Semana 1
Matrices Definición, Notacion y Orden
Operaciones con matrices
Tipos de matrices

PhD. Henry R Moncada

UNIVERSIDAD NACIONAL TECNOLÓGICA DE LIMA SUR

September 8, 2024

Outline

Definición de Matriz y Orden

- Una **matriz** es un arreglo bidimensional de números dispuestos en filas y columnas.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Columnas de la matriz A}} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \text{Filas de la matriz A}$$

- Se denota generalmente como $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, donde i indica la fila y j la columna, donde a_{ij} representa el elemento en la fila i y columna j.
- Ejemplo de una matriz :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Notación y Orden

Notación y Orden de una Matriz:

- El **orden de una matriz** se expresa como $m \times n$ donde m es el número de filas y n es el número de columnas.

Notación

Una matriz de m filas y n columnas se denota como una $(m \times n)$ matriz.

- **Notación común:**
  - Matriz fila: $1 \times n$
  - Matriz columna: $m \times 1$
  - Matriz cuadrada: $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \end{bmatrix}_{1\times 6} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \\ b_{52} \\ b_{61} \end{bmatrix}_{6\times 1} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Ejemplos de Matrices

- Matriz 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Matriz 3×1 (una columna):

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- Matriz 1×4 (una fila):

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

- **Orden de una Matriz:** Para determinar el orden de una matriz, contamos el número de filas y el número de columnas. Por ejemplo, si tenemos la matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

  El orden de la matriz D es 2×3 (2 filas y 3 columnas).

¿Qué es la Igualdad de Matrices?

- Dos matrices son iguales si tienen las mismas dimensiones y todos sus elementos correspondientes son iguales.
- Es una propiedad fundamental utilizada en diversas áreas de las matemáticas y la ingeniería.

Problema 1: Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución: Como $A = B$, todos los elementos correspondientes son iguales.

$$\text{Entonces, } A = B.$$

Problema 2: Verificar si dos transformaciones lineales representadas por matrices son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

- Comparar cada elemento de las matrices A y B.
- Si todos los elementos correspondientes son iguales, entonces $A = B$.
- En este caso, todas las entradas de A y B coinciden, por lo tanto, $A = B$.

Problema 3: Sea una matriz de transformación T:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz T es igual a la matriz identidad I.

$$T = I \implies \text{Ambas matrices representan la misma transformación: la identidad.}$$

Problema 4: Considera dos matrices X y Y tales que:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Solución: $X = Y$ si y solo si $a = a, b = b, c = c, d = d$.

$$\text{Por lo tanto, } X = Y.$$

Problema 5: Dados dos grafos dirigidos representados por sus matrices de adyacencia, determinar si los grafos son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

- Comparar las matrices de adyacencia A y B.
- Si todas las entradas correspondientes son iguales, entonces los grafos son iguales.
- En este caso, $A = B$, por lo tanto, los grafos son idénticos.

Adición y Sustracción de Matrices

- **Adición:** La suma de dos matrices A y B de igual dimensión se realiza sumando sus elementos correspondientes.
- **Sustracción:** La resta de dos matrices A y B de igual dimensión se realiza restando sus elementos correspondientes.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Adición y Sustracción de Matrices

- **Adición:** La suma de dos matrices A y B de igual dimensión se realiza sumando sus elementos correspondientes.
- **Sustracción:** La resta de dos matrices A y B de igual dimensión se realiza restando sus elementos correspondientes.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Multiplicación de Matrices

- **La multiplicación de un escalar** k **por una matriz** A consiste en multiplicar cada elemento de A por k.

Ejemplo

Sea $k = 3$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Multiplicación de Matrices

- **La multiplicación de un escalar k por una matriz** A consiste en multiplicar cada elemento de A por k.

Ejemplo

Sea $k = 3$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$kA = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

- **La multiplicación de matrices** A **y** B es posible si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.
- El elemento en la posición (i, j) del producto es la suma del producto de los elementos correspondientes de la fila i de A y la columna j de B.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

Multiplicación de Matrices

- **La multiplicación de un escalar k por una matriz A** consiste en multiplicar cada elemento de A por k.

Ejemplo

Sea $k = 3$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$kA = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

- **La multiplicación de matrices A y B** es posible si el número de columnas de A es igual al número de filas de B.
- El elemento en la posición (i, j) del producto es la suma del producto de los elementos correspondientes de la fila i de A y la columna j de B.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}.$$

Propiedades de las Operaciones con Matrices

- **Propiedad conmutativa de la adición:** La suma de matrices es una operación que combina dos matrices de la misma dimensión.

$$A + B = B + A$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Propiedades de las Operaciones con Matrices

- **Propiedad conmutativa de la adición:** La suma de matrices es una operación que combina dos matrices de la misma dimensión.

$$A + B = B + A$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \quad B + A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- **Propiedad distributiva de la multiplicación escalar:** Multiplicar una matriz por un escalar multiplica cada entrada de la matriz por ese escalar.

$$c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = 3$$

Propiedades de las Operaciones con Matrices

- **Propiedad conmutativa de la adición:** La suma de matrices es una operación que combina dos matrices de la misma dimensión.

$$A + B = B + A$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, \quad B + A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

- **Propiedad distributiva de la multiplicación escalar:** Multiplicar una matriz por un escalar multiplica cada entrada de la matriz por ese escalar.

$$c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = 3$$

$$3 \cdot (A + B) = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}, \quad 3 \cdot A + 3 \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 12 & 12 \end{bmatrix}$$

Propiedades de las Operaciones con Matrices

- **Propiedad asociativa de la multiplicación de matrices:** La multiplicación de matrices combina dos matrices para formar una nueva matriz.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A \cdot (B \cdot C)$$

- **Propiedad de identidad de la multiplicación:** $AI = A$, donde I es la matriz identidad.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (I \cdot A)$$

Tipos de Matrices

- Una **matriz fila** tiene solo una fila.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz columna** tiene solo una columna.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz rectangular** tiene un número diferente de filas y columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz cuadrada** tiene el mismo número de filas y columnas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz nula** tiene todos sus elementos iguales a cero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal y Traza

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Dentro de las matrices cuadradas llamaremos **diagonal principal** a la formada por los elementos

$$Diagonal(D) = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn})$$

siendo la matriz. En la matriz D, su diagonal principal estaría formada por

$$Diagonal(D) = [1, 5, 0]$$

- Se llama **traza de la matriz** a la suma de los elementos de la diagonal. Es decir,

$$Traza(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

y en el caso de D,

$$Traza(D) = 1 + 5 + 0 = 6$$

.

- Si una matriz es a la vez triangular superior e inferior, sólo tiene elementos en la diagonal principal. Una matriz de este tipo se denomina matriz diagonal.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina **matriz unidad ó identidad**. Se suelen representar por I_n.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Triangular

- Una **matriz triangular superior** tiene todos los elementos debajo de la diagonal principal iguales a cero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz triangular inferior** tiene todos los elementos por encima de la diagonal principal iguales a cero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz Diagonal, escalar, identidad

- Una **matriz diagonal** tiene todos los elementos fuera de la diagonal principal iguales a cero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

- Una **matriz escalar** es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son iguales.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- La **matriz identidad** es una matriz diagonal con unos en la diagonal principal.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusión

Matriz: Definición, Notación y Orden

- Las matrices son herramientas poderosas en matemáticas y tienen numerosas aplicaciones prácticas en distintas disciplinas.
- Comprender la notación, el orden y las operaciones básicas con matrices es fundamental para aprovechar su potencial.

¿Qué es la Igualdad de Matrices?

- La igualdad de matrices es una herramienta esencial en matemáticas aplicadas, especialmente en la solución de sistemas de ecuaciones, transformaciones lineales y análisis de grafos.
- A través de estos ejemplos, hemos demostrado cómo aplicar la igualdad de matrices en diferentes contextos prácticos.

Operaciones con Matrices

- Hemos explorado las operaciones fundamentales con matrices y sus propiedades.
- Aplicar estas propiedades es esencial en álgebra lineal y en muchas aplicaciones prácticas.