ÁLGEBRA LINEAL - Examen Parcial 2

Resuelva los siguientes problemas mostrando todos los pasos.

1. (3 points) **Transformaciones lineales:** Determine si la transformación de V en W dada es lineal.
   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$
   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to P_3; T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx + (a+b)x^2 + (a-b)x^3$

2. (4 points) **Transformaciones lineales:**
   (a) Demuestre que la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{T}\ \mathbf{x} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}$, donde
   $$A = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{6} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   (b) Demuestre que para cualquier número real θ, la transformación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{Tx} = \mathbf{Ax}$, donde A es una isometría.
   $$A = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (4 points) **Valores característicos, vectores característicos y formas canónicas :** Calcule los valores característicos y los espacios característicos de la matriz dada. Si la multiplicidad algebraica de un valor característico es mayor que **1**, calcule su multiplicidad geométrica.
   (a)
   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$
   (b)
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. (3 points) **Valores característicos, vectores característicos y formas canónicas :** Determine si la matriz dada $\mathbf{A}$ es diagonalizable. De ser así, encuentre una matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{C^{-1}AC} = \mathbf{D}$. Verifique que $\mathbf{AC} = \mathbf{CD}$ y que los elementos distintos de cero de $\mathbf{D}$ sean los valores característicos de $\mathbf{A}$.
   $$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. (3 points) **Subespacios vectoriales :** Determine si el subconjunto dado $\mathbf{H}$ del espacio vectorial $\mathbf{V}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$.
   (a) $V = \mathbb{R}^2, H = \{(x, y) : x^2 + y^3 < 1\}$
   (b) $V = M_{mn}, H = \{S \in M_{mn} : \text{S es Simetrica}\}$

6. (3 points) **Subespacios vectoriales :** Determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.
   (a) En $P_2 : 1 - x^2, x$
   (b) En $M_{22} : \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$