

5 (c)  $n$  を 2 以上の自然数とする。数列  $\{S_n\}$  が  $S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}$  で与えられている。

- (1) 不等式  $\log(n+1) < S_n < 1 + \log n$  が成り立つことを示せ。
- (2) 一般に数列  $\{c_k\}$  に対して、 $\Delta c_k = c_{k+1} - c_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) とおく。数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  に対して、

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta b_k = a_n b_n - a_1 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} \Delta a_k$$

が成り立つことを示せ。また、 $\sum_{k=1}^{n-1} k S_k = \left( S_n - \frac{1}{2} \right) p(n)$  となる  $n$  の整式  $p(n)$  を求めよ。

- (3) 不等式  $\left| \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k S_k - \log n \right| < \frac{1}{2}$  が成り立つことを示せ。