Tarea 1: Álgebra Lineal

Facultad de Ingeniería Ambiental

Fecha de entrega: 14 de Setiembre de 2024

Instrucciones

Resuelve los siguientes problemas de manera clara y completa. Asegúrate de incluir todos los pasos necesarios para llegar a la solución. Aplica los conceptos aprendidos en clase y justifica tus respuestas cuando sea necesario.

Problemas :

1. **Operaciones con Matrices** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, calcula $A+B$, $A-B$, y AB.

   Solución:

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix},$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

2. **Matriz Transpuesta** Encuentra la matriz transpuesta de $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. ¿Es la matriz C simétrica?

   Solución: La matriz transpuesta C^T se obtiene intercambiando las filas por columnas:

$$C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. **Matriz Simétrica** Demuestra si la matriz $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ es simétrica.

   Solución: La matriz D es simétrica si $D = D^T$. Calculemos D^T:

$$D^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Como $D = D^T$, la matriz es simétrica.

4. **Matriz Antisimétrica** Determina si la matriz $E = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica.

   Solución: Una matriz es antisimétrica si $E^T = -E$. Calculamos:

$$E^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad -E = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Como $E^T = -E$, la matriz es antisimétrica.

5. **Matriz Involutiva** Verifica si la matriz $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es involutiva, es decir, si cumple $F^2 = I$ donde I es la matriz identidad.

   Solución: Calculamos F^2:
$$F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
   Por lo tanto, F es involutiva.

6. **Matriz Idempotente** Comprueba si la matriz $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es idempotente, es decir, si cumple $G^2 = G$.

   Solución: Calculamos G^2:
$$G^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & -4+2 \\ 2-1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = G$$
   Por lo tanto, G es idempotente.

7. **Matriz Ortogonal** Sea la matriz $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Verifica si H es una matriz ortogonal.

   Solución: Verificamos si $H^T H = I$. Calculamos H^T:
$$H^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
   Multiplicamos $H^T H$:
$$H^T H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
   Por lo tanto, H es ortogonal.

8. **Producto Escalar** Calcula el producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ y $\mathbf{v} = (4, 5, 6)$.

   Solución: Calculamos:
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

9. **Producto Vectorial** Encuentra el producto vectorial de los vectores $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, 1, 0)$.

   Solución: Calculamos:
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$$
   El producto vectorial es $\mathbf{k}$, es decir, $(0, 0, 1)$.

10. **Aplicación en Física** Dada una matriz de rotación en 2D $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, muestra que esta matriz es ortogonal y encuentra su transpuesta.
    Solución: Mostramos que $R^T R = I$:
$$R^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad R^T R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
    La matriz es ortogonal y su transpuesta es:
$$R^T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Instrucciones

Resuelve los siguientes problemas sobre matrices de 3×3. Asegúrate de mostrar todos los pasos necesarios para llegar a la solución.

11. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Encuentra la matriz transpuesta A^T.
Solución:
La transpuesta de A es:
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

12. Determina si la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ es simétrica.
Solución:
Una matriz es simétrica si $B = B^T$. Calculamos la transpuesta:
$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
Como $B = B^T$, la matriz es simétrica.

13. Verifica si la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es antisimétrica.
Solución:
Una matriz es antisimétrica si $C = -C^T$. Calculamos la transpuesta:
$$C^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
Como $C = -C^T$, la matriz es antisimétrica.

14. Sea la matriz $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Demuestra que es una matriz involutiva.
Solución:
Una matriz es involutiva si $D^2 = I$, donde I es la matriz identidad. Calculamos:
$$D^2 = D \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$
Por lo tanto, D es una matriz involutiva.

15. Encuentra si la matriz $E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es idempotente.
Solución:
Una matriz es idempotente si $E^2 = E$. Calculamos:
$$E^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ 4 & 8 & -4 \\ -8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$
Como $E^2 \neq E$, la matriz no es idempotente.

16. Verifica si la matriz $F = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es ortogonal.
Solución: Para que una matriz sea ortogonal, debe cumplir $F^\top F = I$. Calculamos $F^\top F$ y verificamos que da como resultado la identidad:
$$F^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Luego,

$$F^\top F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $F^\top F = I$, la matriz F es ortogonal.

17. Calcula el producto escalar de los vectores fila de la matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

    Solución: El producto escalar entre los vectores fila $G_1 = (1, 2, 3)$ y $G_2 = (4, 5, 6)$ es:

    $$G_1 \cdot G_2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

    Se puede hacer lo mismo con otras filas si se requiere.

18. Realiza el producto vectorial de los vectores columna de la matriz $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

    Solución: El producto vectorial entre los vectores columna $H_1 = (1, 0, 0)$ y $H_2 = (0, 1, 0)$ es:

    $$H_1 \times H_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

    El resultado es el vector $(0, 0, 1)$.

19. Dada la matriz $I = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, encuentra el determinante de I.

    Solución: Usamos la fórmula del determinante para matrices 3×3:

    $$\det(I) = 3\,(0 \cdot 3 - 2 \cdot 1) - (-1)\,(1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)) + 4\,(1 \cdot 1 - 0 \cdot (-2))$$

    $$\det(I) = 3(0 - 2) + 1(3 + 4) + 4(1 - 0) = -6 + 7 + 4 = 5$$

20. Calcula la inversa de la matriz $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ si existe.

    Solución: Primero calculamos el determinante de J. Si $\det(J) \neq 0$, la inversa existe. Calculamos:

    $$\det(J) = 2\,(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) - 1\,(1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + 1\,(1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 2(4 - 1) - 1(2 - 1) + 1(1 - 2)$$

    $$\det(J) = 6 - 1 - 1 = 4$$

    Como $\det(J) = 4 \neq 0$, la inversa existe y se puede calcular. La inversa es:

    $$J^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

21. Sea la matriz $K = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Determina si K es positiva definida.

    Solución: Una matriz es positiva definida si todos sus menores principales tienen determinante positivo. Calculamos los determinantes de los menores principales:

    $$K_1 = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}, \quad \det(K_1) = 5 > 0$$

    $$K_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \det(K_2) = 5 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 21 > 0$$

    $$K_3 = K, \quad \det(K_3) = 5(25 - 16) - 2(10 - 12) + 3(8 - 15) = 9 > 0$$

    Dado que todos los determinantes son positivos, la matriz K es positiva definida.

22. Verifica si la matriz $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

    Solución: Una matriz L es ortogonal si $L^T L = I$. Calculamos $L^T L$:

$$L^T = L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^T L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

    Por lo tanto, L es ortogonal.

23. Encuentra el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

    Solución: Calculamos el determinante de la matriz:

$$\det(M) = 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

    Dado que el determinante es cero, el rango es menor que 3. Ahora encontramos los menores de orden 2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = -3 \quad \text{(no es cero)}$$

    Por lo tanto, el rango de M es 2.

24. Demuestra que la matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz de rotación.

    Solución: Para verificar que N es una matriz de rotación, debemos demostrar que es ortogonal y su determinante es 1. Calculamos:

$$N^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N^T N = I$$

    Por lo tanto, N es ortogonal. Además:

$$\det(N) = 0 \cdot (0 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - (-1) \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) + 0 \cdot (1 \cdot 0 - (-1) \cdot 0) = 1$$

    Por lo tanto, N es una matriz de rotación.

25. Si $O = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ¿qué tipo de matriz es O? Justifica tu respuesta.

    Solución: La matriz O es una matriz diagonal ya que todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros. Además, es una matriz escalar porque todos los elementos en la diagonal son iguales (2). Por lo tanto, O es una matriz diagonal y escalar.

26. Verifica si la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es triangular superior.

    Solución: Una matriz es triangular superior si todos los elementos por debajo de la diagonal son cero. Como todos los elementos de P por debajo de la diagonal principal son ceros, P es triangular superior.

27. Encuentra los autovalores de la matriz $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

    Solución: Dado que Q es una matriz diagonal, los autovalores son los elementos de la diagonal:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4$$

28. Determina si la matriz $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica.

Solución: Una matriz es antisimétrica si $R^T = -R$. Calculamos R^T:

$$R^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente, $R^T = -R$, por lo que R es antisimétrica.

29. Sea la matriz $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Calcula S^2.

Solución: Calculamos $S^2 = S \cdot S$:

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}$$

30. Encuentra el determinante de la matriz $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución: El determinante de una matriz 3×3 se puede calcular usando la regla de Sarrus o cofactores. Utilizaremos cofactores:

$$\det(T) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Calculamos cada uno de los determinantes de 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = (1 \cdot 0) - (4 \cdot 6) = -24,$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = (0 \cdot 0) - (4 \cdot 5) = -20,$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (0 \cdot 6) - (1 \cdot 5) = -5.$$

Sustituimos los valores en la fórmula del determinante:

$$\det(T) = 1 \cdot (-24) - 2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-5),$$
$$\det(T) = -24 + 40 - 15 = 1.$$

Por lo tanto, el determinante de la matriz es $\det(T) = 1$

Instrucciones

Resuelva los siguientes problemas de productos escalar y vectorial utilizando matrices de 3x3.

Problemas

31. Dados los vectores $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, calcule el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1(4) + 2(5) + 3(6) = 4 + 10 + 18 = 32.$$

32. Dados los vectores $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$, encuentre el producto vectorial $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$.

Solución:

$$\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(-1(-2) - 3(5)) - \hat{\jmath}(2(-2) - 3(0)) + \hat{k}(2(5) - (-1)(0))$$

$$= \hat{\imath}(-17) - \hat{\jmath}(-4) + \hat{k}(10) = -17\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 10\hat{k}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -17 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$.

33. Encuentre el producto escalar de los vectores $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = (-2)(3) + (4)(-6) + (1)(2) = -6 - 24 + 2 = -28.$$

34. Si $\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, calcule $\mathbf{g} \times \mathbf{h}$.

Solución:

$$\mathbf{g} \times \mathbf{h} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}(2(4)) - \hat{\jmath}(1(4) - 3(-1)) + \hat{k}(1(0) - 2(-1)) = \hat{\imath}(8) - \hat{\jmath}(4+3) + \hat{k}(2) = 8\hat{\imath} - 7\hat{\jmath} + 2\hat{k}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{g} \times \mathbf{h} = \begin{bmatrix} 8 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix}$.

35. Dado $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, encuentre el producto escalar $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}$ y el producto vectorial $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$.

Solución:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (5)(2) + (-3)(4) + (2)(-1) = 10 - 12 - 2 = -4.$$

Para el producto vectorial:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \hat{\imath} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - \hat{\jmath} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}((-3)(-1) - (2)(4)) - \hat{\jmath}((5)(-1) - (2)(2)) + \hat{k}((5)(4) - (-3)(2))$$

$$= \hat{\imath}(3 - 8) - \hat{\jmath}(-5 - 4) + \hat{k}(20 + 6) = -5\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} + 26\hat{k}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ 26 \end{bmatrix}$.

36. Calcule el producto escalar de $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Solución:
El producto escalar de dos vectores se define como:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = 6(-3) + 7(2) + (-2)(5) = -18 + 14 - 10 = -14.$$

Entonces, el producto escalar es $\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = -14$.

37. Encuentre el producto vectorial de $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:
El producto vectorial se calcula usando la fórmula del determinante:

$$\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}((-4)(1) - (2)(0)) - \mathbf{j}((1)(1) - (2)(3)) + \mathbf{k}((1)(0) - (-4)(3))$$

$$= \mathbf{i}(-4) - \mathbf{j}(1 - 6) + \mathbf{k}(12) = -4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

Entonces, el producto vectorial es $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}$.

38. Dados los vectores $\mathbf{o} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, calcule $\mathbf{o} \cdot \mathbf{p}$.

Solución:
El producto escalar es:

$$\mathbf{o} \cdot \mathbf{p} = 7(-2) + 1(3) + (-5)(4) = -14 + 3 - 20 = -31.$$

Entonces, $\mathbf{o} \cdot \mathbf{p} = -31$.

39. Si $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, encuentre el producto vectorial $\mathbf{q} \times \mathbf{r}$.

Solución:
El producto vectorial es:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}((-2)(-3) - (5)(1)) - \mathbf{j}((0)(-3) - (5)(2)) + \mathbf{k}((0)(1) - (-2)(2))$$

$$= \mathbf{i}(6 - 5) - \mathbf{j}(0 - 10) + \mathbf{k}(0 + 4) = \mathbf{i}(1) + \mathbf{j}(10) + \mathbf{k}(4).$$

Entonces, el producto vectorial es $\mathbf{q} \times \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$.

40. Encuentre el producto escalar y vectorial de los vectores $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Solución:
El producto escalar es:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = 2(4) + 3(-2) + (-1)(0) = 8 - 6 + 0 = 2.$$

El producto vectorial es:

$$\mathbf{s} \times \mathbf{t} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(3(0) - (-1)(-2)) - \mathbf{j}(2(0) - (-1)(4)) + \mathbf{k}(2(-2) - 3(4))$$

$$= \mathbf{i}(0 - 2) - \mathbf{j}(0 + 4) + \mathbf{k}(-4 - 12) = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 16\mathbf{k}.$$

Entonces, el producto escalar es $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} = 2$ y el producto vectorial es $\mathbf{s} \times \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -16 \end{bmatrix}$.

Instrucciones

A continuación, encontrarás 10 problemas que te ayudarán a practicar el cálculo de la adjunta e inversa de matrices de 3x3. Para cada problema, se proporcionará una matriz específica. Debes calcular su adjunta y, si es invertible, su inversa.

Problemas

41. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

encuentra su adjunta y, si es posible, su inversa.
Solución:

1. Calcular la matriz de cofactores

La matriz de cofactores se obtiene calculando los determinantes de los menores asociados a cada elemento de la matriz.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

donde M_{ij} es el menor de A al eliminar la fila i y la columna j.

$$\text{Menor de } a_{11} = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (1)(5) - (4)(2) = -3$$

$$\text{Menor de } a_{12} = \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (3)(5) - (4)(1) = 11$$

$$\text{Menor de } a_{13} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (3)(2) - (1)(1) = 5$$

Calculamos los otros cofactores siguiendo el mismo procedimiento:

$$\text{Menor de } a_{21} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = (-1)(5) - (0)(2) = -5$$

$$\text{Menor de } a_{22} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = (2)(5) - (0)(1) = 10$$

$$\text{Menor de } a_{23} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (2)(2) - (-1)(1) = 5$$

$$\text{Menor de } a_{31} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (-1)(4) - (0)(1) = -4$$

$$\text{Menor de } a_{32} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (2)(4) - (0)(3) = 8$$

$$\text{Menor de } a_{33} = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = (2)(1) - (-1)(3) = 5$$

2. Matriz de cofactores

$$\text{Cof}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -11 & 5 \\ 5 & 10 & -5 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Matriz adjunta (traspuesta de la matriz de cofactores)

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ -11 & 10 & -8 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Determinante de la matriz

Para encontrar la inversa, primero verificamos si el determinante de la matriz es distinto de cero:

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 2(-3) + (11) + 0 = -6 + 11 = 5$$

Dado que $\det(A) \neq 0$, la matriz es invertible.

5. Inversa de la matriz

La inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{Adj}(A) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ -11 & 10 & -8 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{5}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{11}{5} & \frac{10}{5} & -\frac{8}{5} \\ \frac{5}{5} & -\frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{pmatrix}$$

6. La adjunta de A es:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -4 \\ -11 & 10 & -8 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

7. La inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{11}{5} & 2 & -\frac{8}{5} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

42. Calcula la adjunta e inversa de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución:

Para encontrar la adjunta de B, primero calculamos la matriz de cofactores C_{ij}:

$$C_{11} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = (1 \cdot 2) - (1 \cdot (-3)) = 2 + 3 = 5,$$

$$C_{12} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 4) = -(2 - 4) = 2,$$

$$C_{13} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = (1 \cdot (-3)) - (1 \cdot 4) = -3 - 4 = -7.$$

Y así sucesivamente para los demás cofactores.

Después de calcular todos los cofactores, la matriz de cofactores es:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ -10 & 2 & -4 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

La adjunta de B es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adj}(B) = C^\top = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de una matriz se calcula usando la fórmula:

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \mathrm{Adj}(B).$$

Primero, calculamos el determinante de B:

$$\det(B) = 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},$$

$$\det(B) = 0 - 2(2-4) - (-1)(-3-4) = -2(-2) - (-7) = 4 - 7 = -3.$$

Finalmente, multiplicamos la adjunta por $1/\det(B)$:

$$B^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 5 & -10 & -1 \\ 2 & 2 & 6 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -2 \\ \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

43. Para la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

encuentra la adjunta y determina si la matriz tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa.
Solución:

La adjunta de una matriz C es la transpuesta de la matriz de cofactores. Primero, calculemos los cofactores:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0 - 4 \cdot 6) = -24,$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(-20) = 20,$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (0 \cdot 6 - 1 \cdot 5) = -5,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -(-18) = 18,$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0 - 3 \cdot 5) = -15,$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(-7) = 7,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) = 5,$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(4) = -4,$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = 1.$$

La matriz de cofactores es:

$$\text{Cofactores} = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 7 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

La adjunta es la transpuesta de esta matriz:

$$\text{Adjunta} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

La inversa de la matriz C se calcula usando:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\text{Adjunta}(C).$$

Primero, encontramos el determinante de C. Ya calculamos que:

$$\det(C) = 1.$$

Por lo tanto, la inversa de C es:

$$C^{-1} = \text{Adjunta}(C) = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

44. Dada la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentra su adjunta y, si es posible, su inversa.
Solución:

La matriz adjunta de una matriz 3×3 se obtiene tomando la transpuesta de la matriz de cofactores. Primero, calculamos los cofactores de cada elemento.

Cofactores:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (0 \cdot 1) - (-2 \cdot 1) = 2,$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -((2 \cdot 1) - (-2 \cdot 0)) = -2,$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1) - (0 \cdot 0) = 2.$$

Continuamos calculando los cofactores restantes:

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -((0 \cdot 1) - (2 \cdot 1)) = 2,$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cdot 1) - (2 \cdot 0) = 3,$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -((3 \cdot 0) - (0 \cdot 2)) = 0.$$

Finalmente:

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (0 \cdot -2) - (-2 \cdot 0) = 0,$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -((3 \cdot -2) - (2 \cdot 2)) = -(-6 - 4) = 10,$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (3 \cdot 0) - (0 \cdot 2) = 0.$$

La matriz de cofactores es:

$$\text{Cof}(D) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

La adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\mathrm{Adj}(D) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 10 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La inversa de una matriz 3×3 se puede calcular usando la fórmula:

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} \cdot \mathrm{Adj}(D).$$

Primero, necesitamos calcular el determinante de D:

$$\det(D) = 3 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\det(D) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 6 + 4 = 10.$$

Así que:

$$D^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 10 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Simplificando:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 1 \\ \frac{1}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

45. Calcula la adjunta e inversa de la siguiente matriz:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:
Primero, encontramos la adjunta de la matriz E. La adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores. Calculamos los cofactores de cada elemento.

$$E_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1) - (0 \cdot 2) = 1$$

$$E_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 0 \cdot 3) = -2$$

$$E_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3) = 4 - 3 = 1$$

$$E_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 2$$

$$E_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 3) = 1 - 3 = -2$$

$$E_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 0 \cdot 3) = -2$$

$$E_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -1$$

$$E_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = 2$$

$$E_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 0 \cdot 2) = 1$$

La matriz de cofactores es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La adjunta es la transpuesta de C:

$$\text{adj}(E) = C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La inversa se encuentra usando la fórmula:

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)}\text{adj}(E)$$

Primero, calculemos el determinante de E:

$$\det(E) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det(E) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$

Finalmente:

$$E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

46. Para la matriz

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

encuentra la adjunta y determina si la matriz tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa.
Solución:
Para encontrar la adjunta, primero necesitamos encontrar la matriz de cofactores y luego transponerla.

$$\text{Matriz de cofactores} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Calculamos cada cofactor C_{ij} como el determinante de la submatriz 2×2 obtenida al eliminar la fila i y la columna j de F.

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = (3 \cdot -3) - (4 \cdot -2) = -9 + 8 = -1$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(6 \cdot -3 - 4 \cdot 5) = -(-18 - 20) = 38$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (6 \cdot -2) - (3 \cdot 5) = -12 - 15 = -27$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -((5 \cdot -3) - (7 \cdot -2)) = -(-15 + 14) = 1$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = (2 \cdot -3) - (7 \cdot 5) = -6 - 35 = -41$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -((2 \cdot -2) - (5 \cdot 5)) = -(-4 - 25) = 29$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (5 \cdot 4) - (7 \cdot 3) = 20 - 21 = -1$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -((2 \cdot 4) - (7 \cdot 6)) = -8 + 42 = -34$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (2 \cdot 3) - (5 \cdot 6) = 6 - 30 = -24$$

La matriz de cofactores es

$$\text{Cofactores} = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$

La adjunta es la transpuesta de la matriz de cofactores:

$$\text{Adjunta} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & -34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

Para determinar si la matriz F tiene inversa, calculamos el determinante de F.

$$\det(F) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\det(F) = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 + 7 \cdot (-27) = -2 - 5 - 189 = -196$$

Como el determinante no es cero, la matriz F tiene inversa. La inversa se calcula como:

$$F^{-1} = \frac{1}{\det(F)} \cdot \text{Adjunta}$$

$$F^{-1} = \frac{1}{-196} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & -34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{196} & -\frac{1}{196} & \frac{1}{196} \\ -\frac{38}{196} & \frac{41}{196} & \frac{34}{196} \\ \frac{27}{196} & -\frac{29}{196} & \frac{24}{196} \end{pmatrix}$$

47. Dada la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

encuentra su adjunta y, si es posible, su inversa.
Solución:
La adjunta de una matriz se obtiene calculando la matriz de cofactores y transponiéndola. Primero calculamos los cofactores.

Para la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

los cofactores son:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0) - (2 \cdot 1) = -2,$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -[(1 \cdot 0) - (2 \cdot 4)] = 8,$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1) - (0 \cdot 4) = 1.$$

Continuamos calculando los otros cofactores:

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -[(-2 \cdot 0) - (1 \cdot 1)] = 1,$$

$$C_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0) - (1 \cdot 4) = -4,$$

$$C_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -[(0 \cdot 1) - (-2 \cdot 4)] = -(-8) = 8.$$

Finalmente, calculamos:

$$C_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 2) - (1 \cdot 0) = -4,$$

$$C_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -[(0 \cdot 2) - (1 \cdot 1)] = 1,$$

$$C_{33} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 \cdot 0) - (-2 \cdot 1) = 2.$$

La matriz de cofactores es:

$$\mathrm{Cof}(G) = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 1 & -4 & 8 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La adjunta de G es:

$$\mathrm{adj}(G) = \mathrm{Cof}(G)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

La inversa de una matriz se calcula como:

$$G^{-1} = \frac{1}{\det(G)} \cdot \mathrm{adj}(G).$$

Primero, encontramos el determinante de G:

$$\det(G) = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix},$$
$$\det(G) = 0 - (-2 \cdot (-8)) + 1 = -16 + 1 = -15.$$

La inversa de G es:

$$G^{-1} = \frac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 8 & -4 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

48. Calcula la adjunta e inversa de la siguiente matriz:

$$H = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:
Primero, encontramos la adjunta de la matriz H. La adjunta de H es la transpuesta de la matriz de cofactores de H.

1. Calculamos los cofactores:

Cofactor de H_{11}:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1) - (3 \cdot -2) = 2 + 6 = 8$$

Cofactor de H_{12}:

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -((-1 \cdot 1) - (3 \cdot 2)) = -(-1 - 6) = 7$$

Cofactor de H_{13}:

$$C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (-1 \cdot -2) - (2 \cdot 2) = 2 - 4 = -2$$

Calcula los otros cofactores de forma similar.

La matriz de cofactores completa es:

$$\text{Cofactores} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & -2 \\ -10 & -4 & 6 \\ -2 & -10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la adjunta de H es la transpuesta de esta matriz:

$$\text{Adj}(H) = \begin{pmatrix} 8 & -10 & -2 \\ 7 & -4 & -10 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

La inversa de H se calcula usando la fórmula:

$$H^{-1} = \frac{1}{\det(H)} \text{Adj}(H).$$

Primero, calculamos el determinante de H:

$$\det(H) = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

Calculamos los determinantes de 2×2:

$$\det \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1) - (3 \cdot -2) = 2 + 6 = 8$$

$$\det \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1 \cdot 1) - (3 \cdot 2) = -1 - 6 = -7$$

Entonces,

$$\det(H) = 4 \cdot 8 - 1 \cdot (-7) = 32 + 7 = 39$$

Finalmente, la inversa de H es:

$$H^{-1} = \frac{1}{39} \begin{pmatrix} 8 & -10 & -2 \\ 7 & -4 & -10 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

49. Para la matriz

$$I = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentra la adjunta y determina si la matriz tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa.

Solución:

La matriz adjunta (o adjunta) de una matriz se encuentra tomando la transpuesta de la matriz de cofactores.

Primero, calculemos los cofactores de la matriz I.

Los cofactores se calculan como sigue:

$$\text{Cofactor}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij}),$$

donde M_{ij} es la submatriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j.

Calculamos los cofactores:

$$\text{Cofactor}_{11} = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1) - (-1 \cdot 0) = 3,$$

$$\text{Cofactor}_{12} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -((1 \cdot 1) - (-1 \cdot 0)) = -1,$$

$$\text{Cofactor}_{13} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1 \cdot 0) - (3 \cdot 0) = 0,$$

$$\text{Cofactor}_{21} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -((1 \cdot 1) - (-1 \cdot 0)) = -1,$$

$$\text{Cofactor}_{22} = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1) - (-1 \cdot 0) = 3,$$

$$\text{Cofactor}_{23} = -\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -((3 \cdot 3) - (1 \cdot 1)) = -8,$$

$$\text{Cofactor}_{31} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot (-1)) - ((-1) \cdot 3) = 2,$$

$$\text{Cofactor}_{32} = -\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -((3 \cdot (-1)) - (-1 \cdot 1)) = 2,$$

$$\text{Cofactor}_{33} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (3 \cdot 3) - (1 \cdot 1) = 8.$$

La matriz de cofactores es:

$$\text{Cof}(I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -8 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

La adjunta es la transpuesta de esta matriz:

$$\text{Adj}(I) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

La matriz inversa se calcula como:

$$I^{-1} = \frac{1}{\det(I)} \cdot \text{Adj}(I).$$

Primero, calculemos el determinante de I:

$$\det(I) = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculamos:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Entonces:

$$\det(I) = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 9 - 1 = 8.$$

Finalmente:

$$I^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

50. Dada la matriz

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

encuentra su adjunta y, si es posible, su inversa.
Solución:

Para encontrar la adjunta de la matriz J, primero calculamos la matriz de cofactores y luego tomamos su transpuesta.

Primero, calculamos los cofactores:

$$\text{Cofactor}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

$$\text{Cofactor}_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) = 2$$

$$\text{Cofactor}_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$\text{Cofactor}_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = -2$$

$$\text{Cofactor}_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

$$\text{Cofactor}_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = 2$$

$$\text{Cofactor}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

$$\text{Cofactor}_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -1$$

$$\text{Cofactor}_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

Entonces, la matriz de cofactores es:

$$\text{Cof}(J) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La adjunta de J es la transpuesta de esta matriz:

$$\text{Adj}(J) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la inversa de J, necesitamos calcular el determinante de J:

$$\det(J) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det(J) = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) - 2 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + 1 \cdot (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1)$$

$$\det(J) = 1 - 2 \cdot (-2) - 1 = 1 + 4 - 1 = 4$$

La inversa de J es:

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \cdot \text{Adj}(J)$$

$$J^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$