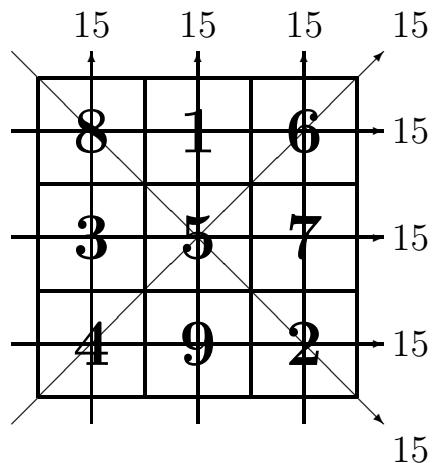


Magični kvadrati



Prirejeno iz virov:

- <http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Magic_square

Kazalo

1 Uvod

Definicija 1 Magični kvadrat reda n je nabor n^2 različnih števil, ki so razvrščena v kvadratno tabelo tako, da vedno dobimo enako vsoto, če seštejemo vsa števila poljubne vrstice, vsa števila poljubnega stolpca ali vsa števila v katerikoli od glavnih diagonal.

Primer magičnega kvadrata reda 3 je prikazan v tabeli 1.

Tabela 1: Magični kvadrat reda 3

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

Definicija 2 Magični kvadrat reda n je normalen, če v njem nastopajo števila

$$1, 2, 3, \dots, n^2 - 1, n^2 \quad (1)$$

Magični kvadrat v tabeli 1 je normalen. To je tudi najmanjši netrivialen normalen magični kvadrat. Poleg normalnih magičnih kvadratov so zanimivi tudi magični kvadrati praštevil.

2 Zgodovina

2.1 Kvadrat »Lo Shu«

Kitajska literatura iz časa vsaj 2800 let pred našim štetjem govori o legendi *Lo Shu* – »zvitek reke Lo«. V antični Kitajski je prišlo do silne poplave. Ljudje so skušali rečnemu bogu narasle reke Lo ponuditi daritev, da bi pomirili njegovo jezo. Iz vode se je prikazala želva z zanimivim vzorcem na oklepnu: v tabeli velikosti tri krat tri so bila predstavljena števila, tako da je bila vsota števil v katerikoli vrstici, kateremkoli stolpcu in na obeh glavnih diagonalah enaka: 15. To število je tudi enako številu dni v 24 ciklih kitajskega sončnega leta. Ta vzorec so na določen način uporabljali upravljalci reke.

Tabela 2: Kvadrat Lo Shu

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

2.2 Kulturna pomembnost

Magični kvadrati so fascinirali človeštvo skozi vso zgodovino. Najdemo jih v številnih kulturah, npr. v Egiptu in Indiji, vklesane v kamen ali kovino, uporabljane kot talismane za dolgo življensko dobo in v izogib boleznim.

Tabela 3: Kvadrat Kubera-Kolam

| | | |
|----|----|----|
| 23 | 28 | 21 |
| 22 | 24 | 26 |
| 27 | 20 | 25 |

Kubera-Kolam je talna poslikava, ki se uporablja v Indiji, in je v obliki magičnega kvadrata reda 3. Ta je v bistvu enak kot kvadrat Lo Shu, vendar je vsako število povečano za 19.

Z magičnimi kvadrati so se ukvarjali tudi najbolj znani matematiki kot na primer Euler, glej ???.

2.3 Zgodnji kvadrati reda 4

Najzgodnejši znani magični kvadrat reda 4 je bil odkrit na napisu v Khajurahu v Indiji in v Enciklopediji Bratovščine Čistosti iz enajstega ali dvanajstega stoletja. Vrh vsega gre celo za »panmagični kvadrat«. V Evropi sta morda najbolj znana naslednja magična kvadrata reda 4:

Magični kvadrat v litografiji Melancholia I (glej sliko ?? za izsek s kvadratom) Albrechta Dürerja naj bi bil najzgodnejši magični kvadrat v evropski umetnosti. Zelo podoben je kvadratu Yang Huija, ki je nastal na Kitajskem približno 250 let pred Dürerjevim časom.



Slika 1: Dürerjev magični kvadrat

Vsoto 34 je mogoče najti pri seštevanju števil v vsaki vrstici, vsakem stolpcu, na vsaki diagonali, v vsakem od štirih kvadrantov, v sredinskih štirih poljih, v štirih kotih, v štirih sosedih kotov v smeri urinega kazalca ($3 + 8 + 14 + 9$), v štirih sosedih kotov v nasprotni smeri urinega kazalca ($2 + 5 + 15 + 12$), v dveh naborih simetričnih parov ($2+8+9+15$ in $3+5+12+14$), in še na nekaj drugih načinov. Števili na sredini spodnje vrstici tvorita letnico litografije: 1514.

Tabela 4: Dürerjev magični kvadrat 4×4

| | | | |
|----|----|----|----|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

Pasijonska fasada na katedrali Sagrada família v Barceloni (glej sliko ?? za fotografijo) vsebuje magični kvadrat reda 4.



Slika 2: Pasijonska fasada, Sagrada Família

Vsota števil v vrsticah, stolpcih oziroma na diagonalah je 33 – Jezusova starost v času pasijona. Strukturno je kvadrat podoben Dürerjevemu, vendar so števila v štirih poljih zmanjšana za 1. Posledica je, da sta števili 10 in 14 podvojeni in zato kvadrat ni normalen.

Tabela 5: Pasijonska fasada, Sagrada Família

| | | | |
|----|----|----|----|
| 1 | 14 | 14 | 4 |
| 11 | 7 | 6 | 9 |
| 8 | 10 | 10 | 5 |
| 13 | 2 | 3 | 15 |

3 Osnovne lastnosti

Vsoto ene vrstice, enega stolpca ali ene od glavnih diagonal v magičnem kvadratu imenujemo *magična konstanta*.

Izrek 1 *Magična konstanta normalnega magičnega kvadrata reda !! je enaka*

$$M_2(n) = \frac{1}{2}n(n^2 + 1) \quad (2)$$

V normalnem magičnem kvadratu reda n je vsota vseh nastopajočih števil (glej ?? na strani ??) enaka $1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$. Ker imamo v kvadratu n vrstic z enako vsoto, je vsota števil v eni vrstici enaka številu $M_2(n)$.

Preprost račun pokaže, da je konstanti ?? analogna konstanta $M_2(n; A, D)$ za magični kvadrat, v katerem so nameščena števila $A, A + D, A + 2D, \dots$,

$A + (n^2 - 1)D$, enaka !! Kvadratu v tabeli ?? ustrezata konstanti $A = 20$ in $D = 1$.

Če vsako od števil v normalnem magičnem kvadratu reda n odštejemo od števila $n^2 + 1$, dobimo nov magični kvadrat, ki je prvotnemu *komplementaren*.

Na primer, magičnemu kvadratu Lo Shu (glej tabelo ??) priredimo komplementarni kvadrat, prikazan v tabeli ??.

Tabela 6: Kvadratu Lo Shu komplementarni kvadrat

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 1 | 8 |
| 2 | 3 | 4 |

Vidimo, da je dobljeni kvadrat moč dobiti iz kvadrata Lo Shu tudi z zasukom za 180 stopinj okrog središča, kvadrat iz tabele ?? pa je mogoče dobiti iz kvadrata Lo Shu z zrcaljenjem preko sredinske vodoravne črte.

Število različnih normalnih magičnih kvadratov

Pravimo, da sta dva magična kvadrata *različna*, če enega ni mogoče dobiti iz drugega s pomočjo zasukov oziroma zrcaljenj.

Števila različnih normalnih magičnih kvadratov se nahajajo v tabeli ??.

Tabela 7: Število različnih normalnih magičnih kvadratov

| red | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------------------|---|---|---|-----|-----------|---|
| štевilo kvadratov | 1 | 0 | 1 | 880 | 275305224 | – |

Vse normalne magične kvadrate reda 4 je oštrevilčil Frénicle de Bessy leta 1693, glej ??, in jih je moč najti v knjigi ?? iz leta 1982. Število normalnih kvadratov reda 5 je izračunal R. Schroeppel leta 1973 (glej Gardner ??). Natančno število vseh različnih normalnih magičnih kvadratov reda 6 ni znano. Avtorja navedenega približka sta Pinn in Wieczkowski (glej ?? ki sta za oceno uporabila simulacijo Monte Carlo in metode statistične mehanike).

4 Primeri

V tabelah ??, ?? in ?? so prikazani magični kvadrati redov 5, 6 in 9.

Tabela 8: Magični kvadrat reda 5

| | | | | |
|----|----|----|----|----|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |

Tabela 9: Magični kvadrat reda 6

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 6 | 32 | 3 | 34 | 35 | 1 |
| 7 | 11 | 27 | 28 | 8 | 30 |
| 19 | 14 | 16 | 15 | 23 | 24 |
| 18 | 20 | 22 | 21 | 17 | 13 |
| 25 | 29 | 10 | 9 | 26 | 12 |
| 36 | 5 | 33 | 4 | 2 | 31 |

Tabela 10: Magični kvadrat reda 9

| | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 47 | 58 | 69 | 80 | 1 | 12 | 23 | 34 | 45 |
| 57 | 68 | 79 | 9 | 11 | 22 | 33 | 44 | 46 |
| 67 | 78 | 8 | 10 | 21 | 32 | 43 | 54 | 56 |
| 77 | 7 | 18 | 20 | 31 | 42 | 53 | 55 | 66 |
| 6 | 17 | 19 | 30 | 41 | 52 | 63 | 65 | 76 |
| 16 | 27 | 29 | 40 | 51 | 62 | 64 | 75 | 5 |
| 26 | 28 | 39 | 50 | 61 | 72 | 74 | 4 | 15 |
| 36 | 38 | 49 | 60 | 71 | 73 | 3 | 14 | 25 |
| 37 | 48 | 59 | 70 | 81 | 2 | 13 | 24 | 35 |

Literatura

- [1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy, *Games in particular*, in *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, vol. 2, Academic Press, London, 1982.
- [2] B. F. de Bessy, *Des quarrez magiques*, De l'imprimerie Royale par Jean Anisson, Paris, 1693.
- [3] L. Euler, *De quadratis magicis*, *Commentationes arithmeticae*, 2 (1849), pp. 593–602.
- [4] M. Gardner, *Mathematical games*, *Scientific American*, 234 (1976), pp. 118–122.
- [5] K. Pinn and C. Wieczerkowski, *Number of magic squares from parallel tempering Monte Carlo*, *Int. J. Mod. Phys. C*, 9 (1998), pp. 541–547.