

**MATEMÁTICAS II****TEMA 6****Planos y rectas en el espacio. Problemas de ángulos, paralelismo y perpendicularidad, simetrías y distancias****1. Ángulos entre rectas y planos en el espacio****1.1. Ángulo entre dos rectas**

El ángulo entre dos rectas es el determinado por sus respectivos vectores de dirección. Este ángulo no depende de que las rectas se corten o no.

Su valor se obtiene aplicando el producto escalar.

Si las rectas son:  $r \equiv \vec{x} = \vec{a} + \lambda \vec{v}_r$  y  $s \equiv \vec{x} = \vec{b} + \lambda \vec{v}_s \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{ángulo}(r, s) = \text{ángulo}(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$$

En consecuencia:

$$\cos(r, s) = \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|}$$

Observaciones:

1) Suele elegirse siempre el valor del ángulo agudo; por tanto, si  $\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)$  fuese negativo se tomará en valor absoluto.

2) Recuerdese:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos(\vec{v}, \vec{w}) \Rightarrow \cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|}$ .

Si  $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3; |\vec{v}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}; |\vec{w}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

**Ejemplo:**

El ángulo que forman las rectas  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{3}$  y  $s: \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 + 5t \\ z = -3 \end{cases}$  es el que forman

los vectores  $\vec{v}_r = (2, -1, 3)$  y  $\vec{v}_s = (4, 5, 0)$ :

$$\cos(r, s) = \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{41}} = \frac{3}{\sqrt{574}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{574}} = 82,8^\circ.$$

Observación: Se toma el ángulo más pequeño, el agudo, y con signo positivo.

**1.2. Ángulo entre dos planos**

El ángulo entre dos planos es el determinado por sus vectores característicos.

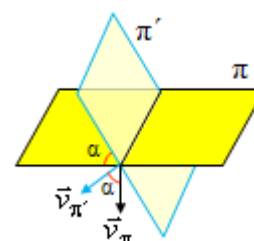
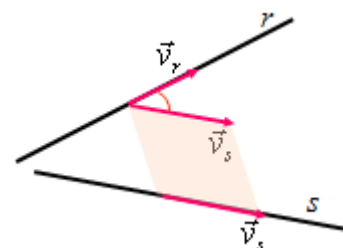
Si los planos son:

$$\pi: ax + by + cz + d = 0 \text{ y } \pi': a'x + b'y + c'z + d' = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ángulo}(\pi, \pi') = \text{ángulo}(\vec{v}_\pi, \vec{v}_{\pi'})$$

En consecuencia:

$$\cos(\pi, \pi') = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_{\pi'}) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_{\pi'}}{|\vec{v}_\pi| |\vec{v}_{\pi'}|} = \frac{a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$



**Ejemplos:**

a) El ángulo que forman los planos  $\pi: x - y - z - 3 = 0$  y  $\pi': x + y - z + 2 = 0$  es el formado por los vectores normales:  $\vec{v}_\pi = (1, -1, -1)$  y  $\vec{v}_{\pi'} = (1, 1, -1)$ .

Luego,

$$\cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_{\pi'}) = \frac{1-1+1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{ángulo}(\pi, \pi') = \arccos 1/3 \approx 70,5^\circ.$$

b) El ángulo que determinan los planos:  $\pi: 2x + y + z + 1 = 0$  y  $\pi': -x + y + z = 0$  es de  $90^\circ$ , pues:

$$\cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_{\pi'}) = \frac{(2, 1, 1) \cdot (-1, 1, 1)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \text{ángulo}(\pi, \pi') = 90^\circ$$

Por tanto, ambos planos son perpendiculares.

**1.3. Ángulo entre una recta y un plano**

Es el menor de los ángulos entre la recta  $r$  y cualquier recta contenida en el plano  $\pi$ ; coincide con el ángulo entre  $r$  y  $r'$ , siendo  $r'$  la proyección de  $r$  sobre  $\pi$ .

Su valor es complementario del ángulo formado por el vector de dirección de la recta y el vector característico del plano.

Esto es,

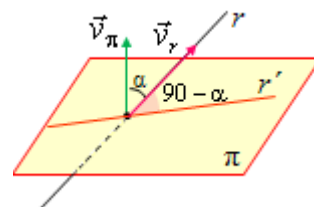
$$\text{ángulo}(r, \pi) = 90^\circ - \text{ángulo}(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r)$$

En consecuencia,

$$\text{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{v}_\pi, \vec{v}_r) = \frac{\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|}.$$

Recuérdese que  $\text{sen } \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ .

→ Si  $\alpha = 0^\circ$ , la recta es paralela o está contenida en el plano; si  $\alpha = 90^\circ$ , la recta y el plano son perpendiculares.

**Ejemplos:**

a) El ángulo que forma la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$  con el plano  $\pi: x - y - z - 3 = 0$  es el complementario del formado por los vectores  $\vec{v}_r = (2, 1, 3)$  y  $\vec{v}_\pi = (1, -1, -1)$ .

Luego,

$$\text{sen}(r, \pi) = \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_\pi) = \frac{2-1-3}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{42}} = -0,3086 \text{ (se tomará su valor absoluto)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ángulo}(\vec{v}_r, \vec{v}_\pi) = \arccos(0,3086) \approx 72,03^\circ \Rightarrow \text{ángulo}(r, \pi) \approx 17,97^\circ.$$

b) El ángulo que determina la recta:  $r: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$  con el plano  $\pi: x = 0$  es el

complementario del determinado por los vectores:  $\vec{v}_r = (1, 0, 1)$  y  $\vec{v}_\pi = (1, 0, 0)$ .

Luego,

$$\text{sen}(r, \pi) = \frac{(1, 0, 1) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{ángulo}(r, \pi) = \pi/4 \rightarrow 45^\circ.$$

## 2. Paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos en el espacio

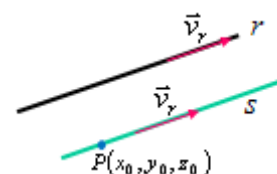
### 2.1. Paralelismo entre rectas y planos

#### • Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando tienen el mismo vector de dirección (o cuando son proporcionales:  $\vec{v}_s = k\vec{v}_r$ ,  $k \neq 0$ ). Las rectas  $r: \vec{x} = \vec{a} + \lambda\vec{v}$  y  $s: \vec{x} = \vec{b} + t\vec{v}$  son paralelas.

**Ejemplos:**

a) Las rectas  $r: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x = 3t \\ y = -2 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$  son paralelas.



b) La paralela a las rectas anteriores que pasa por el punto que  $P(x_0, y_0, z_0)$  es  $s: \begin{cases} x = x_0 + 3t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 - 2t \end{cases}$ .

#### • Planos paralelos

Dos planos son paralelos cuando tienen el mismo vector característico (o cuando sus componentes son proporcionales:  $\vec{v}_\pi = k\vec{v}_{\pi'}$ ,  $k \neq 0$ ).

Los planos  $\pi: ax + by + cz + d = 0$  y  $\pi': ax + by + cz + d' = 0$  son paralelos: sus ecuaciones se diferencian en el término independiente.

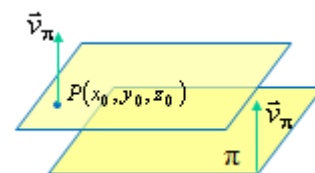
**Ejemplos:**

a) Los planos  $\pi: 2x - y + 4z - 3 = 0$  y  $\pi': 2x - y + 4z + 5 = 0$  son paralelos.

b) El plano paralelo a los anteriores que pasa por el punto que  $P(x_0, y_0, z_0)$  tiene por ecuación  $2(x - x_0) - (y - y_0) + 4(z - z_0) = 0$ .

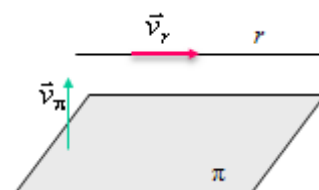
En particular, el plano paralelo a  $\pi$  que contiene a  $P(3, -2, 1)$  es:

$$2(x - 3) - (y + 2) + 4(z - 1) = 0 \Rightarrow 2x - y + 4z - 13 = 0$$



#### • Recta y plano paralelos

Una recta es paralela a un plano cuando el vector de dirección de la recta,  $\vec{v}_r$ , es perpendicular al característico del plano,  $\vec{v}_\pi$ . En consecuencia,  $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 0$ .



**Ejemplo:**

La recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{-1}$  es paralela al plano  $\pi: x + y + 4z - 3 = 0$ , pues los vectores

$\vec{v}_r = (2, 2, -1)$  y  $\vec{v}_\pi = (1, 1, 4)$  son perpendiculares. En efecto:  $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\pi = 2 + 2 - 4 = 0$ .

→ Existen infinitas rectas paralelas a un plano dado. Y recíprocamente, existen infinitos planos paralelos a una recta dada. Por tanto, para la determinación de un elemento a partir de otro habrá que añadir las condiciones necesarias. A continuación se ven dos casos concretos.

#### • Plano paralelo a dos rectas que se cruzan

Un plano paralelo a dos rectas debe contener a los vectores de dirección de cada una de ellas. Para determinarlo es necesario, además, conocer uno de sus puntos.

**Ejemplo:**

Para hallar la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(0, 3, 2)$  y es paralelo a las dos rectas siguientes:

$$r_1 : \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = z+1 \quad r_2 : \begin{cases} x-z=5 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases}$$

1) Se observa que el plano pedido estará determinado por el punto  $P(0, 3, 2)$  y por los vectores de dirección de las rectas dadas,  $\vec{v}_{r1}$  y  $\vec{v}_{r2}$ .

El vector  $\vec{v}_{r1} = (-1, 2, 1)$ .

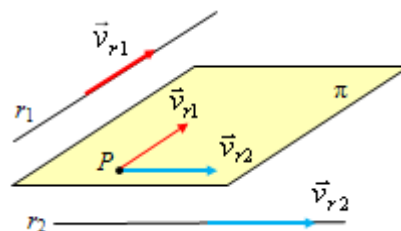
Para obtener  $\vec{v}_{r2}$  se expresa  $r_2$  en forma paramétrica. Para ello basta con despejar  $x$  en la primera ecuación y sustituir en la segunda. Así:

$$r_2 : \begin{cases} x-z=5 \\ 2x+3y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow r_2 : \begin{cases} x=5+z \\ 2(5+z)+3y-z=0 \end{cases} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x=5+z \\ 3y=-z-10 \\ z=z \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x=5+z \\ y=-\frac{10}{3}-\frac{1}{3}z \\ z=z \end{cases} \Rightarrow r_2 : \begin{cases} x=5+3t \\ y=-\frac{10}{3}-t \\ z=3t \end{cases} \rightarrow \text{Por tanto, } \vec{v}_{r2} = (3, -1, 3).$$

2) La ecuación del plano (que queda definido  $P(0, 3, 2)$ ,  $\vec{v}_{r1} = (-1, 2, 1)$  y  $\vec{v}_{r2} = (3, -1, 3)$ ), será:

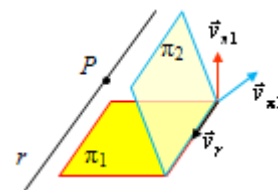
$$\pi : \begin{cases} x = -\lambda + 3\mu \\ y = 3 + 2\lambda - \mu \\ z = 2 + \lambda + 3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ y-3 & 2 & -1 \\ z-2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \pi : 7x + 6(y-3) - 5(z-2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \pi : 7x + 6y - 5z - 8 = 0.$$



- Recta paralela a dos planos que se cortan**

El vector de dirección de la recta paralela a dos planos es perpendicular a cada uno de los vectores característicos de los planos dados. Por tanto, puede obtenerse multiplicando vectorialmente dichos vectores.

Para determinar una recta concreta será necesario, además, conocer uno de sus puntos.

**Ejemplo:**

Para hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(-2, 3, 1)$  y que es paralela a los planos de ecuación:

$$\pi_1 : x - 3y + z - 1 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 : x + 3y - 5 = 0.$$

1) Se halla su vector de dirección, que es:  $\vec{v}_r = \vec{v}_{\pi1} \times \vec{v}_{\pi2}$ .

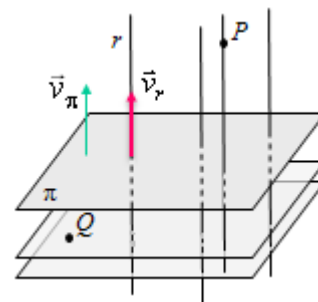
$$\text{Como } \vec{v}_{\pi1} = (1, -3, 1) \text{ y } \vec{v}_{\pi2} = (1, 3, 0) \text{ se tiene que: } \vec{v}_{\pi1} \times \vec{v}_{\pi2} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, 1, 6)$$

$$2) \text{ Como contiene al punto } P(-2, 3, 1), \text{ su ecuación será: } r : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 3 + t \\ z = 1 + 6t \end{cases}$$

## 2.2. Perpendicularidad entre rectas y planos

### • Recta y plano perpendiculares

Una recta y un plano son perpendiculares cuando el vector de dirección de la recta,  $\vec{v}_r$ , es paralelo al característico del plano,  $\vec{v}_\pi$ . En consecuencia,  $\vec{v}_r = k \cdot \vec{v}_\pi$ .



Existen infinitas rectas perpendiculares a un plano dado. Y recíprocamente, existen infinitos planos perpendiculares a una recta dada. Por tanto, para la determinación de una recta concreta a partir de un plano, o de un plano a partir de una recta, habrá que añadir las condiciones necesarias; por ejemplo, un punto.

### Ejemplos:

a) La recta  $r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$  es perpendicular al plano  $\pi : 3x + y - 2z - 3 = 0$ , pues los vectores

$\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_\pi$  son iguales:  $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (3, 1, -2)$ .

b) Las rectas de ecuaciones  $r : \begin{cases} x = a_1 + 3t \\ y = a_2 + t \\ z = a_3 - 2t \end{cases}$  y los planos de ecuación  $\pi : 3x + y - 2z + d = 0$

son perpendiculares. Para determinar una recta o un plano concreto bastará con dar un punto.

c) La recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por  $P(x_0, y_0, z_0)$  es  $r : \begin{cases} x = x_0 + 3t \\ y = y_0 + t \\ z = z_0 - 2t \end{cases}$ .

En particular, si  $P = (1, -3, 5)$  la recta será  $r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + t \\ z = 5 - 2t \end{cases}$

d) El plano perpendicular a  $r$  que pase por el punto  $Q(x_0, y_0, z_0)$  es  $\pi : 3(x - x_0) + (y - y_0) - 2(z - z_0) = 0$

En particular, si  $Q = (2, -1, 6)$  el plano es:

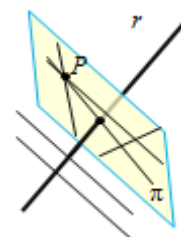
$$\pi : 3(x - 2) + (y + 1) - 2(z - 6) = 0 \Leftrightarrow \pi : 3x + y - 2z + 7 = 0.$$

→ Obsérvese que en todos los casos  $\vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (3, 1, -2)$ .

### • Perpendicularidad entre dos rectas

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus respectivos vectores de dirección.

Existen infinitas rectas perpendiculares a una dada. En particular, son perpendiculares a  $r$  todas las rectas contenidas en un plano  $\pi$  perpendicular a  $r$ . Por tanto, para la determinación una recta concreta habrá que añadir las condiciones necesarias; por ejemplo, un punto, una dirección, indicar que deben cortarse...



**Ejemplos:**

a) Las rectas  $r: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$  y  $s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 2t \\ z = 2 - t \end{cases}$  son perpendiculares, pues los vectores

$\vec{v}_r = (3, 1, -2)$  y  $\vec{v}_s = (0, -2, -1)$  lo son:  $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (3, 1, -2) \cdot (0, -2, -1) = -2 + 2 = 0$ .

b) Para hallar la recta perpendicular a  $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$  que pase por el punto  $P(-2, 0, 1)$  y que

además corte a  $r$ , puede hacerse lo siguiente:

1) Hallar el plano  $\pi$  perpendicular a  $r$  que contenga a  $P$ .

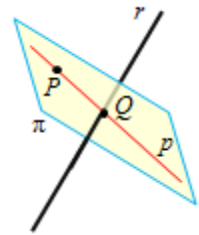
Como su vector característico  $\vec{v}_\pi$  debe ser igual a  $\vec{v}_r = (3, 1, 2)$  y, además, contener a  $P$ , su ecuación es:

$$\pi: 3(x + 2) + y + 2(z - 1) = 0 \Rightarrow \pi: 3x + y + 2z + 4 = 0$$

2) Hallar el punto  $Q$ , intersección de  $r$  y  $\pi$ . Para ello se sustituyen las ecuaciones de la recta en la del plano:

$$3(2 + 3\lambda) + \lambda + 2(2 + 2\lambda) + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q = (-1, -1, 0).$$

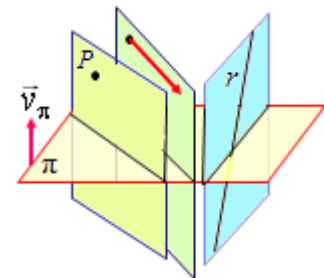
3) La perpendicular pedida es la que pasa por los puntos  $P$  y  $Q$ . Su ecuación es:  $p: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$



- Perpendicularidad entre dos planos**

Dos planos son perpendiculares cuando lo son sus respectivos vectores característicos.

Existen infinitos planos perpendiculares a uno dado. Por tanto, para la determinación uno concreto habrá que añadir las condiciones necesarias; por ejemplo, que contenga a un punto, que sea paralelo a una recta o que la contenga... (Recuérdese que un plano queda definido por un punto y dos vectores; en este caso, al ser perpendiculares al plano  $\pi$ , sólo se conoce uno de esos dos vectores, que es  $\vec{v}_\pi$ .)

**Ejemplos:**

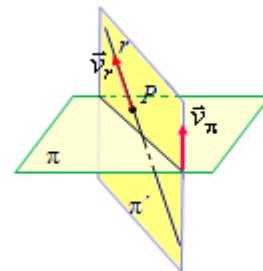
a) Los planos  $\pi_1: 3x + y + 2z + 4 = 0$  y  $\pi_2: 2y - z = 0$  son perpendiculares pues los vectores  $\vec{v}_{\pi_1} = (3, 1, 2)$  y  $\vec{v}_{\pi_2} = (0, 2, -1)$  lo son:  $\vec{v}_{\pi_1} \cdot \vec{v}_{\pi_2} = (3, 1, 2) \cdot (0, 2, -1) = 2 - 2 = 0$ .

b) La ecuación del plano  $\pi'$  perpendicular a  $\pi \equiv 2x - y + 3z = 6$  y que

contiene a la recta  $r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 0 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ , viene determinada por el punto

$P(0, 0, -1)$  y los vectores  $\vec{v}_r = (-1, 0, 1)$  y  $\vec{v}_\pi = (2, -1, 3)$ .

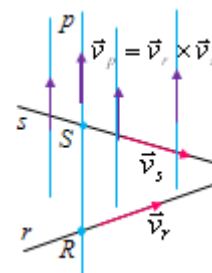
$$\text{Su ecuación es: } \pi' \equiv \begin{cases} x = -3 - \lambda + 2\mu \\ y = -\mu \\ z = 4 + \lambda + 3\mu \end{cases} \Leftrightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 2 \\ y & 0 & -1 \\ z-4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x + 5y + z - 1 = 0.$$



### 2.3. Perpendicular común a dos rectas

Existen infinitas rectas perpendiculares a dos dadas. El vector de dirección de las perpendiculares se obtiene mediante el producto vectorial de los vectores de dirección de las rectas dadas; esto es:  $\vec{v}_p = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$ .

La recta perpendicular común que suele interesar (la que se busca) es la que corta a ambas rectas.



#### • Perpendicular común a dos rectas que se cortan

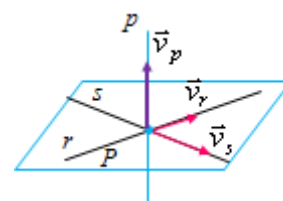
Viene definida por el punto  $P$  de corte y por el vector  $\vec{v}_p = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$ . (Se trata, pues, de un problema sencillo).

#### Ejemplo:

Para determinar la perpendicular común,  $p$ , a las rectas  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 2 + t \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{cases}$ , que

se cortan en el punto  $P(1, 0, 2)$ , basta con calcular el vector  $\vec{v}_p = \vec{v}_r \times \vec{v}_s$ .

$$\text{Como } \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, -1, -3) \Rightarrow p \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$



#### • Perpendicular común a dos rectas que se cruzan

Hay dos maneras de calcularla:

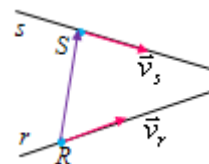
Primer método: A partir de dos puntos genéricos.

Se toman dos puntos genéricos, uno de cada una de las rectas dadas,  $R \in r$  y  $S \in s$ , y se impone la condición de que el vector  $\overrightarrow{RS}$  (o  $\overrightarrow{SR}$ ) sea perpendicular a los de dirección de las rectas,  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_s$ .

$$\text{Se obtiene así el sistema: } \begin{cases} \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_r = 0 \\ \overrightarrow{RS} \cdot \vec{v}_s = 0 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema para obtener los puntos  $R$  y  $S$  concretos.

La recta  $p$  queda definida por el punto  $R$  (o  $S$ ) y el vector  $\overrightarrow{RS}$ .



#### Ejemplo:

Para hallar la recta perpendicular común a las rectas  $r$  y  $s$ , de ecuaciones:

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

1) Se toman puntos genéricos de  $r$  y  $s$ :

$$R = (-1 - 2h, 2 + 2h, -4h), \quad S = (2 + 3t, -1 + t, -2 + t)$$

El vector  $\overrightarrow{SR} = (-3 - 2h - 3t, 3 + 2h - t, 2 - 4h - t)$ , que indica la dirección de la recta perpendicular común a  $r$  y  $s$ , debe ser perpendicular a los de dirección de  $r$  y  $s$ :

$$\vec{v}_r = (-2, 2, -4) \text{ y } \vec{v}_s = (3, 1, 1).$$

2) Se multiplica escalarmente ( $\overrightarrow{SR} \cdot \vec{v}_r = 0$ ,  $\overrightarrow{SR} \cdot \vec{v}_s = 0$ ), y se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 24h + 8t + 4 = 0 \\ -8h - 11t - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{-3}{50} \text{ y } t = \frac{-8}{25}$$

Con esto:

$$R = \left( \frac{-44}{50}, \frac{94}{50}, \frac{12}{50} \right) = \left( \frac{-22}{25}, \frac{47}{25}, \frac{6}{25} \right), S = \left( \frac{26}{25}, \frac{-33}{25}, \frac{-58}{25} \right) \text{ y}$$

$$\mathbf{RS} = \left( \frac{-48}{25}, \frac{80}{25}, \frac{64}{25} \right) \equiv (-3, 5, 4).$$

3) La recta perpendicular común, que pasa por  $R$  y lleva la dirección de  $\mathbf{RS}$  es:

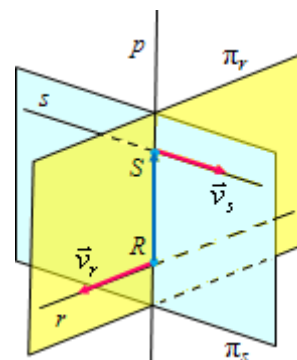
$$p: \begin{cases} x = -22/25 - 3t \\ y = 47/25 + 5t \\ z = 6/25 + 4t \end{cases}$$

Segundo método: A partir de dos planos

La perpendicular común puede obtenerse mediante la intersección de los planos  $\pi_r$  y  $\pi_s$ .

El plano  $\pi_r$  viene determinado por la recta  $r$ , a la que contiene, y por el vector  $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ .

El plano  $\pi_s$  viene determinado por la recta  $s$ , a la que contiene, y por el vector  $\vec{v}_r \times \vec{v}_s$ .



**Ejemplo:**

Para las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$ , la perpendicular común puede obtenerse

como sigue:

$$1) \text{ Se halla } \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2, -1, 1).$$

2) Se hallan  $\pi_r$  y  $\pi_s$ :

$$\bullet \pi_r, \text{ determinado por } r \text{ y } \vec{v}_r \times \vec{v}_s \Rightarrow \pi_r: \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2h \\ y = \lambda - h \\ z = -\lambda + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_r: -3y - 3z = 0 \Leftrightarrow y + z = 0.$$

$$\bullet \pi_s, \text{ determinado por } s \text{ y } \vec{v}_r \times \vec{v}_s \Rightarrow \pi_s \equiv \begin{cases} x = \mu + 2t \\ y = 2 + 2\mu - t \\ z = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y-2 & 2 & -1 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_s: 2x - y - 5z + 2 = 0.$$

3) Por tanto, la perpendicular común es:

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ 2x - y - 5z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ 2x = -2 + y + 5z \end{cases} (\rightarrow y = \lambda) \Rightarrow p \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

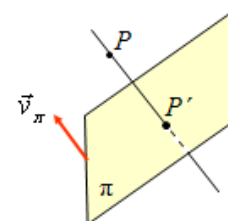
Observación: El lector interesado debería hacer cada uno de estos ejemplos mediante el método alternativo; y comprobar que la solución es la misma.



### 3. Proyecciones en el espacio

#### 3.1. Proyección de un punto sobre un plano

La proyección de un punto  $P$  sobre un plano  $\pi$  es el punto  $P'$  del plano tal que el vector  $\overrightarrow{PP'}$  es perpendicular al plano;  $P'$  es el punto más cercano de  $\pi$  a  $P$ . Se puede encontrar hallando intersección de la recta  $r$ , perpendicular a  $\pi$  por  $P$ , con el plano  $\pi$ .



**Ejemplos:**

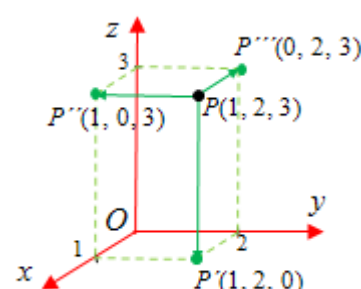
a) Para hallar la proyección de  $P(1, -1, 0)$  sobre el plano  $\pi: 3x + y - 2z + 7 = 0$ :

1) Se halla la recta perpendicular a  $\pi$  que contiene a  $P \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -2t \end{cases}$

2) Se halla el corte entre  $r$  y  $\pi \rightarrow \pi: 3(1 + 3t) + (-1 + t) - 2(-2t) + 7 = 0 \Rightarrow t = -9/14$ .

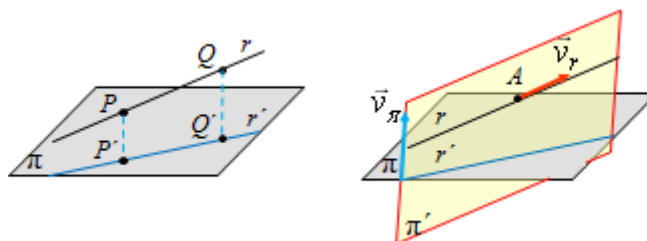
Por tanto, el punto  $P' = (-13/14, -23/14, 18/14)$ .

b) La proyección de un punto cualquiera sobre los planos cartesianos es inmediata. Basta con hacer 0 la coordenada correspondiente. Así, por ejemplo, la proyección de  $P(1, 2, 3)$  sobre el plano  $z = 0$  es  $P'(1, 2, 0)$ ; sobre el plano  $y = 0$  es  $P''(1, 0, 3)$ ; y, por último, sobre el plano  $x = 0$  es  $P'''(0, 2, 3)$ .



#### 3.2. Proyección de una recta sobre un plano

La proyección de una recta  $r$  sobre un plano  $\pi$  es la recta que se obtiene al proyectar dos puntos de  $r$  sobre  $\pi$ . También se puede encontrar hallando la intersección de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ , siendo  $\pi'$  el plano perpendicular a  $\pi$  que contiene a  $r$ . (Este plano  $\pi'$  está determinado por la recta  $r$  y por el vector  $\vec{v}_\pi$ ; esto es, por un punto  $A \in r$  y por los vectores  $\vec{v}_r$  y  $\vec{v}_\pi$ .)



**Ejemplos:**

a) Para hallar la proyección de la recta  $r: \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{2}$  sobre el plano

$\pi: 3x + y - 2z - 7 = 0$ :

1) Se halla el plano  $\pi'$  determinado por  $A(0, -3, -1) \in r$ ,  $\vec{v}_r = (-1, 2, 2)$  y  $\vec{v}_\pi = (3, 1, -2)$ .

Su ecuación es  $\pi': \begin{cases} x = -t + 3h \\ y = -3 + 2t + h \\ z = -1 + 2t - 2h \end{cases} \Leftrightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi': -6x + 4y - 7z + 5 = 0$

2) Las ecuaciones de la recta proyectada son:

$$r': \begin{cases} 3x + y - 2z - 7 = 0 \\ -6x + 4y - 7z + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{En forma paramétrica: } r': \begin{cases} x = 11/6 + \lambda/18 \\ y = 9/6 + 11\lambda/6 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Observación: El lector interesado debería comprobar que se obtiene el mismo resultado proyectando dos puntos de  $r$  sobre  $\pi$ ; por ejemplo, los puntos  $P(0, -3, -1)$  y  $Q(-1, -1, 1)$ .

b) La proyección de una recta cualquiera sobre los planos cartesianos es algo más sencilla. Basta con hacer 0 la coordenada correspondiente.

Así, por ejemplo, la proyección de la recta  $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$  sobre el plano  $z = 0$  se halla

proyectando, por ejemplo, los puntos  $P(1, -1, 3)$  y  $Q(4, 0, 1)$  de ella, obteniéndose los puntos  $P'(1, -1, 0)$  y  $Q'(4, 0, 0)$ , respectivamente.

La recta proyectada es:  $r': \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ . (Obsérvese que basta con hacer 0 la componente  $z$ .)

→ Igualmente, la proyección de  $r: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$  sobre el plano  $x = 0$  será  $r'': \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ .

(En este caso se hace 0 la componente  $x$ .)

→ Y sobre el plano  $y = 0$  será  $r''': \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 0 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ .

### 3.3. Proyección de un punto sobre una recta

La proyección de un punto  $P$  sobre una recta  $r$  es el punto  $P'$  de la recta tal que el vector  $\overrightarrow{PP'}$  es perpendicular a ella; el punto  $P'$  es el más cercano de  $r$  a  $P$ .

El punto  $P'$  se puede encontrar hallando la intersección del plano  $\pi$ , perpendicular a  $r$  por  $P$ , con la recta  $r$ .

**Ejemplo:**

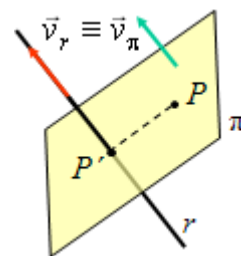
Para hallar la proyección de  $P(1, 2, -1)$  sobre la recta  $r: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 \end{cases}$ :

1) Se halla el plano perpendicular a  $r$  que contiene a  $P \rightarrow \pi: -2x + y + d = 0$ .

Como debe contener a  $P(1, 2, -1) \Rightarrow -2 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = 0$ . El plano es  $\pi: -2x + y = 0$ .

2) Se halla el corte entre  $r$  y  $\pi \rightarrow \pi: -2(1 - 2t) + (-1 + t) = 0 \Rightarrow t = 3/5$ .

Por tanto, el punto  $P' = (-1/5, -2/5, 3)$ .

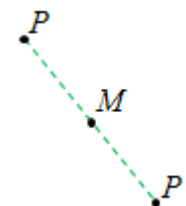


## 4. Simetrías en el espacio

### 4.1. Simetría de un punto respecto de otro

Dado un punto  $P$ , su simétrico respecto de  $M$ , es otro punto  $P'$  tal que el punto medio entre  $P$  y  $P'$  es el punto  $M$ .

Como  $P$  y  $M$  son conocidos, suponiendo que  $P' = (x_0, y_0, z_0)$  e imponiendo que las coordenadas de  $M$  sean las del punto medio, se deducen  $x_0, y_0$  y  $z_0$ .



#### Ejemplo:

Si  $P = (2, 1, 7)$  y  $M = (1, 3, 5)$ , suponiendo que el simétrico es  $P' = (x_0, y_0, z_0)$ , el punto medio

entre  $P$  y  $P'$  será:  $M = \left( \frac{2+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{7+z_0}{2} \right)$

Como  $M = (1, 3, 5) \Rightarrow (1, 3, 5) = \left( \frac{2+x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{7+z_0}{2} \right) \Rightarrow$

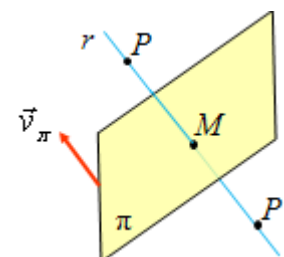
$$1 = \frac{2+x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 0; \quad 3 = \frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = 5; \quad 5 = \frac{7+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 3$$

Por tanto,  $P' = (0, 5, 3)$ .

### 4.2. Simetría de un punto respecto de un plano

Dado un punto  $P$ , su simétrico respecto de un plano  $\pi$ , es otro punto  $P'$  tal que el punto medio entre  $P$  y  $P'$  es el punto  $M \in \pi$ , y, además, el vector  $\overrightarrow{PP'}$  es perpendicular al plano.

Por tanto, el punto  $P'$ , simétrico de  $P$  respecto del plano  $\pi$ , es el simétrico de  $P$  respecto de  $M$ , siendo  $M$  la intersección del plano  $\pi$  con la recta que pasa por  $P$  y es perpendicular al plano.



#### Ejemplo:

Para hallar el punto simétrico de  $P = (0, 1, -2)$  respecto de  $\pi: x - 2y + 2z - 3 = 0$ , se puede hacer lo siguiente:

1) Se calcula el punto  $M$ :  $\rightarrow$  es el de corte de la recta  $r$ , perpendicular a  $\pi$  por  $P$ , con dicho plano.

Como  $\vec{v}_\pi = (1, -2, 2)$ , se deduce que  $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 + 2\lambda \end{cases}$

Corte de la recta  $r$  con plano  $\pi$ :

$$\lambda - 2(1 - 2\lambda) + 2(-2 + 2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow M = (1, -1, 0).$$

2) Suponiendo que el simétrico es  $P' = (x_0, y_0, z_0)$ , el punto medio de  $P$  y  $P'$  es:

$$M = \left( \frac{x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{-2+z_0}{2} \right)$$

Como  $M = (1, -1, 0) \Rightarrow (1, -1, 0) = \left( \frac{x_0}{2}, \frac{1+y_0}{2}, \frac{-2+z_0}{2} \right) \Rightarrow$

$$1 = \frac{x_0}{2} \Rightarrow x_0 = 2; \quad -1 = \frac{1+y_0}{2} \Rightarrow y_0 = -3; \quad 0 = \frac{-2+z_0}{2} \Rightarrow z_0 = 2$$

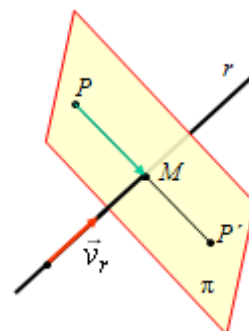
Por tanto, el punto simétrico de  $P$  respecto de  $\pi$  es  $P' = (2, -3, 2)$ .

### 4.3. Simetría de un punto respecto de una recta

Dado un punto  $P$ , su simétrico respecto de una recta  $r$  es otro punto  $P'$ , que cumple:

- 1) El punto medio,  $M$ , entre  $P$  y  $P'$  debe ser de la recta.
- 2) El vector  $\overrightarrow{PM}$  debe ser perpendicular al vector  $\vec{v}_r$  de dirección de la recta. Esto es, debe cumplirse que  $\vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PM} = 0$ .

(El punto  $M$  puede determinarse mediante el corte de  $r$  con el plano  $\pi$ , que contiene a  $P$  y es perpendicular a  $r$ .)



#### Ejemplos:

a) Para hallar el punto simétrico de  $P = (1, 2, 9)$  respecto de la recta

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3 + t \\ z = 4t \end{cases}, \text{ puede hacerse lo siguiente:}$$

1) Sea  $M$  un punto genérico de la recta:  $M = (t, t + 3, 4t)$ .

Por tanto:

$$\overrightarrow{PM} = (t, t + 3, 4t) - (1, 2, 9) = (t - 1, t + 1, 4t - 9); \vec{v}_r = (1, 1, 4)$$

Como debe cumplirse que  $\vec{v}_r \cdot \overrightarrow{PM} = 0$ , entonces:

$$(1, 1, 4) \cdot (t - 1, t + 1, 4t - 9) = t - 1 + t + 1 + 16t - 36 = 0 \Rightarrow 18t = 36 \Rightarrow t = 2$$

Luego,  $M = (2, 5, 8)$

2) Si  $P' = (a, b, c)$ , el punto medio entre  $P$  y  $P'$  será:  $M = \left( \frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{c+9}{2} \right)$

Como  $M = (2, 5, 8)$ , igualando las coordenadas de *ambos*  $M$  se tiene:

$$\frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow a = 3; \quad \frac{b+2}{2} = 5 \Rightarrow b = 8; \quad \frac{c+9}{2} = 8 \Rightarrow c = 7.$$

Luego, el punto el punto simétrico de  $P$  respecto de  $r$  es:  $P' = (3, 8, 7)$ .

b) Como se ha dicho arriba, un método alternativo para calcular  $M$  consiste en hallar el punto de intersección entre la recta y su plano perpendicular.

Así, si  $P = (2, 0, 1)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ , para hallar su simétrico  $P'$  se procede como sigue:

1) Se hallan unas ecuaciones paramétricas de la recta:  $r \equiv \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ .

Por tanto, el plano  $\pi$ , perpendicular a  $r$  es  $\pi: -2x + y + d = 0$ ; y como contiene  $P = (2, 0, 1)$ , se tendrá que  $-4 + d = 0 \Rightarrow d = 4$ . Luego,  $\pi: -2x + y + 4 = 0$

2) Se calcula ahora el punto  $M$ , intersección de  $\pi$  con  $r$ :

$$-2(-2t) + t + 4 = 0 \Rightarrow 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = -4/5.$$

Luego,  $M = (8/5, -4/5, 0)$ .

3) Una alternativa a imponer que  $M$  sea el punto medio entre  $P$  y  $P'$  es exigir que los vectores  $\overrightarrow{PM}$  y  $\overrightarrow{MP'}$  sean iguales.

Si  $P' = (a, b, c)$  se cumple:  $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$

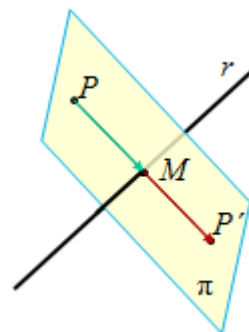
$$\overrightarrow{PM} = (8/5, -4/5, 0) - (2, 0, 1) = \left(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, -1\right)$$

$$\overrightarrow{MP'} = (a, b, c) - (8/5, -4/5, 0) = \left(a - \frac{8}{5}, b + \frac{4}{5}, c\right).$$

Luego,

$$-\frac{2}{5} = a - \frac{8}{5} \Rightarrow a = \frac{6}{5}; \quad -\frac{4}{5} = b + \frac{4}{5} \Rightarrow b = -\frac{8}{5}; \quad -1 = c \Rightarrow c = -1.$$

El punto buscado es  $P' = \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}, -1\right)$ .



## 5. Distancias en el espacio

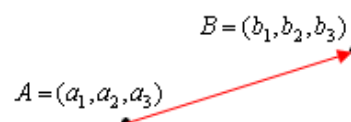
### 5.1. Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos  $A$  y  $B$ ,  $d(A, B)$ , es igual al módulo del vector  $\overrightarrow{AB}$ .

Si las coordenadas de esos puntos fuesen  $A = (a_1, a_2, a_3)$  y  $B = (b_1, b_2, b_3)$ , entonces

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$



#### Ejemplo:

Si  $A = (1, -2, 0)$  y  $B = (3, -1, 4)$ , la distancia,

$$d(A, B) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{21}.$$

Observa que coincide con el módulo del vector:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -1, 4) - (1, -2, 0) = (2, 1, 4) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

Observa también que:

$$d(A, B) = d(B, A) = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-(-1))^2 + (0-4)^2} = \sqrt{21}.$$

### 5.2. Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto  $P$  a un plano  $\pi$  es la distancia entre  $P$  y su proyección  $P'$  sobre  $\pi$ .

Es la menor de las distancias entre  $P$  y cualquiera de los puntos de  $\pi$ .

Se puede determinar proyectando el punto sobre el plano, para calcular después la distancia entre ambos puntos.

Existe una fórmula que facilita su cálculo, que es:

$$d(P = (x_0, y_0, z_0), \pi: ax + by + cz + d = 0) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

#### Obtención de esta fórmula

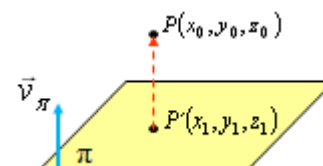
Sea  $P = (x_0, y_0, z_0)$  y  $P' = (x_1, y_1, z_1)$  su proyectado sobre el plano

$\pi: ax + by + cz + d = 0$ .

Se cumple que los vectores  $\overrightarrow{PP'}$  y  $\vec{v}_\pi = (a, b, c)$  son paralelos. Por consiguiente:

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_\pi = |\overrightarrow{PP'}| \cdot |\vec{v}_\pi| \cdot \cos 0^\circ \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_\pi = |\overrightarrow{PP'}| \cdot |\vec{v}_\pi| \Rightarrow d(P, \pi) = |\overrightarrow{PP'}| = \frac{\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v}_\pi}{|\vec{v}_\pi|} (*)$$

Como  $\overrightarrow{PP'} = (x_0, y_0, z_0) - (x_1, y_1, z_1) = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$ , el producto escalar



$$\begin{aligned}\overrightarrow{P'P} \cdot \vec{v}_\pi &= a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) = ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax_1 + by_1 + cz_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overrightarrow{P'P} \cdot \vec{v}_\pi &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d, \text{ pues de } ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \Rightarrow -(ax_1 + by_1 + cz_1) = d.\end{aligned}$$

Por otra parte,  $|\vec{v}_r| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Luego, sustituyendo en (\*), queda:

$$d(P = (x_0, y_0, z_0), \pi : ax + by + cz + d = 0) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

### Ejemplo:

La distancia del punto  $P = (-1, 3, 4)$  al plano  $\pi : 2x - 5y + z - 7 = 0$  es:

$$d(P = (-1, 3, 4), \pi : 2x - 5y + z - 7 = 0) = \left| \frac{2 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 + 4 - 7}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-20}{\sqrt{30}} \right| = \frac{14}{\sqrt{30}}.$$

### • Distancia entre dos planos paralelos

La distancia entre dos planos paralelos  $\pi$  y  $\pi'$  es igual a la distancia de cualquier punto de  $\pi$  al plano  $\pi'$ :

$$d(\pi, \pi') = d(P, \pi'), P \in \pi$$

### Ejemplo:

La distancia entre los planos  $\pi : 2x - 5y + z - 7 = 0$  y  $\pi' : 2x - 5y + z + 3 = 0$  es igual a la distancia del punto  $P(0, 0, -3) \in \pi$  al plano  $\pi'$ . Vale:

$$d(P, \pi') = \left| \frac{-3 - 7}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}} \right| = \frac{10}{\sqrt{30}}.$$

### 5.3. Plano bisector de dos planos dados que se cortan

Dados dos planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  que se cortan en una recta, el plano bisector de ellos es el que divide el ángulo diedro que determinan en dos ángulos iguales. (Es el concepto análogo a la bisectriz de un ángulo determinado por dos rectas.)

#### Propiedad

Todos los puntos del plano bisector están a la misma distancia de los planos dados. Esto es, si el punto  $P(x, y, z)$  pertenece al plano bisector  $\pi$ , se cumple que  $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$ .

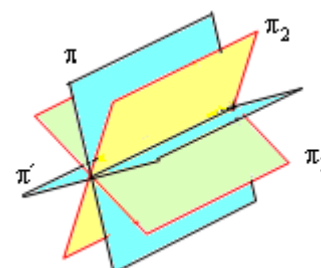
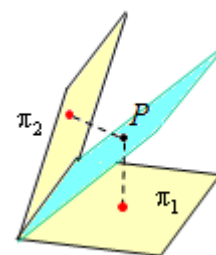
Por tanto, si los planos dados son:

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \text{ y } \pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$$

La ecuación del plano bisector será:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z + d_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2z + d_2}{\pm \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

El signo  $\pm$  advierte que hay dos soluciones.



**Ejemplo:**

El plano bisector de los planos  $\pi_1 : 3x - 4y - 6 = 0$  y  $\pi_2 : 2x - 2y + z - 1 = 0$ , viene dado por la ecuación:

$$\frac{3x - 4y - 6}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2x - 2y + z - 1}{\pm \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \Rightarrow \frac{3x - 4y - 6}{5} = \frac{2x - 2y + z - 1}{\pm 3}$$

Los planos bisectores son:

$$\pi : +3(3x - 4y - 6) = 5(2x - 2y + z - 1) \Rightarrow \pi : x + 2y + 5z + 13 = 0$$

$$\pi' : -3(3x - 4y - 6) = 5(2x - 2y + z - 1) \Rightarrow \pi' : 19x - 22y + 5z - 23 = 0$$

Observación: Puede verse que los planos bisectores son perpendiculares.

**5.4. Plano mediador de dos puntos (de un segmento)**

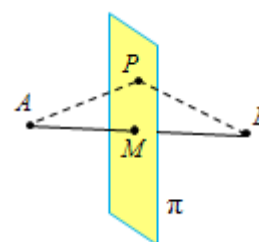
Dados dos puntos  $A$  y  $B$ , el plano mediador del segmento  $AB$  es el plano perpendicular al segmento y que contiene a su punto medio  $M$ .

(Es el concepto análogo al de mediatriz de un segmento.)

Propiedad

Todos los puntos del plano mediador están a la misma distancia de los extremos del segmento. Esto es, si el punto  $P(x, y, z)$  pertenece al plano mediador  $\pi$ , se cumple que  $d(P, A) = d(P, B)$ .

La ecuación del plano mediador se halla fácilmente si se tiene en cuenta que su vector director es  $\overrightarrow{AB}$  y que contiene al punto  $M$ .

**Ejemplo:**

Dados los puntos  $A(-2, 3, 0)$  y  $B(2, -1, 2)$ , el plano mediador del segmento  $AB$  tiene por vector director a  $\vec{v}_\pi = \overrightarrow{AB} = (2, -1, 4) - (-2, 3, 0) = (4, -4, 2)$ .

Por tanto, su ecuación será:  $\pi : 4x - 4y + 2z + d = 0$ .

Como contiene al punto  $M = \left( \frac{-2+2}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (0, 1, 1)$ , debe cumplirse que  $d = 2$ .

Luego, el plano mediador es  $\pi : 4x - 4y + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow \pi : 2x - 2y + z + 1 = 0$ .

→ Si se aplica la propiedad  $d(P, A) = d(P, B)$ , suponiendo que  $P(x, y, z)$ , se tendrá:

$$d(P, A) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2 + z^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2} = d(P, B)$$

Elevando al cuadrado se obtiene la misma ecuación:  $\pi : 2x - 2y + z + 1 = 0$ .

**5.5. Distancia de un punto a una recta**

La distancia de un punto  $P$  a una recta  $r$  es la distancia entre  $P$  y su proyección  $P'$  sobre  $r$ .

Es la menor de las distancias entre  $P$  y cualquiera de los puntos de  $\pi$ .

Se puede determinar proyectando el punto sobre la recta, para calcular después la distancia entre ambos puntos.

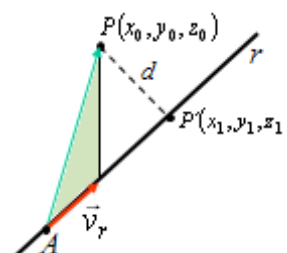
Existe una fórmula que facilita su cálculo, que es:

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

Obtención de esta fórmula

En la figura de la derecha se ha sombreado el triángulo determinado por los vectores  $\overrightarrow{AP}$  y  $\vec{v}_r$ ,  $A \in r$ .

La superficie,  $S$ , del triángulo puede determinarse de dos formas: mediante el producto



vectorial; o a partir de su base y su altura, que es la distancia de  $P$  a  $r$ .

$$\text{Esto es: } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r| \text{ y } S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{|\vec{v}_r| \cdot d(P, r)}{2}.$$

Igualando y despejando se obtiene:

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r| = \frac{|\vec{v}_r| \cdot d(P, r)}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r| = |\vec{v}_r| \cdot d(P, r) \Rightarrow d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$$

**Ejemplo:**

La distancia entre el punto  $P = (2, 0, -1)$  y la recta  $r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  se calcula como sigue:

1) Se determina el vector  $\overrightarrow{AP}$ , con  $A = (-1, 2, -1)$  y el producto vectorial  $\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r$ :

$$\overrightarrow{AP} = (2, 0, -1) - (-1, 2, -1) = (3, -2, 0)$$

$$\text{Como } \vec{v}_r = (-2, 1, 3): \quad \overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-6, 9, -1).$$

$$\text{Se tiene que } |\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2 + (-1)^2} = \sqrt{118}; \quad |\vec{v}_r| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

2) Se aplica la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} = \frac{\sqrt{118}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{59}{7}}.$$

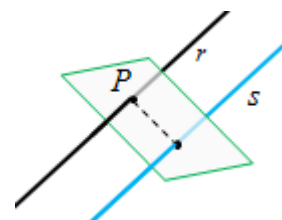
**Observación:** Es más intuitivo, y alguna vez más rápido, determinar esa distancia calculando el punto,  $P'$ , de corte del plano perpendicular a  $r$  que contiene a  $P \rightarrow d(P, r) = d(P, P')$ .

## 5.6. Distancia entre dos rectas

### • Distancia entre dos rectas paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas  $r$  y  $s$  es igual a la distancia de cualquier punto de  $r$  a la recta  $s$ :

$$d(r, s) = d(P, s), \quad P \in r.$$



**Ejemplo:**

La distancia entre las rectas paralelas  $r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$ , se calcula como

sigue:

1) Se halla el plano perpendicular a las rectas por el punto  $P(-1, 2, -1)$  de  $r$ : su vector característico es  $\vec{v}_\pi = \vec{v}_r = (-2, 1, 3)$ ; y su ecuación:

$$\pi: -2(x+1) + (y-2) + 3(z+1) = 0 \Leftrightarrow \pi: -2x + y + 3z - 1 = 0$$

2) Se calcula el punto de corte,  $P'$ , de ese plano con la recta  $s$ :

$$-2(-2t) + (-2+t) + 3(1+3t) - 1 = 0 \Rightarrow t = 0 \rightarrow P' = (0, -2, 1).$$

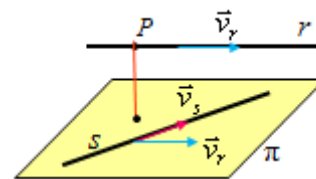
3) La distancia  $d(r, s) = d(P, s) = d(P, P') = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{21}.$



### • Distancia entre dos rectas que se cruzan

La distancia entre dos rectas,  $r$  y  $s$ , es la menor de las distancias posibles. Es la distancia de un punto cualquiera de  $r$  al plano paralelo a ella que contiene a  $s$ :

$$d(r, s) = d(P, \pi), P \in r \text{ y } \pi \text{ plano paralelo a } r \text{ que contiene a } s.$$



### Ejemplo:

La distancia entre las rectas que se cruzan  $r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$ , se calcula así:

1) Se halla el plano  $\pi$ , paralelo a  $r$  que contiene a  $s$ .

Su ecuación, que viene determinada por  $s$  y por  $\vec{v}_r = (-2, 1, 3)$ , es:

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + 3t - 2\lambda \\ y = 1 - 2t + \lambda \\ z = t + 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 3 & -2 \\ y-1 & -2 & 1 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi: -7x - 11y - z + 25 = 0.$$

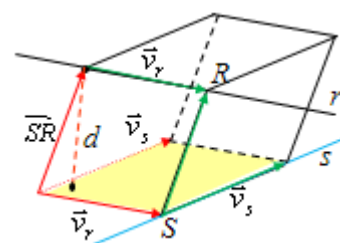
$$2) d(r, s) = d(P, \pi), P(-1, 2, -1) \in r. \text{ Luego, } d(r, s) = \frac{|-7 \cdot (-1) - 11 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) + 25|}{\sqrt{(-7)^2 + (-11)^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{171}}.$$

**Observación:** La distancia entre dos rectas también puede obtenerse a partir del producto mixto. Recuerdese que el volumen de un paralelepípedo, que es igual al área de una de sus bases por la altura correspondiente, se halla también mediante el producto mixto de tres vectores que parten de un vértice y siguen la dirección de sus aristas; por otra parte, el área de una de sus bases se obtiene multiplicando vectorialmente los dos vectores que la determinan.

$$\text{Esto es: } V = \left| [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{SR}] \right| = \left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| \cdot d$$

$$\text{Despejando } d = d(r, s), \text{ se obtiene: } d(r, s) = \frac{\left| [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{SR}] \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|},$$

siendo  $\overrightarrow{SR}$  un vector que va de  $r$  a  $s$ :  $R \in r$  y  $S \in s$ .



### Ejemplo:

Para las rectas del ejemplo anterior:

$$\vec{v}_r = (-2, 1, 3), \vec{v}_s = (3, -2, 1) \text{ y } \overrightarrow{SR} = (-1, 2, -1) - (2, 1, 0) = (-3, 1, -1).$$

$$\text{El producto mixto vale: } \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

$$\text{El producto vectorial, } \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (7, 11, 1) \Rightarrow \left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right| = \sqrt{171}.$$

$$\text{En consecuencia, } d(r, s) = \frac{\left| [\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{SR}] \right|}{\left| \vec{v}_r \times \vec{v}_s \right|} = \frac{|-11|}{\sqrt{171}} = \frac{11}{\sqrt{171}}.$$