Diapositiva Curso de Cálculo Vectorial con GeoGebra: Ecuaciones de la recta y del plano

Presentation · August 2020

DOI: 10.13140/RG.2.2.18371.02086/1

1 author:

Jeovanny De Jesus Muentes Acevedo
Universidad Tecnológica de Bolívar

Ecuaciones de la recta y del plano

Jeovanny Muentes Acevedo

Universidad Tecnológica de Bolívar

7 de febrero de 2023

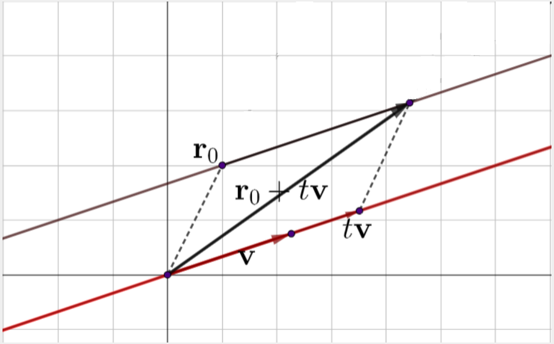
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

Universidad Tecnológica de Bolívar
CARTAGENA DE INDIAS

Definición (2.1.2: Ecuación vectorial de la recta)

*La **ecuación vectorial** de la recta que pasa por el punto $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ es dada por:*

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}.}$$



Tome $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Reemplazando los valores $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ en la Definición (0.1) y realizando las operaciones entre los vectores, obtenemos

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + t\mathbf{v} \;\Rightarrow\; \langle x, y, z \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle + t\langle a, b, c \rangle \;\Rightarrow\; \langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle.$$

Definición (2.1.3: Ecuaciones paramétricas)

Las ecuaciones

$$\boxed{x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc}$$

son llamadas ***ecuaciones paramétricas*** *de la recta que pasa por* (x_0, y_0, z_0) *y tiene la dirección del vector* $\langle a, b, c \rangle$.

Ejemplo (2.1.5)

Una partícula que se mueve de forma rectilínea pasó por los puntos $A = (-1, 2, 0)$ *en* $t = 0seg$ *y* $B = (2, 3, 2)$ *en* $t = 1seg$. *Hallar ecuaciones paramétricas de la recta que describe la trayectoria de la partícula.*

1. *Determine si la partícula pasará por el punto* $(2, -3, 4)$.
2. *¿En qué posición se encontrará la partícula después de 2 segundos?*
3. *¿Dónde se encontraba un segundo antes?*

Solución: *Para hallar ecuaciones paramétricas de la trayectoria de la partícula, debemos determinar un vector director* $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ *y algun punto* $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ *en la recta. En este caso, dado que queremos que cuando* $t = 0$, *la partícula se encuentre en la posición dada por el punto* $A = (-1, 2, 0)$, *debemos tener que* $\mathbf{r}_0 = (-1, 2, 0)$. *Ahora, dado que* $A = (-1, 2, 0)$ *y* $B = (2, 3, 2)$ *son puntos en esta recta, el vector* $\overrightarrow{AB}$ *está contenido en esta recta y, por lo tanto, tiene su misma dirección. Luego,*

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \langle 2 - (-1), 3 - 2, 2 - 0\rangle = \langle 3, 1, 2\rangle$$

es un vector director.

Ejemplo

Así, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria son dadas por

$$x = -1 + 3t, \quad y = 2 + t, \quad z = 2t.$$

Note que, si $t = 1$, entonces $x = 2$, $y = 3$, $z = 2$, luego, en $1seg$ la partícula pasa por B.

1. *Para comprobar si $(2, -3, 4)$ se encuentra en la trayectoria de la partícula, debemos verificar si existe un valor de t que satisfaga las 3 ecuaciones*

   $$2 = x = -1 + 3t, \qquad -3 = y = 2 + t, \qquad 4 = z = 2t.$$

   Despejando t de la tercera ecuación, tenemos $t = 2$. Sin embargo, de la segunda tenemos $t = -5$, lo cual muestra que no existe un valor de t que cumpla las ecuaciones paramétricas. Por lo tanto, la partícula no pasa por este punto.
2. *Si $t = 2$, reemplazando en las ecuaciones paramétricas, obtenemos $x = 5$, $y = 4$, $z = 4$. Luego, en 2 segundos la partícula se encontrará en el punto $(5, 4, 4)$.*
3. *Si $t = -1$, obtenemos $x = -4$, $y = 1$, $z = -2$. Así, la partícula se encontraba en la posición $(-4, 1, -2)$ un segundo antes.*

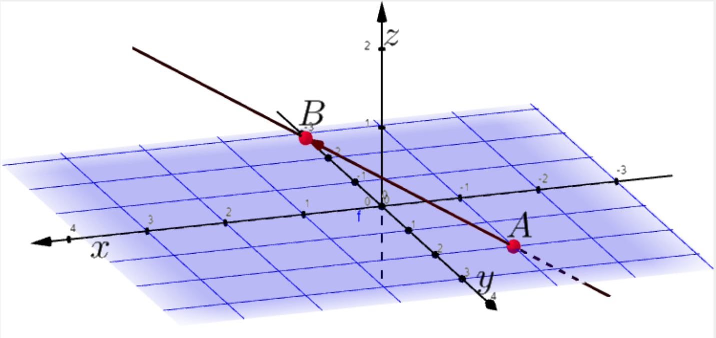


Figura 0.1: Rectas

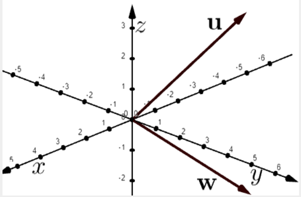
Ejemplo (2.1.6)

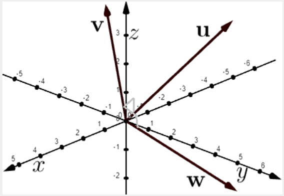
Halle ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $\boldsymbol{r}_0 = (3, -1, 0)$ *y su vector director sea perpendicular a* $\boldsymbol{w} = \langle 0, 5, -1\rangle$ *y a* $\boldsymbol{u} = \langle -5, 0, 2\rangle$.

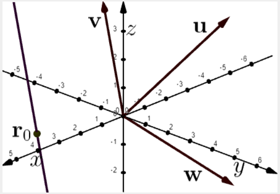
Solución: *Dado que se requiere que la recta sea perpendicular tanto a* $\mathbf{w}$ *como a* $\mathbf{u}$ *, un vector director de esta recta es el producto vectorial* $\mathbf{w} \times \mathbf{u}$*, el cual es un vector perpendicular a* $\mathbf{w}$ *y a* $\mathbf{u}$ *(esto fue visto en un teorema). Tenemos que*

$$\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 25\boldsymbol{k} = 5\langle 2, 1, 5\rangle.$$

Por simplicidad, podemos tomar $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 5\rangle$ *como vector director para nuestra recta. Consecuentemente,* $x = 3 + 2t$, $y = -1 + t$, $z = 5t$ *son ecuaciones paramétricas para la recta.*



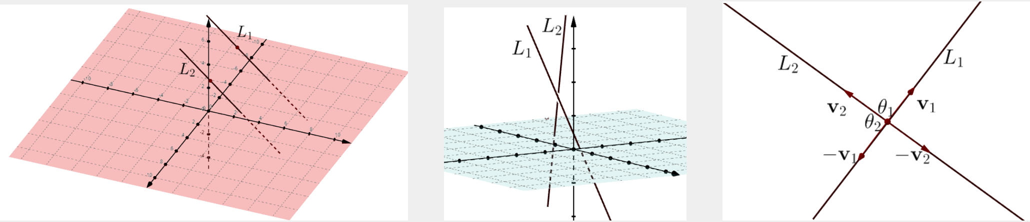




Rectas paralelas o alabeadas y ángulo entre rectas

Sean L_1 y L_2 dos rectas en el espacio tridimensional. Tenemos tres posibilidades:

- L_1 y L_2 son **paralelas**: dos rectas son **paralelas** si sus vectores directores son paralelos.
- L_1 y L_2 son **alabeadas**: dos rectas son **alabeadas** si ellas no se intersecan pero tampoco son paralelas.
- L_1 y L_2 se intersecan, es decir, tienen un punto en común.



(a) Rectas paralelas **(b)** Rectas alabeadas **(c)** Rectas con intersección

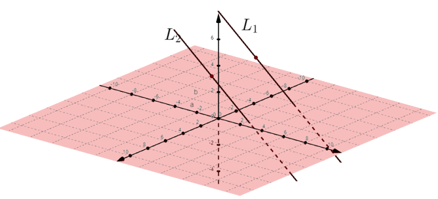
Definición (2.2.1: Ángulo entre dos rectas)

Sean L_1 y L_2 dos rectas y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dos vectores directores a cada recta, respectivamente. El ángulo entre L_1 y L_2, denotado por $\sphericalangle(L_1L_2)$, es el ángulo agudo entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Tenemos:

$$\boxed{\sphericalangle(L_1L_2) = \arccos \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|}.}$$

Ejemplo (Ejercicio 2.2.2)

Las rectas $L_1 : x = -3 + 2t, y = 1 - t, z = 4 + 3t$ *y* $L_2 : x = 2 - 6t, y = 1 + 3t, z = 4 - 9t$ *son paralelas, ya que poseen vectores directores paralelos:* $\mathbf{v}_1 = \langle 2, -1, 3 \rangle$ *es vector director para* L_1 *y* $\mathbf{v}_2 = \langle -6, 3, -9 \rangle$ *es vector director para* L_2 *y tenemos* $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1$*.*



Ejemplo (2.2.3)

Las posiciones de dos partículas son dadas por las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = -7 + 2t,\ \ y_1 = t - 3,\ \ z_1 = 4 - t$$
$$x_2 = -17 + 4t,\ \ y_2 = 8 - 2t,\ \ z_2 = -11 + 3t.$$

Determine si las partículas chocan o si las trayetorias se intersecan. Hallar el ángulo formado por las rectas.

Ejemplo

Solución: *Sean L_1 y L_2 las trayectorias de las partículas. Los vectores $\mathbf{v}_1 = \langle 2, 1, -1\rangle$ y $\mathbf{v}_2 = \langle 4, -2, 3\rangle$, los cuales son respectivamente directores para L_1 y para L_2, no son paralelos (verifique), por lo tanto L_1 y L_2 no son paralelas. Para determinar si las trayectorias se cruzan, debemos hallar un valor de t y un valor de s tal que las componentes de las ecuaciones paramétricas sean iguales, esto es, t y s deben satisfacer las ecuaciones*

$$\begin{cases} x_1 = -7 + 2t = x_2 = -17 + 4s \\ y_1 = t - 3 = y_2 = 8 - 2s \\ z_1 = 4 - t = z_2 = -11 + 3s, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7 + 2t = -17 + 4s \\ t - 3 = 8 - 2s \\ 4 - t = -11 + 3s, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -5 + 2s & (1) \\ t = 11 - 2s & (2) \\ t = 15 - 3s & (3). \end{cases}$$

Igualando (1) y (2) tenemos que $-5 + 2s = 11 - 2s$, de donde $s = 4$. Sustituyendo este valor en (1) o en (2) tenemos $t = 3$. El lector puede verificar que los valores $t = 3$ y $s = 4$ satisfacen la ecuación (3). En consecuencia, las trayectorias se cruzan:

$$\text{si } t = 3 \quad \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 1 \end{cases} \qquad \text{si } s = 4 \quad \rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 0 \\ z_2 = 1. \end{cases}$$

Ejemplo

Así, $(-1,0,1)$ *es el punto de intersección de estas dos rectas. Dado que el valor de* t *es diferente al valor de* s *en esta intersección, las partículas no se chocan (para que choquen deben estar en el mismo punto en el mismo instante de tiempo). Hallemos el ángulo entre estas dos rectas. El ángulo* θ *entre* $\mathbf{v}_1 = \langle 2,1,-1\rangle$ *y* $\mathbf{v}_2 = \langle 4,-2,3\rangle$ *es dado por*

$$\theta = \arccos \frac{|\langle 2,1,-1\rangle \cdot \langle 4,-2,3\rangle|}{\|\langle 2,1,-1\rangle\| \|\langle 4,-2,3\rangle\|} \approx 77^\circ.$$

Dado que $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ *entonces* $\sphericalangle(L_1 L_2) \approx 77^\circ$.

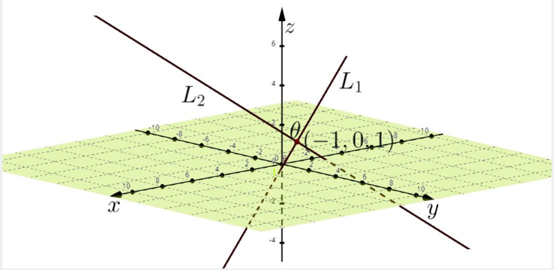


Figura 0.2: Trayectorias de las partículas

Ejemplo (2.2.4)

Considere las siguientes rectas de ecuaciones paramétricas

$$L_1 : x_1 = -1 + t, y_1 = 1 - 2t, z_1 = 3t$$

$$L_2 : x_2 = -3 + 2s, y_2 = 1 - s, z_2 = 4 + 3s.$$

Determine si estas rectas son paralelas, alabeadas o se cortan. Hallar el ángulo entre ellas.

Solución: *Los vectores* $\mathbf{v}_1 = \langle 1, -2, 3\rangle$ *y* $\mathbf{v}_2 = \langle 2, -1, 3\rangle$*, los cuales son respectivamente directores para* L_1 *y para* L_2*, no son paralelos (verifique), por lo tanto* L_1 *y* L_2 *no son paralelas. Veamos si las rectas se cortan: igualando las componentes tenemos*

$$\begin{cases} x_1 = -1 + t = x_2 = -3 + 2s \\ y_1 = 1 - 2t = y_2 = 1 - s \\ z_1 = 3t = z_2 = 4 + 3s, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 + t = -3 + 2s \\ 1 - 2t = 1 - s \\ 3t = 4 + 3s, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = -2 + 2s \quad (1) \\ t = \frac{s}{2} \quad (2) \\ t = \frac{4+3s}{3} \quad (3). \end{cases}$$

Ejemplo

Igualando (1) y (2) tenemos que $-2+2s=\frac{s}{2}$*, de donde* $s=\frac{4}{3}$*. Sustituyendo este valor en (1) o en (2) tenemos* $t=\frac{2}{3}$*. Sin embargo, al sustituir estos valores obtenidos de* t *y* s *en la tercera ecuación obtenemos* $\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$*, lo cual es una inconsistencia. Luego, las rectas no se cortan y como tampoco son paralelas tenemos que las rectas son alabeadas.*
El lector puede verificar que $\sphericalangle(L_1 L_2)\approx 22^\circ$*.*

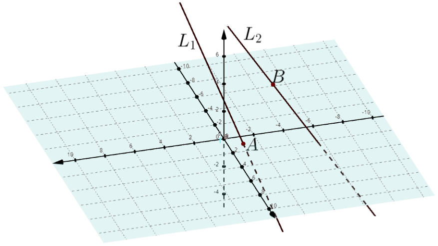


Figura 0.3: Trayectorias alabeadas

Ecuaciones del plano

Definición (2.5.1: Vector normal)

Un vector $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ *es llamado* ***normal*** *a un plano* P *si todo vector en* P *es ortogonal a* $\mathbf{n}$.

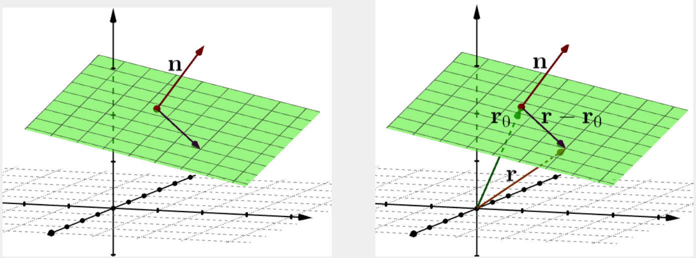


Figura 0.4: Vector normal y puntos $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ en el plano

Definición (2.5.3: Ecuación vectorial del plano)

La ***ecuación vectorial*** *del plano que pasa por el punto* $\mathbf{r}_0$ *y tiene vector normal* $\mathbf{n}$ *es dada por*

$$\boxed{\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) = 0.}$$

Tomando $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ en la ecuación de la definición anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}_0) = 0 &\Rightarrow \langle a, b, c\rangle \cdot (\langle x, y, z\rangle - \langle x_0, y_0, z_0\rangle) = 0 \\ \Rightarrow \langle a, b, c\rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0\rangle = 0 &\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Definición (2.5.5: **Ecuación escalar del plano**)

La ecuación

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

es llamada ***ecuación escalar*** *del plano que pasa por el punto* $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *y tiene vector normal* $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$.

Si continuamos realizando las operaciones que están en la ecuación escalar del plano obtenemos:

$$
\begin{aligned}
a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 &\Rightarrow ax-ax_0+by-by_0+cz-cz_0=0\\
\Rightarrow ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0 &\Rightarrow ax+by+cz+(-ax_0-by_0-cz_0)=0.
\end{aligned}
$$

Si hacemos $d=-ax_0-by_0-cz_0$ en la última ecuación tenemos:

Definición (2.5.6: Ecuación lineal)

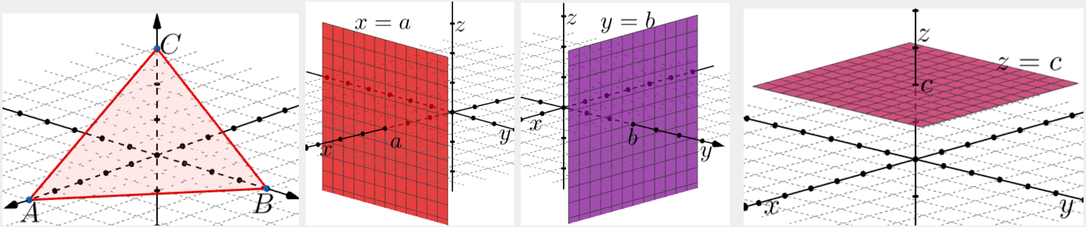
La ecuación

$$\boxed{ax+by+cz+d=0}$$

*es llamada la **ecuación lineal** del plano.*

Si en la ecuación lineal $ax+by+cz+d=0$ los términos a, b, c y d son diferentes de cero, el plano tiene intersección con los 3 ejes y podemos reescribir esta ecuación de la siguiente forma (ver Figura 0.5a)

$$\boxed{\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1.} \tag{0.1}$$



(a) $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$ **(b)** $x = a$ **(c)** $y = b$ **(d)** $z = c$

Figura 0.5: Planos $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$, $x = a$, $y = b$, $z = c$

Por otro lado, no siempre estas intersecciones se dan. Por ejemplo, el plano $x = a$, donde $a \neq 0$ es una constante, no tiene intersección con los ejes y y z. El plano $y = b$, donde $b \neq 0$ es una constante, no tiene intersección con los ejes x y z. El plano $z = c$, donde $c \neq 0$ es una constante, no tiene intersección con los ejes x y y.

Ejemplo (2.5.7)

Dada la ecuación lineal $2x + y - z - 3 = 0$, obtener un punto y un vector normal del plano y así obtener la ecuación escalar.

Solución: *Para obtener un punto en el plano dado, podemos darle valores a dos de las variables y despejar la tercera. Por ejemplo, si sustituimos $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación lineal, tenemos $2(0) + 0 - z - 3 = 0$, de donde $z = -3$. Luego, el punto $(0, 0, -3)$ pertenece al plano.*

Para hallar un vector normal al plano, observe que en la ecuación lineal dada en la Definición 0.16, las coordenadas del vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c\rangle$ están conformadas por los coeficientes de x, y y z.

En nuestro caso tenemos $a = 2$ (el coeficiente de x en la ecuación lineal), $b = 1$ (el coeficiente de y en la ecuación lineal), $c = -1$ (el coeficiente de z en la ecuación lineal). Luego $\mathbf{n} = \langle 2, 1, -1\rangle$.

En consecuencia, una ecuación escalar del plano es

$$2(x - 0) + 1(y - 0) - 1(z + 3) = 0.$$

Podemos verificar que las intersecciones con los ejes coordenados son $(\frac{3}{2}, 0, 0)$ con el eje x, $(0, 3, 0)$ con el eje y y $(0, 0, -3)$ con el eje z.

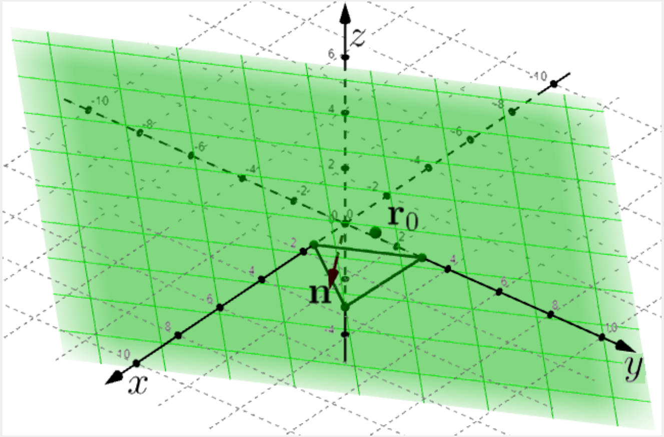


Figura 0.6: $\mathbf{r}_0 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{n} = \langle 2, 1, -1 \rangle$

Ejemplo (2.5.8)

Muestre que el conjunto consistente de todos los puntos equidistantes de los puntos $(-2,5,5)$ *y* $(0,-1,1)$ *es un plano.*

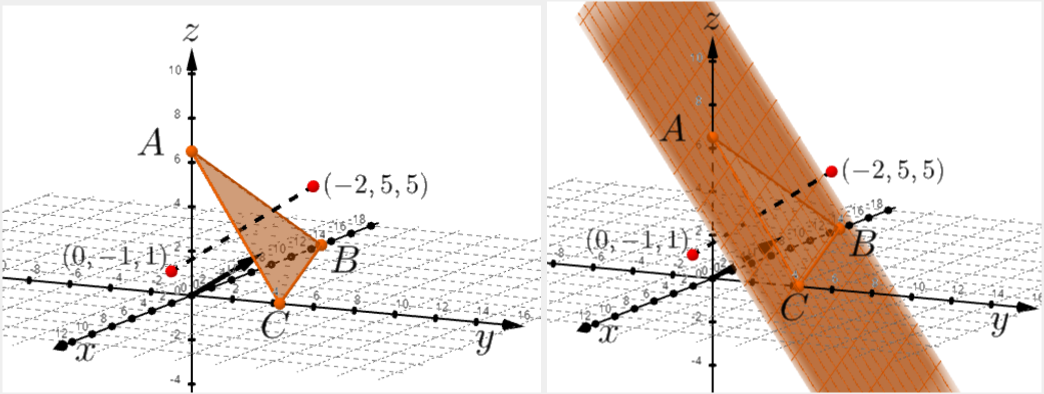
Solución: *Las distancias desde un punto* $X=(x,y,z)$ *hasta* $A=(-2,5,5)$ *y hasta* $B=(0,-1,1)$ *son, respectivamente, dadas por*

$$\|\overrightarrow{XA}\| = \sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2+(z-5)^2} \quad y \quad \|\overrightarrow{XB}\| = \sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-1)^2}.$$

Tenemos que (x,y,z) *equidista de* A *y de* B *si y solo si estas distancias son iguales, esto es,* $\|\overrightarrow{XA}\| = \|\overrightarrow{XB}\|$, *de donde tenemos que*

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2+(z-5)^2} &= \sqrt{x^2+(y+1)^2+(z-1)^2}\\
(\textit{elevando al cuadrado})\ (x+2)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 &= x^2+(y+1)^2+(z-1)^2\\
x^2+4x+4+y^2-10y+25+z^2-10z+25 &= x^2+y^2+2y+1+z^2-2z+1\\
(\textit{reducir términos semejantes})\ 4x-10y-10z+54 &= 2y-2z+2\\
4x-12y-8z+52 &= 0\\
(\textit{divida entre } 4)\ x-3y-2z+13 &= 0.
\end{aligned}$$

Luego, (x,y,z) *equidista de* A *y de* B *si y solo si* $x-3y-2z+13=0$. *Queda como ejercicio hallar las intersecciones con los ejes coordenados.*

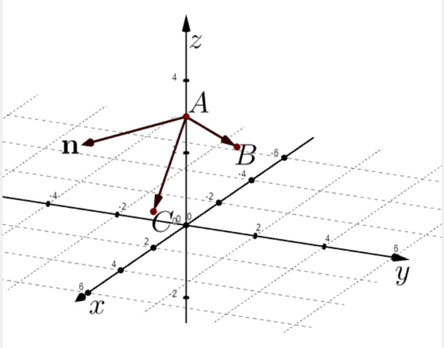


(a) A, B, C

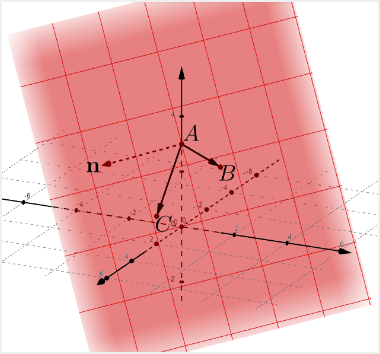
Figura 0.7: $A = (0, 0, \frac{13}{2})$, $B = (-13, 0, 0)$ y $C = (0, \frac{13}{3}, 0)$

Ejemplo (2.5.9)

Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos $A = (0, 0, 3)$, $B = (-1, 1, 2)$ *y* $C = (2, 0, 1)$.



(a) Vectores **v**, **u**, **n**



(b) Plano $x + 2y + z - 3 = 0$

Figura 0.8: Plano por $A = (0, 0, 3)$, $B = (-1, 1, 2)$ y $C = (2, 0, 1)$

Ejemplo

Solución: *Debemos encontrar el vector normal al plano* $\mathbf{n}$*. Este vector debe ser ortogonal a los vectores* $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ *y* $\mathbf{u} = \overrightarrow{AC}$ *(ver Figura 0.8). Así,* $\mathbf{n}$ *puede ser obtenido a partir del producto cruz entre* $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{u}$*. Tenemos que*

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = \langle -1, 1, -1 \rangle \qquad \mathbf{u} = \overrightarrow{AC} = \langle 2, 0, -2 \rangle.$$

Luego

$$\mathbf{n} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2) - \mathbf{j}(4) + \mathbf{k}(-2) = \langle -2, -4, -2 \rangle.$$

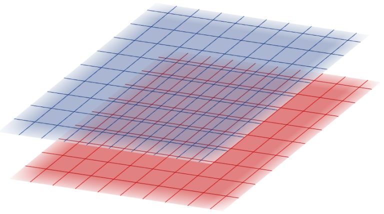
Consecuentemente, tomando $\mathbf{r}_0 = A$*, la ecuación escalar del plano es*

$$-2(x - 0) - 4(y - 0) - 2(z - 3) = 0,$$

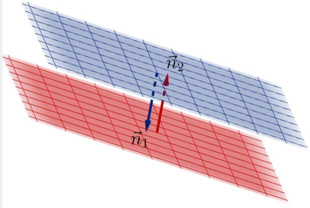
o en forma lineal, $-2x - 4y - 2z + 6 = 0$ *o bien* $x + 2y + z - 3 = 0$*. Queda como ejercicio hallar las intersecciones con los ejes coordenados.*

Planos paralelos y ángulo entre planos

Dos planos P_1 y P_2 son **paralelos** cuando ellos no se intersecan en ningún punto. En este caso, sus vectores normales son paralelos.

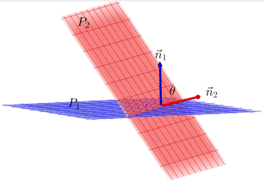


(a) Planos paralelos

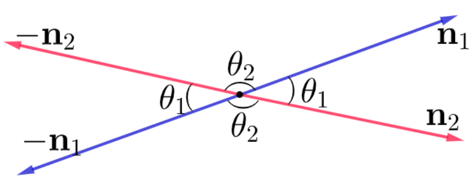


(b) Planos paralelos

Si dos planos no son paralelos ellos se intersecan en una recta. En ese caso los vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ no son paralelos y los planos P_1 y P_2 forman un ángulo θ.



(c) Planos que se intersecan



(d) θ_1 y θ_2 son ángulos complementarios

Definición (2.6.1: Ángulo entre dos planos)

Sean P_1 y P_2 dos planos que se intersecan y sean $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ dos vectores normales a cada plano, respectivamente. El ángulo entre P_1 y P_2 es el ángulo agudo entre $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$.

Tenemos que el ángulo entre P_1 y P_2 es

$$\boxed{\sphericalangle(P_1 P_2) = \arccos \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}}$$

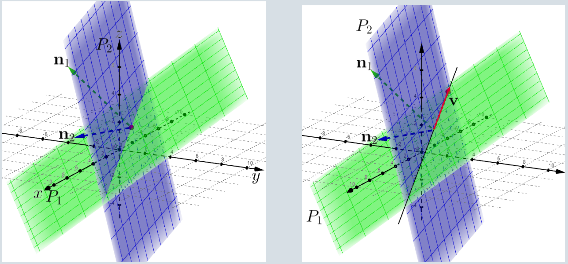
Ejemplo (2.6.2)

Considere los planos $P_1 : 2x - 3y + z - 6 = 0$ y $P_2 : 4x - 6y + 2z + 7 = 0$. Los vectores $\mathbf{n}_1 = \langle 2, -3, 1\rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 4, -6, 2\rangle$ son normales a cada plano, respectivamente. Note que $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$, por lo tanto, los vectores son paralelos. En consecuencia, P_1 y P_2 son paralelos.

Ejemplo (2.6.4)

Sean P_1 el plano cuya ecuación lineal es $2x-3y+5z-2=0$ y P_2 el plano cuya ecuación lineal es $x-4y-z+3=0$ (ver Figura 0.9e). Verifique que estos dos planos se intersecan. Hallar ecuaciones paramétricas de la recta obtenida de la intersección de los dos planos y el ángulo entre estos dos planos.

***Solución**: Los vectores $\mathbf{n}_1=\langle 2,-3,5\rangle$ y $\mathbf{n}_2=\langle 1,-4,-1\rangle$ son normales a cada plano, respectivamente. Como $\mathbf{n}_1=\langle 2,-3,5\rangle$ y $\mathbf{n}_2=\langle 1,-4,-1\rangle$ no son paralelos (verifique), los planos P_1 y P_2 no son paralelos y, por lo tanto, se intersecan en una recta.*



(e) *Intersección de P_1 y P_2* **(f)** $\mathbf{v}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$

Figura 0.9: Recta obtenida de la intrsección de dos planos

Ejemplo

Encontremos una ecuación para la recta L obtenida de la intersección de estos dos planos. Primero, obtengamos un punto en común entre estos dos planos, es decir, un punto de L. Podemos reemplazar $z = 0$ en ambas ecuaciones y obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2 = 0 \\ x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

El lector puede verificar que la solución de este sistema es $x = \frac{17}{5}$, $y = \frac{8}{5}$. Luego, el punto $(\frac{17}{5}, \frac{8}{5}, 0)$ pertenece a L. Obtengamos un vector director de L. Si $\boldsymbol{v}$ es un vector director de L cuyos puntos inicial y terminal están en L (ver Figura 0.9f), entonces $\boldsymbol{v}$ se encuentra contenido en P_1, por lo tanto, es perpendicular a $\boldsymbol{n}_1$, y también se encuentra en P_2, por lo tanto, es perpendicular a $\boldsymbol{n}_2$. Un vector con estas dos propiedades (que sea perpendicular a $\boldsymbol{n}_1$ y a $\boldsymbol{n}_2$) es el producto vectorial $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \langle 23, 7, -5 \rangle$. Luego, ecuaciones paramétricas de esta recta son

$$x = \frac{17}{5} + 23t, \quad y = \frac{8}{5} + 7t, \quad z = -5t, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo

El ángulo entre los dos vectores es

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{\|\boldsymbol{n}_1\| \|\boldsymbol{n}_2\|} = \arccos \frac{\langle 2, -3, 5\rangle \cdot \langle 1, -4, -1\rangle}{\|\langle 2, -3, 5\rangle\| \|\langle 1, -4, -1\rangle\|} \\ &= \arccos \frac{2 + 12 - 5}{\sqrt{4 + 9 + 25}\sqrt{1 + 16 + 1}} = \arccos \frac{9}{\sqrt{38}\sqrt{18}} \approx 70^\circ.\end{aligned}$$

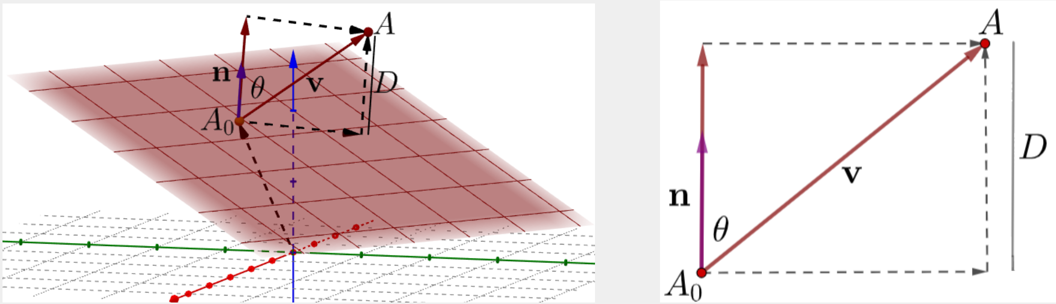
Así, $\sphericalangle(P_1 P_2) \approx 70^\circ$.

Distancia entre un punto y un plano

Sean $A = (x_1, y_1, z_1)$ un punto en el espacio y

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

la ecuación escalar del plano P que pasa por $A_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y tiene vector normal $\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$.



(a) **(b)**

Figura 0.10: Distancia entre un punto A y un plano.

Definición (2.7.1: Distancia entre un punto y un plano)

La distancia D *entre el punto* $A = (x_1, y_1, z_1)$ *y el plano* P *de ecuación escalar* $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ *es dado por la fórmula*

$$\boxed{D = \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

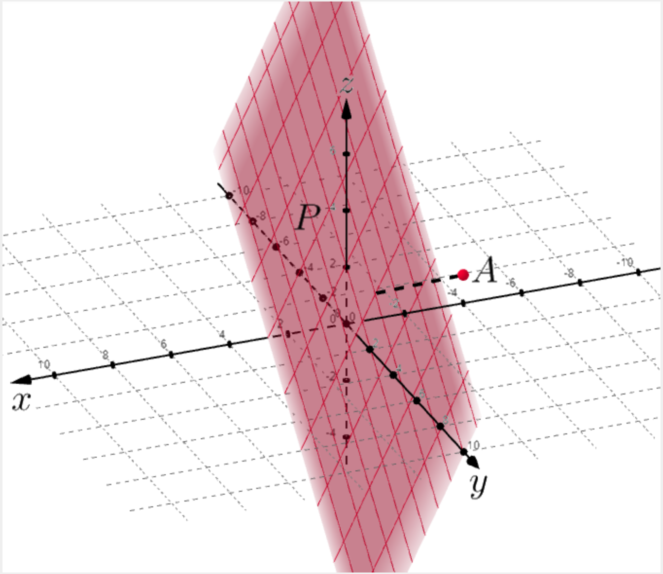
Si el plano P tiene ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$, podemos ver que:

$$\boxed{D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Ejemplo (2.7.2)

Hallar la distancia entre el punto $A = (-4, 0, 1)$ *el plano cuya ecuación lineal es* $3x - 2y - z + 2 = 0$*. La distancia* D *entre* A *y el plano es:*

$$D = \frac{|3(-4) - 2(0) - 1(1) + 2|}{\sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-12 - 1 + 2|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{|-11|}{\sqrt{14}} = \frac{11}{\sqrt{14}} \approx 2.94.$$



(a) $A = (-4, 0, 1)$ y $P : 3x - 2y - z + 2 = 0$

Ejemplo (2.7.3)

Hallar los valores de d para que los dos planos paralelos $P_1 : x - y + z - 4 = 0$ y $P_2 : -2x + 2y - 2z + d = 0$ tengan una distancia de $\frac{9}{\sqrt{12}}$ (ver Figura 0.11).

Solución: *Los planos P_1 y P_2 son paralelos, ya que sus vectores normales $\mathbf{n}_1 = \langle 1, -1, 1\rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle -2, 2, -2\rangle$ son paralelos. Para hallar la distancia entre P_1 y P_2 podemos hallar la distancia entre cualquier punto de P_1 al plano P_2. Observe que $(0, 0, 4)$ pertenece al plano P_1. Queremos que la distancia D entre P_1 y P_2 sea $\frac{9}{\sqrt{12}}$. Así, debemos tener que*

$$\frac{9}{\sqrt{12}} = D = \frac{|-2(0) + 2(0) - 2(4) + d|}{\sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-8 + d|}{\sqrt{12}} \quad \Rightarrow \quad |d - 8| = 9.$$

Note que $d = -1$ y $d = 17$ satisfacen la última ecuación. Los planos $-2x + 2y - 2z - 1 = 0$ y $-2x + 2y - 2z + 17 = 0$ se encuentran a una distancia de $\frac{9}{\sqrt{12}}$ del plano P_1.

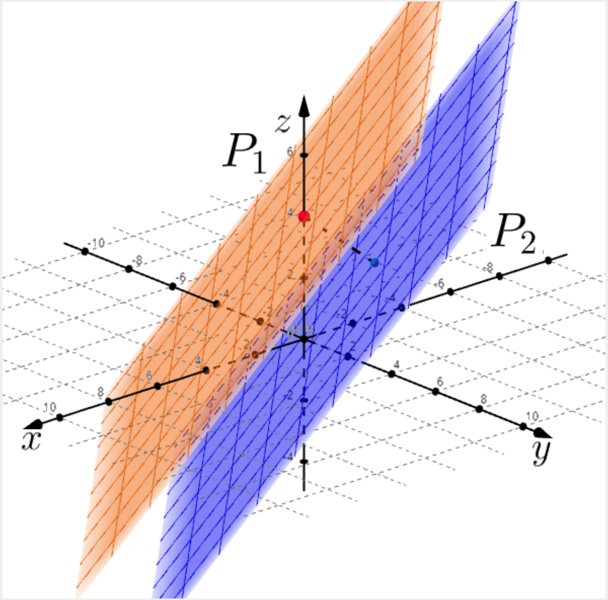


Figura 0.11: $P_1 : x - y + z - 4 = 0$ y $P_2 : -2x + 2y - 2z - 1 = 0$