# Talousmatematiikkaa: korkolaskenta

10. huhtikuuta 2015

Tarkastellaan seuraavassa pääasiassa talletusten kasvamia korkoja

Tarkastellaan seuraavassa pääasiassa talletusten kasvamia korkoja

Korkolaskenta jaetaan yksinkertaiseen korkolaskentaan ja koronkorkolaskuihin

Tarkastellaan seuraavassa pääasiassa talletusten kasvamia korkoja

Korkolaskenta jaetaan *yksinkertaiseen korkolaskentaan* ja *koronkorkolaskuihin* 

Keskeisiä käsitteitä mm.

- korkoaika (aika, jonka talletus kasvaa korkoa),
- korkokausi (koron maksuväli),
- korkokanta (korkoprosentti),
- ▶ lähdevero (30%)

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Korko r riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkokannasta i ja korkoajasta t:

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Korko r riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkokannasta i ja korkoajasta t:

$$r = kit$$

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Korko r riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkokannasta i ja korkoajasta t:

$$r = kit$$

Kasvanut pääoma K saadaan lisäämällä korko alkuperäiseen pääomaan:

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Korko r riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkokannasta i ja korkoajasta t:

$$r = kit$$

Kasvanut pääoma *K* saadaan lisäämällä korko alkuperäiseen pääomaan:

$$K = k + r = k + kit$$

Huomaa, että korkoaika on ilmaistava samassa yksikössä, kuin korkokausi.

#### Esimerkki

Tilin korkokanta on 2,2 % p.a. ja tilille talletetaan 2 500 euroa. Kuinka paljon talletukselle maksetaan kahdeksan kuukauden ajalta korkoa? Huomioi korosta perittävä 30 % lähdevero.

#### Esimerkki

Tilin korkokanta on 2,2 % p.a. ja tilille talletetaan 2 500 euroa. Kuinka paljon talletukselle maksetaan kahdeksan kuukauden ajalta korkoa? Huomioi korosta perittävä 30 % lähdevero.

#### Tässä esimerkissä

korkoaika: 8 kk eli 8/12 vuotta

korkokausi: 1 vuosi

korkokanta: 2,2 %

▶ lähdevero: 30 %

Kun lähdevero otetaan huomioon, korkokanta on  $0,70\cdot 0,022=0,0154.$ 

Kun lähdevero otetaan huomioon, korkokanta on  $0,70 \cdot 0,022 = 0,0154$ . Veron suuruus on silloin

$$r = kit = 2500 \cdot 0,0154 \cdot \frac{8}{12} \approx 25,67$$

euroa.

Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

kerran vuodessa: p.a. (per anno)

Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (per anno)
- kerran puolessa vuodessa: p.s. (per season)

## Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (per anno)
- kerran puolessa vuodessa: p.s. (per season)
- kerran neljännesvuodessa: p.q. (per quarter)

## Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (per anno)
- kerran puolessa vuodessa: p.s. (per season)
- kerran neljännesvuodessa: p.q. (per quarter)
- kerran kuussa: per kk

Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (per anno)
- kerran puolessa vuodessa: p.s. (per season)
- kerran neljännesvuodessa: p.q. (per quarter)
- kerran kuussa: per kk

Huomaa, että kertynyt korko liitetään pääomaan aina korkokauden *lopussa* 

- Nettokorko tarkoittaa korkoa, joka jää jäljelle lähdeveron maksamisen jälkeen
- Nettokorkokanta tarkoittaa korkokantaa, jonka avulla nettokorko voidaan laskea suoraan

- Nettokorko tarkoittaa korkoa, joka jää jäljelle lähdeveron maksamisen jälkeen
- Nettokorkokanta tarkoittaa korkokantaa, jonka avulla nettokorko voidaan laskea suoraan

### Esimerkki

Talletetaan 9000 euroa tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a.

- Nettokorko tarkoittaa korkoa, joka jää jäljelle lähdeveron maksamisen jälkeen
- Nettokorkokanta tarkoittaa korkokantaa, jonka avulla nettokorko voidaan laskea suoraan

### Esimerkki

Talletetaan 9000 euroa tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a. Laske koron ja nettokoron suuruus, kun talletusaika on kolme kuukautta.

- Nettokorko tarkoittaa korkoa, joka jää jäljelle lähdeveron maksamisen jälkeen
- Nettokorkokanta tarkoittaa korkokantaa, jonka avulla nettokorko voidaan laskea suoraan

### Esimerkki

Talletetaan 9000 euroa tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a. Laske koron ja nettokoron suuruus, kun talletusaika on kolme kuukautta.

Nyt korkokanta on

Nyt korkokanta on i = 0.75 % = 0.0075 ja nettokorkokanta

Nyt korkokanta on i=0.75 %=0.0075 ja nettokorkokanta  $0.70i=0.70 \cdot 0.0075=0.00525$ . Talletusaika, ts. korkoaika, on 3/12 vuotta. Siten koron suuruus on

$$r = kit = 9000 \cdot 0,0075 \cdot \frac{3}{12} \approx 16,88$$

euroa ja nettokoron

$$9000 \cdot 0,00525 \cdot \frac{3}{12} \approx 11,81$$

euroa.

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

#### Ratkaisuehdotus

Olkoon *k* tuntematon pääoma.

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

#### Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma. Nettokorkokanta on  $0,70 \cdot 0,036 = 0,0252$ .

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

#### Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma. Nettokorkokanta on  $0,70\cdot 0,036=0,0252$ . Korkokausi on yksi vuosi ja korkoaika 4/12 vuotta.

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

#### Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma. Nettokorkokanta on  $0,70\cdot 0,036=0,0252$ . Korkokausi on yksi vuosi ja korkoaika 4/12 vuotta. Kaavan mukaan on oltava

$$150 = k \cdot 0,0252 \cdot \frac{4}{12} = k \cdot 0,0084,$$

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

#### Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma. Nettokorkokanta on  $0,70\cdot 0,036=0,0252$ . Korkokausi on yksi vuosi ja korkoaika 4/12 vuotta. Kaavan mukaan on oltava

$$150 = k \cdot 0,0252 \cdot \frac{4}{12} = k \cdot 0,0084,$$

joten

$$k = \frac{150}{0.0084} \approx 17857, 14$$

euroa.

# Yksinkertainen korkolaskenta: lähdeveron pyöristyssääntö

# Yksinkertainen korkolaskenta: lähdeveron pyöristyssääntö

# Yksinkertainen korkolaskenta: lähdeveron pyöristyssääntö

Lähdeveroon liittyy erikoinen *pyöristyssääntö*: lähdevero lasketaan jokaisesta maksetusta korkoerästä täysin kymmenin sentein siten, että yli menevät sentit jätetään huomioimatta.

# Yksinkertainen korkolaskenta: lähdeveron pyöristyssääntö

Lähdeveroon liittyy erikoinen *pyöristyssääntö*: lähdevero lasketaan jokaisesta maksetusta korkoerästä täysin kymmenin sentein siten, että yli menevät sentit jätetään huomioimatta.

Pyöristyssääntö jätetään usein huomioimatta tehtävien ratkaisuissa.

Koron laskeminen voi vaatia *korkopäivien lukumäärän* selvittämisen.

Koron laskeminen voi vaatia *korkopäivien lukumäärän* selvittämisen.

#### **Esimerkki**

800 euron talletukselle maksetaan vuotuista korkoa 9 %. Kuinka paljon korkoa kertyy ajalta 2.4.–16.6.2014?

Koron laskeminen voi vaatia *korkopäivien lukumäärän* selvittämisen.

#### Esimerkki

800 euron talletukselle maksetaan vuotuista korkoa 9 %. Kuinka paljon korkoa kertyy ajalta 2.4.–16.6.2014?

Korkoaikaa selvitettäessä talletuspäivää ei lasketa mukaan, nostopäivä lasketaan.

Nettokorkokanta on  $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$ . Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

Nettokorkokanta on  $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$ . Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

► Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30-2 = 28 kpl.

Nettokorkokanta on  $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$ . Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- ► Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30-2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31

Nettokorkokanta on  $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$ . Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- ► Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30-2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31
- Kesäkuulta päiviä kertyy 16

Yhteensä korkopäiviä kertyy 75, joten koron suuruus on

Nettokorkokanta on  $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$ . Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- ► Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30-2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31
- Kesäkuulta päiviä kertyy 16

Yhteensä korkopäiviä kertyy 75, joten koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{365} = 10,36$$

euroa.



Nettokorkokanta on  $0,70\cdot 0,09=0,063$ . Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- ► Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30-2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31
- Kesäkuulta päiviä kertyy 16

Yhteensä korkopäiviä kertyy 75, joten koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{365} = 10,36$$

euroa. Jos kyseessä on karkausvuosi, koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{366} = 10,33$$

euroa.

Nettokorkokanta on  $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$ . Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- ► Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30-2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31
- Kesäkuulta päiviä kertyy 16

Yhteensä korkopäiviä kertyy 75, joten koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{365} = 10,36$$

euroa. Jos kyseessä on karkausvuosi, koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{366} = 10,33$$

euroa. Tämä ei ole ainoa tapa laskea korkoajan osuutta vuodesta.



# Korkoajan laskeminen (3 tapaa)

- ► *Todelliset/365*: todellinen päivien lkm, vuodessa 365 (366) päivää
- ▶ Todelliset/360: todellinen päivien lkm, vuodessa 360 päivää
- ▶ 30/360: kuukaudessa 30 päivää, vuodessa 360 päivää

# Korkoajan laskeminen (3 tapaa)

- ► *Todelliset/365*: todellinen päivien lkm, vuodessa 365 (366) päivää
- Todelliset/360: todellinen päivien lkm, vuodessa 360 päivää
- ▶ 30/360: kuukaudessa 30 päivää, vuodessa 360 päivää



#### Esimerkki

Tilille, jonka korkokanta on 0.75~% p.a., talletetaan tammikuun 13. päivä 700 euroa.

#### Esimerkki

Tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a., talletetaan tammikuun 13. päivä 700 euroa. Laske kertyneen koron suuruus samana vuonna 7.9.

Lasketaan todellinen korkopäivien lukumäärä (välittämättä karkausvuosista).

- ► Tammikuussa päiviä kertyy 31-13 = 18 kpl.
- Helmikuussa päiviä on 28, maaliskuussa 31, huhtikuussa 30, toukokuussa 31, kesäkuussa 30
- Heinäkuussa ja elokuussa päiviä on 31
- Syyskuulta päiviä kertyy 7

Lasketaan todellinen korkopäivien lukumäärä (välittämättä karkausvuosista).

- ► Tammikuussa päiviä kertyy 31-13 = 18 kpl.
- Helmikuussa päiviä on 28, maaliskuussa 31, huhtikuussa 30, toukokuussa 31, kesäkuussa 30
- Heinäkuussa ja elokuussa päiviä on 31
- Syyskuulta päiviä kertyy 7

Yhteensä korkopäiviä kertyy siis 237 kpl.

Lasketaan todellinen korkopäivien lukumäärä (välittämättä karkausvuosista).

- ► Tammikuussa päiviä kertyy 31-13 = 18 kpl.
- ► Helmikuussa päiviä on 28, maaliskuussa 31, huhtikuussa 30, toukokuussa 31, kesäkuussa 30
- Heinäkuussa ja elokuussa päiviä on 31
- Syyskuulta päiviä kertyy 7

Yhteensä korkopäiviä kertyy siis 237 kpl. Koron suuruus on lähdevero huomioiden

$$r = kit = 700 \cdot 0, 70 \cdot 0, 0075 \cdot \frac{237}{360} \approx 0,66$$

tai

$$r = kit = 700 \cdot 0, 70 \cdot 0, 0075 \cdot \frac{237}{365} \approx 0,65$$

euroa.

# Aritmeettinen jono

Lukujono

### Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

### Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

#### Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa

#### Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

#### Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa.

#### Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

#### Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \, ,$$

#### Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

#### Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \, ,$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä,

#### Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

#### Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \,,$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä,  $a_1$  summan ensimmäinen termi ja

#### Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

#### Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \, ,$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä,  $a_1$  summan ensimmäinen termi ja  $a_n$  summan viimeinen termi.

#### Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

#### Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \,,$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä,  $a_1$  summan ensimmäinen termi ja  $a_n$  summan viimeinen termi.

Aritmeettisen summan kaava on oivallinen työkalu, kun tarkastellaan toistuvia talletuksia yksinkertaisen korkolaskennan puitteissa.



## Yksinkertainen korko - toistuvat talletukset

#### Esimerkki

Tilille, jonka korkokanta on 1,5 % p.a, talletetaan maaliskuusta alkaen 100 euroa kunkin kuukauden lopussa. Viimeinen talletus tehdään joulukuun lopussa, jonka jälkeen tilille maksetaan korko. Laske koron ja nettokoron suuruus.

#### Ratkaisuehdotus

- Maaliskuun talletus kasvaa korkoa huhti-joulukuun eli 9 kk
- Huhtikuun talletus kasvaa korkoa 8 kk
- ► Toukokuun talletus kasvaa korkoa 7 kk jne.
- Marraskuun talletus kasvaa korkoa yhden kuukauden
- Joulukuun talletus ei kasva korkoa

## Ratkaisuehdotus

Edellisen perusteella koron suuruus on

#### Ratkaisuehdotus

Edellisen perusteella koron suuruus on

$$100 \cdot 0,015 \cdot \frac{9}{12} + 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{7}{12} + \dots + 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 100 \cdot 0,015 \cdot \left(\frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \dots + \frac{1}{12}\right)$$

$$= 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{12} \cdot (9 + 8 + \dots + 1)$$

$$= \frac{1,5}{12} \cdot (9 + 8 + \dots + 1)$$

$$= \frac{1,5}{12} \cdot \left(9 \cdot \frac{9+1}{2}\right) = 5,625$$

euroa.

#### Ratkaisuehdotus

Edellisen perusteella koron suuruus on

$$100 \cdot 0,015 \cdot \frac{9}{12} + 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{7}{12} + \dots + 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 100 \cdot 0,015 \cdot \left(\frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \dots + \frac{1}{12}\right)$$

$$= 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{12} \cdot (9 + 8 + \dots + 1)$$

$$= \frac{1,5}{12} \cdot (9 + 8 + \dots + 1)$$

$$= \frac{1,5}{12} \cdot \left(9 \cdot \frac{9+1}{2}\right) = 5,625$$

euroa. Lähdeveron jälkeen nettokoroksi jää  $0,70 \cdot 5,625 = 3,94$  euroa.

## Koronkorko

#### Esimerkki

Säästötilille, jonka korkokanta on 1,5 % p.a. talletetaan 1500 euroa. Kuinka paljon tililtä on nostettavissa rahaa viiden vuoden kuluttua, jos lähdevero

- (a) jätetään huomiotta
- (b) huomioidaan?

## Koronkorko

## Kasvanut pääoma koronkoron tapauksessa

$$K = kq^n$$

Kasvanut pääoma K riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkotekijästä q ja korkokausien lukumäärästä n

Yllä korkotekijä (tai korkokerroin)  $\boldsymbol{q}$  on korkokannasta saatava prosenttikerroin.

- (a) Jos lähdevero jätetään huomiotta, korkotekijä on 1+0,015=1,015 ja kasvanut pääoma  $K=1500\cdot 1,015^5\approx 1615,93$  euroa.
- (b) Jos lähdevero huomioidaan, korkotekijä on  $1+0.7\cdot0.015=1.0105$ . Silloin kasvanut pääoma on  $K=1500\cdot1.0105^5\approx1580.42$  euroa.

## Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

## Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

#### Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa geometrisen jonon (n ensimmäisen jäsenen) summaa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad q \neq 1,$$

## Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

#### Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa geometrisen jonon (n ensimmäisen jäsenen) summaa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad q \neq 1,$$

missä *n* on summattavien lukumäärä,

## Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

#### Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa geometrisen jonon (n ensimmäisen jäsenen) summaa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad q \neq 1,$$

missä n on summattavien lukumäärä,  $a_1$  ensimmäinen summattava

## Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

#### Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa geometrisen jonon (n ensimmäisen jäsenen) summaa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad q \neq 1,$$

missä n on summattavien lukumäärä,  $a_1$  ensimmäinen summattava ja q suhdeluku.

## Pääsykoetehtävä

Eräs tuotantolaitos tuottaa haitallisia päästöjä tänä vuonna 27 tonnia vuodessa. Päästöjä on päätetty pienentää 5 % vuodessa. Jos oletetaan, että tuotantolaitos jatkaa toimintaansa ikuisesti, niin päästöjä syntyy yhteensä tämä vuosi mukaan lukien

- 1. 420 tonnia
- 2. 540 tonnia
- 3. 600 tonnia
- 4. enemmän kuin 600 tonnia (Pääsykoetehtävä 48/2014)

## Koronkorko: toistuvat talletukset

## Esimerkki

Säästötilille, jonka korkokanta on 2,7 % p.a. talletetaan 900 euroa vuosittain aina vuoden alussa. Kuinka paljon tililtä on nostettavissa rahaa viiden vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta? Kuinka paljon korkoa on kertynyt yhteensä?

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on  $0,7 \cdot 0,027 = 0,0189$ .

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on  $0,7 \cdot 0,027 = 0,0189$ . Siis korkotekijä on 1+0,0189=1,0189.

Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee 1,0189<sup>5</sup>-kertaiseksi

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee 1,0189<sup>5</sup>-kertaiseksi
- ► Toinen talletus kasvaa korkoa 4 kertaa, eli tulee 1,0189⁴-kertaiseksi

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee 1,0189<sup>5</sup>-kertaiseksi
- ► Toinen talletus kasvaa korkoa 4 kertaa, eli tulee 1,0189⁴-kertaiseksi
- ► Kolmas talletus kasvaa korkoa 3 kertaa, eli tulee 1,0189³-kertaiseksi

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee 1,0189<sup>5</sup>-kertaiseksi
- ▶ Toinen talletus kasvaa korkoa 4 kertaa, eli tulee 1,0189⁴-kertaiseksi
- Kolmas talletus kasvaa korkoa 3 kertaa, eli tulee 1,0189<sup>3</sup>-kertaiseksi
- Neljäs talletus kasvaa korkoa 2 kertaa, eli tulee 1,0189²-kertaiseksi

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee 1,0189<sup>5</sup>-kertaiseksi
- ▶ Toinen talletus kasvaa korkoa 4 kertaa, eli tulee 1,0189⁴-kertaiseksi
- Kolmas talletus kasvaa korkoa 3 kertaa, eli tulee 1,0189<sup>3</sup>-kertaiseksi
- Neljäs talletus kasvaa korkoa 2 kertaa, eli tulee 1,0189²-kertaiseksi
- Viides talletus kasvaa korkoa yhden kerran, eli tulee 1,0189-kertaiseksi

Kaiken kaikkiaan tilillä on viiden vuoden kuluttua rahaa

$$900 \cdot 1,0189^5 + 900 \cdot 1,0189^4 + 900 \cdot 1,0189^3 + 900 \cdot 1,0189^2 + 900 \cdot 1,0189^2$$

euroa, eli

Kaiken kaikkiaan tilillä on viiden vuoden kuluttua rahaa

$$900 \cdot 1,0189^5 + 900 \cdot 1,0189^4 + 900 \cdot 1,0189^3$$
 
$$+ 900 \cdot 1,0189^2 + 900 \cdot 1,0189$$

euroa, eli

$$900(1,0189^{5} + 1,0189^{4} + 1,0189^{3} + 1,0189^{2} + 1,0189)$$

$$=900(1,0189 + 1,0189^{2} + 1,0189^{3} + 1,0189^{4} + 1,0189^{5})$$

$$=900 \cdot 1,0189 \cdot \frac{1 - 1,0189^{5}}{1 - 1,0189}$$

$$\approx 4761,67$$

euroa.

Kaiken kaikkiaan tilillä on viiden vuoden kuluttua rahaa

$$900 \cdot 1,0189^5 + 900 \cdot 1,0189^4 + 900 \cdot 1,0189^3 + 900 \cdot 1,0189^2 + 900 \cdot 1,0189^2$$

euroa, eli

$$900(1,0189^{5} + 1,0189^{4} + 1,0189^{3} + 1,0189^{2} + 1,0189)$$

$$=900(1,0189 + 1,0189^{2} + 1,0189^{3} + 1,0189^{4} + 1,0189^{5})$$

$$=900 \cdot 1,0189 \cdot \frac{1 - 1,0189^{5}}{1 - 1,0189}$$

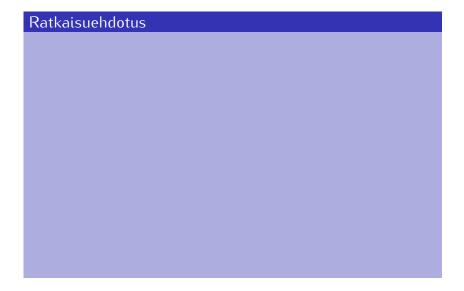
$$\approx 4761.67$$

euroa. Korkoa on saatu 4761,  $68 - 5 \cdot 900 = 261$ , 68 euroa.



#### Esimerkki

Avaat vuoden alussa tilin, jolle talletat joka kuukauden alussa 100 euroa. Tilin korkokanta on 2 %. Kuinka paljon rahaa tilillä on kolmen vuoden kuluttua korkojen lisäämisen jälkeen? Kuinka paljon korkoa on kertynyt yhteensä? Huomioi 30 % lähdevero.



#### Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta.

#### Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta. Tammikuussa talletetun summan korkoaika on 12/12 vuotta, helmikuussa talletetun summan 11/12 vuotta jne.

#### Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta. Tammikuussa talletetun summan korkoaika on 12/12 vuotta, helmikuussa talletetun summan 11/12 vuotta jne. Nettokorkokanta on  $0,70\cdot0,02=0,014$ , joten vuoden lopussa tilille maksettava korko on

#### Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta. Tammikuussa talletetun summan korkoaika on 12/12 vuotta, helmikuussa talletetun summan 11/12 vuotta jne. Nettokorkokanta on  $0,70\cdot0,02=0,014$ , joten vuoden lopussa tilille maksettava korko on

$$100 \cdot 0,014 \cdot \frac{12}{12} + 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{11}{12} + \dots + 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) = 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78$$

$$= 9,10$$

euroa.

#### Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta. Tammikuussa talletetun summan korkoaika on 12/12 vuotta, helmikuussa talletetun summan 11/12 vuotta jne. Nettokorkokanta on  $0,70\cdot0,02=0,014$ , joten vuoden lopussa tilille maksettava korko on

$$100 \cdot 0,014 \cdot \frac{12}{12} + 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{11}{12} + \dots + 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12}$$

$$= 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \dots + 1) = 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78$$

$$= 9,10$$

euroa. Tilille vuosittain talletettava summa (1200 euroa) kasvaa siis korkoa 9,10 euroa samana vuonna.

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna.

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna. Näin ollen tilillä on loppujen lopuksi, eli kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, rahaa

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna. Näin ollen tilillä on loppujen lopuksi, eli kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, rahaa

$$1209, 10 \cdot 1, 014^2 + 1209, 10 \cdot 1, 014 + 1209, 10 \approx 3678, 32$$

euroa.

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna. Näin ollen tilillä on loppujen lopuksi, eli kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, rahaa

$$1209, 10 \cdot 1, 014^2 + 1209, 10 \cdot 1, 014 + 1209, 10 \approx 3678, 32$$

euroa. Kaiken kaikkiaan tilille on talletettu  $3 \cdot 12 \cdot 100 = 3600$  euroa.

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna. Näin ollen tilillä on loppujen lopuksi, eli kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, rahaa

$$1209, 10 \cdot 1, 014^2 + 1209, 10 \cdot 1, 014 + 1209, 10 \approx 3678, 32$$

euroa. Kaiken kaikkiaan tilille on talletettu  $3 \cdot 12 \cdot 100 = 3600$  euroa. Korkoa on siis kertynyt yhteensä 78,32 euroa.

## Diskonttaus

## Diskonttaus

## Esimerkki

Kuinka suuri summa pitäisi tallettaa pankkitilille, jotta neljän vuoden kuluttua siltä olisi nostettavissa 1 000 euroa? Tilin vuotuinen korko on 4 %. Ratkaise tehtävä

- (a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.
- (b) lähdevero huomioiden.

### Diskonttaus

#### Esimerkki

Kuinka suuri summa pitäisi tallettaa pankkitilille, jotta neljän vuoden kuluttua siltä olisi nostettavissa 1 000 euroa? Tilin vuotuinen korko on 4 %. Ratkaise tehtävä

- (a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.
- (b) lähdevero huomioiden.

Korkokausien aikana kertyneen koron poistamista pääoman arvosta eli alkuperäisen pääoman selvittämistä kutsutaan diskonttaukseksi.

### Diskonttaus

#### Esimerkki

Kuinka suuri summa pitäisi tallettaa pankkitilille, jotta neljän vuoden kuluttua siltä olisi nostettavissa 1 000 euroa? Tilin vuotuinen korko on 4 %. Ratkaise tehtävä

- (a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.
- (b) lähdevero huomioiden.

Korkokausien aikana kertyneen koron poistamista pääoman arvosta eli alkuperäisen pääoman selvittämistä kutsutaan diskonttaukseksi. Diskonttauksella saatua alkuperäistä pääomaa nimitetään nykyarvoksi.

Olkoon alkuperäinen pääoma k.

(a) Korkokerroin on 1,04, joten neljän vuoden kuluttua tililtä on nostettavissa  $1,04^4k$  euroa.

Olkoon alkuperäinen pääoma k.

(a) Korkokerroin on 1,04, joten neljän vuoden kuluttua tililtä on nostettavissa 1,04 $^4k$  euroa. Nyt

$$1,04^4k = 1000 \Leftrightarrow k = \frac{1000}{1,04^4} \approx 854,80$$

euroa.

(b) Nettokorkokanta on  $0,70\cdot 0,04=0,028$ , joten korkokerroin on 1,028, kun lähdevero otetaan huomioon.



Olkoon alkuperäinen pääoma k.

(a) Korkokerroin on 1,04, joten neljän vuoden kuluttua tililtä on nostettavissa  $1,04^4k$  euroa. Nyt

$$1,04^4k = 1000 \Leftrightarrow k = \frac{1000}{1,04^4} \approx 854,80$$

euroa.

(b) Nettokorkokanta on  $0,70\cdot0,04=0,028$ , joten korkokerroin on 1,028, kun lähdevero otetaan huomioon. Jotta tilillä olisi neljän vuoden kuluttua 1000 euroa, täytyy olla

$$1,028^4 \cdot k = 1000 \Leftrightarrow k = \frac{1000}{1,028^4} \approx 895,42$$

euroa.

# Diskonttaus: nykyarvo koronkoron tapauksessa

# Diskonttaus: nykyarvo koronkoron tapauksessa

Nykyarvo eli alkuperäinen pääoma k koronkoron tapauksessa on

$$k = Kq^{-n} = \frac{K}{q^n},$$

missä K on kasvanut pääoma, q on korkotekijä ja  $n \geq 1$  on korkokausien lukumäärä.

# Diskonttaus: nykyarvo koronkoron tapauksessa

Nykyarvo eli alkuperäinen pääoma k koronkoron tapauksessa on

$$k = Kq^{-n} = \frac{K}{q^n},$$

missä K on kasvanut pääoma, q on korkotekijä ja  $n \geq 1$  on korkokausien lukumäärä.

Kerroin  $q^{-n} = \frac{1}{q^n}$  on nimeltään diskonttaustekijä.



Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten.

- ► Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten.
- Investoinnin kannattavuuden arvioimiseen voidaan käyttää nykyarvomenetelmää, jossa kaikki menot ja tulot diskontataan investoinnin alkuhetkeen.

- ► Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten.
- Investoinnin kannattavuuden arvioimiseen voidaan käyttää nykyarvomenetelmää, jossa kaikki menot ja tulot diskontataan investoinnin alkuhetkeen.
- Investointi on kannattava, jos tulot ovat suuremmat kuin menot.

- Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten.
- Investoinnin kannattavuuden arvioimiseen voidaan käyttää nykyarvomenetelmää, jossa kaikki menot ja tulot diskontataan investoinnin alkuhetkeen.
- Investointi on kannattava, jos tulot ovat suuremmat kuin menot.
- Diskonttauksessa käytetty korkokanta voi määräytyä esimerkiksi yrityksen omista tuottovaatimuksista tai pankin korkokannasta.

Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

► *Perushankintakustannus*: investoinnin alkuun liittyvä kertakustannus.

#### Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

- Perushankintakustannus: investoinnin alkuun liittyvä kertakustannus.
- Investointiaika: aika, jolloin investoinnista oletetaan saatavan hyötyä.

#### Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

- Perushankintakustannus: investoinnin alkuun liittyvä kertakustannus.
- Investointiaika: aika, jolloin investoinnista oletetaan saatavan hyötyä.
- ► Jäännösarvo: investoinnin arvo investointiajan lopussa.

#### Esimerkki

Yritys harkitsee uusien monitoimikopiokoneiden hankkimista. Kopiokoneiden yhteishinta on 6 000 euroa. Niiden käyttöiäksi on arvioitu 5 vuotta ja jälleenmyyntiarvoksi 5 % hankintahinnasta. Kopiokoneiden arvellaan vähentävän kustannuksia kolmena ensimmäisenä vuonna 1 500 euroa vuodessa ja kahtena viimeisenä vuonna 1 000 euroa vuodessa.

#### Esimerkki

Yritys harkitsee uusien monitoimikopiokoneiden hankkimista. Kopiokoneiden yhteishinta on 6 000 euroa. Niiden käyttöiäksi on arvioitu 5 vuotta ja jälleenmyyntiarvoksi 5 % hankintahinnasta. Kopiokoneiden arvellaan vähentävän kustannuksia kolmena ensimmäisenä vuonna 1 500 euroa vuodessa ja kahtena viimeisenä vuonna 1 000 euroa vuodessa.

Onko kopiokoneiden hankkiminen yritykselle kannattavaa, jos hankinta rahoitetaan lainalla, jonka vuosikorko on 3 %?

Säästöt olisivat nykyhetkessä

$$\frac{1500}{1,03} + \frac{1500}{1,03^2} + \frac{1500}{1,03^3} + \frac{1000}{1,03^4} + \frac{1000}{1,03^5} \approx 5994,01$$

euroa ja jälleenmyyntiarvo

$$0,05 \cdot \frac{6000}{1,03^5} \approx 258,78$$

euroa. Tuotot olisivat nykyhetkessä yhteensä 6252,80 euroa. Koska lainaa tarvitsee ottaa vain 6000 euroa, investointi on tämän menetelmän valossa kannattava.

## Nelilaskintekniikkaa: eksponentin ratkaiseminen

# Nelilaskintekniikkaa: eksponentin ratkaiseminen

#### Esimerkki

Missä ajassa tilille talletettu 500 euroa on kasvanut 600 euroksi, jos tilin korkokanta on 4 % p.a.? Ratkaise tehtävä

- (a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.
- (b) 30 % lähdevero huomioiden.

# Nelilaskintekniikkaa: eksponentin ratkaiseminen

#### Esimerkki

Missä ajassa tilille talletettu 500 euroa on kasvanut 600 euroksi, jos tilin korkokanta on 4 % p.a.? Ratkaise tehtävä

- (a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.
- (b) 30 % lähdevero huomioiden.

Kysytyn eksponentin eli korkokausien määrän *n* voi selvittää kokeilemalla!

#### **Esimerkki**

Talletit säästötilille 5 000 euroa. Kolmen vuoden kuluttua nostit tilisi tyhjäksi ja sait 5 950 euroa. Oletetaan, että tilillä ei ollut koronmaksun lisäksi muita tilitapahtumia. Mikä oli tilin

- (a) nettokorkokanta
- (b) bruttokorkokanta?

#### **Esimerkki**

Talletit säästötilille 5 000 euroa. Kolmen vuoden kuluttua nostit tilisi tyhjäksi ja sait 5 950 euroa. Oletetaan, että tilillä ei ollut koronmaksun lisäksi muita tilitapahtumia. Mikä oli tilin

- (a) nettokorkokanta
- (b) bruttokorkokanta?

Myös kantaluvun eli korkotekijän q voi selvittää kokeilemalla!

#### Esimerkki

Talletit säästötilille 5 000 euroa. Kahdeksan vuoden kuluttua nostit tilisi tyhjäksi ja sait 6 250 euroa. Oletetaan, että tilillä ei ollut koronmaksun lisäksi muita tilitapahtumia. Mikä oli tilin

- (a) nettokorkokanta
- (b) bruttokorkokanta?

#### Esimerkki

Talletit säästötilille 5 000 euroa. Kahdeksan vuoden kuluttua nostit tilisi tyhjäksi ja sait 6 250 euroa. Oletetaan, että tilillä ei ollut koronmaksun lisäksi muita tilitapahtumia. Mikä oli tilin

- (a) nettokorkokanta
- (b) bruttokorkokanta?

Myös kantaluvun eli korkotekijän q voi selvittää kokeilemalla!