Talousmatematiikkaa

Anna Kairema ja Lotta Oinonen

ekonomi
valmennus.fi

Sisältö

1 Talousmatematiikan työkaluja

1.1 Prosenttilaskentaa

Suhteellisten osuuksien ilmoittamisessa käytetään usein prosentteja. Prosentilla tarkoitetaan sadasosaa:

$$1\ \% = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Prosentti

Esimerkki 1.1.1. Luvun ilmaiseminen prosentteina ja desimaalimuodossa:

(a) $5\ \% = 0{,}05$ (b) $17\ \% = 0{,}17$ (c) $0{,}6\ \% = 0{,}006$ (d) $p\ \% = \dfrac{p}{100}$.

Prosenttilaskennassa erotetaan kaksi perustapausta:

- **Kuinka paljon on p % luvusta a?**

  Luku p % ilmaistaan desimaalimuodossa, ja sillä kerrotaan luku a:

$$\frac{p}{100} \cdot a$$

- **Kuinka monta prosenttia luku a on luvusta b?**

  Prosenttiosuus saadaan ilmaisemalla osamäärä prosentteina:

$$\frac{a}{b} \cdot 100\ \%$$

Perustapaukset

Esimerkki 1.1.2. Eri perustapauksia:

(a) Kuinka paljon on 14 % luvusta 20?
(b) Kuinka monta prosenttia luku 15 on luvusta 90?
(c) Kuinka monta prosenttia luku 90 on luvusta 15?

Ratkaisu:

(a) Ilmaistaan 14 % desimaalimuodossa 0,14 ja kerrotaan: $0{,}14 \cdot 20 = 2{,}8$.
(b) Ilmaistaan osamäärä prosentteina:

$$\frac{15}{90} \cdot 100\ \% \approx 0{,}167 \cdot 100\ \% = 16{,}7\ \%.$$

Sama lasku voidaan tehdä myös ilmaisemalla osamäärä ensin desimaalimuodossa ja sitten prosentteina: $15/90 \approx 0{,}167 = 16{,}7$ %.

(c) Ilmaistaan osamäärä prosentteina:

$$\frac{90}{15} \cdot 100\ \% = 600\ \%.$$

Sama lasku voidaan tehdä myös ilmaisemalla osamäärä ensin desimaalimuodossa ja sitten prosentteina: $90/15 = 6 = 600$ %.

Kahta lukua voidaan verrata toisiinsa myös ilmaisemalla, kuinka monta prosenttia suurempi tai pienempi toinen on toiseen verrattuna:

Vertailuprosentti

Vertailuprosentti kertoo erotuksen prosenttiosuuden perusarvosta:

- Kuinka monta prosenttia suurempi/pienempi luku b on kuin luku a?

$$\frac{|b-a|}{a} \cdot 100\ \%$$

Esimerkki 1.1.3. Vertailuprosentin laskeminen: Kaksi liikettä myy samoja juoksukenkiä. Liikkeessä A kenkien hinta on 99 € ja liikkeessä B 129 €.

(a) Kuinka monta prosenttia suurempi kenkien hinta on liikkeessä B kuin liikkeessä A?

(b) Kuinka monta prosenttia pienempi kenkien hinta on liikkeessä A kuin liikkeessä B?

Ratkaisu:

(a) Hintojen erotus euroissa on $129\text{ €} - 99\text{ €} = 30\text{ €}$. Perusarvo, johon verrataan, on nyt liikkeen A hinta 99 €. Vertailuprosentiksi saadaan

$$\frac{30\text{ €}}{99\text{ €}} \approx 0{,}303 = 30{,}3\ \%.$$

Siis hinta liikkeessä B on noin 30 % suurempi kuin liikkeessä A.

(b) Hintaero on sama kuin edellä eli 30 €. Perusarvo, johon verrataan on nyt liikkeen B hinta 129 €. Vertailuprosentiksi saadaan

$$\frac{30\text{ €}}{129\text{ €}} \approx 0{,}233 = 23{,}3\ \%.$$

Siis hinta liikkeessä A on noin 23 % pienempi kuin liikkeessä B.

Kun alkuperäinen arvo (perusarvo) muuttuu p %, uusi arvo voidaan laskea kertomalla alkuperäinen arvo **prosenttikertoimella**:

– Kun perusarvo a kasvaa p %, uusi arvo on $\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot a$.

– Kun perusarvo a pienenee p %, uusi arvo on $\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot a$.

Prosenttikerroin

Esimerkki 1.1.4. Tuotteen myyntihinta saadaan, kun arvonlisäverottomaan perushintaan lisätään arvonlisäveroa 24 %. Erään tuotteen veroton hinta on 3,80 €. Hintaan lisätään arvonlisäveroa 24 %. Prosenttikerroin on $1 + 0{,}24 = 1{,}24$. Kuluttajan maksama hinta on

$$1{,}24 \cdot 3{,}80\ € = 4{,}712\ € \approx 4{,}70\ €.$$

Myyntihinnassa on arvonlisäveroa $4{,}71\ € - 3{,}80\ € = 0{,}91\ €$ (tai $0{,}24 \cdot 3{,}80\ € \approx 0{,}91\ €$).

Esimerkki 1.1.5. Erään pörssiyhtiön osakkeen arvo oli pörssin avautuessa 13,25 €. Iltaan mennessä osakkeen arvo oli laskenut 9,1 %. Prosenttikerroin on $1 - 0{,}091 = 0{,}909$. Osakkeen uusi hinta on

$$0{,}909 \cdot 13{,}25\ € \approx 12{,}04\ €.$$

Osakkeen hinta aleni $13{,}25\ € - 12{,}04\ € = 1{,}21\ €$ (tai $0{,}091 \cdot 13{,}25\ € \approx 1{,}21\ €$).

Muutosprosentti kertoo, kuinka suuri muutos on suhteessa alkuperäiseen arvoon.

- Suureen arvo muuttui arvosta a arvoon b. Kuinka monta prosenttia se muuttui?

$$\frac{b-a}{a}\cdot 100\ \%$$

Huomaa, että muutosprosenttia laskettaessa **verrataan aina alkuperäiseen arvoon**.

Muutosprosentti

Esimerkki 1.1.6. Muutosprosentin laskeminen:

(a) Hinta nousi 15 eurosta 20 euroon. Kuinka monta prosenttia hinta nousi?

(b) Hinta laski 20 eurosta 15 euroon. Kuinka monta prosenttia hinta laski?

Ratkaisu:

(a) Muutos saadaan vähentämällä muuttuneesta arvosta alkuperäinen arvo. Muutos on siis $20\ € - 15\ € = 5\ €$. Muutosprosentti saadaan vertaamalla tätä alkuperäiseen arvoon:

$$\frac{5\ €}{15\ €}\cdot 100\ \% \approx 33{,}3\ \%.$$

Hinta siis nousi noin 33,3 %.

(b) Muutos saadaan vähentämällä muuttuneesta arvosta alkuperäinen arvo. Muutos on siis 15 €−20 € = −5 €. Muutosprosentti saadaan vertaamalla tätä alkuperäiseen arvoon:

$$\frac{-5\text{ €}}{20\text{ €}} \cdot 100\ \% = -25\ \%.$$

Hinta siis laski 25 %.

Esimerkki 1.1.7. Elinkustannusindeksi vuonna 1980 oli 651. Vuoden 2013 vastaava indeksiarvo oli 1 890. Kuinka monta prosenttia indeksi oli noussut?

Ratkaisu: Indeksin muutos saadaan vähentämällä muuttuneesta arvosta alkuperäinen arvo. Muutos on siis $1\,890 - 651 = 1\,239$. Muutosprosentti saadaan vertaamalla muutosta alkuperäiseen arvoon:

$$\frac{1\,239}{651} \cdot 100\ \% \approx 190{,}3\ \%.$$

Indeksi oli siis noussut noin 190,3 %.

Elinkustannusindeksin kasvuprosenttia kutsutaan myös inflaatioprosentiksi. Inflaatio vuodesta 1980 vuoteen 2013 oli siis noin 190 %. Inflaatiota käsitellään tarkemmin kappaleessa 3.6.

Esimerkki 1.1.8. Hintaa alennettiin 32 %, minkä jälkeen se oli 51 €. Laske alkuperäinen hinta.

Ratkaisu: Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella a. Hintaa alennettiin 32 %, joten prosenttikerroin on $1-0{,}32 = 0{,}68$ ja uusi hinta on $0{,}68a$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä a:

$$0{,}68a = 51\text{ €} \quad\Leftrightarrow\quad a = \frac{51\text{ €}}{0{,}68} = 75\text{ €}.$$

Alkuperäinen hinta oli siis 75 €.

Esimerkki 1.1.9. Tarkastellaan erään tuotteen peräkkäisiä hinnanmuutoksia.

(a) Tuotteen hinta nousi ensin 10 % ja sitten vielä 5 %. Kuinka monta prosenttia hinta kaiken kaikkiaan nousi?

(b) Tuotteen hinta nousi ensin 10 % ja laski sitten 5 %. Mihin suuntaan ja kuinka monta prosenttia hinta kaiken kaikkiaan muuttui?

Ratkaisu: Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella a (euroa).

(a) Hinta ensimmäisen hinnankorotuksen jälkeen on $1{,}10a$ (euroa). Hinta toisen korotuksen jälkeen on $1{,}05 \cdot 1{,}10a = 1{,}155a$ (euroa). Hinta nousi kaikenkaikkiaan $1{,}155a - a = 0{,}155a$ (euroa). Muutosta verrataan alkuperäiseen hintaan:

$$\frac{0{,}155a}{a} = 0{,}155 = 15{,}5\ \%.$$

Hinta siis nousi kaikenkaikkiaan 15,5 %. Muutosprosentin voi päätellä myös suoraan prosenttikertoimesta: uusi hinta on $1{,}155a$ (euroa), joten hinta on tullut 1,155-kertaiseksi, eli noussut 15,5 %.

(b) Hinta ensimmäisen hinnanmuutoksen jälkeen on $1{,}10a$ (euroa). Hinta toisen muutoksen jälkeen on $0{,}95 \cdot 1{,}10a = 1{,}045a$ (euroa). Hinta on siis tullut 1,045-kertaiseksi eli noussut 4,5 %.

Esimerkki 1.1.10. Tuotteen hintaa korotettiin p prosenttia, jolloin menekki väheni. Tämän johdosta hinta päätettiin alentaa takaisin alkuperäiseksi. Kuinka monta prosenttia korotetusta hinnasta alennus oli?

Ratkaisu: Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella a. Hinta nousi ensin p prosenttia. Uusi hinta saadaan kertomalla vastaavalla prosenttikertoimella:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a.$$

Merkatkoon x prosenttikerrointa, joka palauttaa tuotteen hinnan alkuperäiseksi. Saadaan yhtälö

$$x \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot a = a.$$

Alkuperäinen hinta a supistuu yhtälöstä pois, ja yhtälö sievenee muotoon

$$x \cdot \frac{100 + p}{100} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{100}{100 + p}.$$

Kirjain x merkitsi alennuksen prosenttikerrointa. Alennusprosentiksi saadaan

$$(1 - x) \cdot 100 \text{ \%} = \left(1 - \frac{100}{100 + p}\right) \cdot 100 \text{ \%} = \frac{100 + p - 100}{100 + p} \cdot 100 \text{ \%} = \frac{100p}{100 + p} \text{ \%}.$$

Esimerkki 1.1.11 (Valintakoe 2014: tehtävä 45)**.** Hyödykkeen hinta nousi ensin p prosenttia ja laski sitten p prosenttia. Merkitään $r = p/100$. Kokonaisuudessaan hyödykkeen uusi hinta oli alkuperäiseen verrattuna

1. sama.
2. $p/2$ prosenttia pienempi.
3. $(1 - r)^2$-kertainen.
4. $(1 - r^2)$-kertainen.

Ratkaisu: Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella a. Hinta nousi ensin p prosenttia. Vastaava prosenttikerroin on $1 + r$ ja muuttunut hinta on $(1 + r)a$. Hinta laski sitten p prosenttia. Vastaava prosenttikerroin on $1 - r$ ja uusi hinta on $(1 - r) \cdot (1 + r)a$. Kertomalla sulut auki huomataan, että $(1 - r) \cdot (1 + r) = 1 - r^2$. Uusi hinta on siis $(1 - r^2)a$, joten se on alkuperäiseen verrattuna $(1 - r^2)$-kertainen. Oikea vastaus on siis vaihtoehto 4.

Muutos voidaan ilmaista myös prosenttiyksikköinä:

Prosenttiyksikkö on yksikkö, joka ilmaisee prosenttilukujen absoluuttisen eron. Prosenttiyksikkö-sanaa käytetään vain verrattaessa prosenttilukuja keskenään.

Prosenttiyksikkö

Esimerkki 1.1.12. Vuonna 2015 kunnallisveroprosentti on Espoossa 18,0 ja Kirkkonummella 19,5. Kuinka paljon enemmän veronmaksaja maksaa kunnallisveroa Kirkkonummella kuin Espoossa?

Ratkaisu: Kirkkonummen kunnallisveroprosentti, 19,5 %, on 1,5 prosenttiyksikköä suurempi kuin Espoon kunnallisveroprosentti, 18,0 %.

Kunnallisverojen ero voidaan ilmaista myös prosentteina. Kun veronmaksajan verotettava tulo on a euroa, kunnallisveron määrä on Kirkkonummella $0{,}195a$ (euroa) ja Espoossa $0{,}18a$ (euroa). Kunnallisverojen ero on $0{,}195a - 0{,}18a = 0{,}015a$ (euroa). Eroa verrataan Espoon kunnallisveroon:

$$\frac{0{,}015a}{0{,}18a} \approx 0{,}083 = 8{,}3\ \%.$$

Veronmaksaja maksaa kunnallisveroa Kirkkonummella 8,3 % enemmän kuin Espoossa.

Esimerkki 1.1.13. Asuntolainan vuosikorko on 3,80 %. Kilpaileva pankki tarjoaa vuosikoroksi 3,50 %. Laske kuinka monta prosenttia edullisempi kilpailevan pankin korko on oman pankkisi korkoon verrattuna.

Ratkaisu: Vuosikorkojen ero on $3{,}80 - 3{,}50 = 0{,}30$ prosenttiyksikköä. Eroa verrataan oman pankkisi 3,80 prosentin korkoon:

$$\frac{0{,}30}{3{,}80} \approx 0{,}078947 \approx 7{,}89\ \%.$$

Kilpailevan pankin vuosikorko on 7,89 % edullisempi oman pankkisi korkoon verrattuna.

1.2 Verrannollisuus

Suhde

Matematiikassa **suhde** tarkoittaa kahden luvun osamäärää: luvun a ja b suhde on luku

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Muuttujat a ja b ovat keskenään **suoraan verrannolliset**, jos niiden arvot muuttuvat samassa suhteessa; ts. jos arvojen suhde pysyy vakiona.

Muuttuja	a	b
Arvo tilanteessa 1:	a_1	b_1
Arvo tilanteessa 2:	a_2	b_2

Suoraan verrannollisuus

Matemaattisesti suoraan verrannollisuus voidaan ilmaista verrantoyhtälöllä. Verrantoyhtälö voidaan muodostaa kahdella tavalla:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{tai yhtäpitävästi} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Vakiona pysyvää suhdetta $k = \frac{a_1}{b_1}$ kutsutaan **verrannollisuuskertoimeksi**.

Esimerkki 1.2.1. Viidellä dollarilla saa 42 ruplaa. Kuinka monta ruplaa saa 17 dollarilla?

Ratkaisu: Merkitään kysyttyä ruplamäärää kirjaimella x ja taulukoidaan toisiaan vastaavat valuuttamäärät.

	Dollarit	Ruplat
Tilanne 1:	5	42
Tilanne 2:	17	x

Valuutat ovat suoraan verrannollisia toisiinsa nähden. Muodostetaan verrantoyhtälö:

$$\frac{5}{17} = \frac{42}{x} \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 42 \cdot 17 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{42 \cdot 17}{5} = 142{,}8.$$

Seitsemällätoista dollarilla saa siis 142,8 ruplaa.

Kääntäen verrannollisuus

Muuttujat a ja b ovat keskenään **kääntäen verrannolliset**, jos niiden arvot muuttuvat käänteisessä suhteessa; ts. jos arvojen tulo pysyy vakiona.

Muuttuja	a	b
Arvo tilanteessa 1:	a_1	b_1
Arvo tilanteessa 2:	a_2	b_2

Matemaattisesti kääntäen verrannollisuus voidaan ilmaista verrantoyhtälöllä. Verrantoyhtälö voidaan muodostaa kahdella tavalla:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1} \quad \text{tai yhtäpitävästi} \quad a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot b_2.$$

Vakiona pysyvää tuloa $k = a_1 \cdot b_1$ kutsutaan **verrannollisuuskertoimeksi**.

Esimerkki 1.2.2. Rahan ostovoima on kääntäen verrannollinen kuluttajahintaindeksin (KHI) pistelukuun. Kuinka monta prosenttia rahan ostovoima laski, kun kuluttajahintaindeksin pisteluku nousi arvosta 101,6 arvoon 109,7?

Ratkaisu: Merkitään rahan alkuperäistä ostovoimaa kirjaimella a_1 ja muuttunutta ostovoimaa kirjaimella a_2. Kirjataan vastaavat kuluttajahintaindeksin pisteluvut taulukkoon.

	Rahan ostovoima	KHI
Tilanne 1:	a_1	101,6
Tilanne 2:	a_2	109, 7

Muuttujat ovat keskenään kääntäen verrannollisia, joten verrantoyhtälöksi saadaan

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{109{,}7}{101{,}6} \quad \Leftrightarrow \quad 109{,}7a_2 = 101{,}6a_1 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = \frac{101{,}6}{109{,}7} \cdot a_1 \approx 0{,}926a_1.$$

Rahan ostovoima oli tullut 0,926-kertaiseksi, eli se laski 100 % − 92,6 % = 7,4 %. Rahan ostovoimaa käsitellään tarkemmin kappaleessa 3.7.

1.3 Lukujonoja ja summia

Aritmeettinen lukujono
Differenssi

Aritmeettisessa lukujonossa minkä tahansa kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina vakio. Tätä kahden peräkkäisen jäsenen erotusta kutsutaan jonon **differenssiksi**. Esimerkiksi lukujono 2, 5, 8, 11, 14, ... on aritmeettinen ja sen differenssi on $d = 3$. Aritmeettisen jonon n:s jäsen a_n saadaan laskettua yhtälöstä

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

missä a_1 on jonon ensimmäinen jäsen ja d on differenssi. Esimerkiksi aritmeettisen lukujonon 2,1; 1,0; −0,1; −1,2; −2,3; ... kahden peräkkäisen jäsenen erotus on $d = -1{,}1$, joten jonon sadas jäsen on

$$a_{100} = 2{,}1 + 99 \cdot (-1{,}1) = -106{,}8.$$

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa tarkoittaa summaa, jonka yhteenlaskettavat (eli termit) muodostavat aritmeettisen jonon. Toisin sanottuna aritmeettinen summa on summa, jossa kahden peräkkäisen termin erotus on aina vakio.

Aritmeettinen summa saadaan laskettua kaavalla

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä, a_1 on summan ensimmäinen termi ja a_n on summan viimeinen termi.

Geometrinen lukujono
Suhdeluku

Geometrisessa lukujonossa minkä tahansa kahden peräkkäisen jäsenen suhde (eli osamäärä) on aina vakio. Tätä kahden peräkkäisen jäsenen suhdetta kutsutaan jonon **suhdeluvuksi**. Esimerkiksi lukujono 2, 6, 18, 54, 162, ... on geometrinen ja sen suhdeluku on $q = 3$. Geometrisen jonon n:s jäsen a_n saadaan laskettua yhtälöstä

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

missä a_1 on jonon ensimmäinen jäsen ja q on suhdeluku. Esimerkiksi geometrisen lukujonon 400; −200; 100; −50; 25; ... kahden peräkkäisen jäsenen suhde on $q = -0{,}5$, joten jono kymmenes jäsen on

$$a_{10} = 400 \cdot (-0{,}5)^9 = -0{,}78125.$$

Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa (äärellistä) summaa, jonka yhteenlaskettavat (eli termit) muodostavat geometrisen jonon. Toisin sanottuna geometrinen summa on summa, jossa kahden peräkkäisen termin suhde (osamäärä) on aina vakio.

Jos suhdeluku $q \neq 1$, saadaan **geometrinen summa** laskettua kaavalla

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad (q \neq 1),$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä ja a_1 on summan ensimmäinen termi.

Geometrinen sarja

Kun geometrisen summan yhteenlaskettavien lukumäärää n kasvatetaan rajatta, saadaan **geometrinen sarja**. Sarjassa on siis äärettömän monta termiä. Geometrisella sarjalla on tietyllä ehdolla äärellinen arvo:

Jos **geometrisessa sarjassa** $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots$ suhdeluku q toteuttaa ehdon $-1 < q < 1$, niin sanotaan, että sarja **suppenee**, ja tällöin sen summa on

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \qquad (-1 < q < 1),$$

missä a_1 on sarjan ensimmäinen termi ja q on suhdeluku.

Mikäli suhdeluku q ei toteuta ehtoa $-1 < q < 1$, niin sanotaan, että sarja **hajaantuu** eikä sillä tällöin ole äärellistä arvoa.

Esimerkki 1.3.1 (Valintakoe 2014: tehtävä 48)**.** Eräs tuotantolaitos tuottaa haitallisia päästöjä tänä vuonna 27 tonnia vuodessa. Päästöjä on päätetty pienentää 5 % vuodessa. Jos oletetaan, että tuotantolaitos jatkaa toimintaansa ikuisesti, niin kuinka paljon päästöjä syntyy yhteensä tämä vuosi mukaan lukien?

Ratkaisu: Vuotuiset päästöt muodostavat lukujonon, jonka ensimmäinen termi on $a_1 = 27$ (tonnia). Päästöjä pienennetään vuosittain 5 %, mitä vastaava prosenttikerroin on $1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Seuraavan vuoden päästöt ovat siis aina 0,95-kertaisia edellisen vuoden päästöihin verrattuna. Esimerkiksi toisen vuoden päästöt ovat $a_2 = 0{,}95 \cdot a_1 = 25{,}65$ (tonnia) ja kolmannen vuoden päästöt $a_3 = 0{,}95^2 \cdot a_1 \approx 24{,}37$ (tonnia).

Päästöt muodostavat siis geometrisen jonon, missä $a_1 = 27$ ja suhdeluku on $q = 0{,}95$. Päästöjen kokonaismäärä on geometrinen sarja $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots$. Koska suhdeluku q toteuttaa ehdon $-1 < q < 1$, niin sarja suppenee ja sen summa on geometrisen sarjan summakaavan mukaan

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{27}{1-0{,}95} = 540 \text{ (tonnia)}.$$

1.4 Tehtäviä

1.1. Kiinteistöjen ja asunto-osakkeiden omistusoikeuden luovutuksesta maksetaan varainsiirtoveroa. Veron maksaa yleensä ostaja. Omakotitalon kauppahinta on 315 000 € ja siitä maksetaan varainsiirtoverona 4 %. Laske veron suuruus.

1.2. Yrittäjä korotti palvelun hintaa 11,5 %, minkä jälkeen hinta oli 52,50 €. Laske hinta ennen korotusta.

1.3. Uimahallin kävijämäärä oli heinäkuussa 16 % pienempi kuin kesäkuussa. Uimalipun hintaa nostettiin heinäkuun alussa 5 %. Laske kuinka monta prosenttia uimahallin myyntitulot muuttuivat kesäkuuhun verrattuna.

1.4. Yrityksen markkinointikulut olivat 38 000 € ja niiden osuus kaikista menoista oli 9 %. Laske, kuinka suuret yrityksen menot olivat yhteensä.

1.5. Yrityksen voitto vuonna 2012 oli 23 % liikevaihdosta. Seuraavana vuotena liikevaihto pieneni 16,3 % edellisvuodesta, ja voitto oli 3,2 % liikevaihdosta. Kumman vuoden voitto oli suurempi? Laske kuinka monta prosenttia vuoden 2013 voitto oli edellisvuoden voitosta.

1.6. Yrityksen tuotannon arvo vuonna 2011 oli 11,3 % edellisvuotta suurempi. Työntekijöiden määrä pienentyi 31 % edellisvuodesta. Työvoiman tuottavuudella tarkoitetaan tuotannon arvoa yhtä työtekijää kohden. Laske kuinka monta prosenttia yrityksen työvoiman tuottavuus oli kasvanut edellisvuodesta.

1.7. Sähköyhtiö peri kuluttajalta 6,25 snt/kWh. Sähkön hintaa laskettiin ensin 8 % ja korotettiin sitten 12 %. Laske uusi hinta. Kuinka monta prosenttia sähkön hinta muuttui?

1.8. Uuden vakuutuskauden alkaessa asiakkaan lakisääteisen liikennevakuutuksen perusmaksusta saama alennus, eli niin sanottu bonus, nousi 52 prosentista 59 prosenttiin. Samalla vakuutuksen perusmaksu nousi 12 %. Laske kuinka paljon vakuutusmaksu muuttui.

1.9. Suksipaketin hinta urheilutavaraliikkeessä A oli 12 % suurempi kuin kilpailijan liikkeessä B. Liike A päätti alentaa hintaansa 15 prosentilla, mihin kilpailija vastasi alentamalla omaa hintaansa 8 %. Laske kummasta kaupasta suksipaketin saa hinnanalennusten jälkeen edullisemmin. Kuinka monta prosenttia edullisemmin?

1.10. Kesän alennusmyynneissä rantapallon hintaa alennettiin ensin 40 % ja sitten vielä 70 %. Alennusten jälkeen pallon hinta oli 2,30 €. Laske alkuperäinen hinta. Kuinka suurella alennuksella palloa myytiin toisen hinnanalennuksen jälkeen?

1.11. (YO K13) Vuonna 2005 yksityishenkilöiden maksuhäiriöiden lukumäärä Suomessa oli 422 500, ja vuonna 2011 se oli 1 460 500.

(a) Kuinka monta prosenttia maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi tällä aikavälillä? Anna vastaus prosentin tarkkuudella.

(b) Vuonna 2011 ministeriö asetti tavoitteeksi vähentää maksuhäiriöiden määrän neljässä vuodessa takaisin vuoden 2005 tasolle. Kuinka monta prosenttia määrä vähenee vuodessa, kun vuotuinen vähenemisprosentti on sama? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

1.12. (YO S11) Osakkeen arvo laski 46 prosenttia ja nousi sitten ensiksi 15 prosenttia ja tämän jälkeen vielä 34 prosenttia.

(a) Oliko osakkeen arvo näiden muutosten jälkeen suurempi vai pienempi kuin ennen muutoksia?

(b) Kuinka monta prosenttia jälkimmäisen nousun olisi pitänyt olla, jotta olisi palattu alkuperäiseen arvoon?

1.13. (YO K01) Yrityksen liikevaihto oli vuoden toisella neljänneksellä 11 % pienempi kuin vuoden ensimmäisellä neljänneksellä. Kokonaisuudessaan yrityksen liikevaihto kyseisen puolen vuoden osalta oli 6,0 miljoonaa euroa. Kuinka suuri yrityksen liikevaihto oli vuoden ensimmäisellä neljänneksellä?

1.14. (YO K08) Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset laskivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia?

1.15. (YO K07) Piensijoittaja osti yhtiön osakkeita 1 200 eurolla. Ensimmäisenä vuonna osakkeiden kurssi laski 15,6 prosenttia, mutta seuraavana vuonna se nousi 8,1 prosenttia. Kuinka monta prosenttia osakkeiden kurssin tulisi nousta kolmantena vuonna, jotta osakkeiden arvo olisi alkuperäisen suuruinen?

1.16. (YO S08) Lentokoneen käyttökustannuksista polttoaineen osuus on 35 %. Kuinka monta prosenttia polttoaine voi kallistua, ennen kuin käyttökustannukset kasvavat 10 %? Anna vastaus promillen tarkkuudella.

1.17. (YO K07) Tuotteen myyntitulot kasvoivat edelliseen vuoteen verrattuna 5,0 % vuonna 2004 ja 3,0 % vuonna 2005. Vuonna 2003 tuotteen valmistuskustannukset olivat 91 % tavaran myyntituloista. Vuonna 2004 valmistuskustannukset olivat 7,1 % suuremmat kuin vuonna 2003, ja seuraavana vuonna ne nousivat edelleen 1,2 %. Kuinka monta prosenttia myyntitulot olivat valmistuskustannuksia suuremmat vuonna 2005?

1.18. (YO S06) Tuotteen hintaa nostettiin p %. Huonon menekin vuoksi näin saatua hintaa laskettiin myöhemmin $2p$ %, jolloin hinta oli 5,5 % halvempi kuin ennen korotusta. Muodosta yhtälö luvun p määrittämiseksi ja ratkaise p.

1.19. (YO K02) Kuinka monta prosenttia suurempi on aritmeettisen lukujonon 2, 4, 6, 8, ... 999 ensimmäisen termin summa kuin sen 888 ensimmäisen termin summa?

1.20. (YO K13) Lukujonossa (a_n) on $a_1 = 2$ ja $a_2 = \frac{12}{5}$. Määritä jonon sadan ensimmäisen termin summa, kun jono on

(a) aritmeettinen

(b) geometrinen. Anna tämän kohdan vastaus miljoonan tarkkuudella.

1.21. (YO K11) Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 10 ja toinen termi 12. Geometrisen jonon ensimmäinen termi on 2 ja suhdeluku $q = 21/20$. Monennestako termistä lähtien geometrisen jonon termi on suurempi kuin vastaava aritmeettisen jonon termi? Muodosta tarvittava epäyhtälö ja etsi sille ratkaisu kokeilemalla.

1.22. (YO K09) Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on 1, viimeinen termi on 61, ja jonon termien summa on 961. Mikä on jonon toinen termi?

1.23. (YO K06) Aritmeettisen jonon ensimmäinen termi on $\frac{3}{2}$, toinen on 7 ja viimeinen 117. Laske jonon summa.

1.24. (YO S03) Geometrisen jonon suhdeluku on 4 ja kymmenen ensimmäisen termin summa 3 844 775. Määritä jonon ensimmäinen termi. Mikä on jonon kymmenes termi?

1.25. (YO S08) Lukujonon ensimmäinen termi on 2, ja jonon kukin seuraava termi on aina 5 % suurempi kuin edellinen termi. Muodosta jonon n:nnen termin lauseke. Tutki tämän avulla, kuinka moni jonon termi on pienempi kuin 1000 miljoonaa. Laske näiden termien summa kolmen numeron tarkkuudella.

1.26. (YO K03) Lukujonon ensimmäinen termi on 4 ja viides 1. Määritä jonon toinen, kolmas, neljäs ja kymmenes termi, kun jono on a) aritmeettinen, b) geometrinen.

1.27. (YO S02) Videokameran hinta on laskenut vuosittain 12 %, ja vuonna 2000 kamera maksoi 4 200 mk. Mikä oli sen hinta kolme vuotta aiemmin vuonna 1997? Jos hintakehitys jatkuu samanlaisena, kuinka paljon kamera maksaa vuonna 2004, jolloin rahayksikkönä on euro (1 € = 5,94573 mk)?

1.28. (YO K10) Sanomalehden tilaushinta vuodeksi 2003 oli 194,26 € ja vuodeksi 2009 vastaavasti 249 € . Kuinka monen prosentin vuosittaista hinnankorotusta tämä vastaa, kun oletetaan, että prosentti on jokaisena vuonna ollut sama?

1.29. (YO S09) Vuonna 1990 Helsingissä oli 492 400 asukasta. Vuonna 2000 asukkaita oli 555 474. Kuinka monta prosenttia väkiluku oli noussut keskimäärin vuodessa? Mikä on Helsingin väkiluku vuonna 2015, jos oletetaan, että väestönkasvu jatkuu vuodesta toiseen prosentuaalisesti samansuuruisena?

1.30. (YO S13) Maalämpöpumppuja myyvän yrityksen liikevaihto kymmenkertaistui kahdessakymmenessä vuodessa. Kuinka monta prosenttia liikevaihto kasvoi vuodessa, kun vuotuinen kasvuprosentti pysyi koko ajan samana? Anna vastaus prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

1.31. (YO S97) Auto maksoi uutena 95 400 mk, ja 8 vuoden kuluttua sen arvo oli 19 000 mk. Auton arvo väheni joka vuosi p prosenttia. Määritä p.

1.32. (YO K13) Yhtiö valmistaa kännykkäkoteloita, joiden valmistuskustannukset ovat 12,30 € kappale. Tämän lisäksi yhtiön kiinteät kustannukset ovat 98 000 euroa. Koteloita myydään aluksi 17,99 eurolla, mutta viimeiset 25 % myydään varaston tyhjentämiseksi 14,00 eurolla kappale. Oletetaan, että yhtiö saa myytyä kaikki kotelot. Tehtävässä ei oteta huomioon verotusta.

(a) Muodosta lauseke, joka kuvaa yhtiön kokonaiskustannuksia koteloiden valmistusmäärän x avulla lausuttuna.

(b) Muodosta lauseke, joka kuvaa yhtiön saamaa voittoa valmistusmäärän x avulla lausuttuna.

(c) Kuinka monta koteloa yhtiön täytyy valmistaa, jotta kiinteät kustannukset saadaan katettua yllä mainitulla hinnoittelustrategialla?

2 Valuutat ja valuuttakurssit

2.1 Peruskäsitteitä

Valuutta

Valuutalla tarkoitetaan itsenäisen valtion tai alueen rahaa (tai rahayksikköä), jolla voidaan käydä sisäistä kauppaa. Euroopan unionin Euroopan talous- ja rahaliiton (EMU) jäsenmaat käyttävät samaa valuuttaa, euroalueen euroa. Euro on esimerkki yhteisvaluutasta. Suomen valuutta on euro, joka otettiin käyttöön seteleinä ja kolikoina vuonna 2002, mutta tilivaluuttana jo 1999. Aiempi Suomen valuutta oli markka. Euron valuuttatunnus on EUR ja Suomen markan FIM.

Valuuttakurssi
Epäsuora ja suora noteeraus

Valuuttakurssi ilmoittaa kahden valuutan arvon keskinäisen suhteen. **Epäsuorassa noteerauksessa** valuuttakurssi ilmaistaan vieraan valuutan määräisenä; esimerkiksi 1 EUR = 9,4882 SEK. **Suorassa noteerauksessa** valuuttakurssi ilmaistaan kotimaan valuutan määräisenä; esimerkiksi 1 SEK = 0,1054 EUR. Suomessa on virallisesti käytössä epäsuora noteeraustapa, jossa siis yhden euron arvo ilmoitetaan ulkomaan valuutan määräisenä.

Euroopan keskuspankki (EKP) julkaisee tärkeimpien euroalueen ulkopuolisten valuuttojen kurssit euroa vastaan päivittäin. Kurssit ovat euron viitteellisiä markkinakursseja, eli ne määräytyvät markkinoilla liikkuvan rahan mukaan. Suomen Pankki julkaisee kurssit heti keskuspankin jälkeen.

Perusvaluutta

Esimerkki 2.1.1. Valuuttakurssit voidaan ilmoittaa valuuttaparina ja sitä seuraavana numerona: EUR / USD 1,1915. Valuuttaparin vasemmanpuoleista valuuttaa sanotaan **perusvaluutaksi** ja oikeanpuoleiselle valuutalle käytetään englanninkielistä termiä quote currency.

Valuutta (lyhenne)	Euron arvo
Australian dollari (AUD)	1,4755
Englannin punta (GBP)	0,7827
Japanin jeni (JPY)	143,0000
Kanadan dollari (CAD)	1,4041
Norjan kruunu (NOK)	9,1075
Ruotsin kruunu (SEK)	9,4882
Sveitsin frangi (CHF)	1,2016
Tanskan kruunu (DKK)	7,4410
Thaimaan baht (THB)	39,2970
Turkin liira (TRY)	2,7869
Venäjän rupla (RUB)	70,3880
Yhdysvaltain dollari (USD)	1,1915

Taulukko 2.1: Valuuttakursseja 5.1.2015. (Suomen Pankki)

Euron kruunukurssi

Esimerkki 2.1.2. Valuuttakurssi EUR / SEK 9,4882 ilmoittaa yhden euron arvon Ruotsin kruunuissa: 1 € = 9,4882 kruunua. Tämä on esimerkki epäsuorasta noteeraustavasta: perusvaluuttana on kotimaanvaluutta. Kurssiarvoa nimitetään myös **euron kruunukurssiksi**.

Ilmoitetaan valuuttakurssi suoran noteerauksen mukaan, eli ilmoitetaan Ruotsin kruunun arvo euroina.

Oikeanpuoleiseen taulukkoon on koottu tarvittavat tiedot. Valuutat ovat suoraan verrannollisia toisiinsa nähden, joten tehtävä voidaan ratkaista verrannon avulla.

EUR	SEK
1	9,4882
x	1

Taulukoiduista tiedoista saadaan verrantoyhtälö:

$$\frac{1}{x} = \frac{9{,}4882}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{9{,}4882} \approx 0{,}10539.$$

Kruunun (euro)kurssi

Yksi Ruotsin kruunu vastaa siis 0,10539 euroa. Valuuttakurssi suoran noteerauksen mukaan on siis SEK / EUR 0,10539. Tätä kurssiarvoa nimitetään **kruunun (euro)kurssiksi**.

Suomessa valuuttaa voi vaihtaa pankeissa sekä valuutanvaihtoon erikoistuneiden yritysten toimipisteissä. Vaihtolaitokset laskevat valuutanvaihdossa käyttämänsä kurssit EKP:n keskikurssien perusteella. Valuutan vaihdossa sovelletaan tilivaluuttakurssia tai seteli- eli matkavaluuttakurssia ja käytössä ovat osto- ja myyntikurssit.

Tili- ja seteli-valuuttakurssit

Tilivaluuttakursseja käytetään yritysten maksuliikenteessä sekä kansainvälisissä maksuissa ja tilisiirtoina tapahtuvassa maksu- ja rahaliikenteessä. **Seteli- eli matkavaluuttakurssit** ovat yksityishenkilöiden käteisen rahan vaihtoon käytettäviä valuuttakursseja.

Osto- ja myyntikurssi

Keskikurssi

Valuutan vaihdossa sovelletaan joko osto- tai myyntikurssia. Se, kumpaa kurssia käytetään, määräytyy vaihtolaitoksen toiminnan mukaan: **myyntikurssia** käytetään silloin, kun vaihtolaitos myy asiakkaalle ulkomaan valuuttaa; **ostokurssia** silloin, kun vaihtolaitos ostaa ulkomaan valuuttaa. Osto- ja myyntikurssit ilmoitetaan erikseen tilisiirtoihin liittyvälle valuutanvaihdolle ja käteistä matkavaluuttaa vaihdettaessa. **Keskikurssi** on tilivaluutan osto- ja myyntikurssien keskiarvo.

Esimerkki 2.1.3. Olet lähdössä Thaimaaseen lomamatkalle. Menet Nordea pankkiin 7.2.2014 vaihtamaan euroja bahteiksi (THB). Valuuttakurssit ovat taulukossa 2.2. Laske a) kuinka paljon bahteja saat 100 eurolla, b) minkä euromäärän maksat 1 000 bahtista.

Ratkaisu: Pankki soveltaa matkavaluuttaa myydessään matkavaluutan myyntikurssia, joka on taulukon 2.2 mukaan EUR / THB 38,312 eli 1 € = 38,312 THB.

(a) Sadalla eurolla saamasi bahtimäärä on 100 € = 100 · 38,312 THB = 3831,2 THB. Saat sadalla eurolla siis 3831,2 bahtia.

	Tilivaluutta			Matkavaluutta	
	keskikurssi	myynti	osto	myynti	osto
AUD	1,5178	1,4933	1,5423	—	—
GBP	0,8314	0,8174	0,8454	0,8062	0,8566
JPY	138,79	136,29	141,29	134,38	142,89
CAD	1,5025	1,4785	1,5265	1,4584	1,5466
NOK	8,412	8,282	8,542	8,16	8,664
SEK	8,8595	8,7245	8,9945	8,597	9,122
CHF	1,2237	1,2067	1,2407	1,1859	1,2615
DKK	7,4623	7,4243	7,5003	7,2208	7,7038
THB	44,612	43,512	45,712	38,312	50,912
TRY	3,0162	2,7912	3,2412	2,7327	3,2997
RUB	47,12	44,37	49,87	42,92	51,32
USD	1,3574	1, 3384	1,3764	1,3154	1,3994

Taulukko 2.2: Nordea pankin listakurssit 07.02.2014 (epäsuora noteeraus).

(b) Merkitään bahtien hintaa kirjaimella x (euroa) ja muodostetaan verrantoyhtälö:

$$\frac{1}{x} = \frac{38{,}312}{1\,000} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1\,000}{38{,}312} \approx 26{,}10 \ (€).$$

Maksat tuhannesta bahtista siis 26,10 €.

Esimerkki 2.1.4. Laske, minkä verran maksaisit tuhannesta bahtista Forexissa, jossa myyntikurssi on kyseisenä päivänä EUR / THB 40,83. Maksat ostoksesi pankkikortilla, ja Forex perii korttimaksukuluna $0,47$ % summasta.

Ratkaisu: Merkitään bahtien hintaa kirjaimella x (euroa) ja muodostetaan verrantoyhtälö:

$$\frac{1}{x} = \frac{40{,}83}{1\,000} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1\,000}{40{,}83} \approx 24{,}492 \ (€).$$

Huomioidaan korttimaksulisä $0,47$ %, jolloin tuhannen bahtin kokonaishinnaksi tulee $1{,}0047 \cdot 24{,}492$ € $\approx 24{,}61$ €.

Esimerkki 2.1.5. Vilkaiset saman päivän aikana Forexin verkkosivuja. Siellä ilmoitetaan Thaimaan bahtin myyntikurssiksi 2,4491 (kerroin 100). Miten selität eron?

Ratkaisu: Verkkosivuilla käytetään suoraa noteerausta, joka ilmoittaa vieraan valuutan arvon (tässä sadan yksikön arvo, eli 100 bahtia) kotimaanvaluutassa: 100 baht = 2,4491 €. Kurssi saatetaan epäsuoraan noteeraukseen verrantoyhtälön avulla:

$$\frac{100}{x} = \frac{2{,}4491}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{100}{2{,}4491} \approx 40{,}83 \ (\text{bahtia}).$$

Kysymyksessä on siis sama kurssi, eli EUR / THB 40,83, mutta eri noteeraustapa.

Esimerkki 2.1.6. Teet matkan Tukholmaan. Ostat ennen matkaa pankista kruunuja 300 eurolla. Kruunun setelivaluutan myyntikurssi on 8,6310, ja kruunujen määrä pyöristetään lähimpään kymmeneen kruunuun. Matkalla teet ostoksia yhteensä 2 210 kruunun edestä. Matkan jälkeen 7.2.2014 menet Nordeaan vaihtamaan jäljelle jääneet kruunut euroiksi. Kuinka paljon euroja saat takaisinvaihdossa?

Ratkaisu: Ostit kruunuja myyntikurssilla EUR / SEK 8,6310 eli 1 € = 8,6310 SEK. Silloin

$$300 \text{ €} = 300 \cdot 8{,}6310 \text{ SEK} = 2\,589{,}30 \text{ SEK} \approx 2\,590 \text{ SEK}.$$

Matkalla kului 2 210 kruunua, joten jäljelle jäi 2 590 − 2 210 = 380 kruunua. Takaisinvaihdossa pankin ostokurssi on 9,122 (ks. taulukko 2.2). Merkitään eurojen määrää kirjaimella x ja muodostetaan verrantoyhtälö:

$$\frac{1}{x} = \frac{9{,}122}{380} \iff x = \frac{380}{9{,}122} = 41{,}657\ldots \approx 41{,}66 \text{ (€)}.$$

Saat takaisinvaihdossa 41,66 €.

Esimerkki 2.1.7. Olet muuttamassa vuodeksi Japaniin. Avaat pankissasi jenitilin, jonne siirrät 5 000 € eurotilitäsi. Laske, mikä tulee jenitilin saldoksi. Oleta, että rahaliikenne tapahtuu 7.2.2014 taulukon 2.2 valuuttakursseilla.

Ratkaisu: Pankki myy valuuttatilille talletettavan jenimäärän, joten valuuttamuunnoksessa käytetään tilivaluutan myyntikurssia EUR / JPY 136,29. Kurssin mukaan yksi euro on 136,29 jeniä, joten 5 000 euroa on $5\,000 \cdot 136{,}29 = 681\,450$ jeniä. Jenitilin saldoksi tulee 681 450 JPY.

Esimerkki 2.1.8. Suomalaisyrityksellä on ulkomaista maksuliikennettä. Oletetaan, että maksuliikenne tapahtuu taulukon 2.2 valuuttakursseilla.

(a) Yrityksellä on saatavia 32 000 CHF, jotka tulevat euromääräisenä yrityksen tilille. Käytetäänkö osto- vai myyntikurssia? Laske, kuinka suuri euromäärä yrityksen tilille tulee.

(b) Yritys maksaa 9 230 USD:n laskun pankkitililtään euroina. Käytetäänkö osto- vai myyntikurssia? Laske, kuinka paljon lasku on euroissa.

Ratkaisu: Se, käytetäänkö osto- vai myyntikurssia, määräytyy vaihtolaitoksen eli tässä tapauksessa pankin toiminnan mukaan.

(a) Pankki ostaa Sveitsin frangeina tulevan valuuttasuorituksen 32 000 CHF maksajalta ja tilittää sen euromääräisenä yrityksen tilille, joten valuuttamuunnoksessa käytetään *tilivaluutan ostokurssia*. Taulukon 2.2 mukaan kurssi on EUR / CHF 1,2407. Merkitään euromäärää kirjaimella x ja muodostetaan verrantoyhtälö:

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}2407}{32\,000} \iff x = \frac{32\,000}{1{,}2407} \approx 25\,791,89 \text{ (€)}.$$

Yrityksen tilille tulee 25 791, 89 €.

(b) Pankki myy yritykselle Yhdysvaltojen dollareina erääntyvän valuuttasumman 9 230 USD ja tilittää sen ulkomaiselle tilille, joten valuuttamuunnoksessa käytetään *tilivaluutan myyntikurssia*. Taulukon 2.2 mukaan kurssi on EUR / USD 1,3384. Merkitään euromäärää kirjaimella x ja muodostetaan verrantoyhtälö:

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}3384}{9\,230} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{9\,230}{1{,}3384} \approx 6\,896{,}29 \text{ (€)}.$$

Lasku on 6 896,29 €.

2.2 Muuttuvat valuuttakurssit ja euron arvo

Valuuttakurssit muuttuvat päivittäin. Kun kahden valuutan keskinäinen suhde muuttuu, puhutaan devalvoitumisesta ja revalvoitumisesta.

Delvalvaatio ja revalvaatio

Valuutan **devalvoitumisella** tarkoitetaan sen (ulkoisen) arvon alenemista suhteessa toiseen valuuttaan. Devalvoituminen on siis valuutan *heikkenemistä* jonkin tarkasteluajanjakson aikana. Valuutan **revalvoitumisella** tarkoitetaan sen (ulkoisen) arvon kohoamista suhteessa toiseen valuuttaan. Revalvoituminen on siis valuutan *vahvistumista* jonkin tarkasteluajanjakson aikana. Valuutan arvon muutoksen — devalvoitumisen tai revalvoitumisen — suuruus kuvataan valuutan arvon muutosprosenttina. Devalvaatio- tai revalvaatioprosenttia laskettaessa tarkasteltavan valuutan arvo pitää ilmoittaa siinä valuutassa, johon tarkasteltavaa valuuttaa verrataan.

Devalvaatio- tai Revalvaatio-prosentti

Valuutan **devalvoitumisen/revalvoitumisen suuruus**

$$= \frac{\text{valuutan arvon muutos ajanjakson aikana}}{\text{valuutan arvo ajanjakson alussa}}$$

Tarkasteltavan valuutan arvo pitää ilmoittaa siinä valuutassa, johon verrataan.

Esimerkki 2.2.1. Euron puntakurssi 31.1.2013 oli 0,85700. Vuoden kuluttua 31.1.2014 vastaava kurssi oli 0,82135.

(a) Kuinka monta prosenttia euro devalvoitui tai revalvoitui suhteessa puntaan?

(b) Kuinka monta prosenttia punta devalvoitui tai revalvoitui suhteessa euroon?

Ratkaisu: Euron puntakurssit ilmoittavat euron arvon Englannin punnissa eli kysymyksessä ovat epäsuoran noteeraustavan mukaan ilmoitetut valuuttakurssit EUR / GBP 0,85700 (vuoden 2013 tammikuu) sekä EUR / GBP 0,82135 (vuoden 2014 tammikuu).

(a) Euron arvo laski suhteessa puntaan (0,85700 £ → 0,82135 £), joten euro devalvoitui. Muutosprosentti saadaan vertaamalla euron arvon muutosta alkuperäiseen arvoon:

$$\frac{0{,}82135 \text{ £} - 0{,}85700 \text{ £}}{0{,}85700 \text{ £}} = -0{,}041598\ldots \approx -4{,}16 \text{ \%}.$$

Siis euro devalvoitui noin 4,16 % suhteessa puntaan. Huomaa, että euron arvo piti ilmoittaa punnissa, koska kysyttiin euron arvon muutosta suhteessa puntaan.

Euron devalvoitumisprosentti voidaan ratkaista myös seuraavasti: Uuden ja vanhan kurssin suhde on

$$\frac{0{,}82135 \text{ £}}{0{,}85700 \text{ £}} = 0{,}9584\ldots$$

Koska $1 - 0{,}9584\ldots \approx 0{,}0416 = 4{,}16$ %, niin euron arvo laski noin 4,16 %.

(b) Koska euron arvo laski suhteessa puntaan, niin punnan arvo puolestaan nousi suhteessa euroon. Tarkasteltava valuutta on nyt punta, ja sen arvon muutosta verrataan euroon. Revalvaatioprosentin laskemiseksi punnan arvo on ilmoitettava euroissa.

Merkitään kirjaimella x punnan arvoa euroissa tarkasteluajanjakson alussa 31.1.2013. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan punnan arvo:

$$\frac{1}{x} = \frac{0{,}85700}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{0{,}85700} \approx 1{,}16686 \text{ (€)}.$$

Merkitään kirjaimella y punnan arvoa euroissa tarkasteluajanjakson lopussa 31.1.2014. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan punnan arvo:

$$\frac{1}{y} = \frac{0{,}82135}{1} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{0{,}82135} \approx 1{,}21751 \text{ (€)}.$$

Lasketaan punnan arvon muutosprosentti:

$$\frac{1{,}21751 \text{ €} - 1{,}16686 \text{ €}}{1{,}16686 \text{ €}} = 0{,}043407\ldots \approx 4{,}34 \text{ \%}.$$

Siis punta revalvoitui noin 4,34 % suhteessa euroon.

Kuten edellä esimerkissä 2.2.1 nähtiin, kahden valuutan keskinäisen suhteen muuttuessa toinen valuutoista vahvistuu (revalvoituu) ja toinen valuutta puolestaan heikentyy (devalvoituu). **Muutosta ilmaisevat devalvoitumis- ja revalvoitumisprosentit ovat kuitenkin yleensä eri suuria.** Esimerkiksi edellä euro devalvoitui noin 4,16 % suhteessa puntaan ja punta puolestaan revalvoitui noin 4,34 % suhteessa euroon. Toisella tavalla ilmaistuna euron arvo pienentyi noin 0,9584-kertaiseksi ja punnan arvo kasvoi noin 1,0434-kertaiseksi (huomaa, että $1-0{,}0416 = 0{,}9584$ ja $1+0{,}0434 = 1{,}0434$). Nämä kertoimet ovat toistensa käänteislukuja. Tämä pätee yleisesti:

> Jos toinen valuutoista vahvistuu (heikentyy) kertoimella k,
> niin toinen valuutta heikentyy (vahvistuu) kertoimella $\dfrac{1}{k}$.

Esimerkki 2.2.2. Euron ruplakurssi 7.2.2014 oli 47,12. Mikä on uusi kurssi, jos
a) euro vahvistuu 10 % suhteessa ruplaan, b) rupla heikkee 10 % suhteessa euroon?

Ratkaisu: Euron ruplakurssi kertoo euron arvon ruplissa eli kysymyksessä on epäsuoran noteeraustavan mukaan ilmoitettu kurssi EUR / RUB 47,12.

(a) Kun euro vahvistuu 10 % suhteessa ruplaan, niin sen arvo ruplissa ilmaistuna 1,10-kertaistuu. Euron uusi arvo on siten $1{,}10 \cdot 47{,}12$ RUB $= 51{,}832$ RUB. Uusi kurssi on epäsuoran noteeraustavan mukaan ilmoitettuna EUR / RUB 51,832.

(b) Kun rupla heikkenee 10 % suhteessa euroon, niin sen arvo euroissa ilmaistuna 0,90-kertaistuu. Euron arvon vahvistumiskerroin on tämän käänteisluku:

$$\frac{1}{0{,}90} \approx 1{,}11.$$

Euron arvo ruplissa ilmaistuna siis noin 1,11-kertaistuu (eli euro revalvoituu noin 11 % suhteessa ruplaan). Euron uusi arvo ruplissa ilmaistuna on

$$\frac{1}{0{,}90} \cdot 47{,}12 \text{ RUB} = 52{,}3555\ldots \text{ RUB}.$$

Uusi kurssi on epäsuoran noteeraustavan mukaan ilmoitettuna EUR / RUB 52,356.

Esimerkki 2.2.3. Suomeen tulevien turistien kannalta euron devalvoituminen on hyvä asia: samalla määrällä ulkomaan valuuttaa saa aiempaa enemmän euroja. Devalvaatio parantaa esimerkiksi vientiteollisuuden hintakilpailukykyä ulkomailla, sillä ulkomaisten ostajien näkökulmasta suomalaisten vientituotteiden hinnat alenevat. Euron revalvoituminen puolestaan huonontaa Suomen hintakilpailukykyä ulkomailla, sillä vientituotteiden hinnat nousevat ulkomaisten ostajien kannalta, ja tuotteiden vienti ulkomaille vaikeutuu. Tuontitavaroiden hinnat puolestaan laskevat.

Esimerkki 2.2.4. Yritys tuo viiniä Etelä-Afrikasta. Euro devalvoitui 15 % suhteessa Etelä-Afrikan randiin (ZAR). Kuinka monta prosenttia, ja mihin suuntaan, muuttui Suomessa myytävän viinipullon hinta?

Ratkaisu: Euron heikkenee 15 % suhteessa randiin eli sen arvo randeissa ilmoitettuna 0,85-kertaistuu. Randi vastaavasti vahvistuu. Randin vahvistumiskerroin on heikkenemiskertoimen 0,85 käänteisluku:

$$\frac{1}{0{,}85} \approx 1{,}176.$$

Siis randin arvo euroissa ilmoitettuna noin 1,176-kertaistuu. Tämä tarkoittaa suomalaisen ostajan kannalta sitä, että Etelä-Afrikasta tuodut tuotteet kallistuvat noin 17,6 %.

Toisella tavalla tehtävän voi ratkaista seuraavasti: Merkitään euron randikurssia ennen devalvaatiota kirjaimella a, toisin sanottuna EUR / ZAR a. Euro heikkeni 15 % suhteessa randiin, joten uusi valuuttakurssi on EUR / ZAR $0{,}85a$. Tiedot valuuttojen suhteesta ennen ja jälkeen devalvaation on koottu taulukkoon 2.3.

Viinipullon hinta Etelä-Afrikassa ei muutu. Merkitään sitä kirjaimella b (randia). Viinipullon hinta euroissa oli ennen devalvaatiota

$$b \cdot \frac{1}{a} \text{ €} = \frac{b}{a} \text{ €}$$

	Ennen devalvaatiota EUR	ZAR	Devalvaation jälkeen EUR	ZAR
Epäsuora noteeraus	1	a	1	$0{,}85a$
Suora noteeraus	$\frac{1}{a}$	1	$\frac{1}{0{,}85a}$	1

Taulukko 2.3: Esimerkin 2.2.4 valuuttojen suhteet ennen ja jälkeen devalvaation.

ja devalvaation jälkeen

$$b \cdot \frac{1}{0{,}85a} \text{ €} = \frac{b}{0{,}85a} \text{ €} = \frac{1}{0{,}85} \cdot \frac{b}{a} \text{ €} \approx 1{,}176\frac{b}{a} \text{ €}.$$

Devalvaation johdosta hinta tuli siis noin 1,176-kertaiseksi eli Suomessa myytävän viinipullon hinta nousi noin 17,6 %.

2.3 Tehtäviä

Käytä tehtävissä 2.1–2.6 taulukon 2.2 valuuttakursseja. Valuuttojen lyhenteet löydät taulukosta 2.1.

2.1. Vaihda seuraavat käteisrahat euroiksi.

(a) 4 000 SEK (b) 500 CAD (c) 15 645 DKK.

2.2. Vaihda käteisraha 420 euroa

(a) Norjan kruunuiksi (b) Tanskan kruunuiksi (c) Sveitsin frangeiksi

2.3. Kuinka paljon pitää varata euroja, jos maksaa laskun tililtä ja laskun suuruus on

(a) 500 USD (b) 380 CAD (c) 1 200 RUB?

2.4. (a) Eetu teki Tukholman matkallaan ostoksia 1 035 Ruotsin kruunulla. Hän maksoi laskut pankkikortillaan. Laske, kuinka paljon Eetun tililtä veloitetaan euroina.

(b) Fanni teki Tokion matkallaan ostoksia 70 500 jenillä. Hän maksoi laskut luottokortillaan. Laske, kuinka paljon Fannin tililtä veloitetaan euroina.

2.5. Gabriel on lähdössä matkalle Turkkiin ja varaa matkarahaa 600 euroa.

(a) Kuinka paljon Gabriel saa Turkin liiroja (TRY), jos pankin vaihtopalkkio on 10 euroa?

(b) Gabrielin matka peruuntuu ja hän vaihtaa liiransa takaisin euroiksi. Kuinka paljon Gabriel saa euroja, jos pankki perii jälleen vaihtopalkkiota 10 euroa?

2.6. Heini on lähdössä lomalle ja vaihtaa 800 euroa kohdemaan rahaksi. Kuinka paljon hän saa kohdemaan valuuttaa, jos vaihtolaitos ottaa vaihtopalkkiota 1,5 % ja Heinin kohdemaa on a) Sveitsi, b) Tanska, c) Thaimaa?

2.7. Iikka vaihtoi pankissa 250 euroa Norjan kruunuiksi. Hän sai 2163 Norjan kruunua. Pankki otti vaihtopalkkiota 5 euroa. Mikä oli Norjan kruunun myyntikurssi?

2.8. Jonatan ja Karin tulivat käymään Suomessa. Kumpikin halusi vaihtaa 2 000 Ruotsin kruunua euroiksi. Jonatan vaihtoi kruununsa euroiksi valuutanvaihtopisteessä, jossa kurssi oli EUR / SEK 9,0744 eikä vaihtopalkkiota peritty. Karin puolestaan käytti toista valuutanvaihtopistettä, joka peri 4 euron vaihtopalkkion. Mikä tulisi kruunun ostokurssin olla Karinin käyttämässä vaihtopisteessä, jotta hän saisi yhtä paljon euroja kuin Jonatan?

2.9. Taulukossa 2.4 on ilmoitettu yhden euron arvo joissakin valuutoissa (epäsuora noteeraus).

Valuutta	Tammikuu 2011	Tammikuu 2014
Australian dollari (AUD)	1,3417	1,5222
Tšekin koruna (CZK)	24,449	27,485
Sveitsin frangi (CHF)	1,2779	1,2317

Taulukko 2.4: Euron kursseja.

(a) Minkä valuuttojen suhteen euro on revalvoitunut ja minkä suhteen devalvoitunut?
(b) Mistä maista oli kannattavampaa matkustaa Suomeen vuonna 2011 kuin vuonna 2014?

2.10. Tarkastellaan taulukon 2.4 valuuttakursseja eli ajanjaksoa tammikuusta 2011 tammikuuhun 2014. Kuinka monta prosenttia

(a) Australian dollari on devalvoitunut tai revalvoitunut suhteessa euroon?
(b) euro on devalvoitunut tai revalvoitunut suhteessa Tšekin korunaan?
(c) Sveitsin frangi on devalvoitunut tai revalvoitunut suhteessa euroon?

2.11. Lukas teki kaksi matkaa Ranskaan. Ennen ensimmäistä matkaa hän vaihtoi Norjan kruunuja euroiksi ja sai sadalla Norjan kruunulla 12,79 euroa. Ennen toista matkaa Lukas sai sadalla Norjan kruunulla 11,92 euroa. Oliko euro revalvoitunut vai devaloitunut suhteessa Norjan kruunuun? Kuinka monta prosenttia?

2.12. Euron tilivaluuttakurssit 28.2.2014 olivat EUR / USD 1,4003 (osto) ja EUR / USD 1,3623 (myynti). Kesäkuussa 2003 euron arvo oli 1,1663 Yhdysvaltain dollaria (keskikurssi). Kuinka paljon Yhdysvaltain dollari heikkeni kesäkuusta 2003 helmikuuhun 2014 euroon nähden?

2.13. Maisan yritys myy tanskalaiselle yritykselle koruja 20 euron kappalehintaan. Korujen osien hinnat nousivat, joten Maisan yritys nosti korujen hintaa 4,0 %. Kuukautta myöhemmin Tanskan kruunu devalvoitui 2,1 % suhteessa euroon. Mikä oli korujen uusi hinta Tanskan kruunuina, jos kurssi ennen devalvaatiota oli EUR / DKK 7,4523?

2.14. Brasilian real devalvoitui 19 % euroon nähden. Kuinka monta prosenttia muuttui suomalaisen turistin saama realien määrä?

2.15. Kuinka monta prosenttia Filippiineiltä Suomeen tuotavien tuotteiden hinta muuttuu euroina, jos euro a) devalvoituu b) revalvoituu suhteessa Filippiinien pesoon 3,8 %?

2.16. Noel on lähdössä kiertämään pohjoismaita. Hän vaihtaa yhteensä 400 euroa Ruotsin, Norjan ja Tanskan kruunuiksi. Ruotsin kruunuja Noel saa 1 719,40 ja Norjan kruunuja 816,00. Kuinka paljon Noel saa Tanskan kruunuja? Käytä taulukon 2.2 valuuttakursseja.

2.17. Tammikuussa 2012 Olga osti Tokion matkallaan 8 443,05 jeniä maksaneen takin. Silloin valuuttakurssi oli EUR / JPY 99,33. Tammikuussa 2014 valuuttakurssi oli EUR /JPY 141,47.

(a) Kuinka paljon takki maksoi euroissa ostohetkellä vuonna 2012?

(b) Kuinka paljon takki olisi maksanut euroissa vuonna 2014, jos jenihinta olisi pysynyt samana?

(c) Mitä takin olisi pitänyt maksaa jeneissä tammikuussa 2014, jos sen eurohinta olisi pysynyt samana?

2.18. Peetun yritys sai 15 000 USD tulon tililleen.

(a) Jos tilisiirto tapahtui 7.2.2014, kuinka paljon Peetun yrityksen tilille tuli euroja? Käytä taulukkoa 2.2.

(b) Kuinka paljon euroja Peetun yrityksen tilille olisi tullut, jos yritys olisi saanut 15 000 USD jo huhtikuussa 2011, jolloin kurssi oli EUR / USD 1,4442?

2.19. (YO S00) Suomen, kuten muidenkin euromaiden, virallinen valuutta on vuoden 1999 alusta lukien ollut euro. Euromaiden ulkopuolisten valuuttojen viralliset noteeraukset lasketaan euron suhteen, ja ne ilmoittavat euron arvon kyseisinä valuuttoina. Taulukossa 2.5 on euron kurssin noteerauksia Yhdysvaltain ja Japanin valuuttoina.

	Euron kurssi (EUR)	
Ulkomaan valuuttoja	11.1.1999	12.7.1999
Yhdysvaltain dollari	1,1569 USD	1,0124 USD
Japanin jeni	126,33 JPY	123,82 JPY

Taulukko 2.5: Euron noteerauksia.

Määritä dollarin ja jenin kurssit euroina ilmoitettuina ja laske, kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan nämä kurssit ovat muuttuneet taulukon aikavälillä.

3 Indeksilaskentaa

Indeksit

Taloustieteissä **indeksit**, eli indeksisarjat, kuvaavat hinnan tai muun määrän suhteellista kehitystä ajan kuluessa johonkin valittuun perusajankohtaan nähden.

Indeksilaskennan avulla voidaan vertailla tuotteiden ja palveluiden hintoja eri aikoina. Hinta- ja kustannusindekseillä on kolme tärkeää käyttöaluetta:

- yleinen inflaatiomittaus,
- reaaliarvoisten suureiden ja muutosten laskeminen,
- indeksiin sidottujen suureiden laskeminen.

Indeksien sovelluksiin palataan tämän luvun lopussa.

3.1 Peruskäsitteitä

Indeksilaskennassa esiintyviä keskeisiä käsitteitä ovat

- **Indeksi**: suureen arvojen suhteellisia muutoksia kuvaava aikasarja.
- **Perusajankohta** eli **perusvuosi**: se ajanhetki (tyypillisesti vuosi), jonka arvoon verrataan; indeksi on aina 100 indeksipistettä.
- **Indeksipiste**: kuvaa sitä, kuinka monta prosenttia hinta tai muu arvo on perusvuoden arvoon verrattuna.
- **Kuluttajahintaindeksi**: kuvaa kotitalouksien ostamien hyödykkeiden hintakehitystä; perusvuosi vaihtelee.
- **Elinkustannusindeksi**: kuvaa yleistä hintatason kehitystä pitkällä aikavälillä; perusajankohta on pysyvästi vuoden 1951 lokakuu.
- **Inflaatio**: rahan arvon heikkeneminen ja kuluttajahintojen nousu.
- **Inflaatioprosentti**: kuluttajahintaindeksin kasvuprosentti; kuluttajahintojen vuotuinen kasvuprosentti.
- **Deflaatio**: rahan arvon vahvistuminen ja kuluttajahintojen lasku.
- **Kiinteähintaistaminen** eli **inflatointi ja deflatointi**: eri vuosien rahamäärien muuntaminen tietyn vuoden rahaksi; mahdollistaa hintavertailun.
- **Rahan ostovoima** eli **reaaliarvo**: rahasummalla saatavien hyödykkeiden määrä; kuluttajahintaindeksin avulla vertailukelpoiseksi tehty rahamäärä.
- **Nimellismuutos**: rahasummien vertailu inflaatiota huomioimatta.
- **Reaalinen muutos**: rahasummien vertailu inflaatio huomioiden.
- **Reaaliansio**: kulloiseenkin yleiseen hintatasoon suhteutettu ansio.
- **Reaalinen nettoansio**: kulloiseenkin yleiseen hintatasoon suhteutettu ansio, jossa verotus on huomioitu.

Indeksilaskennan perusidea

Perus-ajankohta **Havaintosarja** **Indeksipiste**

Indeksilaskennan perusidea on yksinkertainen: Valitaan yksi ajankohdista **perusajankohdaksi**, jonka indeksipisteeksi tulee 100. Perusajankohta voi olla esimerkiksi tarkasteluajanjakson ensimmäinen vuosi, tarkasteluvuoden tietty kuukausi tai jokin muu sovittu ajankohta. Indeksisarjan laskemiseksi tarvitaan **havaintosarja**, eli arvot (hinnat tai määrät) muina ajankohtina. Vastaavat **indeksipisteet** saadaan jakamalla havaintoarvo perusajankohdan arvolla ja kertomalla saatu suhdeluku sadalla.

Indeksisarjan laatiminen: indeksikaava

Indeksipisteet I_t ovat prosenttilukuja, jotka kirjoitetaan ilman %-merkkiä:

$$I_t = \frac{V_t}{V_0} \cdot 100.$$

Laskukaavassa V_t on havaintoarvo (arvo vertailuajankohtana), ja V_0 on perusarvo (arvo perusajankohtana). Jos

- $I_t > 100$, niin havaintoarvo on suurempi kuin perusarvo;
- $I_t < 100$, niin havaintoarvo on pienempi kuin perusarvo.

3.2 Yksinkertainen hintaindeksi

Yksinkertainen indeksisarja

Yksinkertainen indeksisarja kuvaa yhden muuttujan (yhden tuotteen tai palvelun) arvon kehitystä. Tarkastellaan esimerkkinä kevytmaidon hinnan kehitystä viiden vuoden aikana.

Esimerkki 3.2.1. Taulukossa 3.1 on ilmoitettu kevytmaidon keskimääräinen litrahinta viiden vuoden ajalta.

Vuosi	Arvo: litrahinta (€)	Hinta vuoteen 2009 verrattuna	Hinnanmuutos vuoteen 2009 verrattuna
2009	0,89	$\frac{0{,}89}{0{,}89} = 1 = 100\ \%$	
2010	0,79	$\frac{0{,}79}{0{,}89} = 0{,}8876\ldots \approx 88{,}8\ \%$	hinta laski 11,2 %
2011	0,84	$\frac{0{,}84}{0{,}89} = 0{,}9438\ldots \approx 94{,}4\ \%$	hinta laski 5,6 %
2012	0,87	$\frac{0{,}87}{0{,}89} = 0{,}9775\ldots \approx 97{,}8\ \%$	hinta laski 2,2 %
2013	1,05	$\frac{1{,}05}{0{,}89} = 1{,}1797\ldots \approx 118{,}0\ \%$	hinta nousi 18,0 %

Taulukko 3.1: Kevytmaidon keskimääräinen litrahinta. (Tilastokeskus)

Hintoja verrataan vuoden 2009 hintaan, joten vuosi 2009 on tarkastelussa perusajankohta eli perusvuosi. Tämä ilmaistaan merkinnällä 2009=100. Hintojen suhde perusvuoden hintaan (kolmas sarake) kertoo, kuinka monta prosenttia tarkasteluvuoden hinta on perusvuoden 2009 hinnasta, eli kuinka moninkertaiseksi maidon hinta on tullut perusvuoden hintaan verrattuna.

Indeksisarja saadaan, kun pelkät prosenttiluvut ilman prosenttimerkkiä kootaan taulukkoon (ks. taulukko 3.2). Indeksipisteet ilmoitetaan yleensä yhden desimaalin tarkkuudella.

Vuosi	2009	2010	2011	2012	2013
Indeksi	100,0	88,8	94,4	97,8	118,0

Taulukko 3.2: Kevytmaidon hintaindeksi (2009=100).

Usein ollaan kiinnostuneita vuotuisista muutoksista. Tällöin verrataan edellisen vuoden arvoon. Vertaaminen voidaan tehdä indeksipisteillä, kuten on toimittu taulukossa 3.3.

Vuosi	Indeksi	Suhde edellisen vuoden indeksiin	Vuosimuutos
2009	100,0		
2010	88,8	$\frac{88{,}8}{100{,}0} = 0,888$	hinta laski n. 11,2 %
2011	94,4	$\frac{94{,}4}{88{,}8} \approx 1{,}063$	hinta nousi n. 6,3 %
2012	97,8	$\frac{97{,}8}{94{,}4} \approx 1{,}036$	hinta nousi n. 3,6 %
2013	118,0	$\frac{118{,}0}{97{,}8} \approx 1{,}207$	hinta nousi n. 20,7 %

Taulukko 3.3: Kevytmaidon hinnan vuosimuutokset.

3.3 Ryhmäindeksi

Ryhmäindeksi

Ryhmäindeksissä tarkastellaan useita muuttujia. Yhteiskunnan kannalta tärkeimmät hintaindeksit ovat ryhmäindeksejä, eli ne on yhdistetty usean hyödykkeen (tuotteen tai palvelun) hinta- ja kulutustiedoista, ja ne kuvaavat hintojen yhteiskehitystä. Tärkeimpiä Tilastokeskuksen ylläpitämiä ryhmäindeksejä ovat kuluttajahintaindeksi ja elinkustannusindeksi. Niihin tutustustaan tarkemmin kappaleissa 3.4 ja 3.5.

Kun lasketaan hyödykeryhmän arvoa, joillekin hyödykkeille annetaan yleensä muita suurempi painoarvo. Painona voi olla esimerkiksi hyödykkeen kulutusosuus. Ryhmäindeksissä arvo, eli kunkin ajankohdan yleistä hintatasoa kuvaava suure, lasketaankin painotettuna keskiarvona yksittäisten hyödykkeiden hinnoista ja kulutusosuuksista.

Peruskaava

Indeksilaskennan peruskaava on $V = P \cdot Q$, missä

V = hyödykkeen arvo (Value)
P = hinta (Price)
Q = painokerroin eli kulutusosuus (määrä, Quantity)

Hyödykeryhmän arvo

Useasta hyödykkeestä koostuvan hyödykekorin arvo (tietyllä ajanhetkellä) saadaan laskemalla yksittäisten hyödykkeiden arvot yhteen:

$$V = \sum_i V_i = \sum_i p_i \cdot q_i.$$

Laskukaavassa

$V_i = p_i \cdot q_i$ = hyödykkeen i arvo (peruskaavalla laskettuna)
p_i = hyödykkeen i hinta
q_i = hyödykkeen i painokerroin

Indeksikaava

Vertailuajankohdan t indeksipiste I_t lasketaan vertaamalla hetken t hyödykekorin arvoa V_t perusvuoden vastaavaan arvoon V_0, ja kertomalla suhdeluku luvulla 100:

$$I_t = \frac{\text{laskenta-ajankohdan hyödykekorin arvo}}{\text{perusajankohdan hyödykekorin arvo}} \cdot 100 = \frac{V_t}{V_0} \cdot 100.$$

Hyödykekorien arvot V_t ja V_0 lasketaan kuten yllä on esitetty.

Huomautus. Painokertoimien q_i valinnalla on merkitystä laskun lopputuloksen kannalta. Yleisimmin käytettävissä indeksikaavoissa painokertoimet ovat perusajankohdalta (ns. Laspeyresin indeksikaava) tai vertailuajankohdalta (ns. Paaschen hintaindeksikaava).

Esimerkki 3.3.1. Tarkastellaan yksinkertaisen kolmen tuotteen ostoskorin hintaa perusvuonna $t_0 = 2000$ ja vertailuvuonna $t = 2010$. Tuotteiden hinnat (euroina) ja kulutustutkimusten mukaiset kulutusosuudet (promilleina) on esitetty taulukossa 3.4.

Lasketaan ostoskorin hinta perusvuonna ja vertailuvuonna. Laskua varten yksittäisten tuotteiden hinnat kerrotaan niiden painokertoimilla, eli kulutusosuuksilla, ja lasketaan yhteen. Painokertoimina voidaan käyttää joko perusvuoden kulutusosuuksia tai vertailuvuoden kulutusosuuksia. Valitaan painoarvoiksi perusvuoden kulutusosuudet (Laspeyresin indeksikaavan mukaan).

	2000		2010	
	hinta p_0	kulutusosuus q_0	hinta p_t	kulutusosuus q_t
Tuote 1	2,50	67	2,80	72
Tuote 2	0,80	720	1,10	680
Tuote 3	4,10	213	4,52	248
Summa	7,40	1000	8,42	1000

Taulukko 3.4: Tuotteiden keskihinnat ja kulutusosuudet vuosina 2000 ja 2010.

Vuonna 2000 ostoskorin arvo oli

$$V_0 = 2{,}50 \cdot \frac{67}{1000} + 0{,}80 \cdot \frac{720}{1000} + 4{,}10 \cdot \frac{213}{1000} = 1{,}6168 \text{ (euroa)}.$$

Vastaavasti vuonna 2010 ostoskorin arvo oli

$$V_t = 2{,}80 \cdot \frac{67}{1000} + 1{,}10 \cdot \frac{720}{1000} + 4{,}52 \cdot \frac{213}{1000} = 1{,}94236 \text{ (euroa)}.$$

Ostoskorin arvoksi tulee verrattaen pieniä lukuja. Tämä johtuu siitä, että pienihintaisimman tuotteen 2 kulutusosuus, ja siis painokerroin, on ostoskorin arvoa laskettaessa suurin.

Perusvuoden 2000 indeksipiste on 100. Vuoden 2010 indeksipisteeksi saadaan

$$I_t = \frac{V_t}{V_0} \cdot 100 = \frac{1{,}94236}{1{,}6168} \cdot 100 = 120{,}136\ldots \approx 120{,}1.$$

Ostoskorin hinta siis nousi noin 20 %.

3.4 Kuluttajahintaindeksi

Kuluttajahinta-indeksi (KHI)

Yksi tärkeimmistä indeksisarjoista on **kuluttajahintaindeksi (KHI)**. Se kuvaa kotitalouksien yleisesti ostamien hyödykkeistä, eli tavaroista ja palveluista, koostuvan hyödykekorin keskimääräistä hintakehitystä. Eri hyödykkeiden painoarvot korissa määräytyvät niiden osuudesta kotitalouksien kokonaiskulutuksessa. Perusvuosi indeksissä vaihtelee. Kuluttajahintaindeksi päivitetään kuukausittain Tilastokeskuksen sivuilla, ja se soveltuu lyhyen aikavälin tarkasteluun.

Kuluttajahintaindeksitaulukkoa (taulukko 3.5) luetaan seuraavasti:

1. Merkintä 2010=100 kertoo, että indeksin perusajankohtana on vuosi 2010: taulukoidut indeksipisteet on saatu vertaamalla hintatasoja vuoden 2010 hintatasoon.
2. Kunkin hyödykeryhmän painoarvo korissa on ilmaistu promillelukuna. Painoarvojen summa on 1 000 (promillea, eli 100 prosenttia).

Hyödykeryhmä	Painoarvo	Indeksipiste
01 Elintarvikkeet ja alkoholittomat juomat	138,7	117,7
02 Alkoholijuomat ja tupakka	55,3	110,3
03 Vaatetus ja jalkineet	54,1	102,6
04 Asuminen, vesi, sähkö ja muut polttoaineet	220,6	108,5
05 Kalusteet, kotitalouskoneet ja yleinen kodinhoito	57,9	105,4
06 Terveys	50,1	102,9
07 Liikenne	135,0	110,0
08 Viestintä	21,9	85,6
09 Kulttuuri ja vapaa-aika	122,8	100,8
10 Koulutus	4,6	107,9
11 Ravintolat ja hotellit	72,3	111,1
12 Muut tavarat ja palvelut	66,7	108,1
0 **Kokonaisindeksi**	1000	107, 9

Taulukko 3.5: Vuoden 2013 kuluttajahintaindeksi (2010=100). (Tilastokeskus)

3. Indeksin pisteluvut lasketaan kuukausittain kullekin pääryhmälle. Indeksi kuvaa hyödykeryhmän hintatasoa perusvuoden 2010 hintatasoon verrattuna.
4. Hyödykeryhmien indeksipisteet yhdistetään kokonaisindeksiksi painotetun keskiarvon menetelmällä.
5. Indeksit lasketaan kuukausittain. Tässä on ilmoitettu vuositason indeksit, jotka ovat kuukausittaisten indeksien keskiarvoja.

Esimerkki 3.4.1. Kuluttajahintaindeksin laskennassa käytettävään hyödykekoriin kuuluu yli 400 erilaista tavaraa ja palvelua, jotka on luokiteltu kahteentoista hyödykeryhmään (taulukko 3.5). Kullakin hyödykeryhmällä on painoarvo, joka kuvaa sen kulutusosuutta korissa perusvuonna 2010.

Esimerkiksi vaatetus ja jalkineet muodostavat yhden hyödykeryhmän, jonka osuus on taulukon 3.5 kulutustietojen mukaan 54,1 promillea, eli noin 5,4 %. Tämä tarkoittaa, että keskimääräisen kuluttajan menoista noin 5,4 % kului vaatetukseen ja jalkineisiin vuonna 2010. Asumiskustannusten osuus kaikista menoista oli 220,6 promillea eli noin 22,1 %. Niiden paino hyödykekorin arvoa ja kuluttajahintaindeksiä laskettaessa on näin ollen noin neljä kertaa suurempi kuin vaatetuksen, ja niiden hinnanmuutoksella on suurempi vaikutus kotitalouksien kulutusmenoihin kuin vaatteiden hinnanmuutoksella.

Kunkin hyödykeryhmän hintatiedot kerätään liikkeistä haastattelututkimuksilla ja indeksin pisteluvut lasketaan kuukausittain kullekin pääryhmälle. Vuoden 2013 kokonaisindeksin pisteluku on 107,9, mikä tarkoittaa, että vuoden 2013 hintataso on keskimäärin 7,9 % perusvuoden 2010 hintatasoa korkeampi.

Vuosi	2000 = 100	2005 = 100	2010 = 100
2005	106,2	100,0	
2006	108,1	101,6	
2007	110,8	104,1	
2008	115,3	108,3	
2009	115,3	108,3	
2010	116,7	109,7	100,0
2011	120,7	113,5	103,4
2012	124,1	116,7	106,3
2013	125,9	118,4	107,9

Taulukko 3.6: Kuluttajahintaindeksejä eri perusvuodella. (Tilastokeskus)

Uusimman kuluttajahintaindeksin perusajankohta on 2010=100. Taulukossa 3.6 on esitetty kuluttajahintaindeksit (kokonaisindeksien vuosikeskiarvot) tapauksissa, joissa perusvuotena on 2000, 2005 tai 2010.

Esimerkki 3.4.2. Uusimman kuluttajahintaindeksin (2010=100) joulukuun 2014 indeksipiste oli 109,0, kun se vuotta aikaisemmin, joulukuussa 2013, oli 108,5. Indeksin pisteluku kasvoi 0,5 yksikköä. Indeksin prosentuaalinen muutos oli

$$\frac{109{,}0 - 108{,}5}{108{,}5} = 0{,}00460\ldots \approx 0{,}46\ \%.$$

Tämä tarkoittaa, että kuluttajahinnat nousivat keskimäärin noin 0,46 %.

Edellisessä esimerkissä laskettu kuluttajahintaindeksin muutosprosentti on keskimääräisen inflaation mittari. Inflaatiota käsitellään tarkemmin kappaleessa 3.6.

3.5 Elinkustannusindeksi

Elinkustannusindeksi (EKI)

Elinkustannusindeksi (EKI) on uusimmasta kuluttajahintaindeksistä ketjuttamalla laskettu pitkä aikasarja. Elinkustannusindeksin perusajankohta on pysyvästi vuoden 1951 lokakuu (1951:10=100). Se kuvaa yleistä hintatason kehitystä, kuten kuluttajahintaindeksikin. Elinkustannusindeksiä käytetään laskelmissa, joissa tarkasteltava ajanjakso on pitkä.

Esimerkki 3.5.1. Tarkastellaan maidon hintaa vuosina 1960 ja 2013. Maitolitran keskihinta vuonna 1960 oli 60 markkaa ja vuonna 2013 1,05 euroa. Selvitetään, oliko maito halvempaa vuonna 1960.

Ratkaisu: Muutetaan vuoden 1960 markkahinta euroiksi. Vuonna 1963 otettiin käyttöön uusi markka, jolloin yhden markan arvoksi tuli entinen 100 markkaa. Maitolitran uusi markkahinta oli 60/100 = 0,60 (markkaa). Vuonna 2002 Suomi vaihtoi kansallisen valuuttansa

Vuosi	Indeksi	Vuosi	Indeksi	Vuosi	Indeksi
1951	–	1998	1 435	2007	1 662
1955	100	2000	1 501	2008	1 730
1960	138	2001	1 539	2009	1 730
1970	223	2002	1 563	2010	1 751
1980	651	2003	1 577	2011	1 812
1990	1 248	2004	1 580	2012	1 863
1994	1 361	2005	1 594	2013	1 890
1996	1 390	2006	1 622	2014	1 910

Taulukko 3.7: Elinkustannusindeksin (1951:10=100) vuosikeskiarvoja. (Tilastokeskus)

euroon, jonka arvoksi tuli 1 € = 5,94573 mk. Maitolitran vuoden 1960 hinta euroina on

$$\frac{0{,}60}{5{,}94573} \approx 0{,}10 \text{ (euroa)}.$$

Nimellishintoja vertaamalla voidaan todeta, että maitolitran hinta 0,10 € vuonna 1960 oli pienempi kuin hinta 1,05 € vuonna 2013.

Kun halutaan verrata hintoja eri aikoina, on huomioitava yleinen hintakehitys. Elinkustannusindeksi (1951:10=100) kuvaa yleisen hintatason kehitystä. Elinkustannusindeksin pisteluku vuonna 1960 oli 138. Vuonna 2013 elinkustannusindeksin pisteluku oli 1 890.

Maidon hinta vuonna 1960 oli 0,10 €. Kuvitellaan, että maidon hinnan muutos olisi noudattanut yleistä hintakehitystä, ja merkitään maitolitran hintaa vuonna 2013 kirjaimella x (euroa). Maidon hinta olisi siis noussut samassa suhteessa elinkustannusindeksin kanssa. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan x:

$$\frac{x}{0{,}10\text{ €}} = \frac{1890}{138} \quad\Leftrightarrow\quad x = 0{,}10\text{ €} \cdot \frac{1890}{138} \approx 1{,}37\text{ €}.$$

Maidon litrahinta vuonna 2013 oli kuitenkin todellisuudessa 1,05 €. Voidaan siis todeta, että maidon hinta on laskenut muihin hintoihin nähden vuodesta 1960 vuoteen 2013.

Edellisessä esimerkissä oli kysymys niin sanotusta inflatoinnista ja kiinteähintaistamisesta, jota käsitellään tarkemmin kappaleessa 3.8.

3.6 Indeksit ja inflaatiomittaus

Inflaatio ja deflaatio

Inflaatio eli rahan arvon heikkeneminen tarkoittaa sitä, että hinnat nousevat ja samalla rahamäärällä saa aikaisempaa vähemmän tavaroita ja palveluita, eli rahan ostovoima laskee. Inflaation vastakohta on **deflaatio** eli rahan arvon vahvistuminen, mikä tarkoittaa sitä, että hinnat laskevat ja samalla rahamäärällä saa aikaisempaa enemmän tavaroita ja palveluita. Kuluttajahintaindeksi on inflaation virallinen mittari. **Inflaatioprosentti** on kuluttajahintaindeksin muutosprosentti.

Inflaatio-prosentti

Olkoot $t = 1$ ja $t = 2$ kaksi eri ajanhetkeä, ja P_1 ja P_2 niitä vastaavat kuluttajahintaindeksit. **Inflaatio** aikavälillä $1 \to 2$ on

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \left(= \frac{P_2}{P_1} - 1 \right).$$

Inflaatio

Inflaatio ilmaistaan yleensä kuluttajahintaindeksin 12 kuukauden prosenttimuutoksella. Tällöin indeksipisteet P_1 ja P_2 valitaan peräkkäisiltä vuosilta.

Esimerkki 3.6.1. Laske inflaatioprosentti vuonna a) 2008, b) 2009, c) 2013. Käytä kuluttajahintaindeksiä 2005=100.

Ratkaisu: Inflaatioprosentti on kuluttajahintaindeksin vuotuinen muutosprosentti. Tehtävässä tarvittavat kuluttajahintaindeksin arvot on koottu taulukosta 3.6 taulukkoon 3.8:

Vuosi	2007	2008	2009	2012	2013
	104,1	108,3	108,3	116,7	118,4

Taulukko 3.8: Kuluttajahintaindeksin arvoja (2005=100).

(a) Vuonna 2008 inflaatio oli

$$\frac{108{,}3 - 104{,}1}{104{,}1} = 0{,}0403\ldots \approx 4{,}0\ \%.$$

Tämä tarkoittaa, että hinnat nousivat keskimäärin 4,0 % eli tulivat 1,04-kertaisiksi.

(b) Kuluttajahintaindeksin arvo oli vuosina 2008 ja 2009 sama, joten kuluttajahinnat pysyivät keskimäärin samalla tasolla. Inflaatio vuonna 2009 oli siis 0 %.

(c) Vuonna 2013 inflaatio oli

$$\frac{118{,}4 - 116{,}7}{116{,}7} = 0{,}0145\ldots \approx 1{,}5\ \%.$$

Esimerkki 3.6.2. Laske inflaatio aikavälillä 2007-2013. Mikä oli tämän ajanjakson keskimääräinen vuotuinen inflaatioprosentti?

Ratkaisu: Aikavälin 2007–2013 inflaatio oli

$$\frac{118{,}4 - 104{,}1}{104{,}1} = 0{,}1373\ldots \approx 13{,}7\ \%.$$

Vuodesta 2007 vuoteen 2013 kului aikaa kuusi vuotta, ja KHI:n pisteluku muuttui tässä ajassa arvosta 104,1 arvoon 118,4. Merkitään keskimääräistä vuotuista muutoskerrointa kirjaimella q. KHI:n pisteluvun arvo tuli siis keskimäärin q-kertaiseksi joka vuosi, joten saadaan yhtälö $104{,}1 \cdot q^6 = 118{,}4$ josta ratkaistaan $q^6 = \frac{118{,}4}{104{,}1}$. Kasvutekijä q saadaan ottamalla tästä kuudes juuri: $q = \sqrt[6]{\frac{118{,}4}{104{,}1}} \approx 1{,}0217$. KHI:n pisteluku tuli siis vuosittain keskimäärin 1,0217-kertaiseksi, eli keskimääräinen vuotuinen inflaatio oli 2,17 %.

Kuudennen juuren arvoa ei saada lasketuksi nelilaskimella. Pääsykokeessa tämäntyyppisen tehtävän voi ratkaista kokeilemalla, mikä annetuista vuotuisista inflaatioprosenteista antaa oikean kasvaneen pisteluvun: sijoittamalla huomataan, että $104{,}1 \cdot 1{,}0217^6 \approx 118{,}4$.

Esimerkki 3.6.3 (Valintakoe 2014: tehtävä 47)**.** Simpletaniassa kuluttajahintaindeksin arvo muodostuu kahden tuotteen, A ja B, hintojen perusteella.

Tuotteen A kulutusosuus on 2 yksikköä ja tuotteen B 3 yksikköä. Ohessa on esitetty taulukko tuotteiden hintakehityksestä ja alla olevat väittämät on esitetty yhden desimaalin tarkkuudella. Perusvuotena käytetään vuotta 2011.

Vuosi	Tuote A	Tuote B
2011	19,8 €	8,1 €
2012	20,9 €	9,6 €
2013	22,4 €	10,9 €

Mikä seuraavista Simpletaniaa kuvaavista väittämistä ei pidä paikkaansa?

1. Kuluttajahintaindeksin pisteluku vuonna 2012 on 110,5.
2. Inflaatio vuodesta 2011 vuoteen 2013 on 21,3 prosenttia.
3. Inflaatio vuodesta 2012 vuoteen 2013 on suurempi kuin vuodesta 2011 vuoteen 2012.
4. Jos tuotteen B hinta olisi vuonna 2013 pudonnut takaisin vuoden 2011 tasolle, inflaatioprosentti vuodesta 2012 vuoteen 2013 olisi ollut negatiivinen (olettaen, että muita muutoksia ei olisi tapahtunut).

Ratkaisu: Muodostetaan Simpletanian kuluttajahintaindeksi kappaleessa 3.3 esitetyllä tavalla. Ostoskorin arvo lasketaan painottamalla tuotteiden yksikköhinnat kulutusosuuksilla:

- Vuonna 2011 ostoskorin arvo oli $19{,}8 \cdot 2 + 8{,}1 \cdot 3 = 63{,}9$ (euroa).
- Vuonna 2012 ostoskorin arvo oli $20{,}9 \cdot 2 + 9{,}6 \cdot 3 = 70{,}6$ (euroa).
- Vuonna 2013 ostoskorin arvo oli $22{,}4 \cdot 2 + 10{,}9 \cdot 3 = 77{,}5$ (euroa).

Perusvuoden 2011 indeksipisteeksi tulee 100. Muiden vuosien indeksipisteet on koottu taulukkoon 3.9.

Vuosi	Ostoskorin arvo (€)	Arvo vuoteen 2011 verrattuna	Indeksi
2011	63,9	$\frac{63{,}9}{63{,}9} = 1 = 100{,}0\ \%$	100,0
2012	70,6	$\frac{70{,}6}{63{,}9} = 1{,}1048\ldots \approx 110{,}5\ \%$	110,5
2013	77,5	$\frac{77{,}5}{63{,}9} = 1{,}2128\ldots \approx 121{,}3\ \%$	121,3

Taulukko 3.9: Simpletanian kuluttajahintaindeksi (2011=100).

Tutkitaan jokainen väittämä erikseen:

1. Kuluttajahintaindeksin pisteluku vuonna 2012 on taulukon 3.9 mukaan 110,5. Väittämä 1 pitää siis paikkansa.
2. Vuoden 2013 kuluttajahintaindeksin pisteluku on 121,3 mikä tarkoittaa, että kuluttajahinnat ovat vuodesta 2011 vuoteen 2013 tulleet 1,213-kertaisiksi eli nousseet 21,3 %. Inflaatio vuodesta 2011 vuoteen 2013 on siis 21,3 %. Väittämä 2 pitää siis paikkansa.
3. Vuoden 2012 kuluttajahintaindeksin pisteluku 110,5 kertoo suoraan, että inflaatio vuodesta 2011 vuoteen 2012 oli 10,5 %. Inflaatio vuodesta 2012 vuoteen 2013 on

   $$\frac{121{,}3 - 110{,}5}{110{,}5} = 0{,}0977\ldots \approx 9{,}8\ \%.$$

   Siis inflaatio vuodesta 2011 vuoteen 2012 oli suurempi kuin vuodesta 2012 vuoteen 2013. Näin väittämä 3 ei pidä paikkaansa.
4. Jos tuotteen B hinta olisi vuonna 2013 pudonnut takaisin vuoden 2011 tasolle, eli 8,1 euroon, niin ostoskorin arvo olisi vuonna 2013 ollut $22{,}4 \cdot 2 + 8{,}1 \cdot 3 = 69{,}1$ (euroa). Vuoden 2013 arvo olisi tällöin ollut perusvuoteen 2011 verrattuna

   $$\frac{69{,}1}{63{,}9} = 1{,}0813\ldots \approx 108{,}1\ \%,$$

   ja vuoden 2013 indeksipiste olisi ollut 108,1. Inflaatioprosentiksi vuodesta 2012 vuoteen 2013 olisi tällöin tullut

   $$\frac{108{,}1 - 110{,}5}{110{,}5} = -0{,}0217\ldots \approx -2{,}2\ \%.$$

   Väittämä 4 pitää siis paikkansa.

3.7 Indeksit ja rahan ostovoima

Kuluttajahintaindeksi kuvaa kuluttajien tavaroista ja palveluista maksamaa keskimääräistä hintaa ja yleistä hintojen muutosta: kun hintataso nousee, indeksin pisteluvun arvo kasvaa. Samaan aikaan rahan arvo eli ostovoima laskee: samalla rahamäärällä ei saa yhtä paljon kuin ennen. Koska hinta on jonkin hyödykkeen ja rahan välinen vaihtosuhde, ovat rahan arvo (sen ostovoima) ja yleinen hintataso käsitteitä, jotka ilmaisevat samaa asiaa, mutta kääntäen. **Rahan ostovoima** on siis *kääntäen verrannollinen* kuluttajahintaindeksin arvoon.

Rahan ostovoima

Olkoot $t = 1$ ja $t = 2$ kaksi eri ajanhetkeä, ja P_1 ja P_2 niitä vastaavat kuluttajahintaindeksit. **Rahan ostovoiman muutos** aikavälillä $1 \to 2$ on

Rahan ostovoiman muutos

$$\frac{\frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_1}}{\frac{1}{P_1}} = \frac{P_1 - P_2}{P_2} \left(= \frac{P_1}{P_2} - 1 \right).$$

Esimerkki 3.7.1. Kuinka paljon rahan ostovoima aleni vuodesta 2007 vuoteen 2013? Käytä kuluttajahintaindeksiä 2005=100.

Ratkaisu: Laskussa tarvittavat indeksit löytyvät taulukosta 3.8. Rahan ostovoiman muutos saadaan KHI:n pistelukujen käänteisarvojen prosentuaalisena muutoksena:

$$\frac{\frac{1}{118{,}4} - \frac{1}{104{,}1}}{\frac{1}{104{,}1}} = \frac{104{,}1 - 118{,}4}{118{,}4} = -0{,}1207\ldots \approx -12{,}1\ \%.$$

Rahan ostovoima siis laski näiden kuuden vuoden aikana 12,1 %. Tämä merkitsee sitä, että samalla rahamäärällä saa 12,1 % vähemmän hyödykkeitä vuonna 2013 kuin mitä sillä sai vuonna 2007.

Tehtävä voidaan ratkaista myös toisella tavalla: Inflaatio vuodesta 2007 vuoteen 2013 laskettiin esimerkissä 3.6.2. Inflaatioprosentiksi saatiin 13,7 %. Toisin sanoen, hinnat tulivat kyseisellä aikavälillä 1,137-kertaisiksi. Rahan ostovoiman muutos on kääntäen verrannollinen hintojen muutokseen: rahan ostovoima laski kertoimella

$$\frac{1}{1{,}137} \approx 0{,}8795.$$

Rahan ostovoima siis laski $100\ \% - 87{,}95\ \% = 12{,}05\ \% \approx 12{,}1\ \%$.

Reaalipalkka

Rahan ostovoima kuvaa sitä, kuinka paljon hyödykkeitä sillä voi ostaa. Kun hinnat inflaation myötä nousevat mutta tulot pysyvät ennallaan, palkan ostovoima eli **reaalipalkka** laskee. Reaalisen palkan lasku ei näin ollen (välttämättä) liity tulojen laskuun vaan voi olla inflaation seurausta.

Esimerkki 3.7.2. Eräällä ajanjaksolla inflaatio oli 2,5 %, mutta palkat pysyivät ennallaan. Kuinka monta prosenttia palkan ostovoima eli reaalipalkka laski?

Ratkaisu: Inflaatio oli 2,5 %, joten kuluttujahintaindeksin arvo kasvoi ajanjakson aikana 1,025-kertaiseksi. Rahan ostovoiman muutos on kääntäen verrannollinen hintojen muutokseen: rahan ostovoima pieneni kertoimella $\frac{1}{1{,}025} \approx 0{,}976$. Rahan ostovoima siis 0,976-kertaistui, joten palkan ostovoima eli reaalipalkka laski 100 % − 97,6 % = 2,4 %.

3.8 Reaaliarvon laskeminen ja reaaliset muutokset

Kun eri vuosien hintoja tai palkkoja vertaillaan käyvin hinnoin (eli kunkin vuoden rahassa), puhutaan **nimellismuutoksesta**. Tulosten tulkinta on tällöin vaikeaa, koska nimellisarvoissa ei huomioida rahan arvon muutoksia, eli inflaation tai deflaation vaikutusta. **Nimellismuutos**

Indeksilaskennan avulla rahasummat voidaan saattaa vertailukelpoisiksi, eli tehdä ne kiinteähintaisiksi. **Reaalista muutosta** laskettaessa eri vuosien rahamäärät muunnetaan ennen vertailua saman ajankohdan rahaksi huomioimalla inflaation vaikutus rahan arvoon. **Reaalimuutos**

Deflatoinnilla tarkoitetaan rahan arvon muuttamista ajassa taaksepäin indeksilaskennan keinoin. **Inflatointi** tarkoittaa vastaavaa muunnosta ajassa eteenpäin. Deflatointi on indeksilaskennan vastine korkolaskennan diskonttaukselle. Inflatointi puolestaan vastaa koronkorkolaskentaa. Deflatoinnissa ja inflatoinnissa rahamäärät muutetaan yhtenäiseen rahan arvoon kertomalla sopivasta indeksistä, tyypillisesti kuluttajahintaindeksistä, lasketulla kertoimella. **Deflatointi** **Inflatointi**

Nimellismääräisen rahamäärän x_t **reaaliarvo** hetkellä t on

$$\frac{x_t}{P_t} \cdot 100,$$

missä P_t on hetken t kuluttajahintaindeksi.

Rahan reaaliarvo

Olkoot $t = 1$ ja $t = 2$ kaksi eri ajanhetkeä, ja P_1 ja P_2 niitä vastaavat kuluttajahintaindeksit. Ajanhetken $t = 1$ rahamäärä x_1 saadaan **inflatoitua** myöhempään ajanhetkeen $t = 2$ ratkaisemalla verrantoyhtälö, jossa rahamäärien reaaliarvot on asetettu yhtä suuriksi:

$$\frac{x_1}{P_1} = \frac{x_2}{P_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{P_2}{P_1} \cdot x_1.$$

Ajanhetken $t = 2$ rahamäärä x_2 saadaan **deflatoitua** aikaisempaan ajanhetkeen $t = 1$ vastaavasti:

$$\frac{x_1}{P_1} = \frac{x_2}{P_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{P_1}{P_2} \cdot x_2.$$

Tietyn vuoden rahamäärä muunnetaan toisen vuoden rahaksi siis kertomalla vastaavien indeksipisteiden suhdeluvulla.

Deflatointi/inflatointi: laskukaava

Esimerkki 3.8.1. Verrataan eri vuosien palkkoja. Jos palkka oli 2 900 €/kk vuonna 2010 ja 3 100 €/kk vuonna 2013, niin kumpana vuonna palkka oli suurempi? Kuinka monta prosenttia suurempi?

Ratkaisu: Vuoden 2013 palkan nimellisarvo on suurempi: 3 100 € > 2 900 €. Palkat eivät kuitenkaan suoraan ole vertailukelpoisia, sillä yleinen hintataso on muuttunut. Lasketaan kuukausipalkkojen reaaliarvot, eli suhteutetaan ne kulloiseenkin elintasoon. Käytetään suhteutukseen taulukon 3.6 kuluttajahintaindeksiä (2005=100).

Vuoden 2010 indeksipiste on 109,7. Kuukausipalkan reaaliarvo on

$$\frac{2\,900\text{ €}}{109{,}7} \cdot 100 \approx 2\,643{,}57\text{ €}.$$

Vuoden 2013 indeksipiste on 118,4. Kuukausipalkan reaaliarvo on

$$\frac{3\,100\text{ €}}{118{,}4} \cdot 100 \approx 2\,618{,}24\text{ €}.$$

Reaalipalkka oli siis vuonna 2013 pienempi kuin aikaisemmin. Muutosprosentiksi saadaan

$$\frac{2\,618{,}24\text{ €} - 2\,643{,}57\text{ €}}{2\,643{,}57\text{ €}} = -0{,}00958\ldots \approx -0{,}96\ \%.$$

Reaalipalkka laski siis 0,96 %.

Vertailu voidaan tehdä myös esimerkiksi inflatoimalla vuoden 2010 kuukausipalkka 2 900 € vuoden 2013 rahaksi Inflatoitu kuukausipalkka saadaan verrantoyhtälöstä:

$$\frac{2\,900\text{ €}}{109{,}7} = \frac{x}{118{,}4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{118{,}4}{109{,}7} \cdot 2\,900\text{ €} \approx 3\,129{,}99\text{ €}.$$

Vuoden 2013 todellinen palkka on 3 100 €. Palkkakehitys ei siis ole noudattanut yleistä hintakehitystä, vaan reaaliansiotaso on laskenut. Muutosprosentiksi saadaan

$$\frac{3\,100\text{ €} - 3\,129{,}99\text{ €}}{3\,129{,}99\text{ €}} = -0{,}00958\ldots \approx -0{,}96\ \%.$$

Reaalipalkka laski siis 0,96 %.

Mikäli palkka nousee samassa suhteessa kuin indeksi, sen reaaliarvo pysyy samana. Tässä esimerkissä palkka nousi suhteessa vähemmän kuin kuluttajahintaindeksi eli yleinen hintataso. Näin reaalipalkka laski, vaikka nimellispalkka nousi.

Esimerkki 3.8.2. Kuluttajahintaindeksi (2010=100) nousi vuoden 2010 pisteluvusta 100,0 vuoden 2013 pistelukuun 107,9.

(a) Millä rahamäärällä oli vuonna 2013 sama ostovoima kuin 100 eurolla vuonna 2010?

(b) Millä rahamäärällä oli vuonna 2010 sama ostovoima kuin 100 eurolla vuonna 2013?

Ratkaisu:

(a) Inflatoidaan vuoden 2010 sata euroa vuoden 2013 rahaksi:

$$\frac{x}{107{,}9} = \frac{100\text{ €}}{100{,}0} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{107{,}9}{100{,}0} \cdot 100\text{ €} = 107{,}9\text{ €}.$$

(b) Deflatoidaan vuoden 2010 sata euroa vuoden 2010 rahaksi:

$$\frac{x}{100{,}0} = \frac{100\text{ €}}{109{,}7} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{100,}{109{,}7} \cdot 100\text{ €} \approx 92{,}68\text{ €}.$$

Inflaatio pienentää rahan ostovoimaa, mutta samalla palkat yleensä kasvavat. Usein ollaan kiinnostuneita näiden yhteisestä kokonaisvaikutuksesta kuluttajan ostovoimaan, eli reaaliansiotasoon.

Esimerkki 3.8.3 (Valintakoe 2014: tehtävä 46)**.** Kasperin nettopalkka oli noussut 24,3 % hänen aloitettuaan työnsä. Samaan aikaan kuluttajahinnat olivat nousseet 10,4 %. Kuinka paljon Kasperin reaalinen nettopalkka oli noussut?

Ratkaisu: Merkitään aloituspalkkaa kirjaimella a (euroa). Palkka nousi nimellisesti 24,3 %, joten uusi palkka oli $1{,}243a$ (euroa). Samaan aikaan hinnat nousivat 10,4 % eli tulivat 1,104-kertaisiksi. Jos palkka olisi noudattanut yleistä hintakehitystä, niin se olisi nyt $1{,}104a$ (euroa). Reaalinen nettopalkka nousi siis $1{,}243a - 1{,}104a = 0{,}139a$ (euroa) ja prosentuaalisesti

$$\frac{0{,}139a}{1{,}104a} = 0{,}1259\ldots \approx 12{,}6\ \%.$$

Esimerkki 3.8.4. Kuluttajahintaindeksi nousi arvosta 117,2 arvoon 120,5. Kuinka muuttui reaalinen palkka, kun

(a) nettopalkka pysyi ennallaan?

(b) nettopalkka nousi 4,5 %?

Ratkaisu: Merkitään alkuperäistä palkkaa kirjaimella a (euroa).

Kuluttajahintaindeksin pistelukujen suhde kertoo aikavälin inflaatioprosentin: kuluttajahinnat kasvoivat kertoimella

$$\frac{120{,}5}{117{,}2} \approx 1{,}0282.$$

(a) Nettopalkka pysyi ennallaan, joten se on edelleen a (euroa). Jos palkka olisi noudattanut yleistä hintakehitystä, eli säilyttänyt reaalisen arvonsa, se olisi nyt $1{,}0282a$ (euroa). Nykyisen palkan reaaliarvo entisen palkan reaaliarvoon verrattuna on

$$\frac{a}{1{,}0282a} = \frac{1}{1{,}0282} \approx 0{,}973,$$

joten palkan reaaliarvo laski $100\ \% - 97{,}3\ \% = 2{,}7\ \%$.

(b) Nettopalkka kasvoi 4,5 %, joten se on nyt 1,045a (euroa). Jos palkka olisi noudattanut yleistä hintakehitystä, eli säilyttänyt reaalisen arvonsa, se olisi nyt 1,0282a (euroa). Nykyisen palkan reaaliarvo entisen palkan reaaliarvoon verrattuna on

$$\frac{1{,}045a}{1{,}0282a} = \frac{1{,}045}{1{,}0282} \approx 1{,}016,$$

joten palkan reaaliarvo nousi 101,6 % − 100 % = 1,6 %.

3.9 Indeksiin sidottujen suureiden laskeminen

Monet hinnat sidotaan indekseihin, jotta hintojen muutokset noudattaisivat yleistä hintakehitystä. Esimerkiksi asuin- ja liikehuoneistojen vuokrat on yleensä sidottu elinkustannusindeksiin. Tämä tarkoittaa sitä, että vuokrat nousevat samassa suhteessa kuin elinkustannusindeksi. Vuokran tarkistus tarkoittaa vuokran vuosittaista määräaikaiskorotusta eli niin sanottua **indeksikorotusta**, jossa vuokra korotetaan vastaamaan yleistä hintatasoa.

Indeksikorotus

Esimerkki 3.9.1. Solmit vuokrasopimuksen 1.3.2013 ja vuokraksi sovittiin 490 €. Vuokrasopimuksessa on merkinnät:

Vuokra sidotaan elinkustannusindeksiin. Perusindeksin julkaisukuukausi ja -vuosi: 1/2013. Pisteluku: 1870. Tarkistusajankohta: joka helmikuu. Tarkistusindeksi on tarkistusajankohtana tiedossa oleva viimeksi julkaistu pisteluku. Mikäli indeksin pisteluku on alempi, ei vuokraa kuitenkaan alenneta.

Mikä on vuokran suuruus vuonna 2014? Kuinka monta prosenttia vuokra nousee?

Ratkaisu: Vuokra tarkistetaan vuoden 2014 helmikuussa. Elinkustannusindeksin pisteluvut löytyvät Tilastokeskuksen nettisivuilta. Helmikuussa uusin tiedossa oleva indeksipisteluku on tammikuulta 2014: pisteluku on 1900. Vuokra nousee samassa suhteessa kuin elinkustannusindeksi. Tarkistettu vuokra on siten:

$$\frac{1900}{1870} \cdot 490 \text{ €} \approx 497{,}86 \text{ €}.$$

Uusi vuokra on siis 497,86 €. Vuokra nousi 497,86 € − 490 € = 7,86 €, eli suhteellisesti

$$\frac{7{,}86 \text{ €}}{490 \text{ €}} = 0{,}0160\ldots \approx 1{,}6 \text{ \%}.$$

Esimerkki 3.9.2. Asunto-osakeyhtiön tilintarkastuspalkkio on sidottu kuluttajahintaindeksiin. Vuonna 2006, kun kuluttajahintaindeksin (2005=100) lukema oli 101,6 palkkioksi määrättiin 150 €. Mikä oli palkkion suuruus vuonna 2008, kun indeksin pisteluku oli 108,3?

Ratkaisu: Lasketaan, kuinka monta prosenttia indeksi nousi:

$$\frac{108{,}3 - 101{,}6}{101{,}6} = 0{,}06594\ldots \approx 6{,}6 \text{ \%}.$$

Palkkiota tulee siis korottaa noin 6,6 % alkuperäisestä. Uusi palkkio on 1,066 · 150 € = 159,90 €.

3.10 Tehtäviä

3.1. Yrityksen liikevaihto oli neljänä peräkkäisenä vuotena seuraava: 4,229 milj. euroa, 5,009 milj. euroa, 4,538 milj. euroa ja 6,745 milj. euroa. Muodosta liikevaihtoa kuvaava indeksisarja valitsemalla ensimmäinen vuosi indeksisarjan perusvuodeksi.

3.2. Monan eläke oli 1 540 euroa kuukaudessa vuonna 2012. Laske eläkkeen suuruus vuonna 2013 olettaen, että eläke on sidottu kuluttajahintaindeksiin. Käytä taulukon 3.6 indeksiä KHI (2010 = 100).

3.3. Nuutti osti vuonna 2003 asunnon, joka maksoi 130 000 euroa. Hän myi sen vuonna 2010 hintaan 165 000 euroa. Vuonna 2003 asuntojen hintaindeksi (2000 = 100) oli 110 ja vuonna 2010 indeksipiste oli 138.

(a) Kuinka monta prosenttia asuntojen yleinen hintataso muuttui?

(b) Mihin hintaan Nuutin olisi pitänyt myydä asuntonsa vuonna 2010, jotta hän olisi saanut yleisen hintatason mukaisen hinnan?

3.4. Elinkustannusindeksi (1951:10=100) vuonna 1980 oli 651. Vuonna 2013 vastaava indeksi oli 1890. Laske elinkustannusindeksin avulla a) inflaatioprosentti, b) rahan ostovoiman muutosprosentti kyseisellä aikavälillä.

3.5. Käytä tässä tehtävässä taulukon 3.6 indeksiä KHI (2005 = 100).

(a) Määritä vuosien 2006 ja 2010 välinen inflaatioprosentti.

(b) Määritä tämän ajanjakson keskimääräinen vuotuinen inflaatioprosentti.

3.6. Miten rahan ostovoima muuttui tietyllä aikavälillä, jos

(a) hinnat nousivat 7,9 %? (b) hinnat laskivat 7,9 %?

3.7. Miten hinnat muuttuivat tietyllä aikavälillä, jos

(a) rahan ostovoima kasvoi 4,5 %? (b) rahan ostovoima pieneni 4,5 %?

3.8. Työntekijän vuoden 2006 nettopalkka oli 3 000 € ja vuoden 2013 nettopalkka oli 3 180 €. Laske taulukon 3.6 kuluttajahintaindeksin (2005=100) avulla palkan a) nimellisarvon, b) reaaliarvon muutos (nousu tai lasku).

3.9. Outin vuokra oli 560 euroa vuonna 2007. Vuonna 2011 vuokra oli 680 euroa. Vertaa vuokrassa tapahtunutta korotusta taulukon 3.6 kuluttajahintaindeksiin (2005 = 100).

(a) Kuinka monta prosenttia vuokran reaalinen muutos oli?

(b) Mikä vuokran olisi pitänyt olla vuonna 2011, jotta korotus olisi vastannut yleisen hintatason muutosta?

3.10. Vuonna 2005 asunnon arvo oli 95 000 €. Neljä vuotta myöhemmin sen arvo oli 128 000 €. Samaan aikaan vuotuinen inflaatioprosentti oli 2,0. Laske asunnon reaalisen arvon muutos prosentteina kyseisellä aikavälillä.

3.11. Henkilö otti 120 000 € asuntolainan vuonna 2004, jolloin kuluttajahintaindeksi oli 105,3. Vuonna 2008 lainaa oli jäljellä 86 400 € ja kuluttajahintaindeksi oli 115,3. Kuinka paljon lainamäärä oli vähentynyt a) nimellisesti, b) reaalisesti? Anna vastaukset prosentteina.

3.12. Henkilö osti vuonna 2001 asumisoikeusasunnon, jonka asumisoikeusmaksu oli silloin 18 500 €. Maksu sidottiin rakennuskustannusindeksiin (2000=100). Henkilö muutti pois asunnosta vuonna 2009 ja sai maksamansa asumisoikeusmaksun takaisin rakennuskustannusindeksillä korotettuna. Laske palautetun maksun suuruus. Rakennuskustannusindeksin pisteluku oli 102,5 vuonna 2001 ja 126, 1 vuonna 2009.

3.13. Vuokrasopimus allekirjoitettiin 1.4.2005 ja vuokraksi sovittiin 600 €/kk. Sopimuksentekohetkellä uusin tiedossa ollut indeksipisteluku oli 1585 (helmikuulta 2005). Vuokra tarkistetaan vuosittain. Laske vuokra vuonna a) 2006, b) 2010, c) 2013. Vastaavat helmikuun elinkustannusindeksin pisteluvut olivat 1607, 1735 ja 1881.

3.14. Laske kuinka paljon vuoden 2006 palkan 5 000 €/kk tulisi nousta vuosien 2006 ja 2013 välillä, jotta reaalinen arvo pysyisi samana. Käytä kuluttajahintaindeksiä (2005=100).

3.15. Vuosiansiot olivat 78 000 € vuonna 2000 ja 92 000 € vuonna 2013. Laske taulukon 3.7 elinkustannusindeksin (1951:10=100) avulla a) miten reaaliansiot muuttuivat euroissa, b) miten rahan ostovoima muuttui, c) miten palkan ostovoima muuttui.

3.16. Laske vuoden 2013 kuukausipalkan 4 000 € arvo deflatoituna vuoteen 2006. Käytä kuluttajahintaindeksiä (2005=100).

3.17. Vuonna 1990 bensiini maksoin huoltoasemalla keskimäärin 4,52 markkaa/litra. a) Inflatoi bensiinin hinta taulukon 3.7 elinkustannusindeksin (1951:10=100) avulla vastaamaan vuoden 2013 hintaa (1 € = 5,94573 mk). b) Arvioi inflaatiota mainitulla aikavälillä elinkustannusindeksin avulla.

3.18. Bruttopalkka on 2 156 €/kk. Palkasta menee veroja ja muita veronluonteisia maksuja 36 %. Laske, kuinka suuri bruttopalkan tulee seuraavana vuonna olla, jotta reaalinen nettoansio (nettopalkan reaaliarvo) pysyy ennallaan. Oletetaan, että inflaatio on 2,7 % ja veroprosentti pienenee yhdellä prosenttiyksiköllä.

3.19. Kuukauden nettopalkka nousi 1 500 eurosta 1 560 euroon. Samaan aikaan kuluttajahintaindeksi nousi arvosta 110,0 arvoon 114,2. Miten ansiotaso muuttui a) nimellisesti, b) reaalisesti?

3.20. Talletetaan vuoden 2005 alussa 1 000 € tilille, jonka korkokanta on 3 % p.a. Laske talletuksen reaalinen arvo vuoden 2013 lopussa. Käytä indeksiä KHI (2005 = 100).

3.21. (YO K08) Vuoden 2002 alussa Liisa talletti 1 000 euroa tilille, jonka vuotuinen korko oli 1,5 prosenttia. Kuinka suuri talletus korkoineen oli viisi vuotta myöhemmin? Korkotulon lähdevero oli 1.1.2005 lähtien 28 prosenttia ja sitä ennen 29 prosenttia. Mikä oli talletuksen reaaliarvon muutos prosentteina? Vuoden 2002 alussa elinkustannusindeksi oli 1548 ja viisi vuotta myöhemmin 1632.

4 Verotus

Vero on lakisääteistä pakkoperintää, johon yksittäiset kansalaiset ja yritykset osallistuvat. Tässä luvussa keskitytään yksityishenkilöiden verotukseen ja erityisesti palkanlaskentaan liittyvään verotukseen. Kappaleiden 4.2–4.3 tavoitteena on saada peruskäsitys yksityishenkilön tuloverotuksesta. Tavaroiden ja palveluiden hintoihin sisältyvään arvonlisäveroon tutustutaan kappaleessa 4.6. Kappaleessa 4.7 käsitellään lyhyesti muita henkilöverotukseen liittyviä asioita. Korkotulon lähdeverotukseen palataan luvussa 5.

4.1 Peruskäsitteitä

Suomessa **Verohallinto** kerää noin kaksi kolmasosaa (noin 67 %) veroista ja veronluonteisista maksuista ja tilittää veronsaajille. Muut veroja ja veroluonteisia maksuja keräävät viranomaiset ovat *Tulli* ja *Liikenteen turvallisuusvirasto*. **Veronsaajia** ovat valtio, kunnat ja seurakunnat, Kansaneläkelaitos (kela) sekä metsänhoitoyhdistykset.

Veroasteella eli kokonaisveroasteella tarkoitetaan julkisen sektorin keräämien pakollisten verojen ja veronluonteisten maksujen vuosikertymää suhteessa saman ajanjakson bruttokansantuotteeseen. Veroaste on verotuksen tason mittari eri maissa.

Suhteellisessa verossa eli tasaverossa veron prosentuaalinen osuus on sama riippumatta verotettavasta summasta. Tasaveroja ovat esimerkiksi kunnallisvero ja arvonlisävero. **Progressiivisen veron** prosentuaalinen osuus sen sijaan kasvaa verotettavan summan kasvaessa. Esimerkiksi valtion tulovero ja perintövero ovat progressiivisia veroja.

4.2 Tuloverotus

Suomessa sovelletaan eriytettyä tuloverojärjestelmää, jossa veronalainen tulo jaetaan ansiotuloihin sekä varallisuudesta kertyviin pääomatuloihin. **Tuloverolla** tarkoitetaan tuloista (ansio- ja pääomatuloista) perittävää veroa. **Tulovero**

Tuloverotukseen liittyviä käsitteitä ovat

- **Verokanta** eli veroaste: verojen osuus tuloista; veron laskennassa käytetty yksikkö, joka ilmaistaan tyypillisesti prosentteina (veroprosentti).
- **Veronalainen tulo**: ansio- tai pääomatulo, joka otetaan huomioon tuloveroa laskettaessa. Esimerkiksi tieteellistä tutkimusta varten saatu apuraha ei ole veronalaista tuloa.
- **Puhdas tulo**: se osuus veronalaisesta tulosta, joka jää jäljelle kun tulosta on vähennetty sen hankkimisesta ja säilyttämisestä johtuneet menot (ns. luonnolliset vähennykset).
- **Verovähennys**: rahamäärä, jolla verotuksessa pienennetään joko verotettavaa tuloa tai suoraan veron määrää.

- **Verotettava tulo** eli veron perusteena oleva tulo: veronalaisesta tulosta vähennysten jälkeen jäävä ansio- tai pääomatulo, jonka perusteella lopullinen vero lasketaan.
- **Ennakkovero** ja **ennakonpidätys**: ennalta arvioidun tuloveron periminen verovelvolliselta verovuoden aikana ennen lopullista tuloveron määräämistä.
- **Ennakonpalautus**: liikaa maksetun ennakkoveron palautus verovelvolliselle.
- **Jäännösvero**: ennakkoperinnässä maksamatta jäänyt tulovero.
- **Bruttotulo**: saatu tulo, josta ei ole vähennetty mitään.
- **Nettotulo**: se rahamäärä, joka jää jäljelle, kun bruttotulosta on vähennetty siihen liittyvät pienentävät erät kuten verot, tulonhankkimiskulut tai pakolliset vakuutusmaksut.
- **Kokonaisveroprosentti** eli veroprosentti: maksetun tai maksettavaksi määräytyvän veron suhde tuloihin; kuvaa kokonaisverotuksen suuruutta.
- **Marginaalivero** eli rajavero: progressiivisessa verotuksessa verovelvollisen tulon tai varallisuuden lisäyksestä menevän veron määrä; nimitystä käytetään myös käytetyn tavaran arvonlisäverotuksessa tietyissä edelleenmyyntitilanteissa sovelletusta verotusmenettelystä.

Tuloverotus on Suomessa nettoverotusta: veronalaisesta tulosta tehdään ennen veron määräämistä erilaisia verovähennyksiä.

Verotettava ansio- tai pääomatulo

$$\textbf{verotettava tulo} = \text{veronalainen tulo} - \text{tulonhankintakulut ja muut vähennykset}$$

Kokonaisveroprosentilla tarkoitetaan maksettavaksi määräytyvän tai jo maksetun kokonaisveron suhteellista osuutta veronalaisista tuloista:

Kokonaisvero-prosentti

$$\textbf{kokonaisveroprosentti} = \frac{\text{vero (€)}}{\text{veronalainen tulo (€)}}$$

4.3 Pääomatulojen verotus

Pääomatulo

Valtio perii pääomatulosta pääomatuloveroa. **Pääomatuloja** ovat kaikki varallisuudesta kertyvät tulot kuten vuokratulo, kiinteistöjen ja arvopaperien (esimerkiksi asunto-osakkeiden ja pörssiosakkeiden) kaupassa saatu myyntivoitto (ns. luovutusvoitto) sekä pörssiyhtiöistä saatu osinkotulo. Myös talletusten korkotuotot ovat pääomatuloja, mutta niistä peritään pääomatuloveron sijaan **lähdevero**. Lähdeveroa käsitellään korkolaskentaa käsittelevässä luvussa 5.

Verotettava pääomatulo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)
0 – 30 000	0	30
30 000–	9 000	33

Taulukko 4.1: Valtion pääomatuloveroasteikko 2015.

Pääomatulovero lasketaan verotettavasta pääomatulosta, joka saadaan kun veronalaisesta tulosta vähennetään tulon hankkimisesta aiheutuneet kulut ja muut mahdolliset vähennykset.

Vuodesta 2012 alkaen pääomatuloverotus on ollut lievästi progressiivista. Vuonna 2015 pääomatulo verotetaan taulukossa 4.1 esitetyn tuloveroasteikon mukaisesti. Vuonna 2014 ylempi verokanta oli 32 prosenttia ja sen tuloraja oli 40 000 euroa. Vuosina 2012–2013 veroprosentit olivat samat kuin vuonna 2014, mutta tuloraja oli 50 000 euroa.

Esimerkki 4.3.1. Asuntosijoittaja vuokrasi omistamansa yksiön 640 € kuukausivuokralla vuodeksi 2014. Asunnossa tehtiin vuokra-aikana pintaremontti, jonka hinnaksi tuli 350 €. Taloyhtiön perimä yhtiövastike on 142 €/kk, ja asuntoon kohdistuvan lainan korkoja maksettiin yhteensä 128 €. Laske pääomatulovero ja asunnon vuokraamisesta saatu nettotulo.

Ratkaisu: Asunnon vuokraamisesta saadut pääomatulot olivat $12 \cdot 640\text{ €} = 7\,680\text{ €}$. Pääomatuloista vähennetään ennen veron laskemista **tulonhankkimiskulut**. Sellaisen lainan korko, joka kohdistuu veronalaisen tulon hankkimiseen, voidaan vähentää kokonaan. Vuokratulon hankkimisesta aiheutuneet verotuksessa vähennyskelpoiset kulut olivat kaikenkaikkiaan $12 \cdot 142\text{ €} + 128\text{ €} + 350\text{ €} = 2\,182\text{ €}$. Verotettava pääomatulo on siis $7\,680\text{ €} - 2\,182\text{ €} = 5\,498\text{ €}$.

Tulonhankkimiskulut

Vuonna 2014 ylemmän verokannan tuloraja oli 40 000 euroa ja alempi verokanta oli 30 %. Kun muita pääomatuloja ei ole, pääomatulon suuruus on alle 40 000 €, joten veroprosentti on 30. Vuokratulosta perittävän pääomatulovero on $0{,}30 \cdot 5\,498\text{ €} = 1\,649{,}40\text{ €}$.

Asunnon vuokraamisesta saatu nettotulo saadaan vuokratulosta vähentämällä tulonhankkimiskulut ja pääomatulovero: $7\,680\text{ €} - 2\,182\text{ €} - 1\,649{,}40\text{ €} = 3\,848{,}60\text{ €}$.

Luovutusvoitto ja -tappio

Omaisuuden luovutuksessa (myynnissä tai vaihtamisessa) syntyvää voittoa kutsutaan **luovutusvoitoksi**. Luovutusvoittoa syntyy, kun kiinteistö, arvopaperit (kuten asunto-osakkeet ja pörssiosakkeet) tai muu arvo-omaisuus myydään tai vaihdetaan korkeammalla hinnalla kuin millä se on hankittu. Luovutusvoitto verotetaan pääomatulona. **Luovutustappio** syntyy, jos omaisuus myydään hankintahintaa alhaisemmalla hinnalla. Luovutustappio on verotuksessa tietyin edellytyksin vähennyskelpoista (yksityiskohdat menevät lukiokurssin ulkopuolelle).

Esimerkki 4.3.2. Osakesijoittaja myy 500 kappaletta Yhtiö Oy:n osaketta hintaan 50 000 € vuonna 2014. Hän maksaa osakkeiden myynnistä välityspalkkiota arvopaperinvälittäjälle 500 €. Sijoittaja osti osakkeet aikoinaan 25 000 eurolla ja maksoi tuolloin osakkeiden ostosta välityspalkkiota arvopaperinvälittäjälle 300 €. Laske luovutusvoitto ja pääomatuloveron suuruus.

Ratkaisu: Luovutusvoiton määrä lasketaan vähentämällä myyntihinnasta tulonhankintakulut, eli ostohinta sekä muut mahdolliset menot. Kaupassa syntyvä luovutusvoitto on $50\,000\text{ €} - 25\,300\text{ €} - 500\text{ €} = 24\,200\text{ €}$, eli alle 40 000 euroa. Luovutusvoitosta maksettavan pääomatulovero on $0{,}30 \cdot 24\,200\text{ €} = 7\,260\text{ €}$.

Esimerkki 4.3.3. Henkilö myy vapaa-ajankiinteistönsä 50 000 eurolla vuonna 2014. Hän maksaa myynnistä kiinteistönvälittäjälle välityspalkkiota 1 500 euroa. Hän on aikoinaan ostanut kiinteistön 30 000 eurolla ja maksanut tuolloin ostosta varainsiirtoveroa 1 200 euroa. Laske luovutusvoitto ja pääomatuloveron suuruus.

Ratkaisu: Kaupassa syntyvä luovutusvoitto on $50\,000\text{ €} - 31\,200\text{ €} - 1\,500\text{ €} = 17\,300\text{ €}$. Luovutusvoitosta maksettavan pääomatulovero on $0{,}30 \cdot 17\,300\text{ €} = 5\,190\text{ €}$.

4.4 Ansiotulojen ennakonpidätys

Ansiotulo

Ansiotulolla tarkoitetaan verotuksessa tuloa, joka ei ole pääomatuloa (ks. kappale 4.3). Tavallisimpia ansiotuloja ovat työsuhteen perusteella saatu palkka ja kaikki mahdolliset palkan lisät (vuorolisät, lomarahat, bonukset jne.) sekä kokous- ja opetuspalkkiot. Myös palkkatulon sijaan saatu tulo, etuus tai korvaus, esimerkiksi opintoraha, eläke, työttömyyspäiväraha, äitiyspäiväraha ja vanhempainraha lasketaan ansiotuloksi.

Ansiotulosta maksettavat verot ja veronkaltaiset maksut ovat:

– valtion tulovero: progressiivinen;

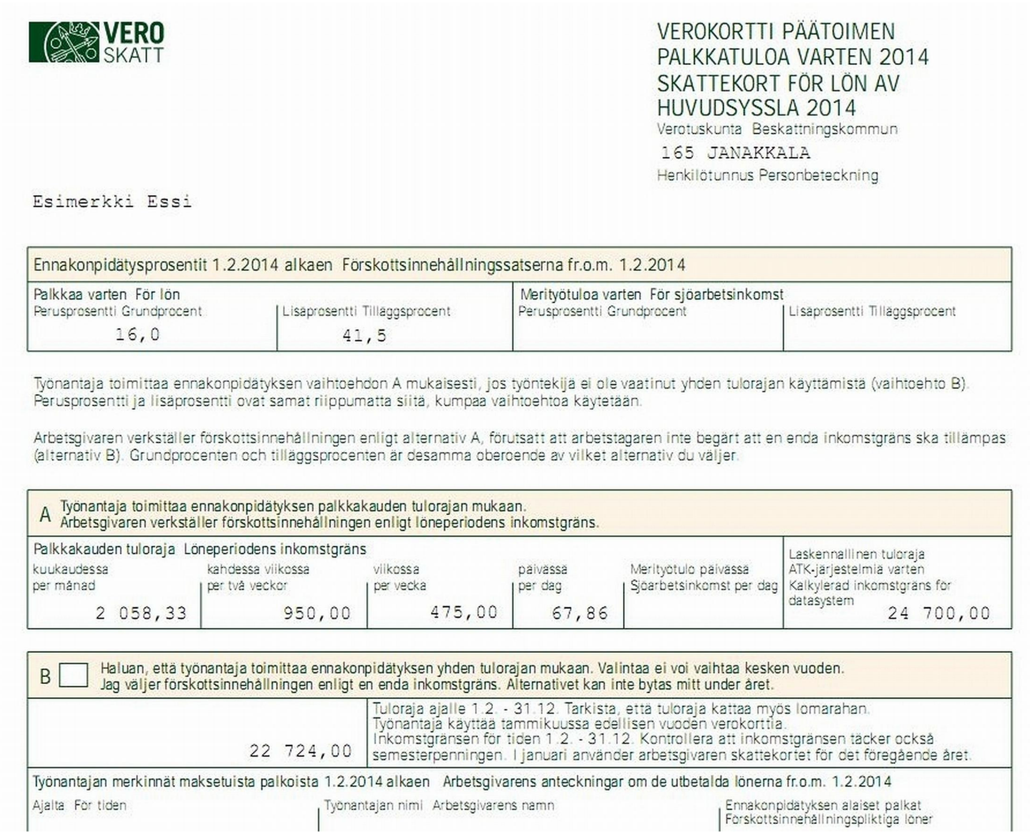
– kunnallisvero, jota maksetaan asuinkunnalle: kuntakohtainen, kiinteä veroprosentti, joka vaihtelee kunnittain välillä 16,50–22,50 (vuonna 2014);

– kirkollisvero, jota maksavat kaikki evankelisluterilaiseen tai ortodoksiseen kirkkoon kuuluvat: kuntakohtainen, kiinteä veroprosentti noin 1,5–2;

– yleisradiovero (Yle-vero): 0,68 % veron perusteena olevasta tulosta (yleensä puhtaan ansio- ja pääomatulon yhteismäärästä), enintään 143 €;

– sairausvakuutusmaksu, joka koostuu päivärahamaksusta ja sairaanhoitomaksusta;

– palkkatulosta maksettavat palkansaajan työttömyysvakuutusmaksu ja työntekijän eläkemaksu (TyEL).


VERO SKATT

VEROKORTTI PÄÄTOIMEN PALKKATULOA VARTEN 2014
SKATTEKORT FÖR LÖN AV HUVUDSYSSLA 2014
Verotuskunta Beskattningskommun
165 JANAKKALA
Henkilötunnus Personbeteckning

Esimerkki Essi

Ennakonpidätysprosentit 1.2.2014 alkaen Förskottsinnehållningssatserna fr.o.m. 1.2.2014

Palkkaa varten För lön		Merityötuloa varten För sjöarbetsinkomst	
Perusprosentti Grundprocent	Lisäprosentti Tilläggsprocent	Perusprosentti Grundprocent	Lisäprosentti Tilläggsprocent
16,0	41,5		

Työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen vaihtoehdon A mukaisesti, jos työntekijä ei ole vaatinut yhden tulorajan käyttämistä (vaihtoehto B). Perusprosentti ja lisäprosentti ovat samat riippumatta siitä, kumpaa vaihtoehtoa käytetään.

Arbetsgivaren verkställer förskottsinnehållningen enligt alternativ A, förutsatt att arbetstagaren inte begärt att en enda inkomstgräns ska tillämpas (alternativ B). Grundprocenten och tilläggsprocenten är desamma oberoende av vilket alternativ du väljer.

A Työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen palkkakauden tulorajan mukaan. Arbetsgivaren verkställer förskottsinnehållningen enligt löneperiodens inkomstgräns.

Palkkakauden tuloraja Löneperiodens inkomstgräns					
kuukaudessa per månad	kahdessa viikossa per två veckor	viikossa per vecka	päivässä per dag	Merityötulo päivässä Sjöarbetsinkomst per dag	Laskennallinen tuloraja ATK-järjestelmiä varten Kalkylerad inkomstgräns för datasystem
2 058,33	950,00	475,00	67,86		24 700,00

B ☐ Haluan, että työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen yhden tulorajan mukaan. Valintaa ei voi vaihtaa kesken vuoden. Jag väljer förskottsinnehållningen enligt en enda inkomstgräns. Alternativet kan inte bytas mitt under året.

22 724,00	Tuloraja ajalle 1.2. - 31.12. Tarkista, että tuloraja kattaa myös lomarahan. Työnantaja käyttää tammikuussa edellisen vuoden verokorttia. Inkomstgränsen för tiden 1.2. - 31.12. Kontrollera att inkomstgränsen täcker också semesterpenningen. I januari använder arbetsgivaren skattekortet för det föregående året.

Työnantajan merkinnät maksetuista palkoista 1.2.2014 alkaen Arbetsgivarens anteckningar om de utbetalda lönerna fr.o.m. 1.2.2014

Ajalta För tiden	Työnantajan nimi Arbetsgivarens namn	Ennakonpidätyksen alaiset palkat Förskottsinnehållningspliktiga löner

Kuva 4.1: Essi Esimerkin verokortti.

Verokortti ja ennakonpidätys

Ennakonpidätys

Ansiotulojen vero peritään ennakkoverona palkan tai muun suorituksen maksun yhteydessä. **Ennakonpidätys** sisältää valtion tuloveron, kunnallisveron, kirkollisveron, Yle-veron ja sairausvakuutusmaksun (sekä arvion pääomatuloverosta, mikäli pääomatuloja on odotettavissa).

Ennakonpidätysprosentti

Ennakonpidätys toimitetaan palkansaajan verokorttiin merkityn **ennakonpidätysprosentin** mukaan. Ennakonpidätysprosentti on arvio kokonaisveroprosentista ja sen laskeminen perustuu vuosituloa sekä siitä tehtäviä vähennyksiä koskevaan arvioon. Verokorttiin on merkitty ennakonpidätyksen **perusprosentti** ja **lisäprosentti** sekä näitä koskevat tulorajat. Ennakonpidätys toimitetaan perusprosentin suuruisena tulorajaan asti ja ylimenevästä osasta lisäprosentin mukaan.

Sosiaalivakuutusmaksut

Veroennakon lisäksi työnantaja pidättää palkanmaksun yhteydessä automaattisesti työntekijän osuuden lakisääteisistä **työeläke- ja työttömyysvakuutusmaksuista** ja tilittää sen vakuutusyhtiölle ja Työttömyysvakuutusrahastolle. Maksun suuruus on tietty vuosittain määrätty prosenttiosuus bruttopalkasta eikä se sisälly ennakonpidätysprosenttiin.

	2014	2015
Sairausvakuutusmaksu (%)		
sairaanhoitomaksu	1,32	1,32
päivärahamaksu	0,84	0,78
Työeläkevakuutusmaksu (TyEL) (%)		
18 — 52-vuotiaat	5,55	5,70
53 vuotta täyttäneet	7,05	7,20
Työttömyysvakuutusmaksu (%)	0,50	0,65

Taulukko 4.2: Sosiaalivakuutusmaksut.

Lakisääteisiin sosiaalivakuutusmaksuihin kuuluu edellä mainittujen lisäksi **sairausvakuutusmaksu**, joka koostuu sairaanhoitomaksusta ja päivärahamaksusta. Sairausvakuutusmaksu on huomioitu ennakonpidätysprosentissa, eikä sitä pidätetä erikseen palkasta. Lakisääteisten sosiaalimaksujen työntekijän maksuosuudet on esitetty taulukossa 4.2.

Esimerkki 4.4.1. Essi Esimerkin verokortti on esitetty kuvassa 4.1. Kuinka paljon Essin palkkatuloista pidätetään veroennakkoa, kun hänen kuukauden palkkatulonsa ovat

(a) 1 700 €, (b) 2 300 €?

Ratkaisu: Verokortin perusprosentti on 16,0 ja lisäprosentti 41,5. Ennakonpidätys toimitetaan vaihtoehdon A mukaisesti, eli noudatetaan palkkakausikohtaista tulorajaa. Palkkakauden tuloraja kuukaudessa on 2 058,33 euroa.

(a) Kuukauden palkkatulo on tulorajaa pienempi, joten ennakonpidätys lasketaan verokorttiin merkityn perusprosentin mukaan. Ennakonpidätys on $0{,}16 \cdot 1\,700\text{ €} = 272\text{ €}$ kuukaudessa. Koko vuoden ennakonpidätys on $12 \cdot 272\text{ €} = 3264\text{ €}$.

(b) Kuukauden palkkatulo ylittää palkkakauden tulorajan 2 058,33 €. Tulorajaan asti veroennakkoa peritään perusprosentin 16,0 verran ja tulorajan ylittävältä osalta lisäprosentin 41,5 mukaan. Ennakonpidätys on

$$0{,}16 \cdot 2\,058{,}33\text{ €} + 0{,}415 \cdot (2\,300\text{ €} - 2\,058{,}33\text{ €}) \approx 429{,}63\text{ €}$$

kuukaudessa. Koko vuoden ennakonpidätys on $12 \cdot 429{,}63\text{ €} = 5\,155{,}56\text{ €}$.

Brutto- ja nettopalkka

Bruttopalkka on työnantajan maksama kokonaispalkka, josta ei ole vähennetty veroja eikä muita maksuja. Esimerkiksi työilmoituksissa ja työsopimuksissa esitetään tehtävästä maksettava bruttopalkka. Työnantaja vähentää bruttopalkasta ennakonpidätyksen ja lakisääteiset työeläke- ja työttömyysvakuutusmaksut sekä muut mahdolliset maksut, esimerkiksi ammattiliiton jäsenmaksun, ja maksaa työntekijän tilille nettopalkan. **Nettopalkka** on siis se osuus palkasta, joka palkansaajalle jää käteen, kun bruttopalkasta on vähennetty verot ja muut pakolliset maksut.

Esimerkki 4.4.2. Laske Essi Esimerkin nettopalkka, kun hänen kuukausipalkkansa on 3 200 €. Kuinka monta prosenttia nettopalkka on bruttopalkasta? Veroennakon lisäksi työnantaja pidättää TyEL-maksun (5,55 %) sekä työttömyysvakuutusmaksun (0,50 %).

Ratkaisu: Ennakonpidätys on

$$0{,}16 \cdot 2\,058{,}33 \text{ €} + 0{,}415 \cdot (3\,200 \text{ €} - 2\,058{,}33 \text{ €}) \approx 803{,}13 \text{ €}.$$

Pakollisissa vakuutusmaksuissa on kiinteä veroprosentti, joka on $5{,}55\% + 0{,}50\% = 6{,}05\%$. Vakuutusmaksujen suuruus on $0{,}0605 \cdot 3\,200 \text{ €} = 193{,}60 \text{ €}$. Palkasta pidätetään veroja ja verojen kaltaisia maksuja siis yhteensä $803{,}13 \text{ €} + 193{,}60 \text{ €} = 996{,}73 \text{ €}$.

Käteen jäävä nettopalkka on $3\,200 \text{ €} - 996{,}73 \text{ €} = 2\,203{,}27 \text{ €}$. Sen osuus bruttopalkasta on

$$\frac{2\,203{,}27 \text{ €}}{3\,200 \text{ €}} = 0{,}6885\ldots \approx 69 \text{ \%}.$$

Esimerkki 4.4.3. Työntekijän tilille maksettava nettopalkka vuonna 2011 oli 1 300 euroa kuukaudessa. Verokortin perusprosentti oli 14,5 ja lisäprosentti 32,0. Tulorajaksi oli merkitty 1 500 € kuukaudessa. Veroennakon lisäksi palkasta perittiin työeläkevakuutusmaksua 4,7 % ja työttömyysvakuutusmaksua 0,6 %. Laske bruttopalkka.

Ratkaisu: Vero tulorajan 1 500 € kohdalla on $0{,}145 \cdot 1\,500 \text{ €} = 217{,}50 \text{ €}$, ja pakollisten vakuutusmaksujen suuruus on $(0,047 + 0,006) \cdot 1\,500 \text{ €} = 79{,}50 \text{ €}$. Tulorajaa vastaava nettopalkka on siis $1\,500 \text{ €} - 217{,}50 \text{ €} - 79{,}50 \text{ €} = 1\,203 \text{ €}$. Koska todellinen nettopalkka 1 300 € on tätä suurempi, sitä vastaava bruttopalkka ylittää tulorajan.

Merkitään tuntematonta bruttopalkkaa kirjaimella x (euroa). Nyt siis $x > 1\,500 \text{ €}$. Verot ja muut maksut peritään bruttopalkasta. Veroennakkoa peritään tulorajaan asti perusprosentin 14,5 verran ja tulorajan ylittävältä osalta lisäprosentin 32,0 mukaan. Veroennakko on

$$0{,}145 \cdot 1\,500 \text{ €} + 0{,}32 \cdot (x - 1\,500 \text{ €}) = 0{,}32x - 262{,}50 \text{ €}.$$

Muissa maksuissa on kiinteä veroprosentti $4{,}7\ \% + 0{,}6\ \% = 5{,}3\ \%$, joten niiden suuruus on $0{,}053x$. Veroennakon ja muiden maksujen yhteenlaskettu suuruus on

$$(0{,}32x - 262{,}50 \text{ €}) + 0{,}053x = 0{,}373x - 262{,}50 \text{ €}.$$

Vähentämällä bruttopalkasta veroennakko ja muut maksut, saadaan nettopalkaksi

$$x - (0{,}373x - 262{,}50 \text{ €}) = 0{,}627x + 262{,}50 \text{ €}.$$

Toisaalta tiedetään, että nettopalkka on 1 300 €, joten saadaan yhtälö

$$0{,}627x + 262{,}50 \text{ €} = 1\,300 \text{ €}.$$

Tästä ratkaistaan $x \approx 1\,654{,}70 \text{ €}$. Työtekijän bruttopalkka oli siis 1 654,70 € kuukaudessa.

4.5 Lopullinen tuloverotus

Ennakkoperintä perustuu verovuoden tuloja koskevaan arvioon. Lopullinen verotus toimitetaan jälkikäteen, kun todelliset vuositulot (sekä ansio- että pääomatulot) ja muut verotukseen vaikuttavat tekijät ovat tiedossa.

Ansiotulojen verovähennykset

Verotettava ansiotulo (veron peruste) määrätään valtion- ja kunnallisverotuksessa erikseen veronalaisen tulon ja siitä tehtävien vähennysten perusteella:

Verotettava ansiotulo

verotettava ansiotulo (veron peruste) = veronalainen tulo − vähennykset

Luonnolliset vähennykset

Sekä valtion- että kunnallisverotuksessa huomioidaan ensin niin sanotut **luonnolliset vähennykset**, eli tulon hankkimisesta tai säilyttämisestä johtuneet kustannukset, joita ovat muun muassa

- tulonhankkimisvähennys 620 €,
- työmarkkinajärjestöjen ja työttömyyskassojen jäsenmaksut,
- työmatkakustannukset omavastuuosuuden ylittävältä osalta; omavastuu on 750 € vuonna 2015 (600 € vuosina 2012–2014).

Puhdas ansiotulo

Luonnolliset vähennykset pienentävät verotettavaa ansiotuloa. Kun veronalaisesta ansiotulosta on vähennetty luonnolliset vähennykset saadaan **puhdas ansiotulo**.

Esimerkki 4.5.1. Työntekijän veronalaiset bruttoansiotulot olivat 27 000 € vuonna 2013. Hän maksoi ennakonpidätyksen yhteydessä pakollisia työeläke- ja työttömyysvakuutusmaksuja yhteensä 5,75 % sekä vapaaehtoista ammattijärjestön jäsenmaksua, jonka suuruus oli 1,15 % palkasta. Työmatkoihin kului vuoden aikana 890 €. Muita tulonhankkimiskuluja kertyi ammattikirjallisuuden hankkimisesta ja itse maksetusta täydennyskoulutuksesta yhteensä 982 €. Laske puhdas ansiotulo.

Ratkaisu: Lasketaan luonnolliset vähennykset:

- tulonhankkimiskulut 982 €,
- ammattijärjestön jäsenmaksut $0{,}0115 \cdot 27\,000$ € = 310,50 €,
- työmatkakulujen omavastuuosuuden ylitys 890 € − 600 € = 290 €.

Luonnollisia vähennyksiä on yhteensä 982 € + 310,50 € + 290 € = 1 582,50 €. Puhdas ansiotulo on 27 000 € − 1 582,50 € = 25 417,50 €.

Pakolliset työeläke- ja työttömyysvakuutusmaksut $0{,}0575 \cdot 27\,000$ € = 1 552,50 € vähennetään puhtaasta ansiotulosta sekä valtionverotuksessa että kunnallisverotuksessa.

Valtionverotuksessa ja kunnallisverotuksessa tehdään puhtaaseen ansiotuloon omat vähennyksensä, jotka voivat pienentää joko verotettavaa tuloa tai itse veron määrää. Esimerkiksi pakolliset työeläke- ja työttömyysvakuutusmaksut sekä sairausvakuutuksen päivärahamaksu vähennetään puhtaasta ansiotulosta sekä valtionverotuksessa että kunnallisverotuksessa. Verotettava tulo on vähennyksistä johtuen valtionverotuksessa usein eri suuri kuin kunnallisverotuksessa.

Automaattiset vähennykset

Verohallinto myöntää suuren osan verovähennyksistä viran puolesta. Kunnallisverotuksessa automaattisesti huomioitavia vähennyksiä ovat muun muassa niin sanottu ansiotulovähennys, opintorahavähennys sekä pienituloisille myönnettävä perusvähennys. Valtion verotuksessa automaattisesti huomioitaviin vähennyksiin kuuluu niin sanottu työtulovähennys, joka pienentää suoraan valtion tuloveroa. Myös esimerkiksi asuntolainan korot ovat osin verovähennyskelpoisia.

Itse ilmoitettavat vähennykset

Osa vähennyksistä verovelvollisen on erikseen ilmoitettava Verohallintoon. Tällaisia veronmaksajan itse ilmoitettavia vähennyksiä ovat muun muassa

- asunnon ja työpaikan väliset matkakulut,
- tulonhankkimiskulut, kuten ammattikirjallisuus, työvaatteet, työhön käytettävien koneiden ja laitteiden hankintamenot sekä työhuonevähennys, silloin kun niiden yhteenlaskettu määrä ylittää automaattisen vähennyksen 620 €,
- työasuntovähennys,
- kotitalousvähennykset.

Osa edellämainituista verovähennyksistä kohdistuu ensisijaisesti pääomatuloihin, jos niitä on. Verovähennysjärjestelmä on verraten monimutkainen ja vähennysten laskemisen yksityiskohdat menevät lukiokurssin ulkopuolelle.

Valtion tulovero

Valtion tulovero
Progressiivinen verotus

Valtion tuloveroa peritään verotettavasta ansiotulosta kulloisellekin verovuodelle määrätyn progressiivisen tuloveroasteikon mukaan. Veroasteikon progressiivisuus tarkoittaa sitä, että enemmän ansaitsevat maksavat veroja suhteellisesti enemmän kuin pienituloisemmat. Ansiotulojen valtion verotus on esimerkki **progressiivisesta verotuksesta**.

Esimerkki 4.5.2. Vuonna 2013 työntekijän verotettavat ansiotulot olivat valtion verotuksessa 27 500 €. Lasketaan tuloveron suuruus.

Verotettava ansiotulo kuuluu luokkaan 23 900 € – 39 100 € ja vero alarajan 23 900 € kohdalla on 515 € (taulukko 4.3). Alarajan ylittävältä osalta maksetaan veroa 17,5 %, eli $0,175 \cdot (27\,500\text{ €} - 23\,900\text{ €}) = 630\text{ €}$. Henkilöltä peritään siis valtion tuloveroa $515\text{ €} + 630\text{ €} = 1145\text{ €}$.

Verotettava ansiotulo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)
16 100 – 23 900	8	6,5
23 900 – 39 100	515	17,5
39 100 – 70 300	3 175	21,5
70 300 – 100 000	9 883	29,75
100 000–	18 718,75	31,75

Taulukko 4.3: Valtion tuloveroasteikko 2013.

Esimerkki 4.5.3. Työntekijä maksoi vuonna 2013 valtion tuloveroa 5 130 €. Lasketaan verotettava ansiotulo.

Vero on enemmän kuin 3 175 € mutta vähemmän kuin 9 883 €, joten verotettava ansiotulo kuuluu tuloluokkaan 39 100 € – 70 300 €. Merkitään verotettavaa ansiotuloa kirjaimella x. Vero asteikon alarajan 39 100 € kohdalla on 3 175 € ja alarajan ylittävältä osalta maksetaan veroa 21,5 %. Työntekijän maksamasta tuloverosta saadaan yhtälö

$$3\,175 + 0{,}215 \cdot (x - 39\,100) = 5\,130,$$

mistä ratkaisemalla saadaan verotettava ansiotulo $x = 48\,193{,}02$ €.

Kunnallis- ja kirkollisvero

Kunnallis- ja kirkollisvero

Kunnallisvero ja **kirkollisvero** peritään verotettavasta ansiotulosta kuntakohtaisen kiinteän tuloveroprosentin mukaan. Verotettava tulo saadaan, kun puhtaasta ansiotulosta tehdään kunnallisverotuksessa sallitut vähennykset. Kunnallisverotuksen vähennykset ovat kaikki viran puolesta automaattisesti tehtäviä ja verraten hankalia laskea käsipelillä. Useimmat palkansaajat saavat näistä vähennyksistä vain kunnallisverotuksen **ansiotulovähennyksen**. Sitä on havainnollistettu esimerkissä 4.5.5. Verovähennysten laskukaavojen tunteminen ei kuitenkaan kuulu lukiokurssiin.

Vuonna 2014 kunnallisveroprosentti vaihteli välillä 16,50–22,50 ja keskimääräinen kunnallisveroprosentti oli 19,74. Kirkollisveroa maksavat evankelisluterilaisten ja ortodoksisten seurakuntien jäsenet. Vuonna 2014 kuntakohtainen kirkollisveroprosentti vaihteli välillä 1,00–2,00.

Esimerkki 4.5.4. Espoossa asuvan työntekijän verotettavat ansiotulot kunnallisverotuksessa olivat 43 752,14 € vuonna 2013. Laske kunnallisveron suuruus. Espoon kunnallisveroprosentti vuonna 2013 oli 17,75.

Ratkaisu: Kunnallisvero on $0{,}1775 \cdot 43\,752{,}14$ € $\approx 7\,766{,}00$ €.

Esimerkki 4.5.5. Kunnallisverotuksessa huomioitavan ansiotulovähennyksen määrä lasketaan seuraavasti (verovuodet 2012–2015):

Ansiotulovähennys on 51 % puhtaan ansiotulon 2 500 € ylittävästä osasta 7 230 euron tuloihin saakka, minkä ylittävien tulojen osalta vähennys on 28 %. Vähennyksen enimmäismäärä on 3 570 €. Jos puhtaat ansiotulot ovat yli 14 000 €, niin ansiotulovähennyksen määrää pienennetään 4,5 prosentilla puhtaan ansiotulon 14 000 euron ylittävältä osalta. Vähennystä ei saa, jos puhtaat ansiotulot ylittävät 93 333 euroa.

Lasketaan ansiotulovähennys, kun palkansaajan puhdas ansiotulo vuonna 2013 oli

(a) 10 318,00 €, (b) 13 470,00 €, (c) 39 167,00 €.

Ratkaisu:

(a) Ansiotulovähennyksen laskukaavan mukaan vähennys on

$$0{,}51 \cdot (7\,230\ € - 2\,500\ €) + 0{,}28 \cdot (10\,318{,}00\ € - 7\,230\ €) = 3\,276{,}94\ €.$$

Puhtaat ansiotulot eivät ylitä 14 000 € rajaa, joten ansiotulovähennyksen määrää ei pienennetä. Ansiotulovähennys on 3 276,94 €.

(b) Ansiotulovähennyksen laskukaavan mukaan vähennys olisi

$$0{,}51 \cdot (7\,230\ € - 2\,500\ €) + 0{,}28 \cdot (13\,470{,}00\ € - 7\,230\ €) = 4\,159{,}50\ €,$$

mikä kuitenkin ylittää vähennyksen enimmäismäärän 3 570 €. Puhtaat ansiotulot eivät ylitä 14 000 € rajaa, joten ansiotulovähennyksen määrää ei pienennetä. Ansiotulovähennyksenä sallitaan siis sen enimmäismäärä 3 570 €.

(c) Ansiotulovähennyksen laskukaavan mukaan vähennys olisi

$$0{,}51 \cdot (7\,230\ € - 2\,500\ €) + 0{,}28 \cdot (39\,167{,}00\ € - 7\,230\ €) = 11\,354{,}66\ €,$$

mikä kuitenkin ylittää vähennyksen enimmäismäärän 3 570 €. Puhtaat ansiotulot ylittävät 14 000 € rajan, joten ansiotulovähennyksen määrää pienennetään. Pienennyksen suuruus on 4,5 % puhtaan ansiotulon 14 000 € ylittävältä osalta:

$$0{,}045 \cdot (39\,167{,}00\ € - 14\,000\ €) = 1132{,}515\ €.$$

Ansiotulovähennys on 3 570 € − 1132,515 € = 2437,49 €.

Veronpalautus ja jäännösvero

Lopullinen vero

Verotettavan tulon perusteella määräytyy koko vuonna maksettavaksi määräytyvä vero eli **lopullinen vero**. Sitä verrataan vuoden aikana maksettuun ennakkoveroon:

– Jos lopullinen vero on pienempi kuin vuoden aikana maksettu ennakkovero, valtio maksaa **veronpalautuksen (ennakonpalautuksen)** korkoineen.

– Jos lopullinen vero on suurempi kuin vuoden aikana maksettu ennakkovero, palkansaajan maksettavaksi lankeaa **jäännösvero (ns. veromätky)** korkoineen.

Esimerkki 4.5.6. Espoolaisen työntekijän veronalainen ansiotulo vuonna 2013 oli 28 500 euroa. Pääomatuloja ei kertynyt. Hänellä oli ansiotulosta tehtäviä vähennyksiä valtion verotuksessa yhteensä 1 200 € ja kunnallisverotuksessa yhteensä 1 750 €. Espoon kunnallisveroprosentti vuonna 2013 oli 17,75 ja ev.lut.kirkon kirkollisveroprosentti 1,00.

Tuloveron lisäksi ansiotulosta peritään sairaanhoitomaksu, jonka suuruus on palkansaajilla 1,30 % kunnallisverotuksessa verotettavasta tulosta, sekä päivärahamaksu, jonka suuruus on 0,74 % veronalaisesta palkkatulosta (2013). Lisäksi kaikki 18 vuotta täyttäneet maksavat tuloista Yle-veroa, jonka suuruus on 0,68 % puhtaan ansio- ja pääomatulon yhteismäärästä, kuitenkin enintään 140 €. Yle-vero ei tule maksettavaksi, jos sen suuruus on alle 50 € (2013).

Työntekijältä oli pidätetty veroja ennakonpidätyksinä vuonna 2013 yhteensä 6 800 €. Lasketaan työntekijän

(a) verotettava ansiotulo valtion verotuksessa ja kunnallisverotuksessa.

(b) valtion tuloveron, kunnallisveron ja kirkollisveron suuruudet.

(c) muiden verojen ja maksujen suuruus (pakollisia TyEL- ja työttömyysvakuutusmaksuja ei tarvitse huomioida).

(d) verojen ja muiden maksujen kokonaismäärä ja kokonaisveroprosentti.

(e) nettoansiot.

(f) veronpalautuksen tai jäännösveron suuruus.

Ratkaisu:

(a) Verotettava ansiotulo valtionverotuksessa on $28\,500$ € $-$ 1200 € $=$ $27\,300$ € ja kunnallisverotuksessa $28\,500$ € $-$ $1\,750$ € $=$ $26\,750$ €.

(b) Taulukon 4.3 mukaan valtion tuloveron suuruudeksi saadaan

$$515\text{ €} + 0{,}175 \cdot (27\,300 - 23\,900)\text{ €} = 1\,110\text{ €}.$$

Kunnallisveron suuruus on $0{,}1775 \cdot 26\,750$ € $= 4\,748{,}13$ €. Kirkollisveron suuruus on $0{,}01 \cdot 26\,750$ € $= 267{,}50$ €.

(c) Sairaanhoitomaksun suuruus on $0{,}013 \cdot 26\,750$ € $= 347{,}75$ €. Päivärahamaksun suuruus on $0{,}0074 \cdot 28\,500$ € $= 210{,}90$ €. Yle-vero määräytyy puhtaan ansiotulon (ja puhtaan pääomatulon) perusteella. Esimerkin tiedoilla ei puhtaan ansiotulon määrää pysty laskemaan, mutta se on vähintään yhtä suuri kuin verotettava ansiotulo valtionverotuksessa. Koska $0{,}0068 \cdot 27\,300$ € $= 185{,}64$ €, niin Yle-veron suuruus on 140 €.

(d) Verojen yhteismäärä on

$$1\,110 \text{ €} + 4\,748{,}13 \text{ €} + 267{,}50 \text{ €} + 347{,}75 \text{ €} + 210{,}90 \text{ €} + 140 \text{ €} = 6\,824{,}28 \text{ €}.$$

Kokonaisveroprosentti lasketaan verojen ja veronalaisen tulon perusteella:

$$\frac{6\,824{,}28 \text{ €}}{28\,500 \text{ €}} = 0{,}23944\ldots \approx 23{,}94 \text{ \%}.$$

(e) Työntekijälle jäi 28 500 euron palkasta verojen jälkeen käteen nettoansiona

$$28\,500 \text{ €} - 6\,824{,}28 \text{ €} = 21\,675{,}72 \text{ €}.$$

(f) Lopulliset verot vuonna 2013 olivat 6 824,28 ja ennakonpidätystä suoritettiin 6 800 €. Ennakkoperinnässä on maksettu vähemmän veroa kuin lopullisen verotuksen perusteella tulee maksettavaksi. Jäännösveron suuruus on

$$6\,824{,}28 \text{ €} - 6\,800 \text{ €} = 24{,}28 \text{ €}.$$

4.6 Arvonlisävero

Arvonlisävero (alv tai ALV) on kuluttajan maksettavaksi tarkoitettu kulutusvero. Lähes kaikkien myytävien tavaroiden ja palveluiden hinnat sisältävät arvonlisäveron.

- Myyjä lisää tavaran tai palvelun hintaan arvonlisäveron, perii sen asiakkaalta ja tilittää valtiolle.
- Jos myyjä on itse maksanut arvonlisäveroa tuottaessaan myymäänsä tavaraa tai palvelua, voi hän vähentää sen valtiolle tilitettävästä arvonlisäverosta.

Arvonlisäverovelvollisia ovat kaikki, jotka liiketoiminnan muodossa harjoittavat tavaroiden tai palveluiden myyntiä.

Tuote tai palvelu	ALV (%)
Yleinen arvonlisävero (useimmat tavarat ja palvelut, esim. vaatteet)	24
Elintarvikkeet, rehut, ravintola- ja ateriapalvelut	14
Kirjat, tilatut sanoma- ja aikakauslehdet, lääkkeet, elokuvaliput, muut kulttuuri- ja viihdetilaisuuksien pääsyliput, liikuntapalvelut, majoituspalvelut ja henkilökuljetukset (kuten matkaliput)	10

Taulukko 4.4: Arvonlisäveroasteikko (1.1.2013 alkaen).

Peruskäsitteet ja -laskukaavat: veroton ja verollinen hinta

Tuotteen tai palvelun myyntihinta muodostuu sen arvonlisäverottomasta perushinnasta ja arvonlisäverosta. Tärkeintä on muistaa perusperiaate: arvonlisäveron määrä lasketaan aina verottomasta perushinnasta, ei myyntihinnasta. Arvonlisäverolaskuissa esiintyvät laskukaavat on koottu alle. Niiden ulkoa opetteleminen ei ole välttämätöntä, sillä perusperiaatteen muistaminen yleensä riittää oikean laskumenetelmän löytämiseen.

Arvonlisävero

- P = perushinta eli arvonlisäveroton hinta
- i = veroprosentti (verokanta) desimaalilukuna ilmoitettuna ($0 < i < 1$)
- M = myyntihinta eli verollinen hinta: $M = P + ALV$.
- ALV = arvonlisäveron määrä euroina:

$$ALV = i \cdot P \qquad \text{tai} \qquad ALV = \frac{i}{1+i} \cdot M$$

- Perushinnan ja myyntihinnan yhteys:

$$M = (1+i) \cdot P \qquad \text{ja} \qquad P = \frac{M}{1+i}$$

Esimerkki 4.6.1. Tavaratalossa myydään matkapuhelimia, joiden arvonlisäveroton perushinta on $P = 300$ €. Matkapuhelimen hintaan lisätään arvonlisävero, jossa sovelletaan yleistä 24 % arvonlisäverokantaa (ks. taulukko 4.4), eli $i = 0{,}24$. Veron suuruus on $ALV = 0{,}24 \cdot 300 \text{ €} = 72$ €.

Kuluttaja maksaa puhelimesta verollisen hinnan, joka on $M = P + ALV = 300 \text{ €} + 72$ €. Verollinen hinta saadaan myös laskukaavalla $M = (1+i) \cdot P = 1{,}24 \cdot 300 \text{ €} = 372$ €.

Esimerkki 4.6.2. Ostat talvikengät, joiden hinta liikkeessä on 115 €. Kenkäostosten jälkeen menet elokuviin ja maksat elokuvalipusta 10,50 €. Kuinka paljon maksat arvonlisäveroa? Vaatteiden ja jalkineiden arvonlisävero on 24 % ja elokuvalipun arvonlisävero on 10 %.

Ratkaisu: Arvonlisäveron määrä voidaan laskea eri tavoin. Tässä esimerkissä erilaisia tapoja havainnollistetaan laskemalla kenkien ja elokuvalipun arvonlisävero eri tavoilla.

– Merkitään kenkien arvonlisäverotonta perushintaa kirjaimella P (euroa). Arvonlisäveron suuruus on $ALV = 0{,}24 \cdot P$ (euroa) ja kenkien myyntihinta on

$$M = P + ALV = P + 0{,}24P = 1{,}24 \cdot P \quad \text{(euroa)}.$$

Toisaalta tiedetään, että myyntihinta $M = 115$ €. Saadaan yhtälö

$$1{,}24 \cdot P = 115 \text{ €},$$

josta ratkaisemalla saadaan kenkien veroton hinta $P \approx 92{,}74$ € euroa. Kenkien hinnassa on arvonlisäveroa $ALV = i \cdot P = 0{,}24 \cdot 92{,}74 \text{ €} \approx 22{,}26$ €.

– Elokuvalipun arvonlisäveroton hinta P saadaan myyntihinnasta $M = 10{,}50$ € laskukaavalla

$$P = \frac{M}{1+i} = \frac{10{,}50 \text{ €}}{1{,}10} \approx 9{,}55 \text{ €}$$

ja veron osuus erotuksena $ALV = M - P = 10{,}50 \text{ €} - 9{,}55 \text{ €} = 0{,}95 \text{ €}$.

Maksat arvonlisäveroa siis yhteensä $22{,}26 \text{ €} + 0{,}95 \text{ €} = 23{,}21 \text{ €}$.

Arvonlisäveron määrä voidaan laskea myös suoraan laskukaavalla

$$ALV = \frac{i}{1+i} \cdot M.$$

Sen mukaan kenkien ja elokuvalipun hinnassa on arvonlisäveroa yhteensä

$$\frac{0{,}24}{1{,}24} \cdot 115 \text{ €} + \frac{0{,}10}{1{,}10} \cdot 10{,}50 \text{ €} \approx 22{,}26 \text{ €} + 0{,}95 \text{ €} = 23{,}21 \text{ €}.$$

Esimerkki 4.6.3. Leipomossa leivän verottomaksi perushinnaksi asetetaan 0,50 €. Leipomo myy leivän kauppiaalle ja lisää myynnin yhteydessä sen hintaan 14 % arvonlisäveroa. Kauppias maksaa leivästä siis $1,14 \cdot 0{,}50 \text{ €} = 0{,}57 \text{ €}$, ja kauppiaan maksamassa hinnassa on arvonlisäveroa 0,07 €. Leipomo tilittää veron valtiolle.

Kaupassa leivän verottomaksi perushinnaksi asetetaan 1,00 €. Kauppias lisää leivän hintaan arvonlisäveroa 14 %. Kuluttaja maksaa leivästä $1{,}14 \cdot 1{,}00 \text{ €} = 1{,}14 \text{ €}$. Kuluttajan maksamassa hinnassa on arvonlisäveroa siis 0,14 €.

Kauppias maksoi leivästä oston yhteydessä arvonlisäveroa 0,07 €, joten kauppias tilittää valtiolle erotuksen $0{,}14 \text{ €} - 0{,}07 \text{ €} = 0{,}07 \text{ €}$.

Esimerkki 4.6.4. Leipomo valmistaa leipiä, jotka se myy edelleen tukkukauppiaalle. Leipomo osti leivontatarvikkeita 7 600 eurolla ja myi valmiita leipiä tukkukauppiaalle 14 800 euron arvosta. Molemmat hinnat sisältävät arvonlisäveron. Kuinka paljon arvonlisäveroa leipomon on tilitettävä valtiolle?

Ratkaisu: Kyse on elintarvikkeista, joiden arvonlisävero on 14 % verottomasta hinnasta. Ostettujen leivontatarvikkeiden hinta sisältää arvonlisäveron. Merkitään verotonta perushintaa kirjaimella P. Verollinen hinta on 7 600 €, joten saadaan yhtälö:

$$1{,}14P = 7\,600 \text{ €} \Leftrightarrow P = \frac{7\,600 \text{ €}}{1{,}14} \approx 6\,666{,}67 \text{ €}.$$

Ostettujen leivontatarvikkeiden hinnassa on siis arvonlisäveroa

$$7\,600 \text{ €} - 6\,666{,}67 \text{ €} = 933{,}33 \text{ €}.$$

Veron määrä saadaan myös suoraan laskukaavalla:

$$ALV = \frac{i}{1+i} \cdot M = \frac{0{,}14}{1{,}14} \cdot 7\,600 \text{ €} \approx 933{,}33 \text{ €}.$$

Leipomon myyntitulot sisältävät arvonlisäveron. Merkitään verotonta perushintaa kirjaimella P. Verollinen hinta on 14 800 €, joten saadaan yhtälö:

$$1{,}14P = 14\,800\text{ €} \;\Leftrightarrow\; P = \frac{14\,800\text{ €}}{1{,}14} \approx 12\,982{,}46\text{ €}.$$

Myyntitulossa on siis arvonlisäveroa 14 800 € − 12 982,46 € = 1 817,54 €. Sen laskemiseen voidaan käyttää myös samaa laskukaavaa kuin jo aiemmin:

$$ALV = \frac{i}{1+i} \cdot M = \frac{0{,}14}{1{,}14} \cdot 14\,800\text{ €} \approx 1\,817{,}54\text{ €}.$$

Leipomo tilittää valtiolle leipien myynnin yhteydessä perimänsä arvonlisäveron 1 817,54 €, josta on vähennetty leipomon leivontatarvikkeiden oston yhteydessä maksama arvonlisävero 933,33 €. Tilitettävän arvonlisäveron suuruus on 1 817,54 € − 933,33 € = 884,21 €.

Esimerkki 4.6.5. Ostat kioskilta karkkipussin (alv 14 %) sekä aikakauslehden (alv 24 %). Ostokset maksavat yhteensä 9,60 €, josta arvonlisäveroa on 1,61 €. Laske karkkipussin ja aikakauslehden verottomat hinnat. Kuinka suuri osuus loppusummasta on veroa?

Ratkaisu: Ostosten veroton yhteishinta on 9,60 € − 1,61 € = 7,99 €. Merkitään karkkipussin verotonta perushintaa kirjaimella x ja aikakauslehden verotonta perushintaa kirjaimella y, jolloin $x + y = 7{,}99$ €. Karkkipussin arvonlisävero on $0{,}14x$ ja lehden vastaavasti $0{,}24y$. Arvonlisävero on yhteensä $0{,}14x + 0{,}24y = 1{,}61$ €. Ratkaistavana on yhtälöpari:

$$\begin{cases} x + y &= 7{,}99\text{ €} \\ 0{,}14x + 0{,}24y &= 1{,}61\text{ €} \end{cases}$$

Edetään ratkaisemalla ensimmäisestä yhtälöstä $y = 7{,}99\text{ €} - x$ ja sijoittamalla tämä toisen yhtälöön:

$$0{,}14x + 0{,}24 \cdot (7{,}99\text{ €} - x) = 1{,}61\text{ €} \;\Leftrightarrow\; 1{,}9176\text{ €} - 0{,}1x = 1{,}61\text{ €}.$$

Ratkaisuksi saadaan $x = 3{,}076$ € ja $y = 7{,}99\text{ €} - 3{,}076\text{ €} = 4{,}914$ €. Verottomat hinnat ovat siis 3,08 € ja 4,91 €. Veron määrä ostoksissa on

$$\frac{1{,}61\text{ €}}{9{,}60\text{ €}} = 0{,}1677\ldots \approx 16{,}8\ \%.$$

Arvonlisäveron määrä lasketaan aina tuotteen tai palvelun arvonlisäverottomasta perushinnasta, johon on laskettu mukaan kaikki hinnanlisät (esimerkiksi laskutuslisät, kuljetus- ja postituspalvelut), jotka myyjä veloittaa ostajalta. Myös erilaiset haittaverot, kuten polttoaine-, auto- ja makeisvero, sisältyvät arvonlisäveroa laskettaessa tuotteen verottomaan perushintaan.

Esimerkki 4.6.6. Bensiinin hinta huoltoasemalla koostuu sen verottomasta hinnasta, polttoaineverosta sekä arvonlisäverosta. Bensiinilitran veroton hinta on 0,66 €. Huoltoaseman pitäjä lisää verottomaan hintaan polttoainevero, joka on 62,70 senttiä/litra sekä arvonlisäveron. Polttoaineeseen sovelletaan yleistä 24 % arvonlisäverokantaa, ja vero lasketaan bensiin perushinnasta, jossa on huomioitu polttoainevero. Arvonlisäveron suuruus on

$$0{,}24 \cdot (0{,}66\ \text{€} + 0{,}627\ \text{€}) \approx 0{,}309\ \text{€}.$$

Kuluttaja maksaa bensiinilitrasta 0,66 € + 0,627 € + 0,309 € = 1,596 €. Bensiinin hinnassa on veroa yhteensä 1,596 € − 0,66 € = 0,936 € (tai 0,627 € + 0,309 € = 0,936 €). Veron osuus hinnassa on siis

$$\frac{0{,}936\ \text{€}}{1{,}596\ \text{€}} \approx 0{,}586 = 58{,}6\ \%.$$

Esimerkki 4.6.7. EU-maiden ulkopuolelta tulevat matkailijat voivat Suomessa tehdä ostoksia maksamatta arvonlisäveroa. Ilmoita tavaratalossa 331,80 euroa maksavan taidelasimaljakon arvonlisäveroton hinta japanilaiselle turistille tämän kotimaan valuutassa. Maljakkoon sovelletaan yleistä 24 % arvonlisäverokantaa. Käytä valuuttakurssia EUR / JPY 142,89.

Ratkaisu: Lasimaljakon arvonlisäveroton perushinta on

$$P = \frac{M}{1+i} = \frac{331{,}80\ \text{€}}{1{,}24} = 267{,}580\ldots\ \text{€}.$$

Muutetaan euromääräinen hinta jeneiksi. Valuuttakurssi EUR / JPY 142,89 ilmoittaa yhden euron arvon jeneissä: 1 € = 142,89 JPY (ks. kappale 2.1). Lasimaljakon hinta jeneinä on

$$\frac{331{,}80\ \text{€}}{1{,}24} \cdot 142{,}89\ \text{JPY} \approx 38\,235\ \text{JPY}.$$

Taidelasimaljakon hinta japanilaiselle turistille on siis noin 38 235 jeniä.

4.7 Muita veroja

Perintö- ja lahjavero

Perinnöistä ja lahjoista maksetaan veroa valtiolle. Perintö- ja lahjaveron suuruus määräytyy perityn tai lahjoitetun omaisuuden arvon ja sukulaisuussuhteen perusteella. Perintö- ja lahjaverotuksessa edunsaajat jaetaan sukulaisuussuhteen perusteella kahteen veroluokkaan:

Veroluokat

I veroluokka: Lapset (myös ottolapset) ja heidän rintaperillisensä (lapsenlapset, lapsenlapsenlapset jne.), aviopuoliso, aviopuolison lapsi ja heidän rintaperillisensä, isä, äiti, isovanhemmat sekä avopuoliso, jos tällä on yhteinen lapsi perittävän kanssa tai jos tämä on ollut perittävän kanssa aiemmin avioliitossa.

II veroluokka: Kaikki muut — esimerkiksi sisarukset ja heidän jälkeläisensä, perittävän vanhempien sisarukset, avopuoliso yleensä, perheen ulkopuoliset henkilöt.

Perinnön arvo (€)	Veroluokka 1 Vero alarajan kohdalla (€)	 Vero alarajan ylittävästä osuudesta (%)	Veroluokka 2 Vero alarajan kohdalla (€)	 Vero alarajan ylittävästä osuudesta (%)
20 000 – 40 000	100	7	100	20
40 000 – 60 000	1 500	10	4 100	26
60 000 – 200 000	3 500	13	9 300	32
200 000 – 1 000 000	21 700	16		
1 000 000–	149 700	19	310 100	35

Taulukko 4.5: Perintöveroasteikko (1.1.2013 alkaen).

Perintövero

Esimerkki 4.7.1. Vainajalla on kolme aikuista lasta. Hän ei ollut tehnyt testamenttia. Kaikki lapset perivät kukin yhtä suuren osan (1/3) vainajan omaisuudesta. Omaisuuden arvoksi on perukirjaan merkitty 150 000 €.

Omaisuuden arvosta vähennetään kuolinpesän velat sekä muut kuolinpesän maksettavaksi kuuluvat kulut, kuten kohtuulliset hautaamisesta ja perunkirjoituksesta aiheutuvat kustannukset, jolloin verotettavaksi omaisuudeksi jää 90 000 euroa. Lapset kuuluvat veroluokkaan I ja jokainen lapsi perii kolmasosan, eli 30 000 euroa. Kukin lapsi maksaa taulukon 4.5 mukaisesti perintöveroa 100 € + 0,07 · (30 000 € – 20 000 €) = 800 €.

Esimerkki 4.7.2. Henkilö saa tädiltään perinnön, josta hän maksaa veroja 7 740 €. Kuinka suuresta perinnöstä on kyse?

Ratkaisu: Merkitään verotettavan perinnön arvoa kirjaimella x. Henkilö kuuluu veroluokkaan II. Koska vero on enemmän kuin 4 100 € mutta vähemmän kuin 9 300 €, perinnön suuruus on välillä 40 000 € – 60 000 €. Perintövero alarajan kohdalla on 4 100 €, ja alarajan ylittävältä osalta perintöveroa maksetaan 26,0 %. Saadaan yhtälö

$$4\,100\text{ €} + 0{,}26 \cdot (x - 40\,000\text{ €}) = 7\,740\text{ €},$$

josta ratkaisemalla perinnön arvoksi saadaan $x = 54\,000$ €.

Lahjavero

Esimerkki 4.7.3. Isä haluaa lahjoittaa pojalleen 18 000 €. Kuinka suuri on lahjavero, kun a) lahja annetaan yhdellä kertaa, b) lahja annetaan kahdessa 9 000 € lahjoituksessa, ja lahjoistusten väli on yli kolme vuotta?

Ratkaisu: Lahjansaajan täytyy maksaa lahjaveroa, jos hän saa samalta lahjanantajalta kolmen vuoden aikana lahjoja, joiden yhteenlaskettu arvo on 4 000 € tai enemmän. Vanhemmilta saatua lahjaa verotetaan veroluokan I mukaisesti. Myös ennakkoperintö on lahja, josta maksetaan lahjaveroa.

(a) Lahjan arvo on välillä 17 000 € – 50 000 € ja vero alarajan kohdalla on taulukon 4.6 mukaan 1 010 €. Alarajan ylittävältä osalta maksetaan veroa 10 %. Lahjaveron suuruus on 1 010 € + 0,10 · (18 000 € – 17 000 €) = 1 110 €.

Lahjan arvo (€)	Veroluokka 1 Vero alarajan kohdalla (€)	 Vero alarajan ylittävästä osuudesta (%)	Veroluokka 2 Vero alarajan kohdalla (€)	 Vero alarajan ylittävästä osuudesta (%)
4 000 — 17 000	100	7	100	20
17 000 — 50 000	1 010	10	2 700	26
50 000 — 200 000	4 310	13	11 280	32
200 000 — 1 000 000	23 810	16		
1 000 000—	151 810	19	315 280	35

Taulukko 4.6: Lahjaveroasteikko (1.1.2013 alkaen).

(b) Lahjoitusten väli on yli kolme vuotta, joten molempien lahjoitusten vero lasketaan erikseen. Lahjavero on 4 000 euroon asti 100 € ja alarajan ylittävältä osalta maksetaan veroa 7 %. Lahjaveron suuruus on

$$100\text{ €} + 0{,}07 \cdot (9\,000\text{ €} - 4\,000\text{ €}) = 450\text{ €}.$$

Lahjoituksista maksetaan veroa yhteensä 450 € + 450 € = 900 €.

Esimerkki 4.7.4. Lahjavero määrätään jokaiselta antajalta saaduista lahjoista erikseen, kun sen arvo ylittää 4 000 euroa. Isä ja äiti voivat kumpikin lahjoittaa tyttärelleen, tämän aviopuolisolle ja näiden kolmelle lapselle kullekin verottoman 3 999 euron arvoisen lahjan eli yhteensä $2 \cdot 5 \cdot 3\,999\text{ €} = 39\,990\text{ €}$. Seuraavan kerran isä ja äiti voivat antaa samoille henkilöille verottomia lahjoja, kun on kulunut kolme vuotta edellisestä lahjoituksesta.

Esimerkki 4.7.5. Liian alhainen kauppahinta voidaan tulkita lahjaksi. Jos kauppahinnaksi on sovittu enintään 75 % (eli 3/4) omaisuuden todellisesta (käyvästä) arvosta, on kyseessä alihintainen eli lahjanluonteinen kauppa. Tällöin käyvän arvon ja sovitun kauppahinnan välinen ero katsotaan lahjaksi.

Kun esimerkiksi isä myy tyttärelleen 200 000 euron arvoisen huoneiston 130 000 eurolla, kaupan seurauksena tyttären katsotaan saavan 70 000 euron suuruisen lahjan. Tytär kuuluu veroluokkaan I, ja lahjaksi saatu summa on välillä 50 000 €–200 000 €, joten lahjaveron määrä on

$$4\,310\text{ €} + 0{,}13 \cdot (70\,000\text{ €} - 50\,000\text{ €}) = 6\,910\text{ €}.$$

Jos kauppahinta olisi yli 150 000 euroa (eli yli 75 % asunnon arvosta), lahjaveroa ei määrättäisi.

Varainsiirtovero

Varainsiirto-vero

Tuloverojen sekä perintö- ja lahjaverojen lisäksi yksittäinen kansalainen maksaa veroja muun muassa kiinteistöistä ja ajoneuvoista sekä kiinteistöjen tai arvopaperien ostamisesta. Kiinteistön tai arvopaperien omistusoikeuden siirtämisestä valtio perii **varainsiirtoveroa**. Veron maksaa yleensä ostaja (luovutuksen saaja). Varainsiirtovero on luovutusvoittoa laskettaessa vähennyskelpoista hankintamenoa.

Esimerkki 4.7.6. Tarkastellaan varainsiirtoveroa erilaisissa tilanteissa:

(a) Ostat ensimmäisen oman asuntosi 132 000 € kauppahinnalla. Et ole aikaisemmin omistanut vähintään 50 prosenttia asunnosta tai kiinteistöstä, olet kaupantekohetkellä alle 40-vuotias ja muutat asuntoon alle puolen vuoden kuluttua kaupanteosta. Verotuksessa puhutaan silloin ensiasunnosta. Ensiasunnon ostaja on vapautettu varainsiirtoverosta, joten sinun ei tarvitse maksaa veroa tämän kaupan yhteydessä.

(b) Vaihdat muutaman vuoden kuluttua isompaan asuntoon. Uuden asunnon kauppahinta on 187 000 €. Koska kyseessä ei ole ensiasunto, varainsiirtovero periytyy maksettavaksesi. Varainsiirtovero asunto-osakekaupassa on 2,0 % kauppahinnasta (vuodesta 2013 alkaen). Joudut siis tilittämään valtiolle kaupanteon yhteydessä varainsiirtoverona $0{,}02 \cdot 187\,000$ € $=$ 3 740 €.

(c) Päätät ostaa kesämökin. Kauppaan kuuluu tontti ja talo, ja kauppahinnaksi sovitaan 38 000 €. Varainsiirtovero kiinteistökaupassa on 4,0 % kauppahinnasta (vuodesta 2012 alkaen). Joudut siis tilittämään valtiolle kaupanteon yhteydessä varainsiirtoverona $0{,}04 \cdot 38\,000$ € $=$ 1 520 €.

4.8 Tehtäviä

4.1. Anniinan verokortissa palkkatulojen perusprosentti on 26,5 ja lisäprosentti 42,0. Palkkakauden tuloraja on 2 150 € kuukaudessa. Kuinka suuri on ennakonpidätys

(a) tammikuussa kun Anniinan palkka oli 1 980 €,

(b) heinäkuussa kun Anniinan palkka oli 2 470 €?

4.2. Benin kuukausipalkka on 2 875 €. Kuinka paljon hän saa palkkaa ennakkoveron ja lakisääteisten vakuutusmaksujen pidätyksen jälkeen kun verokortissa on perusprosenttina 25,0 ja lisäprosenttina 45,0, ja palkkakauden tulorajaksi on merkitty 2 300 € kuukaudessa? Työeläke- ja työttömyysvakuutusmaksut ovat yhteensä 6,05 % palkkatulosta.

4.3. Carlan verokorttiin oli vuonna 2013 merkitty palkkatulon perusprosentiksi 27,0 %, lisäprosentiksi 41,5 % ja palkkakauden tulorajaksi kuukaudessa 3 000,00 €.

(a) Mikä oli ennakonpidätyksen määrä vuodessa kun kuukausitulot olivat 3 900 euroa?

(b) Mikä on todellinen veron määrä kun Carla voi tehdä ansiotulosta vähennyksiä yhteensä 2 400 € sekä valtion verotuksessa että kunnallisverotuksessa? Kunnallisvero on 20 % ja Carla ei kuulu kirkkoon. Valtion tuloveroasteikon löydät taulukosta 4.3.

(c) Pitääkö Carlan maksaa jäännösveroa vai saako hän veronpalautusta?

4.4. Verokorttiin on merkitty perusprosentti on 16,0 ja lisäprosentti 41,5. Palkkakauden tuloraja on 2 058,33 € kuukaudessa (vaihtoehto A) ja 22 724,00 € vuodessa (vaihtoehto B).

Työntekijän kuukausipalkka vuoden alussa on 1 700 €. Hän tekee maalis- ja huhtikuussa ylitöitä ja ansaitsee 2 500 € kuukaudessa. Heinäkuussa kuukausipalkan lisäksi tulee lomarahaa 1 000 €. Elokuun alusta alkaen työntekijä saa palkankorotuksen ja hänen kuukausipalkkansa nousee 1 900 euroon. Vuoden lopussa hän saa bonuksen, jonka johdosta joulukuuun palkkan on 2 200 €.

Kuinka paljon työtekijä maksaa ennakonpidätystä kun ennakonpidätys toimitetaan
a) vaihtoehdon A, b) vaihtoehdon B mukaan?

4.5. Opiskelijan verokorttiin on sekä päätuloa että sivutuloja varten merkitty perusprosentiksi 14,5 ja lisäprosentiksi tulorajan 620 €/kk ylittävältä osalta 31,5. Laske opiskelijan nettopalkka kun kuukausitulot ovat a) 495,10 €, b) 724,80 €. Palkasta pidätetään veroennakon lisäksi työeläke- ja työttömyysvakuutusmaksu, jotka ovat yhteensä 6,05 % bruttopalkasta.

4.6. Danielin verokortissa palkkatulon perusprosentti on 28,5 % ja lisäprosentti 46,5 %. Palkkakauden tuloraja kuukaudessa on 2 850,50 €.

(a) Danielin kuukausipalkka tammikuussa oli 2 500 €. Laske palkasta pidätetyn ennakonpidätyksen suuruus.

(b) Helmikuussa Daniel saa kuukausipalkan lisäksi 500 euron bonuksen. Laske kuinka paljon Danielille jää helmikuun palkasta käteen, kun työnantaja pidättää ennakonpidätyksen lisäksi lakisääteiset eläkevakuutusmaksun (5,55 %) sekä työttömyysvakuutusmaksun (0,50 %).

4.7. Ellan ennakonpidätysprosentti on 32. Ennakonpidätyksen jälkeen nettopalkka on 920,20 €. Laske ansiotulo ja ennakonpidätyksen suuruus.

4.8. Tarkastellaan vuoden 2013 verotusta. Valtion tuloveroasteikon löydät taulukosta 4.3.

Valtion tuloveron ja kunnallisveron lisäksi ansiotulosta perittiin sairaanhoitomaksu (1,30 % kunnallisverotuksen verotettavasta tulosta), päivärahamaksu (0,74 % veronalaisesta palkkatulosta) sekä Yle-vero (0,68 % puhtaan ansio- ja pääomatulon yhteismäärästä, kuitenkin enintään 140 €).

Laske, kuinka paljon seuraavat henkilöt maksoivat ansiotuloistaan veroa ja muita veron kaltaisia maksuja vuoden 2013 verotuksessa.

(a) Oulussa asuva Fanni, joka kuuluu evankelisluterilaiseen kirkkoon ja jonka palkkatulot olivat 43 400 €. Verotettava ansiotulo oli sekä valtion verotuksessa että kunnallisverotuksessa 38 200 €. Vuonna 2013 Oulun tuloveroprosentti oli 19,25 ja kirkollisveroprosentti ev.lut.seurakuntaan kuuluvalta 1,25.

(b) Tampereella asuva Gabriel, joka kuuluu evankelisluterilaiseen kirkkoon ja jonka palkkatulot olivat 39 100 €. Verotettava ansiotulo oli sekä valtion verotuksessa että kunnallisverotuksessa 33 750 €. Vuonna 2013 Tampereen tuloveroprosentti oli 19,00 ja kirkollisveroprosentti ev.lut.seurakuntaan kuuluvalta 1,25.

(c) Raahessa asuva Hanna, joka ei kuulu kirkkoon ja jonka palkkatulot olivat 32 358 €. Verotettava ansiotulo valtion verotuksessa oli 31 630 € ja kunnallisverotuksessa 28 955 €. Vuonna 2013 Raahen tuloveroprosentti oli 21,0 ja kirkollisveroprosentti ev.lut.seurakuntaan kuuluvalta 1,8.

4.9. Laske valtion tuloveron suuruus vuoden 2013 verotuksessa, kun verotettava ansiotulo on a) 18 000 €, b) 32 000 €, c) 69 000 €.

4.10. Iris maksoi vuonna 2013 ansiotuloista valtion tuloveroa 1 760 €. Kuinka suuri oli hänen verotettava ansiotulonsa valtion verotuksessa?

4.11. Lauri työskenteli valmistumisensa jälkeen Kemissä, jonka kunnallisveroprosentti on 20,75 ja kirkollisveroprosentti 1,25. Hänen verotettava ansiotulonsa oli 20 640 € sekä valtionverotuksessa että kunnallisverotuksessa. Myöhemmin hän vaihtoi vastaaviin työtehtäviin Kauniaisiin ja erosi samalla kirkosta. Palkka pysyi samana. Kauniaisten kunnallisveroprosentti oli 16. Laske Laurin

(a) vuosiansiot veronpidätyksen jälkeen ja kokonaisveroprosentti Kemissä v. 2010.

(b) vuosiansiot veronpidätyksen jälkeen ja kokonaisveroprosentti Kauniaisissa v. 2013.

(c) vuosiansioiden muutos.

Valtion tuloveroasteikot v. 2010 ja 2013 löytyvät taulukoista 4.7 ja 4.3.

Verotettava ansiotulo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)
15 200 — 22 600	8	6,5
22 600 — 36 800	489	17,5
36 800 — 66 400	2 974	21,5
66 400—	9 338	30, 0

Taulukko 4.7: Valtion tuloveroasteikko vuonna 2010.

4.12. Tarkastellaan vuoden 2014 verotusta. Valtion tuloveroasteikko on esitetty alla taulukossa 4.8. Helsinkiläisen Gretan vuosituloiksi vuonna 2014 arvioidaan 23 000 €. Arvioidut vähennykset valtion verotuksessa ovat 620 € ja kunnallisverotuksessa 1 040 €. Laske ev.lut.seurakuntaan kuuluvan Gretan kokonaisveroprosentti kun siinä huomioidaan valtionvero, kunnallisvero ja kirkollisvero sekä sairaanhoitomaksu, päivärahamaksu ja Yle-vero.

Vuonna 2014 kunnallisveroprosentti Helsingissä on 18,5 ja kirkollisveroprosentti ev.lut.seurakuntaan kuuluvalta 1,0. Yle-vero on 0,68 % puhtaan ansio- ja pääomatulon yhteismäärästä, kuitenkin niin, että se on korkeintaan 143 €, ja alle 51 euron veroa ei peritä. Sairaanhoitomaksu on 1,32 % kunnallisverotuksessa verotettavasta tulosta ja päivärahamaksu 0,84 % veronalaisesta bruttopalkasta.

Verotettava ansiotulo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)
16 300 — 24 300	8	6,5
24 300 — 39 700	528	17,5
39 700 — 71 400	3 223	21,5
71 400 — 100 000	10 038,50	29,75
100 000—	18 547	31,75

Taulukko 4.8: Valtion tuloveroasteikko 2014.

4.13. Jyväskylässä asuvan ja kirkkoon kuulumattoman Minnan vuoden 2014 vuosituloiksi arvioitiin 25 000 € ennakonpidätysprosenttia laskettaessa. Vähennyksiksi valtionverotuksessa arvioitiin 800 € ja kunnallisverotuksessa 1 050 €. Mikä tulee ennakonpidätysprosentiksi? Vuonna 2014 Jyväskylän tuloveroprosentti on 20,00.

4.14. Osakeyhtiön toinen omistaja on saanut vuonna 2013 yrityksestä palkkaa, ja hänen verotettavat ansiotulonsa sekä valtion verotuksessa että kunnallisverotuksessa ovat 42 000 euroa. Lisäksi hän omistaa asunnon, josta hän sai vuonna 2013 vuokratuloja 21 000 euroa. Kunnallisvero on 19 %.

(a) Kuinka paljon henkilö maksaa ansiotuloista valtion tuloveroja? Entä kunnallisveroja?
(b) Mikä on ansiotulojen kokonaisveron määrä ja kokonaisveroprosentti?
(c) Kuinka paljon henkilö maksaa vuokratuloista pääomatuloveroa?
(d) Mikä on henkilön kaikkien tulojen kokonaisveroprosentti?

4.15. Liike- ja asuinrakennuksista maksetaan vuosittain kiinteistöveroa rakennuksen sijaintikunnalle. Veron perustana on kiinteistön verotusarvo, joka on yleensä pienempi kuin sen myyntiarvo. Verotusarvo lasketaan erikseen maapohjalle ja rakennukselle, ja koko kiinteistön verotusarvo saadaan laskemalla yhteen maapohjan ja rakennusten arvot. Kiinteistöveroprosentin määrää kunta valtion asettamien rajojen puitteissa.

Perhe omistaa Kirkkonummen keskustassa omakotitalon, jonka verotusarvo on 167 000 € ja Kirkkonummen saaristossa kesämökin, jonka verotusarvo on 27 000 €. Laske perheen vuonna 2014 maksama kiinteistövero. Kiinteistövero on Kirkkonummella vuonna 2014 0,32 % vakituiselle asuinrakennukselle ja 0,92 % kesämökille.

4.16. Osakekauppojen myyntivoitto (luovutusvoitto) verotetaan pääomatulona. Laske osakekauppojen nettovoitto, kun osakkeet oli ostettu 2 000 euron hintaan ja ne myyntiin vuonna 2012 hintaan 3 200 €.

4.17. Vainajan alaikäinen lapsi saa tehdä verotettavasta perintöosuudesta erityisen alaikäisyysvähennyksen. Alle 18-vuotiaalle lapselle myönnettävä alaikäisyysvähennys on 40 000 €. 16-vuotias Neea perii isältään 92 600 €. Laske perintöveron suuruus.

4.18. 37-vuotias Olli perii äidiltään perinnön, jonka verotettava arvo on 84 800 €. Laske perintöveron suuruus.

4.19. Paula saa isältään rahalahjan. Laske lahjaveron määrä kun a) isä antaa yhdellä kertaa 25 000 euron lahjoituksen, b) kaksi kertaa 12 500 euron lahjoituksen ja lahjoitusten väli on yli kolme vuotta.

4.20. Risto saa 10 000 euron rahalahjan. Laske lahjaveron suuruus kun lahjoittaja on a) isoisä, b) veli, c) puoliksi isä ja puoliksi äiti.

4.21. Saara saa tädiltään perinnön, josta hän maksaa perintöverona 2 530 €. Laske perinnön verotettava arvo.

4.22. Yritys asettaa tuotteensa verottomaksi myyntihinnaksi 18 €. Tuotteeseen sovelletaan yleistä 24 % arvonlisäverokantaa. Yritys myy tuotteensa kauppiaalle, joka asettaa sen verottomaksi myyntihinnaksi 25,00 €. Laske kauppiaan sekä kuluttajan tuotteesta maksama hinta. Kuinka paljon kauppiaan on tilitettävä tuotteen hinnasta arvonlisäveroa valtiolle?

4.23. Kauppalaskun loppusumma on 38,70 €. Yhtä tuotetta lukuunottamatta ostoskassissa on elintarvikkeita, joiden veroton yhteishinta on 24,20 €. Yksi tuote verotetaan yleisen 24 % arvonlisäverokannan mukaan. Laske, kuinka paljon laskun loppusummasta on arvonlisäveroa.

4.24. Bensiinin litrahinta huoltoasemalla on 1,59 €. Hinta sisältää polttoaineveroa 62,7 senttiä. Polttoaineeseen sovelletaan yleistä arvonlisäverokantaa, joka maksetaan myös polttoaineverosta. Laske polttoaineen veroton hinta. Kuinka suuri osuus bensiinilitran kuluttajahinnasta on veroa?

4.25. Erään yrityksen ostot kuukauden aikana olivat 18 000 € (sisältää maksettua arvonlisäveroa 24 %) ja myyntituotot 42 000 € (sisältää saatua arvonlisäveroa 24 %). Laske kuinka paljon yritys tilittää arvonlisäveroa kuukauden lopussa valtiolle.

4.26. Matkapuhelinvalmistaja myy erän matkapuhelimia liikkeeseen arvonlisäverolliseen hintaan 8 200 €. Liike myy puhelimet edelleen kuluttajalle ja saa myynnissä 11 400 €. Laske a) kännykkäliikkeen valtiolle tilittämä arvonlisävero, b) valtion yhteensä saama arvonlisävero.

4.27. Junalippu Helsingistä Tampereelle maksaa 9,00 €. Matkalippuihin sovelletaan 10 prosentin arvonlisäverokantaa. Laske lipun veroton hinta.

4.28. Arvonlisävero muuttui 1.7.2010, mikä vaikutti muun muassa VR:n junalippuihin ja ravintolapalveluihin. Ravintolaruokailun arvonlisävero laski 9 prosenttiyksikköä 22 prosentista 13 prosenttiin, kun taas matkalippujen arvonlisävero nousi yhden prosenttiyksikön kahdeksasta prosentista yhdeksään. Oletetaan, että tuotteiden verottomat hinnat pysyivät ennallaan ja veron muutos siirrettiin suoraan kuluttajahintoihin. Laske a) juustosämpylän ja kahvin uusi hinta ravintolavaunussa, kun hinnat ennen veronmuutosta olivat 3,90 € ja 2,20 €, b) junalipun uusi hinta kun se ennen veronmuutosta oli 13,50 €. Kuinka monta prosenttia junalipun hinta muuttui?

4.29. Oletetaan, että matkalippujen arvonlisävero nousisi kolme prosenttiyksikköä nykyisestä 10 prosentista. Laske kuinka monta prosenttia kuluttajahinta muuttuisi, kun veroton hinta a) pysyy ennallaan, b) laskee 10 %, c) nousee 5 %.

4.30. Vuonna 2011 parturi- ja kampaamopalveluiden arvonlisävero oli 9 %. Vuonna 2012 se nousi rajusti 14 prosenttiyksikköä ja vuonna 2013 vielä yhdellä prosenttiyksiköllä. Tämä on nyt vaikuttanut siten, että palveluhinnat ovat parturi-kampaamoissa nousseet dramaattisesti. Vuonna 2011 hiestenleikkaus maksoi 28 €. Kuinka paljon se maksoi vuonna 2013, jos oletetaan että leikkauksen veroton hinta pysyy samana?

4.31. Kirjoihin sovelletaan 10 % arvonlisäveroa. Laske veron osuus hinnassa, kun kirja maksaa 25,70 €.

4.32. Kirjasarjan kuluttajahinta kirjakaupassa on 134 €. Kirjakauppias nostaa sen verotonta hintaa 12 €. Laske kirjasarjan uusi hinta. Kirjojen arvonlisävero on 10 %.

4.33. Viikonlopun ruokaostokset maksoivat 84,40 €. Laske arvonlisäveron osuus hinnassa, kun elintarvikkeiden arvonlisävero on 14 %.

4.34. Laske, kuinka monta prosenttia arvonlisäveron poistaminen alentaisi a) elintarvikkeiden hintaa (alv 14 %), b) bussilipun hintaa (alv 10 %), c) matkapuhelimen hintaa (alv 24 %).

4.35. Tauno myy koivupahkoja 2,50 euron hintaan Toinille, joka valmistaa niistä kuksia. Toini myy kuksat matkamuistomyymälään, jossa ne myydään edelleen asiakkaille. Myymälä maksaa kuksista 20 € ja myy ne asiakkaille hintaan 32 €. Laske kuinka paljon a) asiakas maksaa kuksasta arvonlisäveroa, b) kukin myyntiketjun toimija tilittää valtiolle arvonlisäveroa yhtä kuksaa kohden. Kuksaan sovelletaan yleistä 24 % arvonlisäverokantaa.

4.36. (YO S09) Elintarvikkeiden arvonlisävero on 17 prosenttia tuotteen verottomasta hinnasta. Tapio maksoi ruokaostoksistaan 54,35 euroa. Kuinka monta euroa ostoksen hinta alenisi, jos ruoan arvonlisäveroa laskettaisiin 9 prosenttiyksiköllä? Kuinka suuri olisi ostoksen hinnan alennus prosentteina?

4.37. (YO K05) Henkilön palkasta jäi ennakonpidätyksen jälkeen käteen 73 %. Vuodenvaihteessa henkilö sai 45 euron palkankorotuksen. Samanaikaisesti ennakonpidätys laski 0,8 prosenttiyksikköä. Henkilölle jäi ennakonpidätyksen jälkeen nyt 49,60 euroa enemmän kuin ennen muutoksia. Mikä oli henkilön uusi ennakonpidätysprosentti, ja mikä oli hänen uusi palkkansa?

4.38. (YO S04) Metsänomistaja teetti metsätöitä urakoitsijalla ja sopi alustavasti työn hinnaksi kuitupuun osalta 14 €/m^3 ja tukkipuun osalta 9,2 €/m^3. Kuitupuuta kertyi 156 m^3 ja tukkipuuta 89,4 m^3. Alustaviin hintoihin ei sisältynyt kuitenkaan arvonlisäveroa, vaikka metsänomistaja oli näin ymmärtänyt. Keskustelujen jälkeen osapuolet päätyivät sopimukseen, jonka mukaan urakoitsija alentaa ilmoittamiaan verottomia hintoja siten, että koko urakan osalta metsänomistajalle koituva lisämaksu tulee yhtä suureksi kuin urakoitsijan antama alennus. Kuinka paljon metsänomistaja maksoi teettämästään työstä arvonlisäveroineen? Arvonlisäveron suuruus on 22 % työn verottomasta hinnasta.

4.39. (YO K09) Opintorahaa saanut opiskelija saattoi vuonna 2006 tehdä kunnallisverotuksessa ansiotulosta opintorahavähennyksen, jonka suuruus laskettiin seuraavasti: Vähennyksen enimmäismäärä oli 2 200 euroa, ja sitä pienennettiin 50 prosentilla siitä määrästä, jolla puhtaan ansiotulon määrä ylitti vähennyksen enimmäismäärän. Kuitenkin vähennys oli enintään opintorahan suuruinen. Piirrä kuvaaja, joka osoittaa vähennyksen riippuvuuden palkkatulosta, kun opintorahan suuruus on 1 500 euroa. Oletetaan, että puhdas ansiotulo muodostuu palkkatulosta ja opintorahasta. Miten suurilla palkkatuloilla vähennystä ei tässä tapauksessa enää saa?

4.40. (YO K10) Lahjavero määräytyy ensimmäisessä veroluokassa seuraavasti:

Lahjan arvo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävästä osuudesta (%)
4 000 — 17 000	100	7
17 000 — 50 000	1 010	10
50 000—	4 310	13

(a) Kuinka paljon veroa menee 30 000 euron lahjoituksesta?

(b) Piirrä sen funktion kuvaaja, joka esittää lahjaveron riippuvuutta lahjan arvosta (so. verotettavan osuuden arvosta).

Verotettava ansiotulo (mk)	Vero alarajan kohdalla (mk)	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)
47 600 — 63 600	50	5,0
63 600 — 81 000	850	15,0
81 000 — 113 000	3 460	19,0
113 000 — 178 000	9 540	25,0
178 000 — 315 000	25 790	31,0
315 000—	68 260	37,5

Taulukko 4.9: Valtion tuloveroasteikko vuonna 2000.

4.41. (YO S02) Edellisellä sivulla on valtion tuloveroasteikko verovuodelta 2000.

(a) Kuinka paljon valtion tuloveroa maksoi henkilö, jonka verotettava vuositulo oli 162 520 markkaa?

(b) Kuinka suuri olisi henkilön verotettava vuositulo ollut, jos hänelle valtion tuloveron pidätyksen jälkeen olisi jäänyt 162 520 mk?

4.42. (YO S01) Tuotteen myyntihinta saadaan, kun verottomaan hintaan lisätään arvonlisävero, jonka suuruus on 22 prosenttia verottomasta hinnasta. Kuinka monta prosenttia arvonlisävero on myyntihinnasta? Riippuuko tämä prosentti myyntihinnasta?

4.43. (YO S00) Parturi- ja kampaamomaksut muodostuvat verottomasta hinnasta ja arvonlisäverosta, joka on 22 % palvelun verottomasta hinnasta. Hiusten leikkaus maksoi 136 mk. Kuinka suuri tämä maksu olisi ollut, jos arvonlisävero olisi ollut 10 prosenttiyksikköä pienempi?

4.44. (YO K12) Simeoni osti Saapasnahkatornin 12 000 eurolla ja teetti siihen myöhemmin 4 000 euron peruskorjauksen. Yksitoista vuotta myöhemmin hän myi sen Juhanille 42 000 eurolla. Voitosta on maksettava 30 % pääomatuloveroa. Verottaja tulkitsee voitoksi summan, joka saadaan, kun myyntihinnasta vähennetään ostohinta ja peruskorjauskulut. Toisaalta Simeoni voi myös halutessaan käyttää ns. hankintameno-olettamaa. Tällöin myyntihinnasta vähennetään 20 %, jos on omistanut tornin alle 10 vuotta, ja 40 %, jos on omistanut yli 10 vuotta. Mitään muita vähennyksiä ei saa tehdä. Jäljelle jääneestä summasta maksetaan 30 % pääomatuloveroa.

(a) Kuinka paljon Simeonille jää myyntihinnasta verotuksen jälkeen, kun hän valitsee edullisemman vaihtoehdon?

(b) Mikä olisi sellainen myyntihinta, että Simeoni maksaisi kummassakin verotusvaihtoehdossa yhtä suuren veron?

4.45. (YO S95) Kirjan myyntihinta saadaan lisäämällä kirjan perushintaan 12 % arvonlisävero. Kirjan, jonka myyntihinta oli ollut 134 mk, perushintaa alennettiin 25 mk. Mikä oli kirjan uusi myyntihinta?

4.46. (YO K99) Sähköyhtiö tarjoaa kesämökkiläisen valittavaksi sähköntoimitusta Kotisähkö 1- tai Kotisähkö 2 -tariffin mukaisesti. Edellisessä on perusmaksu 62,50 mk/kk, jälkimmäisessä 57,50 mk/kk. Sähkön hinnat ovat vastaavasti 35,6 p/kWh ja 37,5 p/kWh. Kummassakin tapauksessa tulee lisäksi sähkövero 5,0935 p/kWh. Hinnat sisältävät 22 prosentin arvonlisäveron. Mikä tulee vuotuisen kulutuksen olla, jotta tariffit olisivat yhtä edulliset? Miten suuri on tällöin vuotuinen sähkölasku? Missä rajoissa tulee vuosikulutuksen olla, jotta tariffien mukaiset vuotuiset sähkölaskut poikkeaisivat toisistaan vähemmän kuin 100 mk?

5 Korkolaskentaa

Korko on korvausta lainaksi saadusta pääomasta. Kun pankkiin talletetaan rahaa, maksaa pankki talletukselle korkoa. Kun pankista lainataan rahaa, maksaa lainaaja pankille korkoa lainaamastaan rahasummasta. Tässä luvussa keskitytään korkolaskentaan talletusten näkökulmasta. Lainoihin liittyviä korkolaskuja käsitellään luvussa 6.

Korko

5.1 Peruskäsitteitä

Korkolaskentaan liittyviä keskeisiä käsitteitä ovat

- **Pääoma**: alkuperäinen rahamäärä (talletuspääoma tai lainapääoma).
- **Korkopäivä**: päivä, jolta korkoa maksetaan; laskentatapoja on useita.
- **Korkoaika**: aika, jolta korkoa maksetaan.
- **Korkokausi** eli **korkojakso**: kertoo, kuinka usein korko liitetään pääomaan.
- **Korkokanta** eli **korkoprosentti**: yhden korkokauden korko prosentteina.
- **Korkotekijä**: kerroin, jonka avulla kasvanut pääoma voidaan laskea.
- **Kasvanut pääoma**: pääoma, johon korko on lisätty.
- **Lähdevero**: korkotuloista perittävä vero (30 % vuonna 2015).
- **Nettokorko**: korko, josta lähdevero on vähennetty.
- **Nettokorkokanta**: korkokanta, jossa lähdeveron vaikutus on huomioitu.
- **Diskonttaus**: alkuperäisen pääoman selvittäminen.
- **Nykyarvo**: diskonttauksella selvitetty alkuperäinen pääoma.

Korkokausi

Korkokausi eli **korkojakso** kertoo, kuinka usein kertynyt korko liitetään pääomaan. Korkokausi voi olla esimerkiksi yksi vuosi, puoli vuotta, neljännesvuosi tai yksi kuukausi. Jos korkokauden pituutta ei mainita, tarkoitetaan vuosittaista korkoa. Korkokauden pituuden ilmaisemiseen käytetään seuraavia lyhenteitä:

Korkokausi

- vuosi: p.a. (*per anno*)
- puoli vuotta: p.s. (*per season*)
- neljännesvuosi: p.q. (*per quarter*)
- kuukausi: per kk.

Kertynyt korko liitetään pääomaan aina korkokauden lopussa. **Korkokanta** kertoo koron suuruuden prosentteina yhden korkokauden ajalta. Esimerkiksi korkokanta 1,3 % p.a. tarkoittaa, että korkoa maksetaan kerran vuodessa 1,3 prosenttia, ja korkokanta 0,9 % p.q. tarkoittaa, että korkoa maksetaan kolmen kuukauden välein 0,9 prosenttia.

Korkokanta

Korkoaika

Korkoaika

Korkopäivien lukumäärä

Korkoaika tarkoittaa aikaa, jolta korkoa maksetaan. On sovittu, että talletuspäivästä ei makseta korkoa mutta nostopäivästä maksetaan. Tämä yksityiskohta huomioidaan lukiokurssissa lähinnä silloin, kun koron laskeminen vaatii **korkopäivien lukumäärän** selvittämisen. Korkopäivien laskemiseen voidaan Suomessa käyttää seuraavia tapoja:

- Todelliset/365: Kaikki kalenterin päivät ovat korkopäiviä. Vuodessa on 365 päivää paitsi karkausvuosina, jolloin päiviä on 366.
- Todelliset/360: Kaikki kalenterin päivät ovat korkopäiviä ja vuodessa on aina 360 päivää.
- 30/360: Jokaisessa kuukaudessa on 30 korollista päivää ja vuodessa on aina 360 päivää.

Esimerkki 5.1.1. Talletukselle, joka tehdään 5.2.2015 ja nostetaan 7.4.2015, korkopäivien määrä on laskettu kaikilla mahdollisilla tavoilla taulukossa 5.1.

	Todelliset/365	Todelliset/360	30/360
Helmikuu	$28 - 5 = 23$	$28 - 5 = 23$	$30 - 5 = 25$
Maaliskuu	31	31	30
Huhtikuu	7	7	7
Yhteensä	60	60	62

Taulukko 5.1: Kolme erilaista tapaa korkopäivien laskemiseen.

Tavoilla todelliset/365 ja todelliset/360 saadaan yhtä monta korkopäivää. Ero syntyy, kun korkoaika ilmaistaan vuosina: tavalla todelliset/365 laskettuna korkoaika on $60/365 \approx 0{,}164$ vuotta ja tavalla todelliset/360 laskettuna korkoaika on $60/360 \approx 0{,}167$ vuotta.

Korkopäivien laskeminen on lukiokurssissa yleensä tarpeen vain tehtävissä, joissa nimenomaan kysytään korkopäivien määrää tai tarkastellaan päivämäärien avulla ilmoitettua aikaväliä, kuten edellisessä esimerkissä. Muissa tehtävissä talletuspäivä lasketaan usein mukaan korkoaikaan, ettei laskuista tulisi liian monimutkaisia. Lisäksi esimerkiksi toistuvien talletusten tapauksessa vuoden ajatellaan yksinkertaisuuden vuoksi koostuvan 12 yhtä pitkästä kuukaudesta kuten tavassa 30/360.

5.2 Yksinkertainen korkolaskenta

Jos korkoaika on enintään korkokauden mittainen, koron laskemiseen riittää niin sanottu yksinkertainen korkolaskenta. Korkoaika on ilmaistava samassa ajan yksikössä kuin korkokausi. Esimerkiksi jos korkokanta on 1,2 % p.a. ja korkoaika on 60 päivää, täytyy korkoaika ilmaista vuosina (lyhenne p.a. kertoo, että korkokausi on vuosi). Korkoaika on tässä tapauksessa laskentatavasta riippuen joko 60/365 ≈ 0,164 vuotta tai 60/360 ≈ 0,167 vuotta.

Korko (r) riippuu alkuperäisestä pääomasta (k), korkokannasta (i) ja korkoajasta (t):

$$r = kit.$$

Kasvanut pääoma (K) saadaan lisäämällä alkuperäiseen pääomaan korko:

$$K = k + r = k + kit.$$

Yksikertainen korkolaskenta

Esimerkki 5.2.1. Tilin korkokanta on 0,75 % p.a. Talletuksen määrä on 9000 €. Laske koron ja nettokoron suuruus, jos talletusaika on

(a) vuosi (b) puoli vuotta (c) kaksi kuukautta.

Ratkaisu: Korkokantaan liittyvä lyhenne p.a. kertoo, että korkokausi on vuosi. Korkoaika (tässä tapauksessa yksinkertaisesti talletusaika) pitää siis ilmaista vuosina, kun korkoa lasketaan.

(a) Koron määrä saadaan kertomalla talletuksen määrä korkokannalla ja korkoajalla: $r = kit = 9000\text{ €} \cdot 0{,}0075 \cdot 1 = 67{,}5\text{ €}$.

Pankkitalletuksen korosta maksetaan lähdeveroa 30 %, joten lähdeveron määrä on $0{,}30 \cdot 67{,}5\text{ €} = 20{,}25\text{ €}$. Lähdeveroon liittyy kuitenkin erikoinen **pyöristyssääntö**: lähdevero lasketaan jokaisesta maksetusta korkoerästä täysin kymmenin sentein siten, että yli menevät sentit jätetään huomioimatta. Tämän pyöristyssäännön mukaan todellinen lähdevero olisi tässä tapauksessa 20,20 €.

Lähdeveron pyöristyssääntö

Nettokorko on siten $67{,}5\text{ €} - 20{,}20\text{ €} = 47{,}30\text{ €}$.

(b) Lasketaan samaan tapaan kuin a-kohdassa. Huomaa, että korkoaika on puoli vuotta eli $t = 0{,}5$ (vuotta). Korko on $r = kit = 9000\text{ €} \cdot 0{,}0075 \cdot \mathbf{0{,}5} = 33{,}75\text{ €}$.

Nettokorko voidaan laskea myös seuraavasti: lähdeveron jälkeen korosta jää jäljelle $100\% - 30\% = 70\%$, joten nettokorko on $0{,}70 \cdot 33{,}75\text{ €} \approx 23{,}63\text{ €}$. Näin laskettaessa lähdeveron pyöristyssääntöä ei käytetä ja tuloksessa on pieni virhe, joka yleensä on merkityksettömän pieni. Pyöristyssääntö huomioiden lähdevero olisi tässä tapauksessa 10,10 € ja nettokorko 23,65 €.

(c) Korkoaika kaksi kuukautta pitää muuttaa siihen yksikköön, jossa korkokausi on ilmoitettu eli tässä tapauksessa vuosiksi. Kaksi kuukautta on kuudesosa vuodesta, eli korkoaika on $t = 2/12 = 1/6 \approx 0{,}167$ (vuotta). Korko on siten

$$r = kit = 9000\text{ €} \cdot 0{,}0075 \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} = 11{,}25\text{ €}.$$

Nettokorko voidaan laskea myös käyttämällä korkokantana nettokorkokantaa, jossa lähdeveron vaikutus on huomioitu. Koska lähdevero on 30 %, nettokorkokanta on 70 % korkokannasta eli $0{,}70i = 0{,}70 \cdot 0{,}0075 = 0{,}00525$. Nettokorko on

$$9000\ € \cdot 0{,}00525 \cdot \frac{1}{6} \approx 7{,}88\ €.$$

Tämäkään laskutapa ei huomioi lähdeveron pyöristyssääntöä.

Toistuvat talletukset yksinkertaisessa korkolaskennassa

Esimerkki 5.2.2. Avaat vuoden alussa tilin, jolle talletat joka kuukauden alussa 60 euroa. Tilin korkokanta on 1,2 % p.a. Kuinka paljon rahaa tilillä on vuoden lopussa korkojen lisäämisen jälkeen, kun korosta on pidätetty lähdevero? Näiden talletusten ja koronmaksun lisäksi tilillä ei ole muita tilitapahtumia.

Ratkaisu: Kysytyn saldon laskemiseen on useita tapoja. Yksi mahdollisuus on laskea jokaisen talletuksen korko erikseen yksinkertaisella korkolaskennalla. Tämä on tehty seuraavan sivun taulukossa 5.2. Huomaa, että jokainen vuoden aikana tehdyistä talletuksista ehtii kasvaa korkoa eri ajan.

Vuoden aikana tehtyjen talletusten korkojen summaksi saadaan

$$60\ € \cdot 0{,}012 \cdot \frac{12}{12} + \cdots + 60\ € \cdot 0{,}012 \cdot \frac{2}{12} + 60\ € \cdot 0{,}012 \cdot \frac{1}{12}\,.$$

Tästä voidaan erottaa yhteinen tekijä $60\ € \cdot 0{,}012$, jolloin summa saadaan muotoon

$$60\ € \cdot 0{,}012 \cdot \left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \cdots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right).$$

Sulkujen sisällä on aritmeettinen summa, jonka ensimmäinen termi on $a_1 = 12/12$, viimeinen termi on $a_{12} = 1/12$, termien lukumäärä $n = 12$ ja peräkkäisten termien erotus $d = -1/12$. Siten

$$\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \cdots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = n \cdot \frac{a_1 + a_{12}}{2} = 12 \cdot \frac{\frac{12}{12} + \frac{1}{12}}{2} = \frac{13}{2} = 6{,}5.$$

Talletusten korkojen summa on siis

$$60\ € \cdot 0{,}012 \cdot \left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \cdots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right) = 60\ € \cdot 0{,}012 \cdot 6{,}5 = 4{,}68\ €.$$

Korosta peritään 30 % lähdevero, joten nettokorko on $0{,}7 \cdot 4{,}68\ € \approx 3{,}28\ €$. Vuoden lopussa tilillä ovat tehdyt talletukset sekä nettokorko eli yhteensä

$$12 \cdot 60\ € + 3{,}28\ € = 723{,}28\ €.$$

	Talletus (k)	Korkoaika vuosina (t)	Korko ($r = kit$)
Tammikuu	60 €	$\frac{12}{12}$	$60\,€ \cdot 0{,}012 \cdot \frac{12}{12}$
Helmikuu	60 €	$\frac{11}{12}$	$60\,€ \cdot 0{,}012 \cdot \frac{11}{12}$
Maaliskuu	60 €	$\frac{10}{12}$	$60\,€ \cdot 0{,}012 \cdot \frac{10}{12}$
Huhtikuu	60 €	$\frac{9}{12}$	$60\,€ \cdot 0{,}012 \cdot \frac{9}{12}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Lokakuu	60 €	$\frac{3}{12}$	$60\,€ \cdot 0{,}012 \cdot \frac{3}{12}$
Marraskuu	60 €	$\frac{2}{12}$	$60\,€ \cdot 0{,}012 \cdot \frac{2}{12}$
Joulukuu	60 €	$\frac{1}{12}$	$60\,€ \cdot 0{,}012 \cdot \frac{1}{12}$

Taulukko 5.2: Esimerkin 5.2.2 talletuksien korot.

Edellä jokaisen talletuksen korko laskettiin erikseen. Toinen mahdollisuus kysytyn saldon selvittämiseen on laskea ensin, kuinka monelta kuukaudelta näistä 60 euron talletuksista maksetaan kaikkiaan korkoa. Tammikuun talletuksesta maksetaan korkoa 12 kuukaudelta, helmikuun talletuksesta 11 kuukaudelta ja niin edelleen. Korkokuukausien kokonaismääräksi saadaan aritmeettisen summan kaavalla

$$12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 12 \cdot \frac{12 + 1}{2} = 78.$$

Yksikään talletuksista ei kasva korkoa korolle, joten toistuvia 60 euron talletuksia voidaan ajatella yhtenä 60 euron talletuksena, jonka korkoaika on $t = 78/12 = 6{,}5$ (vuotta). Korko on $r = kit = 60\,€ \cdot 0{,}012 \cdot 6{,}5 = 4{,}68\,€$. Nettokorko ja tilin saldo voidaan laskea kuten edellä.

Esimerkki 5.2.3 (Valintakoe 2014, tehtävä 49). Pihla säästää kuukausittain 150 euroa tilille, jolle maksetaan 3,2 prosentin vuotuinen korko vuoden lopussa. Hän aloitti säästämisen vuoden 2014 tammikuun lopussa, ja jatkaa säästämistä vuoden 2014 loppuun. Kussakin kuukaudessa oletetaan olevan 30 päivää ja vuodessa 360 päivää. Lähdeveroa ei oteta laskelmassa huomioon. Kun viimeinen talletus on tehty vuoden 2014 viimeisenä päivänä ja korko maksettu, kuinka paljon Pihlan tilillä on rahaa?

Ratkaisu: Lasketaan kuinka monelta kuukaudelta korkoa maksetaan. Tehtävänannon mukaan voidaan ajatella, että vuosi muodostuu 12 yhtä pitkästä kuukaudesta. Tammikuun lopussa tehdystä talletuksesta maksetaan korkoa 11 kuukautta, helmikuun lopussa tehdystä talletuksesta maksetaan korkoa 10 kuukautta, ja niin edelleen. Marraskuun lopussa tehdystä talletuksesta maksetaan korkoa yhdeltä kuukaudelta ja joulukuun lopussa tehdystä talletuksesta ei makseta korkoa lainkaan. Korkokuukausien kokonaismääräksi saadaan aritmeettisen summan kaavalla

$$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 12 \cdot \frac{11 + 0}{2} = 66.$$

Yksikään talletuksista ei kasva korkoa korolle, joten toistuvia 150 euron talletuksia voidaan ajatella yhtenä 150 euron talletuksena, jonka korkoaika on $t = 66/12 = 5{,}5$ (vuotta). Korko on

$$r = kit = 150\text{ €} \cdot 0{,}032 \cdot 5{,}5 = 26{,}40\text{ €}.$$

Tilillä on lopulta rahaa yhteensä $12 \cdot 150\text{ €} + 26{,}40\text{ €} = 1\,826{,}40\text{ €}$, eli tehdyt talletukset ja kertynyt korko yhteensä (lähdeveroa ei tarvinnut tehtävässä huomioida).

5.3 Koronkorkolaskenta

Jos talletusaika on pidempi kuin korkokausi, tarvitaan koron määrän laskemiseen koronkorkolaskentaa. Korko lisätään pääomaan jokaisen korkokauden lopussa, joten seuraavan korkokauden aikana korkoa maksetaan kasvaneelle pääomalle. Korkoa maksetaan siis myös pääomaan lisätylle korolle.

Korkotekijä

Korkotekijä

Koronkorkolaskennassa kasvaneen pääoman selvittämiseen tarvitaan **korkotekijää**. Korkotekijää tarvitaan myös lainoihin liittyvissä laskuissa ja sitä voidaan käyttää yksinkertaisessakin korkolaskennassa. Yleisesti korkotekijä tarkoittaa kasvanutta pääomaa kuvaavaa kerrointa $q = 1 + it$.

Koronkorkolaskennassa talletusaika on pidempi kuin korkokausi ja korko liitetään pääomaan aina korkokauden lopussa. Tällöin korkotekijä laskettaessa korkoaika $t = 1$. Korkotekijä on siis $q = 1 + i$. Esimerkiksi jos kymmenen vuoden talletuksen korkokanta on 2,3 % p.a., on vastaava korkotekijä $q = 1 + 0{,}023 = 1{,}023$.

Yksinkertaisessa korkolaskennassa talletus- tai laina-aika on enintään korkokauden mittainen. Tällöin korkoaika on huomioitava korkotekijässä. Esimerkiksi jos kolmen kuukauden talletuksen korkokanta on 2,3 % p.a., on vastaava korkotekijä

$$q = 1 + it = 1 + 0{,}023 \cdot 0{,}25 = 1{,}00575.$$

Tässä siis $t = 3/12 = 1/4 = 0{,}25$ (vuotta). Korkotekijän avulla yksinkertaisen korkolaskennan kasvaneen pääoman lauseke saadaan muotoon $K = k + kit = k(1 + it) = kq$.

Lainojen yhteydessä esiintyy tilanteita, joissa laina-aika on pidempi kuin korkokausi, mutta lainaa lyhennetään useita kertoja korkokauden aikana. Tällöin korkotekijä on $q = 1 + it$, missä korkoaika $t < 1$ on lyhennysten välinen aika. Kertynyt korko maksetaan siis jokaisen lyhennyksen yhteydessä. Esimerkiksi jos kymmenen vuoden lainan korkokanta on 2,3 % p.a. ja lainaa lyhentään joka kuukausi, korkoaika on $t = 1/12$ (vuotta) ja korkotekijäksi saadaan $q = 1 + it = 1 + 0{,}023 \cdot (1/12) \approx 1{,}0019$.

Kasvanut pääoma koronkoron tapauksessa

Pankkitalletusten koroista peritään vuosittain 30 % lähdevero, joten kertyneestä korosta vain 70 % liitetään pääomaan. Jos lähdevero halutaan huomioida koronkorkolaskuissa, täytyy korkotekijää laskettaessa käyttää nettokorkokantaa. Tällöin $q = 1 + 0{,}7i$. Jos lähdeveroa ei tarvitse huomioida, korkotekijä saadaan suoraan korkokannasta: $q = 1 + i$.

Kasvanut pääoma koronkoron tapauksessa on

$$K = kq^n.$$

Kasvanut pääoma K riippuu alkuperäisestä pääomasta (k), korkotekijästä (q) ja korkokausien lukumäärästä ($n \geq 1$).

Koronkorkolaskenta

Esimerkki 5.3.1. Talletat vuoden alussa 2 000 euron säästösi tilille, jonka korkokanta on 1,8 % p.a. Kuinka paljon voit nostaa tililtä viiden vuoden kuluttua lähdevero huomioiden? Entä kuinka paljon voisit nostaa tililtä tuolloin, jos lähdeveroa ei perittäisi?

Ratkaisu: Huomioidaan vuosittain perittävä lähdevero käyttämällä nettokorkokantaa, joka on $0{,}7i = 0{,}7 \cdot 0{,}018 = 0{,}0126$. Korkotekijä on siis $q = 1 + 0{,}7i = 1{,}0126$ ja korkokausien lukumäärä $n = 5$. Kasvanut pääoma on

$$K = kq^n = 2\,000 \text{ €} \cdot 1{,}0126^5 \approx 2\,129{,}22 \text{ €}.$$

Jos lähdeveroa ei perittäisi, korkotekijä saataisiin suoraan tilin korkokannasta $i = 0{,}018$ eli $q = 1 + i = 1{,}018$. Kasvanut pääoma olisi

$$K = kq^n = 2\,000 \text{ €} \cdot 1{,}018^5 \approx 2\,186{,}60 \text{ €}.$$

Toistuvat talletukset koronkoron tapauksessa

Toistuvat talletukset koronkoron tapauksessa

Esimerkki 5.3.2. Avaat vuoden lopussa tilin, jonka korkokanta on 2,2 % p.a., ja talletat sille 500 euroa. Seuraavien kuuden vuoden aikana talletat tilille joka vuoden lopussa aina 500 euroa. Kuinka paljon tilillä on rahaa viimeisen talletuksen ja korkojen lisäyksen jälkeen seitsemännen vuoden alussa? Paljonko korkoa on kertynyt yhteensä?

Ratkaisu: Lasketaan jokaisen talletuksen kasvanut pääoma erikseen koronkorkolaskennalla. Tämä on tehty taulukossa 5.3. Huomioidaan 30 % lähdeveron vaikutus ja käytetään nettokorkokantaa $0{,}7i = 0{,}7 \cdot 0{,}022 = 0{,}0154$. Korkotekijä on $q = 1 + 0{,}7i = 1{,}0154$.

	Pääoma (k)	Korkokausia (n)	Kasvanut pääoma ($K = kq^n$)
Tilin avaus	500 €	6	500 € · $1{,}0154^6$
1. talletus	500 €	5	500 € · $1{,}0154^5$
2. talletus	500 €	4	500 € · $1{,}0154^4$
3. talletus	500 €	3	500 € · $1{,}0154^3$
4. talletus	500 €	2	500 € · $1{,}0154^2$
5. talletus	500 €	1	500 € · 1,0154
6. talletus	500 €	0	500 €

Taulukko 5.3: Esimerkin 5.3.2 talletusten kasvaneet pääomat.

Huomaa, että talletukset ehtivät kasvaa korkoa eri ajan: esimerkiksi tilin avauksen yhteydessä tehty talletus kasvaa korkoa kuuden seuraavan vuoden ajan, mutta viimeinen talletus ei ehdi kasvaa korkoa lainkaan. Kasvaneen pääoman kokonaismääräksi saadaan summa

$$500\,€ + 500\,€ \cdot 1{,}0154 + 500\,€ \cdot 1{,}0154^2 + \cdots + 500\,€ \cdot 1{,}0154^6.$$

Tästä voidaan erottaa yhteinen tekijä 500 €, jolloin summa saadaan muotoon

$$500\,€ \cdot (1 + 1{,}0154 + 1{,}0154^2 + 1{,}0154^3 + 1{,}0154^4 + 1{,}0154^5 + 1{,}0154^6).$$

Sulkujen sisällä on geometrinen summa, jonka ensimmäinen termi on $a_1 = 1$, yhteenlaskettavien lukumäärä on $n = 7$ ja suhdeluku $q = 1{,}0154$. Siten

$$1 + 1{,}0154 + \cdots + 1{,}0154^6 = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 1{,}0154^7}{1 - 1{,}0154} \approx 7{,}331829$$

ja kasvanut pääoma on

$$500\,€ \cdot \frac{1 - 1{,}0154^7}{1 - 1{,}0154} \approx 500\,€ \cdot 7{,}331829 \approx 3\,665{,}91\,€.$$

Kertynyt korko saadaan vähentämällä tästä kasvaneesta pääomasta tehdyt talletukset:

$$3\,665{,}91\,€ - 7 \cdot 500\,€ = 3\,665{,}91\,€ - 3\,500\,€ = 165{,}91\,€.$$

Esimerkki 5.3.3. Avaat vuoden alussa tilin, jonka korko on 0,9 % p.a. Talletat tälle tilille joka kuukauden lopussa 80 euroa. Kuinka paljon rahaa tilillä on vuoden lopussa korkojen lisäämisen ja viimeisen talletuksen jälkeen kymmenen vuoden kuluttua tilin avaamisesta? Kuinka paljon korkoa on kertynyt yhteensä?

Ratkaisu: Selvitetään aluksi tilin saldo korkojen lisäämisen jälkeen yhden vuoden kuluttua tilin avaamisesta. Tähän riittää yksinkertainen korkolaskenta, sillä yksikään vuoden aikana tehty talletus ei vielä tässä vaiheessa kasva korkoa korolle. Laskutapa on samanlainen kuin esimerkissä 5.2.3.

Lasketaan ensin, kuinka monelta kuukaudelta vuoden aikana tehdyistä 80 euron talletuksista maksetaan kaikkiaan korkoa. Tammikuun lopussa tehdystä talletuksesta maksetaan korkoa 11 kuukaudelta, helmikuun lopussa tehdystä talletuksesta 10 kuukaudelta ja niin edelleen. Joulukuun talletuksesta ei makseta korkoa lainkaan. Korkokuukausien kokonaismääräksi saadaan aritmeettisen summan kaavalla

$$11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 12 \cdot \frac{11 + 0}{2} = 66.$$

Yksikään talletuksista ei kasva vielä tässä vaiheessa korkoa korolle, joten tarkasteltuja 80 euron talletuksia voidaan ajatella yhtenä 80 euron talletuksena, jonka korkoaika on $t = 66/12 = 5{,}5$ (vuotta). Korko on

$$r = kit = 80 \text{ €} \cdot 0{,}009 \cdot 5{,}5 = 3{,}96 \text{ €}.$$

Korosta peritään 30 % lähdevero, joten nettokorko on $0{,}7 \cdot 3{,}96 \text{ €} \approx 2{,}77 \text{ €}$. Vuoden lopussa tilillä ovat tehdyt talletukset sekä nettokorko eli yhteensä

$$12 \cdot 80 \text{ €} + 2{,}77 \text{ €} = 962{,}77 \text{ €}.$$

Jokaisena vuonna tilille tehdyt uudet talletukset kasvattavat tilin saldoa tällä määrällä eli 962,77 eurolla. Nämä kasvavat korkoa korolle samaan tapaan kuin kerran vuodessa tehdyt talletukset esimerkissä 5.3.2. Koronkorkolaskennassa 30 % lähdeveron vaikutus täytyy huomioida käyttämällä nettokorkokantaa $0{,}7i = 0{,}7 \cdot 0{,}009 = 0{,}0063$. Korkotekijä on $q = 1 + 0{,}7i = 1{,}0063$. Taulukossa 5.4 on laskettu jokaisen vuosittaisen talletuksen kasvanut pääoma erikseen koronkorkolaskennalla. Ensimmäisenä vuonna tehdyt talletukset ehtivät kasvaa korkoa korolle vielä yhdeksän vuoden ajan, kun taas kymmenentenä vuotena tehdyt talletukset eivät ehdi kasvaa korkoa korolle.

	Pääoma (k)	Korkokausia (n)	Kasvanut pääoma ($K = kq^n$)
1. vuoden talletukset	962,77 €	9	$962{,}77 \text{ €} \cdot 1{,}0063^9$
2. vuoden talletukset	962,77 €	8	$962{,}77 \text{ €} \cdot 1{,}0063^8$
3. vuoden talletukset	962,77 €	7	$962{,}77 \text{ €} \cdot 1{,}0063^7$
⋮	⋮	⋮	⋮
9. vuoden talletukset	962,77 €	1	$962{,}77 \text{ €} \cdot 1{,}0063$
10. vuoden talletukset	962,77 €	0	962,77 €

Taulukko 5.4: Esimerkin 5.3.3 talletusten kasvaneet pääomat.

Kasvaneen pääoman kokonaismääräksi saadaan geometrinen summa

$$962{,}77 \text{ €} + 962{,}77 \text{ €} \cdot 1{,}0063 + 962{,}77 \text{ €} \cdot 1{,}0063^2 + \cdots + 962{,}77 \text{ €} \cdot 1{,}0063^9.$$

Siinä ensimmäinen termi on $a_1 = 962{,}77 \text{ €}$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 10$ ja suhdeluku $q = 1{,}0063$. Summaksi saadaan

$$a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 962{,}77 \text{ €} \cdot \frac{1 - 1{,}0063^{10}}{1 - 1{,}0063} \approx 9\,905{,}28 \text{ €}.$$

Kysytty tilin saldo on siis 9 905,28 €. Korkojen yhteismäärä saadaan tästä vähentämällä kymmenen vuoden aikana kuukausittain tehdyt 80 euron talletukset. Korkoja on kertynyt yhteensä

$$9\,905{,}28\text{ €} - 10 \cdot 12 \cdot 80\text{ €} = 305{,}28\text{ €}.$$

5.4 Diskonttaus

Diskonttaus
Nykyarvo

Joissakin tilanteissa kasvaneen pääoman arvo tunnetaan ja halutaan selvittää alkuperäisen pääoman arvo. Korkokausien aikana kertyneen koron poistamista pääoman arvosta eli alkuperäisen pääoman selvittämistä kutsutaan **diskonttaukseksi**. Diskonttauksella saatua alkuperäistä pääomaa nimitetään **nykyarvoksi**.

Esimerkki 5.4.1. Kuinka paljon rahaa sinun pitäisi vuoden alussa tallettaa tilille, jonka korkokanta on 1,5 % p.a, jotta 30 vuotta myöhemmin tilin saldo olisi 50 000 euroa?

Ratkaisu: Käytetään 30 % lähdeveron vuoksi nettokorkokantaa $0{,}7i = 0{,}7 \cdot 0{,}015 = 0{,}0105$. Korkotekijä on $q = 1+0{,}7i = 1{,}0105$. Kasvanut pääoma on $K = 50\,000$ € ja korkokausien lukumäärä $n = 30$, joten alkuperäiselle pääomalle saadaan yhtälö $kq^n = K$ eli

$$k \cdot 1{,}0105^{30} = 50\,000\text{ €} \;\Leftrightarrow\; k = \frac{50\,000\text{ €}}{1{,}0105^{30}} \approx 36\,549{,}42\text{ €}.$$

Tilille pitäisi siis sijoittaa noin 36 550 euroa.

Diskonttaus;
Nykyarvo
koronkoron
tapauksessa

Nykyarvo eli alkuperäinen pääoma koronkoron tapauksessa on

$$k = Kq^{-n} = \frac{K}{q^n}.$$

Nykyarvo k riippuu siis kasvaneesta pääomasta (K), korkotekijästä (q) ja korkokausien lukumäärästä ($n \geq 1$).

Kerroin $q^{-n} = \dfrac{1}{q^n}$ on nimeltään **diskonttaustekijä**.

Esimerkki 5.4.2. Avaat vuoden alussa tilin, jonka korkokanta on 1,4 %. Haluaisit nostaa siltä kahdeksan vuoden kuluttua 8 000 euroa. Aiot tehdä sitä ennen tilille kolme keskenään yhtä suurta talletusta, joista ensimmäisen tilin avauksen yhteydessä, toisen kolmen vuoden ja kolmannen kuuden vuoden kuluttua tilin avaamisesta. Miten suuri summa sinun pitää joka kerta tallettaa tilille?

Ratkaisu: Ratkaistaan tehtävä soveltamalla koronkorkolaskentaa samaan tapaan kuin esimerkissä 5.3.2. Merkitään talletettavaa rahasummaa kirjaimella x. Koronkorkolaskennassa 30 % lähdeveron vaikutus täytyy huomioida jo korkokannassa eli käytetään nettokorkokantaa $0{,}7i = 0{,}7 \cdot 0{,}014 = 0{,}0098$. Korkotekijä on $q = 1 + 0{,}7i = 1{,}0098$. Taulukossa 5.5 on laskettu jokaisen talletuksen kasvanut pääoma erikseen koronkorkolaskennalla.

	Pääoma (k)	Korkokausia (n)	Kasvanut pääoma ($K = kq^n$)
1. talletus	x	8	$1{,}0098^8 x$
2. talletus	x	5	$1{,}0098^5 x$
3. talletus	x	2	$1{,}0098^2 x$

Taulukko 5.5: Esimerkin 5.4.2 talletusten korot.

Kasvaneen pääoman kokonaismääräksi saadaan

$$1{,}0098^8 x + 1{,}0098^5 x + 1{,}0098^2 x = 8\,000 \text{ €}.$$

Tästä voidaan ratkaista x:

$$x(1{,}0098^8 + 1{,}0098^5 + 1{,}0098^2) = 8\,000 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{8\,000 \text{ €}}{1{,}0098^8 + 1{,}0098^5 + 1{,}0098^2} \approx 2\,539{,}03 \text{ €}.$$

Talletussumman pitää siis olla 2 539,03 €.

Toinen ratkaisutapa on diskontata kaikki rahasummat tilinavaushetkeen. Tämä on tehty taulukossa 5.6. Nelilaskinta käytettäessä tämä ratkaisutapa johtaa negatiivisten eksponenttien vuoksi hankalampiin laskuihin kuin edellä esitetty laskutapa.

	Rahasumma (K)	Korkokausia (n)	Nykyarvo ($k = Kq^{-n}$)
1. talletus	x	0	x
2. talletus	x	3	$1{,}0098^{-3} x$
3. talletus	x	6	$1{,}0098^{-6} x$
Nostettava summa	8 000 €	8	$1{,}0098^{-8} \cdot 8\,000$ €

Taulukko 5.6: Esimerkin 5.4.2 summat diskontattuna tilin avaushetkeen.

Talletusten nykyarvojen summan on oltava yhtä suuri kuin nostettavan summan nykyarvo:

$$x + 1{,}0098^{-3} x + 1{,}0098^{-6} x = 1{,}0098^{-8} \cdot 8\,000 \text{ €}.$$

Tästä voidaan ratkaista x:

$$x(1 + 1{,}0098^{-3} + 1{,}0098^{-6}) = 1{,}0098^{-8} \cdot 8\,000 \text{ €}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1{,}0098^{-8} \cdot 8\,000 \text{ €}}{1 + 1{,}0098^{-3} + 1{,}0098^{-6}} \approx 2\,539{,}03 \text{ €}.$$

Talletussumman pitää siis olla 2 539,03 €.

5.5 Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

Investointi

Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten. Investoinnilla voidaan pyrkiä aloittamaan yrityksen toiminta tai lisäämään sitä. Tavoitteena voi olla myös tuotannon tehostaminen, työnteon helpottaminen tai esimerkiksi ympäristökuormituksen vähentäminen. Investointi on yleensä suuri sijoitus, jonka oletetaan maksavan itsensä pitkällä aikavälillä takaisin.

Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

- **Perushankintakustannus**: investoinnin alkuun liittyvä kertakustannus.
- **Investointiaika**: aika, jolloin investoinnista oletetaan saatavan hyötyä.
- **Jäännösarvo**: investoinnin arvo investointiajan lopussa.

Nykyarvo-menetelmä

Investoinnin kannattavuuden arvioimiseen voidaan käyttää **nykyarvomenetelmää**, jossa kaikki menot ja tulot diskontataan investoinnin alkuhetkeen. Investointi on kannattava, jos tulot ovat suuremmat kuin menot. Diskonttauksessa käytetty korkokanta voi määräytyä esimerkiksi yrityksen omista tuottovaatimuksista tai pankin korkokannasta.

Esimerkki 5.5.1. Aiot ostaa yrityksellesi uuden laitteen, jonka hinta on 1 600 €. Investointiajaksi eli tässä tapauksessa laitteen käyttöiäksi arvioidaan viisi vuotta. Laitteen arvioidaan vähentävän kustannuksia 300 € vuosittain. Kahden vuoden kuluttua laite on huollettava ja huollon hinnaksi arvioidaan 250 €. Laitteen jäännösarvoksi eli tässä tapauksessa jälleenmyyntihinnaksi arvioidaan 350 €. Kannattaako laitteen hankinta, jos rahoitat sen hankinnan viiden vuoden lainalla, jonka korko on 2,0 % p.a.?

Ratkaisu: Diskontataan kaikki menot ja tulot laitteen hankintahetkeen. Tämä on tehty taulukossa 5.7. Korkokanta on $i = 0{,}02$, joten korkotekijä on $q = 1 + i = 1{,}02$. (Huomaa, että nyt kysymyksessä ei ole pankkitalletus vaan laina, joten lähdeverosta ei tarvitse välittää.)

Menojen eli hankintahinnan ja huollon nykyarvo on noin 1 600 €+240,29 € = 1 840,29 €. Tulojen nykyarvo on säästöjen ja jäännösarvon nykyarvojen summa, joka voidaan laskea suoraan taulukosta 5.7. Lausekkeena se on

$$\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} + \frac{1}{1{,}02^4} + \frac{1}{1{,}02^5}\right) \cdot 300\text{ €} + \frac{1}{1{,}02^5} \cdot 350\text{ €} \approx 1\,731{,}05\text{ €}.$$

Menot 1 840,29 € ovat suuremmat kuin tulot 1 731,05 €, joten investointi ei ole kannattava.

Huomaa, että säästöjen nykyarvon lausekkeessa esiintyvä summa voidaan ajatella geometrisena summana, jossa sekä ensimmäinen termi että suhdeluku ovat 1/1,02. Se voidaan siten laskea myös geometrisen summan kaavalla:

$$\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}02^2} + \frac{1}{1{,}02^3} + \frac{1}{1{,}02^4} + \frac{1}{1{,}02^5} = \frac{1}{1{,}02} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}02}\right)^5}{1 - \frac{1}{1{,}02}}.$$

	Rahasumma (K)	Korkokausia (n)	Nykyarvo ($k = Kq^{-n}$)
Hankintahinta	1 600 €	0	1 600 €
Huolto	250 €	2	$\frac{250\text{ €}}{1{,}02^2} \approx 240{,}29$ €
Säästö 1. vuonna	300 €	1	$\frac{300\text{ €}}{1{,}02} \approx 294{,}12$ €
Säästö 2. vuonna	300 €	2	$\frac{300\text{ €}}{1{,}02^2} \approx 288{,}35$ €
Säästö 3. vuonna	300 €	3	$\frac{300\text{ €}}{1{,}02^3} \approx 282{,}70$ €
Säästö 4. vuonna	300 €	4	$\frac{300\text{ €}}{1{,}02^4} \approx 277{,}15$ €
Säästö 5. vuonna	300 €	5	$\frac{300\text{ €}}{1{,}02^5} \approx 271{,}72$ €
Jäännösarvo	350 €	5	$\frac{350\text{ €}}{1{,}02^5} \approx 317{,}01$ €

Taulukko 5.7: Esimerkin 5.5.1 menot ja tulot diskontattuna.

5.6 Tehtäviä

5.1. Linda tallettaa 750 euroa vuodeksi tilille, jonka korkanta on 1,5 %.

(a) Kuinka paljon talletuksesta maksetaan korkoa?
(b) Kuinka paljon korosta maksetaan lähdeveroa? Huomioi lähdeveron pyöristyssääntö.

5.2. Maaliskuun 6. päivä Miska talletti tililleen 300 euroa. Marraskuun 9. päivä hän nosti talletuksensa korkoineen. Korkoa oli tällöin kertynyt 5,17 euroa. Mikä oli tilin vuotuinen korkokanta? Laske korkopäivät korkotavan todelliset/360 mukaan.

5.3. Okko talletti vuoden 2014 tammikuun viimeisenä päivänä 1 500 euroa tilille, jonka korkokanta oli 1,95 %. Minä päivänä Okko nosti talletuksensa, jos hän sai pankista verojen vähentämisen jälkeen 1 517,80 euroa?

5.4. Peppi nosti talletuksensa vuoden kuluttua talletushetkestä. Hän sai pankista verojen vähentämisen jälkeen 652,22 euroa. Mikä oli alkuperäinen talletuspääoma, jos tilin vuotuinen korko oli 1,6 %?

5.5. Rami ja Silja säästivät lomamatkaa varten. Rami talletti joka kuukauden alussa 50 euroa tilille, jonka korkokanta oli 1,4 % p.a. Silja talletti joka kuukauden alussa 40 euroa tilille, jonka korkokanta oli 1,75 % p.a.

(a) Kumman tilillä oli enemmän rahaa vuoden kuluttua?
(b) Kuinka paljon rahaa Ramilla ja Siljalla olisi ollut vuoden kuluttua, jos he olisivat tallettaneet rahansa yhteiselle tilille, jonka korko oli 1,57 % p.a.?

5.6. Tuukka talletti 820 euroa tilille, jonka korko on 1,84 % p.a. Kuinka suureksi talletus kasvaa viidessä vuodessa? Huomioi lähdevero.

5.7. Ulla tallettaa joka kuukauden alussa 30 euroa tililleen, jonka vuosittainen korko on 1,35 %. Ensimmäisen talletuksen Ulla tekee tammikuun alussa vuonna 2014. Kuinka paljon Ullan tilillä on rahaa kolmen vuoden kuluttua vuoden 2016 lopussa koron lisäämisen ja lähdeveron vähentämisen jälkeen?

5.8. Yritys voi maksaa ostamansa uuden koneen kahdella eri maksutavalla: joko maksamalla kaupantekohetkellä 3 000 euroa ja puolentoista vuoden kuluttua 2 000 euroa, tai maksamalla kaupantekohetkellä 2 500 euroa, vuoden kuluttua 1 250 euroa ja kahden vuoden kuluttua 1 250 euroa. Korkokanta kummassakin maksutavassa on 4,5 % p.a. Kumpi vaihtoehto on yrityksen kannalta edullisempi?

5.9. Auton kauppahinta voidaan maksaa kahdella tavalla: joko maksamalla kaupan yhteydessä 20 000 euroa ja puolen vuoden päästä toinen maksuerä 11 000 euroa, tai maksamalla kaupan yhteydessä x euroa ja kolmen kuukauden kuluttua 15 000 euroa. Kuinka suuri tulee toisen maksuvaihtoehdon käteissuorituksen olla, jotta maksuvaihtoehdot olisivat yhtä edulliset? Korkokanta kummassakin maksutavassa on 12,5 % p.a.

5.10. (YO S05) Henkilö avasi 2.5.2002 säästötilin ja talletti tilille 11 000 €. Tilin korko oli pankin primekorko vähennettynä yhdellä prosenttiyksiköllä. Primekorkoa tarkistettiin seuraavasti (tarkistuspäivä ja silloin voimaan tullut korko):

02.05.2002	3,50	02.01.2003	3,20
11.06.2002	3,75	03.03.2003	2,90
15.10.2002	3,50	24.06.2003	2,50

Korko laskettiin todellisten kalenteripäivien mukaan, ja vuoteen laskettiin 365 korkopäivää. Tarkistuspäiviltä korko laskettiin uuden koron mukaan. Korot, joista oli peritty 29 % lähdeveroa, liitettiin pääomaan vuoden lopussa ja tiliä lopetettaessa. Henkilö lopetti tilin 2.5.2003. Paljonko hän sai varat nostaessaan? Mikä oli talletuksen tuottoprosentti?

5.11. (YO S12) Karoliina ja Petteri tallettivat kumpikin 10 000 euroa vuodeksi. Karoliina sijoitti rahansa vuoden määräaikaistilille 2,20 %:n vuotuisella korolla. Maksetusta korosta pankki pidätti 30 % lähdeveroa. Petteri sijoitti rahansa ensin puolen vuoden määräaikaistilille, jonka vuosikorko oli 2,35 %. Puolen vuoden kuluttua Petteri sijoitti pääoman korkoineen, josta pankki oli pidättänyt 30 % lähdeveroa, toiselle puolen vuoden määräaikaistilille. Tämän tilin vuosikorko oli 2,00 %. Maksetusta korosta pankki pidätti jälleen 30 % lähdeveroa. Kumpi teki paremman sijoituksen, ja mikä oli sen arvo vuoden kuluttua?

5.12. (YO K12) Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välen 2,5 %?

5.13. (YO K10) Tuhat euroa talletetaan viiden prosentin korolla 50 vuodeksi. Korko liitetään pääomaan vuosittain. Laadi pylväsdiagrammi, joka kuvaa talletuksen arvoa viiden vuoden välein. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

5.14. (YO K09) Talletustilin vuosikorko on 1,50 prosenttia, ja korkotuotosta peritään vuosittain 29 prosentin lähdevero. Tiliä avattaessa talletetaan 1 000 €, eikä muita talletuksia tehdä.

(a) Kuinka paljon tilillä on rahaa kymmenen vuoden kuluttua, kun korko liitetään pääomaan vuoden välein?

(b) Kuinka monen vuoden kuluttua talletus on kaksinkertaistunut?

5.15. (YO S06) Henkilö osallistuu jatkuvasti lottoarvontaan täyttämällä Internetissä yhden lottorivin kymmeneksi viikoksi joka toisen kuukauden alussa. Laske, kuinka paljon henkilölle kertyisi rahaa pankkitilille, jos hän loton sijasta 40 vuoden ajan, alkaen tammikuun 1. päivästä, tallettaisi joka toisen kuukauden alussa 7 euroa tilille, joka kasvaa korkoa 1,5 % vuodessa. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

5.16. (YO K11)

(a) Säätiöllä on 1,8 miljoonan euron pääoma, jonka vuosittainen tuotto on 5,4 prosenttia. Eräänä vuonna säätiö on päättänyt siirtää tuotosta 30 prosenttia pääomaan ja jakaa lopusta tuotosta kaksi 21 000 euron suuruista apurahaa opiskeluun ulkomailla sekä 14 yhtä suurta matka-apurahaa. Kuinka suuria matka-apurahat ovat?

(b) Kuinka suureksi säätiön 1,8 miljoonan euron pääoma kasvaa viidessä vuodessa, jos tuotto on jokaisena vuotena 5,4 prosenttia pääomasta ja vuosittain pääomaan siirretään 30 prosenttia tuotosta?

5.17. (YO K95) Mikä oli korkokanta, kun 50 000 markan talletuksesta, jolle maksettiin vuosittain korkoa korolle, sai neljän vuoden kuluttua nostettaessa 64 082 mk ?

5.18. (YO S03) Tilille sijoitettiin ensimmäisen vuoden alussa 5 000 € ja toisen vuoden alussa 4 500 €. Kolmannen vuoden alkaessa tilin saldo oli 9 894,85 €. Mikä on tilin korkokanta, kun korko lisättiin pääomaan vuosittain vuoden lopussa ja koroista perittiin vuosittain lähdeveroa 29 %? Tilillä ei kyseisenä aikana ollut muita tilitapahtumia.

5.19. (YO K08) Isoisä avasi vuoden 2006 alussa lapsenlastaan varten tilin, jonka vuotuinen korkoprosentti lähdeveron vähentämisen jälkeen on 1,750, ja talletti tilille 700 euroa. Isoisä jatkaa seuraavina vuosina tallettamalla saman summan. Korko lisätään vuosittain tilin saldoon vuoden viimeisenä päivänä. Kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden 2010 lopussa koron lisäyksen jälkeen? Muodosta ja sievennä lauseke, joka antaa tilin saldon vuoden lopussa, kun talletus on tehty n kertaa. Minkä vuoden lopussa rahaa on vähintään 12 000 euroa?

5.20. (YO S04) Henkilö tekee säästösuunnitelman seitsemäksi vuodeksi ja tallettaa vuosittain kunkin vuoden alussa tietyn summan tilille, jolle maksetaan vuotuista korkoa 2,00 prosentin mukaan. Hän haluaa ottaa suunnitelmassaan huomioon inflaation vaikutuksen ja korottaa talletuksensa määrää keskimääräisen inflaatio-odotuksen mukaisesti aina kahdella prosentilla edellisen vuoden talletuksen määrästä. Mikä on säästösumma sen vuoden lopussa, jona seitsemäs talletus on tehty, kun ensimmäinen talletus on K euroa? Laske sovelluksena säästösumma tapauksessa $K = 500$ €. Lähdevero on 29 %.

5.21. (YO K01) Insinööri Virtanen oli tallettanut asunnon myynnistä saamansa 500 000 markan kauppasumman vuoden 1999 alussa tilille, jolle pankki maksoi 2,00 prosentin verotonta vuotuista korkoa. Talletuskorkojen verotus muuttui 1.6.2000 siten, että tästä päivästä alkaen kertyvät korot ovat kaikki veronalaisia. Koroista menee 29 % lähdevero, jonka pankki perii talletuksen noston yhteydessä täysiksi markoiksi pyöristettynä. Verotuskäytännön muuttuessa pankki lisäsi Virtasen tilille vuoden alusta siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon rahaa Virtanen sai nostaessaan tilillä olevat varat 25.8.2000? Pankki laski talletukselle koron todellisten päivien mukaan tallettamispäivästä nostopäivään nostopäivää lukuun ottamatta. Karkausvuoteen 2000 pankki laski kuuluvaksi 366 korkopäivää.

5.22. (YO S01) Tarina kertoo, että tunnettu matematiikko Jacques Bernoulli talletti vuoden 1699 alussa Baselin pankkiin 58 Sveitsin frangia ja unohti sitten asian. Pankki maksoi talletukselle peräti 0,8 prosentin vuotuista korkoa, joka liitettiin pääomaan aina vuoden lopussa. Minkä vuoden alkuun mennessä talletus kaksinkertaistui? Entä nelinkertaistui? Kuinka suuri olisi talletus ollut tämän vuoden alussa?

5.23. (YO K03) Vuoden 2002 tammikuun alussa talletetaan tietty summa tilille, jolle maksetaan vuotuista korkoa 2,54 %, ja tasan vuoden kuluttua samansuuruinen summa toiselle tilille, jonka korkoprosentti on 3,25. Varat on tarkoitus nostaa tileiltä, kun talletukset ovat kasvaneet yhtä suuriksi. Arvioi kuukauden tarkkuudella, milloin tämä tapahtuu. Sovella koronkoronlaskuperiaatetta, muodosta yhtälö ja ratkaise se. Lähdeveroa ei oteta huomioon.

5.24. (YO K02) Uutta pesukonemallia Suomeen tuova yritys sai joulukuussa 2000 myydyksi 470 pesukonetta. Yritys sai mainostajalta tarjouksen, jossa luvattiin mainostamisen lisäävän myyntiä vuoden 2001 alusta lähtien 25 % edelliseen kuukauteen verrattuna joka kuukausi kahden vuoden ajan.

(a) Kuinka monta pesukonetta yritys myisi tarjouksen mukaan vuoden 2001 kesäkuussa?
(b) Kuinka monta konetta myynti olisi koko kahden vuoden aikana?

5.25. (YO S08) Isovanhemmat sitoutuivat avustamaan lastenlastensa harrastustoimintaa viiden vuoden ajan. Kuinka suuri kertasumma heidän tulee vuodenvaihteessa sijoittaa tilille, jonka korkokanta on 2,2 %, jotta he voivat jakaa lastenlapsilleen vuosittain 2 500 euroa seuraavien viiden vuoden ajan? Ensimmäinen erä maksetaan vuoden kuluttua sijoituksesta ja seuraavat neljä erää vuoden välein. Lähdevero on 28 %.

5.26. (YO S10) Yrittäjälle myönnetään lupa kalanviljelylaitoksen perustamiseen edellyttäen, että laitoksen toiminnasta koituva haitta korvataan rajanaapureille. Haitan vuotuiseksi arvoksi arvioidaan 7 000 euroa, ja ennen laitoksen käynnistämistä on maksettava tämän nykyarvo kymmenen vuoden ajalta. Paljonko yrittäjän on maksettava haittakorvausta, kun laskennassa käytetään 3,75 prosentin vuotuista korkoa?

5.27. (YO S07) Veljekset Matti ja Teppo ostavat yhdessä naapuriltaan Sepolta käytetyn leikkuupuimurin. He sopivat seuraavanlaisesta maksujärjestelystä: Matti maksaa heti 32 000 € ja tämän jälkeen neljä kertaa vuoden välein 900 €. Teppo maksaa heti 30 500 € ja tämän jälkeen kaksi kertaa 2 500 € vuoden välein. Mikä oli leikkuupuimurin nykyarvo, ja paljonko veljesten maksuosuudet poikkesivat toisistaan nykyarvoina laskettuina, kun laskentakorkokanta oli 1,95 %?

5.28. (YO K02) Vanhemmat päättivät tallettaa lapsilleen Anjalle ja Artolle vuoden 2003 alussa yhteensä 9 500 € siten, että lapset saisivat nostaa yhtä suuret rahamäärät 21-vuotissyntymäpäiväänsä seuraavan vuoden alussa. Kuinka paljon vanhempien on sijoitettava lasten tileille, kun vuoden 2003 alussa Anja on 16-vuotias ja Arto 12-vuotias? Oletetaan, että pankki maksaa vuotuista korkoa 2,5 prosentin mukaan. Verotusta ei oteta huomioon.

5.29. (YO S01) Kuinka paljon lukion stipendirahastoon on lahjoitettava rahaa euroina, kun tarkoituksena on jakaa lahjoitus korkoineen stipendeinä seuraavasti: tasan vuoden kuluttua lahjoituksesta 200 €, kahden vuoden kuluttua 300 €, kolmen vuoden kuluttua 400 €, neljän vuoden kuluttua 500 € ja viiden vuoden kuluttua 600 €? Pääomaan lisätään vuosittain 4,5 prosentin korko, ensimmäisen kerran vuoden kuluttua lahjoituksesta.

5.30. (YO K99) Aikakauslehden tilaushinta on 558 mk, ja se on maksettava viimeistään 15.4.1999. Toisena vaihtoehtona on maksaa viimeistään 15.1.1999, jolloin saa 15 markan alennuksen.

Mitä vuotuista korkoprosenttia on sovellettava, jotta maksutavat olisivat yhtä edulliset? Jos korkoprosentti on tätä pienempi, kumpi tapa on tilaajalle edullisempi?

5.31. (YO S98) Koneen ostohinta on 130 000 mk. Käyttöikä on viisi vuotta, jonka jälkeen koneella on 20 000 mk:n poistoarvo. Koneen vuosittainen nettotuotto on 25000 mk. Laske koneen poistoarvon ja koneen tuottojen ostohetkeen muunnetut nykyarvot, kun vuotuinen korkokanta on 5 %. Päättele tuloksesta, kannattaako koneen osto.

5.32. (YO S13) Abiturientti saa lahjoituksen, jonka suuruus on verojen jälkeen 12 000 euroa. Hän sijoittaa sen vuodeksi kahteen rahastoon, joiden vuotuiset korot ovat verojen jälkeen 3,5 % ja 5,5 %.

(a) Lahjoituksesta x euroa sijoitetaan 3,5 % tuoton tarjoavaan rahastoon ja loput toiseen rahastoon. Esitä koko sijoituksen arvo y muuttujan x avulla lausuttuna, kun $0 \leq x \leq 12000$.

(b) Piirrä a-kohdan funktion kuvaaja välillä $0 \leq x \leq 12000$.

6 Lainat

Viitekorko
Korko-marginaali

Pankista lainatusta rahasta maksetaan pankille korkoa. Lainan korko muodostuu **viitekorosta** ja siihen lisättävästä asiakaskohtaisesta **korkomarginaalista**. Viitekorkoja ovat esimerkiksi euroalueen yhteiset viitekorot kuten euribor 360, euribor 365 ja euribor 6 kk sekä pankkien omat primekorot. Euriborkorkojen suuruudet tarkistetaan päivittäin 1, 2 ja 3 viikon sekä 1–12 kuukauden korkokausille. Pankkien omia primekorkoja tarkistetaan huomattavasti harvemmin.

6.1 Peruskäsitteitä

Lainoihin liittyviä keskeisiä käsitteitä ovat

- **Lainapääoma**: lainan suuruus euroina.
- **Lyhennys**: pienentää lainapääomaa.
- **Takaisinmaksuerä**: muodostuu lainan lyhennyksestä ja lainan korosta.
- **Tasalyhennyslaina**: laina, jonka lyhennys pysyy vakiona.
- **Annuiteettilaina** eli **tasaerälaina**: laina, jonka takaisinmaksuerä pysyy vakiona.
- **Kiinteä tasaerälaina**: takaisinmaksuerä pysyy vakiona myös koron muuttuessa.
- **Annuiteetti** eli tasaerä: vakiosuuruinen takaisinmaksuerä.
- **Korkotekijä**: tarvitaan annuiteettilainan takaisinmaksuerän laskemiseen.

Takaisinmaksuerään sisältyvä korko lasketaan aina jäljellä olevasta lainamäärästä.

6.2 Tasalyhennyslaina

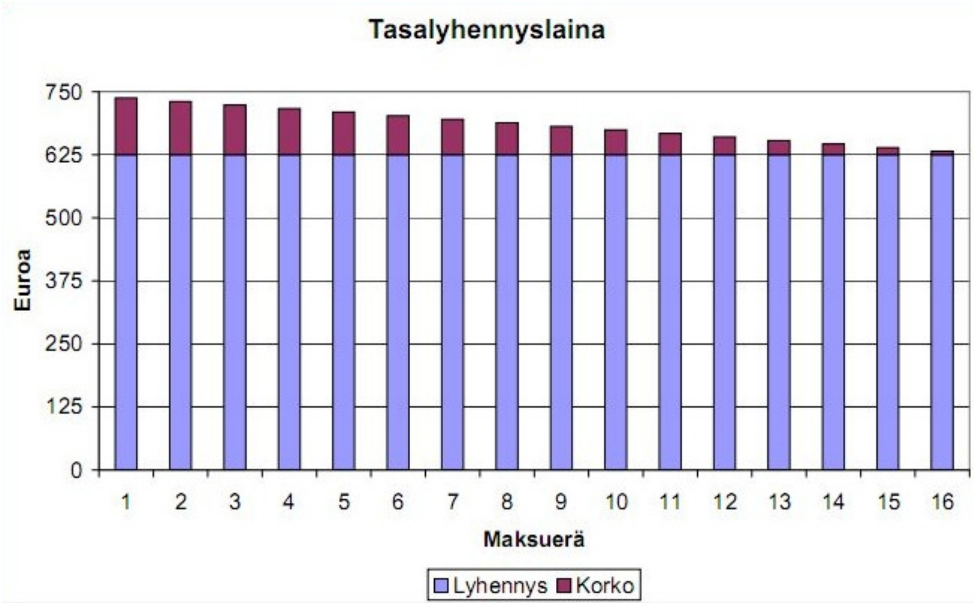
Tasalyhennys-laina

Tasalyhennyslainan kaikki lyhennykset ovat samansuuruisia. Jäljellä oleva lainapääoma pienenee siis jokaisella maksukerralla yhtä paljon. Koska takaisinmaksuerään sisältyvä korko lasketaan aina jäljellä olevasta lainapääomasta, pienenee sekin jokaisella maksukerralla vakiomäärällä. Takaisinmaksuerät siis pienenevät vähitellen koron määrän pienentyessä.

Esimerkki 6.2.1. Otat auton ostoa varten 10 000 euron lainan neljäksi vuodeksi. Korkokanta on 4,5 % p.a., ja lyhennät lainaa kolmen kuukauden välein tasalyhennyksenä. Tee lainalaskelma, josta näkyvät lyhennyksen suuruus, maksueriin sisältyvien korkojen määrät, maksuerien suuruudet ja jäljellä olevan lainan määrä. Miten paljon korkoa maksat lainasta yhteensä?

Lyhennyksen suuruus ja jäljellä olevan lainan määrä

Lainaa lyhennetään kolmen kuukauden välein, joten vuodessa lyhennyksiä on $12/3 = 4$. Laina-aika on neljä vuotta, joten maksukertoja on yhteensä $n = 4 \cdot 4 = 16$. Lyhennyksen



Kuva 6.1: Tasalyhennyslainassa lyhennys on aina yhtä suuri ja takaisinmaksuerä pienenee.

suuruus saadaan jakamalla lainapääoma $K = 10\,000$ € maksuerien määrällä $n = 16$. Lyhennyksen suuruus on siis

$$L = \frac{K}{n} = \frac{10000\text{ €}}{16} = 625\text{ €}.$$

Lainapääoma pienenee joka maksukerralla lyhennyksen verran, joten jäljellä olevan lainan määrä saadaan laskettua vähennyslaskulla. Esimerkiksi seitsemän lyhennyksen jälkeen jäljellä oleva lainapääoma on

$$V_7 = K - 7L = 10\,000\text{ €} - 7 \cdot 625\text{ €} = 10\,000\text{ €} - 4\,375\text{ €} = 5\,625\text{ €}.$$

Maksueriin sisältyvät korot ja maksuerien suuruudet

Korkokanta on 4,5 % p.a. eli korkokauden pituus on vuosi. Koska lainaa lyhennetään kolmen kuukauden välein, on korkoaika (lyhennysten välissä kuluva aika) lyhyempi kuin korkokausi. Tämän vuoksi kuhunkin maksuerään sisältyvä korko voidaan laskea yksinkertaisella korkolaskulla.

Korkoaika pitää ilmoittaa samassa ajan yksikössä kuin korkokausi eli tässä tapauksessa vuosina. Kolme kuukautta on $3/12 = 1/4 = 0{,}25$ vuotta, joten korkoaika on $t = 0{,}25$ (vuotta). Korkokanta on $i = 0{,}045$. Ensimmäiseen maksuerään sisältyvä korko lasketaan alkuperäisestä lainapääomasta:

$$r_1 = kit = 10\,000\text{ €} \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}25 = 112{,}5\text{ €}.$$

Maksu-kerta	Lainapääoma ennen lyhennystä (€)	Korko (€)	Lyhennys (€)	Maksu-erä (€)	Lainapääoma lyhen-nyksen jälkeen (€)
1	10 000	112,50	625	737,50	9 375
2	9 375	105,47	625	730,47	8 750
3	8 750	98,44	625	723,44	8 125
4	8 125	91,41	625	716,41	7 500
5	7 500	84,38	625	709,38	6 875
6	6 875	77,34	625	702,34	6 250
7	6 250	70,31	625	695,31	5 625
8	5 625	63,28	625	688,28	5 000
9	5 000	56,25	625	681,25	4 375
10	4 375	49,22	625	674,22	3 750
11	3 750	42,19	625	667,19	3 125
12	3 125	35,16	625	660,16	2 500
13	2 500	28,13	625	653,13	1 875
14	1 875	21,09	625	646,09	1 250
15	1 250	14,06	625	639,06	625
16	625	7,03	625	632,03	0

Taulukko 6.1: Esimerkin 6.2.1 lainalaskelma.

Ensimmäisen maksuerän jälkeen jäljellä oleva lainapääoma saadaan vähennyslaskulla

$$V_1 = K - L = 10\,000 \text{ €} - 625 \text{ €} = 9\,375 \text{ €}.$$

Toiseen maksuerään sisältyvä korko lasketaan jäljellä olevasta lainapääomasta:

$$r_2 = kit = 9\,375 \text{ €} \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}25 \approx 105{,}47 \text{ €}.$$

Maksuerien suuruudet saadaan laskemalla yhteen koron määrä ja lyhennys.

Laskemalla jokaiseen maksuerään sisältyvä korko erikseen saadaan taulukossa 6.1 näkyvä lainalaskelma. Maksueriin sisältyviä lyhennyksiä ja korkoja on havainnollistettu edellisen sivun kuvassa 6.1.

Maksettujen korkojen yhteismäärä

Maksuerään sisältyvä korko pienenee joka kerta lyhennystä vastaavan koron määrällä, joka tässä tapauksessa on $625 \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}25 \text{ €} \approx 7{,}03 \text{ €}$. Maksueriin sisältyvät korot muodostavat näin aritmeettisen jonon, jonka ensimmäinen jäsen on $r_1 = 112{,}5$ €, viimeinen jäsen on $r_{16} = 7{,}03$ € ja jäsenten lukumäärä on $n = 16$. Maksettujen korkojen yhteismäärä saadaan siten aritmeettisena summana

$$S_{16} = n \cdot \frac{r_1 + r_{16}}{2} = 16 \cdot \frac{112{,}5 + 7{,}03}{2} \text{ €} = 956{,}24 \text{ €}.$$

6.3 Bullet-laina — tasalyhennyslainan erikoistapaus

Bullet-laina

Bullet-lainalla eli **kertalyhennyslainalla** tarkoitetaan lainaa, jonka lainapääoma maksetaan kokonaisuudessaan takaisin laina-ajan päättyessä. Bullet-lainaa lyhennetään siis vain kerran. Lainan korkoja voidaan kuitenkin maksaa useassa erässä laina-ajan aikana. Kertalyhenteistä lainaa voidaan käyttää esimerkiksi asunnonvaihdon yhteydessä väliaikaisrahoituksena.

Esimerkki 6.3.1. Otat auton ostoa varten 10 000 euron kertalyhennyslainan kahdeksi vuodeksi. Korkokanta on 4,5 % p.a., ja maksat korot kolmen kuukauden välein. Miten paljon korkoa maksat lainasta yhteensä? Mikä on viimeisen maksuerän suuruus?

Ratkaisu: Kolmen kuukauden aikana kertynyt korko saadaan yksinkertaisella korkolaskennalla: Korkokannasta 4,5 % p.a. nähdään, että korkokausi on vuosi. Korkoaika kolme kuukautta on $t = 3/12 = 1/4 = 0{,}25$ vuotta. Koron suuruudeksi saadaan

$$r = kit = 10\,000 \text{ €} \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}25 = 112{,}50 \text{ €}.$$

Koska korkoa maksetaan kolmen kuukauden välein, sitä ehditään maksaa kahden vuoden aikana yhteensä $24/3 = 8$ kertaa. Korkojen kokonaismäärä on siis $8 \cdot 112{,}50 \text{ €} = 900 \text{ €}$. Viimeisen maksuerän yhteydessä maksetaan myös lainapääoma eli viimeisen maksuerän suuruus on $10\,000 \text{ €} + 112{,}50 \text{ €} = 10\,112{,}50 \text{ €}$.

Yhteenveto tasalyhennyslainasta

Tasalyhennyslainassa

- lyhennyksen suuruus saadaan jakamalla lainapääoma takaisinmaksukertojen lukumäärällä;
- jäljellä olevan lainan määrä saadaan alkuperäisestä lainapääomasta vähentämällä tehdyt lyhennykset;
- maksuerään sisältyvä korko lasketaan yksinkertaisella korkolaskulla jäljellä olevasta lainapääomasta;
- maksuerän suuruus saadaan laskemalla yhteen lyhennys ja korko;
- lainan korkojen kokonaismäärä saadaan aritmeettisena summana

$$S_n = n \cdot \frac{r_1 + r_n}{2},$$

missä n on maksuerien lukumäärä, r_1 on ensimmäisen maksuerän korko ja r_n on viimeisen maksuerän korko.

6.4 Tasaerä- eli annuiteettilaina

Tasaerä- eli annuiteettilaina

Tasaerä- eli annuiteettilainan takaisinmaksuerä pysyy samansuuruisena koko laina-ajan, jos korkokanta ei muutu. Korko lasketaan aina jäljellä olevasta lainamäärästä, joten laina-ajan alussa koron osuus takaisinmaksuerässä on suuri ja lyhennyksen osuus pieni. Lainapääoman pienentyessä lyhennyksen osuus takaisinmaksuerästä kasvaa. Voidaan osoittaa, että takaisinmaksuerän suuruus eli eli annuiteetti saadaan laskettua seuraavasti:

Annuiteetti eli tasaerä

Tasaerä- eli annuiteettilainan **takaisinmaksuerän suuruus eli annuiteetti** (A) on

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}.$$

Se riippuu lainapääomasta (K), maksukertojen lukumäärästä (n) ja korkotekijästä (q).

Korkotekijä

Jos lainaa lyhennetään aina korkokauden lopussa, korkoaika (lyhennysten välinen aika) on sama kuin korkokauden pituus eli $t = 1$. Tällöin korkotekijä saadaan suoraan korkokannasta. Esimerkiksi jos korkokanta 4,5 % p.a. ja lainaa lyhennetään kerran vuodessa, korkotekijäksi saadaan

$$q = 1 + it = 1 + i = 1 + 0{,}045 = 1{,}045.$$

Jos lainaa lyhennetään useamman kerran korkokauden aikana, täytyy korkotekijässä huomioida korkoaika eli lyhennysten välissä kuluva aika. Esimerkiksi jos korkokanta 4,5 % p.a. ja lainaa lyhennetään neljän kuukauden välein, on korkoaika $4/12 = 1/3 \approx 0{,}33$ vuotta eli $t = 1/3$ (vuotta). Tällöin korkotekijäksi saadaan

$$q = 1 + it = 1 + 0{,}045 \cdot (\mathbf{1}/3) = 1{,}015.$$

Esimerkki 6.4.1. Otat auton ostoa varten 10 000 euron lainan neljäksi vuodeksi. Korkokanta on 4,5 % p.a., ja lyhennät lainaa kolmen kuukauden välein tasaerinä. Tee lainalaskelma, josta näkyvät lyhennyksen suuruus, maksueriin sisältyvien korkojen määrät, maksuerien suuruudet ja jäljellä olevan lainan määrä. Miten paljon korkoa maksat lainasta yhteensä?

Maksuerien suuruudet

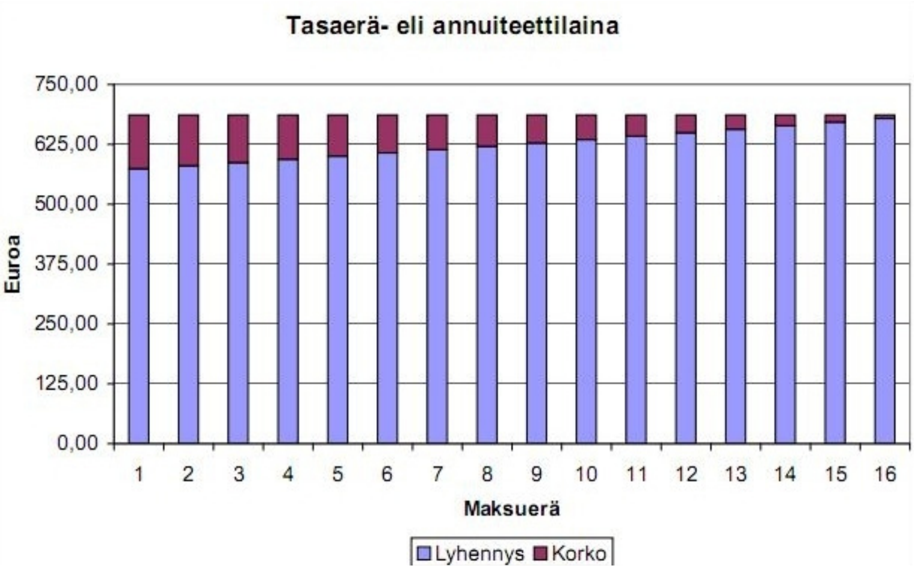
Lainaa lyhennetään kolmen kuukauden välein, joten vuodessa lyhennyksiä on $12/3 = 4$. Laina-aika on neljä vuotta, joten maksukertoja on yhteensä $n = 4 \cdot 4 = 16$. Korkokanta $i = 4{,}5$ % p.a. eli korkokauden pituus on vuosi. Korkoaika pitää ilmoittaa samassa ajan yksikössä kuin korkokausi eli tässä tapauksessa vuosina. Koska lainaa lyhennetään kolmen kuukauden välein, on korkoaika $t = 3/12 = 1/4 = 0{,}25$ vuotta. Korkotekijäksi saadaan

$$q = 1 + it = 1 + 0{,}045 \cdot 0{,}25 = 1{,}01125.$$

Annuiteetti eli maksuerän suuruus on siis

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} = 10\,000 \text{ €} \cdot 1{,}01125^{16} \frac{1-1{,}01125}{1-1{,}01125^{16}} \approx 686{,}44 \text{ €}.$$

Tähän sisältyy sekä lainan lyhennys että lainasta maksettava korko.



Kuva 6.2: Tasaerä- eli annuiteettilainassa maksuerä on aina yhtä suuri ja lyhennys kasvaa.

Korot, lyhennykset ja jäljellä olevan lainan määrä

Koska korkoaika (lyhennysten välissä kuluva aika) on lyhyempi kuin korkokausi, lasketaan kuhunkin maksuerään sisältyvä korko yksinkertaisella korkolaskulla. Ensimmäiseen maksuerään sisältyvä korko lasketaan alkuperäisestä lainapääomasta:

$$r_1 = kit = 10\,000 \text{ €} \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}25 = 112{,}5 \text{ €}.$$

Lyhennyksen määrä 1. maksuerässä saadaan maksuerästä vähentämällä koron osuus:

$$L_1 = A - r_1 = 686{,}44 \text{ €} - 112{,}5 \text{ €} = 573{,}94 \text{ €}.$$

Jäljellä olevan lainan määrä saadaan lainapääomasta vähentämällä lyhennys:

$$V_1 = K - L_1 = 10\,000 \text{ €} - 573{,}94 \text{ €} = 9\,426{,}06 \text{ €}.$$

Toiseen maksuerään sisältyvä korko lasketaan jäljellä olevasta lainapääomasta:

$$r_2 = kit = 9\,426{,}06 \text{ €} \cdot 0{,}045 \cdot 0{,}25 \approx 106{,}04 \text{ €}.$$

Lyhennyksen määrä toisessa maksuerässä ja jäljellä olevan lainan määrä saadaan jälleen erotuksina:

$$L_2 = A - r_2 = 686{,}44 \text{ €} - 106{,}04 \text{ €} = 580{,}40 \text{ €}.$$
$$V_2 = V_1 - L_2 = 9\,426{,}06 \text{ €} - 580{,}40 \text{ €} = 8\,845{,}66 \text{ €}.$$

Laskemalla erikseen jokaiseen maksuerään sisältyvä korko, lyhennyksen määrä ja jäljellä olevan lainan määrä saadaan taulukossa 6.2 näkyvä lainalaskelma.

Maksu-kerta	Lainapääoma ennen lyhennystä (€)	Korko (€)	Lyhennys (€)	Maksu-erä (€)	Lainapääoma lyhen-nyksen jälkeen (€)
1	10 000,00	112,50	573,94	686,44	9 426,06
2	9 426,06	106,04	580,40	686,44	8 845,66
3	8 845,66	99,51	586,93	686,44	8 258,73
4	8 258,73	92,91	593,53	686,44	7 665,20
5	7 665,20	86,23	600,21	686,44	7 065,00
6	7 065,00	79,48	606,96	686,44	6 458,04
7	6 458,04	72,65	613,79	686,44	5 844,25
8	5 844,25	65,75	620,69	686,44	5 223,56
9	5 223,56	58,77	627,67	686,44	4 595,89
10	4 595,89	51,70	634,74	686,44	3 961,15
11	3 961,15	44,56	641,88	686,44	3 319,27
12	3 319,27	37,34	649,10	686,44	2 670,17
13	2 670,17	30,04	656,40	686,44	2 013,77
14	2 013,77	22,65	663,79	686,44	1 349,98
15	1 349,98	15,19	671,25	686,44	678,73
16	678,73	7,64	678,80	686,44	0

Taulukko 6.2: Esimerkin 6.4.1 lainalaskelma.

Maksettujen korkojen yhteismäärä

Pankille maksettava kokonaissumma saadaan laskemalla kaikki maksuerät yhteen:

$$16 \cdot 686{,}44 \text{ €} = 10\,983{,}04 \text{ €}.$$

Korkojen yhteismäärä saadaan vähentämällä tästä lainapääoma 10 000 €. Korkojen yhteismäärä on siten 983,04 €.

Jäljellä olevan lainan määrä saadaan laskettua myös seuraavasti:

Jäljellä olevan lainan määrä, annuiteettilaina

Jos korkokanta on pysynyt samana, on **jäljellä olevan lainan määrä** annuiteettilainassa k:nnen lyhennyksen jälkeen

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}.$$

Jäljellä olevan lainan määrä V_k riippuu siis lainapääomasta (K), korkotekijästä (q), tehtyjen lyhennysten määrästä (k) ja maksuerän suuruudesta eli annuiteetista (A).

Esimerkki 6.4.2 (Valintakoe 2014, tehtävä 50)**.** Elias on päättänyt ostaa oman asunnon 5 vuoden kuluttua. Hän on sopinut pankin kanssa, että tallettaa kunkin 5 seuraavan vuoden lopussa 8 000 euroa tilille, jolle pankki maksaa 2,4 % vuosikoron. Ostaessaan asunnon Elias aikoo ottaa annuiteettilainan, jota hän maksaa takaisin 12 000 euron erissä 8 vuoden ajan, ensimmäisen erän tasan vuoden kuluttua lainan nostamisesta, ja loput vuoden välein siitä eteenpäin, viimeisen kahdeksannen vuoden lopussa. Pankin kanssa hän on sopinut lainan vuosikoroksi 4,0 %. Mikä on korkein hinta, jonka Elias voi yllä olevan suunnitelman mukaisesti maksaa asunnosta (hinta pyöristettynä lähimpään kymmeneen euroon)?

Ratkaisu: Ajatellaan, että Eljas maksaa säästöillään osan asunnosta ja loput lainalla, jonka hän maksaa takaisin esimerkiksi palkkatuloillaan.

Lasketaan aluksi, miten suureksi Eliaksen säästöt kasvavat ennen asunnon ostoa. Huomataan, että Eliaksen ensimmäisen vuoden lopussa tekemä talletus ehtii kasvaa korkoa neljä vuotta. Muiden talletusten korkokausien määrät on kirjattu taulukkoon 6.3. Tilin korkokanta on $i = 0{,}024$, joten korkotekijä on $q = 1 + i = 1{,}024$. Lähdeveroa ei huomioida.

	Talletus (k)	Korkokausia (n)	Kasvanut pääoma ($K = kq^n$)
Talletus 1. vuoden lopussa	8 000 €	4	$8\,000\text{ €} \cdot 1{,}024^4$
Talletus 2. vuoden lopussa	8 000 €	3	$8\,000\text{ €} \cdot 1{,}024^3$
Talletus 3. vuoden lopussa	8 000 €	2	$8\,000\text{ €} \cdot 1{,}024^2$
Talletus 4. vuoden lopussa	8 000 €	1	$8\,000\text{ €} \cdot 1{,}024$
Talletus 5. vuoden lopussa	8 000 €	0	8 000 €

Taulukko 6.3: Eliaksen talletusten kasvaneet pääomat.

Kasvaneen pääoman kokonaismääräksi eli Eliaksen säästöiksi saadaan

$$8\,000\text{ €} \cdot (1 + 1{,}024 + 1{,}024^2 + 1{,}024^3 + 1{,}024^4) = 8\,000\text{ €} \cdot \frac{1 - 1{,}024^5}{1 - 1{,}024} \approx 41\,967\text{ €}.$$

Loput asunnon hinnasta Elias rahoittaa lainalla. Maksukertojen määrä $n = 8$, maksuerän suuruus eli annuiteetti $A = 12\,000$ € ja korkotekijä $q = 1 + i = 1{,}04$. Lainapääoman suuruus K saadaan yhtälöstä

$$A = Kq^n \frac{1 - q}{1 - q^n} \quad \Leftrightarrow \quad K = \frac{A}{q^n} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Sijoittamalla saadaan

$$K = \frac{12\,000\text{ €}}{1{,}04^8} \cdot \frac{1 - 1{,}04^8}{1 - 1{,}04} \approx 80\,793\text{ €}.$$

Elias voi siis maksaa asunnosta enintään 41 967 € + 80 793 € = 122 760 €.

6.5 Kiinteä tasaerälaina — annuiteettilainan erikoistapaus

Kiinteä tasaerälaina

Jos korkokanta muuttuu laina-ajan aikana, voidaan annuiteettilainojen tapauksessa muuttaa joko takaisinmaksuerän suuruutta tai laina-aikaa. Tavallisessa annuiteettilainassa takaisinmaksuerä eli annuiteetti muuttuu korkokannan muuttuessa ja laina-aika pysyy samana. **Kiinteässä tasaerälainassa** takaisinmaksuerä ei muutu edes korkokannan muuttuessa, vaan laina-aika pitenee tai lyhenee.

Esimerkki 6.5.1. Otat 90 000 euron asuntolainan 20 vuodeksi. Laina on kuukausittain lyhennettävä kiinteä tasaerälaina, jonka korkokanta on aluksi 2,4 % p.a. Viiden vuoden kuluttua lainan korko nousee 3,0 prosenttiin, mutta lainan takaisinmaksuerä ei kasva. Kuinka paljon laina-aika pitenee? Kuinka suuri on viimeinen maksuerä? Kuinka paljon maksat korkoa yhteensä?

Ratkaisu: Lainaa lyhennetään kerran kuukaudessa, joten korkoaika $t = 1/12$ (vuotta). Korkotekijä on aluksi $q = 1 + it = 1 + 0{,}024 \cdot (1/12) = 1{,}002$. Maksuerien lukumäärä on $n = 20 \cdot 12 = 240$. Annuiteetti eli maksuerän suuruus on siten

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} = 90\,000 \text{ €} \cdot 1{,}002^{240} \cdot \frac{1-1{,}002}{1-1{,}002^{240}} \approx 472{,}54 \text{ €}.$$

Viiden vuoden kuluttua lainaa on maksettu takaisin $5 \cdot 12 = 60$ maksuerän verran. Jäljellä oleva lainapääoma on silloin

$$V_{60} = Kq^{60} - A\frac{1-q^{60}}{1-q} = 90\,000 \text{ €} \cdot 1{,}002^{60} - 472{,}54 \text{ €} \cdot \frac{1-1{,}002^{60}}{1-1{,}002} \approx 71\,370{,}80 \text{ €}.$$

Korkokannan muutoksen jälkeen korkotekijä on

$$q = 1 + it = 1 + 0{,}030 \cdot (1/12) = 1{,}0025.$$

Maksuerä ei muutu, joten $A = 472{,}54$ €. Ratkaistaan annuiteetin yhtälöstä tarvittavien maksukertojen määrä x:

$$\begin{aligned}
& 472{,}54 \text{ €} = 71\,370{,}80 \text{ €} \cdot 1{,}0025^x \cdot \frac{1-1{,}0025}{1-1{,}0025^x} && \mid \cdot(1-1{,}0025^x) \\
\Leftrightarrow\ & 472{,}54 \cdot (1-1{,}0025^x) = 71\,370{,}80 \cdot 1{,}0025^x \cdot (1-1{,}0025) \\
\Leftrightarrow\ & 472{,}54 \cdot (1-1{,}0025^x) = 71\,370{,}80 \cdot 1{,}0025^x \cdot (-0{,}0025) \\
\Leftrightarrow\ & 472{,}54 - 472{,}54 \cdot 1{,}0025^x = -178{,}427 \cdot 1{,}0025^x && \mid +472{,}54 \cdot 1{,}0025^x \\
\Leftrightarrow\ & 472{,}54 = -178{,}427 \cdot 1{,}0025^x + 472{,}54 \cdot 1{,}0025^x && \mid \text{yhteinen tekijä}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & 472{,}54 = (-178{,}427 + 472{,}54) \cdot 1{,}0025^x \\
\Leftrightarrow\ & 472{,}54 = 294{,}113 \cdot 1{,}0025^x && \mid \text{vaihdetaan yhtälön vasen ja oikea puoli} \\
\Leftrightarrow\ & 294{,}113 \cdot 1{,}0025^x = 472{,}54 && \mid : 294{,}113 \\
\Leftrightarrow\ & 1{,}0025^x = \frac{472{,}54}{294{,}113} \\
\Leftrightarrow\ & 1{,}0025^x = 1{,}60666138\ldots && \mid \text{otetaan molemmilta puolilta logaritmi} \\
\Leftrightarrow\ & \log(1{,}0025^x) = \log(1{,}60666138\ldots) && \mid \text{logaritmin laskusääntö} \\
\Leftrightarrow\ & x\log(1{,}0025) = \log(1{,}60666138\ldots) && \mid : \log(1{,}0025) \\
\Leftrightarrow\ & x = \frac{\log(1{,}60666138\ldots)}{\log(1{,}0025)} \approx 189{,}90
\end{aligned}$$

Koska tulos ei ole kokonaisluku, viimeinen maksuerä on joko pienempi tai suurempi kuin muut maksuerät. Koska tehtävänannon mukaan maksuerä ei kasva koron noustessa, viimeisen maksuerän täytyy olla pienempi kuin muut maksuerät. Tällöin eriä tarvitaan 190 ja erien kokonaismäärä on $60 + 190 = 250$. Alunperin maksueriä piti olla yhteensä 240, joten lainan takaisinmaksu pitenee kymmenen erän verran, toisin sanottuna kymmenen kuukautta.

Jäljellä olevan lainan määrä ennen viimeistä erää on

$$\begin{aligned} V_{189} &= Kq^{189} - A\frac{1-q^{189}}{1-q} = 71\,370{,}80\text{ €} \cdot 1{,}0025^{189} - 472{,}54\text{ €} \cdot \frac{1-1{,}0025^{189}}{1-1{,}0025} \\ &\approx 424{,}43\text{ €}. \end{aligned}$$

Viimeinen maksuerä on jäljellä oleva lainasumma korkoineen eli $1{,}0025 \cdot 424{,}43\text{ €} \approx 425{,}49\text{ €}$. Lainasta maksetaan lyhennyksiä ja korkoja yhteensä

$$249 \cdot 472{,}54\text{ €} + 425{,}49\text{ €} = 118\,087{,}95\text{ €}.$$

Maksettujen korkojen määrä saadaan vähentämällä tästä alkuperäinen lainapääoma:

$$118\,087{,}95\text{ €} - 90\,000\text{ €} = 28\,087{,}95\text{ €}.$$

Yhteenveto annuiteettilainasta

Tasaerä- eli annuiteettilainassa

- maksuerän suuruus saadaan annuiteetin kaavasta

$$A = Kq^n\frac{1-q}{1-q^n},$$

missä K on lainapääoma, n on maksukertojen lukumäärä ja q on korkotekijä;
- maksuerään sisältyvä korko lasketaan yksinkertaisella korkolaskulla jäljellä olevasta lainapääomasta;
- lyhennyksen suuruus saadaan maksuerästä vähentämällä siihen sisältyvä korko;
- jäljellä olevan lainan määrä saadaan alkuperäisestä lainapääomasta vähentämällä tehdyt lyhennykset; voidaan käyttää myös kaavaa

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q},$$

missä k on tehtyjen lyhennysten määrä;
- lainan korkojen kokonaismäärä saadaan maksuerien summasta vähentämällä alkuperäinen lainapääoma.

6.6 Tehtäviä

6.1. Mitkä seuraavista väittämistä sopivat tasalyhennyslainaan? Entä annuiteettilainaan? Entä kiinteään tasaerälainaan?

(a) Kaikki maksuerät ovat yhtä suuria.
(b) Kaikki lyhennykset ovat yhtä suuria.
(c) Ensimmäinen maksuerä on suurin.
(d) Korkojen osuus maksuerissä vaihtelee.
(e) Lyhennyksen osuus maksuerissä vaihtelee.
(f) Jos korko nousee, laina-aika pitenee.
(g) Jos korko nousee, maksuerä kasvaa.

6.2. Frank ottaa 450 euron lainan, jonka korko on 10 % p.a. ja laina-aika puoli vuotta. Frank lyhentää lainaa kuukausittain tasalyhennyksin.

(a) Mikä on lyhennyksen suuruus?
(b) Laske jokaisen maksuerän suuruus.
(c) Kuinka paljon korkoa Frank maksaa lainasta yhteensä?

6.3. Greta ottaa 80 000 euron asuntolainan. Lainan korko on 3,95 % p.a. ja laina-aika 25 vuotta. Greta maksaa lainan takaisin kuukausittaisilla tasalyhennyksillä.

(a) Mikä on jäljellä olevan lainan määrä kymmenen vuoden kuluttua?
(b) Kuinka paljon korkoa Greta maksaa lainasta yhteensä?

6.4. Niina lainasi pankista 2 000 euroa. Hän maksoi koko lainasumman korkoineen takaisin yhdeksän kuukauden kuluttua, eli kysymyksessä oli bullet-laina. Lainan viitekorko oli 2,75 % p.a. Kuinka suuri oli viitekorkoon lisätty asiakaskohtainen korkomarginaali, jos Niina maksoi pankille laina-ajan lopussa 2 057,75 euroa?

6.5. Henri ottaa 70 000 euron asuntolainan. Mikä on kuukausittainen tasaerä, jos laina aika on 15 vuotta ja korkokanta 4,65 % p.a.?

6.6. Inkalla on 2 500 euron tasaerälaina, jonka korkokanta on 5,9 % ja laina-aika kolme vuotta. Laske tasaerän suuruus ja kaikkien korkojen summa, jos lainaa lyhennetään a) neljä kertaa vuodessa b) puolivuosittain.

6.7. Kuinka suuren annuiteettilainan Joonas voi ottaa, jos laina-aika on viisi vuotta, korkokanta 5,15 % ja Joonas pystyy maksamaan kuukaudessa lainanhoitokuluja a) 350 € b) 500 €?

6.8. Krista saa pankilta tarjouksen 1 000 euron lainasta. Laina-aika on neljä kuukautta, lainan korko 5,6 % p.a. ja laina pitää maksaa takaisin kuukausittaisilla lyhennyksillä. Lainan tyypiksi voidaan sopia joko tasalyhennys- tai tasaerälaina. Tee molemmista vaihtoehdoista lainalaskelma, jossa näkyvät jokaisen maksuerän suuruus sekä maksuerään sisältyvän koron ja lyhennyksen määrät. Kummasta lainasta tulee maksettavaksi enemmän korkoa? Kuinka paljon enemmän?

6.9. Laurilla on 6 000 euron remonttilaina, jonka korko on 4,7 % p.a. Lauri maksaa lainan takaisin kolmessa vuodessa lyhentämällä lainaa puolivuosittain. Tee lainalaskelma, jossa näkyvät jokaisen maksuerän suuruus sekä maksuerään sisältyvän koron ja lyhennyksen määrät. Laina on a) tasalyhennyslaina b) tasaerälaina.

6.10. Milla lyhentää remonttilainaa kuukausittain maksamalla korkoa ja 500 euron lyhennyksen. Tammikuussa 2014 lainan kulut olivat yhteensä 540 euroa. Lainan korkokanta on 6,0 % p.a. Milloin laina on kokonaan maksettu?

6.11. Niko otti kolmen vuoden annuiteettilainan 4,8 % vuotuisella korolla. Nikon maksettavaksi tulleen kuukausittaisen tasaerän suuruus oli 285 euroa. Miten suuresta lainasta oli kysymys?

6.12. Olivia ja Petteri ottivat yhteisen 130 000 euron asuntolainan 25 vuoden laina-ajalla. Laina on kuukausittain lyhennettävä annuiteettilaina, jonka korkokanta on 3,9 % p.a. Kahden ja puolen vuoden kuluttua lainan korko nousi 4,5 prosenttiin. Mikä oli takaisinmaksuerän suuruus ennen koronnousua? Entä koronnousun jälkeen? Laina-aikaan koronnousulla ei ollut vaikutusta.

6.13. Roosa ja Sami ottivat yhteisen 130 000 euron asuntolainan 25 vuoden laina-ajalla. Laina on kuukausittain lyhennettävä kiinteä tasaerälaina, jonka korkokanta on 3,9 % p.a. Kahden ja puolen vuoden kuluttua lainan korko nousi 4,5 prosenttiin. Mikä oli Roosan ja Samin lainan takaisinmaksuerän suuruus? Kuinka paljon laina-aika piteni koron nousun yhteydessä?

6.14. Tiialla on 12 000 euron kuukausittain lyhennettävä tasaerälaina, jonka vuosikorko on 5,1 % ja laina-aika seitsemän vuotta. Puolentoista vuoden kuluttua lainan korkokantaa korotettiin 1,1 prosenttiyksikköä.

(a) Kuinka paljon maksuerä kasvaa on koron noustessa, jos laina-aika pysyy samana?
(b) Kuinka paljon laina-aika pitenee koron noustessa, jos laina on kiinteä tasa-erälaina?

6.15. Urho ansaitsee 2 200 euroa kuukaudessa ja arvioi voivansa käyttää 25 % palkastaan lainanhoitokuluihin. Miten suuren tasaerälainan Urho voisi ottaa, jos lainan korko olisi 3,25 % ja laina-aika 20 vuotta?

6.16. (YO S09) Mauri on ottanut asuntolainaa 81 600 euroa 4,2 prosentin korolla. Hän lyhentää sitä vuosittain 4 800 euroa ja maksaa samalla siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon korkoa hän maksaa toisen vuoden lopussa? Kuinka monta vuotta lainan takaisinmaksu kestää? Kuinka paljon korkoa Mauri maksaa kaiken kaikkiaan?

6.17. (YO S97) Pankkilainaa hoidetaan kuukausittain maksamalla korkoa ja tuhannen markan lyhennys. Syyskuussa 1997 lainan hoitokulut ovat 1308 mk. Vuotuinen korkoprosentti on 8,59. Milloin laina on kokonaan maksettu?

6.18. (YO K04) Opiskelija on opintojensa alussa tehnyt lainasopimuksen, jonka mukaan hän nostaa jokaisen opiskeluvuoden alussa opintolainaa 4 000 €. Vuotuinen lainakorko on 4 %, mutta opiskeluaikana ei korkoa eikä lyhennyksiä tarvitse maksaa, vaan kertynyt korko liitetään jokaisen opiskeluvuoden lopussa lainapääomaan. Laske sopivan summalausekkeen avulla, paljonko opiskelijalla on velkaa, kun hän 12 vuoden opintojen jälkeen lopulta valmistuu.

6.19. (YO K06) Henkilö ottaa 120 000 euron asuntolainan. Laina sovitaan hoidettavaksi tasaerä- eli annuiteettilainana puolivuosittain, ja vuotuiseksi koroksi sovitaan 3,70 %. Harkittavana on laina-ajan pituus. Laske lainan hoitomaksun eli annuiteetin suuruus, jos laina-aika on a) 22 vuotta, b) 60 vuotta. Kuinka paljon lainaa jälkimmäisessä tapauksessa olisi vielä jäljellä silloin, kun laina ensimmäisessä tapauksessa olisi tullut maksetuksi loppuun? Lainasta ei aiheudu muita kuluja.

6.20. (YO S96) Henkilö otti kahden vuoden tasaerä- eli annuiteettilainan 12 % vuotuisella korolla. Hän maksoi lainan suorittamalla kerran kuussa aina saman summan $A = 2354$ mk, yhteensä 24 kertaa. Kuinka suuresta lainasta oli kysymys?

6.21. (YO S11) Matti lainaa ystävältään 7 500 euroa ja maksaa summan takaisin neljässä 2000 euron erässä vuoden välein, ensimmäisen erän vuoden kuluttua lainan nostamisesta. Määritä, millaista vuotuista korkoprosenttia p tämä vastaa muodostamalla ensin yhtälö korkotekijälle $q = 1 + p/100$ ja etsimällä tälle likimääräinen ratkaisu. Anna vastauksena korkoprosentti yhden desimaalin tarkkuudella.

6.22. (YO K05) Postimyyntiyritys tarjoaa mainoslehtisessään nopeaa ja vaivatonta kulutuslainaa. Lainaehtojen mukaan laina maksetaan takaisin yhtä suurin erin kunkin kuukauden lopussa, kuukausikorko on 1,9 % jäljellä olevasta velkasaldosta ja lisäksi kuukausittain peritään lisämaksua, joka on 0,4 % myönnetyn luoton määrästä.

(a) Määritä kuukausierän suuruus ja lainan kokonaiskustannukset, jos lainasumma on 1 200 euroa ja laina-aika yksi vuosi.

(b) Osoita, että lainan todellinen vuosikorko on noin 31 %, toisin sanoen yhtä suureen kuukausierään päädytään, jos kuukausittain lyhennettävän tasaerälainan korko on 31 % vuodessa. Anna vastaukset euron tarkkuudella.

6.23. (YO K04) Henkilö otti vuoden 2003 alussa 40 000 euron asuntolainan 10 vuodeksi. Hän maksaa lainan ja korot yhtä suurena vuotuisena eränä aina vuoden lopussa, ts. kyseessä on tasaerälaina. Mikä on erän suuruus, jos korko on neljä prosenttia? Lainasopimuksen mukaan koron noustessa erän suuruus ei muutu (mahdollisesti pienemmäksi jäävää viimeistä erää lukuun ottamatta), vaan laina-aikaa pidennetään nousua vastaavasti. Minkä vuoden lopussa henkilö maksaa viimeisen erän, jos korko nousee viiden vuoden kuluttua kuuteen prosenttiin eikä tämän jälkeen muutu? Mikä on viimeisen erän suuruus?

7 Sijoittaminen

Tässä luvussa tarkastellaan joitakin sijoitusvaihtoehtoja. Tarkasteltavia sijoitustyyppejä ovat pankkitalletukset, vakuutukset, osakkeet, obligaatiot ja sijoitusrahastot. Sijoituslaskelmissa tarvitaan yleensä korkolaskentaa; lisäksi on huomioitava pankkitalletuksista ja muista korkotuotoista perittävä lähdevero ja pääomatuloista perittävä pääomatulovero.

7.1 Pankkitalletukset

Pankkitalletus on yleensä melko riskitön sijoitus, sillä talletuksilla on lakiin perustuva talletussuoja 100 000 euroon asti. Pankkitalletuksen koroista peritään vuosittain 30 % lähdevero. **Pankkitalletus**

Esimerkki 7.1.1. Mikä olisi nettotuotto, jos sijoittaisit 2 000 euroa kolmen vuoden määräaikaistilille, jonka korkokanta on 1,05 % p.a.? Vaihtoehtona on sijoittaa sama summa kolmeksi vuodeksi tilille, jonka korko on 0,10 % p.a. ja jossa talletusajan lopuksi on mahdollista saada alkuperäiselle talletukselle 10 % lisäkorko, jos tiettyjen osakkeiden hintojen kehitys on suotuisaa. Mikä tässä tapauksessa olisi nettotuotto lisäkoron kanssa? Entä ilman sitä?

Ratkaisu: Määräaikaistilille kertynyt pääoma saadaan koronkorkolaskulla. Vuosittainen 30 % lähdevero on huomioitava käyttämällä nettokorkokantaa $0{,}7i = 0{,}00735$. Tällöin korkotekijä on $q = 1 + 0{,}7i = 1{,}00735$. Alkuperäinen pääoma on $k = 2\,000$ € ja korkokausien määrä on $n = 3$, joten kasvanut pääoma on

$$K = kq^n = 2\,000\text{ €} \cdot 1{,}00735^3 \approx 2\,044{,}42\text{ €}.$$

Vaihtoehtoisessa talletuksessa nettokorkokanta on $0{,}7i = 0{,}0007$, joten korkotekijä on $q = 1 + 0{,}7i = 1{,}0007$. Alkuperäinen pääoma on $k = 2\,000$ € ja korkokausien määrä on $n = 3$, joten kertynyt pääoma ilman lisäkorkoa on

$$K = kq^n = 2\,000\text{ €} \cdot 1{,}0007^3 \approx 2\,004{,}20\text{ €}.$$

Lisäkoroksi saadaan lähdevero huomioiden $r = kit = 2\,000\text{ €} \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}10 \cdot 1 = 140$ €. Nettotuoton määrä näissä eri vaihtoehdoissa on koottu taulukkoon 7.1.

Talletus	Nettotuotto
Määräaikaistalletus	44,42 €
Vaihtoehtoinen talletus ilman lisäkorkoa	4,20 €
Vaihtoehtoinen talletus lisäkorolla	144,20 €

Taulukko 7.1: Esimerkin 7.1.1 eri vaihtoehtojen nettotuotto.

Esimerkki 7.1.2 (Valintakoe 2014, tehtävä 44)**.** Sijoituksen arvo kasvoi 8 vuodessa 1 400 eurosta 2 800 euroon. Mikä oli sijoituksen keskimääräinen vuosituotto?

Ratkaisu: Alkuperäinen pääoma on $k = 1\,400$ € ja kasvanut pääoma on $K = 2\,800$ €. Koska tarkasteltu aikaväli on pidempi kuin vuosi, on järkevää käyttää koronkorkolaskentaa keskimääräisen vuosituoton laskemiseen. Tällöin oletuksena on, että tuotot lisätään pääomaan vuosittain.

Koronkorkolaskennan mukaan kasvanut pääoma noudattaa yhtälöä $K = kq^n$, missä $n = 8$ on korkokausien lukumäärä. Näin voidaan ratkaista

$$1\,400 \text{ €} \cdot q^8 = 2\,800 \text{ €} \;\Leftrightarrow\; q^8 = \frac{2\,800}{1\,400} = 2.$$

Korkotekijä q saadaan ottamalla tästä kahdeksas juuri: $q = \sqrt[8]{2} \approx 1{,}0905$. Korkotekijästä saadaan korkokanta: $q = 1 + i$, joten $i = q - 1 \approx 0{,}0905$. Sijoituksen keskimääräinen vuosituotto oli siis noin 9,05 %.

Kahdeksas juuri saadaan nelilaskimella ottamalla neliöjuuri kolme kertaa peräkkäin, sillä $8 = 2^3$. Pääsykokeessa tämäntyyppisen tehtävän voi ratkaista myös kokeilemalla, mikä annetuista korkokannoista antaa oikean kasvaneen pääoman: sijoittamalla huomataan, että

$$1\,400 \text{ €} \cdot 1{,}0905^8 \approx 2\,800 \text{ €}.$$

7.2 Vakuutukset

Eläke-vakuutus

Vakuutussijoitukset voivat olla eläkevakuutuksia tai sijoitusvakuutuksia. **Eläkevakuutus** on pitkäaikaista säästämistä, jolla voi täydentää lakisääteistä eläketurvaa, esimerkiksi lisätä oman eläkkeensä määrää tai aikaistaa eläkkeelle siirtymistä. Eläkevakuutukseen sijoitettu raha on yleensä nostettavissa vasta eläke-ehtojen täytyttyä, esimerkiksi vasta tietyssä iässä. Eläkevakuutuksesta aikanaan nostettava eläke on veronalaista pääomatuoa.

Sijoitus-vakuutus

Sijoitusvakuutus on määräaikainen vakuutus, joka maksetaan tuottoineen vakuutuskauden päätyttyä vakuutetulle tai hänen määräämälleen edunsaajalle. Säästöt palautetaan sovittuna ajankohtana vain, jos vakuutettu elää. Jos vakuutettu kuolee vakuutusaikana, säästöt jäävät vakuutusyhtiöön. Sijoitusvakuutuksiin liitetään kuitenkin useimmiten kuolemanvaraturva (henkivakuutus), jotta henkivakuutuksesta voitaisiin maksaa säästöjen menetystä korvaava korvaus kuolemantapauksessa.

Sijoitusvakuutuksen tuottoa verotetaan pääomatulona vakuutuksen päättyessä eli silloin, kun vakuutuksesta maksetaan vakuutuskorvaus. Huomaa, että vakuutetun ei tarvitse maksaa veroa alkuperäisestä säästösummasta vaan ainoastaan tuotosta. Jos vakuutuskorvaus maksetaan vakuutetun määräämälle edunsaajalle, tuotosta menee pääomatulovero ja lisäksi vakuutuksen säästösummasta lahjavero.

Vuoteen 2012 saakka sijoitusvakuutuksen säästösummasta lähiomaiselle oli enintään 8 500 euroa verovapaata kolmen vuoden aikana. Tämä veroetu poistettiin vuoden 2013 alusta lähtien, joten vakuutuksesta edunsaajamääräyksen nojalla saatua vakuutuskorvausta verotetaan säästösumman osalta aina lahjana.

Esimerkki 7.2.1. Päätät ottaa kymmenen vuoden sijoitusvakuutuksen, johon sijoitat neljä kertaa vuodessa 200 euroa. Sijoitusvakuutuksen tuotoksi arvioidaan 7 % p.a. Vakuutusyhtiö perii jokaisesta tekemästäsi sijoituksesta 3,0 % maksupalkkion ja lisäksi vuotuista hoitopalkkiota 1,0 % vuoden lopussa. Mikä olisi vakuutuksen nettotuotto tässä tapauksessa? Huomioi verotus.

Tarkastellaan aluksi ensimmäisen vuoden sijoituksia, joiden tiedot on kerätty taulukkoon 7.2. Huomaa, että jokaisesta sijoituksesta peritään 3,0 % maksupalkkio, joten tuotot lasketaan kertasijoituksesta $0{,}97 \cdot 200$ € $= 194$ €.

	Sijoitus (k)	Korkoaika vuosina (t)	Tuotto ($r = kit$)
Tammikuu	194 €	1	194 € $\cdot\, 0{,}07 \cdot 1$
Huhtikuu	194 €	0,75	194 € $\cdot\, 0{,}07 \cdot 0{,}75$
Heinäkuu	194 €	0,5	194 € $\cdot\, 0{,}07 \cdot 0{,}5$
Lokakuu	194 €	0,25	194 € $\cdot\, 0{,}07 \cdot 0{,}25$

Taulukko 7.2: Esimerkin 7.2.1 ensimmäisen vuoden sijoitusten tuotot.

Ensimmäisen vuoden lopussa sijoitukset tuottoineen olisivat yhteensä

$$4 \cdot 194\text{ €} + 194\text{ €} \cdot 0{,}07 \cdot (1 + 0{,}75 + 0{,}5 + 0{,}25) = 809{,}95\text{ €}.$$

Seuraavina vuosina uudet sijoitukset kartuttavat sijoitussummaa aina tämän verran ja aikaisempien vuosien sijoitukset kasvavat korkoa korolle. Vakuutusyhtiö veloittaa aina vuoden lopussa hoitopalkkiota 1 % senhetkisestä sijoitussummasta. Ensimmäisen vuoden sijoitussummasta hoitomaksu veloitetaan kymmenenä vuotena, toisen vuoden sijoitussummasta yhdeksänä vuotena ja niin edelleen. Jokaisen vuoden sijoitusten kasvaneet pääomat on laskettu taulukkoon 7.3. Kasvaneen pääoman kokonaismäärä on

$$0{,}99 \cdot 809{,}95\text{ €} \cdot \big(1 + 0{,}99 \cdot 1{,}07 + (0{,}99 \cdot 1{,}07)^2 + \cdots + (0{,}99 \cdot 1{,}07)^9\big).$$

Siinä esiintyvässä geometrisessa summassa ensimmäinen termi on $a_1 = 1$, yhteenlaskettavien lukumäärä $n = 10$ ja suhdeluku $q = 0{,}99 \cdot 1{,}07 = 1{,}0593$. Summaksi saadaan

$$0{,}99 \cdot 809{,}95\text{ €} \cdot \frac{1 - 1{,}0593^{10}}{1 - 1{,}0593} \approx 10\,534{,}35\text{ €}.$$

	Sijoitus (k)	Korkokausia (n)	Kasvanut pääoma ($K = kq^n$)
1. vuoden sijoitukset	809,95 €	9	$0{,}99^{10} \cdot 809{,}95$ € $\cdot\, 1{,}07^9$
2. vuoden sijoitukset	809,95 €	8	$0{,}99^{9} \cdot 809{,}95$ € $\cdot\, 1{,}07^8$
3. vuoden sijoitukset	809,95 €	7	$0{,}99^{8} \cdot 809{,}95$ € $\cdot\, 1{,}07^7$
	$\vdots$	$\vdots$	
9. vuoden sijoitukset	809,95 €	1	$0{,}99^{2} \cdot 809{,}95$ € $\cdot\, 1{,}07$
10. vuoden sijoitukset	809,95 €	0	$0{,}99 \cdot 809{,}95$ €

Taulukko 7.3: Esimerkin 7.2.1 vuosittaiset sijoitukset.

Sijoitusvakuutuksen verotettava tuotto saadaan vähentämällä kasvaneen pääoman kokonaismäärästä 10 534,35 € sijoitettu rahamäärä $10 \cdot 4 \cdot 200$ € = 8 000 €. Verotettava tuotto on siis

$$10\,534{,}35\text{ €} - 8\,000\text{ €} = 2\,534{,}35\text{ €}.$$

Tästä peritään sijoitusajan lopussa 30 % pääomatulovero, joten sijoitusvakuutuksen nettotuotoksi saadaan $0{,}70 \cdot 2\,534{,}35$ € = 1 774,04 €.

7.3 Obligaatiot

Joukko-velkakirja-laina

Obligaatio on joukkovelkakirjalainan osavelkakirja. **Obligaatio- eli joukkovelkakirjalaina** on laina, jossa lainan ottaja eli obligaatioiden liikkeellelaskija (esimerkiksi valtio tai iso yritys) lainaa rahaa suurelta joukolta sijoittajia. Obligaatiolainoilla on yleensä kiinteä korko ja kiinteä laina-aika. Esimerkiksi Suomen valtion 9.5.2011 liikkeellelaskeman obligaatiolainan laina-aika on viisi vuotta ja ilmoitettu korko on 2,7 % vuodessa. Tämä korko lasketaan obligaation **nimellisarvosta**, joka tällä obligaatiolla on 1000 euroa. Ilmoitettua korkoa voidaan kutsua nimelliskoroksi tai kuponkikoroksi. Lainan erääntyessä eli laina-ajan päättyessä obligaatioiden liikkeellelaskija lunastaa obligaatiot palauttamalla sijoittajalle niiden nimellisarvon.

Nimellisarvo

Sijoittajan obligaatiosta saama tuotto riippuu siitä, miten paljon hän on maksanut obligaatiosta hankkiessaan sen omistukseensa. Joukkovelkakirjalainan liikkeellelaskun eli emission yhteydessä sijoittaja voi merkitä obligaation itselleen maksamalla siitä **merkintähinnan**, joka määräytyy emissiokurssin mukaan. **Emissiokurssi** kertoo, kuinka monta prosenttia nimellisarvosta sijoittaja joutuu obligaatiosta maksamaan. Jos sijoittaja ostaa obligaation liikkeellelaskupäivän jälkeen, pitää hänen maksaa obligaation myyjälle ostohinnan lisäksi ns. **jälkimarkkinahyvitys**. Se on yhtä suuri kuin kauppaa edeltäneen koronmaksupäivän ja kauppapäivän väliseltä ajalta kertynyt korko. Jälkimarkkinahyvitys korvaa myyjälle koron, joka obligaatiolle on kertynyt hänen omistusaikanaan edellisen koronmaksupäivän jälkeen. Obligaation ostaja saa vastaavan koron seuraavana koronmaksupäivänä itselleen.

Merkintähinta
Emissiokurssi
Jälkimarkkina-hyvitys

Verotus

Obligaatioille maksetusta koroista peritään vuosittain 30 % lähdevero. Muut obligaatioihin liittyvät tulot verotetaan pääomatulona. Esimerkiksi obligaation myyjän saama jälkimarkkinahyvitys on veronalaista pääomatuloa. Toisaalta obligaation ostajan maksama jälkimarkkinahyvitys on tulonhankkimiskulu, jonka voi vähentää pääomatuloista. Verotettavaa pääomatuloa syntyy myös, jos sijoittajan obligaatioistaan saama lunastus- tai myyntihinta on suurempi kuin hänen maksamansa merkintä- tai ostohinta.

Esimerkki 7.3.1. Nokian renkaat Oyj laski 19.6.2012 liikkeelle viiden vuoden joukkovelkakirjalainan, jonka korkokanta on 3,25 % ja emissiokurssi 99,773 %. Kaverisi osti itselleen 1.12.2012 kaksi tämän lainan obligaatiota, joiden nimellisarvo oli yhteensä 1 000 €. Kuinka paljon kaverisi maksoi näistä obligaatioista, kun myyjä pyysi niistä emissiokurssin mukaisen hinnan? Kuinka paljon kaverisi saa tuottoa koko sijoitusajalta verojen maksamisen jälkeen?

Ratkaisu: Emissiokurssin mukainen ostohinta oli $0{,}99773 \cdot 1\,000$ € = 997,73 €. Tämän lisäksi kaverisi joutui maksamaan jälkimarkkinahyvityksen eli tässä tapauksessa liikkeellelaskupäivän ja merkintäpäivän välisen koron. Korkopäiviä tällä välillä oli

$$(30 - 19) + 31 + 31 + 30 + 31 + 30 + 1 = 165.$$

Korkoaika oli siten $t = 165/360$ (vuotta). Tässä käytettiin korkopäivien laskemiseen Euroopan keskuspankin suosittelemaa tapaa todelliset/360. Korko oli siten

$$r = kit = 1\,000 \text{ €} \cdot 0{,}0325 \cdot \frac{165}{360} \approx 14{,}90 \text{ €}.$$

Kaverisi maksoi obligaatioista yhteensä $997{,}73 \text{ €} + 14{,}90 \text{ €} = 1\,012{,}63 \text{ €}$.

Laina-ajan lopussa kaverisi saa takaisin obligaatioiden nimellisarvon 1 000 €. Pääomatulon määrä saadaan vähentämällä tästä obligaatioiden ostohinta, joten pääomatulo on $1\,000 \text{ €} - 997{,}73 \text{ €} = 2{,}27 \text{ €}$. Ennen verotusta voidaan pääomatulosta vähentää maksettu jälkimarkkinahyvitys 14,90 euroa tulonhankkimiskuluna. Havaitaan, että tämän jälkeen ei pääomatuloveroa tarvitse maksaa lainkaan.

Obligaatiolainan liikkeellelaskija maksaa lainasta vuosittain korkoa 3,25 % nimellisarvosta eli $0{,}0325 \cdot 1\,000 \text{ €} = 32{,}50 \text{ €}$. Korosta peritään 30 % lähdevero, joten vuosittainen nettokorko on $0{,}70 \cdot 32{,}50 \text{ €} = 22{,}75 \text{ €}$. Laina-aika on viisi vuotta, joten nettokorkoa kertyy yhteensä $5 \cdot 22{,}75 \text{ €} = 113{,}75 \text{ €}$. Tässä ei huomioitu lähdeveron pyöristyssääntöä.

Kaverisi saa siis obligaatioista rahaa yhteensä $113{,}75 \text{ €} + 1\,000 \text{ €} = 1\,113{,}75 \text{ €}$ (nettokorot ja nimellisarvon). Vähentämällä tästä kaikki menot (merkintähinta ja jälkimarkkinahyvitys) saadaan obligaatioiden nettotuotoksi $1\,113{,}75 \text{ €} - 1\,012{,}63 \text{ €} = 101{,}12 \text{ €}$.

7.4 Osakkeet

Osakkeet
Osinko

Osake on osuus osakeyhtiömuotoisesta yrityksestä. Voitolliset yritykset maksavat osakkailleen **osinkoa** yleensä vuosittain. Pörssiin listatusta yhtiöstä saadusta osingosta 85 % on veronalaista pääomatuloa ja 15 % verotonta tuloa. Listaamattomasta yhtiöstä saatu osinko voidaan verottaa joko ansiotulona tai pääomatulona, ja osa osingosta on verotonta (yksityiskohdat menevät lukiokurssin ulkopuolelle). Osakkeiden tuotto muodostuu osingon lisäksi osakkeiden mahdollisen myynnin yhteydessä saadusta myyntivoitosta. Myyntivoitosta peritään pääomatulovero.

Esimerkki 7.4.1. Kone Oyj jakoi tilikausina 2011–2013 jokaiselle B-sarjan osakkeelle osinkoa taulukon 7.4 mukaan. Kuinka paljon sinun olisi kannattanut maksaa tästä osakkeesta vuoden 2010 lopussa, jos olisit myynyt sen vuoden 2013 osingonjaon jälkeen hintaan 31,65 € ja olisit vaatinut sijoituksellesi 10 % vuosituoton huomioimatta veroja?

Tilikausi	2011	2012	2013
Osinko	1,45 €	1,525 €	1,00 €

Taulukko 7.4: Kone Oyj:n maksamia osinkoja.

	Rahasumma (K)	Korkokausia (n)	Nykyarvo ($k = Kq^{-n}$)
Hankintahinta	x	0	x
Osinko vuodelta 2011	1,45 €	1	$1{,}10^{-1} \cdot 1{,}450$ € ≈ 1,32 €
Osinko vuodelta 2012	1,525 €	2	$1{,}10^{-2} \cdot 1{,}525$ € ≈ 1,26 €
Osinko vuodelta 2013	1,00 €	3	$1{,}10^{-3} \cdot 1{,}000$ € ≈ 0,75 €
Myyntihinta	31,65 €	3	$1{,}10^{-3} \cdot 31{,}65$ € ≈ 23,78 €

Taulukko 7.5: Esimerkin 7.4.1 menot ja tulot diskontattuna.

Ratkaisu: Diskontataan kaikki tulot ja menot ostohetkeen. Tämä on tehty taulukossa 7.5. Korkokanta on $i = 0{,}10$ p.a. joten korkotekijä on $q = 1 + i = 1{,}10$.

Osakkeesta saatavien tulojen nykyarvo on 1,32 €+1,26 €+0,75 €+23,78 € = 27,11 €. Hankintahinnan pitää olla pienempi tai yhtä suuri kuin tämä summa, jotta saisit osakkeesta vaatimasi tuoton. Osakkeesta olisi siis kannattanut maksaa enintään 27,11 €.

7.5 Sijoitusrahastot

Sijoitusrahasto

Sijoitusrahasto on tapa sijoittaa rahoja useisiin eri arvopapereihin. Sijoitusrahastoa ylläpitää rahastoyhtiö, joka huolehtii yksityishenkilöiltä ja yhteisöiltä keräämiensä varojen sijoittamisesta. Sijoitusrahastoja voidaan luokiella sen mukaan, millaisiin kohteisin ne rahoja sijoittavat:

– osakerahasto sijoittaa osakkeisiin,

– korkorahasto sijoittaa korkoa tuottaviin arvopapereihin,

– yhdistelmärahasto sijoittaa molempiin edellä mainittuihin kohteisiin.

Rahasto-osuus

Rahastoihin sijoitetaan ostamalla **rahasto-osuuksia**. Niiden tuotto muodostuu rahaston mahdollisesti maksamasta voitto-osuudesta ja rahasto-osuuksien myynnin yhteydessä mahdollisesti saadusta myyntivoitosta. Molemmista peritään pääomatulovero.

Rahasto-osuudet voidaan luokitella tuotto-osuuksiin ja kasvuosuuksiin. Tuotto-osuudet ovat rahasto-osuuksia, joissa rahasto maksaa osan rahaston tuotosta voitto-osuutena osuudenomistajille yleensä vuosittain. Kasvuosuudet ovat rahasto-osuuksia, joissa rahasto sijoittaa saadut voitot uudelleen ja sijoittaja saa tuottoa vasta mahdollisena myyntivoittona myydessään rahasto-osuutensa.

Esimerkki 7.5.1. Kaverisi ryhtyi vuoden 2013 alussa rahastosijoitajaksi. Hän sijoitti vuonna 2013 joka kuukauden 15. päivä 70 euroa erääseen rahastoon, jonka rahasto-osuuden päivittäisiä arvoja on koottu taulukkoon 7.6.

Mikä oli kaverisi rahastosijoituksen kokonaisarvo 31.7.2013? Kuinka paljon hän ansaitsi rahastosijoituksillaan myydessään rahasto-osuutensa tuona päivänä? Huomioi verotus ja laske vuotuinen nettotuottoprosentti.

Päivämäärä	Rahasto-osuuden arvo	Päivämäärä	Rahasto-osuuden arvo
15.1.2013	15,60 €	15.5.2013	16,50 €
15.2.2013	13,25 €	15.6.2013	17,80 €
15.3.2013	10,05 €	15.7.2013	16,95 €
15.4.2013	12,33 €	31.7.2013	15,70 €

Taulukko 7.6: Esimerkin 7.5.1 rahasto-osuuden arvoja.

Ratkaisu: Lasketaan jokaisen sijoituksen osalta uusien osuuksien määrä sekä osuuksien kokonaismäärä ja kokonaisarvo. Tämä on tehty taulukossa 7.7. Sen mukaan kaverisi rahastosijoitusten kokonaisarvo oli vuoden 2013 heinäkuun viimeisenä päivänä $34{,}72 \cdot 15{,}70$ € $\approx$ 545,10 €. Tähän mennessä kaverisi oli sijoittanut rahastoon $7 \cdot 70$ € $=$ 490 €, joten myydessään rahasto-osuutensa hän sai voittoa 545,10 € $-$ 490 € $=$ 55,10 €. Tästä hänen piti maksaa pääomatuloveroa 30 %, joten verotuksen jälkeen hän ansaitsi sijoituksellaan $0{,}70 \cdot 55{,}10$ € $\approx$ 38,57 €.

Vuotuista tuottoprosenttia laskettaessa on huomioitava, että jokainen sijoitus tehdään eri aikaan. Lasketaan jokaisen sijoituksen korkopäivien määrä. Käytetään Euroopan keskuspankin suosittelemaa tapaa todelliset/360, jossa kaikki kalenterin päivät ovat korollisia ja vuoden korkopäivien kokonaismäärä on 360. Korkopäivien määrät löytyvät taulukosta 7.8.

Sijoitus	Osuuden arvo	Uusia osuuksia	Osuuksia yhteensä	Kokonaisarvo
15.1.2013	15,60 €	$\frac{70\text{ €}}{15{,}60\text{ €}} \approx 4{,}49$	4,49	70 €
15.2.2013	13,25 €	$\frac{70\text{ €}}{13{,}25\text{ €}} \approx 5{,}28$	9,77	$9{,}77 \cdot 13{,}25$ €
15.3.2013	10,05 €	$\frac{70\text{ €}}{10{,}05\text{ €}} \approx 6{,}97$	16,74	$16{,}74 \cdot 10{,}05$ €
15.4.2013	12,33 €	$\frac{70\text{ €}}{12{,}33\text{ €}} \approx 5{,}68$	22,42	$22{,}42 \cdot 12{,}33$ €
15.5.2013	16,50 €	$\frac{70\text{ €}}{16{,}50\text{ €}} \approx 4{,}24$	26,66	$26{,}66 \cdot 16{,}50$ €
15.6.2013	17,80 €	$\frac{70\text{ €}}{17{,}80\text{ €}} \approx 3{,}93$	30,59	$30{,}59 \cdot 17{,}80$ €
15.7.2013	16,95 €	$\frac{70\text{ €}}{16{,}95\text{ €}} \approx 4{,}13$	34,72	$34{,}72 \cdot 16{,}95$ €
31.7.2013	15,70 €	0	34,72	$34{,}72 \cdot 15{,}70$ €

Taulukko 7.7: Esimerkin 7.5.1 rahastosijoitusten kehitys.

Sijoitus	Korkoaika	Korkopäiviä
15.1.2013	16.1.2013–31.7.2013	$(31-15)+28+31+30+31+30+31=197$
15.2.2013	16.2.2013–31.7.2013	$(28-15)+31+30+31+30+31=166$
15.3.2013	16.3.2013–31.7.2013	$(31-15)+30+31+30+31=138$
15.4.2013	16.4.2013–31.7.2013	$(30-15)+31+30+31=107$
15.5.2013	16.5.2013–31.7.2013	$(31-15)+30+31=77$
15.6.2013	16.6.2013–31.7.2013	$(30-15)+31=46$
15.7.2013	16.7.2013–31.7.2013	$(31-15)=16$

Taulukko 7.8: Esimerkin 7.5.1 sijoitusten korkopäivien lukumäärä.

Sijoitetuille 70 euron summille korkopäiviä tulee yhteensä 747. Voidaan ajatella, että tarkasteltava tilanne vastaa yhtä 70 euron talletusta, joka kasvaa korkoa 747 päivää. Nettotuottoprosentti vuotuisena korkona saadaan yksinkertaisen koron kaavasta $r = kit$, missä pääoma on $k = 70$ €, korkoa vastaa sijoituksen nettotuotto eli $r = 38{,}57$ € ja korkoaika on $t = 747/360$ (vuotta). Saadaan yhtälö

$$70\text{ €} \cdot i \cdot \frac{747}{360} = 38{,}57\text{ €} \quad \Leftrightarrow \quad i = \frac{360}{747} \cdot \frac{38{,}57\text{ €}}{70\text{ €}}.$$

Nettokorkokannaksi saadaan $i \approx 0{,}266$ p.a. eli 26,6 % p.a. Kaverisi rahastosijoituksen vuotuinen nettotuottoprosentti verot huomioiden oli siis 26,6 %.

7.6 Tehtäviä

7.1. Antti ostaa Atrian osakkeita 250 kpl, kun osakkeen kurssi on 8,55 €. Kuinka paljon Antti joutuu maksamaan osakkeista, kun hänen pitää kauppahinnan lisäksi maksaa välityspalkkiota 0,30 % tai vähintään 5 €?

7.2. Bettina ostaa 150 kpl osakkeita, joiden kurssi on 6,28 €. Hän myy ne kahden vuoden kuluttua, kun kurssi on 7,35 €. Laske kuinka paljon Bettina ansaitsee osakekaupoilla, kun osakkeiden ostosta ja myynnistä pitää maksaa 0,20 % välityspalkkiota ja myyntivoitosta pääomatuloveroa 30 %.

7.3. Camilla omistaa 300 kpl osakkeita, joille maksetaan tänä vuonna osinkoa 3,2 % nimellisarvosta. Mikä on yksittäisen osakkeen nimellisarvo, jos Camilla saa osinkoa yhteensä 72 euroa?

7.4. Daniel hankkii 20 kpl osakkeita, joiden hinta on 31,62 €. Daniel toivoo osakkeen arvon nousevan 2 % vuodessa ja toivoo lisäksi saavansa vuosittain osinkoa 3,5 % osakkeen senhetkisestä arvosta. Daniel suunnittelee myyvänsä osakkeet neljän vuoden kuluttua. Kuinka paljon Daniel ansaitsee rahaa sijoituksellaan? Ota huomioon ostosta ja myynnistä maksettava välityspalkko (2,5 % tai vähintään 4 euroa) sekä verotus.

7.5. Emilia päättää sijoittaa rahastoon joka kuukausi 80 euroa. Rahasto-osuuden arvo muutttuu päivittäin.

(a) Laske rahastosijoituksen arvo viiden kuukauden kuluttua, kun rahasto-osuuden arvot ovat taulukon 7.9 mukaiset.

(b) Miten paljon Emilia ansaitsee rahastosijoituksellaan, jos hän myy osuutensa 28.2.2014? Huomioi verotus.

Päivämäärä	Osuuden arvo	Päivämäärä	Osuuden arvo
16.9.2013	9,50 €	15.1.2014	8,70 €
15.10.2013	9,90 €	17.2.2014	9,30 €
15.11.2013	9,80 €	28.2.2014	9,80 €
16.12.2013	8,90 €		

Taulukko 7.9: Tehtävän 7.5 rahasto-osuuden arvoja.

7.6. Filip talletti kolmen vuoden määräaikaistilille 2 500 euroa. Talletuksen korko oli 1,1 % p.a. ja talletusajan lopuksi alkuperäiselle talletukselle maksettiin vielä lisäkorko. Kuinka suuri lisäkorko oli, jos Filip sai nostaa talletusajan päätyttyä tililtään 2 654,60 €?

7.7. Gustav osti joukkovelkakirjalainan obligaatioita 6.5.2013 ja maksoi niistä emissiokurssin mukaisen hinnan. Obligaatioiden nimellisarvo oli yhteensä 1 700 euroa ja niiden korko oli 2,9 % p.a.

(a) Kuinka suuren jälkimarkkinahyvityksen Gustav joutui oston yhteydessä maksamaan, jos joukkovelkakirjalainan liikkeellelaskupäivä oli 3.1.2013?

(b) Obligaatioiden emissiokurssi oli 97,5 %. Kuinka paljon Gustav maksoi obligaatioista yhteensä?

(c) Kuinka paljon tuottoa Gustav sai obligaatioista koko sijoitusajalta, jos kyseessä oli kuuden vuoden joukkovelkakirjalaina? Huomioi verotus.

7.8. Hanne osti obligaatioita 105 % emissiokurssilla 45 päivää lainan liikkeellelaskun jälkeen. Obligaatioiden nimellisarvo oli 4 000 euroa, korkokanta 3,65 % ja laina-aika kahdeksan vuotta.

(a) Kuinka paljon Hanne maksoi obligaatioistaan yhteensä?

(b) Kuinka paljon Hanne sai tuottoa koko sijoitusajalta? Huomioi verotus.

7.9. Iiro ja Jenna sijoittivat kumpikin 5 000 euroa neljäksi vuodeksi. Iiro teki määräaikaistalletuksen, jonka vuosikorko oli 0,95 % ja talletusajan lopuksi alkuperäiselle pääomalle maksettava lisäkorko 8 %. Jenna sijoitti sijoitusvakuutukseen, jonka arvioitu vuosituotto oli 2,1 %. Kumpi teki paremman sijoituksen? Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että kummastakaan sijoituksesta ei mene muita kuluja kuin verot.

7.10. Kristian osti 750 kappaletta erään pörssiin listatun yhtiön osakkeita hintaan 8,25 €/kpl. Seuraavalla tilikaudella vuonna 2014 yhtiö jakoi osinkoa 0,90 €/osake. Kristian myi osakkeet tämän jälkeen hintaan 10,50 €/kpl. Ostosta ja myynnistä Kristianin täytyi maksaa välityspalkkiota 0,15 % kauppasummasta. Mikä oli Kristianin saama nettovoitto? Ota huomioon verotus.

7.11. Laura tallettaa säästönsä korkeakorkoiselle tilille kolmeksi vuodeksi. Tilin vuosikorko on 2,5 % ja talletusajan päättyessä pankki maksaa alkuperäiselle talletuspääomalle vielä lisäkoron 5 %. Mikä oli talletussumma, jos Laura saa talletusajan lopussa nostaa tililtään 1 306,11 euroa? Ota huomioon verotus.

7.12. Miro päättää sijoittaa sijoitusvakuutukseen kymmenen vuoden ajan kerran vuodessa 1 000 euroa. Kuinka suuren voiton Miro tekee, jos vakuutuksen keskimääräiseksi vuosituotoksi arvioidaan 3 %? Huomioi verotus.

7.13. Nella osti itselleen kolme obligaatiota neljä kuukautta lainan liikkeellelaskun jälkeen. Hän maksoi niistä emissiokurssin mukaisen hinnan sekä jälkimarkkinahyvityksen, yhteensä 1 460,53 €. Obligaatioiden emissiokurssi oli 102,25 % ja korkokanta oli 4,0 %. Mikä oli yhden obligaation nimellisarvo?

7.14. Otso aloitti rahastosijoittamisen vuonna 2013 marraskuun alussa. Hän sijoitti joka kuukausi 150 euroa rahastoon, jonka rahasto-osuuden arvoja on taulukossa 7.10.

Päivämäärä	Osuuden arvo	Päivämäärä	Osuuden arvo
4.11.2013	14,10 €	6.1.2014	14,60 €
4.12.2013	15,00 €	4.2.2014	13,90 €

Taulukko 7.10: Tehtävän 7.14 rahasto-osuuden arvoja.

Onko Otso voitolla vai tappiolla sijoituksissaan 28.2.2014, jolloin rahasto-osuuden arvo on 14,00 €?

7.15. Pinja osti 350 kappaletta osakkeita, joiden kurssi oli 2,56 €. Hän myi osakkeet, kun niiden kurssi oli noussut 2,89 euroa. Pinja joutui maksamaan osto- ja myyntitoimeksiannoista 0,5 % välityspalkkiota.

(a) Kuinka paljon Pinja maksoi yhteensä osakkeita ostaessaan?

(b) Mikä oli Pinjan saama nettovoitto?

7.16. (YO S03) Rahastosäästäjä ostaa osakerahaston osuuksia tai niiden osia 100 eurolla joka kuukausi. Ensimmäisellä ostokerralla yhden rahasto-osuuden arvo on 20 €. Oletetaan, että kurssi laskee tästä 2 eurolla joka kuukausi, kunnes saavuttaa pohjalukeman 8 €. Tämän jälkeen kurssi alkaa toipua ja nousee 2 eurolla joka kuukausi, kunnes se on saavuttanut lähtöarvonsa 20 €, jolloin säästäjä tekee viimeisen ostonsa. Selvitä säästäjän osakesalkun arvo periodin lopussa. Kuinka monta prosenttia suurempi tämä on, kuin jos hän olisi sijoittanut periodin alussa yhdellä kertaa koko sijoittamansa summan? Sijoittamisesta koituvia kuluja (ja mahdollisia osinkoja) ei oteta huomioon.

7.17. (YO K03) Piensijoittaja osti vuoden alussa erään yhtiön osakkeita. Osake menetti kuitenkin lyhyessä ajassa viidenneksen vuoden alun arvostaan. Tämän jälkeen osakkeen kurssi kääntyi hitaaseen nousuun ja nousi vuoden loppuun mennessä alimmalta tasoltaan 7,0 %.

(a) Kuinka monta prosenttia osakkeiden arvo oli muuttunut vuoden alusta vuoden loppuun mennessä?

(b) Mihin hintaan piensijoittaja oli osakkeet ostanut, kun hän myi ne vuoden lopussa ja laski menettäneensä 900 € ?

(c) Kuinka monta prosenttia osakekurssin olisi tullut edelleen nousta, jotta se olisi saavuttanut alkuperäisen tasonsa? Pörssin välityspalkkioita tms. ei laskussa oteta huomioon.

7.18. (YO S02) Henkilö aloitti säästövakuutuksen vuoden 2000 alussa. Laaditun sijoitussuunnitelman mukaisesti hän sijoittaa joka kuukauden alussa 60 € kahdeksan vuoden ajan.

Jokaisen sijoituksen yhteydessä peritään vakuutusmaksupalkkiota 2 % sijoitettavasta summasta sekä hoitokuluina 1,35 €. Säästövakuutuksen odotetaan tuottavan samoin kuin vastaava talletus, jonka vuotuinen korko on 4,4 %. Arvioi tuotto-odotuksen mukaisen säästösumman suuruus vakuutuskauden päättyessä. Mikä on vakuutuksen puhdas tuotto, kun tuotosta peritään 29 % pääomatuloveroa?

7.19. (YO K00) Henkilö suunnittelee kalastusaltaan perustamista liikeyrityksenä. Altaaseen istutettaisiin toukokuun alussa 5 000 kirjolohta. Joka viikko altaan kirjolohista pyydettäisiin noin 20 %, ja seuraavan viikon alussa altaaseen siirrettäisiin aina 100 uutta kirjolohta. Kirjolohia voi suurissa erissä ostaa kalankasvattajalta 10 markan kappalehintaan. Kuinka monta kalaa altaassa olisi 20 viikon kuluttua kalastussesongin päättyessä? Mikä pitäisi asettaa altaasta pyydettävän kirjolohen hinnaksi, jotta liikeyritykselle jäisi kalojenhankintakustannusten jälkeen katteeksi 20 viikon ajalta 50 000 mk, kun mahdolliset pyytämättä jääneet kirjolohet myytäisiin kalasavustamoon 13 markan kappalehintaan?

7.20. (YO S00) Henkilö oli tehnyt kuusi vuotta sitten 65 000 markan sijoituksen. Sijoituksen arvo on nyt 95 600 markkaa. Minkä vuotuisen (a) nimellisen, (b) reaalisen korkokannan mukaan hän sai sijoitukselleen korkoa, kun vuotuinen inflaatio kyseisellä aikavälillä oli keskimäärin 2,0 %?

7.21. (YO K97) Helsingin kaupunki myy autoilijoille 535 markan hintaista pysäköintimaksulaitetta. Laitetta käyttävä maksaa vain käyttämästään ajasta ja saa 20 % alennuksen taksasta. Henkilö, joka ilman laitetta pysäköidessään maksaa aina varmuuden vuoksi 10 % yliaikaa, ostaa maksulaitteen. Missä ajassa hän saa laitteeseen käyttämänsä rahamäärän takaisin, kun hän ilman laitetta kuluttaa pysäköintiin 20 markkaa viikossa?

8 Vastauksia tehtäviin

Ylioppilaskokeiden tehtävien ratkaisut syksystä 2000 lähtien löytyvät osoitteesta matta.hut.fi/matta/yoteht

Talousmatematiikan työkaluja

1.1. 12 600 €

1.2. 47,10 €

1.3. Kävijämäärä kesäkuussa k, heinäkuussa $0{,}84k$. Lipun hinta kesäkuussa h, heinäkuussa $1{,}05h$. Myyntitulot kesäkuussa kh, heinäkuussa $0{,}84k \cdot 1{,}05h = 0{,}882kh$. Myyntitulot pienenivät $1 - 0{,}882 = 0{,}118 = 11{,}8$ %.

1.4. 422 222,22 €

1.5. Vuoden 2013 voitto oli noin 11,6 % edellisvuoden voitosta.

Vuonna 2012 liikevaihto L, voitto $0{,}23L$. Vuonna 2013 liikevaihto $0{,}837L$, voitto $0{,}032 \cdot 0{,}837L = 0{,}026784L$. Vuoden 2013 voiton osuus edellisvuoden voitosta: $0{,}026784L/0{,}23L \approx 0{,}116$.

1.6. Vuonna 2010 tuotannon arvo a, seuraavana vuonna $1{,}113a$. Vuonna 2010 työntekijöiden määrä t, seuraavana vuonna $0{,}39t$. Vuonna 2010 työvoiman tuottavuus a/t, seuraavana vuonna

$$\frac{1{,}113a}{0{,}69t} \approx 1{,}613\frac{a}{t}.$$

Tuottavuus kasvoi 61,3 %.

1.7. Uusi hinta on 6,44 snt/kWh. Sähkön hinta nousi 3,04 %.

1.8. Vanha perusmaksu p, uusi perusmaksu $1{,}12p$. Vanha hinta asiakkaalle $0{,}48p$, uusi hinta $0{,}41 \cdot 1{,}12p = 0{,}4592p$. Muutosprosentti:

$$\frac{0{,}4592p - 0{,}48p}{0{,}48p} = \frac{-0{,}0208p}{0{,}48p} \approx -0{,}043.$$

Vakuutusmaksu laski noin 4,3 %.

1.9. Alkuperäinen hinta liikkeessä B on h. Alkuperäinen hinta liikkeessä A on $1{,}12h$. Alennettu hinta liikkeessä A on $0{,}85 \cdot 1{,}12h = 0{,}952h$. Alennettu hinta liikkeessä B on $0{,}92h$. Kuinka paljon halvempi hinta on liikkeessä B kuin liikkeessä A?

$$\frac{0{,}952h - 0{,}92h}{0{,}952h} = \frac{0{,}032h}{0{,}952h} \approx 0{,}034.$$

Hinnanalennusten jälkeen suksipaketin hinta liikkeessä B on 3,4 % edullisempi kuin liikkeessä A.

1.10. Alkuperäinen hinta 12,78 euroa; alennusprosentti 82 %.

1.11. (YO K13:T8)

(a) Maksuhäiriöiden lukumäärä kasvoi 246 %.

(b) Määrä vähenee 26,7 % vuodessa.

1.12. (YO S11:T5)

(a) Arvo oli 83 % alkuperäisestä arvosta eli pienempi.
(b) Nousun olisi pitänyt olla 61 %.

1.13. (YO K01:T5) Liikevaihto oli n. 3,2 miljoonaa euroa.

1.14. (YO K08:T9) Matkakustannukset olivat 21,7 % lomapaketin hinnasta.

1.15. (YO K07:T15a) Kurssin tulisi nousta 9,6 %.

1.16. (YO S08:T4) Polttoaine voi kallistua 28,6 %.

1.17. (YO K07:T4) Myyntitulot olivat 9,65 % suuremmat kuin valmistuskustannukset.

1.18. (YO S06:T13) Yhtälö on $p^2 + 50p - 275 = 0$, josta saadaan ratkaisuksi $p = 5$.

1.19. (YO K02:T4) 888 ensimmäisen termin summa on 789 432 ja 999 ensimmäisen termin summa on 999 000. Jälkimmäinen on 26,5 % suurempi.

1.20. (YO K13:T11)

(a) Sadan ensimmäisen termin summa on 2 180.
(b) Sadan ensimmäisen termin summa on noin $828\,179\,735 \approx 828\,000\,000$.

1.21. (YO K11:T13) Geometrisen jonon termi on suurempi 96. termistä lähtien.

1.22. (YO K09:T13) Toinen termi on 3.

1.23. (YO K06:T11) Summa on 1 303,5.

1.24. (YO S03:T7) Jono ensimmäinen termi on 11 ja kymmenes termi on 2 883 584.

1.25. (YO S08:T10) Jonon n:nnen termin lauseke on $2 \cdot 1{,}05^{n-1}$. Jonon 411 ensimmäistä termiä ovat pienempiä kuin 1 000 miljoonaa. Näiden 411 termin summa on n. $2{,}05 \cdot 10^{10}$.

1.26. (YO K03:T10)

(a) Aritmeettisessa jonossa $a_2 = 3{,}25$; $a_3 = 2{,}5$; $a_4 = 1{,}75$; $a_{10} = -2{,}75$.
(b) Geometrisessa jonossa $a_2 = \pm 2\sqrt{2}$, $a_3 = 2$, $a_4 = \pm\sqrt{2}$, $a_{10} = \pm\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

1.27. (YO S02:T8) Hinta vuonna 1997 oli 6 163 mk. Hinta vuonna 2004 olisi 424 euroa.

1.28. (YO K10:T14) Vuosittainen hinnankorotus olisi 4,2 %.

1.29. (YO S09:T7) Väkiluku oli noussut vuodessa keskimäärin 1,2 %. Väkiluku vuonna 2015 olisi 665 552 asukasta.

Ratkaisu: Väkiluvun kasvuprosentin saa yhtälöstä $q^{10} \cdot 492\,400 = 555\,474$. Tässä q kertoo, miten väkiluku monikertaistuu vuosittain. Jakamalla yhtälön molemmat puolet luvulla 492 400 ja ottamalla molemmilta puolilta 10. juuri saadaan

$$q = \sqrt[10]{\frac{555474}{492400}} \approx 1{,}012126.$$

Väkiluku siis noin 1,012-kertaistuu vuosittain eli kasvaa 1,2 %.

Väkiluvun vuonna 2015 saa käyttämällä äsken laskettua q:n tarkkaa arvoa. Väkiluku q-kertaistuu vuosittain, joten vuodesta 2000 vuoteen 2015 se ehtii q-kertaistua 15 kertaa. Väkiluku vuonna 2015 on siten $q^{15} \cdot 555\,474 \approx 665\,552$.

1.30. (YO S13:T10) Liikevaihto kasvoi 12,2 % vuodessa.

1.31. (YO S97) Vuosittainen vähenemisprosentti p saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)^8 \cdot 95\,400 \text{ mk} = 19\,000 \text{ mk},$$

josta

$$1 - \frac{p}{100} = \sqrt[8]{\frac{19\,000}{95\,400}} \approx 0{,}817$$

ja edelleen $p \approx (1 - 0{,}817) \cdot 100 = 18{,}3$. Arvo väheni siis vuosittain noin 18,3 %.

1.32. (YO K13:T14)

(a) Lauseke on $12{,}30x + 98\,000$.
(b) Lauseke on $4{,}6925x - 98\,000$.
(c) Yhtiön täytyy valmistaa 20 885 koteloa.

Valuutat ja valuuttakurssit

2.1. Kun vaihtolaitos ostaa vierasta valuuttaa, käytetään ostokurssia. Kun kurssit on ilmoitettu epäsuoran noteeraustavan mukaan (yhden euron arvo vieraassa valuutassa), muutetaan vieras valuutta euroiksi jakamalla kurssilla.

(a) 438,50 € (b) 323,29 € (c) 2030,82 €

2.2. Kun vaihtolaitos myy vierasta valuuttaa, käytetään myyntikurssia. Kun kurssit on ilmoitettu epäsuoran noteeraustavan mukaan (yhden euron arvo vieraassa valuutassa), muutetaan eurot vieraaksi valuutaksi kertomalla kurssilla.

(a) 3427,20 NOK ≈ 3430 NOK
(b) 3032,74 DKK ≈ 3030 DKK
(c) 498,08 CHF ≈ 498 CHF

2.3. Pankki myy laskun maksuun vierasta valuuttaa, joten käytetään tilivaluutan myyntikurssia.

(a) 373,58 € (b) 257,02 € (c) 27,05 €

2.4. Pankki myy ostosten maksuun vierasta valuuttaa; käytetään tilivaluutan myyntikurssia.

(a) 118,63 € (b) 517,28 €

2.5. (a) Käytetään matkavaluutan myyntikurssia. Vaihdettava summa on 600 € − 10 € = 590 €. Gabriel saa 1612,30 TRY.
(b) Käytetään matkavaluutan ostokurssia. Gabriel saa vaihtopalkkion vähennyksen jälkeen 478,62 €.

2.6. Käytetään matkavaluutan myyntikurssia. Vaihtopalkkio on $0{,}015 \cdot 800$ € = 12 €, joten vaihdettava summa on 800 € − 12 € = 788 €.

(a) 934,49 CHF (b) 5689,99 DKK (c) 30 189,86 THB

2.7. Vaihtopalkkion perimisen jälkeen jäljellä oli 245 euroa, jolla sai 2 160 Norjan kruunua. Ratkaistaan verrantoyhtälöstä yhden euron arvo kruunuissa:

$$\frac{1}{245} = \frac{x}{2\,160} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2\,160}{245} \approx 8{,}8163.$$

Siis EUR / NOK 8,8163. Norjan kruunun eurokurssi on tämän käänteisluku:
NOK / EUR 0,11343.

2.8. EUR/SEK 8,9127 tai pienempi.

2.9. (a) Euro on devalvoitunut suhteessa Sveitsin frangiin. Euro on revalvoitunut suhteessa Australian dollariin ja Tšekin korunaan.

(b) Kun euro revalvoituu, eli sen arvo nousee, euroalueelle saapuvien turistien saama eurojen määrä laskee. Turistien kannalta kohdemaan valuutan revalvoituminen merkitsee ostosten kallistumista. Australiasta ja Tšekistä oli kannattavampaa matkustaa Suomeen vuonna 2011 kuin vuonna 2014.

2.10. (a) Taulukossa on annettu yhden euron arvo Australian dollareissa eli kurssi EUR / AUD. Koska Australian dollarin arvoa verrataan euroon, tarvitaan kurssia AUD / EUR. Se on annetun kurssin käänteisluku, eli vuonna 2011 AUD / EUR $1/1{,}3417 \approx 0{,}74532$ ja vuonna 2014 AUD / EUR $1/1{,}5222 \approx 0{,}65694$. Lasketaan muutosprosentti:

$$\frac{0{,}65694 - 0{,}74532}{0{,}74532} \approx -0{,}119.$$

Siis Australian dollari on devalvoitunut noin 11,9 % suhteessa euroon.

(b) Kurssit EUR / CZK saadaan suoraan taulukosta. Muutosprosentti:

$$\frac{27{,}485 - 24{,}449}{24{,}449} \approx 0{,}124$$

Euro on siis revalvoitunut noin 12,4 % suhteessa Tšekin korunaan.

(c) Vuonna 2011 CHF / EUR $1/1{,}2779 \approx 0{,}78253$ ja vuonna 2014 CHF / EUR $1/1{,}2317 \approx 0{,}81189$. Muutosprosentti:

$$\frac{0{,}81189 - 0{,}78253}{0{,}78253} \approx 0{,}0375.$$

Sveitsin frangi on siis revalvoitunut noin 3,75 % suhteessa euroon.

2.11. Euron arvo nousi, eli euro revalvoitui, suhteessa Norjan kruunuun. Euron revalvoitumisprosentti oli 7,3 %.

2.12. Verrataan keskikursseja, eli osto- ja myyntikurssien keskiarvoja. Dollarin devalvoitumisprosentti oli 15,6 %.

2.13. Uusi hinta oli 158,33 DKK.

2.14. Kasvoi 23,5 %.

2.15. (a) Hinnat nousevat 4,0 %.

(b) Hinnat laskevat 3,7 %.

2.16. Pankki myy vierasta valuuttaa, joten käytetään matkavaluutan myyntikursseja. Noel saa 722,08 DKK $\approx$ 720 DKK.

2.17. (a) 85 € (b) 59,68 € (c) 12 024,95 JPY

2.18. Pankki ostaa ulkomaanvaluuttaa, joten käytetään tilivaluutan ostokurssia.

(a) 10 897,99 € (b) 10 386,37 €

2.19. (YO S00:T2) Tammikuussa USD / EUR $\approx$ 0,86438 ja heinäkuussa USD / EUR $\approx$ 0,98775. Dollari vahvistui (revalvoitui) 14,3 % suhteessa euroon. Tammikuussa JPY / EUR $\approx$ 0,0079158 ja heinäkuussa JPY / EUR $\approx$ 0,0080762. Jeni vahvistui (revalvoitui) 2,0 % suhteessa euroon.

Indeksilaskentaa

3.1. Indeksisarja: 100; 118,4; 107,3; 159,5.

3.2. Eläke vuonna 2013 on $\frac{107{,}9}{106{,}3} \cdot 1\,540\text{ €} \approx 1\,563{,}18\text{ €}$.

3.3. (a) Hintataso muuttui 25,5 %.

(b) Hinta olisi ollut 163 091 euroa.

3.4. (a) Inflaatioprosentti oli 190 %. Se lasketaan seuraavasti:

$$\frac{1890 - 651}{651} \approx 1{,}90.$$

(b) Ostovoiman muutosprosentti oli -65,6 %. Ostovoima on kääntäen verrannollinen kuluttajahintaindeksiin, joten ostovoiman muutosprosentti lasketaan seuraavasti:

$$\frac{\frac{1}{1890} - \frac{1}{651}}{\frac{1}{651}} \approx -0{,}656.$$

Toinen tapa: 190 % inflaatiota vastaava prosenttikerroin on 2,90. Ostovoiman muutoksen prosenttikerroin on tämän käänteisluku: $1/2{,}90 \approx 0{,}345$. Ostovoima pieneni siis noin $1 - 0{,}345 = 0{,}656 = 65{,}6$ %.

3.5. (a) Inflaatio on $(109{,}7 - 101{,}6)/101{,}6 \approx 8{,}0$ %.

(b) Yhtälöstä $q^4 = 109{,}7/101{,}6$ saadaan $q \approx 1{,}01936$, joten keskimääräinen vuotuinen inflaatio on n. 1,94 %.

3.6. (a) Ostovoima pieneni n. 7,3 %.

(b) Ostovoima kasvoi n. 8,6 %.

3.7. (a) Hinnat laskivat n. 4,3 %.

(b) Hinnat nousivat n. 4,7 %.

3.8. (a) Nimellisarvo nousi 180 euroa eli 6 %.

(b) Reaaliarvon muutos saadaan inflatoimalla 3 000 euroa vuoden 2013 rahaksi: $118{,}4 \cdot 3\,000\text{ €}/101{,}6 \approx 3\,496{,}06\text{ €}$. Muutos $(3\,180\text{ €} - 3\,496{,}06\text{ €})/3\,496{,}06\text{ €} \approx -9{,}0$ %. Reaaliarvo siis laski n. 9,0 %.

3.9. (a) Reaaliarvon muutos saadaan inflatoimalla 560 euroa vuoden 2011 rahaksi: $113{,}5 \cdot 560\text{ €}/104{,}1 \approx 610{,}57\text{ €}$. Muutos $(680\text{ €} - 610{,}57\text{ €})/610{,}57\text{ €} \approx 11{,}4$ %. Vuokran reaalinen arvo nousi n. 11,4 %.

(b) Vuokran olisi pitänyt olla 610,57 €.

3.10. Asunnon arvo v. 2009 rahassa oli 102 831 euroa. Reaaliarvo nousi n. 24,5 %.

3.11. (a) Laina oli vähentynyt nimellisesti 33 600 euroa eli 28 %.

(b) Reaaliarvon muutos saadaan inflatoimalla 120 000 euroa vuoden 2008 rahaksi: $115{,}3 \cdot 120\,000$ €$/105{,}3 \approx 131\,396{,}01$ €. Muutos

$$(86\,400 \text{ €} - 131\,396{,}01 \text{ €})/131\,396{,}01 \text{ €} \approx -34{,}2 \text{ \%}.$$

Lainamäärä vähentyi reaalisesti n. 34,2 %.

3.12. Palautettu maksu oli $126{,}1 \cdot 18\,500$ €$/102{,}5 \approx 22\,759{,}51$ €.

3.13. (a) 608,33 € (b) 656,78 € (c) 712,05 €

3.14. Palkan tulisi olla $118{,}4 \cdot 5\,000$ €$/101{,}6 \approx 5\,826{,}77$ € eli palkan tulisi nousta 826,77 euroa eli n. 16,5 %.

3.15. (a) Reaaliarvon muutos saadaan inflatoimalla 78 000 euroa vuoden 2013 rahaksi: $1890 \cdot 120\,000$ €$/1501 \approx 98\,214{,}52$ €. Reaaliansio siis laski 6 214,52 euroa.

(b) Rahan ostovoiman muutosprosentti on kuluttajahintaindeksin pistelukujen käänteisarvojen muutosprosentti:

$$\frac{\frac{1}{1890} - \frac{1}{1501}}{\frac{1}{1501}} \approx -20{,}6 \text{ \%}.$$

(c) Palkan ostovoiman muutos oli $(92\,000 \text{ €} - 98\,214{,}52 \text{ €})/98\,214{,}52 \text{ €} \approx -6{,}3$ %. Palkan ostovoima laski n. 6,3 %.

3.16. Kuukausipalkan arvo on $101{,}6 \cdot 4\,000$ €$/118{,}4 \approx 3\,432{,}43$ €.

3.17. (a) Hinta vuoden 2013 rahassa on $1\,890 \cdot 4{,}52 \text{ mk}/1\,248 \approx 6{,}84519$ mk. Koska 1 € $=$ 5,94573 mk, on hinta 1,1512787 € $\approx$ 1,151 €.

(b) Arvio inflaatiolle saadaan laskemalla elinkustannusindeksin muutosprosentti: $(1890 - 1248)/1248 \approx 51{,}4$ %.

3.18. Nettopalkka 1 379,84 €. Uusi nettopalkka $102{,}7 \cdot 1379{,}84$ €$/100{,}0 \approx 1\,417{,}10$ €. Bruttopalkan tulee olla $1\,417{,}10$ €$/0{,}65 \approx 2\,180{,}15$ €.

3.19. (a) Nimellismuutos $(1\,560 \text{ €} - 1\,500 \text{ €})/1\,500 \text{ €} = 0{,}04$. Siis nousi 4 %.

(b) Reaalinen muutos: 1 500 euron palkan arvo indeksi noustua: $114{,}2 \cdot (1\,500 \text{ €})/110{,}0 \approx 1\,557{,}27$ €. Suhteellinen muutos $(1\,560 \text{ €} - 1\,557{,}27 \text{ €})/1\,557{,}27 \text{ €} \approx 0{,}0018$. Siis nousi n. 0,18 %.

3.20. Pääoman reaalinen arvo vuonna 2005 on $1\,000 \text{ €} \cdot 100/100 = 1\,000$ €. Kasvanut pääoma vuoden 2013 lopussa koron lisäämisen jälkeen on $1{,}03^9 \cdot 1\,000$ € ja sen reaaliarvo on $1{,}03^9 \cdot 1\,000 \text{ €} \cdot 100/118{,}4 \approx 1\,102{,}00$ €.

3.21. (YO K08:T14) Talletus oli 1 054,71 euroa. Reaaliarvon muutos oli 0,042 %.

Verotus

4.1. (a) 524,70e, (b) 704,15 €.

4.2. Palkkapäivänä tilille tuleva nettopalkka on 1867,31 €.

4.3. (a) 14 202,00 €, (b) 13 194,50 €, (c) Veronpalautusta 1007,50 €.

(b) ratkaisu: Vuoden bruttotulo $12 \cdot 3\,900$ € $= 46\,800$ €. Verotettava tulo 44 400 €. Kunnallisvero $0{,}2 \cdot 44\,400$ € $= 8\,880$ €.

Valtion tulovero $3\,175$ € $+ 0{,}215 \cdot (44\,400$ € $- 39\,100$ €$) = 4\,314{,}50$ €.

Verot yhteensä 13 194,50 €.

4.4. (a) Ennakonpidätys on 4313,02 €. (b) Ennakonpidätys on 4 289,88 €.

4.5. (a) Nettopalkka on 393,36 €. (b) Nettopalkka on 558,04 €.

(Huomaa vero ja työeläke- sekä työttömyysvakuutusmaksu!)

4.6. (a) Ennakonpidätys tammikuussa on 712,50 €.
(b) Helmikuun nettopalkka on 1936,59 €.

4.7. Ennakonpidätys on 32 %, joten ansiotulosta jää Ellalle 68 %. Ansiotulo on tuntematon x, jolloin $0{,}68x = 920{,}20$ €. Tästä $x = 1\,353{,}24$ €. Ennakonpidätys on tässä tapauksessa $1\,353{,}24$ € $- 920{,}20$ € $= 433{,}04$ €. Se voidaan laskea myös $0{,}32 \cdot 1\,353{,}24$ € $= 433{,}04$ €.

4.8. (a) Verot ja veronkaltaiset maksut ovat yhteensä 11 806,26 €:
- Kunnallisvero $0{,}1925 \cdot 38\,200$ € $= 7\,353{,}50$ €.
- Kirkollisvero $0{,}0125 \cdot 38\,200$ € $= 477{,}50$ €.
- Sairaanhoitomaksu $0{,}013 \cdot 38\,200$ € $\approx 496{,}60$ €.
- Päivärahamaksu $0{,}0074 \cdot 43\,400$ € $\approx 321{,}16$ €.
- Yle-vero 140 €.
- Valtion tulovero 515 € $+ 0{,}175 \cdot (38\,200$ € $- 23\,900$ €$) = 3\,017{,}50$ €.

(b) Verot ja veronkaltaiset maksut ovat yhteensä 9 941,22 €:
- Kunnallisvero $0{,}19 \cdot 33\,750$ € $= 6\,412{,}50$ €.
- Kirkollisvero $0{,}0125 \cdot 33\,750$ € $\approx 421{,}88$ €.
- Sairaanhoitomaksu $0{,}013 \cdot 33\,750$ € $\approx 438{,}75$ €.
- Päivärahamaksu $0{,}0074 \cdot 39\,100$ € $\approx 289{,}34$ €.
- Yle-vero 140 €.
- Valtion tulovero 515 € $+ 0{,}175 \cdot (33\,750$ € $- 23\,900$ €$) = 2\,238{,}75$ €.

(c) Verot ja veronkaltaiset maksut ovat yhteensä 8 704,17 €:
- Kunnallisvero $0{,}21 \cdot 28\,955$ € $= 6\,080{,}55$ €.
- Sairaanhoitomaksu $0{,}013 \cdot 28\,955$ € $\approx 376{,}42$ €.
- Päivärahamaksu $0{,}0074 \cdot 32\,358$ € $\approx 239{,}45$ €.
- Yle-vero 140 €.
- Valtion tulovero 515 € $+ 0{,}175 \cdot (31\,630$ € $- 23\,900$ €$) = 1\,867{,}75$ €.

4.9. (a) 131,50 €, (b) 1932,50 €, (c) 9603,50 €.

4.10. Iiriksen verotettava ansiotulo valtionverotuksessa oli 31 014,29 €.

4.11. (a) Kunnallisvero ja kirkollisvero yhteensä 4 540,80 €. Valtion tulovero

$$8 \text{ €} + 0{,}065 \cdot (20640 \text{ €} - 15\,200 \text{ €}) = 361{,}60 \text{ €}.$$

Nettovuosiansiot 15 737,60 €. Kokonaisveroprosentti

$$\frac{4\,902{,}40\ €}{20\,640\ €} \approx 23{,}8\%.$$

(b) Kunnallisvero 3 302,40 €. Valtion tulovero

$$8\ € + 0{,}065 \cdot (20640\ € - 16\,100\ €) = 303{,}10\ €.$$

Nettovuosiansiot 17 034,50 €. Kokonaisveroprosentti

$$\frac{3\,605{,}50\ €}{20\,640\ €} \approx 17{,}5\%.$$

(c) Nettovuosiansioiden muutos

$$\frac{17\,034{,}50\ € - 15\,737{,}60\ €}{15\,737{,}60\ €} \approx 8{,}2\%.$$

4.12. Kokonaisveroprosentti on $5\,308{,}47\ €/23\,000\ € \approx 0{,}231 = 23{,}1\ \%$.

- Valtion tulovero $8\ € + 0{,}065 \cdot (22\,380 - 16\,300)\ € = 403{,}20\ €$.
- Kunnallis- ja kirkollisvero $0{,}195 \cdot 21\,960\ € = 4\,282{,}20\ €$.
- Sairaanhoitomaksu $0{,}0132 \cdot 21\,960\ € \approx 289{,}87\ €$.
- Päivärahamaksu $0{,}0084 \cdot 23\,000\ € = 193{,}20\ €$.
- Yle-vero 143 €, sillä puhdas ansiotulo on vähintään 21 960 € ja $0{,}0068 \cdot 21\,960\ € = 149{,}33\ €$.

4.13. Ennakonpidätysprosentti on arvio kokonaisveroprosentista. Verotettava ansiotulo valtionverotuksessa on 24 200 €, joten valtion tulovero on

$$8\ € + 0{,}065 \cdot (24\,200\ € - 16\,300\ €) = 521{,}50\ €.$$

Verotettava ansiotulo kunnallisverotuksessa on 23 950 €, joten kunnallisvero on 4 790 €. Verojen kokonaismäärä 5 311,50 €, joten ennakonpidätysprosentiksi tulee

$$\frac{5\,311{,}50\ €}{25\,000\ €} = 0{,}21246 \approx 21{,}2\ \%.$$

4.14. (a) Valtion tulovero on 3798,50 €; kunnallisvero on 7980 €.

(b) Kokonaisveron määrä, kun veronkaltaisia maksuja ei huomioida, on 11 778,50 €; kokonaisveroprosentti on 28,0 %.

(c) Pääomatulovero on 6300 €.

(d) Kaikkien tulojen kokonaistuloveroprosentti on 28,7 %.

4.15. Kiinteistövero on 782,80 €.

4.16. Nettovoitto on 840 €.

4.17. Perintövero on 2 760 €.

4.18. Perintövero on 6 724 €.

4.19. (a) Lahjavero on 1810 €.

(b) Lahjavero on yhteensä 1390 €.

4.20. (a) 520 €, (b) 1300 €, (c) 340 €.

4.21. Saara on veroluokassa II ja perinnön verotettava arvo on välillä 20 000–40 000 euroa. Alarajan kohdalla vero on 100 €. Merkitään alarajan ylimenevää perinnön arvoa kirjamella x. Tällöin $0{,}20x = 2\,430$ €, josta $x = 12\,150$ €. Perinnön verotettava arvo on siis $20\,000\text{ €} + 12\,150\text{ €} = 38\,150\text{ €}$.

4.22. Kauppias maksaa 22,32 €. Kuluttaja maksaa 31,00 €. Arvonlisävero 1,68 €.

4.23. Elintarvikkeiden verollinen hinta on $1{,}14 \cdot 24{,}20\text{ €} = 27{,}59\text{ €}$. Tuntemattoman tuotteen verollinen hinta saadaan vähentämällä loppusummasta elintarvikkeiden osuus: $38{,}70\text{ €} - 27{,}59\text{ €} = 11{,}11\text{ €}$. Olkoon tuntemattoman tuotteen veroton hinta x, jolloin $1{,}24x = 11{,}11$ €. Tästä saadaan $x = 8{,}96$ €. Verottomat hinnat yhteensä $24{,}20\text{ €} + 8{,}96\text{ €} = 33{,}16\text{ €}$. Arvonlisäveroa on siis $38{,}70\text{ €} - 33{,}16\text{ €} = 5{,}54\text{ €}$.

4.24. Hinnasta on veroa 58,8 %.

4.25. Yritys tilittää arvonlisäveroa 4645,16 €.

4.26. (a) 619,35 €, (b) 2206,45 €.

4.27. Lipun veroton hinta on 8,18 euroa.

4.28.
(a) Juustosämpylän uusi hinta on 3,60 €, kahvin uusi hinta on 2,00 €.
(b) Junalipun uusi hinta on 13,63 euroa. Hinta nousi 1,0 %.

4.29. (a) Hinta nousee 2,7 %. (b) Hinta laskee 7,5 %. (c) Hinta nousee 7,9 %.

4.30. Vuonna 2011 alv 9 %, joten veroton hinta x saadaan yhtälöstä $1{,}09x = 28$ €. Siitä ratkaisemalla $x = 25{,}69$ €. Vuonna 2013 alv $(9 + 14 + 1)\ \% = 24\ \%$, joten uusi verollinen hinta on $1{,}24x = 1{,}24 \cdot 25{,}69\text{ €} = 31{,}86\text{ €}$. Huomaa, että veroton hinta pysyi tehtävänannon mukaan koko ajan samana.

4.31. Veron osuus on 2,34 euroa.

4.32. Kirjasarjan uusi hinta on 147,20 euroa.

4.33. Arvonlisäveron osuus on 10,36 euroa.

4.34. (a) 12,3 %, (b) 9,1 %, (c) 19,4 %.

4.35.
(a) Myymälässä kuksan veroton hinta x. Silloin asiakkaan maksama hinta on $1{,}24x = 32$ €, josta saadaan $x = 25{,}81$ €. Asiakas maksaa arvonlisäveroa $32\text{ €} - 25{,}81\text{ €} = 6{,}19\text{ €}$.
(b) Toinin myymän kuksan veroton hinta y. Silloin myymälän maksama hinta on $1{,}24y = 20$ €. Tästä $y = 16{,}13$ €. Myymälä maksaa oston yhteydessä arvonlisäveroa $20\text{ €} - 16{,}13\text{ €} = 3{,}87\text{ €}$. Myymälä tilittää valtiolle erotuksen $6{,}19\text{ €} - 3{,}87\text{ €} = 2{,}32\text{ €}$.

Taunon myymän koivupahkon veroton hinta z. Silloin Toinin maksama hinta on $1{,}24z = 2{,}50$ €. Tästä $z = 2{,}02$ €. Toini maksaa oston yhteydessä arvonlisäveroa $2{,}50\text{ €} - 2{,}02\text{ €} = 0{,}48\text{ €}$. Toini tilittää valtiolle erotuksen $3{,}87\text{ €} - 0{,}48\text{ €} = 3{,}39\text{ €}$.

Tauno ei itse osta mitään, joten hän tilittää valtiolle kaiken saamansa arvonlisäveron 0,48 €.

4.36. (YO S09:T4) Ostoksen hinta alenisi 4,18 euroa. Hinnan alennus olisi 7,7 % alkuperäisestä hinnasta.

4.37. (YO K05:T8) Ennakonpidätysprosentti oli 26,2 ja palkka 2 093,75 euroa.

4.38. (YO S04:T7) Metsänomistaja maksoi 3 304,42 euroa.

4.39. (YO K09:T8) Vähennystä ei saa, jos palkka on yli 5 100 euroa.

4.40. (YO K10:T13) (a) Veroa menee 2 310 euroa.

4.41. (YO S02:T7)

(a) Henkilö maksoi valtion tuloveroa 21 920 mk.

(b) Verotettava vuositulo olisi ollut 192 942,03 mk.

Yksi ratkaisutapa: Olkoon verotettava vuositulo x. Jos arvataan, että vuositulo on luokassa 178 000 mk – 315 000 mk, voidaan laskea siitä pidätettävä vero: 25 790 mk $+0,31 \cdot (x - 178\,000)$ mk $= 0{,}31x - 29\,390$ mk.

Vähennetään verotettavasta vuositulosta vero, jolloin jää tehtävän mukaan 162 520 mk:

$$x - (0{,}31x - 29\,390) = 162\,520.$$

Tästä saadaan yhtälö $0,69x + 29\,390 = 162\,520$, josta edelleen $0,69x = 133\,130$ ja $x = 192\,942,03$.

4.42. (YO S01:T3) Arvonlisävero on 18 % myyntihinnasta. Tämä prosentti ei riipu myyntihinnasta.

4.43. (YO S00:T3) Maksu olisi ollut 124,90 mk.

4.44. (YO K12:T13)

(a) Ensimmäisessä vaihtoehdossa Simeonille jää 34 200 euroa ja hankintameno-olettamaa käytettäessä hänelle jää 34 400 euroa. Hankintameno-olettama on siis Simeonille edullisempi vaihtoehto.

(b) Myyntihinta olisi 40 000 euroa.

4.45. (YO S95) Olkoon perushinta x. Se saadaan yhtälöstä $1{,}12x = 134$ mk eli $x = 134$ mk$/1{,}12 \approx$ 119,64 mk. Uusi perushinta on $x - 25$ mk $= 94{,}64$ mk ja myyntihinta $1{,}12 \cdot (x - 25$ mk$) \approx$ 106,00 mk.

4.46. (YO K99) Olkoon vuosittainen sähkönkulutus x.

Tariffissa 1 vuotuinen kustannus on $12 \cdot 62{,}50$ mk $+ 0{,}406935x$ mk ja tariffissa 2 vastaavasti $12 \cdot 57{,}50$ mk $+ 0{,}425935x$ mk. Merkitsemällä nämä yhtä suuriksi saadaan sievennyksen jälkeen yhtälö $0{,}019x = 60$, josta $x \approx 3\,157{,}89$ (kWh).

Laskun suuruus on tällöin 2 035,06 mk.

Tariffien mukaisten vuotuisten sähkölaskujen erotus on $0{,}019x - 60$. Saadaan epäyhtälöt $-100 < 0{,}019x - 60 < 100$, josta $-2\,105{,}26 < x < 8\,421{,}05$. Kulutuksen pitää olla alle 8 421,05 kWh.

Korkolaskentaa

5.1. (a) Korkoa maksetaan $r = kit = 750$ € $\cdot\, 0{,}015 \cdot 1 \approx 11{,}25$ €.

(b) Lähdeveroa maksetaan $0{,}30 \cdot 11{,}25$ € $= 3{,}375$ € $\approx 3{,}30$ €.

5.2. Korkopäiviä $(31 - 6) + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 31 + 9 = 248$. Korkoaika $t = 248/360$ (vuotta) ja pääoma $k = 300$ €. Korko $r = kit$, josta

$$i = \frac{r}{kt} \approx 0{,}025.$$

Vuotuinen korkokanta oli 2,5 %. Tässä ei huomioitu lähdeveroa.

5.3. Korko $r = 17{,}80$ €. Pääoma $k = 1\,500$ € ja nettokorkokanta $i = 0{,}70 \cdot 0{,}0195 = 0{,}01365$. Yhtälöstä $r = kit$ saadaan

$$t = \frac{r}{ki} \approx 0{,}86935 \text{ vuotta.}$$

Jos vuoden korkopäivien lukumääränä käytetään 360:tä, saadaan korkopäivien lukumääräksi $t \cdot 360 \approx 313$. Talletuspäivä ei ole korkopäivä mutta nostopäivä on, joten nostopäiväksi saadaan 10.12.2014.

5.4. Nettokorkokanta on $i = 0{,}70 \cdot 0{,}016 = 0{,}0112$. Korkotekijä on $q = 1 + i$. Alkuperäinen pääoma $k = K/q = 652{,}22$ €$/1{,}0112 \approx 645{,}00$ €.

5.5. Rami ja Silja tekivät talletuksensa aina kuukauden alussa, joten korkokuukausia on vuoden aikana $12 + 11 + \cdots + 1 = 78$.

(a) Ramin saama korko $r = kit = 50$ €$\cdot 0{,}014 \cdot 78/12 \approx 4{,}55$ €. Siljan saama korko $r = kit = 40$ € $\cdot\, 0{,}0175 \cdot 78/12 \approx 4{,}55$ €. Ramin saldo $12 \cdot 50$ € $+ 4{,}55$ € $\approx 604{,}55$ €. Siljan saldo $12 \cdot 40$ € $+ 4{,}55$ € $\approx 484{,}55$ €. Siis Ramilla enemmän rahaa.

(b) Saldo $12 \cdot 90$ € $+ 90$ € $\cdot\, 0{,}0157 \cdot 78/12 \approx 1\,089{,}18$ €.

5.6. Nettokorkokanta $i = 0{,}70 \cdot 0{,}0184 = 0{,}01288$. Korkotekijä $q = 1{,}01288$ ja pääoma $k = 820$ €. Kasvanut pääoma $K = q^5 k \approx 874{,}19$ €.

5.7. Ensimmäisenä vuonna korkokuukausia 78. Saldo vuoden lopussa

$$K = 12 \cdot 30 \text{ €} + 30 \text{ €} \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}0135 \cdot 78/12 \approx 361{,}84 \text{ €}.$$

Joka vuosi tilin saldo karttuu tällä summalla ja lisäksi vanhat talletukset kasvavat korkoa korolle. Kolmen vuoden kuluttua saldo on $q^2K + qK + K$, missä $q = 1 + 0{,}70 \cdot 0{,}0135 = 1{,}00945$. Saldo on noin 1 095,81 euroa.

5.8. Diskontataan kaikki summat kaupantekohetkeen eli poistetaan niistä kertyneet korot. Ensimmäinen maksutapa: nykyarvo on

$$3\,000 \text{ €} + \frac{2\,000 \text{ €}}{(1 + 0{,}045)(1 + 0{,}045/2)} = 3\,000 \text{ €} + \frac{2\,000 \text{ €}}{1{,}045 \cdot 1{,}0225} \approx 4\,871{,}76 \text{ €}.$$

Toinen maksutapa: nykyarvo on

$$2\,500 \text{ €} + \frac{1\,250 \text{ €}}{1{,}045} + \frac{1\,250 \text{ €}}{1{,}045^2} \approx 4\,840{,}83 \text{ €}.$$

Siis toinen maksutapa on yrityksen (ostajan) kannalta edullisempi.

5.9. Diskontataan kaikki summat kaupantekohetkeen eli poistetaan niistä kertyneet korot. Ensimmäinen maksutapa: nykyarvo on

$$20\,000 \text{ €} + \frac{11\,000 \text{ €}}{1 + 0{,}125/2} = 20\,000 \text{ €} + \frac{11\,000 \text{ €}}{1{,}0625} \approx 30\,352{,}94 \text{ €}.$$

Toinen maksutapa: nykyarvo on

$$x + \frac{15\,000 \text{ €}}{1 + 0{,}125/4} = x + \frac{15\,000 \text{ €}}{1{,}03125} \approx x + 14\,545{,}45 \text{ €}.$$

Näiden pitää olla yhtä suuret, joten saadaa ratkaistua $x \approx 15\,807{,}49$ €.

5.10. (YO S05:T15) Henkilö sai 11 191,09 euroa, tuottoprosentti oli noin 1,74.

Huom. Vaikuttaa siltä, että ylioppilastehtävän malliratkaisussa ei ole noudatettu periaatetta, jonka mukaan ensimmäisestä päivästä ei makseta korkoa mutta viimeisestä maksetaan. Tämän periaatteen mukaan korkopäiviä olisi ensimmäisenä vuonna ennen koron tarkistusta 39 ja jälkimmäisenä vuonna ennen talletuksen nostamista 61. Tällöin henkilö saisi rahat nostaessaan 11 190,97 euroa, tuottoprosentti olisi noin 1,74.

5.11. (YO S12:T13) Karoliinan sijoitus oli parempi. Sen arvo oli 10 154 euroa.

5.12. (YO K12:T8) Hiustenleikkaus maksaa 57,60 euroa.

5.13. (YO K10) Talletuksen arvo viiden vuoden kuluttua on $1{,}05^5 \cdot 1\,000$ € $\approx 1\,276{,}28$ €, kymmenen vuoden kuluttua $1{,}05^{10} \cdot 1\,000$ € $\approx 1\,628{,}89$ € ja niin edelleen. Viidenkymmenen vuoden kuluttua talletuksen arvo on $1{,}05^{50} \cdot 1\,000$ € $\approx 11\,467{,}40$ €.

5.14. (YO K09:T14)

(a) Tilillä on rahaa 1 111,75 euroa.
(b) Talletus on kaksinkertaistunut 66 vuoden kuluttua.

5.15. (YO S06:T14) Pankkitilille kertyisi 2 299,33 euroa.

5.16. (YO K11:T14)

(a) Matka-apurahat ovat 1 860 euroa.
(b) Pääoma kasvaa 1,95 miljoonaan euroon.

5.17. (YO K95) Korkotekijä saadaan yhtälöstä $K = q^4 k$, missä $K = 64\,082$ mk ja $k = 50\,000$ mk. Saadaan $q = \sqrt[4]{K/k} \approx 1{,}064$. Nettokorkokanta (jossa lähdevero on huomioitu) oli siis 6,4 %.

5.18. (YO S03:T8) Korkokanta oli 3,80 %.

5.19. (YO K08:T11) Vuoden 2010 lopussa 3 688,09 euroa. Vähintään 12 000 euroa v. 2020.

5.20. (YO S04:T14) Säästösumma on 3 929,99 euroa.

5.21. (YO K01:T14) Virtanen sai 515 931,60 mk.

5.22. (YO S01:T11) Kaksinkertaistui v. 1786, nelinkertaistui v. 1873. Vuoden 2001 alussa 643,44 frangia.

5.23. (YO K03:T12) Elokuussa 2006.

5.24. (YO K02:T12)

(a) Kesäkuussa 1 793 pesukonetta.
(b) Koko kahden vuoden aikana 495 000 pesukonetta.

5.25. (YO S08:T14) Kertasumma on 11 927,28 euroa.

5.26. (YO S10:T14) Haittakorvausta on maksettava 59 645,37 euroa.

5.27. (YO S07:T14) Nykyarvo oli 70 788,58 euroa; maksuosuuksien ero oli 73,66 euroa.

5.28. (YO K02:T14) Anjan tilille 4 984,39 euroa, Arton tilille 4 515,61 euroa.

5.29. (YO S01:T14) Rahaa pitää lahjoittaa 1 717,38 euroa.

5.30. (YO K99) Korkopäiviä välillä 15.1.1999–15.4.1999 on $(13 - 15) + 28 + 31 + 15 = 90$. Jos tilauksen maksaa heti 15.1.1999 hinta on 543 mk. Myöhemmin maksettaessa kertynyt korko on 15 mk. Korkokanta i saadaan yhtälöstä $r = kit$, jossa $r = 15$ mk, $k = 543$ mk ja $t = 90/360 = 1/4$ (vuotta). Saadaan

$$i = \frac{r}{kt} \approx 0{,}11$$

eli 11 %.

Jos korkoprosentti on tätä pienempi, korkoa kertyisi vähemmän kuin 15 mk ja silloin heti tammikuussa maksaminen on tilaajalle edullisempi tapa.

5.31. (YO S98) Nykyarvo poistoarvolle $1{,}05^{-5} \cdot 20\,000$ mk $\approx 15\,670{,}52$ mk. Tuottojen nykyarvojen summa

$$25\,000 \text{ mk} \cdot (1{,}05^{-1} + 1{,}05^{-2} + \cdots + 1{,}05^{-5}) \approx 108\,236{,}92 \text{ mk}.$$

Näiden summa 123 907,44 mk < 130 000 mk, joten koneen osto ei kannata.

5.32. (YO S13:T14)

(a) $y = 1{,}035x + 1{,}055(12\,000 - x) = -0{,}02x + 12\,660$.

(b) Kuvaaja on laskeva suora, joka leikkaa y-akselin korkeudella 12 660.

Lainat

6.1. Tasalyhennyslainaan sopivat b, c, d, g.

Annuiteettilainaan sopivat a, d, e, g.

Kiinteään tasaerälainaan sopivat a, d, e, f.

6.2. (a) Lyhennys on 450 €/6 = 75 €.

(b) Jokainen maksuerä muodostuu lyhennyksestä ja kertyneestä korosta.

Ensimmäinen erä on $75\text{ €} + 450\text{ €} \cdot 0{,}10 \cdot (1/12) = 78{,}75$ €.

Toinen erä on $75\text{ €} + 375\text{ €} \cdot 0{,}10 \cdot (1/12) \approx 78{,}13$ €.

Kolmas erä on $75\text{ €} + 300\text{ €} \cdot 0{,}10 \cdot (1/12) = 77{,}50$ €.

Vastaavasti saadaan loput erät, jotka ovat 76,88 €, 76,25 € ja 75,63 €.

(c) Koron kokonaismäärä saadaan aritmeettisena summana $n(r_1 + r_6)/2 \approx 13{,}13$ €. Tässä maksukertojen määrä $n = 6$, ensimmäisen erän korko $r_1 = 3{,}75$ € ja viimeisen eli kuudennen erän korko $r_6 \approx 0{,}63$ €.

6.3. Lyhennyksen määrä vuodessa on $80\,000\text{ €}/25 = 3\,200$ €.

(a) Lainaa on jäljellä kymmenen vuoden kuluttua $80\,000\text{ €} - 10 \cdot 3\,200\text{ €} = 48\,000$ €.

(b) Koron kokonaismäärä saadaan aritmeettisena summana

$$\frac{n(r_1 + r_{300})}{2} \approx 39\,631{,}50 \text{ €}.$$

Tässä maksukertojen määrä $n = 25 \cdot 12 = 300$, ensimmäisen erän korko $r_1 = 80\,000\text{ €} \cdot 0{,}0395 \cdot (1/12) \approx 263{,}33$ € ja viimeisen eli 300. erän korko $r_{300} = 266{,}67\text{ €} \cdot 0{,}0395 \cdot (1/12) \approx 0{,}88$ €.

6.4. Korko $r = 57{,}75$ €. Pääoma $k = 2\,000$ € ja korkoaika $t = 9/12 = 3/4$ (vuotta). Yhtälöstä $r = kit$ saadaan

$$i = \frac{r}{kt} \approx 0{,}0385.$$

Niinan pankille maksama korko oli siis 3,85 %. Asiakaskohtainen korkomarginaali oli siten $3{,}85 - 2{,}75 = 1{,}1$ prosenttiyksikköä.

6.5. Maksueriä $n = 15 \cdot 12 = 180$. Korkotekijä on $q = 1 + it = 1 + 0{,}0465 \cdot (1/12) = 1{,}003875$. Lainapääoma on $K = 70\,000$ €. Tasaerä on

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \approx 540{,}88 \text{ €}.$$

6.6. Lainapääoma on $K = 2\,500$ €.

(a) Maksueriä $n = 3 \cdot 4 = 12$. Korkotekijä on $q = 1 + it = 1 + 0{,}059 \cdot (1/4) = 1{,}01475$. Tasaerä on

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \approx 228{,}84 \text{ €}.$$

Koron kokonaismäärä on $nA - K \approx 246{,}08$ €.

(b) Maksueriä $n = 3 \cdot 2 = 6$. Korkotekijä on $q = 1 + it = 1 + 0{,}059 \cdot (1/2) = 1{,}0295$. Tasaerä on

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \approx 460{,}73 \text{ €}.$$

Koron kokonaismäärä on $nA - K \approx 264{,}38$ €.

6.7. Maksueriä $n = 5 \cdot 12 = 60$. Korkotekijä on $q = 1 + it = 1 + 0{,}0515 \cdot (1/12)$.

(a) Tasaerän suurin mahdollinen määrä on $A = 350$ €, joten lainapääoman maksimiksi saadaan

$$K = \frac{A}{q^n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \approx 18\,479{,}38 \text{ €}.$$

(b) Tasaerän suurin mahdollinen määrä on $A = 500$ €, joten lainapääoman maksimiksi saadaan

$$K = \frac{A}{q^n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \approx 26\,399{,}11 \text{ €}.$$

6.8. **Tasalyhennyslaina:** korko on $r = kit$, missä $i = 0{,}056$ ja $t = 1/12$ (vuotta).

Maksu-kerta	Laina ennen lyhennystä	Korko	Lyhennys	Maksuerä	Laina lyhennyksen jälkeen
1	1 000 €	4,67 €	250 €	254,67 €	750 €
2	750 €	3,50 €	250 €	253,50 €	500 €
3	500 €	2,33 €	250 €	252,33 €	250 €
4	250 €	1,17 €	250 €	251,17 €	0 €

Taulukko 8.1: Tasalyhennyslainan lainalaskelma.

Tasaerälaina: maksuerien määrä $n = 4$, korkotekijä $q = 1 + 0{,}056 \cdot (1/12)$, lainapääoma $K = 1\,000$ €. Maksuerä

$$A = Kq^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \approx 252{,}92 \text{ €}.$$

Maksu-kerta	Laina ennen lyhennystä	Korko	Lyhennys	Maksuerä	Laina lyhennyksen jälkeen
1	1 000,00 €	4,67 €	248,25 €	252,92 €	751,75 €
2	751,75 €	3,51 €	249,41 €	252,92 €	502,34 €
3	502,34 €	2,34 €	250,58 €	252,92 €	251,76 €
4	251,76 €	1,17 €	251,75 €	252,92 €	0,01 €

Taulukko 8.2: Tasaerälainan lainalaskelma.

Tasaerälainasta tulee maksettavaksi 2 senttiä enemmän korkoa.

6.9. **Tasalyhennyslaina:** korko on $r = kit$, missä $i = 0{,}047$ ja $t = 0{,}5$ (vuotta).

Maksu-kerta	Laina ennen lyhennystä	Korko	Lyhennys	Maksuerä	Laina lyhennyksen jälkeen
1	6 000 €	141,00 €	1 000 €	1 141,00 €	5 000 €
2	5 000 €	117,50 €	1 000 €	1 117,50 €	4 000 €
3	4 000 €	94,00 €	1 000 €	1 094,00 €	3 000 €
4	3 000 €	70,50 €	1 000 €	1 070,50 €	2 000 €
5	2 000 €	47,00 €	1 000 €	1 047,00 €	1 000 €
6	1 000 €	23,50 €	1 000 €	1 023,50 €	0 €

Taulukko 8.3: Tasalyhennyslainan lainalaskelma.

Tasaerälaina: maksuerien määrä $n = 6$, korkotekijä $q = 1 + 0{,}047 \cdot 0{,}5 = 1{,}0235$, lainapääoma $K = 6\,000$ €. Maksuerä

$$A = Kq^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n} \approx 1\,083{,}84 \text{ €}.$$

Maksu-kerta	Laina ennen lyhennystä	Korko	Lyhennys	Maksuerä	Laina lyhennyksen jälkeen
1	6 000,00 €	141,00 €	942,84 €	1 083,84 €	5 057,16 €
2	5 057,16 €	118,84 €	965,00 €	1 083,84 €	4 092,16 €
3	4 092,16 €	96,17 €	987,67 €	1 083,84 €	3 104,49 €
4	3 104,49 €	72,96 €	1 010,88 €	1 083,84 €	2 093,61 €
5	2 093,61 €	49,20 €	1 034,64 €	1 083,84 €	1 058,97 €
6	1 058,97 €	24,89 €	1 058,95 €	1 083,84 €	0,02 €

Taulukko 8.4: Tasaerälainan lainalaskelma.

6.10. Korko $r = 40$ €. Yhtälöstä $r = kit$ saadaan $k = 8\,000$ €. Ennen tammikuun lyhennystä lainaa on siis jäljellä 8 000 euroa. Lyhennys 500 euroa, joten lyhennyksiä tarvitaan 16 kappaletta. Vuoden 2014 lyhennyksiä 12 kpl ja vuonna 2015 neljä. Laina on kokonaan maksettu huhtikuun 2015 lyhennyksen jälkeen.

6.11. Lainaa lyhennetään kuukausittain, joten maksuerien määrä on $n = 3 \cdot 12 = 36$. Korkotekijä on $q = 1 + 0{,}048 \cdot (1/12)$. Maksuerä $A = 285$ €. Lainapääoma on

$$K = \frac{A}{q^n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \approx 9\,537{,}78 \text{ €}.$$

6.12. Maksueriä $n = 25 \cdot 12 = 300$. Lainapääoma $K = 130\,000$ €. Korkotekijä $q = 1 + 0{,}039 \cdot (1/12) = 1{,}00325$. Maksuerän suuruus

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \approx 679{,}03 \text{ €}.$$

Koron noustessa maksueriä on maksettu $k = 2{,}5 \cdot 12 = 30$. Lainaa jäljellä

$$V_{30} = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q} \approx 121\,930{,}18 \text{ €}.$$

Uusi korkotekijä $q_u = 1 + 0{,}045 \cdot (1/12) = 1{,}00375$. Maksueriä jäljellä 270. Maksuerän suuruus

$$A = V_{30} q_u^{270} \frac{1-q_u}{1-q_u^{270}} \approx 718{,}93 \text{ €}.$$

6.13. Maksuerän suuruus on $A \approx 679{,}03$ € ja koron noustessa lainaa on jäljellä $V_{30} \approx 121\,930{,}18$ € (vrt. tehtävä 6.12). Maksuerien määrä saadaan yhtälöstä

$$q_u^n = \frac{A}{K(1-q_u)+A} \approx 3{,}0615646.$$

Kokeilemalla saadaan $298 < n < 299$. Tässä siis $q_u = 1 + 0{,}045 \cdot (1/12) = 1{,}00375$. Koron nousun jälkeen maksueriä on siis vielä 299 (tai 298, jos viimeinen maksuerä on isompi kuin muut). Laina-aika pitenee siis $299 - 270 = 29$ erän eli 29 kuukauden verran eli kaksi vuotta ja viisi kuukautta.

6.14. (a) Maksueriä $n = 7 \cdot 12 = 84$. Lainapääoma $K = 12\,000$ €. Korkotekijä $q = 1 + 0{,}051 \cdot (1/12) = 1{,}00425$. Maksuerän suuruus

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n} \approx 170{,}17 \text{ €}.$$

Koron noustessa maksueriä on maksettu $k = 1{,}5 \cdot 12 = 18$. Lainaa jäljellä

$$V_{18} = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q} \approx 9\,775{,}66 \text{ €}.$$

Uusi korkotekijä $q_u = 1 + 0{,}062 \cdot (1/12)$. Maksueriä jäljellä 66. Maksuerän suuruus

$$A = V_{18} q_u^{66} \frac{1-q_u}{1-q_u^{66}} \approx 175{,}18 \text{ €}.$$

Maksuerä kasvaa 5,01 euroa.

(b) Maksuerien määrä saadaan yhtälöstä

$$q_u^n = \frac{A}{K(1-q_u)+A} \approx 1{,}42208385.$$

Kokeilemalla saadaan $68 < n < 69$. Tässä siis $q = 1 + 0{,}062 \cdot (1/12)$. Koron nousun jälkeen maksueriä on siis vielä 69 (tai 68, jos viimeinen maksuerä on isompi kuin muut). Laina-aika pitenee siis $69 - (84 - 18) = 3$ erän eli kolmen kuukauden verran.

6.15. Maksuerä $A = 550$ €, korkotekijä $q = 1 + 0{,}0325 \cdot (1/12)$, maksuerien lukumäärä $n = 20 \cdot 12 = 240$. Lainapääoma

$$K = \frac{A}{q^n} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \approx 96\,968{,}28 \text{ €}.$$

6.16. (YO S09:T15) Korko toisen vuoden lopussa on 3 225,60 euroa. Lainan takaisinmaksu kestää 17 vuotta. Kokonaiskorko on 30 844,80 euroa. Kokonaiskorko saadaan aritmeettisena summana: ensimmäiseen maksuerään sisältyvä korko on $r_1 = 81\,600 \text{ €} \cdot 0{,}042 \cdot 1 = 3\,427{,}20$ € ja viimeiseen eli 17. erään sisältyvä korko on $r_{17} = 4\,800 \text{ €} \cdot 0{,}042 \cdot 1 = 201{,}60$ €. Kokonaiskorko on

$$n \cdot \frac{r_1 + r_{17}}{2} = 17 \cdot \frac{3\,427{,}20 \text{ €} + 201{,}60 \text{ €}}{2}.$$

6.17. (YO S97) Korko $r = 308$ mk. Korkokanta $i = 0{,}0859$ ja korkoaika $t = 1/12$ vuotta. Yhtälöstä $r = kit$ saadaan $k \approx 43\,026{,}78$ mk. Ennen syyskuun lyhennystä lainaa on siis jäljellä 43 026,78 markkaa. Lyhennys 1 000 markkaa, joten lyhennyksiä tarvitaan 44 kappaletta (viimeinen lyhennys pienempi kuin muut, vain 26,78 mk, joten voisi olla perusteltua pyöristää jäljellä olevan lainan määräksi 43 000 euroa; tällöin lyhennyksiä tarvittaisiin 43 kpl). Kolmen vuoden aikana lyhennyksiä on 36; näistä viimeinen elokuussa 2000. Laina on kokonaan maksettu huhtikuun 2001 lyhennyksen jälkeen (tai pyöristetysti maaliskuun 2001 lyhennyksen jälkeen).

6.18. (YO K04:T8) Opiskelijalla on velkaa 62 507,35 euroa.

6.19. (YO K06:T14)

(a) Annuiteetti on 4 010,04 euroa.
(b) Annuiteetti on 2 496,72 euroa. Lainaa on jäljellä 101 449,39 euroa.

6.20. (YO S96) Maksuerän suuruus $A = 2\,354$ €, korkotekijä $q = 1 + 0{,}12 \cdot (1/12) = 1{,}01$, maksuerien lukumäärä $n = 24$. Lainapääoma

$$K = \frac{A}{q^n} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \approx 50\,006{,}93 \text{ €}.$$

6.21. (YO S11:T14) Yhtälö on $q^5 - \frac{19}{15}q^4 + \frac{4}{15} = 0$. Korko 2,6 %.

6.22. (YO K05:T14)

(a) Kuukausierä on 117,58 € ≈ 118 €; kokonaiskustannukset 1 410,91 € ≈ 1 411 €.
(b) Tasaerälainan, jonka vuosikorko on 31 %, annuiteetin suuruudeksi saadaan 117,58 euroa.

6.23. (YO K04:T15) Tasaerä on 4 931,64 euroa. (Lainaa jäljellä 21 954,76 euroa viiden vuoden kuluttua.) Viimeinen erä vuoden 2013 lopussa. Viimeinen erä on 1 675,13 euroa.

Sijoittaminen

7.1. Kauppahinta on 2 137,50 euroa ja välityspalkkio 6,41 euroa eli Antti maksaa yhteensä 2 143,91 euroa.

7.2. Ostohinta 942,00 euroa, palkkio 1,88 euroa. Myyntihinta 1 102,50 euroa, palkkio 2,21 euroa. Myyntivoitto 156,41 euroa, josta pääomatuloveron maksamisen jälkeen jää 109,49 euroa.

7.3. Osinkoa maksetaan 72 €/300 per osake. Tämä on 3,2 % nimellisarvosta x eli $0{,}032x = 72$ €/300. Tästä saadaan yhden osakkeen nimellisarvoksi $x = 7{,}50$ €.

7.4. Ostohinta 632,40 euroa, palkkio 15,81 euroa. Myyntihinta $20 \cdot 1{,}02^4 \cdot 31{,}62 \text{ €} \approx 684{,}53$ €, palkkio 17,11 €. Nettomyyntivoitto pääomatuloveron maksamisen jälkeen 13,45 €.

Tehtävänannon mukaan Daniel toivoo saavansa vuosittaista osinkoa 3,5 % osakkeen senhetkisestä arvosta. Tällöin osinkotuotto on yhteensä

$$20 \cdot 0{,}035 \cdot 31{,}62 \text{ €} \cdot (1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + 1{,}02^3) \approx 91{,}23 \text{ €}.$$

Osingosta 15 % on verotonta ja lopusta peritään 30 % pääomatulovero, joten osinkojen tuotto verojen jälkeen on $0{,}15 \cdot 91{,}23 \text{ €} + 0{,}7 \cdot 0{,}85 \cdot 91{,}23 \text{ €} \approx 67{,}97$ €.

Kokonaistuotto on 81,42 €.

7.5. (a) Rahasto-osuuksien määrä viiden kuukauden kuluttua on

$$\frac{80}{9{,}50} + \frac{80}{9{,}90} + \frac{80}{9{,}80} + \frac{80}{8{,}90} + \frac{80}{8{,}70} + \frac{80}{9{,}30} \approx 51{,}45.$$

Niiden kokonaisarvo 17.2.2014 on 478,49 euroa.

(b) Myyntihinta on $51{,}45 \cdot 9{,}80 \text{ €} = 504{,}21$ € (huomaa myyntipäivä 28.2.2014), hankintakulut $6 \cdot 80 \text{ €} = 480$ €. Myyntivoitto on siis 24,21 €, pääomatuloveron maksamisen jälkeen 16,95 €.

7.6. Nettokorkokanta oli $i = 0{,}70 \cdot 0{,}011 = 0{,}0077$. Kasvanut pääoma ilman lisäkorkoa oli siten $K = q^3 k \approx 2\,558{,}20$ €, missä $q = 1{,}0077$ ja $k = 2\,500$ €. Nettolisäkorko oli siis $2\,654{,}60 \text{ €} - 2\,558{,}20 \text{ €} = 96{,}40$ €. Lisäkoroksi saadaan $96{,}40 \text{ €}/0{,}70 \approx 137{,}72$ € eli $137{,}72 \text{ €}/2\,500 \text{ €} \approx 5{,}5$ %.

7.7. (a) Korkopäiviä $(31 - 3) + 28 + 31 + 30 + 6 = 123$, joten korko $r = kit = 1\,700 \text{ €} \cdot 0{,}029 \cdot (123/360) \approx 16{,}84$ €. Jälkimarkkinahyvitys oli siis 16,84 euroa.

(b) Ostohinta $0{,}975 \cdot 1\,700 \text{ €} \approx 1\,657{,}50$ €. Lisäksi jälkimarkkinahyvitys, joten Gustav maksoi 1 674,34 euroa.

(c) Nettokorkotuotto $6 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}029 \cdot 1\,700 \text{ €} \approx 207{,}06$ €.

Lisäksi nimellisarvo 1 700 euroa, josta voidaan vähentään ostohinta 1 657,50 euroa. Pääomatuloa tulee siis $1\,700 \text{ €} - 1\,657{,}50 \text{ €} = 42{,}50$ €. Tästä voidaan vähentää maksettu jälkimarkkinahyvitys, joten verotettava pääomatulo $42{,}50 \text{ €} - 16{,}84 \text{ €} = 25{,}66$ €. Nettopääomatulo on $0{,}70 \cdot 25{,}66 \text{ €} = 17{,}96$ €.

Gustav sai siis tuottoa $207{,}06 \text{ €} + 17{,}96 \text{ €} = 225{,}02$ €.

7.8. (a) Ostohinta $1{,}05 \cdot 4\,000 \text{ €} = 4\,200$ €, jälkimarkkinahyvitys $r = kit = 4\,000 \text{ €} \cdot 0{,}0365 \cdot (45/360) \approx 18{,}25$ €. Hanne maksoi yhteensä 4 218,25 euroa.

(b) Nettokorkotuotto $8 \cdot 0{,}70 \cdot 0{,}0365 \cdot 4\,000 \text{ €} \approx 817{,}60$ €.

Laina-ajan lopussa Hanne saa lisäksi takaisin obligaatioiden nimellisarvon 4 000 euroa. Koska ostohinta oli 4 200 euroa, ei Hannelle kertynyt pääomatuloja.

Kun nettokorkotuotosta vähennetään kulut eli jälkimarkkinahyvitys sekä ostohinnan ja nimellisarvon erosta tullut tappio 200 €, saadaan Hannen saama tuotto: $817{,}60 \text{ €} - 218{,}25 \text{ €} \approx 599{,}35$ €.

7.9. Huomioidaan lähdevero käyttämällä nettokorkokantaa $i = 0{,}7 \cdot 0{,}0095 = 0{,}00665$. Iiron tilin saldo lähdeveron perimisen jälkeen on $1{,}00665^4 \cdot 5\,000 \text{ €} + 0{,}7 \cdot 0{,}08 \cdot 5\,000 \text{ €} \approx 5\,414{,}33 \text{ €}$. Nettokorkotuotto on siis 414,33 euroa.

Sijoitusvakuutuksen tuotto on $1{,}021^4 \cdot 5\,000 \text{ €} - 5\,000 \text{ €} \approx 433{,}42 \text{ €}$, josta pääomatuloveron jälkeen jää 303,39 €. Siis Iiron sijoitus oli parempi. Huomaa, että sijoitusvakuutusta verotetaan vasta sijoitusajan päättyessä, kun taas pankkitalletuksen korosta peritään lähdevero joka vuosi.

7.10. Ostohinta 6 187,50 euroa, palkkio 9,28 euroa. Myyntihinta 7 875,00 euroa, palkkio 11,81 euroa. Nettomyyntivoitto pääomatuloveron maksamisen jälkeen 1 166,49 euroa.

Osinkoa 675 euroa, josta 15 % verotonta ja loput pääomatuloveron piirissä. Netto-osinkotuotto $0{,}15 \cdot 675 \text{ €} + 0{,}7 \cdot 0{,}85 \cdot 675 \text{ €} \approx 502{,}88 \text{ €}$.

Nettovoitto yhteensä 1 669,37 euroa.

7.11. Normaalin koron nettokorkokanta on $i = 0{,}70 \cdot 0{,}025 = 0{,}0175$, joten korkotekijä on $q = 1{,}0175$. Lisäkoron osalta nettokorkokanta on $i_L = 0{,}70 \cdot 0{,}05 = 0{,}035$. Kasvaneelle pääomalle saadaan yhtälö $q^3 k + i_L k = K$, missä $K = 1\,306{,}11 \text{ €}$. Saadaan

$$k = \frac{K}{q^3 + i_L} \approx 1\,200{,}00 \text{ €}.$$

7.12. Kasvanut pääoma ensimmäisen vuoden jälkeen $1{,}03 \cdot 1\,000 \text{ €}$, toisen vuoden jälkeen $1{,}03^2 \cdot 1\,000 \text{ €} + 1{,}03 \cdot 1\,000 \text{ €}, \ldots,$ kymmenen vuoden jälkeen

$$(1{,}03^{10} + 1{,}03^9 + \cdots + 1{,}03^2 + 1{,}03) \cdot 1\,000 \text{ €} = 1{,}03 \cdot \frac{1 - 1{,}03^{10}}{1 - 1{,}03} \cdot 1\,000 \text{ €} \approx 11\,807{,}80 \text{ €}.$$

Voitto on 1 807,80 euroa, josta maksetaan pääomatulovero sijoitusajan lopussa. Nettovoitto on 1 265,46 €.

7.13. Olkoon yhden obligaation nimellisarvo x. Emissiokurssin mukaan myyntihinta oli $1{,}0225 \cdot 3x$ ja kertynyt korko (jälkimarkkinahyvitys) $3x \cdot 0{,}04 \cdot (4/12)$. Saadaan yhtälö $3{,}0675x + 0{,}04x = 1\,460{,}53 \text{ €}$, josta $x \approx 470{,}00 \text{ €}$.

7.14. Rahasto-osuuksien määrä on

$$\frac{150}{14{,}10} + \frac{150}{15{,}00} + \frac{150}{14{,}60} + \frac{150}{13{,}90} \approx 41{,}70.$$

Niiden kokonaisarvo 28.2.2014 on 583,85 € ja Otso on sijoittanut $4 \cdot 150 \text{ €} = 600 \text{ €}$, joten Otso on 16,15 euroa tappiolla.

7.15. (a) Ostohinta 896 €, palkkio 4,48 €, yhteensä 900,48 euroa.
(b) Myyntihinta 1 907,50 €, palkkio 9,54 €. Voitto 997,48 €, josta 30 % pääomatuloveron jälkeen nettovoitto 698,24 €.

7.16. (YO S03:T14) Arvo on 49,33 % suurempi kuin kertasijoituksella saatu arvo.

7.17. (YO K03:T14)

(a) Arvo oli laskenut 14,4 %.
(b) Ostohinta oli 6 250 euroa.
(c) Kurssin olisi pitänyt nousta 16,8 %.

7.18. (YO S02:T14) Puhdas tuotto oli 594,35 euroa.

7.19. (YO K00) Hankittavien kalojen määrä: 1. viikolla 5 000 kalaa, muilla 19 viikolla kullakin 100 kalaa eli yhteensä 6 900 kalaa. Hankintahinta 69 000 mk.

Kalastusta voidaan ajatella annuiteettilainana, jossa lainapääoma $K = 5\,000$, tasaerä $A = -100$ (huomaa, että kaloja lisätään lainapääomaan) ja korkotekijä $q = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$.

Viikon 20 alussa tehdään 100 kalan lisäys 19. kerran eli maksukertojen määrä $k = 19$. Tällöin jäljellä olevien kalojen määrä on

$$V_{19} = Kq^{19} - A \cdot \frac{1-q^{19}}{1-q} = 5000 \cdot 0{,}8^{19} + 100 \cdot \frac{1-0{,}8^{19}}{1-0{,}8} \approx 564{,}85.$$

Viikon 20 aikana näistä kalastetaan vielä 20 %, joten viikon loputtua kaloja on jäljellä $0{,}8 \cdot 564{,}85 \approx 452$. Nämä myydään savustamoon, myyntihinta 5 876 mk.

Kaloja on kalastettu $6\,900 - 452 = 6\,448$ kappaletta. Olkoon pyydetyn kalan hinta x. Tällöin tulot ovat $6\,448x + 5\,876$ markkaa ja menot 69 000 markkaa. Näiden erotus on kate 50 000 mk eli

$$6\,448x + 5\,876 - 69\,000 = 50\,000.$$

Tästä saadaan $x \approx 17{,}54$ mk.

7.20. (YO S00:T14)

(a) Nimellinen korkokanta oli 6,64 %.

(b) Reaalinen korkokanta oli 4,55 %.

Ratkaisu b-kohtaan: Jos inflaatio on 2 % vuodessa, pitäisi kuuden vuoden päästä 65 000 markan talletuksen olla nimellisarvoltaan $1{,}02^6 \cdot 65000$ mk $= 73200{,}56$ mk, jotta rahanmäärän reaaliarvo olisi pysynyt samana. Reaalinen korkokanta saadaan, kun katsotaan, kuinka paljon tämä summa on kasvanut korkoa kuudessa vuodessa: $q^6 \cdot 73200{,}56$ mk $= 95600$ mk, josta $q^6 \approx 1{,}3060009$ ja edelleen $q \approx 1{,}0454997$. Koska $q = 1 + i$, saadaan reaaliseksi korkokannaksi $i \approx 4{,}55$ %.

7.21. (YO K97) Henkilön ilman laitetta viikossa maksama summa 20 mk.

Henkilön maksama summa ilman 10 % yliaikaa $x = \dfrac{20 \text{ mk}}{1{,}10} \approx 18{,}18$ mk.

Henkilön maksama summa laitteen alennus huomioiden $0{,}80x \approx 14{,}55$ mk.

Viikossa säästöä 20 mk − 14,55 mk = 5,45 mk. Laitteen hankintahinnan säästämiseen menee

$$\frac{535 \text{ mk}}{5{,}45 \text{ mk}} \approx 98{,}17 \text{ viikkoa.}$$

Henkilö saa rahamäärän takaisin 99 viikossa.

Lähteitä

Etelämäki H., Hirvonen K., Nieminen J., Pösö J. 2011. Summa 7: Talousmatematiikka. Helsinki: Edita. 168 s. ISBN 978-951-37-5671-0.

Forsell M., Hassinen S., Taskinen T. 2012. Sigma 7: Talousmatematiikka. 1.–5. painos. Helsinki: Sanoma Pro Oy. 180 s. ISBN 978-952-63-0330-7.

Hautamäki A., Martio L., Parmanen K., Portaankorva-Koivisto P., Sirviö S. 2010. Kertoma 7!: Talousmatematiikka. 1. painos. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava. 168 s. ISBN 978-951-1-24277-2.

Matematiikan ylioppilastehtävät (matta.hut.fi/matta/yoteht)

Pörssisäätiö. Sijoittajan vero-opas. (www.porssisaatio.fi/blog/books/sijoittajan-vero-opas-2013)

Tilastokeskus (www.tilastokeskus.fi)

Verohallinto (www.vero.fi)