

4 数列 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ は $4a_{n+1}^3 + 3a_{n+1} - a_n = 0$
 $(n = 0, 1, 2, \dots)$ を満たすとし、 $S_n = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} a_k^3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。ただし、 $a_0 \neq 0$ とする。

(1) すべての自然数 n に対して、 $S_n = -\frac{3^n}{4}a_n + \frac{1}{4}a_0$ が成り立つことを数学的帰納法

で示せ。

(2) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (e は自然対数の底) とし、数列 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

は $a_n = f(x_n)$ を満たすとする。 x_n を x_0 で表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を x_0 で表せ。