

4 連続関数 $f(x)$ は $f(0) = 1$ であり, 任意の実数 x について

$$\int_{-x}^x f(t)dt = a \sin x + b \cos x \text{ を満たしているとする}.$$

(1) 定数 a, b の値を求めよ.

(2) $g(x) = f(x) - \cos x$ とおくとき, $g(x)$ は奇関数であることを示せ.

(3) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $\int_{-x}^x \{f(t)\}^2 dt \geq \int_{-x}^x \cos^2 t dt$ を証明せよ.