

5 (c) 正の数 c の k 乗根 $\sqrt[k]{c}$ (k は 2 以上の整数) の近似値を求めるため

$$f(x) = x^k - c, \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (x > 0)$$

とおき、

$$\sqrt[k]{c} < a_1, \quad a_{n+1} = g(a_n), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とする。

(1) $\sqrt[k]{c} < a_n$ ならば、 $\sqrt[k]{c} < a_{n+1} < a_n$ を示せ。

(2) $k = 3$ のとき、 $\sqrt[3]{c} < a_n$ ならば、 $a_{n+1} - \sqrt[3]{c} < \frac{1}{\sqrt[3]{c}}(a_n - \sqrt[3]{c})^2$ を示せ。

(3) $k = 3, c = 2, a_1 = 1.3$ のとき、 $a_5 - \sqrt[3]{2} < \frac{1}{2^5 \cdot 10^{16}}$ を示せ。