

4 (a) 四面体  $OABC$  において、点  $G$  を

$$\overrightarrow{OG} = k(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

である点とする。また、3 点  $P, Q, R$  を、

$$\overrightarrow{OP} = p\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = q\overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{OR} = r\overrightarrow{OC} \quad (0 < p < 1, 0 < q < 1, 0 < r < 1)$$

である点とする。

- (1) 点  $G$  が四面体  $OABC$  の内部にあるとき、 $k$  の満たすべき条件を求めよ。ただし、四面体の内部とは、四面体からその表面を除いた部分をさす。
- (2) 四面体  $OABC$  と四面体  $OPQR$  の体積をそれぞれ  $V, V'$  とするとき、 $\frac{V'}{V}$  を  $p, q, r$  を用いて表せ。
- (3) 4 点  $G, P, Q, R$  が同一平面上にあるとき、 $k$  を  $p, q, r$  を用いて表せ。
- (4)  $p = 3k = \frac{1}{2}$  であって、4 点  $G, P, Q, R$  が同一平面上にあるとき、 $\frac{V'}{V}$  の最小値を求めよ。