

3  $a, b, c$  を実数の定数とし，関数

$$f_0(x) = 1,$$

$$f_1(x) = x + af_0(x),$$

$$f_2(x) = x^2 + bf_1(x) + cf_0(x)$$

を考える．相異なる  $j, k$  に対して

$$\int_{-1}^1 f_j(x) f_k(x) dx = 0$$

が成り立つとき，つぎの各間に答えよ．

(1) 定数  $a, b, c$  を求めよ．

(2)  $j = 0, 1, 2$  のそれぞれに対して

$$\int_{-1}^1 \{f_j(x)\}^2 dx$$

の値を求めよ．

(3)  $j = 0, 1, 2$  のそれぞれに対して

$$\int_{-1}^1 f_j(x) \cos(\pi x) dx$$

の値を求めよ．

(4) つぎの  $I$  の値が最小となる実数  $k_0, k_1, k_2$  の値を求めよ．さらに  $I$  の最小値を求めるよ．

$$I = \int_{-1}^1 \{\cos(\pi x) - k_0 f_0(x) - k_1 f_1(x) - k_2 f_2(x)\}^2 dx$$