

1 以下の間に答えよ。

- (1) 実数  $x$  を変数とする関数  $f(x)$  が導関数  $f'(x)$  および第 2 次導関数  $f''(x)$  をもち、すべての  $x$  に対し  $f''(x) > 0$  をみたすとする。さらに以下の極限値  $a, b (a < b)$  が存在すると仮定する。

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = b$$

このとき、 $a < c < b$  をみたす任意の実数  $c$  に対し、関数  $g(x) = cx - f(x)$  の値を最大にする  $x = x_0$  がただひとつ存在することを示せ。

- (2) 実数  $x$  を変数とする関数

$$f(x) = \log \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

はすべての  $x$  に対し  $f''(x) > 0$  をみたすことを示せ。また、この  $f$  に対し小問 (1) の極限値  $a, b$  を求めよ。

- (3) 小問 (2) の関数  $f$  および極限値  $a, b$  を考える。 $a < c < b$  をみたす任意の実数  $c$  に対し小問 (1) の  $x_0$  および  $g(x_0)$  を  $c$  を用いて表せ。