

1 実数 x に対して, x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す. $a_m = [\sqrt{m}]$

($m = 1, 2, 3, \dots$) に対して, 数列 b_1, b_2, b_3, \dots を $b_1 = 0, k \geq 2$ のとき

$a_m < k \leq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k = m$ と定める.

次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ.

(2) すべての自然数 n に対して $\sum_{m=1}^{n^2} a_m + \sum_{k=1}^n b_k = n^3$ が成り立つことを示せ.

(3) $\sum_{m=1}^{n^2} [\sqrt{m}]$ を求めよ.