

1 座標平面上に、原点  $O$ 、点  $A_0(l_0, 0)$ 、 $O$  からの距離が  $l_0$  である点  $B_0$ （この点の  $y$  座標は正の値とする）の 3 点からなる二等辺三角形  $OA_0B_0$  を考える。ここで、 $\angle A_0OB_0 = 2\theta$  とする。この二等辺三角形  $OA_0B_0$  に内接する円の中心を  $I_0$  とし、半径を  $r_0$  とする。この円に外接する台形  $A_0B_0A_1B_1'$  を考え（点  $A_1$  は辺  $OB_0$  上、点  $B_1'$  は辺  $OA_0$  上にあるものとする）、辺  $OB_0$  に関して点  $B_1'$  を対称移動した点を  $B_1$  とおく。つぎに  $\triangle OA_1B_1$  の内接円を描き、その中心を  $I_1$ 、半径を  $r_1$  とする。同様の作業を  $n$  回繰り返してできる  $\triangle OA_nB_n$  およびその内接円（中心を  $I_n$ 、半径を  $r_n$  とする）を考える（下図参照）。ここで、辺  $OA_n$  の長さを  $l_n$  とする。つぎの各間に答えよ。

- (1)  $r_0$  を  $l_0$  および  $\theta$  を用いて表せ。
- (2)  $l_n$  を  $l_0$ 、 $\theta$  および  $n$  を用いて表せ。
- (3) 点  $A_n$  の座標  $(x_n, y_n)$  を  $l_0$ 、 $\theta$  および  $n$  を用いて表せ。
- (4)  $\triangle OA_nB_n$  の内接円の面積  $S_n$  を  $l_0$ 、 $\theta$  および  $n$  を用いて表せ。
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n S_i$  を  $l_0$  および  $\theta$  を用いて表せ。