VECTORES EN EL ESPACIO 2º Bachillerato

VECTORES FIJOS EN EL ESPACIO.

Un **vector fijo** $\overrightarrow{AB}$ es un segmento orientado con origen en el punto A y extremo en el punto B. Dicho vector queda determinado por:

- **Módulo** de $\overrightarrow{AB}$, es la longitud del segmento AB y se designa por $|\overrightarrow{AB}|$.
- **Dirección** de $\overrightarrow{AB}$, es la de la recta que pasa por A y B.
- **Sentido** de $\overrightarrow{AB}$, es el dado por el recorrido de A hacia B.

Un **vector nulo** es aquel en el que coinciden su origen y su extremo.
Todos los vectores nulos tienen el módulo igual a cero y se admite que tienen la misma dirección y sentido.

Un vector se llama **unitario** si tiene por módulo la unidad.
Al conjunto de los vectores fijos del espacio se le designa por F^3.

VECTORES FIJOS EN EL ESPACIO.

Equipolencia de vectores fijos

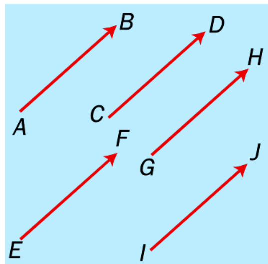
Dos vectores fijos no nulos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **equipolentes** si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Se dice, entonces, que $\overrightarrow{AB}$ es equipolente a $\overrightarrow{CD}$, y se expresa por $(\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{CD})$.

Esta relación es de equivalencia porque cumple las propiedades siguientes:

1. **Reflexiva**. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$. Un vector fijo es equipolente a sí mismo.
2. **Simétrica**. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$.
3. **Transitiva**. $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$

VECTORES FIJOS EN EL ESPACIO.

La relación de equipolencia divide el conjunto F^3 en subconjuntos llamados **clases de equivalencia**. Cada una de estas clases está formada por todos los vectores equipolentes entre sí y queda determinada por uno cualquiera de ellos, llamado **representante**. En la figura, los cinco vectores pertenecen a la misma clase que, por ejemplo, se expresa por $[\overrightarrow{AB}]$.



VECTORES LIBRES EN EL ESPACIO.

Vector libre es cada una de las clases en que queda clasificado el conjunto F^3 mediante la relación de equipolencia.

Un vector libre se designa por $[\overrightarrow{AB}]$ o por $\overrightarrow{AB}$, siendo $\overrightarrow{AB}$ cualquiera de sus representantes. También se suele designar con una letra minúscula, por ejemplo, $\vec{u}$.

Se llama **módulo**, **dirección** y **sentido** de un vector libre no nulo al módulo, dirección y sentido de uno cualquiera de sus representantes.

El vector libre nulo, $\vec{0}$, tiene módulo 0 y carece de dirección y sentido.
El conjunto de todos los vectores libres del espacio se designa por V^3.

Propiedad fundamental de los vectores libres

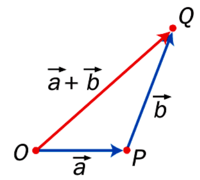
Los vectores libres se pueden aplicar "libremente" en cualquier punto del espacio, con la única condición de no alterar su módulo, dirección y sentido.

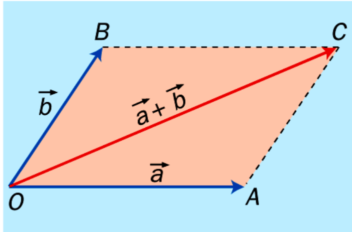
Si $[\overrightarrow{AB}]$ es un vector libre del espacio y O un punto cualquiera del espacio, existe un único representante de este vector que tiene su origen en el punto O.

OPERACIONES CON VECTORES LIBRES.

Suma de vectores libres

Dados dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del espacio, se llama **suma** de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y se designa por $\vec{a} + \vec{b}$ al vector libre que se obtiene del siguiente modo:
Se toma un punto arbitrario O del plano, se traza $\overrightarrow{OP}$ como representante de $\vec{a}$ y, a continuación, $\overrightarrow{PQ}$ como representante de $\vec{b}$; el vector suma es el que tiene por representante el vector $\overrightarrow{OQ}$.





OPERACIONES CON VECTORES LIBRES.

La suma de vectores es una operación interna que satisface las siguientes propiedades:

1. **Asociativa**: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

2. **Conmutativa**: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

3. **Existencia de un vector nulo**: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

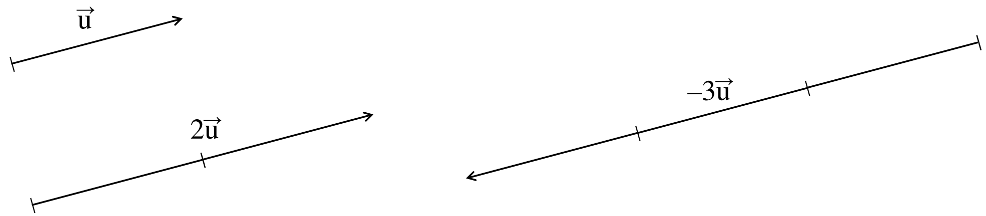
4. **Existencia de un vector opuesto**: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

OPERACIONES CON VECTORES LIBRES.

Producto de un número real por un vector

Dados un vector libre $\vec{a}$ de V^3 y un número real k, se llama **producto del número real k por el vector $\vec{a}$** al vector libre designado por $k\vec{a}$ o $k \cdot \vec{a}$ que tiene:

- **Módulo**: $|k|\,|\vec{a}|$
- **Dirección**: la dirección del vector $\vec{a}$.
- **Sentido**: el mismo que $\vec{a}$, si k es positivo, y el opuesto que $\vec{a}$, si k es negativo.



OPERACIONES CON VECTORES LIBRES.

El producto de un número real por un vector libre es una operación externa que cumple las siguientes propiedades:

1.º $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (distributiva respecto de la suma en V^3)

2.º $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ (distributiva respecto de la suma en **R**)

3.º $\beta(\alpha\vec{u}) = (\beta\alpha)\vec{u}$

4.º $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

El espacio vectorial V^3

El conjunto de los vectores libres del espacio V^3 con las operaciones de suma de vectores y producto de un número real por un vector, por cumplir las propiedades enunciadas respecto de estas operaciones tiene estructura de **espacio vectorial**.

DEPENDENCIA LINEAL, BASES, COORDENADAS.

Combinación lineal de vectores

Un vector $\vec{v}$ de V^3, es **combinación lineal** de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ de V^3, si existen números reales a_1, a_2, a_3 tales que: $\vec{v} = a_1 \cdot \vec{u}_1 + a_2 \cdot \vec{u}_2 + a_3 \cdot \vec{u}_3$

- Todo vector es combinación lineal de sí mismo: $\vec{v} = 1 \cdot \vec{v}$
- El vector $\vec{0}$ es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores:

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + 0 \cdot \vec{u}_3$$

DEPENDENCIA LINEAL, BASES, COORDENADAS.

Dependencia e independencia lineal de vectores

Un conjunto de vectores libres de V^3, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$, es **linealmente dependiente** si al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los restantes.

Esta definición equivale a que existan coeficientes reales a_1, a_2, …, a_n, **no todos nulos**, de forma que

$$a_1 \cdot \vec{u}_1 + a_2 \cdot \vec{u}_2 + \ldots + a_n \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$$

Si un grupo de vectores no es linealmente dependiente se dice que es **independiente**.

- Dos vectores no nulos son linealmente independientes si no son proporcionales.
- Tres vectores no nulos son linealmente independientes si no se encuentran en el mismo plano, esto es, si no son **coplanarios**.

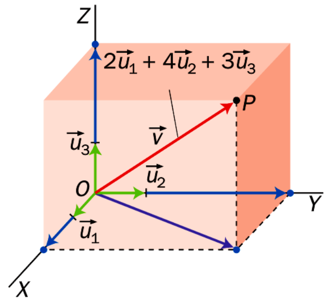
DEPENDENCIA LINEAL, BASES, COORDENADAS.

Cualquier conjunto de tres vectores libres, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$, linealmente independientes forman una **base** del espacio vectorial V^3.

Todo vector $\vec{v}$ de V^3 se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B.

$$\vec{v} = a_1 \cdot \vec{u}_1 + a_2 \cdot \vec{u}_2 + a_3 \cdot \vec{u}_3$$

A los coeficientes de esta combinación lineal se les llama **coordenadas del vector $\vec{v}$ en la base B**.



DEPENDENCIA LINEAL, BASES, COORDENADAS.

- El número de vectores de una base da la **dimensión** del espacio vectorial asociado. Por tanto, la dimensión del espacio V^3 es 3.
- En V^3 tres vectores no nulos y no coplanarios forman siempre una **base**. Como consecuencia se tiene que un conjunto de más de tres vectores en V^3 son siempre linealmente dependientes.
- Se demuestra que las coordenadas de un vector respecto de una base **son únicas**.

  Entonces a cada vector libre del espacio $\vec{v}$ se le hace corresponder de **modo único** la terna de números reales (x, y, z), y recíprocamente. Gracias a esta correspondencia es posible traducir toda relación geométrica en V^3 en una relación algebraica en $\mathbf{R}^3$. Esta "traducción" es la base de la geometría analítica clásica iniciada por René Descartes (1596-1650).
- Una forma práctica de determinar la dependencia lineal de un grupo de vectores dado por sus coordenadas respecto de una base de V^3, es formar con ellos una matriz en la que cada vector corresponde a una de sus filas. El rango de esta matriz da el número de vectores linealmente independientes que hay en el grupo considerado. En el caso de tres vectores, estos serán independientes si el determinante formado por sus coordenadas es distinto de cero.

DEPENDENCIA LINEAL, BASES, COORDENADAS.

Estudia si el vector $\vec{v} = (-12, -1, -5)$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}_1 = (1, -1, 0)$ $\vec{u}_2 = (5, 0, 1)$ y $\vec{u}_3 = (1, 1, -2)$.

El vector $\vec{v}$ será combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ si existen tres números reales a_1, a_2 y a_3 tales que $\vec{v} = a_1\,\vec{u}_1 + a_2\,\vec{u}_2 + a_3\,\vec{u}_3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-12, -1, -5) = a_1(1, -1, 0) + a_2(5, 0, 1) + a_3(1, 1, -2)$$

Operando e igualando las ternas de los dos miembros se obtiene:

$$\begin{cases} a_1 + 5a_2 + a_3 = -12 \\ -a_1 + a_3 = -1 \\ a_2 - 2a_3 = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -3 \\ a_3 = 1 \end{cases}$$

Así, $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ ya que $\vec{v} = 2\,\vec{u}_1 - 3\,\vec{u}_2 + \vec{u}_3$

DEPENDENCIA LINEAL, BASES, COORDENADAS.

Se consideran los siguientes vectores: $\vec{u} = (1,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,1)$ y $\vec{w} = (0,1,1)$

a) Probar que forman una base B' de V^3.

b) Calcular las coordenadas del vector $\vec{p} = (2,3,1)$ respecto de B'

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Son linealmente independientes y forman una base.}$$

b)

$$(2,3,1) = a(1,1,0) + b(1,0,1) + c(0,1,1) = (a+b, a+c, b+c) \rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a+c=3 \\ b+c=1 \end{cases}$$

$$a = 2, b = 0 \text{ y } c = 1 \rightarrow \vec{p} = (2,0,1)_{B'}$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

El **producto escalar** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se designa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y es igual a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{si } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ son no nulos.} \\ 0 & \text{si } \vec{u} \text{ o } \vec{v} \text{ es el vector nulo.} \end{cases}$$

- Como $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ son números reales, el producto escalar de dos vectores es un número real, que puede ser positivo, negativo o nulo.
- Se llama **espacio vectorial euclídeo** al par $(\mathbf{V^3}, \cdot)$, donde V^3 es el espacio vectorial de los vectores libres y $(\cdot)$ es la operación producto escalar.
- En el espacio vectorial euclídeo tiene sentido hablar de distancias, ángulos, perpendicularidad, áreas, volúmenes, etc.
- El **producto escalar** es **nulo** en el caso de que los vectores sean **perpendiculares** u **ortogonales** ya que entonces $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos 90° = 0$.

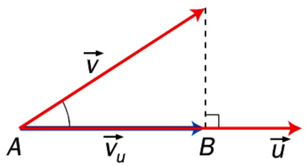
PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

El valor absoluto del producto escalar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de V^3 es igual al módulo de uno cualquiera de ellos por la proyección del otro sobre el primero.

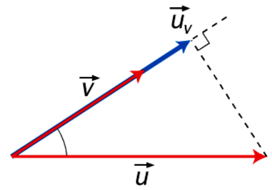
$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| = |\vec{u}|\,|(\text{proyección de } \vec{v} \text{ sobre } \vec{u})| = |\vec{u}|\,|\vec{v}_{\vec{u}}|$

$|\vec{v} \cdot \vec{u}| = |\vec{v}|\,|\vec{u}|\,|\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})| = |\vec{v}|\,|(\text{proyección de } \vec{u} \text{ sobre } \vec{v})| = |\vec{v}|\,|\vec{u}_{\vec{v}}|$

Si uno de los vectores $\vec{u}$ o $\vec{v}$ tiene módulo unidad, el producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ es igual a la proyección del uno sobre el otro.



$\vec{v}_u$ = proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$



$\vec{u}_v$ = proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Propiedades:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$

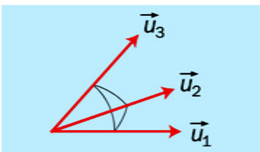
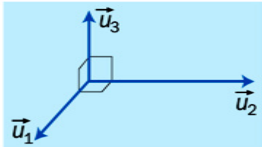
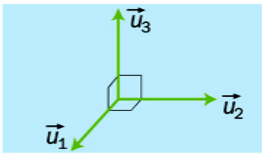
2) $\begin{cases} (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \text{ agudo} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \text{ obstuso} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \end{cases}$

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

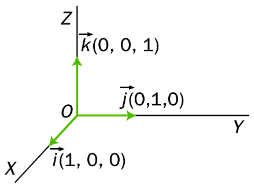
4) $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v})$

5) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Base normada	Base ortogonal	Base ortonormal
		
Vectores unitarios $\lvert\vec{u}_1\rvert = \lvert\vec{u}_2\rvert = \lvert\vec{u}_3\rvert = 1$	Vectores ortogonales $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0$	Vectores unitarios y ortogonales

La base canónica de V^3 es la base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Expresión analítica en una base ortonormal:

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\begin{cases} \vec{u}(x_1, y_1, z_1)_B \\ \vec{v}(x_2, y_2, z_2)_B \end{cases}$ $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{i}}) = 1$ $\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \cdot \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = (x_1x_2)(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (x_1y_2)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + (x_1z_2)(\vec{i} \cdot \vec{k}) +$$

$$+(y_1x_2)(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (y_1y_2)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + (y_1z_2)(\vec{i} \cdot \vec{k}) + (z_1x_2)(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (z_1y_2)(\vec{i} \cdot \vec{j}) + (z_1z_2)(\vec{i} \cdot \vec{k}) =$$

$$= (x_1x_2) \cdot 1 + (x_1y_2) \cdot 0 + (x_1z_2) \cdot 0 + (y_1x_2) \cdot 0 + (y_1y_2) \cdot 1 + (y_1z_2) \cdot 0 + (z_1x_2) \cdot 0 + (z_1y_2) \cdot 0 +$$

$$+(z_1z_2) \cdot 1 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Respecto a una base ortonormal las coordenadas de tres vectores son:

$$\vec{u} = (2,-3,1) \qquad \vec{v} = (5,4,-1) \qquad \vec{w} = (k,7,1)$$

a) Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b) Averiguar el valor de k para que $\vec{u} \perp \vec{w}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-3,1)\cdot(5,4,-1) = 2\cdot 5 - 3\cdot 4 - 1\cdot 1 = -3$

b) $\vec{u}\cdot\vec{w} = (2,-3,1)\cdot(k,7,1) = 2\cdot k - 3\cdot 7 + 1\cdot 1 = 2k - 20$

$$\vec{u} \perp \vec{w} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \rightarrow 2k - 20 = 0 \rightarrow k = 10$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Módulo de un vector (en una base ortonormal):

$$\vec{u} = (x,y,z)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}}) = |\vec{u}|^2\cdot\cos 0 = |\vec{u}|^2$$

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Módulo de un vector (en una base ortonormal):

$$\boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ejemplo: Respecto a una base ortonormal las coordenadas de dos vectores son:

$$\vec{u} = (2,-1,5) \qquad \vec{v} = (1,3,2)$$

a) Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b) El módulo de cada vector.
c) Un vector unitario en la dirección de $\vec{u}$

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-1,5)\cdot(1,3,2) = 2\cdot 1 - 1\cdot 3 + 5\cdot 2 = 9$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1^2) + 5^2} = \sqrt{30} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

c) $\vec{w} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{30}}, -\dfrac{1}{\sqrt{30}}, \dfrac{5}{\sqrt{30}}\right)$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Ángulo de dos vectores (en una base ortonormal):

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$$

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES.

Ejemplo: Respecto a una base ortonormal las coordenadas de dos vectores son:

$$\vec{u} = (2,-3,0) \qquad \vec{v} = (-1,0,0)$$

a) Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}$
b) El módulo de cada vector.
c) El ángulo que forman los dos vectores.

a) $\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,-3,0)\cdot(-1,0,0) = 2\cdot(-1)-3\cdot 0+0\cdot 0 = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{2^2+(-3^2)+0^2} = \sqrt{13} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2+0^2+0^2} = 1$

c) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{13}\cdot 1} = \dfrac{-2}{\sqrt{13}} \rightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \arccos\left(\dfrac{-2}{\sqrt{13}}\right) = 123^\circ\ \ 41'\ \ 24,2''$

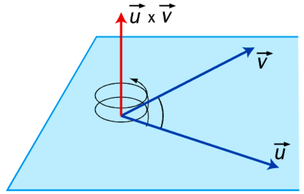
PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

El **producto vectorial** de dos vectores libres de V^3, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector que se designa por $\vec{u} \times \vec{v}$ o $\vec{u} \wedge \vec{v}$, y que se obtiene del siguiente modo:

1.º Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores no nulos, y no proporcionales $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector de:

- **Módulo**: $|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\text{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
- **Dirección**: perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
- **Sentido**: el de avance de un sacacorchos que gira en sentido positivo de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

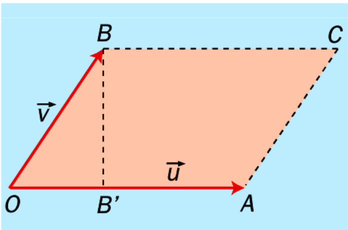
2.º Si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$ ó $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales se tiene que $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$.



PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

Interpretación geométrica del producto vectorial.

El módulo del vector producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual al **área del paralelogramo** que tiene a estos vectores por lados.



$$\text{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{|\overline{BB'}|}{|\vec{v}|} \Rightarrow |\overline{BB'}| = |\vec{v}|\cdot\text{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\text{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = |\vec{u}|\cdot|\overline{BB'}| = \text{base}\times\text{altura}$$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

Propiedades del producto vectorial.

1. Anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

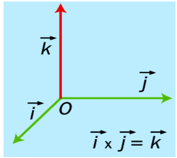
2. Homogénea: $(k\,\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (k\,\vec{v})$

3. Distributiva del producto vectorial respecto de la suma de vectores:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

Expresión analítica del producto vectorial en una base ortonormal.



$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

$\vec{u} = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k})$ $\qquad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{v} = (x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k})$ $\qquad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = xx'(\vec{i} \times \vec{i}) + xy'(\vec{i} \times \vec{j}) + xz'(\vec{i} \times \vec{k}) +$$
$$+ yx'(\vec{j} \times \vec{i}) + yy'(\vec{j} \times \vec{j}) + yz'(\vec{j} \times \vec{k}) + zx'(\vec{k} \times \vec{i}) + zy'(\vec{k} \times \vec{j}) + zz'(\vec{k} \times \vec{k})$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (yz' - zy')\,\vec{i} + (zx' - xz')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES.

Ejemplo:

Dados los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ cuyas coordenadas respecto de una base ortonormal son

$\vec{u} = (1, 3, 0)$ y $\vec{v} = (4, -1, 3)$.

Calcula:

a) El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$

d) El área del triángulo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 3, 0)\,(4, -1, 3) = 4 - 3 = 1$

b) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + 3^2}\,\sqrt{4^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{260}} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \text{arccos}\,\dfrac{1}{\sqrt{260}} = 86°\ 26'\ 39{,}79''$

c) $\vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \right) = (9, -3, -13)$

d) La superficie de un triángulo es la mitad de la de un paralelogramo construido sobre dos de sus lados. Por tanto:

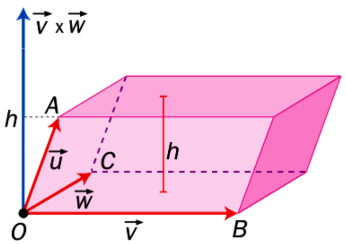
$S_{\text{triángulo}} = \dfrac{1}{2}\,|\vec{u} \times \vec{v}| = \left| \dfrac{1}{2}\,(9, -3, -13) \right| = \dfrac{1}{2}\sqrt{9^2 + (-3)^2 + (-13)^2} = \dfrac{\sqrt{269}}{2}\ \text{u}^2$

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES.

El **producto mixto** de tres vectores libres del espacio V^3, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es un número real que se designa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ y que se obtiene del siguiente modo:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Interpretación geométrica del producto mixto.



$$\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \left|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})\right| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot \left|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}})\right|$$

$$\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \left(|\vec{v} \times \vec{w}|\right) \cdot \left(|\vec{u}| \cdot \left|\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v} \times \vec{w}})\right|\right) =$$

$$= \text{Área de la base} \times \text{altura} = \text{Volumen}$$

El **valor absoluto del producto mixto** de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al **volumen del paralelepípedo** que tiene por aristas los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES.

Expresión analítica del producto mixto.

Sea $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ una base ortonormal de V^3, $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ y $\vec{w} = (x'', y'', z'')$ tres vectores libres del espacio: aplicando las expresiones analíticas del producto vectorial y del producto escalar, se obtienen las del producto mixto:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \vec{k} \right) =$$

$$= x \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Así pues,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES.

Propiedades del producto mixto.

1. $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ si, y solo si, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linelamente dependientes.

3. $[a\,\vec{u}, b\,\vec{v}, c\,\vec{w}] = abc[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

4. $[\vec{u} + \vec{u}', \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}', \vec{v}, \vec{w}]$

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES.

Ejemplo:
Respecto de una base ortonormal, tres vectores se expresan como:

$$\vec{u} = (2,3,4),\ \vec{v} = (0,2,1) \text{ y } \vec{w} = (3,2,1)$$

a) Halla $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
b) Halla el volumen del tetraedro formado por los tres vectores.

$$\text{a) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 9 - 24 - 4 = -15$$

$$\text{b) } V_{\text{tetraedro}} = \frac{1}{6}\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = \frac{1}{6}|-15| = \frac{15}{6} = 2'5 \text{ u}^3$$