ÁLGEBRA LINEAL - Examen Parcial 2

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

1. (3 points) **Transformaciones lineales:** Determine si la transformación de V en W dada es lineal.

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to P_3; T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx + (a+b)x^2 + (a-b)x^3$

   Solución: Verifiquemos si T es lineal comprobando las propiedades de aditividad y homogeneidad:

   (a) 1. **Aditividad:** Sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Calculemos $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$:

   $$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces,

   $$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2).$$

   Por otro lado,

   $$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2).$$

   Como $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, se cumple la propiedad de aditividad.

   2. **Homogeneidad:** Sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculemos $T(\alpha\mathbf{u})$:

   $$\alpha\mathbf{u} = \alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}.$$

   Entonces,

   $$T(\alpha\mathbf{u}) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = (\alpha x) + (\alpha y).$$

   Por otro lado,

   $$\alpha T(\mathbf{u}) = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha(x + y).$$

   Como $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$, se cumple la propiedad de homogeneidad.

   Por lo tanto T es una transformación lineal.

   (b) 1. **Aditividad:** Sea $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Calculemos $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$:

   $$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

   Entonces,

   $$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2))x^2 + ((a_1 + a_2) - (b_1 + b_2))x^3.$$

Por otro lado,

$$T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=\big(a_1+b_1x+(a_1+b_1)x^2+(a_1-b_1)x^3\big)+\big(a_2+b_2x+(a_2+b_2)x^2+(a_2-b_2)x^3\big).$$

Simplificando,

$$T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)x+((a_1+a_2)+(b_1+b_2))x^2+((a_1+a_2)-(b_1+b_2))x^3.$$

Como $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$, se cumple la propiedad de aditividad.

2. **Homogeneidad:** Sea $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ y sea $\alpha\in\mathbb{R}$. Calculemos $T(\alpha\mathbf{u})$:

$$\alpha\mathbf{u}=\alpha\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a\\ \alpha b\end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$T(\alpha\mathbf{u})=(\alpha a)+(\alpha b)x+((\alpha a)+(\alpha b))x^2+((\alpha a)-(\alpha b))x^3.$$

Por otro lado,

$$\alpha T(\mathbf{u})=\alpha\big(a+bx+(a+b)x^2+(a-b)x^3\big).$$

Simplificando,

$$\alpha T(\mathbf{u})=(\alpha a)+(\alpha b)x+(\alpha(a+b))x^2+(\alpha(a-b))x^3.$$

Como $T(\alpha\mathbf{u})=\alpha T(\mathbf{u})$, se cumple la propiedad de homogeneidad.

Por lo tanto T es una transformación lineal.

2. (4 points) **Transformaciones lineales:**

(a) Demuestre que la transformación $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{T}\,\mathbf{x}=\mathbf{A}\,\mathbf{x}$, donde

$$A=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{2}&-\sqrt{3}\\1&\sqrt{6}&-1\\2&0&2\end{pmatrix}$$

(b) Demuestre que para cualquier número real θ, la transformación $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{T}\,\mathbf{x}=\mathbf{A}\,\mathbf{x}$, donde A es una isometría.

$$A=\begin{pmatrix}\sin\theta&\cos\theta&0\\\cos\theta&-\sin\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Solución:

(a) Para demostrar que T es una transformación lineal, debemos verificar las dos propiedades principales de linealidad:

(i) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T(\mathbf{u})+T(\mathbf{v})$, para cualesquiera $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$.

(ii) $T(c\mathbf{u})=cT(\mathbf{u})$, para cualquier $c\in\mathbb{R}$ y $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$.

Sea $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$. Entonces, $T(\mathbf{x})=A\mathbf{x}$, es decir:

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{2}&-\sqrt{3}\\1&\sqrt{6}&-1\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}x_1-\sqrt{2}x_2-\sqrt{3}x_3\\x_1+\sqrt{6}x_2-x_3\\2x_1+2x_3\end{pmatrix}.$$

Ahora verificamos las propiedades de linealidad:

(i) **Aditividad:** Sea $\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$. Entonces:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v})=T\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}(u_1+v_1)-\sqrt{2}(u_2+v_2)-\sqrt{3}(u_3+v_3)\\(u_1+v_1)+\sqrt{6}(u_2+v_2)-(u_3+v_3)\\2(u_1+v_1)+2(u_3+v_3)\end{pmatrix}.$$

Separando términos:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}u_1 - \sqrt{2}u_2 - \sqrt{3}u_3 \\ u_1 + \sqrt{6}u_2 - u_3 \\ 2u_1 + 2u_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}v_1 - \sqrt{2}v_2 - \sqrt{3}v_3 \\ v_1 + \sqrt{6}v_2 - v_3 \\ 2v_1 + 2v_3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

(ii) **Homogeneidad:** Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$T(c\mathbf{u}) = T \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}(cu_1) - \sqrt{2}(cu_2) - \sqrt{3}(cu_3) \\ (cu_1) + \sqrt{6}(cu_2) - (cu_3) \\ 2(cu_1) + 2(cu_3) \end{pmatrix}.$$

Factorizando c:

$$T(c\mathbf{u}) = c \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}u_1 - \sqrt{2}u_2 - \sqrt{3}u_3 \\ u_1 + \sqrt{6}u_2 - u_3 \\ 2u_1 + 2u_3 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}).$$

Dado que ambas propiedades se cumplen, T es una transformación lineal. Una transformación lineal T es una **isometría** si preserva la norma, es decir, si para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Esto equivale a demostrar que la matriz A asociada a T es ortogonal, lo que significa que

$$A^\top A = I,$$

donde $A^\top$ es la transpuesta de A y I es la matriz identidad.

La transpuesta de A es:

$$A^\top = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{6} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos $A^\top A$:

$$A^\top A = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 2 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{6} & 0 \\ -\sqrt{3} & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{6} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El producto matricial se realiza multiplicando filas por columnas:

$$A^\top A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (\sqrt{3})^2 + 1^2 + 2^2 & \sqrt{3}(-\sqrt{2}) + 1\sqrt{6} + 2(0) & \sqrt{3}(-\sqrt{3}) + 1(-1) + 2(2) \\ (-\sqrt{2})\sqrt{3} + \sqrt{6}(1) + 0(2) & (-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 + 0^2 & (-\sqrt{2})(-\sqrt{3}) + \sqrt{6}(-1) + 0(2) \\ (-\sqrt{3})\sqrt{3} + (-1)(1) + 2(2) & (-\sqrt{3})(-\sqrt{2}) + (-1)\sqrt{6} + 2(0) & (-\sqrt{3})^2 + (-1)^2 + 2^2 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo cada entrada, obtenemos:

$$A^\top A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = I.$$

Puesto que $A^\top A = I$, la matriz A es ortogonal, lo que implica que la transformación lineal $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es una isometría.

(b) La matriz A tiene dimensiones 3×3 y define una transformación lineal T. Vamos a verificar que A cumple las propiedades de una transformación lineal:

Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Entonces, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, es decir:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\sin\theta & x_2\cos\theta & 0 \\ x_1\cos\theta & -x_2\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

1. **Aditividad:** Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_1+v_1)\sin\theta & (u_2+v_2)\cos\theta & 0 \\ (u_1+v_1)\cos\theta & -(u_2+v_2)\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & (u_3+v_3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_1\sin\theta & u_2\cos\theta & 0 \\ u_1\cos\theta & -u_2\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1\sin\theta & v_2\cos\theta & 0 \\ v_1\cos\theta & -v_2\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & v_3 \end{pmatrix} = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}).$$

2. **Homogeneidad:** Para $c \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, tenemos:

$$T(c\mathbf{u}) = T\begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (cu_1)\sin\theta & (cu_2)\cos\theta & 0 \\ (cu_1)\cos\theta & -(cu_2)\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & (cu_3) \end{pmatrix}$$

$$c\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = c(A\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}).$$

Dado que ambas propiedades se cumplen, T es una transformación lineal.
Queremos demostrar que T es una isometría. Recordemos que una transformación lineal T es una isometría si preserva el producto interno, es decir,

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Preservación del producto interno Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Dado que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, entonces:

$$\langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\rangle = \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle.$$

Por la propiedad del producto interno, tenemos que:

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^\top A^\top A\mathbf{v}.$$

Ahora, calculemos $A^\top A$:

$$A^\top = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$A^\top A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando las matrices y usando la identidad trigonométrica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$::

$$A^\top A = \begin{pmatrix} \sin^2\theta + \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta & 0 \\ \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto implica que $A^\top A = I$, donde I es la matriz identidad. Por lo tanto:

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \mathbf{u}^\top I\mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle.$$

Por lo tanto, T preserva el producto interno y es una isometría. Adicionalmente, observemos que la matriz A tiene un significado geométrico:

- La submatriz superior izquierda de A, $\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix}$, define una transformación de rotación en el plano xy.
- El tercer eje, correspondiente al vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, permanece invariante.

Esto implica que T realiza una rotación en el plano xy por un ángulo θ y deja el eje z fijo.

3. (4 points) **Valores característicos, vectores característicos y formas canónicas :** Calcule los valores característicos y los espacios característicos de la matriz dada. Si la multiplicidad algebraica de un valor característico es mayor que **1**, calcule su multiplicidad geométrica.

(a)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) **Cálculo de los valores característicos.**

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Calculamos:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)(5) = -4 + \lambda^2 + 5 = \lambda^2 + 1$$

Resolviendo, encontramos los valores característicos

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Por lo tanto, los valores característicos son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i \quad \text{(multiplicidad algebraica 1)} \\ \lambda_2 &= -i \quad \text{(multiplicidad algebraica 1)} \end{aligned}$$

Cálculo de los vectores característicos. Para cada valor característico, resolvemos el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.

- Para $\lambda_1 = i$,

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-i & -1 \\ 5 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Esto nos lleva al sistema:

$$\begin{aligned} (2-i)x_1 - x_2 &= 0 \implies x_2 = (2-i)x_1 \\ 5x_1 + (-2-i)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo, encontramos el vector característico:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} x_1$$

- Para $\lambda_2 = -i$
$$(A-\lambda_2 I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+i & -1 \\ 5 & -2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Resolvemos el sistema y encontramos el vector característico:
$$\begin{aligned} (2+i)x_1 - x_2 &= 0 \implies x_2 = (2+i)x_1 \\ 5x_1 + (-2+i)x_2 &= 0 \end{aligned}$$
$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} x_1$$

(b) Resolvemos la ecuación característica:
$$\det(B-\lambda I) = 0.$$
Calculamos:
$$\begin{aligned} \det(B-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - (-1)\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(-1)\right] + (-1)\left[(1-\lambda) - (0)\right] \\ &= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 1\right] + (\lambda - 1) = (\lambda-1)\left[(\lambda-1)(\lambda-2)\right] = (\lambda-1)^2(\lambda-2) \end{aligned}$$
Por lo tanto, los valores característicos son:
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \quad \text{(multiplicidad algebraica 2)} \\ \lambda_2 &= 2 \quad \text{(multiplicidad algebraica 1)} \end{aligned}$$
Para $\lambda_1 = 1$, resolvemos $(B-I)\mathbf{v} = 0$:
$$(B-I)\mathbf{v} = 0 \implies \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -x_1 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 &= 0 \end{cases}$$
$$x_3 = -x_1 + x_2 \implies x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2$$
Para $\lambda_2 = 2$, resolvemos $(B-2I)\mathbf{v} = 0$:
$$(B-2I)\mathbf{v} = 0 \implies \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} -x_1 - x_2 &= 0 \implies x_2 = -x_1 \\ -x_1 - x_3 &= 0 \implies x_3 = -x_1 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \end{cases}$$
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1$$

4. (3 points) **Valores característicos, vectores característicos y formas canónicas :** Determine si la matriz dada $\mathbf{A}$ es diagonalizable. De ser así, encuentre una matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{C^{-1}AC} = \mathbf{D}$. Verifique que $\mathbf{AC} = \mathbf{CD}$ y que los elementos distintos de cero de $\mathbf{D}$ sean los valores característicos de $\mathbf{A}$.
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Los valores característicos λ de $\mathbf{A}$ se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - (-1)(-2) \\
&= (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = 12 - 7\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \implies (\lambda - 5)(\lambda - 2) = 0$$

Por lo tanto, los valores característicos son:

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 2$$

Para cada valor característico λ, resolvemos $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = 0$ para encontrar los vectores característicos.

Para $\lambda_1 = 5$:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \implies \begin{pmatrix} 3-5 & -1 \\ -2 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos da el sistema:

$$-2x_1 - x_2 = 0 \implies x_2 = -2x_1 \implies \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 2$:

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \implies \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos da el sistema:

$$x_1 - x_2 = 0 \implies x_2 = x_1 \implies \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comprobar si A es diagonalizable : Dado que $\mathbf{A}$ tiene dos valores característicos distintos y dos vectores característicos linealmente independientes, $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

Calcular las matrices C y D : La matriz $\mathbf{C}$ se forma con los vectores característicos como columnas:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathbf{D}$ es la matriz diagonal con los valores característicos en la diagonal:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificar $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$. Calculamos $\mathbf{C}^{-1}$:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(\mathbf{C}) = (1)(1) - (1)(-2) = 3$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{C})}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificamos que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{D}
\end{aligned}$$

También verificamos que $\mathbf{AC} = \mathbf{CD}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{AC} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{CD} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable, y las matrices son:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. (3 points) **Subespacios vectoriales :** Determine si el subconjunto dado $\mathbf{H}$ del espacio vectorial $\mathbf{V}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$.

   (a) $V = \mathbb{R}^2, H = \{(x, y) : x^2 + y^3 < 1\}$

   (b) $V = M_{mn}, H = \{S \in M_{mn} : \text{S es Simetrica}\}$

   Solución:

   (a) Para que $\mathbf{H}$ sea un subespacio de $\mathbf{V}$, debe cumplir las siguientes condiciones:

      1. $\mathbf{H} \neq \emptyset$ y contiene el vector cero ($\mathbf{0} = (0, 0)$).
      2. Es cerrado bajo la suma: Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{H}$.
      3. Es cerrado bajo la multiplicación por escalares: Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\mathbf{u} \in \mathbf{H}$.

      Analicemos cada condición:

      - El vector cero $(0, 0)$ pertenece a $\mathbf{H}$, ya que $0^2 + 0^3 = 0 < 1$. Por lo tanto, se cumple la primera condición.
      - Sin embargo, $\mathbf{H}$ no es cerrado bajo la suma. Por ejemplo, si tomamos $\mathbf{u} = (0, 0.5)$ y $\mathbf{v} = (0, 0.5)$, ambos están en $\mathbf{H}$, pero $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, 1)$, y $0^2 + 1^3 = 1 \not< 1$. Por lo tanto, no cumple la segunda condición.
      - Por la misma razón, $\mathbf{H}$ no es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Por ejemplo, si tomamos $\mathbf{u} = (0, 0.5) \in \mathbf{H}$ y $\alpha = 2$, entonces $\alpha\mathbf{u} = (0, 1)$, y $0^2 + 1^3 = 1 \not< 1$.

      Por lo tanto H, no es un subespacio de $\mathbf{V}$.

   (b) Para que $\mathbf{H}$ sea un subespacio de $\mathbf{V}$, debe cumplir las mismas tres condiciones mencionadas anteriormente.

      - El vector cero de M_{mn} es la matriz nula, que es simétrica. Por lo tanto, la primera condición se cumple.
      - Si $A, B \in \mathbf{H}$, entonces A y B son matrices simétricas, lo que significa que $A^T = A$ y $B^T = B$. Al sumar $A + B$, obtenemos:

        $$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

        lo que muestra que $A + B$ es simétrica. Por lo tanto, $\mathbf{H}$ es cerrado bajo la suma.

- Si $A \in \mathbf{H}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $A^T = A$. Al multiplicar por un escalar α, tenemos:

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A,$$

lo que muestra que αA es simétrica. Por lo tanto, $\mathbf{H}$ es cerrado bajo la multiplicación por escalares.

Por lo tanto H, si es un subespacio de $\mathbf{V}$.

6. (3 points) **Subespacios vectoriales :** Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

(a) En $P_2 : 1 - x^2, x$

(b) En $M_{22} : \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

Solución:

(a) En P_2: $1 - x^2, x$

1. Recordemos que P_2 es el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2.
2. El conjunto dado, $\{1 - x^2, x\}$, contiene dos polinomios:
   - Grado 2, $(1 - x^2)$
   - Grado 1, (x).
3. Para que el conjunto sea una base de P_2, debe:
   - Generar P_2: Cualquier polinomio $p(x) \in P_2$ debe poder expresarse como una combinación lineal de los elementos del conjunto.
   - Ser linealmente independiente.
4. Verifiquemos la independencia lineal. Supongamos que existe una combinación lineal:

$$c_1(1 - x^2) + c_2 x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esto implica:

$$c_1 - c_1 x^2 + c_2 x = 0.$$

Al igualar los coeficientes de potencias de x a cero:

$$\begin{aligned} -c_1 &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x^2\text{)}, \\ c_2 &= 0 \quad \text{(coeficiente de } x\text{)}, \\ c_1 &= 0 \quad \text{(coeficiente constante)}. \end{aligned}$$

Esto implica que $c_1 = c_2 = 0$, por lo que el conjunto es linealmente independiente.

5. Sin embargo, $\{1-x^2, x\}$ no genera P_2, ya que no incluye un polinomio constante independiente de x ni cubre todas las potencias hasta grado 2.
6. Por lo tanto, $\{1 - x^2, x\}$ **no es una base** para P_2.

(b) En $M_{2\times 2}$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

1. Recordemos que $M_{2\times 2}$ es el espacio de todas las matrices 2×2. Tiene dimensión 4.
2. El conjunto dado contiene 4 matrices. Para que sea una base, debe:
   - Ser linealmente independiente.
   - Generar $M_{2\times 2}$.

3. Verifiquemos la independencia lineal. Supongamos que existe una combinación lineal:

$$c_1 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Esto implica un sistema de ecuaciones lineales al igualar los coeficientes de cada posición de la matriz:

$$\begin{aligned} 3c_1 + 3c_2 - 5c_3 &= 0 \quad \text{(posición (1,1))}, \\ c_1 + 2c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \quad \text{(posición (1,2))}, \\ 6c_3 - 7c_4 &= 0 \quad \text{(posición (2,2))}. \end{aligned}$$

   Resolviendo este sistema, podemos determinar si $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ es la única solución, lo que indicaría independencia lineal.

4. Resolviendo el sistema:

$$c_3 = \frac{7}{6}c_4, \quad c_2 = -\frac{11}{6}c_4, \quad c_1 = -\frac{7}{6}c_4.$$

   Si $c_4 \neq 0$, entonces el conjunto es dependiente linealmente.

5. Concluimos que las matrices dadas **no son linealmente independientes** y, por lo tanto, no forman una base para $M_{2\times 2}$.