

1  $x > 0$  において関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2} \log \frac{x^2 + 1}{2} + \frac{1}{2}(x - 1)^2 - x^2 \log x$$

で定める。対数は自然対数である。

- (1) 導関数  $f'(x)$  が単調増加であることを示せ。
- (2)  $f(x) \geq 0$  であることを示し、 $f(x) = 0$  となる  $x$  を求めよ。
- (3) 正の実数  $p, q$  について不等式

$$\frac{p^2 + q^2}{2} \log \frac{p^2 + q^2}{2} \geq -\frac{1}{2}(p - q)^2 + \frac{p^2 \log p^2 + q^2 \log q^2}{2}$$

が成立することを示せ。