



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC**

PEDRO HENRIQUE DA ROSA SILVA

**RESOLUÇÃO DE INTEGRAIS COM SIMULAÇÕES DE MONTE  
CARLO**

Santo André  
2024

PEDRO HENRIQUE DA ROSA SILVA

# **RESOLUÇÃO DE INTEGRAIS COM SIMULAÇÕES DE MONTE CARLO**

Projeto de Pesquisa apresentado à Prof. Dra. Iseli Lourenço Nantes, como requisito para obtenção de nota parcial da disciplina de Projeto Dirigido.

**Orientador:**  
**GUSTAVO HOFMANN DE FREITAS**

Santo André

2024

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	5
2. JUSTIFICATIVA DO PROJETO .....	6
3. OBJETIVOS .....	6
3.1 Geral .....	6
3.2 Específico .....	6
4. METODOLOGIA .....	6
4.1 Revisão da Teoria .....	6
4.1.1 Definições da Teoria de Probabilidade .....	7
4.1.1.1 Variável aleatória .....	7
4.1.1.2 Valor esperado .....	8
4.1.1.3 Lei dos Grandes Números .....	8
4.1.2 Método de Monte Carlo .....	9
4.2 Desenvolvimento do código para integração unidimensional .....	9
4.3 Desenvolvimento do código para integração multidimensional .....	11
5. CRONOGRAMA .....	12
6. RESULTADOS .....	12
7. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	13
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	14
ANEXOS .....	15
A.1 Método de MC para integral unidimensional com intervalo $(a,b)$ .....	15
A.2 Método de MC para integral unidimensional com intervalo $(0, \infty)$ .....	15
A.3 Método de MC para integral multidimensional com intervalo $(0,1)$ .....	16

## RESUMO

Todos os dias eventos incertos acontecem em nossas vidas e alguns desses eventos podem ser mais problemáticos do que outros. Nas áreas da Matemática e Física encontramos as ferramentas que podem nos auxiliar na construção de previsões e, portanto, em uma melhor tomada de decisão. O método de Monte Carlo é uma dessas ferramentas que, fazendo uso da aleatoriedade dos eventos, nos retorna possíveis resultados para diferentes problemas. Neste trabalho realizamos simulações com o método de Monte Carlo para a resolução de integrais. Mostramos que esse método, mesmo com variáveis aleatórias, retorna valores muito próximos dos analíticos. Sendo assim, com o domínio do método, podemos replicar essas simulações para problemas que não possuem respostas analíticas, conhecendo apenas a teoria do problema.

**Palavras-Chave:** MONTE CARLO, CALCULUS, INTEGRALS, PROBABILITY, SIMULATIONS, STATISTICAL INFERENCE

## 1. INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade, deparamo-nos com diferentes fenômenos de natureza aleatória, probabilística ou intuitiva que refletem em nossa tomada de decisão e, portanto, em nosso cenário futuro. Contudo, em paralelo, a Matemática e a Física se desenvolvem cada vez mais, ao ponto de hoje apresentarem ferramentas que nos auxiliam na formulação de previsões para eventos incertos ou desconhecidos. “Antes de meados do século 17, além de considerações filosóficas sobre causalidade e acaso, várias investigações de problemas relativos a jogos de azar, ou, mais geralmente, a eventos sujeitos ao acaso, foram realizadas de forma esparsa.” (GADELHA, 2004, p. 2). O objetivo da Probabilidade era, a princípio, o problema da resolução de cálculos tradicionais pelas técnicas de amostragem, e, além disso, experimentos caracterizando conjuntos com infinitos pontos. Com o surgimento de números aleatórios houve a necessidade de analisarmos esses problemas por meio de um método que garanta um resultado aproximado do real. O método de Monte Carlo (MC) nos permite criar - utilizando a aleatoriedade de dados - um modelo de resultados possíveis para problemas que a priori são determinísticos. “O método de Monte Carlo foi desenvolvido em 1940 por John von Neumann, Stanislaw Ulam e Nicholas Metropolis enquanto eles trabalhavam no Projeto Manhattan no Laboratório Nacional de Los Alamos.” (ALLEN, 1995 apud LIU et al., 2022). Foi nessa situação que se designou o nome de método de Monte Carlo, em homenagem a uma conhecida cidade de cassinos, chamada Mônaco, uma vez que lá se encontram jogos com similaridades das grandes simulações estatísticas do projeto. Basicamente, iniciamos a execução do método de Monte Carlo com a determinação da população de interesse, incluindo os parâmetros (como média, desvio padrão, etc.) e possíveis comportamentos distribucionais (como Normal, Exponencial, etc.) que ela carrega. Em seguida, obtêm-se amostras aleatórias dessa população utilizando algum gerador computacional que devolva uma sequência de número aleatórios. Pode-se, em último, criar uma distribuição de frequência da estatística de interesse, ou seja, uma distribuição aleatória empírica que pode ser comparada com a distribuição aleatória teórica. Sendo assim, pode-se dizer que esse método, com a geração de observações de uma certa distribuição de probabilidades, faz uso da amostra obtida na aproximação da função de interesse. O método de Monte Carlo, através de simulações, permite a avaliação do impacto do risco em cenários variados da vida real, que vão desde inteligência artificial, preços de ações e previsão de vendas, até resultados de jogos.

## **2. JUSTIFICATIVA DO PROJETO**

O método de Monte Carlo é de grande importância dentro da Probabilidade e aplicações na vida sociedade. Pode ser utilizado em várias situações práticas e teóricas envolvendo, inclusive, problemas de outras disciplinas científicas e tecnológicas relacionadas a fenômenos aleatórios. Tal método nos permite, por exemplo, realizar cálculos de área sem o conhecimento prévio de Integral. Uma análise prática das simulações de Monte Carlo pode servir de incentivo para aplicar o método em outros problemas e áreas.

## **3. OBJETIVOS**

### **3.1 Geral**

Este projeto visa criar simulações de Monte Carlo para resultados de problemas que possuam resultados analíticos conhecidos para que se entenda a aplicabilidade do método em diferentes problemas reais e atuais.

### **3.2 Específico**

Uma ampla compreensão do método se faz necessária a princípio. Partindo disso, as simulações de Monte Carlo serão feitas em cima do desenvolvimento de códigos numéricos para resolução de integrais unidimensionais e multidimensionais com diferentes limites de integração. Havendo conhecimento das teorias de cálculo, será necessário obter a resolução analítica das integrais aplicadas nas simulações. Com esse material, será feita uma comparação entre os resultados para análise da eficiência do método e interpretação da sua usabilidade.

## **4. METODOLOGIA**

### **4.1 Revisão da Teoria**

Nessa etapa buscamos fazer um breve resumo da teoria que se acredita ser necessária para a realização das simulações.

### 4.1.1 Definições da Teoria de Probabilidade

Há cada experimento associamos um espaço amostral  $\Omega$ , cujos elementos  $E$  estão associados ao número  $P(E)$ , que satisfaz

$$0 \leq P(E) \leq 1, P(\Omega) = 1 \text{ e } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i),$$

E que é conhecido como probabilidade do evento  $E$  [4].

#### 4.1.1.1 Variável aleatória

Em cada um espaço amostral de um determinado experimento, seus elementos estão associados a um número real por função  $X$ , denominada variável aleatória. Em outras palavras, uma variável aleatória é uma função com valores numéricos, os quais são determinados por fatores de chance do experimento. Essas variáveis podem ser discretas ou contínuas.

Toda variável aleatória  $X$  é associada a uma função denominada função distribuição acumulada de  $X$ , definida por  $F(x) = P(X \leq x)$ , para um número real  $x$ .

Quando a variável aleatória  $X$  assumir um número finito de valores possíveis ou número infinito enumerável, vamos dizer que essa é uma variável aleatória discreta. De um modo geral, os valores de  $X$  pertencem ao conjunto dos inteiros de valores. Nesse caso, com  $X$  assumindo os valores  $\{x_1, x_2, \dots\}$ , podemos definir uma função de probabilidade  $p(x_i) = P(X = x_i)$ .

Já quando a variável aleatória puder assumir quaisquer valores dentro de um intervalo de números, vamos dizer que essa é uma variável aleatória contínua. Podemos dizer que elas não podem ser enumeradas (contadas). Aqui, definimos uma função de densidade de probabilidade  $f(x)$ , que descreve a verossimilhança de uma variável aleatória tomar um valor dado, e a função de distribuição acumulada será definida por

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx.$$

#### 4.1.1.2 Valor esperado

Para uma variável aleatória discreta  $X$  que assume os valores  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , define-se o valor esperado ou esperança de  $X$ , representando o valor médio "esperado" de uma experiência se ela for repetida muitas vezes, por

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

Sendo  $X$  uma variável aleatória contínua, seu valor esperado será

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

#### 4.1.1.3 Lei dos Grandes Números

Supondo  $X_1, X_2, \dots, X_n$  uma sequência de variáveis aleatórias cuja média é  $E[x] = \mu < \infty$ . Seja  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  uma variável aleatória, a Lei dos Grandes Números nos diz que sequência de médias amostrais  $S_n/n$  converge para  $\mu$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Em outras palavras, a média dos resultados de um experimento tende a se aproximar do valor esperado à medida que mais tentativas se sucedem. Então, ao realizar cada vez mais tentativas, mais a probabilidade da média dos resultados observados se aproxima da probabilidade real. Para essa lei existem diferentes versões. Teremos a versão Lei Forte dos Grandes Números quando  $X_1, X_2, \dots$ , satisfizerem

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \rightarrow 0,$$

isto é,

$$\frac{(X_1 - E(X_1)) + \dots + (X_n - E(X_n))}{n} \rightarrow 0,$$

ou também

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_n}{n}\right) = \mu\right) = 1.$$



#### 4.1.2 Método de Monte Carlo

Seja  $I$  o valor esperado de alguma variável aleatória  $X$ :

$$I = E(X),$$

o valor o qual desejamos conhecer. Sendo possível gerar novos valores de variáveis aleatórias e independentes que possuam a mesma distribuição de probabilidade de  $X$ , vamos realizar uma simulação toda vez que um novo valor for gerado [5]. Com isso, em  $n$  simulações concluídas obtemos  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Assumindo

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

como a média de  $X$ , pela Lei Forte dos Grandes Números  $\bar{X}$  pode ser usado para se estimar o valor de  $I$ , ou seja,

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = I.$$

#### 4.2 Desenvolvimento do código para integração unidimensional

Seja  $g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, suponhamos uma integral unidimensional do tipo

$$I = \int_0^1 g(x) dx$$

com  $X \in [0,1]$ . Considerando uma variável aleatória  $U$  uniformemente distribuída no intervalo  $[0,1]$ , o valor esperado de  $g(U)$  será

$$E(g(U)) = \int_0^1 g(x) f_U(x) dx = \int_0^1 g(x) dx = I$$

onde  $f_U(x)$  é uma função de densidade de probabilidades definida por

$f_U(x) = 1$ , se  $x \in [0,1]$ , e  $f_U(x) = 0$ , caso contrário.

Supondo então variáveis aleatórias uniformes independentes  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , vamos ter que todas as variáveis aleatórias  $g(U_1), g(U_2), \dots, g(U_n)$  são independentes e identicamente distribuídas com média  $I$ , isto é,

$$\int_0^1 g(x)dx = E[g(U)] \cong \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i)$$

Portanto, pela Lei Forte dos Grandes Números, temos que, com probabilidade 1,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(U_i) \rightarrow I = E[g(U)].$$

Sendo assim, vamos aproximar  $I$  ao gerar uma grande quantidade de números aleatórios  $u_i$  e considerar como aproximação o valor médio de  $g(u_i)$ .

Sabendo que os limites de integração em diferentes problemas não necessariamente são iguais a 0 e 1, podemos realizar substituições de variáveis. Para calcular a integral

$$\int_a^b g(x)dx$$

escolhemos  $y = (x - a)/(b - a)$  e  $dy = dx/(b - a)$ . Assim, obtém-se

$$I = \int_0^1 g[a + (b - a)y](b - a)dy = \int_0^1 h(y)dy,$$

onde  $h(y) = (b - a)g[a + (b - a)y]$ .

Com isso, vamos gerar números aleatórios e tomar o valor médio de  $h$ , calculado nesses números, como aproximação de  $I$ . As integrais que se enquadram nesse caso são:

$$I = \int_0^1 (2x^2 + x)dx, \int_{-2}^4 \left(\frac{x^3}{4} + x^2\right)dx \text{ e } I = \int_1^5 (x \ln x)dx$$

Já para uma integral com forma

$$I = \int_0^{\infty} g(x) dx$$

escolhemos  $y = I/(b - a)$  e  $dy = -dx/(b - a) \Rightarrow -y^2 dx$ . Nesse caso, obtém-se

$$I = \int_0^{\infty} h(y) dy$$

onde  $h(y) = \frac{g(\frac{1}{y}-1)}{y^2}$ . Aqui também vamos gerar números aleatórios  $y_i$  e tomar o valor médio de  $h_i$  como aproximação de  $I$ :

$$\hat{I} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(y_i),$$

As integrais para a análise nesse caso são:

$$\int_0^{\infty} (x^2 + 1)^{-1} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\infty} \exp(-1)^d x.$$

### 4.3 Desenvolvimento do código para integração multidimensional

Vamos aplicar o método de Monte Carlo também para o caso de integrais multidimensionais do tipo

$$J = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m,$$

onde  $f(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  é a função  $m$ -dimensional que estamos interessados e  $x_1, \dots, x_m \in [0,1]$ . Supondo variáveis aleatórias independentes e uniformes  $U_1, \dots, U_m$  distribuídas no intervalo  $[0,1]$ , temos que o valor esperado de  $f(U_1, \dots, U_m)$  é dado por

$$E[f(U_1, \dots, U_m)] = J$$

Para calcular  $J$  precisamos gerar  $k$  conjuntos independentes, cada um com  $m$  variáveis uniformes e independentes:

$$\{U_1^1, \dots, U_m^1\}; \{U_1^2, \dots, U_m^2\}; \dots; \{U_1^k, \dots, U_m^k\}.$$

Com isso, vamos aproximar a integral pela média amostral:

$$f = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(U_1^i, \dots, U_m^i),$$

onde as variáveis aleatórias  $f(U_1^i, \dots, U_m^i)$ , são independentes e identicamente distribuídas.

Para a análise desse caso, as integrais a serem utilizadas serão:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 (1 - x^3 + \sqrt{x+1}) dx dy.$$

## 5. CRONOGRAMA

Atividades	Semana/Mês				
	4ª / Jul	1ª / Ago	2ª / Ago	3ª / Ago	4ª / Ago
Revisão bibliográfica	X	X			
Simulação Integração 1D		X	X		
Simulação Integração 2D ou maior			X	X	
Organização de resultados, relatório final e defesa				X	X

## 6. RESULTADOS

Os algoritmos para simulações do método de Monte Carlo na resolução de integrais foram reproduzidos em linguagem computacional Python, devidamente descrita no Anexo A. Tanto a solução analítica das integrais, quanto os valores obtidos pelo método – para diferentes quantidades de números aleatórios  $N$  – foram registrados na Tabela 1 abaixo.

**Tabela 1:** Soluções de integrais unidimensionais e multidimensionais

Integral	Solução Analítica	Solução MC			
		$N = 10^1$	$N = 10^2$	$N = 10^3$	$N = 10^4$
$\int_0^1 (2x^2 + x)dx$	1,1667	1,2758	1,1893	1,1564	1,1668
$\int_{-2}^4 \left( \frac{x^3}{4} + x^2 \right) dx$	39	41,118	37,738	38,040	39,234
$\int_1^5 (x \ln x)dx$	14,118	13,047	14,861	14,314	14,123
$\int_0^\infty (x^2 + 1)^{-1} dx$	1,5708	1,5178	1,5762	1,5764	1,5713
$\int_0^\infty \exp(-x) dx$	1	1,035	0,961	1,004	1,0001
$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy$	0,6667	0,5973	0,6955	0,6766	0,6665
$\int_0^1 \int_0^1 (1 - x^3 + \sqrt{x+1}) dx dy$	1,9689	1,9848	1,9419	1,9778	1,969

Estudando a Tabela, concluímos que quanto maior a quantidade variáveis aleatórias utilizadas na simulação, mais próximo o resultado se torna do valor analítico. Vale ressaltar que para um mesmo valor  $N$  obtivemos diferentes resultados, isso decorre do fato de estarmos trabalhando com aleatoriedade. Apesar disso, esse método de probabilidade se mostra eficiente e útil na teoria de cálculo.

## 7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O método de Monte Carlo, um método estatístico, apresenta diferentes aplicações, sendo algumas delas na teoria de Cálculo. Aqui mostramos sua aplicabilidade na resolução de integrais, retornando valores muito próximos aos analíticos. Disso temos que, mesmo se tratando de um método baseado na aleatoriedade de uma amostra, pode trazer resultados reais e sua aplicação pode e deve estendida para outras áreas. As simulações com o método de Monte Carlo na resolução de integrais são um passo importante para entender o funcionamento e utilidade do método. Uma vez que se utiliza o método como ferramenta para obter resultados conhecidos ou teóricos, pode-se também, num passo seguinte, realizar simulações de experimentos com resultados conhecidos. Como, por exemplo, obter a melhor resposta num jogo de apostas. Tomamos essa como uma sugestão de trabalho futuro.

## **8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- 1 GADELHA, A. **Notas de Aula Teoria de Probabilidade I**: Uma pequena história da probabilidade. DME/IMU/UFRJ: Curso de Pós-Graduação em Estatística, 2004.
- 2 ALLEN, C. **Introduction to Monte Carlo Methods**. Computational Science Education Project: Free Software Foundation, 1995.
- 3 RAYCHAUDHURI, S. **Introduction to Monte Carlo Simulation**. Miami, FL, USA: IEEE, 2008.
- 4 ROSS, S. M. **Introduction to Probability Models**. 11. ed. Los Angeles, CA, USA: Academic Press, 2014.
- 5 RUBINSTEIN, R. Y; KROESE, D. P. **Simulation and the Monte Carlo Method**. 3. ed. Hoboken, NJ, USA: Wiley-Interscience, 2017.

## ANEXOS

### A.1 Método de MC para integral unidimensional com intervalo $(a, b)$

```
#bibliotecas para gerar números aleatórios
import numpy as np
import numpy.random as nrd

#qtd de números aleatórios
N = 10000

a = 1
b = 5
h_total = 0

#definindo funcao a ser integrada
def func(var):
    return(var*np.log(var))

for c in range(0,N):
    y = nrd.random() #y recebe números aleatorios entre 0 e 1
    h = (b-a)func(a + (b-a)*y)
    h_total = h_total + h

#o valor da integral da media de h
integral = h_total/N

print(integral)
```

### A.2 Método de MC para integral unidimensional com intervalo $(0, \infty)$

```
#bibliotecas para gerar números aleatórios
import numpy as np
import numpy.random as nrd

#qtd de números aleatórios
N = 10000

h_total = 0

#definindo funcao a ser integrada
def func(var):
    return(np.exp(-var))
```

```

for c in range(0,N):
    y = nrd.random() #y recebe números aleatorios entre 0 e 1
    h = (func((1/y) - 1))/(y*y)
    h_total = h_total + h

#o valor da integral da media de h
integral = h_total/N

print(integral)

```

### A.3 Método de MC para integral multidimensional com intervalo (0,1)

```

#bibliotecas para gerar números aleatórios
import numpy as np
import numpy.random as nrd

#qtd de números aleatórios
N = 10000

h_total = 0

#definindo funcao a ser integrada
def func(var1,var2):
    return(x*x + y*y)

for c in range(0,N):
    x = nrd.random() #x recebe números aleatorios entre 0 e 1
    y = nrd.random() #y recebe números aleatorios entre 0 e 1
    h = func(x,y)
    h_total = h_total + h

#o valor da integral da media de h
integral = h_total/N

print(integral)

```