\mathbf{p} = \langle 5, 1, 2 \rangle$ y $\mathbf{q} = \langle -2, 0, 1 \rangle$. Exprese la respuesta utilizando vectores normales unitarios.

Aunque no sea evidente en la Ecuación 2.9, la dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dada por la regla de la mano derecha. Si extendemos la mano derecha con los dedos apuntando en dirección a $\mathbf{u}$, y luego curvamos los dedos hacia el vector $\mathbf{v}$, e pulgar apunta en la dirección del producto vectorial, como se muestra.

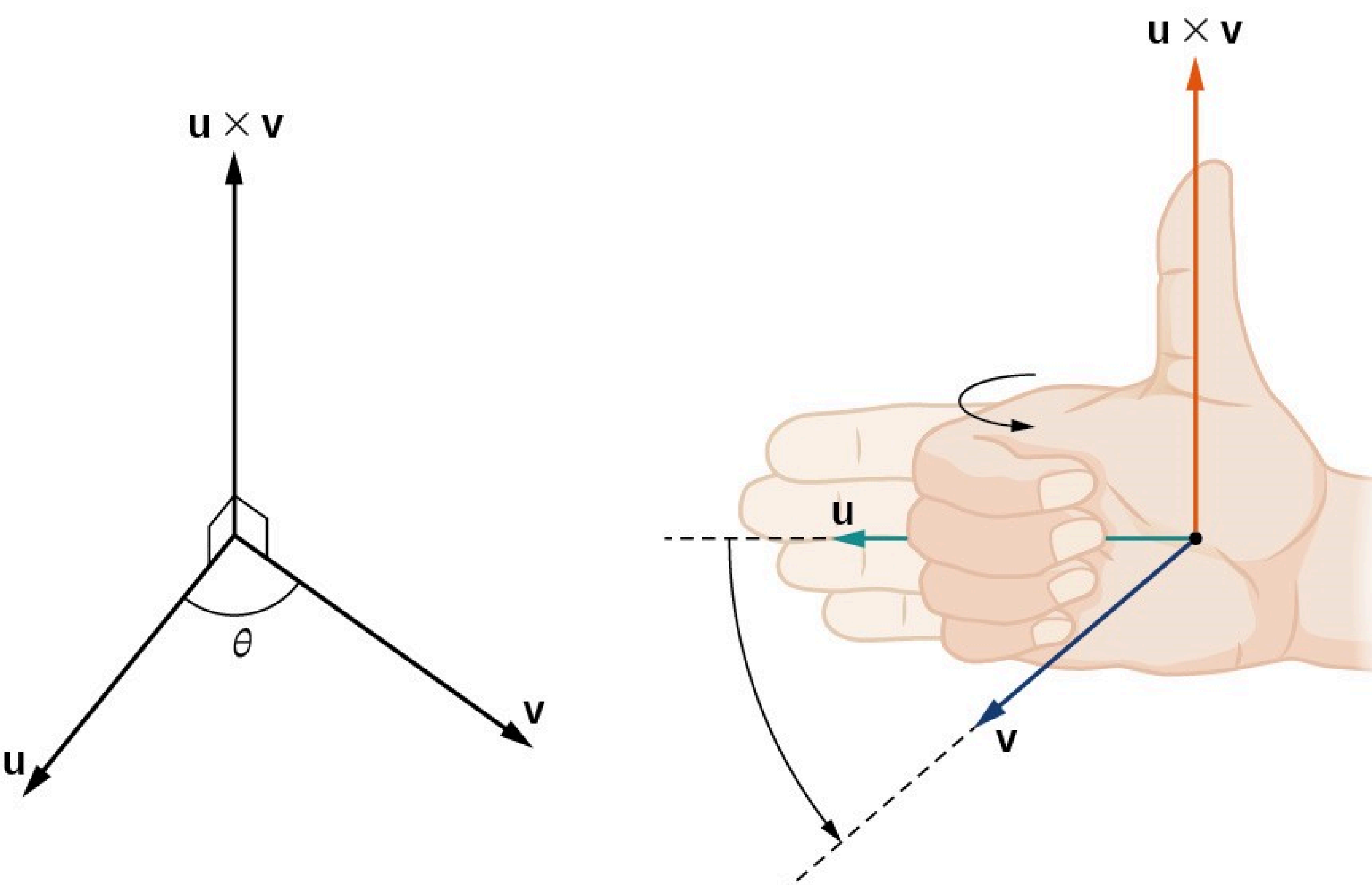


Figura 2.54 La dirección de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ se determina por la regla de la mano derecha.

Observe lo que esto significa para la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$. Si aplicamos la regla de la mano derecha a $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, empezamo con los dedos apuntando en dirección a $\mathbf{v}$, y luego curvamos los dedos hacia el vector $\mathbf{u}$. En este caso, el pulgar apunta en la dirección opuesta a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. (¡Pruébelo!)

EJEMPLO 2.32

Anticonmutatividad del producto vectorial

Supongamos que $\mathbf{u} = \langle 0, 2, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 3, -1, 0 \rangle$. Calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ y grafíquelos.

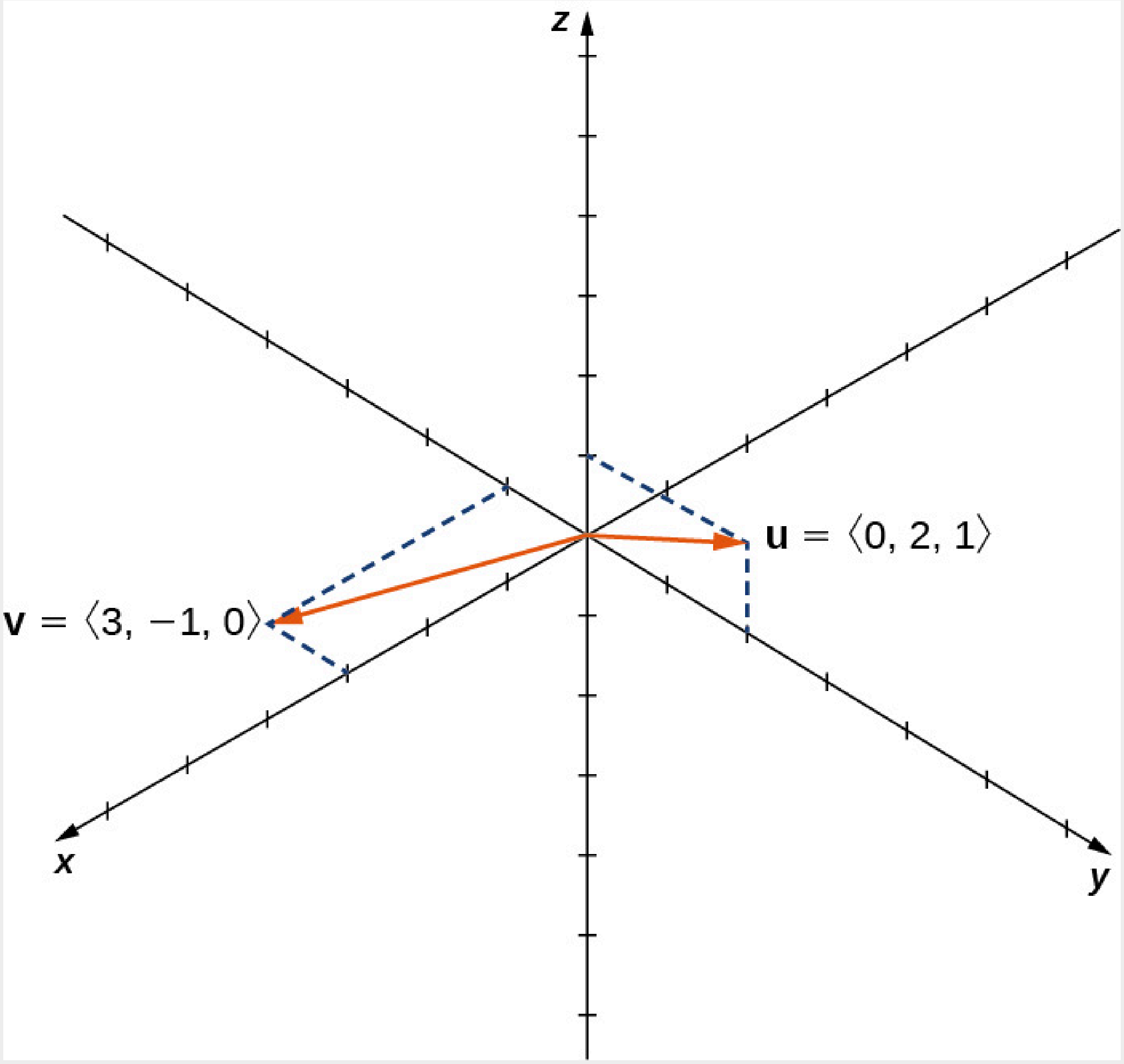


Figura 2.55 ¿Los productos vectoriales $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ están en la misma dirección?

[Show/Hide Solution]

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \langle (0+1), -(0-3), (0-6) \rangle = \langle 1, 3, -6 \rangle \\ \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= \langle (-1-0), -(3-0), (6-0) \rangle = \langle -1, -3, 6 \rangle . \end{aligned}$$

Lo vemos, en este caso, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ (Figura 2.56). Lo demostraremos en general más adelante en esta sección.

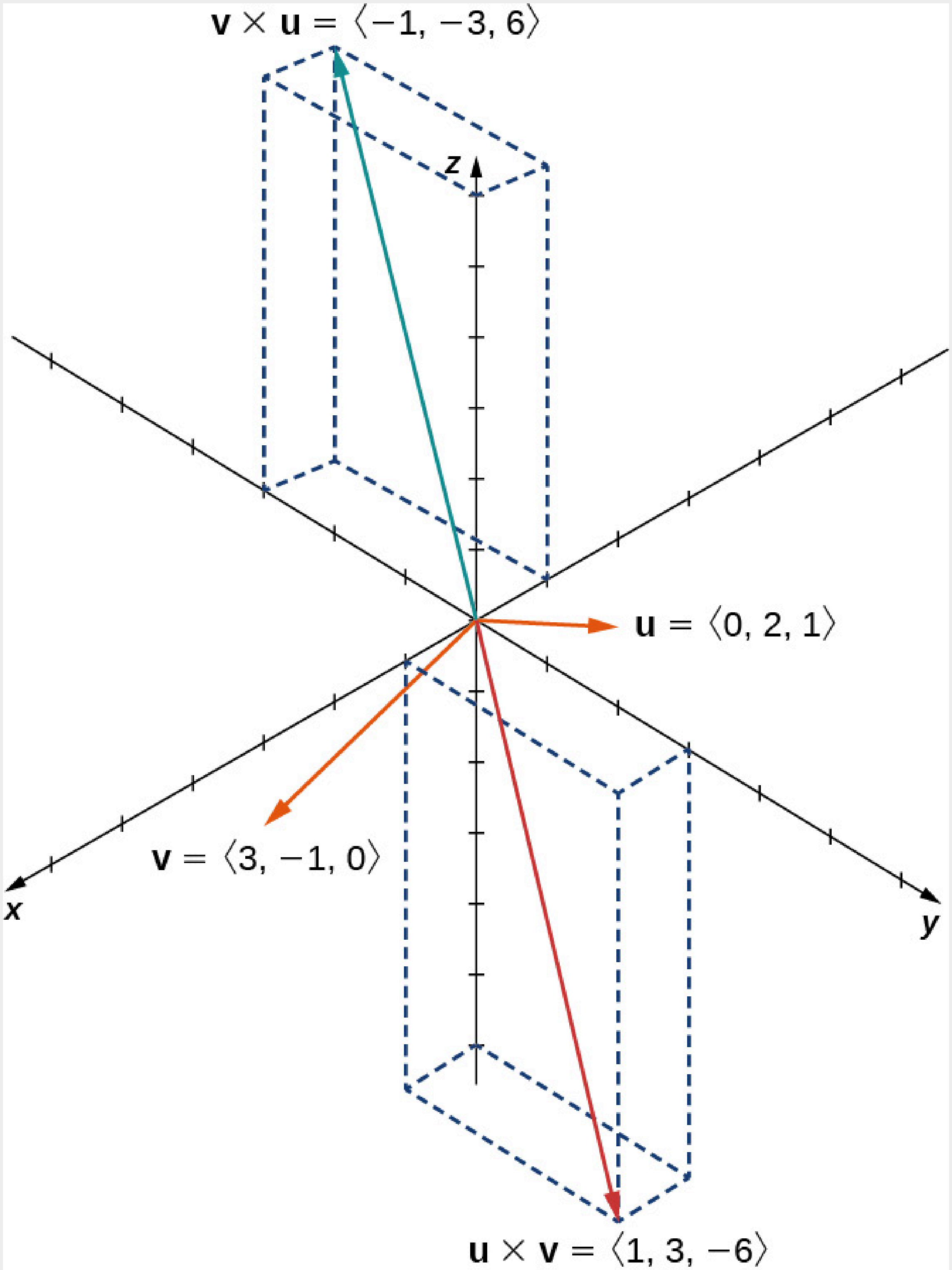


Figura 2.56 Los productos vectoriales $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ son ambos ortogonales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, pero en sentidos opuestos.

PUNTO DE CONTROL 2.31

Supongamos que los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se encuentran en el plano *xy* (el componente *z* de cada vector es cero). Supongamos ahora que los componentes *x* y *y* de $\mathbf{u}$ y el componente *y* de $\mathbf{v}$ son todos positivos, mientras que el componente *x* de $\mathbf{v}$ es negativo. Suponiendo que los ejes de coordenadas están orientados en las posiciones habituales, ¿en qué dirección apunta $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

Los productos vectoriales de los vectores normales unitarios $\mathbf{i}, \mathbf{j},$ y $\mathbf{k}$ pueden ser útiles para simplificar algunos cálculos, a
que consideremos estos productos vectoriales. Una aplicación directa de la definición muestra que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

(El producto vectorial de dos vectores es un vector, por lo que cada uno de estos productos da como resultado el vector cero, no el escalar $0.$) Queda de su parte verificar los cálculos.

Además, como el producto vectorial de dos vectores es ortogonal a cada uno de ellos, sabemos que el producto vectorial de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ es paralelo a $\mathbf{k}$. Del mismo modo, el producto vectorial de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{k}$ es paralelo a $\mathbf{j}$, y el producto vectorial de $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ es
paralelo a $\mathbf{i}$. Podemos utilizar la regla de la mano derecha para determinar la dirección de cada producto. Entonces tenemos

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{i} \times \mathbf{j} & = & \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} & = & \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} & = & \mathbf{j} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{j} \times \mathbf{i} & = & -\mathbf{k} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{j} & = & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} & = & -\mathbf{j}. \end{array}$$

Estas fórmulas serán útiles más adelante.

EJEMPLO 2.33

Producto vectorial de vectores normales unitarios

Halle $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$.

[Show/Hide Solution]

PUNTO DE CONTROL 2.32

Halle $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{i})$.

Como hemos visto, el *producto escalar* se llama así porque da como resultado un escalar. El producto vectorial da como resultado un vector, por lo que se denomina **producto vectorial**. Estas operaciones son ambas versiones de la multiplicación de vectores, pero tienen propiedades y aplicaciones muy diferentes. Exploremos algunas propiedades del producto vectorial. Solo probamos algunas de ellos. Las pruebas de las demás propiedades se dejan como ejercicios.

TEOREMA 2.6

Propiedades del producto vectorial

Supongamos que $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ son vectores en el espacio, y que c es un escalar.

i.	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$	Anticonmutatividad
ii.	$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$	Propiedad distributiva
iii.	$c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$	Multiplicación por una constante
iv.	$\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$	Producto vectorial del vector cero
v.	$\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$	Producto vectorial de un vector consigo mismo
vi.	$\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\mathbf{w}$	Triple producto escalar

Prueba

Para la propiedad i, queremos demostrar que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \times \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \\
&= \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, -u_1 v_3 + u_3 v_1, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle \\
&= -\langle u_3 v_2 - u_2 v_3, -u_3 v_1 + u_1 v_3, u_2 v_1 - u_1 v_2 \rangle \\
&= -\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \times \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \\
&= -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}).
\end{aligned}$$

A diferencia de la mayoría de las operaciones que hemos visto, el producto vectorial no es conmutativo. Esto tiene sentid si pensamos en la regla de la mano derecha.

Para la propiedad iv, esto se deduce directamente de la definición del producto vectorial. Tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \times \mathbf{0} &= \langle u_2(0) - u_3(0), -(u_2(0) - u_3(0)), u_1(0) - u_2(0) \rangle \\
&= \langle 0, 0, 0 \rangle = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Entonces, por la propiedad i., $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$ también. Recuerde que el producto escalar de un vector por el vector cero es *escalar* 0, mientras que el producto vectorial de un vector con el vector cero es el *vector* $\mathbf{0}$.

Propiedad vi. se parece a la propiedad asociativa, pero note el cambio en las operaciones:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \mathbf{u}.\langle v_2 w_3 - v_3 w_2, -v_1 w_3 + v_3 w_1, v_1 w_2 - v_2 w_1 \rangle \\
&= u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(-v_1 w_3 + v_3 w_1) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1) \\
&= u_1 v_2 w_3 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 \\
&= (u_2 v_3 - u_3 v_2) w_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) w_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) w_3 \\
&= \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle . \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \\
&= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).\mathbf{w}.
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.34

Uso de las propiedades del producto vectorial

Utilice las propiedades del producto vectorial para calcular $(2\mathbf{i} \times 3\mathbf{j}) \times \mathbf{j}$.

[Show/Hide Solution]

Solución

$$\begin{aligned}(2\mathbf{i} \times 3\mathbf{j}) \times \mathbf{j} &= 2\,(\mathbf{i} \times 3\mathbf{j}) \times \mathbf{j} \\ &= 2\,(3)\,(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \\ &= (6\mathbf{k}) \times \mathbf{j} \\ &= 6\,(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) \\ &= 6\,(-\mathbf{i}) = -6\mathbf{i}.\end{aligned}$$

PUNTO DE CONTROL 2.33

Utilice las propiedades del producto vectorial para calcular $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{k} \times \mathbf{j})$.

Hasta ahora, en esta sección, nos hemos ocupado de la dirección del vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, pero no hemos discutido su magnitud. Resulta que hay una expresión sencilla para la magnitud de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ que implica las magnitudes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y el seno del ángulo entre ellos.

TEOREMA 2.7

Magnitud del producto vectorial

Supongamos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores y que θ es el ángulo entre ellos. Entonces, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \,.\, \|\mathbf{v}\| \,.\, \operatorname{sen} \theta$.

Prueba

Supongamos que $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son vectores y que θ denota el ángulo entre ellos. Entonces

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \\
&= u_2^2v_3^2 - 2u_2u_3v_2v_3 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_1^2 - 2u_1u_3v_1v_3 + u_1^2v_3^2 + u_1^2v_2^2 - 2u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_1^2 \\
&= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 \\
&\quad - \left(u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + 2u_1u_2v_1v_2 + 2u_1u_3v_1v_3 + 2u_2u_3v_2v_3\right) \\
&= \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}.\,\mathbf{v})^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\cos^2\theta \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\left(1 - \cos^2\theta\right) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\left(\operatorname{sen}^2\theta\right).
\end{aligned}$$

Tomando las raíces cuadradas y observando que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta$ para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, tenemos el resultado deseado:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\operatorname{sen}\theta.$$

□

Esta definición del producto vectorial nos permite visualizar o interpretar el producto geométricamente. Está claro, por ejemplo, que el producto vectorial se define solo para vectores en tres dimensiones, no para vectores en dos dimensiones En dos dimensiones, es imposible generar un vector simultáneamente ortogonal a dos vectores no paralelos.

EJEMPLO 2.35

Cálculo del producto vectorial

Utilice las Propiedades del producto vectorial para hallar la magnitud del producto vectorial de $\mathbf{u} = \langle 0, 4, 0\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0, 0, -3\rangle$.

[Show/Hide Solution]

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| &= \|\mathbf{u}\|\,.\,\|\mathbf{v}\|\,.\operatorname{sen}\theta \\
&= \sqrt{0^2 + 4^2 + 0^2}.\,\sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2}.\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} \\
&= 4(3)(1) = 12.
\end{aligned}$$

PUNTO DE CONTROL 2.34

Utilice las Propiedades del producto vectorial para hallar la magnitud de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = \langle -8, 0, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0, 2, 0 \rangle$.

Determinantes y producto vectorial

Usar la Ecuación 2.9 para hallar el producto vectorial de dos vectores es sencillo, y presenta el producto vectorial en la forma útil de componentes. La fórmula, sin embargo, es complicada y difícil de recordar. Afortunadamente, tenemos una alternativa. Podemos calcular el producto vectorial de dos vectores utilizando la notación de **determinantes**.

Una determinante 2×2 se define como

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3\,(1) - 5\,(-2) = 3 + 10 = 13.$$

Un determinante 3×3 se define en términos de determinantes 2×2 de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \quad (2.1$$

La Ecuación 2.10 se denomina *expansión del determinante a lo largo de la primera fila*. Observe que los multiplicadores de cada uno de los determinantes 2×2 del lado derecho de esta expresión son las entradas de la primera fila del determinante 3×3. Además, cada uno de los determinantes 2×2 contiene las entradas del determinante 3×3 que quedaría si se tacha la fila y la columna que contiene el multiplicador. Así, para el primer término de la derecha, a_1 es el multiplicador, y el determinante 2×2 contiene las entradas que quedan si se tacha la primera fila y la primera columna d determinante 3×3. Del mismo modo, para el segundo término, el multiplicador es a_2, y el determinante 2×2 contiene las entradas que quedan si se tacha la primera fila y la segunda columna del determinante 3×3. Sin embargo, observe que el coeficiente del segundo término es negativo. El tercer término puede calcularse de forma similar.

EJEMPLO 2.36

Uso de la expansión a lo largo de la primera fila para calcular un determinante 3×3.

Evalúe el determinante $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

[Show/Hide Solution]

Solución

Tenemos

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 2\,(4-9) - 5\,(-4+6) - 1\,(-3+2)$$
$$= 2\,(-5) - 5\,(2) - 1\,(-1) = -10 - 10 + 1$$
$$= -19.$$

PUNTO DE CONTROL 2.35

Evalúe el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Técnicamente, los determinantes se definen solo en términos de matrices de números reales. Sin embargo, la notación de determinante proporciona un dispositivo nemotécnico útil para la fórmula del producto vectorial.

REGLA: PRODUCTO VECTORIAL CALCULADO MEDIANTE UN DETERMINANTE

Supongamos que $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ son vectores. Entonces el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ está dada por

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 2.37

Utilizando la notación de determinantes para hallar $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$

Supongamos que $\mathbf{p} = \langle -1, 2, 5 \rangle$ y $\mathbf{q} = \langle 4, 0, -3 \rangle$. Halle $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$.

[Show/Hide Solution]

Solución

Establecemos nuestro determinante poniendo los vectores normales unitarios a través de la primera fila, los componentes de $\mathbf{u}$ en la segunda fila, y los componentes de $\mathbf{v}$ en la tercera fila. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{p}\times\mathbf{q} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 2 & 5\\ 4 & 0 & -3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 5\\ 0 & -3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}-1 & 5\\ 4 & -3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= (-6-0)\,\mathbf{i} - (3-20)\,\mathbf{j} + (0-8)\,\mathbf{k}\\ &= -6\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Observe que esta respuesta confirma el cálculo del producto vectorial en el Ejemplo 2.31.

PUNTO DE CONTROL 2.36

Utilice la notación de determinantes para hallar $\mathbf{a}\ \times\ \mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} = \langle 8,2,3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1,0,4\rangle$.

Uso del producto vectorial

El producto vectorial es muy útil para varios tipos de cálculos, como hallar un vector ortogonal a dos vectores dados, calcular áreas de triángulos y paralelogramos e incluso determinar el volumen de la forma geométrica tridimensional hecha de paralelogramos conocida como *paralelepípedo*. Los siguientes ejemplos ilustran estos cálculos.

EJEMPLO 2.38

Hallar un vector unitario ortogonal a dos vectores dados

Supongamos que $\mathbf{a} = \langle 5,2,-1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 0,-1,4\rangle$. Halle un vector unitario ortogonal a ambos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

[Show/Hide Solution]

Solución

El producto vectorial $\mathbf{a}\ \times\ \mathbf{b}$ es ortogonal a ambos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Podemos calcularlo con un determinante:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 5 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix}5 & -1\\ 0 & 4\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix}5 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\mathbf{k}\\ &= (8-1)\,\mathbf{i} - (20-0)\,\mathbf{j} + (-5-0)\,\mathbf{k}\\ &= 7\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Normalice este vector para hallar un vector unitario en la misma dirección:

$$\|\mathbf{a}\ \times\ \mathbf{b}\| = \sqrt{(7)^2 + (-20)^2 + (-5)^2} = \sqrt{474}.$$

Por lo tanto, $\left\langle \frac{7}{\sqrt{474}}, \frac{-20}{\sqrt{474}}, \frac{-5}{\sqrt{474}} \right\rangle$ es un vector unitario ortogonal a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

PUNTO DE CONTROL 2.37

Halle un vector unitario ortogonal a ambos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} = \langle 4, 0, 3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 4 \rangle$.

Para utilizar el producto vectorial para el cálculo de áreas, enunciamos y demostramos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.8

Área de un paralelogramo

Si localizamos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de manera que formen lados adyacentes de un paralelogramo, entonces el área del paralelogramo está dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ (Figura 2.57).

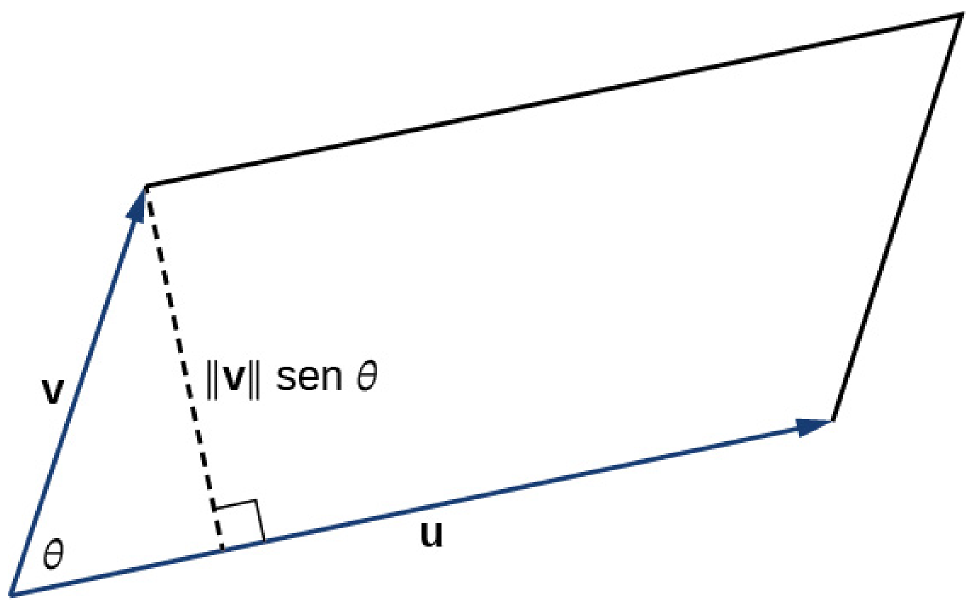


Figura 2.57 El paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tiene base $\|\mathbf{u}\|$ y altura $\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$.

Prueba

Demostramos que la magnitud del producto vectorial es igual a la base por la altura del paralelogramo.

$$\begin{aligned} \text{Área de un paralelogramo} &= \text{base} \times \text{altura} \\ &= \|\mathbf{u}\| \left(\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta\right) \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.39

Cómo calcular el área de un triángulo

Supongamos que $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 1, 0)$, y $R = (0, 0, 1)$ son los vértices de un triángulo (Figura 2.58). Calcule su área.

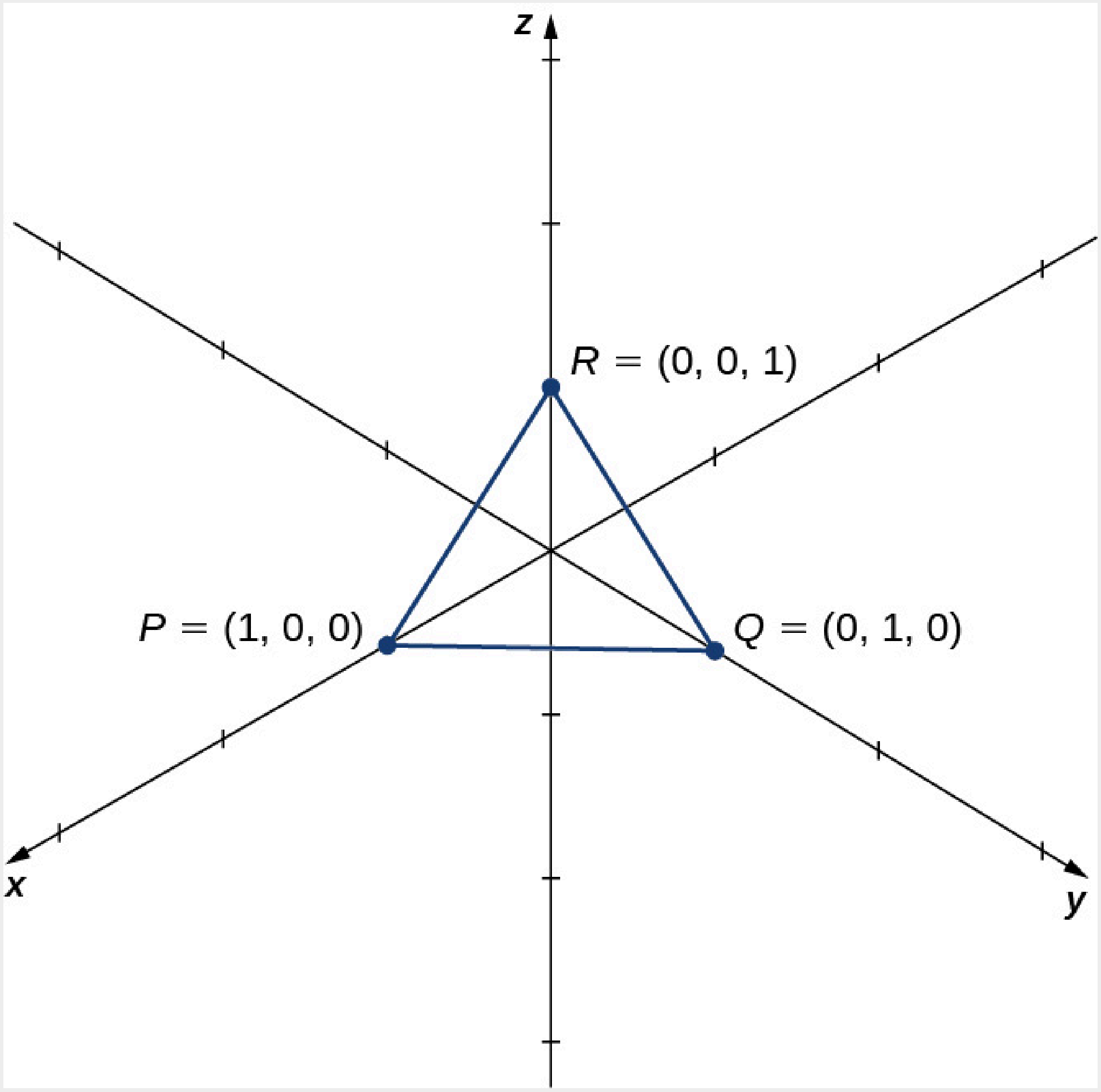


Figura 2.58 Calcular el área de un triángulo utilizando el producto vectorial.

[Show/Hide Solution]

Solución

Tenemos $\overrightarrow{PQ} = \langle 0-1, 1-0, 0-0 \rangle = \langle -1, 1, 0 \rangle$ y $\overrightarrow{PR} = \langle 0-1, 0-0, 1-0 \rangle = \langle -1, 0, 1 \rangle$. El área del paralelogramo con lados adyacentes $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ está dada por $\left\| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right\|$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-0)\,\mathbf{i} - (-1-0)\,\mathbf{j} + (0-(-1))\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \\ \left\| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} \right\| &= \| \langle 1, 1, 1 \rangle \| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

El área de ΔPQR es la mitad del área del paralelogramo, o $\sqrt{3}/2$.

PUNTO DE CONTROL 2.38

Calcule el área del paralelogramo $PQRS$ con vértices $P\,(1,1,0)$, $Q\,(7,1,0)$, $R\,(9,4,2)$, y $S\,(3,4,2)$.

El triple producto escalar

Como el producto vectorial de dos vectores es un vector, es posible combinar el producto escalar y el producto vectorial. producto escalar de un vector por el producto vectorial de otros dos vectores se llama triple producto escalar porque el resultado es un escalar.

DEFINICIÓN

El **triple producto escalar** de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ es $\mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right)$.

TEOREMA 2.9

Cálculo de un triple producto escalar

El triple producto escalar de los vectores $\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$, y $\mathbf{w}=w_1\mathbf{i}+w_2\mathbf{j}+w_3\mathbf{k}$ es el determinante de la matriz $3\ \times\ 3$ formada por los componentes de los vectores:

$$\mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right)=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Prueba

El cálculo es sencillo.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right) &= \langle u_1,u_2,u_3\rangle\,.\,\langle v_2w_3-v_3w_2,-v_1w_3+v_3w_1,v_1w_2-v_2w_1\rangle \\ &= u_1\left(v_2w_3-v_3w_2\right)+u_2\left(-v_1w_3+v_3w_1\right)+u_3\left(v_1w_2-v_2w_1\right) \\ &= u_1\left(v_2w_3-v_3w_2\right)-u_2\left(v_1w_3-v_3w_1\right)+u_3\left(v_1w_2-v_2w_1\right) \\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.40

Cálculo del triple producto escalar

Supongamos que $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 0 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -3, 0, -1 \rangle$. Calcule el triple producto escalar $\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

[Show/Hide Solution]

Solución

Aplique Cálculo de un triple producto escalar directamente:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1-0) - 3(-2-0) + 5(0-3) \\ &= 1 + 6 - 15 = -8.\end{aligned}$$

PUNTO DE CONTROL 2.39

Calcule el triple producto escalar $\mathbf{a}.(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, donde $\mathbf{a} = \langle 2, -4, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 3, -1 \rangle$, y $\mathbf{c} = \langle 5, -3, 3 \rangle$.

Cuando creamos una matriz a partir de tres vectores, debemos tener cuidado con el orden en que enumeramos los vectores. Si los enumeramos en una matriz en un orden y luego reordenamos las filas, el valor absoluto del determinante r cambia. Sin embargo, cada vez que dos filas cambian de lugar, el determinante cambia de signo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = d \qquad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -d \qquad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = d \qquad \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -d.$$

Verificar este hecho es sencillo, pero bastante complicado. Veamos esto con un ejemplo:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (0-3) - 2(2-12) + (-2-0) = -3 + 20 - 2 = 15.\end{aligned}$$

Cambiando las dos filas superiores tenemos

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2\left(-2-1\right) + 3\left(1-8\right) = 6 - 21 = -15.$$

Reordenar los vectores en los productos triples equivale a reordenar las filas de la matriz del determinante. Supongamos que $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, y $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$. Aplicando Cálculo de un triple producto escalar, tenemos

$$\mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}.\left(\mathbf{w}\ \times\ \mathbf{v}\right) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Podemos obtener el determinante para calcular $\mathbf{u}.\left(\mathbf{w}\ \times\ \mathbf{v}\right)$ cambiando las dos filas inferiores de $\mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right)$. Por lo tanto, $\mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right) = -\mathbf{u}.\left(\mathbf{w}\ \times\ \mathbf{v}\right)$.

Siguiendo este razonamiento y explorando las diferentes formas en que podemos intercambiar variables en el triple producto escalar nos lleva a las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right) &= -\mathbf{u}.\left(\mathbf{w}\ \times\ \mathbf{v}\right) \\ \mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right) &= \mathbf{v}.\left(\mathbf{w}\ \times\ \mathbf{u}\right) = \mathbf{w}.\left(\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v}\right). \end{aligned}$$

Supongamos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores en posición estándar. Si los valores de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no son múltiplos escalares entre s entonces estos vectores forman lados adyacentes de un paralelogramo. Hemos visto en Área de un paralelogramo que el área de este paralelogramo es $\left\|\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v}\right\|$. Supongamos ahora que añadimos un tercer vector $\mathbf{w}$ que no se encuentra en mismo plano que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ pero sigue compartiendo el mismo punto inicial. Entonces estos vectores forman tres aristas de u **paralelepípedo**, un prisma tridimensional con seis caras que son cada una paralelogramos, como se muestra en la Figura 2.59. El volumen de este prisma es el producto de la altura de la figura por el área de su base. El triple producto escalar de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ proporciona un método sencillo para calcular el volumen del paralelepípedo definido por estos vectores.

TEOREMA 2.10

Volumen de un paralelepípedo

El volumen de un paralelepípedo con aristas adyacentes dado por los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v},\ \text{y}\ \mathbf{w}$ es el valor absoluto del triple producto escalar:

$$V = \left|\mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right)\right|.$$

Vea la Figura 2.59.

Observe que, como su nombre indica, el triple producto escalar produce un escalar. La fórmula del volumen que acabamc de presentar utiliza el valor absoluto de una cantidad escalar.

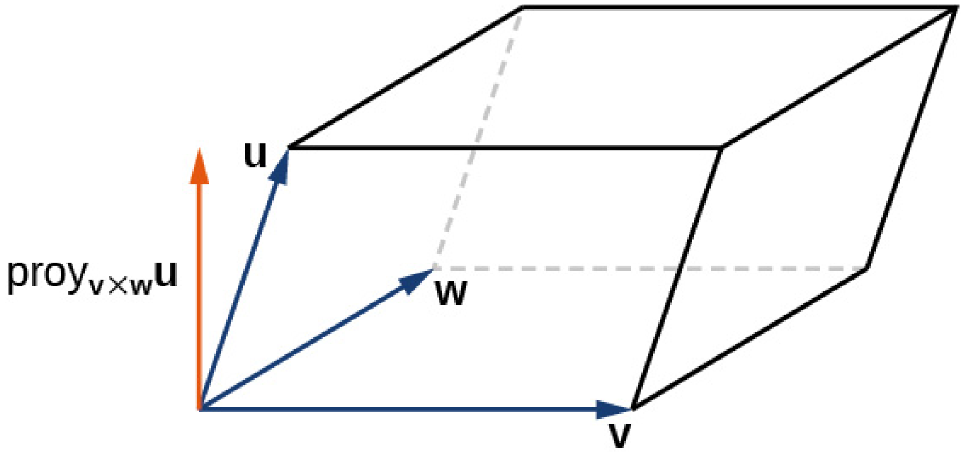


Figura 2.59 La altura del paralelepípedo está dada por $\|\text{proj}_{\text{v}\times\text{w}}\mathbf{u}\|$.

Prueba

El área de la base del paralelepípedo está dada por $\|\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\|$. La altura de la figura está dada por $\|\text{proj}_{\text{v}\times\text{w}}\mathbf{u}\|$. El volumen del paralelepípedo es el producto de la altura por el área de la base, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} V &= \|\text{proj}_{\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}}\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\| \\ &= \left|\frac{\mathbf{u}.(\mathbf{v}\times\mathbf{w})}{\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\|}\right|\ \|\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\| \\ &= |\mathbf{u}.\left(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{w}\right)|\,. \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 2.41

Cálculo del volumen de un paralelepípedo

Supongamos que $\mathbf{u} = \langle -1, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, 3, 2\rangle$, y $\mathbf{w} = \langle 0, -5, -2\rangle$. Calcule el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes $\mathbf{u}, \mathbf{v},$ y $\mathbf{w}$ (Figura 2.60).

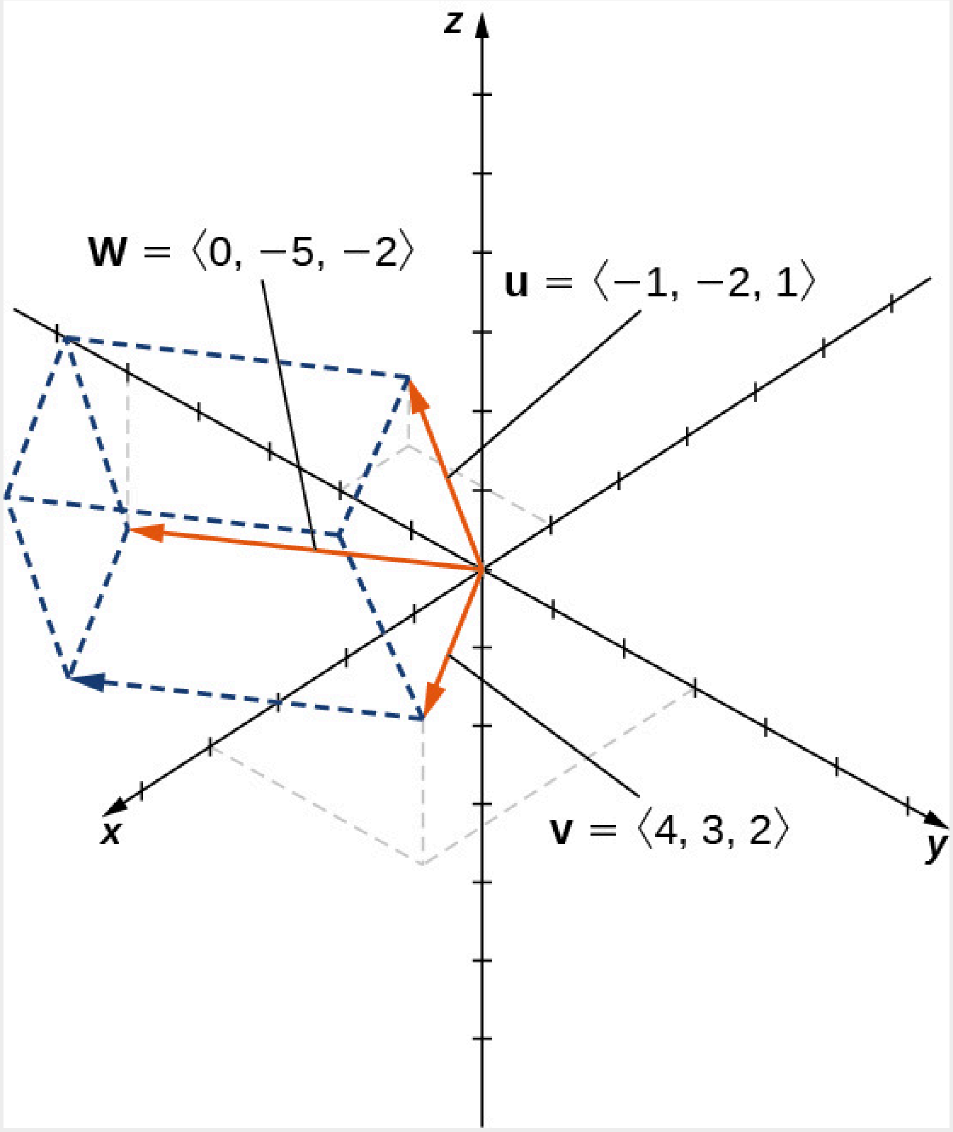


Figura 2.60

[Show/Hide Solution]

PUNTO DE CONTROL 2.40

Calcule el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Aplicaciones del producto vectorial

El producto vectorial aparece en muchas aplicaciones prácticas en matemáticas, física e ingeniería. Examinemos algunas de estas aplicaciones, incluida la idea de torque, con la que comenzamos esta sección. Otras aplicaciones aparecen en capítulos posteriores, especialmente en nuestro estudio de los campos vectoriales, como los campos gravitatorios y electromagnéticos (Introducción al cálculo vectorial).

EJEMPLO 2.42

Uso del triple producto escalar

Utilice el triple producto escalar para demostrar que los vectores $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 2, 4\rangle$, y $\mathbf{w} = \langle 1, -1, 3\rangle$ son coplanarios, es decir, demuestre que estos vectores se encuentran en el mismo plano.

[Show/Hide Solution]

Solución

Comience calculando el triple producto escalar para calcular el volumen del paralelepípedo definido por $\mathbf{u}, \mathbf{v},$ y $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}.\left(\mathbf{v} \times \mathbf{w}\right) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \left[2\left(2\right)\left(3\right)+\left(0\right)\left(4\right)\left(1\right)+5\left(2\right)\left(-1\right)\right]-\left[5\left(2\right)\left(1\right)+\left(2\right)\left(4\right)\left(-1\right)+\left(0\right)\left(2\right)\left(3\right)\right] \\ &= 2-2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

El volumen del paralelepípedo es 0 unidades^3, por lo que una de las dimensiones debe ser cero. Por lo tanto, los tres vectores se encuentran en el mismo plano.

PUNTO DE CONTROL 2.41

¿Son los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ coplanarios?

EJEMPLO 2.43

Hallar un vector ortogonal

Solo un único plano puede pasar por cualquier conjunto de tres puntos no colineales. Halle un vector ortogonal al plano que contiene los puntos $P = (9, -3, -2)$, $Q = (1, 3, 0)$, y $R = (-2, 5, 0)$.

[Show/Hide Solution]

Solución

El plano debe contener los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 1 - 9, 3 - (-3), 0 - (-2) \rangle = \langle -8, 6, 2 \rangle$$
$$\overrightarrow{QR} = \langle -2 - 1, 5 - 3, 0 - 0 \rangle = \langle -3, 2, 0 \rangle .$$

El producto vectorial $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}$ da un vector ortogonal a ambos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$. Por lo tanto, el producto vectorial es ortogonal al plano que contiene estos dos vectores:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -8 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 16\mathbf{k} - (-18\mathbf{k} + 4\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \\ &= -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Hemos visto cómo utilizar el triple producto escalar y cómo hallar un vector ortogonal a un plano. Ahora aplicamos el producto vectorial a situaciones del mundo real.

A veces una fuerza hace que un objeto gire. Por ejemplo, al girar un destornillador o una llave inglesa se produce este tipo de efecto de rotación, llamado torque.

DEFINICIÓN

Torque, τ (la letra griega *tau*), mide la tendencia de una fuerza para producir una rotación alrededor de un eje de rotación. Supongamos que $\mathbf{r}$ es un vector con un punto inicial situado en el eje de rotación y con un punto terminal situado en el punto donde se aplica la fuerza, y que el vector $\mathbf{F}$ representa la fuerza. Entonces el torque es igual al producto vectorial de $\mathbf{r}$ y $\mathbf{F}$:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Vea la Figura 2.61.

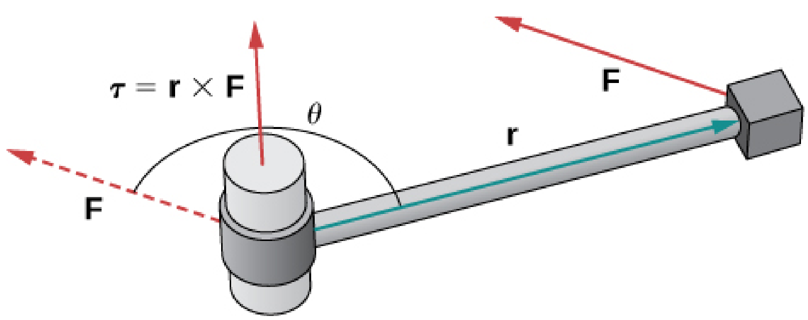


Figura 2.61 El torque mide cómo una fuerza hace girar un objeto.

Piense en cómo se usa una llave inglesa para apretar un tornillo. El torque τ aplicado al tornillo depende de la intensidad con la que empujemos la llave (fuerza) y de la distancia a la que apliquemos la fuerza (distancia). El torque aumenta con un mayor fuerza en la llave a una mayor distancia del tornillo. Las unidades comunes de torque son el newton-metro o el pie-libra. Aunque el torque es dimensionalmente equivalente al trabajo (tiene las mismas unidades), los dos conceptos son distintos. El torque se utiliza específicamente en el contexto de la rotación, mientras que el trabajo suele implicar el movimiento a lo largo de una línea.

EJEMPLO 2.44

Evaluación del torque

Un tornillo se aprieta aplicando una fuerza de 6 N a una llave de 0,15 m (Figura 2.62). El ángulo entre la llave y el vector fuerza es de 40°. Halle la magnitud del torque alrededor del centro del tornillo. Redondee la respuesta a dos decimales.

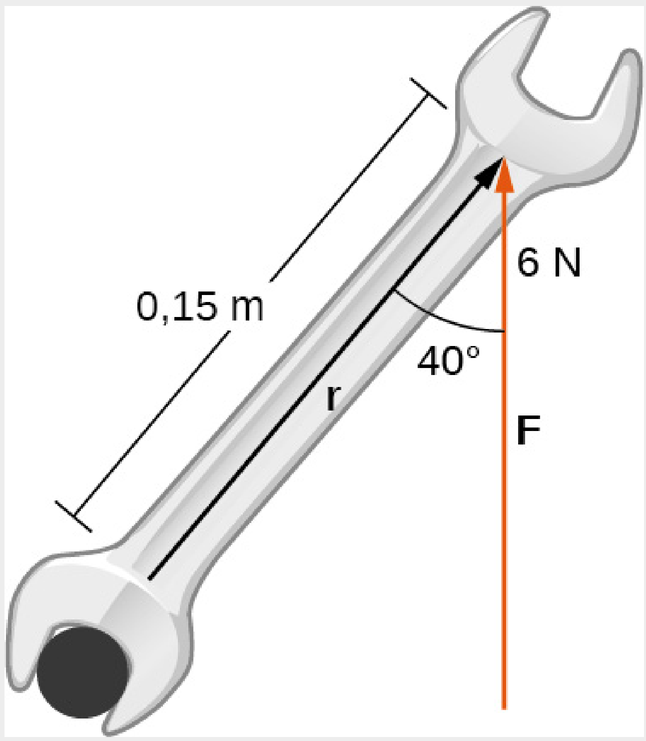


Figura 2.62 El torque describe la acción de giro de la llave.

[Show/Hide Solution]

Solución

Sustituya la información dada en la ecuación que define el torque:

$$\|\tau\| = \|\mathbf{r} \times \mathbf{F}\| = \|\mathbf{r}\| \, \|\mathbf{F}\| \operatorname{sen} \theta = (0{,}15 \text{ m})(6 \text{ N}) \operatorname{sen} 40^\circ \approx 0{,}58 \text{ N. m.}$$

PUNTO DE CONTROL 2.42

Calcule la fuerza necesaria para producir un torque de $15\ \mathrm{N.m}$ a un ángulo de 30^{o} desde una varilla de 150 cm.

Sección 2.4 ejercicios

En los siguientes ejercicios, los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están dados.

a. Halle el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Exprese la respuesta en forma de componentes.
b. Dibuje los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v},$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

183. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 2, 0 \rangle$

184. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 1, 0 \rangle$

185. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

186. $\mathbf{u} = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$

187. Simplifique $(\mathbf{i} \times \mathbf{i} - 2\mathbf{i} \times \mathbf{j} - 4\mathbf{i} \times \mathbf{k} + 3\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \times \mathbf{i}$.

188. Simplifique $\mathbf{j} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{j} + 2\mathbf{j} \times \mathbf{i} - 3\mathbf{j} \times \mathbf{j} + 5\mathbf{i} \times \mathbf{k})$.

En los siguientes ejercicios, los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están dados. Halle el vector unitario $\mathbf{w}$ en la dirección del vector del producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Exprese su respuesta utilizando vectores normales unitarios.

189. $\mathbf{u} = \langle 3, -1, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 0, 1 \rangle$

190. $\mathbf{u} = \langle 2, 6, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 0, 1 \rangle$

191. $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$, donde $A(1, 0, 1), B(1, -1, 3)$, y $C(0, 0, 5)$ grandes.

192. $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}, \mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, donde $P(-1, 1, 0)$ y $Q(0, 2, 1)$

193. Determine el número real α tal que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{i}$ sean ortogonales, donde $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$.

194. Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $2\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ no pueden ser ortogonales para cualquier número real α, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

195. Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores distintos de cero.

196. Demuestre que $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ es ortogonal a $(\mathbf{u}.\mathbf{v})(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{u}$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores distintos de cero.

197. Calcule el determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

198. Calcule el determinante $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

En los siguientes ejercicios, los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están dados. Utilice la notación de determinantes para hallar el vector $\mathbf{w}$ ortogonal a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

199. $\mathbf{u} = \langle -1, 0, e^t \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, e^{-t}, 0 \rangle$, donde t es un número real

200. $\mathbf{u} = \langle 1, 0, x \rangle$, $\mathbf{v} = \left\langle \frac{2}{x}, 1, 0 \right\rangle$, donde x es un número real distinto de cero

201. Halle el vector $(\mathbf{a} - 2\mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, donde $\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$, y $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

202. Halle el vector $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})$, donde $\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, y $\mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$.

203. **[T]** Utilice el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ para hallar el ángulo agudo entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$. Exprese la respuesta en grados redondeados al número entero más cercano.

204. **[T]** Utilice el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ para hallar el ángulo obtuso entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. Exprese la respuesta en grados redondeados al número entero más cercano.

205. Utilice el seno y el coseno del ángulo entre dos vectores distintos de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para demostrar la identidad de Lagrange: $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2$.

206. Verifique la identidad de Lagrange $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u}.\mathbf{v})^2$ para los vectores $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

207. Los vectores distintos de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se llaman *colineales* si existe un escalar distinto de cero α tal que $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$. Demuestre que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son colineales si y solo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

208. Los vectores distintos de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se llaman *colineales* si existe un escalar distinto de cero α tal que $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$. Demuestre que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son colineales, donde $A(4, 1, 0)$, $B(6, 5, -2)$, y $C(5, 3, -1)$.

209. Calcule el área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{u} = \langle 3, 2, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 0, 2, 1 \rangle$.

210. Calcule el área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

211. Considere los puntos $A(3, -1, 2)$, $B(2, 1, 5)$, y $C(1, -2, -2)$.

a. Calcule el área del paralelogramo $ABCD$ con los lados adyacentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
b. Calcule el área del triángulo ABC.
c. Calcule la distancia desde el punto A a la línea BC.

212. Considere los puntos $A(2, -3, 4)$, $B(0, 1, 2)$, y $C(-1, 2, 0)$.

a. Calcule el área del paralelogramo $ABCD$ con los lados adyacentes $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.
b. Calcule el área del triángulo ABC.
c. Calcule la distancia desde el punto B a la línea AC.

En los siguientes ejercicios, los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ están dados.

a. Calcule el triple producto escalar $\mathbf{u}.(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.
b. Calcule el volumen del paralelepípedo con las aristas adyacentes $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$.

213. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

214. $\mathbf{u} = \langle -3, 5, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 2, -2 \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle 3, 1, 1 \rangle$

215. Calcule los triples productos escalares $\mathbf{v}.\,(\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{w})$ y $\mathbf{w}.\,(\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v})$, donde $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 7, 6, 9 \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle 4, 2, 7 \rangle$.

216. Calcule los triples productos escalares $\mathbf{w}.\,(\mathbf{v}\ \times\ \mathbf{u})$ y $\mathbf{u}.\,(\mathbf{w}\ \times\ \mathbf{v})$, donde $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 5, -3 \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle 9, 5, -10 \rangle$.

217. Halle los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b},\ \text{y}\ \mathbf{c}$ con un triple producto escalar dado por el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}$. Determine su triple producto escalar.

218. El triple producto escalar de los vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b},\ \text{y}\ \mathbf{c}$ está dado por el determinante $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}$. Halle el vector $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

219. Consideremos el paralelepípedo con aristas $OA, OB,$ y OC, donde $A\,(2, 1, 0)$, $B\,(1, 2, 0)$, y $C\,(0, 1, \alpha)$.

a. Calcule el número real $\alpha > 0$ tal que el volumen del paralelepípedo sea 3 unidades^3.

b. Para $\alpha = 1,$ halle la altura h desde el vértice C del paralelepípedo. Dibuje el paralelepípedo.

220. Considere los puntos $A\,(\alpha, 0, 0)$, $B\,(0, \beta, 0)$, y $C\,(0, 0, \gamma)$, con $\alpha,\ \beta,$ y γ números reales positivos.

a. Determine el volumen del paralelepípedo de lados adyacentes $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB},$ y $\overrightarrow{OC}.$

b. Calcule el volumen del tetraedro con vértices $O, A, B,\ \text{y}\ C.$ (*Pista*: El volumen del tetraedro es $1/6$ del volumen del paralelepípedo).

c. Halle la distancia desde el origen al plano determinado por $A, B,\ \text{y}\ C.$ Dibuje el paralelepípedo y el tetraedro.

221. Supongamos que $\mathbf{u}, \mathbf{v},\ \text{y}\ \mathbf{w}$ son vectores tridimensionales y c es un número real. Demuestre las siguientes propiedades del producto vectorial.

a. $\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{u} = \mathbf{0}$

b. $\mathbf{u}\ \times\ (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v}) + (\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{w})$ grandes.

c. $c\,(\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v}) = (c\mathbf{u})\ \times\ \mathbf{v} = \mathbf{u}\ \times\ (c\mathbf{v})$ grandes.

d. $\mathbf{u}.\,(\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

222. Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 0, -8 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 6 \rangle$, y $\mathbf{w} = \langle -1, 9, 3 \rangle$ satisfacen las siguientes propiedades del producto vectorial.

a. $\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{u} = \mathbf{0}$

b. $\mathbf{u}\ \times\ (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v}) + (\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{w})$ grandes.

c. $c\,(\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v}) = (c\mathbf{u})\ \times\ \mathbf{v} = \mathbf{u}\ \times\ (c\mathbf{v})$ grandes.

d. $\mathbf{u}.\,(\mathbf{u}\ \times\ \mathbf{v}) = \mathbf{0}$

223. Los vectores distintos de cero $\mathbf{u}, \mathbf{v},\ \text{y}\ \mathbf{w}$ se dice que son *linealmente dependientes* si uno de los vectores es una combinación lineal de los otros dos. Por ejemplo, existen dos números reales distintos de cero α y β tal que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. En caso contrario, los vectores se denominan *linealmente independientes*. Demuestre que $\mathbf{u}, \mathbf{v},\ \text{y}\ \mathbf{w}$ son coplanarios si y solo si son linealmente dependientes.

224. Considere los vectores $\mathbf{u} = \langle 1, 4, -7 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 4 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 0, -9, 18 \rangle$, y $\mathbf{p} = \langle 0, -9, 17 \rangle$.

a. Demuestre que $\mathbf{u}, \mathbf{v},$ y $\mathbf{w}$ son coplanarios utilizando su triple producto escalar

b. Demuestre que $\mathbf{u}, \mathbf{v},$ y $\mathbf{w}$ son coplanarios, utilizando la definición de que existen dos números reales distintos de cero α y β tal que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$.

c. Demuestre que $\mathbf{u}, \mathbf{v},$ y $\mathbf{p}$ son linealmente independientes, es decir, ninguno de los vectores es una combinación lineal de los otros dos.

225. Considere los puntos $A(0, 0, 2)$, $B(1, 0, 2)$, $C(1, 1, 2)$, y $D(0, 1, 2)$. ¿Los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, y $\overrightarrow{AD}$ son linealmente dependientes (es decir, uno de los vectores es una combinación lineal de los otros dos)?

226. Demuestre que los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, y $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ son linealmente independientes, es decir, existen dos números reales distintos de cero α y β tal que $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} = \alpha(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \beta(\mathbf{i} - \mathbf{j})$.

227. Supongamos que $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son vectores bidimensionales. El producto cruz de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ no está definido. Sin embargo, si los vectores se consideran vectores tridimensionales $\widetilde{\mathbf{u}} = \langle u_1, u_2, 0 \rangle$ y $\widetilde{\mathbf{v}} = \langle v_1, v_2, 0 \rangle$, respectivamente, entonces, en este caso, podemos definir el producto vectorial de $\widetilde{\mathbf{u}}$ y $\widetilde{\mathbf{v}}$. En particular, en notación de determinantes, el producto vectorial de $\widetilde{\mathbf{u}}$ y $\widetilde{\mathbf{v}}$ está dada por

$$\widetilde{\mathbf{u}} \times \widetilde{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Utilice este resultado para calcular $(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta) \times (\mathbf{i}sin\theta - \mathbf{j}cos\theta)$, donde θ es un número real.

228. Considere los puntos $P(2, 1)$, $Q(4, 2)$, y $R(1, 2)$.

a. Calcule el área del triángulo $P, Q,$ y $R.$

b. Determine la distancia desde el punto R a la línea que pasa por P y Q.

229. Determine un vector de magnitud 10 perpendicular al plano que pasa por el eje *x* y el punto $P(1, 2, 4)$.

230. Determine un vector unitario perpendicular al plano que pasa por el eje *z* y el punto $A(3, 1, -2)$.

231. Considere que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores tridimensionales. Si la magnitud del vector del producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es k veces mayor que la magnitud del vector $\mathbf{u}$, demuestre que la magnitud de $\mathbf{v}$ es mayor o igual que k, donde k es un número natural.

232. **[T]** Supongamos que las magnitudes de dos vectores distintos de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son conocidas. La función $f(\theta) = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen}\theta$ define la magnitud del vector del producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\theta \in [0, \pi]$ es el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

a. Represente gráficamente la función f.

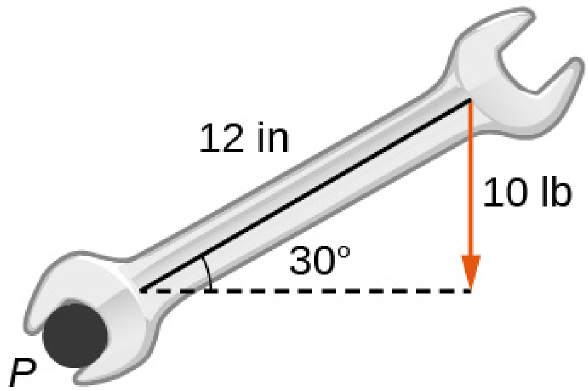
b. Calcule el mínimo y el máximo absoluto de la función f. Interprete los resultados.

c. Si los valores de $\|\mathbf{u}\| = 5$ y $\|\mathbf{v}\| = 2$, halle el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ si la magnitud de su vector del producto vectorial es igual a 9.

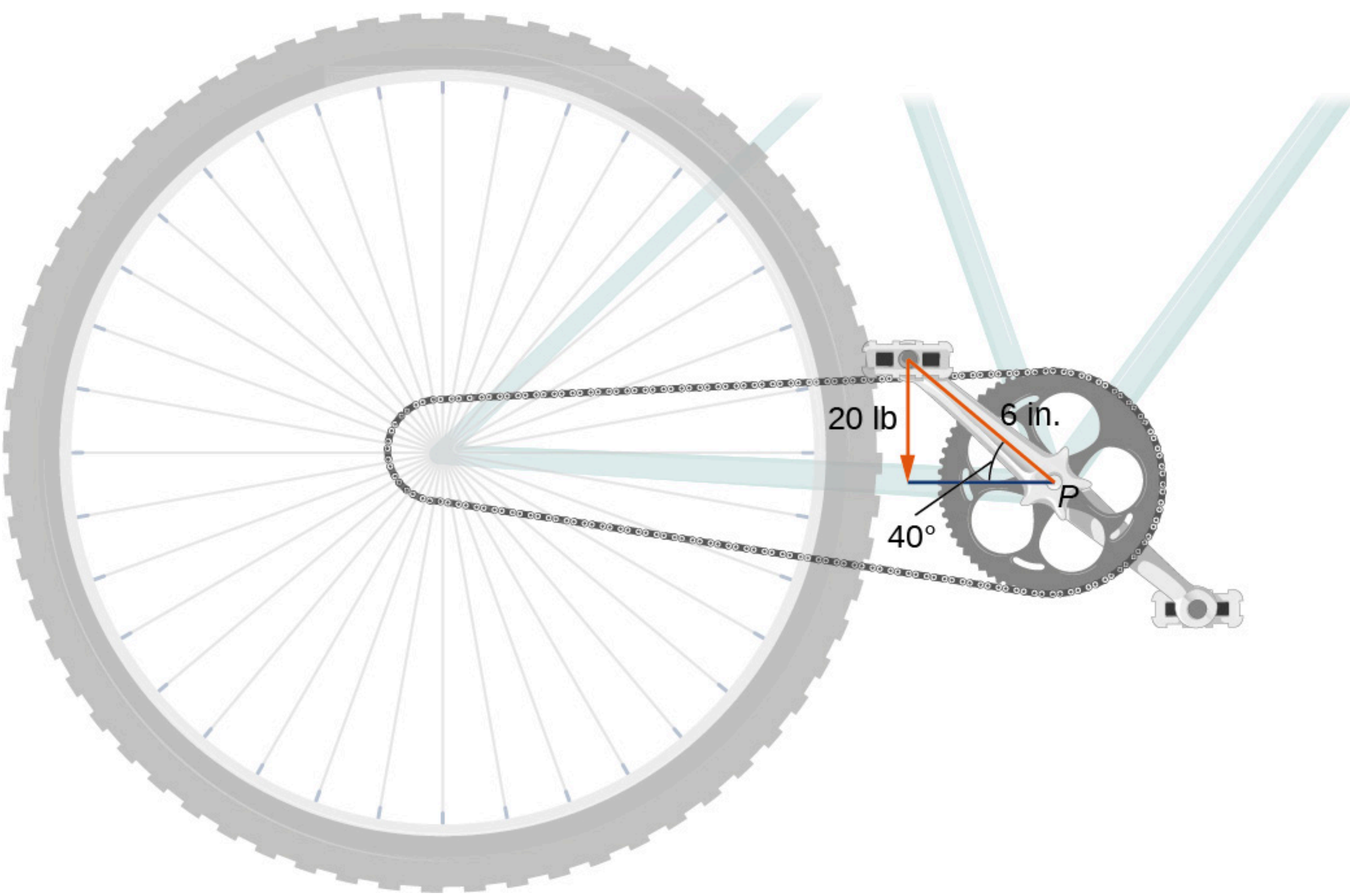
233. Halle todos los vectores $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ que satisfacen la ecuación $\langle 1, 1, 1 \rangle \times \mathbf{w} = \langle -1, -1, 2 \rangle$.

234. Resuelva la ecuación $\mathbf{w} \times \langle 1, 0, -1 \rangle = \langle 3, 0, 3 \rangle$, donde $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ es un vector distinto de cero con una magnitud de 3.

235. **[T]** Un mecánico utiliza una llave de 12 pulgadas para girar un tornillo. La llave forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si el mecánico aplica una fuerza vertical de 10 lb en el mango de la llave, ¿cuál es la magnitud del torque en el punto P (vea la siguiente figura)? Exprese la respuesta en libras-pie redondeadas a dos decimales.



236. **[T]** Un niño acciona los frenos de una bicicleta aplicando una fuerza descendente de 20 lb en el pedal cuando la manivela de 6 pulgadas forma un ángulo de 40° con la horizontal (vea la siguiente figura). Calcule el torque en el punto P. Exprese su respuesta en libras-pie redondeadas a dos decimales.



237. **[T]** Calcule la magnitud de la fuerza que hay que aplicar al extremo de una llave de 20 cm situada en la dirección positiva del eje *y* si la fuerza se aplica en la dirección $\langle 0, 1, -2 \rangle$ y produce un torque de 100 N·m al tornillo situado en el origen.

238. **[T]** ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que se debe aplicar al extremo de una llave de 1 pie con un ángulo de 35° para producir un torque de 20 N·m?

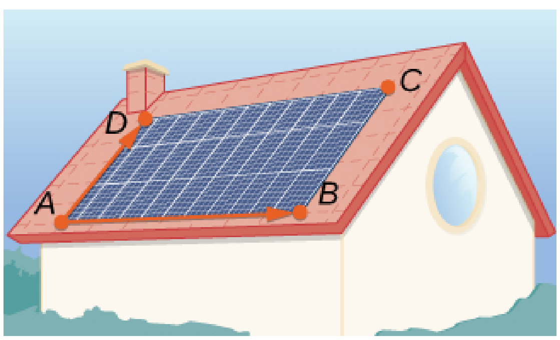
239. **[T]** El vector de fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un protón con una carga eléctrica de $1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ (en culombios) en movimiento en un campo magnético $\mathbf{B}$ donde el vector velocidad $\mathbf{v}$ está dado por $\mathbf{F} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (aquí, $\mathbf{v}$ se expresa en metros por segundo, $\mathbf{B}$ está en tesla [T] y $\mathbf{F}$ está en newtons [N]). Calcule la fuerza que actúa sobre un protón que se mueve en el plano *xy* con una velocidad $\mathbf{v} = 10^5\mathbf{i} + 10^5\mathbf{j}$ (en metros por segundo) en un campo magnético dado por $\mathbf{B} = 0{,}3\mathbf{j}$.

240. **[T]** El vector de fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un protón con una carga eléctrica de $1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ moviéndose en un campo magnético $\mathbf{B}$ donde el vector velocidad **v** está dado por $\mathbf{F} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ (aquí, $\mathbf{v}$ se expresa en metros por segundo, $\mathbf{B}$ en T, y $\mathbf{F}$ en N). Si la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un protón es $5{,}9 \times 10^{-17}$ N y el protón se mueve a la velocidad de 300 m/s en el campo magnético $\mathbf{B}$ de magnitud 2,4 T, halle el ángulo entre el vector velocidad $\mathbf{v}$ del protón y el campo magnético $\mathbf{B}$. Exprese la respuesta en grados redondeados al número entero más cercano.

241. **[T]** Considere que $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, 2t \rangle$ es el vector de posición de una partícula en el tiempo $t \in [0, 30]$, donde los componentes de $\mathbf{r}$ se expresan en centímetros y el tiempo en segundos. Supongamos que $\overrightarrow{OP}$ es el vector de posición de la partícula después de 1 seg.

a. Determine el vector unitario $\mathbf{B}(t)$ (llamado *vector binormal unitario*) que tiene la dirección del vector del producto vectorial $\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)$, donde $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ son el vector de velocidad instantánea y, respectivamente, el vector de aceleración de la partícula después de t segundos.
b. Utilice un CAS para visualizar los vectores $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{a}(1)$, y $\mathbf{B}(1)$ como vectores que parten del punto P junto con la trayectoria de la partícula.

242. Un panel solar se monta en el tejado de una casa. Se puede considerar que el panel está situado en los puntos de coordenadas (en metros) $A(8, 0, 0)$, $B(8, 18, 0)$, $C(0, 18, 8)$, y $D(0, 0, 8)$ (vea la siguiente figura).



a. Halle el vector $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ perpendicular a la superficie de los paneles solares. Exprese la respuesta utilizando vectores normales unitarios.
b. Supongamos que el vector unitario $\mathbf{s} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}$ apunta hacia el Sol en un momento determinado del día y el flujo de energía solar es $\mathbf{F} = 900\mathbf{s}$ (en vatios por metro cuadrado $[\mathrm{W/m^2}]$). Calcule la cantidad prevista de potencia eléctrica que puede producir el panel, que está dada por el producto escalar de los vectores $\mathbf{F}$ y $\mathbf{n}$ (expresado en vatios).
c. Determine el ángulo de elevación del Sol sobre el panel solar. Exprese la respuesta en grados redondeados al número entero más cercano. (*Pista*: El ángulo entre los vectores $\mathbf{n}$ y $\mathbf{s}$ y el ángulo de elevación son complementarios).