

2 つぎの各間に答えよ。ただし， i は虚数単位である。

(1) 複素数 z と共役な複素数を \bar{z} とするとき，任意の整数 n に対して，つぎの (a)，

(b) が成り立つことを示せ。ただし， $z \neq 0$ とする。

(a) $z^n + (\bar{z})^n$ は実数である。

(b) $z^n - (\bar{z})^n$ は 0 または純虚数である。

(2) θ_1, θ_2, p, q を実数とし，

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi, \quad \alpha = p + qi, \quad \beta = -p + qi$$

とするとき，つぎの各間に答えよ。ただし， $\alpha \neq 0$ とする。

(a)

$$A_n = \alpha^n \cos n\theta_1 + \beta^n \cos n\theta_2, \quad B_n = \alpha^n \sin n\theta_1 + \beta^n \sin n\theta_2$$

とするとき，任意の整数 n に対して，つぎの (i)，(ii) が成り立つことを示せ。

(i) A_n は実数である。

(ii) B_n は 0 または純虚数である。

(b) $z_1 = \cos \theta_1 + i \sin \theta_1, z_2 = \cos \theta_2 + i \sin \theta_2$ とし， $C_n = (\alpha z_1)^n + (\beta z_2)^n$ とするとき，任意の整数 n に対して C_n は実数であることを示せ。