

5 (a) 平面上の点 P の x 座標と y 座標が, 変数 θ の関数 $f(\theta) = \frac{(\theta - \pi)^2}{2\pi^2} + \frac{1}{2}$ を用いて,

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \sin \theta$$

と表されている. θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で変化したとき, 点 P が描く曲線を C とする.

点 P を $P(\theta)$ で表し, $P_1 = P(0)$, $P_2 = P\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $P_3 = P(\pi)$ とおく. 次の問い合わせに答えよ.

(1) 方程式 $\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) で与えられる橭円が点 P_1 を通る

とする. このとき, 点 P_3 がこの橭円の内部に含まれる (ただし橭円の上にない) ための必要十分条件を α のみを用いて表せ.

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする. l の方程式を求めよ.

(3) 次の条件 (i)(ii)(iii) をみたす橭円 D を考える.

(i) D の軸の 1 つは x 軸上にある.

(ii) D は点 P_1, P_2 を通る.

(iii) 点 P_2 における D の接線は l である.

このとき, 点 P_3 は橭円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ.