

5 (b)

(1) e を自然対数の底とし ,

$$f(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

とおく . $0 < x < 1$ においては $0 < f(x) < x^3$ が成り立つことを示せ . また

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$
 を示せ . 必要であれば $e < 3$ を使ってよい .

(2) 関数 $g(x) = e^x$ を考える . 区間 $0 \leq x \leq 1$ を n 個の小区間に等分して , 各小区間を底辺 , 小区間の左端の点における関数 $g(x)$ の値を高さとする長方形の面積の和を K_n とする . $n \rightarrow \infty$ のとき ,

$$n^k \left| \int_0^1 g(x) dx - K_n \right|$$

が有限の値に収束するような最大の自然数 k とそのときの極限値を求めよ .