4.5 Rectas y planos en el espacio

En el plano $\mathbb{R}^2$ se puede encontrar la ecuación de una recta si se conocen dos puntos sobre la recta, o bien un punto y la pendiente de la misma. En $\mathbb{R}^3$ la intuición dice que las ideas básicas son las mismas. Como dos puntos determinan una recta, debe poderse calcular la ecuación de una recta en el espacio si se conocen dos puntos sobre ella. De manera alternativa, si se conoce un punto y la dirección de una recta, también debe ser posible encontrar su ecuación.

Comenzamos con dos puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ sobre una recta L. Un vector paralelo a L es aquel con representación $\overrightarrow{PQ}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} \tag{4.5.1}$$

es un vector paralelo a L. Ahora sea $R = (x, y, z)$ otro punto sobre la recta. Entonces $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\overrightarrow{PQ}$, que a su vez es paralelo a $\mathbf{v}$, de manera que por el teorema 4.3.3 en la página 263,

$$\overrightarrow{PR} = t\mathbf{v} \tag{4.5.2}$$

para algún número real t. Ahora vea la figura 4.35. Se tiene (en cada uno de los tres casos posibles)

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR} \tag{4.5.3}$$

y al combinar (4.5.2) y (4.5.3) se obtiene

$$\boxed{\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}} \tag{4.5.4}$$

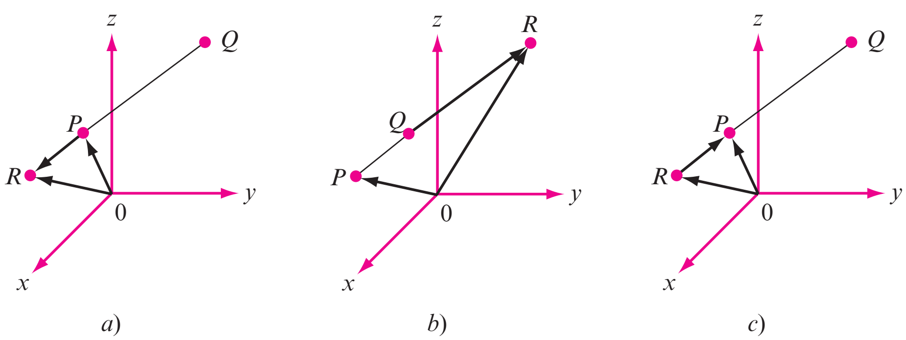

Figura 4.35

En los tres casos $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + \overrightarrow{PR}$.

Ecuación vectorial de la recta

La ecuación (4.5.4) se denomina **ecuación vectorial de la recta** L. Si R está sobre L, entonces (4.5.4) se satisface para algún número real t. Inversamente, si (4.5.4) se cumple, entonces invirtiendo los pasos, se ve que $\overrightarrow{PR}$ es paralelo a $\mathbf{v}$, lo que significa que R está sobre L.

Si se extienden las componentes de la ecuación (4.5.4) se obtiene

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} + t(x_2 - x_1)\mathbf{i} + t(y_2 - y_1)\mathbf{j} + t(z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

o sea

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}} \tag{4.5.5}$$

Ecuaciones paramétricas de una recta

Las ecuaciones (4.5.5) se denominan **ecuaciones paramétricas de una recta**.

Por último, al despejar t en (4.5.5) y definir $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ y $z_2 - z_1 = c$, se encuentra que si $a, b, c \neq 0$,

$$\boxed{\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}} \qquad (4.5.6)$$

Ecuaciones simétricas de una recta

Las ecuaciones (4.5.6) se llaman **ecuaciones simétricas de una recta**. Aquí a, b y c son números directores del vector **v**. Por supuesto, las ecuaciones (4.5.6) son válidas sólo si a, b y c son diferentes de cero.

EJEMPLO 4.5.1 Determinación de las ecuaciones de una recta

Encuentre las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por los puntos $P = (2, -1, 6)$ y $Q = (3, 1, -2)$.

Solución Primero se calcula $\mathbf{v} = (3 - 2)\mathbf{i} + [1 - (-1)]\mathbf{j} + (-2 - 6)\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$. Después, de (4.5.4), si $R = (x, y, z)$ está sobre la recta, se obtiene $\overrightarrow{0R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k} + t(\boldsymbol{i} + 2\mathbf{j} - 8\mathbf{k})$, o sea,

$$x = 2 + t \qquad y = -1 + 2t \qquad z = 6 - 8t \qquad \text{ecuaciones paramétricas}$$

Por último, como $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$, las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-8} \qquad \text{ecuaciones simétricas} \qquad (4.5.7)$$

Para verificar estas ecuaciones, se comprueba que $(2, -1, 6)$ y $(3, 1, -2)$ estén en realidad en la recta. Se tiene [después de insertar estos puntos en (4.5.7)]

$$\frac{2-2}{1} = \frac{-1+1}{2} = \frac{6-6}{-8} = 0$$
$$\frac{3-2}{1} = \frac{1+1}{2} = \frac{-2-6}{-8} = 1$$

Se pueden encontrar otros puntos en la recta. Por ejemplo, si $t = 3$, se obtiene

$$3 = \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-8}$$

lo que lleva al punto $(5, 5, -18)$.

EJEMPLO 4.5.2 Obtención de las ecuaciones simétricas de una recta

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $(1, -2, 4)$ y es paralela al vector $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución Se usa la fórmula (4.5.6) con $P = (x_1, y_1, z_1) = (1, -2, 4)$ y **v** como se dio, de manera que $a = 1$, $b = 1$ y $c = -1$. Esto lleva a

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

¿Qué pasa si uno de los números directores a, b y c es cero?

EJEMPLO 4.5.3 Determinación de las ecuaciones simétricas de una recta cuando un número director es cero

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que contiene los puntos $P = (3, 4, -1)$ y $Q = (-2, 4, 6)$.

Solución Aquí $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$ y $a = -5$, $b = 0$, $c = 7$. Entonces una representación paramétrica de la recta es $x = 3 - 5t$, $y = 4$ y $z = -1 + 7t$. Despejando t se encuentra que

$$\frac{x-3}{-5} = \frac{z+1}{7} \quad \text{y} \quad y = 4$$

La ecuación $y = 4$ es la ecuación de un plano paralelo al plano xz, así que se obtuvo una ecuación de una recta en ese plano.

EJEMPLO 4.5.4 Determinación de las ecuaciones simétricas de una recta cuando dos números directores son cero

Encuentre las ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los puntos $P = (2, 3, -2)$ y $Q = (2, -1, -2)$.

Solución Aquí $\mathbf{v} = -4\mathbf{j}$ de manera que $a = 0$, $b = -4$ y $c = 0$. Una representación paramétrica de la recta es, por la ecuación (4.5.5), dada por $x = 2$, $y = 3 - 4t$, $z = -2$. Ahora $x = 2$ es la ecuación de un plano paralelo al plano yz, mientras que $z = -2$ es la ecuación de un plano paralelo al plano xy. Su intersección es la recta $x = 2$, $z = -2$, que es paralela al eje y y pasa por los puntos $(2, 0, -2)$. De hecho, la ecuación $y = 3 - 4t$ dice, en esencia, que y puede tomar cualquier valor (mientras que x y z permanecen fijos).

Advertencia

Las ecuaciones paramétricas o simétricas de una recta no son únicas. Para ver esto, simplemente comience con otros dos puntos arbitrarios sobre la recta.

EJEMPLO 4.5.5 Ilustración de la falta de unicidad en las ecuaciones simétricas de una recta

En el ejemplo 4.5.1 la recta cuyas ecuaciones se encontraron contiene al punto $(5, 5, -18)$. Al elegir $P = (5, 5, -18)$ y $Q = (3, 1, -2)$, se encuentra que $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$, de manera que $x = 5 - 2t$, $y = 5 - 4t$ y $z = -18 + 16t$. (Observe que si $t = \frac{3}{2}$ se obtiene $(x, y, z) = (2, -1, 6)$.) Las ecuaciones simétricas son ahora

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+18}{16}$$

Note que $(-2, -4, 16) = -2(1, 2, -8)$.

Así como la ecuación de una recta en el espacio se obtiene especificando un punto sobre la recta y un vector *paralelo* a esta recta, pueden derivarse ecuaciones de un plano en el espacio especificando un punto en el plano y un vector ortogonal a todos los vectores en el plano. Este vector ortogonal se llama **vector normal** al plano y se denota por $\mathbf{n}$ (vea la figura 4.36).

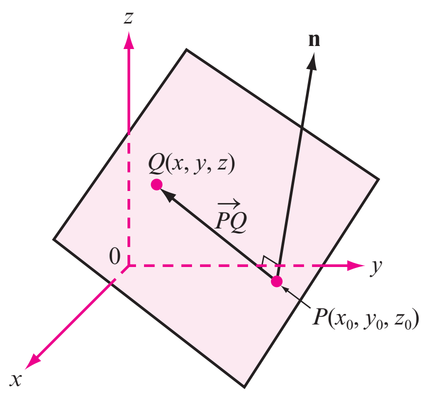

Figura 4.36
El vector **n** es ortogonal a todos los vectores en el plano.

Vector normal

Definición 4.5.1

Plano

Sea P un punto en el espacio y sea $\mathbf{n}$ un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un **plano** en $\mathbb{R}^3$.

Notación. Por lo general, un plano se denota por el símbolo π.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$.

Como $\overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{n}$, tenemos que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pero esto implica que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{4.5.8}$$

Una manera más común de escribir la ecuación de un plano se deriva de (4.5.8):

Ecuación cartesiana de un plano

$$ax + by + cz = d \tag{4.5.9}$$

donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$

EJEMPLO 4.5.6 Determinación de la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y tiene un vector normal dado

Encuentre un plano π que pasa por el punto (2, 5, 1) y que tiene un vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución De (4.5.8) se obtiene directamente $(x - 2) - 2(y - 5) + 3(z - 1) = 0$, es decir,

$$x - 2y + 3z = -5 \tag{4.5.10}$$

Los tres planos coordenados se representan de la siguiente manera:

i) El *plano xy* pasa por el origen (0, 0, 0) y cualquier vector a lo largo del eje z es normal a él. El vector más simple es $\mathbf{k}$. Así, de (4.5.8) se obtiene $0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0$, lo que lleva a

$$z = 0 \tag{4.5.11}$$

como la ecuación del plano xy. (Este resultado no debe sorprender.)

ii) El *plano xz* tiene la ecuación

$$y = 0 \tag{4.5.12}$$

iii) El *plano yz* tiene la ecuación

$$x = 0 \tag{4.5.13}$$

El dibujo de un plano

No es difícil dibujar un plano.

Caso 1. *El plano es paralelo a un plano coordenado*. Si el plano es paralelo a uno de los planos coordenados, entonces la ecuación del plano es una de las siguientes:

$$x = a \quad \text{(paralelo al plano } yz)$$
$$y = b \quad \text{(paralelo al plano } xz)$$
$$z = c \quad \text{(paralelo al plano } xy)$$

Cada plano se dibuja como un rectángulo con lados paralelos a los otros dos ejes coordenados. La figura 4.37 presenta un bosquejo de estos tres planos.

Caso 2. *El plano interseca a cada eje coordenado*. Suponga que una ecuación del plano es

$$ax + by + cz = d \qquad \text{con } abc \neq 0.$$

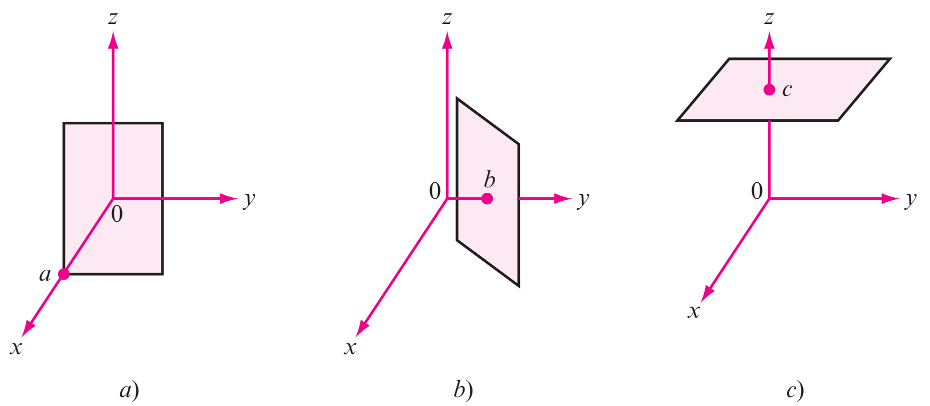

Figura 4.37
Tres planos paralelos a algún plano coordenado.

El cruce con el eje x es el punto $\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)$, el cruce con el eje y es el punto $\left(0, \frac{d}{b}, 0\right)$ y el cruce con el eje z es el punto $\left(0, 0, \frac{d}{c}\right)$.

Paso 1. Grafique los tres puntos de cruce.
Paso 2. Una los tres puntos de cruce para formar un triángulo.
Paso 3. Trace dos líneas paralelas, dibuje un paralelogramo cuya diagonal es el tercer lado del triángulo.
Paso 4. Extienda el paralelogramo dibujando cuatro líneas paralelas.

Este proceso se ilustra con la gráfica del plano $x + 2y + 3z = 6$ en la figura 4.38. Los cruces son (6, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 2).

Tres puntos no colineales determinan un plano ya que determinan dos vectores no paralelos que se intersecan en un punto (vea la figura 4.39).

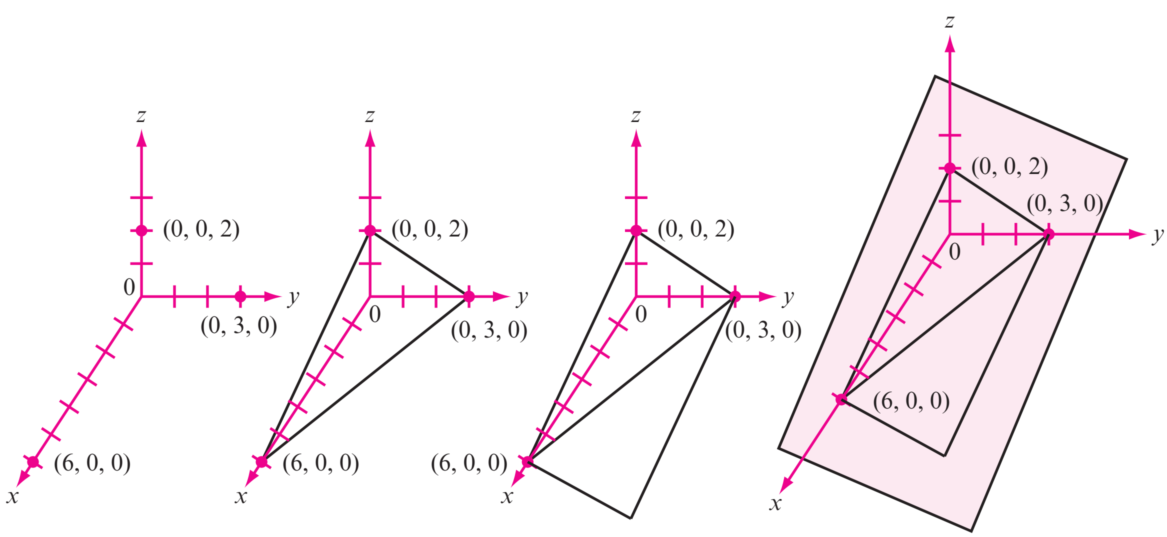

Figura 4.38
Dibujo del plano $x + 2y + 3z = 6$ en cuatro pasos.

EJEMPLO 4.5.7 Determinación de la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados

Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 3, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$.

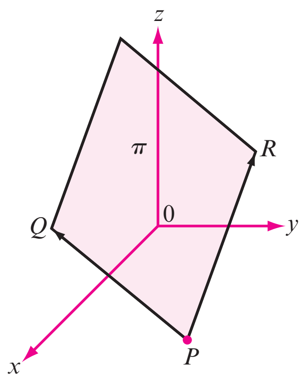

Figura 4.39

Los puntos P, Q y R determinan un plano siempre que no sean colineales.

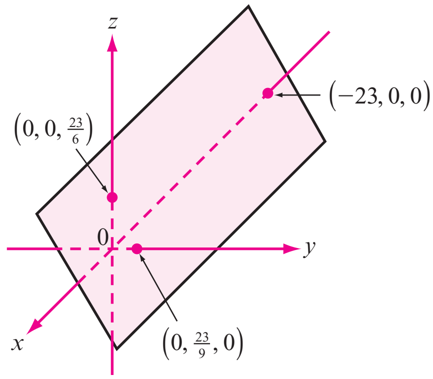

Figura 4.40

El plano $-x + 9y + 6z = 23$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{PQ} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{QR} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ están en el plano y por lo tanto son ortogonales al vector normal, de manera que

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

y se obtiene, usando el punto P en la ecuación (4.5.8),

$$\pi: -(x - 1) + 9(y - 2) + 6(z - 1) = 0$$

es decir,

$$-x + 9y + 6z = 23$$

Observe que si se escoge otro punto, digamos Q, se obtiene la ecuación $-(x + 2) + 9(y - 3) + 6(z + 1) = 0$, que se reduce a $-x + 9y + 6z = 23$. La figura 4.40 presenta un bosquejo de este plano.

Definición 4.5.2

Planos paralelos

Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos, es decir, si el producto cruz de sus vectores normales es cero.

En la figura 4.41 se dibujaron dos planos paralelos.

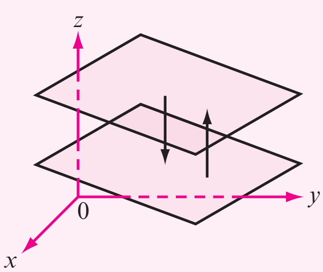

Figura 4.41

Se dibujaron dos planos paralelos.

Nota

Observe que dos planos paralelos pueden ser coincidentes. Por ejemplo, los planos $x + y + z = 1$ y $2x + 2y + 2z = 2$ son coincidentes (son el mismo).

EJEMPLO 4.5.8 Dos planos paralelos

Los planos π_1: $2x + 3y - z = 3$ y π_2: $-4x - 6y + 2z = 8$ son paralelos ya que $\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{n}_2 = -4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = -2\mathbf{n}_1$ (y $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$).

Si dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta.

EJEMPLO 4.5.9 Puntos de intersección de planos

Encuentre todos los puntos de intersección de los planos $2x - y - z = 3$ y $x + 2y + 3z = 7$.

Solución Las coordenadas de cualquier punto (x, y, z) sobre la recta de intersección de estos dos planos deben satisfacer las ecuaciones $x + 2y + 3z = 7$ y $2x - y - z = 3$. Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas mediante reducción por renglones se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -5 & -7 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \end{array}\right)$$

Por lo tanto, $y = \frac{11}{5} - \left(\frac{7}{5}\right)z$ y $x = \frac{13}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)z$. Por último, con $z = t$ se obtiene una representación paramétrica de la recta de intersección: $x = \frac{13}{5} - \frac{1}{5}t$. $y = \frac{11}{5} - \frac{7}{5}t$ y $z = t$.

A partir del teorema 4.4.2, inciso vi), en la página 270, se puede derivar un hecho interesante: si $\mathbf{w}$ está en el plano de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, entonces $\mathbf{w}$ es perpendicular a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, lo que significa que $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. Inversamente, si $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$, entonces $\mathbf{w}$ es perpendicular a $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$, de manera que $\mathbf{w}$ se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. De lo anterior se concluye que

> Tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son coplanares si y sólo si su producto triple escalar es cero.

Resumen 4.5

- Sean $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos sobre una recta L en $\mathbb{R}^3$. Sea $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ y sea $a = x_2 - x_1$, $b = y_2 - y_1$ y $c = z_2 - z_1$.

  Ecuación vectorial de una recta: $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}$. (p. 279)

  Ecuaciones paramétricas de una recta:
  $$x = x_1 + at$$
  $$y = y_1 + bt$$
  $$z = z_1 + ct$$

  Ecuaciones simétricas de una recta: $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$, si a, b y c son diferentes de cero. (p. 280)

- Sea P un punto en $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{n}$ un vector dado diferentes de cero; entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un plano en $\mathbb{R}^3$. El vector $\mathbf{n}$ se llama **vector normal** al plano. (p. 281)

- Si $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ y $P = (x_0, y_0, z_0)$, entonces la ecuación del plano se puede escribir (p. 282)

$$ax + by + cz = d$$

donde

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$$

- El **plano *xy*** tiene la ecuación $z = 0$; el **plano *xz*** tiene la ecuación $y = 0$; el **plano *yz*** tiene la ecuación $x = 0$. (p. 282)
- Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Si los dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta. (p. 284)

A AUTOEVALUACIÓN 4.5

I) La recta que pasa por los puntos (1, 2, 4) y (5, 10, 15) satisface la ecuación ______.

a) $(x, y, z) = (1, 2, 4) + t(4, 8, 11)$

b) $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{8} = \dfrac{z-1}{11}$

c) $(x, y, z) = (5, 10, 15) + s(4, 8, 11)$

d) $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-10}{8} = \dfrac{z-15}{11}$

II) La recta que pasa por el punto $(7, 3, -4)$ y es paralela al vector $\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ satisface la ecuación ________.

a) $\dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z+4}{2}$

b) $(x, y, z) = (1, 5, 2) + t(7, 3, -4)$

c) $\dfrac{x-7}{8} = \dfrac{y-3}{8} = \dfrac{z+4}{-2}$

d) $(x, y, z) = (7, 3, -4) + s(8, 8, -2)$

III) La ecuación vectorial $(x, y, z) - (3, 5, -7) = t(-1, 4, 8)$ describe _________.

a) la recta que pasa por $(-1, 4, 8)$ y es paralela a $3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

b) la recta que pasa por $(-3, -5, 7)$ y es paralela a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

c) la recta que pasa por $(3, 5, -7)$ y es perpendicular a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

d) la recta que pasa por $(3, 5, -7)$ y es paralela a $-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

IV) El plano que pasa por $(5, -4, 3)$ que es ortogonal a $\mathbf{j}$ satisface ________.

a) $y = -4$

b) $(x - 5) + (z - 3) = 0$

c) $x + y + z = 4$

d) $5x - 4y + 3z = -4$

V) El plano que pasa por $(5, -4, 3)$ que es ortogonal a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ satisface __________.

a) $y = -4$

b) $(x - 5)/1 = (y + 4)/1 = (z - 3)/1$

c) $x + y + z = 4$

d) $5x - 4y + 3z = -4$

VI) El vector ____________ es ortogonal al plano que satisface $2(x - 3) - 3(y + 2) + 5(z - 5) = 0$.

a) $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

b) $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

c) $(2 - 3)\mathbf{i} + (-3 + 2)\mathbf{j} + (5 - 5)\mathbf{k}$

d) $(2)(-3)\mathbf{i} + (-3)(2)\mathbf{j} + (5)(-5)\mathbf{k}$

VII) El plano que satisface $6x + 18y - 12z = 17$ es ________ al plano $-5x - 15y + 10z = 29$.

***a*)** idéntico
***b*)** paralelo
***c*)** ortogonal
***d*)** ni paralelo ni ortogonal

Respuestas a la autoevaluación

I) *a*), *b*), *c*), *d*) **II)** *a*) **III)** *d*) **IV)** *a*)
V) *c*) **VI)** *b*) **VII)** *b*)

Problemas 4.5

En los problemas 1 al 19 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta indicada.

1. Contiene a $(1, -1, 1)$ y $(-1, 1, -1)$
2. Contiene a $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 1)$
3. Contiene a $(7, 9, -8)$ y $(9, 3, -8)$
4. Contiene a $(2, 3, -4)$ y $(3, 2, 1)$
5. Contiene a $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$
6. Contiene a $(-5, 1, 10)$ y $(10, -7, 10)$
7. Contiene a $(1, 2, 3)$ y $(-1, 2, -2)$
8. Contiene a $(2, 2, 1)$ y es paralela a $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$
9. Contiene a $(-1, -6, 2)$ y es paralela a $4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
10. Contiene a $(10, 0, 6)$ y es paralela a $-8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
11. Contiene a $(-2, 3, -2)$ y es paralela a $4\mathbf{k}$
12. Contiene a $(-2, 3, 7)$ y es paralela a $3\mathbf{j}$
13. Contiene a $(6, 10, 3)$ y es paralela a $-10\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$
14. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{i}$
15. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{j} + e\mathbf{k}$
16. Contiene a (a, b, c) y es paralela a $d\mathbf{k}$
17. Contiene a $(-2, 3, 7)$ y es ortogonal a $3\mathbf{j}$
18. Contiene a $(4, 1, -6)$ y es paralela a $\left(\frac{x-2}{3}\right) = \left(\frac{y+1}{6}\right) = \left(\frac{z-5}{2}\right)$
19. Contiene a $(4, 5, 5)$ y es paralela a $\frac{x-8}{-2} = \frac{y+9}{3} = \frac{z+2}{-7}$
20. Sea L_1 la recta dada por

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

y sea L_2 la recta dada por

$$\frac{x - x_1}{a_2} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{c_2}$$

Demuestre que L_1 es ortogonal a L_2 si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

21. Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

son ortogonales.

22. Demuestre que las rectas

$$L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{3} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-8}{9}$$

son paralelas.

La rectas en $\mathbb{R}^3$ que no tienen la misma dirección no necesitan tener un punto en común.

23. Demuestre que las rectas L_1: $x = 1 + t$, $y = -3 + 2t$, $z = -2 - t$ y L_2: $x = 17 + 3s$, $y = 4 + s$, $z = -8 - s$ tienen el punto $(2, -1, -3)$ en común.

24. Demuestre que las rectas L_1: $x = 2 - t$, $y = 1 + t$, $z = -2t$ y L_2: $x = 1 + s$, $y = -2s$, $z = 3 + 2s$ *no* tienen un punto en común.

25. Sea L dada en forma vectorial $\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + t\mathbf{v}$. Encuentre un número t tal que $\overrightarrow{0R}$ sea perpendicular a $\mathbf{v}$.

De los problemas 26 al 29, utilice el resultado del problema 25 para encontrar la distancia entre la recta L (que contiene a P y es paralela a $\mathbf{v}$) y el origen.

26. $P = (2, 1, -4)$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

27. $P = (-3, 1, 2)$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

28. $P = (-5, 3, 1)$; $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

29. $P = (-2, -5, -4)$; $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

De los problemas 30 al 35, encuentre una recta L ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto dado.

30. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{-3}; \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z+3}{6}; (0, 0, 0)$

31. $\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{-7} = \frac{z+1}{3}; \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+3}{-2}; (-4, 7, 3)$

32. $x = 3 - 2t, y = 4 + 3t, z = -7 + 5t; x = -2 + 4s, y = 3 - 2s, z = 3 + s; (-2, 3, 4)$

33. $x = 4 + 10t, y = -4 - 8t, z = 3 + 7t; x = -2t, y = 1 + 4t, z = -7 - 3t; (4, 6, 0)$

34. $\frac{x+2}{-10} = \frac{y-7}{-8} = \frac{z-1}{7}; \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{9}; (4, -10, -5)$

35. $\frac{x+2}{6} = \frac{y-7}{6} = \frac{z-1}{-7}; x = 4, 2 - y = \frac{z-1}{3}; (-10, -1, -2)$

*36. Calcule la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x-2}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-4}{-4} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+2}{1}$$

[***Sugerencia:*** La distancia se mide a lo largo del vector $\mathbf{v}$ que es perpendicular a L_1 y a L_2. Sea P un punto en L_1 y Q un punto en L_2. Entonces la longitud de la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre $\mathbf{v}$ es la distancia entre las rectas, medida a lo largo del vector que es perpendicular a ambas.]

*37. Encuentre la distancia entre las rectas

$$L_1: \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4} \quad \text{y} \quad L_2: \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1}$$

De los problemas 38 al 55, encuentre la ecuación del plano.

38. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i}$

39. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j}$

40. $P = (4, 5, -5)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

41. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

42. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

43. $P = (-8, 0, 10)$; $\mathbf{n} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

44. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

45. $P = (2, -1, 6)$; $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

46. $P = (5, -5, 0)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

47. $P = (-3, 11, 2)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

48. $P = (0, -1, -2)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

49. $P = (1, -8, -7)$; $\mathbf{n} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

50. Contiene a $(1, 2, -4)$, $(2, 3, 7)$ y $(4, -1, 3)$

51. Contiene a $(1, -2, -4)$, $(3, 3, 3)$ y $(0, 0, -1)$

52. $(7, -5, 9)$, $(-3, -6, -5)$, $(2, -1, -3)$

53. Contiene a $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$

54. Contiene a $(1, 0, -4)$, $(3, 4, 0)$ y $(0, -2, 1)$

55. $(7, 2, 1)$, $(9, -4, 5)$, $(5, -3, 1)$

Dos planos son **ortogonales** si sus vectores normales son ortogonales. De los problemas 56 al 62 determine si los planos dados son paralelos, ortogonales, coincidentes (es decir, el mismo) o ninguno de los anteriores.

Planos ortogonales

56. π_1: $x + y + z = 2$; π_2: $2x + 2y + 2z = 4$

57. π_1: $x + 2y + 3z = 1$; π_2: $2x + 4y + 6z = 2$

58. π_1: $9x + 9y - z = 143$; π_2: $x - y - 10z = -56$

59. π_1: $2x - y + z = 3$; π_2: $x + y - z = 7$

60. π_1: $2x - y + z = 3$; π_2: $x + y + z = 3$

61. π_1: $4x - y + 7z = 34$; π_2: $4x + 5y - z = -75$

62. π_1: $3x - 2y + 5z = 0$; π_2: $x + 4y - 6z = 0$

De los problemas 63 al 66, encuentre la ecuación del conjunto de todos los puntos de intersección de los dos planos.

63. π_1: $7x - 7y - z = 134$; π_2: $8x - 10y + 10z = 58$

64. π_1: $3x - y + 4z = 3$; π_2: $-4x - 2y + 7z = 8$

65. π_1: $3x - 2y + 5z = 4$; π_2: $x + 4y - 6z = 1$

66. π_1: $-2x - y + 17z = 4$; π_2: $2x - y - z = -7$

*67. Sea π un plano, P un punto sobre el plano, $\mathbf{n}$ un vector normal al plano y Q un punto fuera del plano (vea la figura 4.42). Demuestre que la distancia perpendicular D de Q al plano está dada por

$$D = |\text{proy}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{PQ}| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$$

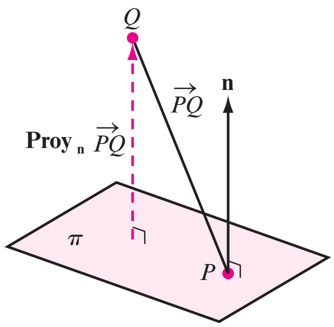

Figura 4.42

De los problemas 68 al 71 encuentre la distancia del punto dado al plano dado.

68. $(-7, -5, -7)$; $9x + 2y + 5z = 97$

69. $(-7, -2, -1)$; $-2x + 8z = -5$

70. $(-3, 5, -1)$; $-3x + 6z = -5$

71. $(3, -3, 0)$; $8x - 8y - 2z = 50$

72. Pruebe que la distancia entre el plano $ax + by + cz = d$ y el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Ángulo entre dos planos

El **ángulo entre dos planos** está definido como el ángulo agudo[†] entre sus vectores normales. De los problemas 73 al 75 encuentre el ángulo entre los dos planos

73. Los planos del problema 63

74. Los planos del problema 64

75. Los planos del problema 66

Representación paramétrica de un plano

***76.** Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores no paralelos diferentes de cero en un plano π. Demuestre que si $\mathbf{w}$ es cualquier otro vector en π, entonces existen escalares α y β tales que $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$. Esto se denomina **representación paramétrica** del plano π. [*Sugerencia:* Dibuje un paralelogramo en el que $\alpha\mathbf{u}$ y $\beta\mathbf{v}$ formen lados adyacentes y el vector diagonal sea $\mathbf{w}$.]

Vectores coplanares

***77.** Tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se llaman **coplanares** si están todos en el mismo plano π. Demuestre que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ pasan todos a través del origen, entonces son coplanares si y sólo si el triple producto escalar es igual a cero: $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$.

De los problemas 78 al 84 determine si los tres vectores de posición dados (es decir, con punto inicial en el origen) son coplanares. Si lo son, encuentre la ecuación del plano que los contiene.

78. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 9\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

79. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$

80. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -8\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

81. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

82. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

83. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

84. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = 6\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

[†] Recuerde que un ángulo agudo α es un ángulo entre 0° y 90°; es decir, entre 0° y $\frac{\pi}{2}$ radianes.

Ejercicios de repaso

En los ejercicios 1 al 9 encuentre la magnitud y dirección del vector dado.

1. $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
2. $\mathbf{v} = (8, 10)$
3. $\mathbf{v} = (-9, 10)$
4. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
5. $\mathbf{v} = \left(2, -2\sqrt{3}\right)$
6. $\mathbf{v} = (3, -10)$
7. $\mathbf{v} = \left(3, -\sqrt{5}\right)$
8. $\mathbf{v} = -12\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$
9. $\mathbf{v} = (-6, 1)$

En los ejercicios 10 al 14 escriba el vector $\mathbf{v}$, representado por $\overrightarrow{PQ}$, en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Bosqueje $\overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v}$.

10. $P = (2, 3)$; $Q = (4, 5)$
11. $P = (1, -2)$; $Q = (7, 12)$
12. $P = (10, 10)$; $Q = (-7, 10)$
13. $P = (-1, -6)$; $Q = (3, -4)$
14. $P = (-1, 3)$; $Q = (3, -1)$

En los problemas 15 al 18, con $\mathbf{u} = (4, -2)$ y $\mathbf{v} = (-3, 1)$ encuentre

15. $-3\mathbf{v}$
16. $-2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$
17. $5\mathbf{v} + 4\mathbf{u}$
18. $-2(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

En los problemas 19 al 22, con $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ encuentre

19. $5\mathbf{u}$
20. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$
21. $2\mathbf{v} + 4\mathbf{u}$
22. $-5\mathbf{u} + 6\mathbf{v}$

En los ejercicios 23 al 31 encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector dado.

23. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$
24. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$
25. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
26. $\mathbf{v} = 11\mathbf{i}$
27. $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$
28. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
29. $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$
30. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
31. $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$
32. Si $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ encuentre sen θ y cos θ, donde θ es la dirección de $\mathbf{v}$.
33. Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.
34. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.
35. Encuentre un vector unitario con la dirección opuesta a la de $\mathbf{v} = 10\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$.

En los ejercicios 36 al 40 encuentre un vector $\mathbf{v}$ que tenga la magnitud y dirección dadas.

36. $|\mathbf{v}| = 2$; $\theta = \dfrac{\pi}{3}$
37. $|\mathbf{v}| = 6$; $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$
38. $|\mathbf{v}| = 10$; $\theta = \dfrac{\pi}{6}$
39. $|\mathbf{v}| = 4$; $\theta = \pi$
40. $|\mathbf{v}| = 7$; $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

En los ejercicios 41 al 45 calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo entre ellos.

41. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -12\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$
42. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = 11\mathbf{j}$
43. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
44. $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
45. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

En los ejercicios 46 al 53 determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos. Después bosqueje cada par.

46. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

47. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{j} = -7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

48. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

49. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

50. $\mathbf{u} = -12\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{j} = -9\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

51. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$

52. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; $\mathbf{j} = -3\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

53. $\mathbf{u} = -7\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$

54. Sean $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$. Determine α tal que

a) **u** y **v** sean ortogonales.
b) **u** y **v** sean paralelos.
c) El ángulo entre **u** y **v** sea $\frac{\pi}{4}$.
d) El ángulo entre **u** y **v** sea $\frac{\pi}{6}$.

En los ejercicios 55 al 62 calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u}$.

55. $\mathbf{u} = -12\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

56. $\mathbf{u} = 14\mathbf{i}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

57. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

58. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$

59. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

60. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

61. $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

62. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

63. Sean $P = (3, -2)$, $Q = (4, 7)$, $R = (-1, 3)$ *y* $S = (2, -1)$. Calcule $\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\,\overrightarrow{RS}$ y $\text{proy}_{\overrightarrow{RS}}\,\overrightarrow{PQ}$.

En los ejercicios 64 al 67 encuentre la distancia entre los dos puntos dados.

64. $(4, -1, 7)$; $(-5, 1, 3)$

65. $(-9, -10, -1)$; $(12, -3, 3)$

66. $(2, -7, 0)$; $(0, 5, -8)$

67. $(-1, 0, -4)$; $(3, -2, 6)$

En los ejercicios 68 al 71 encuentre la magnitud y los cosenos directores del vector dado.

68. $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

69. $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

70. $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

71. $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

72. Encuentre un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (3, -1, 2)$ y $Q = (-4, 1, 7)$.

73. Encuentre un vector unitario cuya dirección sea opuesta a la de $\overrightarrow{PQ}$, donde $P = (1, -3, 0)$ y $Q = (-7, 1, -4)$.

En los ejercicios 74 al 83 sean $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcule:

74. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

75. $3\mathbf{v} + 5\mathbf{w}$

76. $\text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{w}$

77. $\text{proy}_{\mathbf{w}}\,(\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})$

78. $\text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{u}$

79. $2\mathbf{u} - 4\mathbf{v} + 7\mathbf{w}$

80. $2\mathbf{u} + 6\mathbf{v} + 3\,\text{proy}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{v}$

81. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$

82. El ángulo entre **u** y **v**

83. El ángulo entre **v** y **w**

En los ejercicios 84 al 87 encuentre el producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

84. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$; $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$

85. $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$

86. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

87. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

88. Encuentre dos vectores unitarios ortogonales a $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

89. Calcule el área del paralelogramo con vértices adyacentes $(1, 4, -2)$, $(-3, 1, 6)$ y $(1, -2, 3)$.

En los ejercicios 90 al 95 encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta dada.

90. Contiene a $(3, 2, -4)$ y $(0, 2, 3)$

91. Contiene a $(-1, 2, -3)$ y $(-6, 4, 0)$

92. Contiene a $(-4, 1, 0)$ y $(3, 0, 7)$

93. Contiene a $(-3, 5, -4)$ y es paralela al vector $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

94. Contiene a $(1, 1, 1)$ y es perpendicular a $3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

95. Contiene a $(1, -2, -3)$ y es paralela a $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{(-3)} = \frac{z-41}{2}$

96. Demuestre que las rectas L_1: $x = 3 - 2t$, $y = 4 + t$, $z = -2 + 7t$ y L_2: $x = -3 + s$, $y = 2 - 4s$, $z = 1 + 6s$ no tienen puntos en común.

97. Encuentre la distancia del origen a la recta que pasa por el punto $(3, 1, 5)$ y que tiene la dirección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

98. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2, 4)$ y es ortogonal a L_1: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+6}{3} = \frac{z}{(-2)}$ y L_2: $\frac{x+3}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{4}$.

En los ejercicios 99 al 101 encuentre la ecuación del plano que contiene al punto dado y es ortogonal al vector normal dado.

99. $P = (-7, 6, -7)$; $\mathbf{n} = 11\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

100. $P = (1, -4, 6)$; $\mathbf{n} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

101. $P = (-4, 1, 6)$; $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

102. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos $(-2, 4, 1)$, $(3, -7, 5)$ y $(-1, -2, -1)$.

103. Encuentre la ecuación del plano que contiene a los puntos $(-1, 3, 2)$, $(6, 1, 0)$ y $(0, 0, 3)$.

104. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $-x + y + z = 3$ y π_2: $-4x + 2y - 7z = 5$.

105. Encuentre (de existir) el punto de intersección del plano π_1: $-4x + 3y - 2z = 12$ y la recta L: $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = 2 + t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $t \in \mathbb{R}$.

106. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $-2x + 3y = 6$ y π_2: $-2x + 3y + z = 3$.

107. Encuentre todos los puntos de intersección de los planos π_1: $3x - y + 4z = 8$ y π_2: $-3x - y - 11z = 0$.

108. Encuentre la distancia desde $(1, -2, 3)$ al plano $2x - y - z = 6$.

109. Encuentre la distancia desde $(3, 4, 8)$ al plano $-x + 3y = 6$.

110. Encuentre el ángulo entre los planos del ejercicio 97.

111. Demuestre que los vectores de posición $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ son coplanares y encuentre la ecuación del plano que los contiene.