

2 座標平面上の変換 $f : P(x, y) \rightarrow P'(x', y')$ を

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

で定める。ここで、 $0 \leq \alpha < 2\pi$ とする。初期点 P_0 を原点 O にとり、漸化式

$P_{n+1} = f(P_n)$ ($n \geq 0$) により、点列

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n), \dots$$

をつくる。次の間に答えよ。

(1) 変換 f について、 $f(U) = U$ となる点 $U(a, b)$ を求めよ。この点を変換 f の不動点という。

(2) この不動点 U について、

$$|\overrightarrow{UP_{n+1}}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{UP_n}|, \quad \angle P_n U P_{n+1} = \alpha \quad (n \geq 0)$$

を示せ。

(3) α を変化させたとき、不動点 U は円の周上を動くことを示せ。また、その円の中心と半径を求めよ。

(4) 三角形 $P_n U P_{n+1}$ ($n \geq 0$) の面積を S_n 、その総和を $S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n$ とする。 α を変化させたときの S の最大値を求めよ。