

### 3 媒介変数 $t$ によって

$$x = \cos t, \quad y = \cos nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線を  $y = f_n(x)$  ( $-1 \leqq x \leqq 1$ ) とする。ただし,  $n$  は自然数である。

- (1)  $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$  を求めよ。
- (2)  $n \geqq 2$  のとき  $f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x)$  を示せ。
- (3)  $\cos \frac{\pi}{4n}$  は無理数であることを示せ。ただし,  $\sqrt{2}$  が無理数であることを証明なしで用いてよい。