ÁLGEBRA LINEAL - Examen Parcial 1

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

Nombre: ______________________________________

1. (3 points) **Método de eliminación de Gauss-Jordan :** Utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, la solucion de los sistema dado.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Solución:

El sistema de ecuaciones se puede escribir en forma de matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 4 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right)$$

Aplicamos el método de eliminación de Gauss-Jordan:

Paso 1: Hacemos ceros debajo del pivote en la primera columna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & -7 & -13 & -40 \\ 0 & -5 & -3 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow R_2 - 4R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \end{array}$$

Paso 2: Escogemos el pivote en la segunda columna, segunda fila, y hacemos ceros arriba y debajo de él.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & \frac{40}{7} \\ 0 & -5 & -3 & -12 \end{array}\right) R_2 \leftarrow \frac{R_2}{-7}$$

Ahora hacemos ceros arriba y debajo del pivote.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-5}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & \frac{40}{7} \\ 0 & 0 & \frac{44}{7} & \frac{88}{7} \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2 \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 + 5R_2 \end{array}$$

Paso 3: Normalizamos el pivote en la tercera fila, tercera columna, dividiendo la tercera fila por $\frac{44}{7}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-5}{7} & \frac{-6}{7} \\ 0 & 1 & \frac{13}{7} & \frac{40}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) R_3 \leftarrow \frac{7}{44} R_3$$

Paso 4: Finalmente, hacemos ceros arriba del pivote en la tercera columna.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{29}{11} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + \frac{5}{7}R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - \frac{13}{7}R_3 \end{array}$$

La solución del sistema es:

$$x_1 = \frac{16}{11}, \quad x_2 = \frac{9}{11}, \quad x_3 = \frac{29}{11}$$

2. (3 points) **Método de la adjunta para encontrar A^{-1} :** Utilice el método de la adjunta para encontrar A^{-1}, si existe, encuentre la solucion de sistema dado.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Solución:

Primero, escribimos el sistema en forma matricial:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Paso 1: Calcular el determinante de A

El determinante de A, denotado como $\det(A)$, se calcula expandiendo por la primera fila:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 - 4) - 3 \cdot (-7 - 10) - 3 \cdot (14 + 5)$$

$$\det(A) = -3 + 3 \cdot 17 - 3 \cdot 19 = -3 + 51 - 57 = -9$$

Paso 2: Matriz adjunta de A

Calculamos la matriz de cofactores de A:

$$\text{Cofactores}(A) = \begin{pmatrix} \det \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ -\det \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \\ \det \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\det \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} & \det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 17 & 19 \\ -3 & 14 & -13 \\ 3 & 23 & -22 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Calcular la matriz adjunta

La matriz adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 17 & 14 & 23 \\ 19 & -13 & -22 \end{pmatrix}$$

Paso 4: Calcular la inversa de A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A) = \frac{1}{-9}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 17 & 14 & 23 \\ 19 & -13 & -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{17}{9} & -\frac{14}{9} & -\frac{23}{9} \\ -\frac{19}{9} & \frac{13}{9} & \frac{22}{9} \end{pmatrix}.$$

Paso 5: Solución del sistema

Multiplicamos A^{-1} por $\mathbf{b}$ para encontrar $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{17}{9} & -\frac{14}{9} & -\frac{23}{9} \\ -\frac{19}{9} & \frac{13}{9} & \frac{22}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Realizando las operaciones:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(6) + \frac{1}{3}(7) - \frac{1}{3}(8) \\ -\frac{17}{9}(6) - \frac{14}{9}(7) - \frac{23}{9}(8) \\ -\frac{19}{9}(6) + \frac{13}{9}(7) + \frac{22}{9}(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{9} \\ \frac{16}{9} \\ \frac{29}{9} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$x_1 = \frac{15}{9}, \quad x_2 = \frac{16}{9}, \quad x_3 = \frac{29}{9}$$

3. (3 points) **Metodo de Crame :** Utilice el método de Crame para encontrar, si existen, la solucion de los sistema dado.

$$\begin{aligned} 9x_1 + 7x_2 - 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 2 \\ -6x_1 + 5x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Solución:

El sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 7 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \\ -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos el determinante de la matriz A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 9 & 7 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \\ -6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 9(-24) - 7(26) + (-3)(-14) = -216 - 182 + 42 = -356$$

Dado que $\det(A) \neq 0$, el sistema tiene una única solución. Ahora, utilizamos el método de Cramer.

Calculamos los determinantes de las matrices A_1, A_2 y A_3, que se obtienen reemplazando la primera, segunda y tercera columna de A por el vector $\mathbf{b}$.

Determinante de A_1:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A_1) = \begin{vmatrix} 8 & 7 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_1) = 8(-24) - 7(14) + (-3)(-2) = -192 - 98 + 6 = -284$$

Determinante de A_2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -6 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 8 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \\ -6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_2) = 9(14) - 8(26) + (-3)(0) = 126 - 208 + 0 = -100$$

Determinante de A_3:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 2 & -4 & 2 \\ -6 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 2 & -4 & 2 \\ -6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\det(A_3) = 9(2) - 7(0) + 8(-14) = 18 + 0 - 112 = -136$$

Las soluciones se calculan como:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-284}{-356} = \frac{284}{356} \\ x_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-100}{-356} = \frac{100}{356} \\ x_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-136}{-356} = \frac{136}{356} \end{aligned}$$

4. (3 points) **Matriz inversa A^{-1} :** Determine si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule la inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Para determinar si una matriz es invertible, necesitamos verificar que su determinante sea distinto de cero.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (4 + 8) - 3 \cdot (2 - 8) + 5 \cdot (-2 - 4)$$

$$\det(A) = 1 \cdot 12 - 3 \cdot (-6) + 5 \cdot (-6) = 12 + 18 - 30 = 0$$

Como ($\det(A) = 0$), la matriz es NO invertible.

5. (2 points) **Matriz simétrica :**

   (a) Encuentre la transpuesta de la matriz dada.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$$

   (b) Encuentre los números α y β tales que A es simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) La transpuesta de una matriz A, denotada como A^T, se obtiene intercambiando las filas por las columnas.

$$A^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & j \end{pmatrix}$$

(b) Una matriz A es simétrica si cumple que $A = A^T$, donde A^T es la matriz transpuesta de A.
- Elemento (1, 2) y (2, 1):

$$\alpha = 5 \quad (1)$$

- Elemento (1, 3) y (3, 1):

$$3 = \beta \quad (2)$$

- Elemento (2, 3) y (3, 2):

$$2 = 2 \quad (3) \text{ (Esta ecuación es trivial y siempre es cierta)}$$

Ahora, de las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$\alpha = 5 \quad \text{y} \quad \beta = 3$$

Por lo tanto, los valores de α y β son:

$$\boxed{\alpha = 5} \quad \text{y} \quad \boxed{\beta = 3}$$

6. (3 points) **Determinante :**

(a) Evalúe el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 3 \\ -8 & 6 & -10 \end{vmatrix}$$

(b) Para que valores de α la matriz es no invertible?

$$\begin{pmatrix} \alpha+1 & -3 \\ 5 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Solución:

(a) La regla de Sarrus dice que el determinante se puede calcular como:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Identificando los elementos de la matriz:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= -2, & a_{13} &= 10 \\ a_{21} &= 6, & a_{22} &= 9, & a_{23} &= 3 \\ a_{31} &= -8, & a_{32} &= 6, & a_{33} &= -10 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores en la fórmula:

$$\begin{aligned} D &= 0 \cdot 9 \cdot (-10) + (-2) \cdot 3 \cdot (-8) + 10 \cdot 6 \cdot 6 \\ &\quad - (10 \cdot 9 \cdot (-8) + (-2) \cdot 6 \cdot (-10) + 0 \cdot 3 \cdot 6) \\ &= 0 + 48 + 360 - (-720 + 120 + 0) \\ &= 0 + 48 + 360 + 720 - 120 \\ &= 0 + 48 + 360 + 600 \\ &= 1008 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el determinante es:

$$D = 1008$$

(b) Para que la matriz A sea no invertible, su determinante debe ser igual a cero.

$$\det(A) = (\alpha+1)(1-\alpha) - (-3)(5) = (\alpha+1)(1-\alpha) + 15 = \alpha - \alpha^2 + 1 - \alpha + 15 = -\alpha^2 + 16$$

Igualando a cero:

$$-\alpha^2 + 16 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 16 \Rightarrow \alpha = 4 \quad \text{o} \quad \alpha = -4$$

Por lo tanto, la matriz es no invertible para $\alpha = 4$ y $\alpha = -4$.

7. (3 points) **Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$:** Sea

(a) Calcule $proy_{\vec{u}}\,\vec{v}$

$$\vec{u} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}$$

$$\vec{v} = -4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 4\hat{k}$$

(b) Calcule $proy_{\vec{t}}\,\vec{w}$

$$\vec{w} = \hat{\imath} + 7\hat{\jmath} + 6\hat{k}$$

$$\vec{t} = -4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$$

Solución:

(a) La proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ se calcula usando la fórmula:

$$proy_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$$

Primero, calculamos el producto punto $\vec{u}\cdot\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (3)(-4) + (-4)(2) + (-1)(4) = -12 - 8 - 4 = -24$$

Luego, calculamos $\vec{u}\cdot\vec{u}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = (3)(3) + (-4)(-4) + (-1)(-1) = 9 + 16 + 1 = 26$$

Sustituyendo en la fórmula de proyección:

$$proy_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{-24}{26}\vec{u} = -\frac{12}{13}\vec{u}$$

Ahora sustituimos $\vec{u}$:

$$proy_{\vec{u}}\,\vec{v} = -\frac{12}{13}(3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}) = -\frac{36}{13}\hat{\imath} + \frac{48}{13}\hat{\jmath} + \frac{12}{13}\hat{k}$$

Respuesta Final:

$$proy_{\vec{u}}\,\vec{v} = -\frac{36}{13}\hat{\imath} + \frac{48}{13}\hat{\jmath} + \frac{12}{13}\hat{k}$$

(b) La proyección de un vector $\vec{w}$ sobre otro vector $\vec{t}$ se calcula usando la fórmula:

$$\text{proy}_{\vec{t}}\,\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{t}}{\vec{t}\cdot\vec{t}}\vec{t}$$

Primero, calculamos el producto punto $\vec{w}\cdot\vec{t}$:

$$\begin{aligned}\vec{w}\cdot\vec{t} &= (1)(-4) + (7)(3) + (6)(-5)\\ &= -4 + 21 - 30 = -13\end{aligned}$$

Ahora, calculamos $\vec{t}\cdot\vec{t}$:

$$\vec{t}\cdot\vec{t} = (-4)^2 + (3)^2 + (-5)^2$$

$$= 16 + 9 + 25 = 50$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la proyección:

$$\operatorname{proy}_{\vec{t}} \vec{w} = \frac{-13}{50}\vec{t}$$

$$= \frac{-13}{50}(-4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k})$$

Calculamos la proyección:

$$= \left(\frac{52}{50}\hat{i} - \frac{39}{50}\hat{j} + \frac{65}{50}\hat{k}\right)$$

Resultado:

$$\operatorname{proy}_{\vec{t}} \vec{w} = \frac{26}{25}\hat{i} - \frac{39}{50}\hat{j} + \frac{13}{10}\hat{k}$$