Semana 3
Propiedades de los Determinantes. Matriz de Cofactores, Matriz Adjunta. Inversa de una matriz, Método de Adjunta, Gauss Jordan, y Cramer

Henry R Moncada

UNIVERSIDAD NACIONAL TECNOLÓGICA DE LIMA SUR

September 9, 2024

Outline

1. Matriz Inversa
2. Determinante de una Matriz

Propiedades de la Matriz Inversa

Una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ tiene una matriz inversa A^{-1} si y solo si:

- A es invertible (es decir, su determinante es no nulo: $\det(A) \neq 0$).
- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, donde I_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$.
- La matriz inversa es única.

Para encontrar su inversa, usamos la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Para una matrix de 2×2

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \underbrace{\frac{1}{(ad - bc)}}_{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Considera la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

y la matriz adjunta $\operatorname{adj}(A)$ es:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Ejemplo

Considera la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Para encontrar su inversa:

$$\det(B) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$$

$$\text{adj}(B) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

Considera la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Para encontrar su inversa:

$$\det(C) = 5 \cdot 8 - 6 \cdot 7 = -2$$

$$\text{adj}(C) = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3.5 & -2.5 \end{pmatrix}$$

Matriz Adjunta

Consideremos la matriz A definida por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A, denotada por $\operatorname{adj}(A)$, se obtiene a partir de la matriz de cofactores C de A.
Para cada elemento a_{ij} de A, calculamos el cofactor C_{ij}:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

donde M_{ij} es la submatriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de A.

Ejemplo de Cálculo

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la matriz adjunta, primero calculamos los cofactores.

Cofactor C_{11}:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{11}) = (1 \cdot 0) - (4 \cdot 6) = -24$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-24) = -24$$

Cofactor C_{12}:

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{12}) = (0 \cdot 0) - (4 \cdot 5) = -20$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-20) = 20$$

Cofactor C_{13}:

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{13}) = (0 \cdot 6) - (1 \cdot 5) = -5$$

Cofactor C_{21}:

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{21}) = (2 \cdot 0) - (3 \cdot 6) = -18$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-18) = 18$$

Cofactor C_{22}:

$$M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{22}) = (1 \cdot 0) - (3 \cdot 5) = -15$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (-15) = -15$$

Cofactor C_{23}:

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{23}) = (1 \cdot 6) - (2 \cdot 5) = -4$$

Cofactores (continuación)

Cofactor C_{31}:

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{31}) = (2 \cdot 4) - (3 \cdot 1) = 5$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot 5 = 5$$

Cofactor C_{32}:

$$M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{32}) = (1 \cdot 4) - (3 \cdot 0) = 4$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 4 = -4$$

Cofactor C_{33}:

$$M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(M_{33}) = (1 \cdot 1) - (2 \cdot 0) = 1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot 1 = 1$$

La matriz de cofactores C es:

$$C = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta de A es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\operatorname{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante de una Matriz

Vamos a calcular el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de una matriz 3×3, usamos la fórmula:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

donde los a_{ij} son los elementos de la matriz A.

Para la matriz dada, el determinante se calcula de la siguiente manera:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

Ahora calculamos los menores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0) - (4 \cdot 6) = -24$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0) - (4 \cdot 5) = -20$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (0 \cdot 6) - (1 \cdot 5) = -5$$

Sustituyendo en la fórmula del determinante:

$$\det(A) = 1 \cdot (-24) - 2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-5)$$

$$\det(A) = -24 + 40 - 15 = 1$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz A es $\boxed{1}$.

Encontremos la matriz inversa de A, A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Considera la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa A^{-1} se calcula como:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Considera la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa B^{-1} se calcula como:

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 15 & -7 & -5 \\ -12 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -7 & -5 \\ -12 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & -7 & -5 \\ -12 & 4 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Considera la matriz C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa C^{-1} se calcula como:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proceso para Obtener la Adjugada de una Matriz 3x3

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

La adjunta de $\mathbf{A}$, denotada como $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$, es la traspuesta de la matriz de cofactores de $\mathbf{A}$.

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}^T$$

Donde cada C_{ij} es el cofactor de a_{ij}.

Ejemplo de Cálculo de la Adjugada

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Calculamos los cofactores:

$$C_{11} = (4)(6) - (5)(0) = 24, \quad C_{12} = -(0)(6) - (5)(1) = -5, \quad \ldots$$

Luego, la matriz de cofactores es:

$$\begin{bmatrix} 24 & -5 & -4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la adjunta es:

$$\operatorname{adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 24 & 5 & 0 \\ -5 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Regla de Cramer

Cada incógnita de un sistema de ecuaciones lineales puede expresarse como la razón de dos determinantes con denominador D y con numerador obtenido a partir de D, al reemplazar la columna de coeficientes de la incógnita en cuestión por las constantes independientes $b_1, b_2, \cdots, b_n$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ ca_{2,1} & ca_{2,2} & ca_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Regla de Cramer: Introducción

La Regla de Cramer es un método para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Donde A es una matriz cuadrada de coeficientes, $\mathbf{x}$ es el vector incógnita y $\mathbf{b}$ es el vector de términos independientes.

Para una matriz 3×3, la solución es:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i es la matriz obtenida reemplazando la i-ésima columna de A con el vector $\mathbf{b}$.

Ejemplo: Sistema de Ecuaciones

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

El sistema tiene la forma matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Paso 1: Calcular $\det(A)$

El determinante de la matriz A se calcula como:

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 1[(1)(0) - (4)(6)] - 2[(0)(0) - (4)(5)] + 3[(0)(6) - (1)(5)] \\
\det(A) &= 1[0 - 24] - 2[0 - 20] + 3[0 - 5] \\
\det(A) &= -24 + 40 - 15 = 1
\end{aligned}$$

Paso 2: Calcular x_1

Para calcular x_1, reemplazamos la primera columna de A con el vector $\mathbf{b}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El valor de x_1 es:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

Ejemplo: Si $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_1) = 1[(1)(0) - (4)(6)] - 2[(2)(0) - (4)(3)] + 3[(2)(6) - (1)(3)] = -24 + 24 + 27 = 27$$

$$x_1 = \frac{27}{1} = 27$$

Paso 3: Calcular x_2

Para calcular x_2, reemplazamos la segunda columna de A con $\mathbf{b}$:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}$$

El valor de x_2 es:

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

Ejemplo:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_2) = 1[(2)(0) - (4)(3)] - 1[(0)(0) - (4)(5)] + 3[(0)(3) - (2)(5)] = -12 + 20 - 30 = -22$$

$$x_2 = \frac{-22}{1} = -22$$

Paso 4: Calcular x_3

Para calcular x_3, reemplazamos la tercera columna de A con $\mathbf{b}$:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$$

El valor de x_3 es:

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Ejemplo:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A_3) = 1[(1)(3) - (2)(6)] - 2[(0)(3) - (2)(5)] + 1[(0)(6) - (1)(5)] = -9 + 20 - 5 = 6$$

$$x_3 = \frac{6}{1} = 6$$