

3 座標平面上において，点  $P$  と点  $Q$  は時刻 0 から  $\pi$  まで，次の条件にしたがって動く．

点  $P$  は点  $A(-1, 0)$  を出発し，原点  $O$  を中心とする半径 1 の円周上を時計回りに動く．ただし，時刻  $t$  で  $P$  は  $\angle POA = t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) をみたす．点  $P$  を通り  $x$  軸に垂直な直線が直線  $y = -1$  と交わる点を  $H$  とする．

点  $Q$  は  $P$  の回りを反時計回りに

$$PQ = t \quad (0 \leq t \leq \pi) \quad \text{および} \quad \angle HPQ = t \quad (0 < t \leq \pi)$$

をみたすように動く．時刻  $\pi$  における  $Q$  の位置を  $B$  とする．次の問いに答えよ．

- (1) 時刻  $t$  における  $Q$  の座標を  $(x, y)$  とする． $x$  と  $y$  を  $t$  で表し， $y$  は  $t$  について単調に増加することを示せ．
- (2) 時刻  $\frac{j\pi}{6}$  と  $\frac{(j+1)\pi}{6}$  の間で  $Q$  の  $x$  座標が最大値をとるように整数  $j$  を定めよ．
- (3) 点  $A$  を通り  $y$  軸に平行な直線，点  $B$  を通り  $x$  軸に平行な直線，および  $Q$  の軌跡で囲まれた部分の面積  $S$  を求めよ．