Tarea 1: Álgebra Lineal

Facultad de Ingeniería Ambiental

Fecha de entrega: 14 de Setiembre de 2024

Instrucciones

Resuelve los siguientes problemas de manera clara y completa. Asegúrate de incluir todos los pasos necesarios para llegar a la solución. Aplica los conceptos aprendidos en clase y justifica tus respuestas cuando sea necesario.

Problemas :

1. **Operaciones con Matrices** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $A + B$, $A - B$, y AB.

2. **Matriz Transpuesta** Encuentra la matriz transpuesta de $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Es la matriz C simétrica?

3. **Matriz Simétrica** Demuestra si la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica.

4. **Matriz Antisimétrica** Determina si la matriz $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica.

5. **Matriz Involutiva** Verifica si la matriz $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es involutiva, es decir, si cumple $F^2 = I$ donde I es la matriz identidad.

6. **Matriz Idempotente** Comprueba si la matriz $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es idempotente, es decir, si cumple $G^2 = G$.

7. **Matriz Ortogonal** Sea la matriz $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Verifica si H es una matriz ortogonal.

8. **Producto Escalar** Calcula el producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$.

9. **Producto Vectorial** Encuentra el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$.

10. **Aplicación en Física** Dada una matriz de rotación en 2D $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, muestra que esta matriz es ortogonal y encuentra su transpuesta.

Instrucciones

Resuelve los siguientes problemas sobre matrices de 3×3. Asegúrate de mostrar todos los pasos necesarios para llegar a la solución.

11. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Encuentra la matriz transpuesta A^T.

12. Determina si la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ es simétrica.

13. Verifica si la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica.

14. Sea la matriz $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Demuestra que es una matriz involutiva.

15. Encuentra si la matriz $E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es idempotente.

16. Verifica si la matriz $F = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es ortogonal.

17. Calcula el producto escalar de los vectores fila de la matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

18. Realiza el producto vectorial de los vectores columna de la matriz $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

19. Dada la matriz $I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, encuentra el determinante de I.

20. Calcula la inversa de la matriz $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ si existe.

21. Sea la matriz $K = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Determina si K es positiva definida.

22. Verifica si la matriz $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

23. Encuentra el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

24. Demuestra que la matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz de rotación.

25. Si $O = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ¿qué tipo de matriz es O? Justifica tu respuesta.

26. Verifica si la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es triangular superior.

27. Encuentra los autovalores de la matriz $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

28. Determina si la matriz $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica.

29. Sea la matriz $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Calcula S^2.

30. Encuentra el determinante de la matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Instrucciones

Resuelva los siguientes problemas de productos escalar y vectorial utilizando matrices de 3x3.

Problemas

31. Dados los vectores $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, calcule el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

32. Dados los vectores $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$, encuentre el producto vectorial $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$.

33. Encuentre el producto escalar de los vectores $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

34. Si $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, calcule $\mathbf{g} \times \mathbf{h}$.

35. Dado $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, encuentre el producto escalar $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ y el producto vectorial $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$.

36. Calcule el producto escalar de $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

37. Encuentre el producto vectorial de $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

38. Dados los vectores $\mathbf{o} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, calcule $\mathbf{o} \cdot \mathbf{p}$.

39. Si $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, encuentre el producto vectorial $\mathbf{q} \times \mathbf{r}$.

40. Encuentre el producto escalar y vectorial de los vectores $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Instrucciones

A continuación, encontrarás 10 problemas que te ayudarán a practicar el cálculo de la adjunta e inversa de matrices de 3x3. Para cada problema, se proporcionará una matriz específica. Debes calcular su adjunta y, si es invertible, su inversa.

Problemas

41. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$
encuentra su adjunta y, si es posible, su inversa.

42. Calcula la adjunta e inversa de la siguiente matriz:
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

43. Para la matriz
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$
encuentra la adjunta y determina si la matriz tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa.

44. Dada la matriz
$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
encuentra su adjunta y, si es posible, su inversa.

45. Calcula la adjunta e inversa de la siguiente matriz:
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

46. Para la matriz
$$F = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$
encuentra la adjunta y determina si la matriz tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa.

47. Dada la matriz
$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
encuentra su adjunta y, si es posible, su inversa.

48. Calcula la adjunta e inversa de la siguiente matriz:
$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

49. Para la matriz
$$I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
encuentra la adjunta y determina si la matriz tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa.

50. Dada la matriz
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
encuentra su adjunta y, si es posible, su inversa.