ÁLGEBRA LINEAL : Práctica Calificada 3

9 de Noviembre 2024

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

1. (3 points) **Rectas y planos en el espacio**

   1. Encuentre la ecuación del plano $\mathbf{P} = (4, 5, -5)$; $\quad \mathbf{n} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 7\hat{k}$
   2. Dos planos son ortogonales si sus vectores normales son ortogonales. Determine si los planos dados son paralelos, ortogonales, coincidentes (es decir, el mismo) o ninguno de los anteriores. $\pi_{\mathbf{1}} : 2x - y + z = 3; \quad \pi_{\mathbf{2}} : x + y + z = 3$

   Solución:

   1. Dado el punto $\mathbf{P} = (4, 5, -5)$ y el vector normal $\mathbf{n} = 4\hat{\imath}+3\hat{\jmath}-7\hat{k}$, sabemos que la ecuación general de un plano en el espacio es:

      $$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

      donde $(x_0, y_0, z_0) = (4, 5, -5)$ es un punto $\mathbf{P}$ en el plano y $(a, b, c) = (4, 3, -7)$ son las componentes del vector normal $\mathbf{n}$. Sustituyendo los valores del punto y el vector normal:

      $$4(x - 4) + 3(y - 5) - 7(z + 5) = 0$$

      Expandiendo y simplificando:

      $$\begin{aligned} 4x - 16 + 3y - 15 - 7z - 35 &= 0 \\ 4x + 3y - 7z - 66 &= 0 \end{aligned}$$

      Por lo tanto, la ecuación del plano es:

      $$4x + 3y - 7z = 66$$

   2. Para determinar la relación entre los planos dados, encontramos primero sus vectores normales.

      $$\pi_{\mathbf{1}} : 2x - y + z = 3; \quad \pi_{\mathbf{2}} : x + y + z = 3$$

      Los vectores normales ($\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$) del los planos (π_1, π_2) son:

      $$\mathbf{n_1} = \langle 2, -1, 1\rangle; \quad \mathbf{n_2} = \langle 1, 1, 1\rangle$$

      - **Para que dos planos sean paralelos**, sus vectores normales deben ser proporcionales. Comprobamos si existe un escalar λ tal que:

        $$\mathbf{n_1} = \lambda \mathbf{n_2} \Rightarrow 2 = \lambda \cdot 1, \quad -1 = \lambda \cdot 1, \quad 1 = \lambda \cdot 1$$

        Estas ecuaciones son inconsistentes (no existe un valor de λ que satisfaga todas las igualdades), por lo que $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$ no son proporcionales. Concluimos que los planos π_1 y π_2 **no son paralelos**.

- **Para que dos planos sean ortogonales**, el producto escalar de sus vectores normales debe ser cero:
$$\mathbf{n_1} \cdot \mathbf{n_2} = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(1) = 2 - 1 + 1 = 2 \neq 0$$
Dado que el producto escalar no es cero, los planos π_1 y π_2 **no son ortogonales**.
- **Para que dos planos coincidan**, deben tener vectores normales proporcionales y satisfacer la misma ecuación. Como los vectores normales (n_1, n_2) no son proporcionales, los plano π_1 y π_2 **no son coincidentes**.

Por lo tanto, los planos π_1 y π_2 no son paralelos, no son ortogonales, y no son coincidentes; por lo tanto, se clasifican como **ninguno de los anteriores**.

2. (3 points) **Subespacios vectoriales:** Determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

(A) $V = M_{mn}; H = \{S \in M_{mn} : \text{S es simetrica}\}$

(B) $V = M_{22}; H = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} a \in \mathbb{R} \right\}$

Solución:

(A) (a) Sean $A, B \in H$ y $k \in \mathbb{R}$

(b) H contiene el elemento neutro. La matriz cero $0 \in M_{mn}$ es simétrica, ya que $0^T = 0$. Por lo tanto, $0 \in H$.

(c) H es cerrado bajo la suma, entonces A y B son simétricas, es decir, $A^T = A$ y $B^T = B$. Entonces,
$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$$
lo que muestra que $A + B \in H$.

(d) H es cerrado bajo la multiplicación por escalares, entonces $A^T = A$. Como
$$(kA)^T = kA^T = kA$$
esto implica que $kA \in H$.

(e) H cumple todas las propiedades de un subespacio, por lo tanto, es un subespacio de V.

(B) (a) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \in H$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

(b) H contiene el elemento neutro. Si $a = 0$, entonces
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
la cual es la matriz cero y está en H.

(c) H es cerrado bajo la suma, $c = a + b$. Entonces,
$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a + b \\ -(a + b) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$
que también es de la forma dada, por lo que $A + B \in H$.

(d) H es cerradura bajo la multiplicación por escalares, $c = ka$. Entonces,
$$kA = \begin{pmatrix} 0 & ka \\ -ka & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}$$
que también pertenece a H porque es de la misma forma.

(e) H cumple todas las propiedades de un subespacio, por lo tanto, es un subespacio de V.

3. (3 points) **Combinación lineal y espacio generado:** Determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado

   1. En $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
   2. En $M_{22} = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$

Solución:

1. En $\mathbb{R}^3$. Dados los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

determine si generan un espacio vectorial en $\mathbb{R}^3$.
Verifiquemos si los vectores son linealmente independientes. Para ello, resolvemos el sistema:

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Si el sistema tiene solo la solución trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, los vectores son linealmente independientes y generan $\mathbb{R}^3$.
Método alternativo usando determinantes

$$\det(A) = \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ya que el determinante es no nulo, los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente independientes

2. En el espacio de matrices $M_{2\times2}$. Dados los matrices

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$$

determine si generan un espacio vectorial en $M_{2\times2}$.
Un conjunto de matrices genera el espacio $M_{2\times2}$ si cualquier matriz en $M_{2\times2}$ puede escribirse como una combinación lineal de los elementos del conjunto.
Para verificarlo, expresamos una matriz arbitraria $\mathbf{B} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ como una combinación lineal de las matrices dadas:

$$a_1\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} + a_4\begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$$

Esto equivale a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_3 = a, \\ a_1 - a_3 = b, \\ 2a_2 + 3a_4 = c, \\ 2a_2 + a_4 = d. \end{cases}$$

Esto lleva a un sistema de ecuaciones en a_1, a_2, a_3, a_4 que, al ser consistente para cualquier a, b, c, d, mostraría que el conjunto dado genera $M_{2\times 2}$.

4. (3 points) **Espacios vectoriales:** Determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

   (A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

   (B) En $P_2 : -x, x^2 - 2x, 3x + 5x^2$

   Solución:

   (A) (a) Escribimos la combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ igual a cero:

   $$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Esto nos lleva al sistema de ecuaciones:

   $$c_1 - c_2 = 0$$

   $$2c_1 - 3c_2 = 0$$

   (c) Resolviendo el sistema, encontramos que $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$ son las únicas soluciones. Como la única solución es la trivial, los vectores son **linealmente independientes**.

   (d) Método alternativo usando determinantes

   $$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 \neq 0$$

   Ya que el determinante es no nulo, los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes

   (B) Los polinomios son:

   $$p_1(x) = -x, \quad p_2(x) = x^2 - 2x, \quad p_3(x) = 3x + 5x^2$$

   (a) Escribimos la combinación lineal igual a cero:

   $$c_1(-x) + c_2(x^2 - 2x) + c_3(3x + 5x^2) = 0$$

   (b) Esto nos da el sistema de ecuaciones en términos de potencias de x:

   $$-c_1 - 2c_2 + 3c_3 = 0 \quad (\text{coeficiente de } x)$$

   $$c_2 + 5c_3 = 0 \quad (\text{coeficiente de } x^2)$$

   (c) Resolviendo este sistema, obtenemos que $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, y $c_3 = 0$ son las únicas soluciones. Dado que la única solución es la trivial, los polinomios son **linealmente independientes**.

5. (4 points) **Espacios vectoriales:** Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

   1. En $P_3 : 1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3$
   2. En $M_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

   Solución:

   1. Para determinar si $\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\}$ es una base de P_3, verificamos si este conjunto es linealmente independiente y si genera P_3.

- Observamos que P_3 tiene dimensión 4, ya que cualquier polinomio en P_3 tiene la forma $a + bx + cx^2 + dx^3$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- Escribimos los vectores en términos de su expresión en el espacio vectorial:

$$1 = (1, 0, 0, 0), \quad 1 + x = (1, 1, 0, 0), \quad 1 + x^2 = (1, 0, 1, 0), \quad 1 + x^3 = (1, 0, 0, 1)$$

- Verificamos la independencia lineal resolviendo la ecuación

$$c_1(1, 0, 0, 0) + c_2(1, 1, 0, 0) + c_3(1, 0, 1, 0) + c_4(1, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$$

- Si el único conjunto de soluciones es $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, entonces el conjunto es linealmente independiente y, por lo tanto, una base de P_3.

Concluimos que $\{1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3\}$ es efectivamente una base de P_3.

2. Para verificar si este conjunto de matrices es una base de M_{22},

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

comprobamos la independencia lineal y si el conjunto genera M_{22}.

- La dimensión de M_{22} es 4, ya que un espacio de matrices 2×2 tiene cuatro entradas independientes.
- Representamos cada matriz en forma de vectores columna:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to (3, 1, 0, 0), \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to (3, 2, 0, 0),$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \to (-5, 1, 0, 6), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \to (0, 1, 0, -7)$$

- Para determinar la independencia lineal, resolvemos la ecuación

$$c_1(3, 1, 0, 0) + c_2(3, 2, 0, 0) + c_3(-5, 1, 0, 6) + c_4(0, 1, 0, -7) = (0, 0, 0, 0)$$

- Si la única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$, entonces el conjunto es linealmente independiente y una base de M_{22}.

Concluimos si este conjunto de matrices es una base de M_{22} después de verificar la independencia lineal.

6. (4 points) **Cambio de base:**

1. Escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Dado que la base es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, queremos expresar el vector $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ como una combinación lineal de los vectores de la base dada:

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$$

Sustituyendo los valores de los vectores:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ -2\alpha + 2\beta \end{pmatrix}$$

Ahora, igualamos las componentes correspondientes:]

$$\begin{aligned} x &= -\alpha - \beta \\ y &= -2\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

Resolvemos este sistema para α y β. Primero, despejamos β de la primera ecuación:

$$\beta = -x - \alpha$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación:

$$y = -2\alpha + 2(-x - \alpha)$$

Simplificando:

$$y = -2\alpha - 2x - 2\alpha = -4\alpha - 2x$$

Despejamos α:

$$\alpha = -\frac{y + 2x}{4}$$

Ahora sustituimos este valor de α en la ecuación para β:

$$\beta = -x - \left(-\frac{y + 2x}{4}\right)$$

Simplificando:

$$\beta = -x + \frac{y + 2x}{4}$$

$$\beta = \frac{-4x + y + 2x}{4} = \frac{-2x + y}{4}$$

Entonces, las coordenadas de $\mathbf{u}$ en la nueva base son:

$$\alpha = -\frac{y + 2x}{4}, \quad \beta = \frac{-2x + y}{4}$$

Así que la representación de $\mathbf{u}$ en la base dada es:

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{y + 2x}{4}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \left(\frac{-2x + y}{4}\right) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$