

CPM (Critical Path Method)

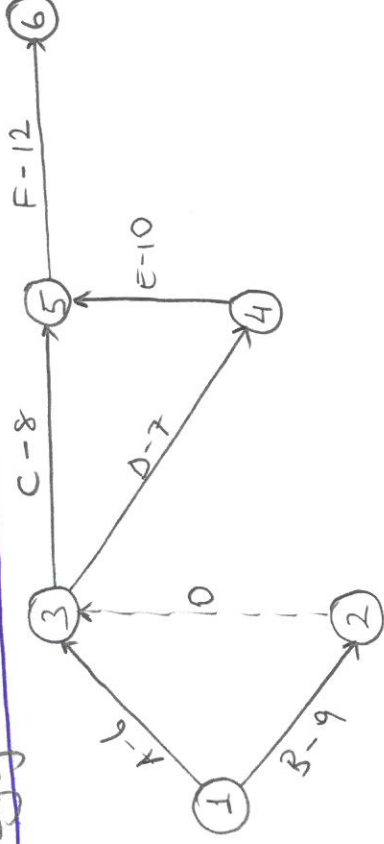
ÖRNEK: Widgetco (Winston 8.4. sy. 433)

Faaliyetler Öncül Süre (gün)

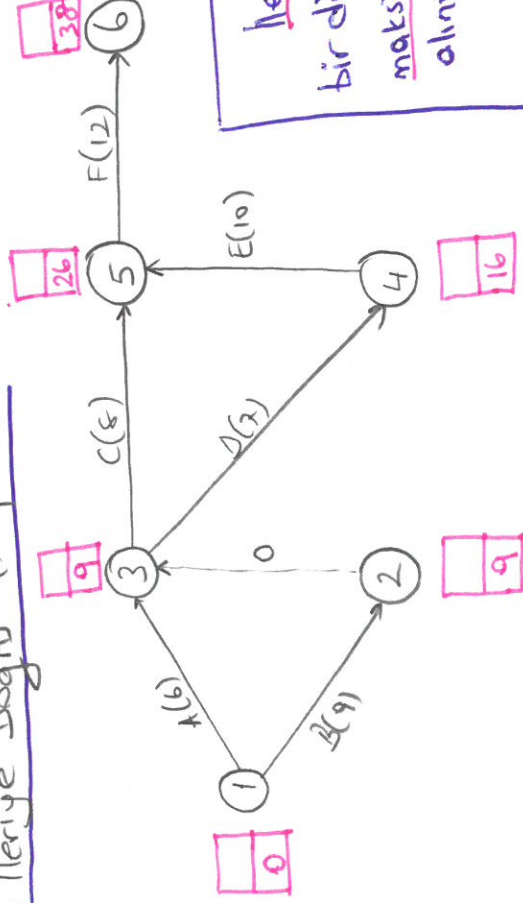
A: İşçilerin eğitimi	—	6
B: Homodelerin satın alınması	—	9
C: Ürün 1 imalatı	A, B	8
D: Ürün 2 imalatı	A, B	7
E: Ürün 2 testi	D	10
F: Ürün 1-Ürün 2 montajı	C, E	12

1. Faaliyetler
2. Faaliyetler arası ilişkiler
3. Faaliyet süreleri belirtilir.

4. Ağ Diyagramının Çizilmesi

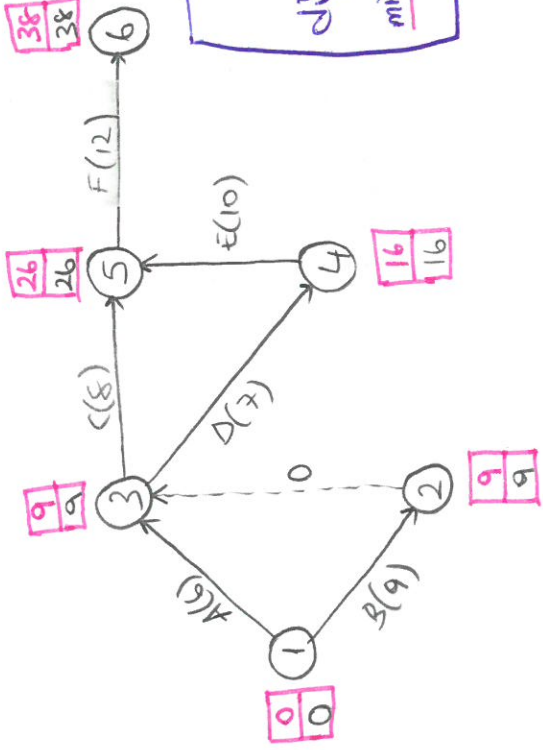


5. İleriye Doğru Hesaplama



İleriye doğru hesaplamada, bir düğüm noktasına giren okların maksimum süreleri dikkate alınır.

6. Geriye Doğru Hesaplama



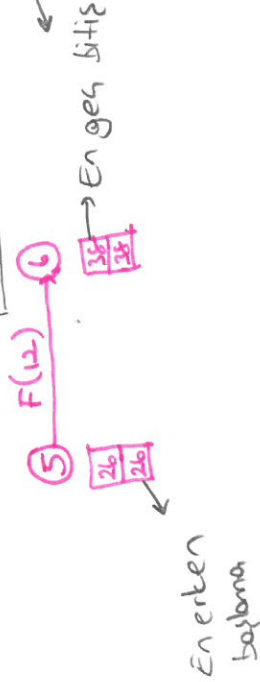
Geriye doğru hesaplamada, bir
düşüm noktasından çıkan okların
minimum süreleri dikkate alınır.

7. Gevsekliklerin Hesaplanması

- En erken bitme zamanı (Earliest Finish): $EF = ES + D_{ij}$
- En geç başlama zamanı (Latest Start): $LS = LF - D_{ij}$
- Toplam gevseklik (Total Float): $TF = LF - EF = LS - ES$
- Serbest gevseklik (Free Float): $FF = E_j - E_i - D_{ij}$

Faaliyetler	Süre	En Erken Başlama*	En Erken Bitiş	En Geç Başlama	En Geç Bitiş*	Toplam Gevseklik	Serbest Gevseklik
A	6	0	6	3	9	3	3
B	9	0	9	0	9	0	0
C	8	9	17	18	26	9	9
D	7	9	16	9	16	0	0
E	10	16	26	16	26	0	0
F	12	26	38	26	38	0	0

* Formül ile bulunabilir. Ağ diyagramında mevcuttur.



8. Gerçekliklerin Yorumlanması

Toplam Gerçekliği sıfır olan faaliyetler **kritik faaliyetler**dir.

Başlangıç düğümünden bitiş düğümüne kadar tüm kritik faaliyetleri içeren yola **kritik yol** denir.

Serbest Gerçekliği sıfırdan farklı olan faaliyetlerin ertelenmesi sonraki faaliyetlerin ertelenen süre kadar geç başlamasına yol açar. Ör. C faaliyetinin FF'si 9 gündür. Bu faaliyetin başlamasının 10 gün ertelenmesi sonraki işlerin (F faaliyetinin) 1 gün geç başlamasına sebep olur.

Bu örnekteki kritik faaliyetler B-D-E-F

kritik yol 1-2-3-4-5-6

Doğrusal Programlama Kullanımı

Kritik yolun süresini bulmak için DP kullanılabilir.

Karar değişkenleri ; x_j ; j düğümünün zamanı

Kısıtlar ; $x_j \geq x_i + t_{ij} \quad \forall (i,j) \in S$

Her (i,j) faaliyeti için j düğümünden önce geçilmesi gereken i düğümü dikkate alınmalıdır.

Amaç fonksiyonu ; $\min z = x_n - x_1$

n : Toplam düğüm sayısı

$$\min Z = x_6 - x_1$$

$$\begin{aligned} x_2 &\geq x_1 + 9 && (\text{Bağlantı } 1-2) \\ x_3 &\geq x_1 + 6 && (\text{Bağlantı } 1-3) \\ x_3 &\geq x_2 + 0 && (\text{Vapay bağlantı}) \\ x_4 &\geq x_3 + 7 && (\text{Bağlantı } 3-4) \\ x_5 &\geq x_3 + 8 && (\text{Bağlantı } 3-5) \\ x_5 &\geq x_4 + 10 && (\text{Bağlantı } 4-5) \\ x_6 &\geq x_5 + 12 && (\text{Bağlantı } 5-6) \end{aligned}$$

Tüm değişkenler u_r (unrestricted in sign)

Model Gözümü

$$Z = 38$$

Değişken	Değer	İndirgenmiş Maliyet
x_6	38	0
x_1	0	0
x_3	9	0
x_2	9	0
x_5	26	0
x_4	16	0

Satır	Gevsek/Artık Değer	Gölge Fiyat
Bağ(1,3)	3	0
Bağ(1,2)	0	-1
Bağ(3,5)	9	0
Bağ(3,4)	0	-1
Bağ(4,5)	0	-1
Bağ(5,6)	0	-1
Bağ(2,3)	0	-1

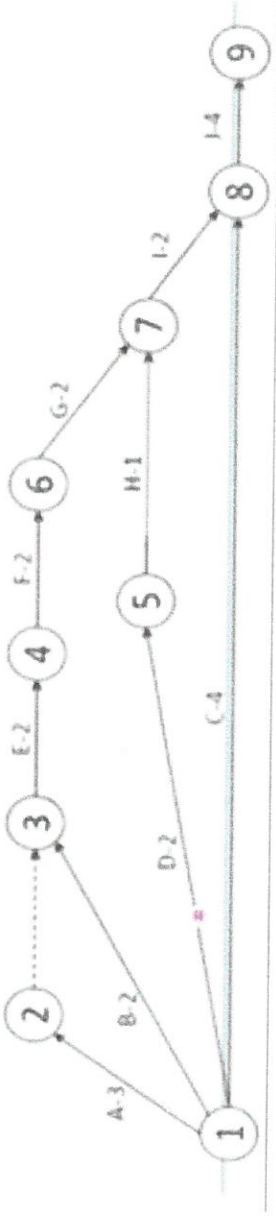
Gölge fiyatları "-1" ler kritik yolu gösterir.
 Sağ taraf değerinin (faaliyet sürdüklerin) 1 birim arttırılmasının amaç fonksiyonundaki değişimini ifade eder.

ÖRNEK 2. CPM

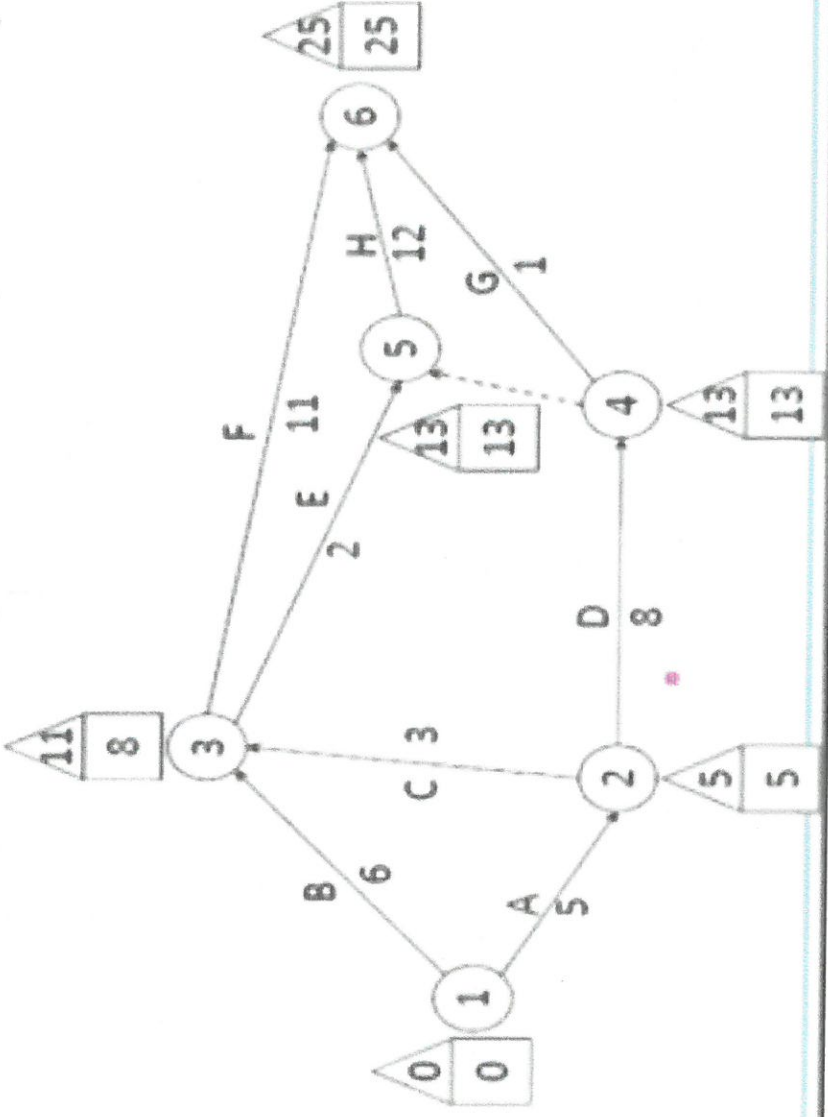
1. Faaliyetler
2. Faaliyetler arası ilişkiler
3. Faaliyet süreleri belirlenir.

Faaliyetler	Önceki Faaliyet(ler)	Süre (hafta)
A: Editörün kitap taslağında düzeltmeler yapması	-	3
B: Örnek sayfaların hazırlanması	-	2
C: Kapak tasarımı	-	4
D: Şekillerin hazırlanması	-	3
E: Yazarın taslağı ve örnek sayfaları onaylaması	A,B	2
F: Kitabın dizilmesi	E	4
G: Yazarın düzeltilmiş sayfaları kontrol etmesi	F	2
H: Yazarın şekilleri kontrol etmesi	D	1
I: Başka kâğıplarının hazırlanması	G,H	2
J: Kitabın basılması ve ciltlenmesi	C,I	4

4. Ağ diyagramı çizilir



5. İleriye ve Geriye Doğru Hesaplama



6. Gevşeklikler hesaplanır.

$$EF = ES + D_{ij}$$

$$LS = LF - D_{ij}$$

$$TF = LF - ES - D_{ij}$$

$$FF = LF - EF$$

$$FF = LF - EF$$

$$FF = LF - EF$$

Faaliyet	Süre	ES	EF	LS	LF	TF	FF
A	5	0	5	0	5	0	0
B	6	0	6	5	11	5	2
C	3	5	8	8	11	3	0
D	8	5	13	5	13	0	0
E	2	8	10	11	13	3	3
F	11	8	19	14	25	6	6
G	1	13	14	24	25	11	11
H	12	13	25	13	25	0	0
Kritik faaliyetler							

Widgetco Projesinin hızlandırılması

- ☐ Widgetco geliştirdiği ürünün rakip ürüne göre piyasaya daha önce çıkmasını istemektedir.
- ☐ Rakibini ürünü 26 gün sonra piyasa çıkacaktır. Bu yüzden Widgetco kendi ürününü 25 içinde piyasaya sürmelidir.
- ☐ Projenin bitiş süresi 38 gün olduğu için Widgetco ek harcamalar yaparak 25 günlük proje bitiş süresini sağlamalıdır.
- ☐ Widgetco herhangibir faaliyetin süresini en fazla 5 gün azaltabilir.
- ☐ Bir faaliyetin süresini bir gün düşürmenin maliyeti řu şekildedir:
 - ☐ Faaliyet A \$10
 - ☐ Faaliyet B \$20
 - ☐ Faaliyet C \$3
 - ☐ Faaliyet D \$30
 - ☐ Faaliyet E \$40
 - ☐ Faaliyet F \$50
- ☐ Projeyi 25 günde bitirmenin en düşük maliyetini bulunuz.

Karar değişkenleri

A: Faaliyet A'nın süresinden azaltılan gün sayısı

...

F: Faaliyet F'nin süresinden azaltılan gün sayısı

xj: j düşümünün zamanı

min $10A + 20B + 3C + 30D + 40E + 50F$

öyle ki; $A \leq 5$

$B \leq 5$

$C \leq 5$

$D \leq 5$

$E \leq 5$

$F \leq 5$

$x_3 \geq x_1 + 6 - A$

$x_2 \geq x_1 + 9 - B$

$x_5 \geq x_3 + 8 - C$

$x_4 \geq x_3 + 7 - D$

$x_5 \geq x_4 + 10 - E$

$x_6 \geq x_5 + 12 - F$

$x_3 \geq x_2$

$x_6 - x_1 \leq 25$

$A, B, C, D, E, F \geq 0; x_j$ urs

► DP'nin çözümü:

$z = 390, A = 2, B = 5, C = 0, D = 5, E = 3, F = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 13, x_6 = 25$

► A'yı 2, B'yi 5, D'yi 5 ve E'yi 3 gün azaltarak, proje 25 günde bitirilebilir

► Toplam maliyet \$390 olacaktır.

PERT

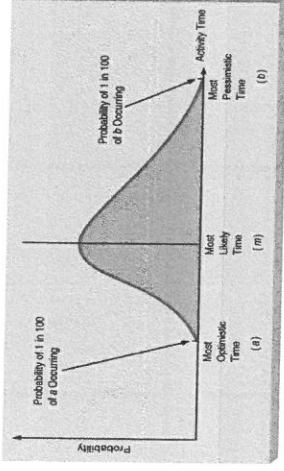
- ▶ CPM'de tüm faaliyetlerin sürelerinin net olarak bilindiği varsayılır. Bir çok projede bu geçerli değildir.
- ▶ **PERT** te ise faaliyetlerin süreleri rassal değişken olarak modellenir.
- ▶ PERT'te her faaliyet için proje yöneticileri üç değeri belirlemelidir:
 - ▶ İyimser süre (*a*)
 - ▶ Kötümser süre (*b*)
 - ▶ Sürenin en olası değeri (*m*)

PERT (Süre)

- ▶ T_{ij} : (*i,j*) faaliyetinin süresi.
- ▶ PERT T_{ij} 'nin beta dağılımına uyduğunu varsayar.
- ▶ Bu varsayım göre T_{ij} 'nin ortalaması (beklenen değeri) ve varyansı şu şekilde hesaplanabilir:
$$E(T_{ij}) = (a + 4m + b) / 6$$
$$\text{var } T_{ij} = (b - a)^2 / 36$$

9

PERT (Beta Olasılık Dağılımı)



PERT (yol)

- ▶ PERT tüm faaliyetlerin sürelerinin bağımsız olduğunu varsayar.
- ▶ Buna göre herhangi bir yoldaki faaliyetleri tamamlamanın ortalama değeri ve varyansı şu şekilde hesaplanır:

$$\sum_{(i,j) \in \text{yol}} E(T_{ij})$$

$$\sum_{(i,j) \in \text{yol}} \text{var } T_{ij}$$

10

PERT (Kritik yol)

- **CP** : CPM ile bulunan kritik yol üzerindeki faaliyetlerin toplam süresini gösteren rassal değişken
- PERT, CPM ile elde edilen kritik yolun Merkezi Limit Teoremine göre normal dağıldığını varsayar ve CP'yi şu şekilde hesaplar:

$$CP = \sum_{(i,j) \in \text{kritik yol}} T_{ij}$$

Örnek: Widgetco (belirsiz faaliyet süreleri)

- Widgetco örneğinde faaliyetler için a, b, m değerleri tablodaki gibi verilmiş olsun.

Faaliyet	a	b	m
(1,2)	5	13	9
(1,3)	2	10	6
(3,5)	3	13	8
(3,4)	1	13	7
(4,5)	8	12	10
(5,6)	9	15	12

- Projenin beklenen bitiş zamanını ve varyansını bulunuz.

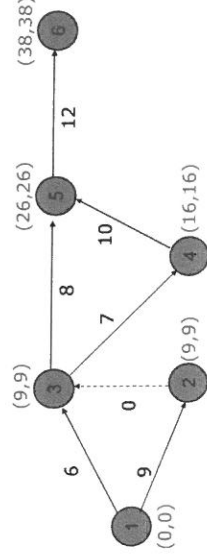
11

Örnek: Widgetco (belirsiz faaliyet süreleri)

- $E(T_{12}) = (5+13+9 \times 4)/6 = 9$, $var T_{12} = (13-5)^2/36 = 1.78$
- $E(T_{13}) = 6$, $var T_{13} = 1.78$
- $E(T_{35}) = 8$, $var T_{35} = 2.78$
- $E(T_{34}) = 7$, $var T_{34} = 4$
- $E(T_{45}) = 10$, $var T_{45} = 0.44$
- $E(T_{56}) = 12$, $var T_{56} = 1$
- $E(T_{23}) = 0$, $var T_{23} = 0$

Faaliyet	a	b	m
(1,2)	5	13	9
(1,3)	2	10	6
(3,5)	3	13	8
(3,4)	1	13	7
(4,5)	8	12	10
(5,6)	9	15	12

Örnek: Widgetco (belirsiz faaliyet süreleri)



- Kritik yol: 1-2-3-4-5-6
 $E(CP) = 9 + 0 + 7 + 10 + 12 = 38$
 $var(CP) = 1.78 + 0 + 4 + 0.44 + 1 = 7.22$
standart sapma (CP) = $(7.22)^{1/2} = 2.69$

12

Örnek: CP için olasılık analizi

- Önceki örnekteki projenin 35 gün içerisinde bitme olasılığı nedir?

ÇÖZÜM

- CP normal dağılıma uyduğu göz önüne alınırsa çözüm Z tablosu yardımı ile bulunabilir.

$$P(CP \leq 35) = P((CP - 38) / 2.69 \leq (35 - 38) / 2.69) \\ = P(Z \leq -1.12) = 0.1314$$

Tables of the Normal Distribution

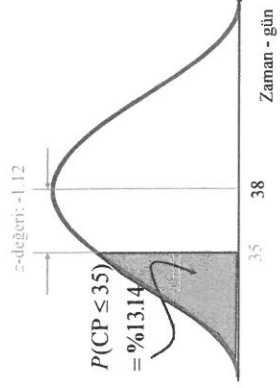
		Probability Content from -∞ to Z									
Z		0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1		0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2		0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3		0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4		0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5		0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6		0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7		0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7824	0.7854
0.8		0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9		0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0		0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1		0.8643	0.8663	0.8681	0.8699	0.8716	0.8732	0.8749	0.8764	0.8779	0.8793
1.2		0.8814	0.8830	0.8846	0.8861	0.8877	0.8891	0.8906	0.8920	0.8934	0.8947
1.3		0.8959	0.8970	0.8981	0.8992	0.8997	0.9002	0.9006	0.9010	0.9013	0.9016
1.4		0.9019	0.9022	0.9025	0.9028	0.9031	0.9034	0.9037	0.9039	0.9041	0.9043
1.5		0.9045	0.9047	0.9049	0.9051	0.9052	0.9054	0.9055	0.9056	0.9057	0.9058
1.6		0.9059	0.9060	0.9061	0.9062	0.9063	0.9064	0.9065	0.9066	0.9067	0.9068
1.7		0.9069	0.9070	0.9071	0.9072	0.9073	0.9074	0.9075	0.9076	0.9077	0.9078
1.8		0.9079	0.9080	0.9081	0.9082	0.9083	0.9084	0.9085	0.9086	0.9087	0.9088
1.9		0.9089	0.9090	0.9091	0.9092	0.9093	0.9094	0.9095	0.9096	0.9097	0.9098
2.0		0.9099	0.9100	0.9101	0.9102	0.9103	0.9104	0.9105	0.9106	0.9107	0.9108
2.1		0.9109	0.9110	0.9111	0.9112	0.9113	0.9114	0.9115	0.9116	0.9117	0.9118
2.2		0.9119	0.9120	0.9121	0.9122	0.9123	0.9124	0.9125	0.9126	0.9127	0.9128
2.3		0.9129	0.9130	0.9131	0.9132	0.9133	0.9134	0.9135	0.9136	0.9137	0.9138
2.4		0.9139	0.9140	0.9141	0.9142	0.9143	0.9144	0.9145	0.9146	0.9147	0.9148
2.5		0.9149	0.9150	0.9151	0.9152	0.9153	0.9154	0.9155	0.9156	0.9157	0.9158
2.6		0.9159	0.9160	0.9161	0.9162	0.9163	0.9164	0.9165	0.9166	0.9167	0.9168
2.7		0.9169	0.9170	0.9171	0.9172	0.9173	0.9174	0.9175	0.9176	0.9177	0.9178
2.8		0.9179	0.9180	0.9181	0.9182	0.9183	0.9184	0.9185	0.9186	0.9187	0.9188
2.9		0.9189	0.9190	0.9191	0.9192	0.9193	0.9194	0.9195	0.9196	0.9197	0.9198
3.0		0.9199	0.9200	0.9201	0.9202	0.9203	0.9204	0.9205	0.9206	0.9207	0.9208

► 50

13

Örnek: CP için olasılık analizi

- Projenin 35 gün içerisinde tamamlanma olasılığı %13.14'tür



►

PERT (Program Evaluation and Review Technique)

ÖRNEK 2 : ÖRNEK 2 SORU 1

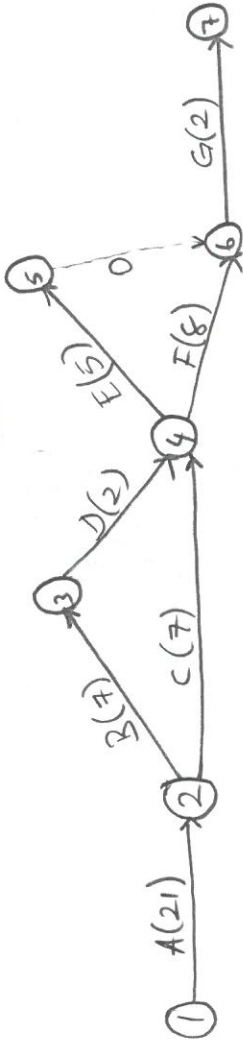
$$E(T_{ij}) = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$Var(T_{ij}) = \frac{(b-a)^2}{36}$$

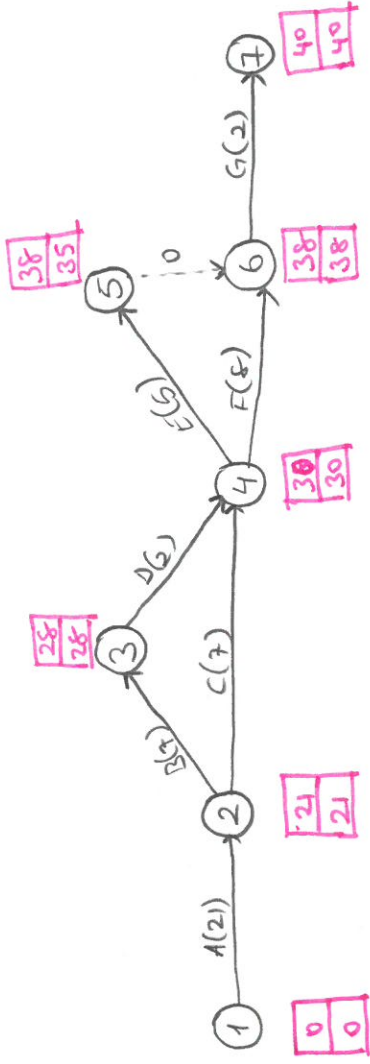
Faaliyetler	Öncül	Süreler			
		a	m	b	
A	-	10	22	28	9
B	A	4	7	10	1
C	A	4	6	14	2.78
D	B	1	2	3	0.11
E	C, D	1	5	9	1.78
F	C, D	7	8	9	0.11
G	E, F	2	2	2	0

Varyans hesabının sadece kritik faaliyetler için yapılması yeterlidir.

a) Ağ Diyagramını çizim



b) Kritik yol ve proje tamamlanma süresi



Kritik faaliyetler : A-B-D-F-G

Kritik yol : 1-2-3-5-7-8

$$E(CP) = 21 + 7 + 2 + 8 + 2 = 40$$

$$Var(CP) = 9 + 1 + 0.11 + 0 + 0 = 10.22$$

$$std. sapma(CP) = \sqrt{Var} = \sqrt{10.22} = 3.20$$

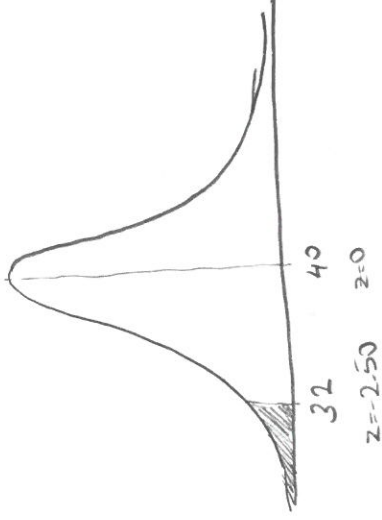
c) 32 gün ya da daha az sürede bitirme olasılığı nedir?

$$Z = \frac{\bar{x} - M}{\sigma}$$

$$P(CP \leq 32) = P\left(Z \leq \frac{32 - 40}{3.20}\right) = P(Z \leq -2.50) = 0.0062$$

%6.2 ihtimalle

32 veya daha az günde biter.

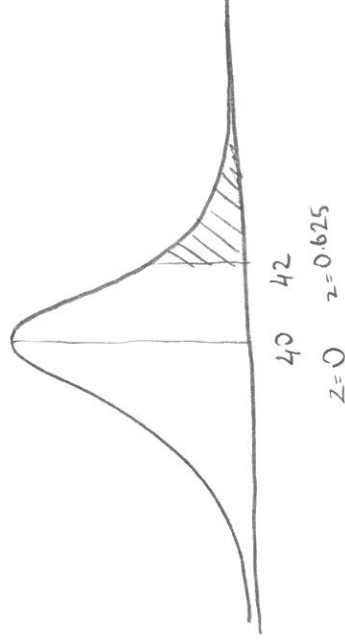


d) 42 gün veya daha fazla sürede bitirme olasılığı nedir?

$$P(CP > 42) = P\left(Z > \frac{42 - 40}{3.20}\right) = P(Z > 0.625) = 0.266$$

%26.6 ihtimalle

42 gün veya daha fazla sürede biter.



e) enK $z = 100A + 40B + 30C + 70D + 20E + 30F + 50G$

st.

$$A \leq 3$$

$$B \leq 2$$

$$C \leq 5$$

$$D \leq 1$$

$$E \leq 2$$

$$F \leq 2$$

$$G \leq 1$$

$$x_2 \geq x_1 + 21 - A \quad (\text{Bağlantı 1-2})$$

$$x_3 \geq x_2 + 7 - B \quad (\text{Bağlantı 2-3})$$

$$x_4 \geq x_2 + 7 - C \quad (\text{Bağlantı 2-4})$$

$$x_4 \geq x_3 + 2 - D \quad (\text{Bağlantı 3-4})$$

$$x_5 \geq x_4 + 5 - E \quad (\text{Bağlantı 4-5})$$

$$x_6 \geq x_4 + 8 - F \quad (\text{Bağlantı 4-6})$$

$$x_6 \geq x_5$$

$$x_7 \geq x_6 + 2 - G$$

$$x_7 - x_1 \leq 35 \quad (\text{Hedeflenen bitirme süresi})$$

$$A, B, C, D, E, F, G \geq 0$$

$$x_j \text{ urs}$$

Karar Değişkenleri:

A: Faaliyet A için atılacak süre (gün)

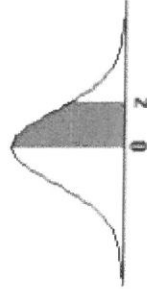
B: Faaliyet B için ~ ~

x_j : j düğümünün süresi (gün)

Tablo 5. Standart Normal Dağılım

	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Not: Tablodaki değerler (0, z) aralığındaki olasılıklardır. z > 3.09 için (0, z) aralığındaki olasılık .4999'dur.



Kaynak. Bluman, A. G. (2001). *Elementary statistics: A step by step approach* (4. basım). NY: McGraw-Hill.