Talousmatematiikkaa: korkolaskenta

5. huhtikuuta 2015

Korkolaskenta

Tarkastellaan seuraavassa pääasiassa talletusten kasvamia korkoja

Korkolaskenta

Tarkastellaan seuraavassa pääasiassa talletusten kasvamia korkoja

Korkolaskenta jaetaan *yksinkertaiseen korkolaskentaan* ja *koronkorkolaskuihin*

Korkolaskenta

Tarkastellaan seuraavassa pääasiassa talletusten kasvamia korkoja

Korkolaskenta jaetaan *yksinkertaiseen korkolaskentaan* ja *koronkorkolaskuihin*

Keskeisiä käsitteitä mm.

- korkoaika (aika, jonka talletus kasvaa korkoa),
- korkokausi (koron maksuväli),
- korkokanta (korkoprosentti),
- lähdevero (30%)

Yksinkertainen korkolasku

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Yksinkertainen korkolasku

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Korko r riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkokannasta i ja korkoajasta t:

Yksinkertainen korkolasku

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Korko r riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkokannasta i ja korkoajasta t:

$$r = kit$$

Yksinkertainen korkolasku

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Korko r riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkokannasta i ja korkoajasta t:

$$r = kit$$

Kasvanut pääoma K saadaan lisäämällä korko alkuperäiseen pääomaan:

Yksinkertainen korkolasku

Kun korkoaika on lyhyempi kuin korkokausi, puhutaan yksinkertaisesta korkolaskusta.

Korko r riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkokannasta i ja korkoajasta t:

$$r = kit$$

Kasvanut pääoma K saadaan lisäämällä korko alkuperäiseen pääomaan:

$$K = k + r = k + kit$$

Huomaa, että korkoaika on ilmaistava samassa yksikössä, kuin korkokausi.

Korkolaskenta

Esimerkki

Tilin korkokanta on 2,2 % p.a. ja tilille talletetaan 2 500 euroa. Kuinka paljon talletukselle maksetaan kahdeksan kuukauden ajalta korkoa? Huomioi korosta perittävä 30 % lähdevero.

Korkolaskenta

Esimerkki

Tilin korkokanta on 2,2 % p.a. ja tilille talletetaan 2 500 euroa. Kuinka paljon talletukselle maksetaan kahdeksan kuukauden ajalta korkoa? Huomioi korosta perittävä 30 % lähdevero.

Tässä esimerkissä

- korkoaika: 8 kk eli 8/12 vuotta
- korkokausi: 1 vuosi
- korkokanta: 2,2 %
- lähdevero: 30 %

Ratkaisuehdotus

Kun lähdevero otetaan huomioon, korkokanta on $0,70 \cdot 0,022 = 0{,}0154$.

Ratkaisuehdotus

Kun lähdevero otetaan huomioon, korkokanta on $0,70 \cdot 0,022 = 0{,}0154$. Veron suuruus on silloin

$$r = kit = 2500 \cdot 0{,}0154 \cdot \frac{8}{12} \approx 25,67$$

euroa.

Korkolaskenta

Korkolaskenta

Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (*per anno*)

Korkolaskenta

Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (*per anno*)
- kerran puolessa vuodessa: p.s. (*per season*)

Korkolaskenta

Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (*per anno*)
- kerran puolessa vuodessa: p.s. (*per season*)
- kerran neljännesvuodessa: p.q. (*per quarter*)

Korkolaskenta

Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (*per anno*)
- kerran puolessa vuodessa: p.s. (*per season*)
- kerran neljännesvuodessa: p.q. (*per quarter*)
- kerran kuussa: per kk

Korkolaskenta

Usein käytettyjä korkokausia lyhenteineen:

- kerran vuodessa: p.a. (*per anno*)
- kerran puolessa vuodessa: p.s. (*per season*)
- kerran neljännesvuodessa: p.q. (*per quarter*)
- kerran kuussa: per kk

Huomaa, että kertynyt korko liitetään pääomaan aina korkokauden *lopussa*

Yksinkertainen korkolaskenta: nettokorko

Yksinkertainen korkolaskenta: nettokorko

- *Nettokorko* tarkoittaa korkoa, joka jää jäljelle lähdeveron maksamisen jälkeen
- *Nettokorkokanta* tarkoittaa korkokantaa, jonka avulla nettokorko voidaan laskea suoraan

Yksinkertainen korkolaskenta: nettokorko

- *Nettokorko* tarkoittaa korkoa, joka jää jäljelle lähdeveron maksamisen jälkeen
- *Nettokorkokanta* tarkoittaa korkokantaa, jonka avulla nettokorko voidaan laskea suoraan

Esimerkki

Talletetaan 9000 euroa tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a.

Yksinkertainen korkolaskenta: nettokorko

- *Nettokorko* tarkoittaa korkoa, joka jää jäljelle lähdeveron maksamisen jälkeen
- *Nettokorkokanta* tarkoittaa korkokantaa, jonka avulla nettokorko voidaan laskea suoraan

Esimerkki

Talletetaan 9000 euroa tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a. Laske koron ja nettokoron suuruus, kun talletusaika on kolme kuukautta.

Yksinkertainen korkolaskenta: nettokorko

- *Nettokorko* tarkoittaa korkoa, joka jää jäljelle lähdeveron maksamisen jälkeen
- *Nettokorkokanta* tarkoittaa korkokantaa, jonka avulla nettokorko voidaan laskea suoraan

Esimerkki

Talletetaan 9000 euroa tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a. Laske koron ja nettokoron suuruus, kun talletusaika on kolme kuukautta.

Ratkaisuehdotus

Nyt korkokanta on

Ratkaisuehdotus

Nyt korkokanta on $i = 0{,}75\ \% = 0{,}0075$ ja nettokorkokanta

Ratkaisuehdotus

Nyt korkokanta on $i = 0{,}75\ \% = 0{,}0075$ ja nettokorkokanta $0{,}70i = 0{,}70 \cdot 0{,}0075 = 0,00525$. Talletusaika, ts. korkoaika, on 3/12 vuotta. Siten koron suuruus on

$$r = kit = 9000 \cdot 0,0075 \cdot \frac{3}{12} \approx 16,88$$

euroa ja nettokoron

$$9000 \cdot 0,00525 \cdot \frac{3}{12} \approx 11,81$$

euroa.

Esimerkki

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

Esimerkki

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma.

Esimerkki

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma. Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,036 = 0,0252$.

Esimerkki

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma. Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,036 = 0,0252$. Korkokausi on yksi vuosi ja korkoaika 4/12 vuotta.

Esimerkki

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma. Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,036 = 0,0252$. Korkokausi on yksi vuosi ja korkoaika 4/12 vuotta. Kaavan mukaan on oltava

$$150 = k \cdot 0,0252 \cdot \frac{4}{12} = k \cdot 0,0084,$$

Esimerkki

Mikä pääoma tuottaa neljässä kuukaudessa nettokorkoa 150 euroa, jos korkokanta on 3,6 % p.a.? Muista, että lähdevero on 30 %.

Ratkaisuehdotus

Olkoon k tuntematon pääoma. Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,036 = 0,0252$. Korkokausi on yksi vuosi ja korkoaika 4/12 vuotta. Kaavan mukaan on oltava

$$150 = k \cdot 0,0252 \cdot \frac{4}{12} = k \cdot 0,0084,$$

joten

$$k = \frac{150}{0,0084} \approx 17857,14$$

euroa.

Yksinkertainen korkolaskenta: lähdeveron pyöristyssääntö

Yksinkertainen korkolaskenta: lähdeveron pyöristyssääntö

Yksinkertainen korkolaskenta: lähdeveron pyöristyssääntö

Lähdeveroon liittyy erikoinen *pyöristyssääntö*: lähdevero lasketaan jokaisesta maksetusta korkoerästä täysin kymmenin sentein siten, että yli menevät sentit jätetään huomioimatta.

Yksinkertainen korkolaskenta: lähdeveron pyöristyssääntö

Lähdeveroon liittyy erikoinen *pyöristyssääntö*: lähdevero lasketaan jokaisesta maksetusta korkoerästä täysin kymmenin sentein siten, että yli menevät sentit jätetään huomioimatta.

Pyöristyssääntö jätetään usein huomioimatta tehtävien ratkaisuissa.

Yksinkertainen korkolaskenta: korkopäivät

Yksinkertainen korkolaskenta: korkopäivät

Koron laskeminen voi vaatia *korkopäivien lukumäärän* selvittämisen.

Yksinkertainen korkolaskenta: korkopäivät

Koron laskeminen voi vaatia *korkopäivien lukumäärän* selvittämisen.

Esimerkki

800 euron talletukselle maksetaan vuotuista korkoa 9 %. Kuinka paljon korkoa kertyy ajalta 2.4.–16.6.2014?

Yksinkertainen korkolaskenta: korkopäivät

Koron laskeminen voi vaatia *korkopäivien lukumäärän* selvittämisen.

Esimerkki

800 euron talletukselle maksetaan vuotuista korkoa 9 %. Kuinka paljon korkoa kertyy ajalta 2.4.–16.6.2014?

Korkoaikaa selvitettäessä talletuspäivää ei lasketa mukaan, nostopäivä lasketaan.

Ratkaisuehdotus

Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$. Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

Ratkaisuehdotus

Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$. Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30-2 = 28 kpl.

Ratkaisuehdotus

Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$. Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30-2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31

Ratkaisuehdotus

Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$. Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30–2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31
- Kesäkuulta päiviä kertyy 16

Yhteensä korkopäiviä kertyy 75, joten koron suuruus on

Ratkaisuehdotus

Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$. Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30–2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31
- Kesäkuulta päiviä kertyy 16

Yhteensä korkopäiviä kertyy 75, joten koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{365} = 10,36$$

euroa.

Ratkaisuehdotus

Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$. Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30–2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31
- Kesäkuulta päiviä kertyy 16

Yhteensä korkopäiviä kertyy 75, joten koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{365} = 10,36$$

euroa. Jos kyseessä on karkausvuosi, koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{366} = 10,33$$

euroa.

Ratkaisuehdotus

Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,09 = 0,063$. Lasketaan korkopäivien lukumäärät:

- Huhtikuussa on 30 päivää, joten huhtikuulta korkopäiviä kertyy 30–2 = 28 kpl.
- Toukokuulta päiviä kertyy 31
- Kesäkuulta päiviä kertyy 16

Yhteensä korkopäiviä kertyy 75, joten koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{365} = 10,36$$

euroa. Jos kyseessä on karkausvuosi, koron suuruus on

$$r = kit = 800 \cdot 0,063 \cdot \frac{75}{366} = 10,33$$

euroa. Tämä ei ole ainoa tapa laskea korkoajan osuutta vuodesta.

Yksinkertainen korkolasku

Korkoajan laskeminen (3 tapaa)

- *Todelliset/365*: todellinen päivien lkm, vuodessa 365 (366) päivää
- *Todelliset/360*: todellinen päivien lkm, vuodessa 360 päivää
- *30/360*: kuukaudessa 30 päivää, vuodessa 360 päivää

Yksinkertainen korkolasku

Korkoajan laskeminen (3 tapaa)

- *Todelliset/365*: todellinen päivien lkm, vuodessa 365 (366) päivää
- *Todelliset/360*: todellinen päivien lkm, vuodessa 360 päivää
- *30/360*: kuukaudessa 30 päivää, vuodessa 360 päivää

Yksinkertainen korkolasku

Esimerkki

Tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a., talletetaan tammikuun 13. päivä 700 euroa.

Yksinkertainen korkolasku

Esimerkki

Tilille, jonka korkokanta on 0,75 % p.a., talletetaan tammikuun 13. päivä 700 euroa. Laske kertyneen koron suuruus samana vuonna 7.9.

Ratkaisuehdotus

Lasketaan todellinen korkopäivien lukumäärä (välittämättä karkausvuosista).

- Tammikuussa päiviä kertyy 31-13 = 18 kpl.
- Helmikuussa päiviä on 28, maaliskuussa 31, huhtikuussa 30, toukokuussa 31, kesäkuussa 30
- Heinäkuussa ja elokuussa päiviä on 31
- Syyskuulta päiviä kertyy 7

Ratkaisuehdotus

Lasketaan todellinen korkopäivien lukumäärä (välittämättä karkausvuosista).

- Tammikuussa päiviä kertyy 31-13 = 18 kpl.
- Helmikuussa päiviä on 28, maaliskuussa 31, huhtikuussa 30, toukokuussa 31, kesäkuussa 30
- Heinäkuussa ja elokuussa päiviä on 31
- Syyskuulta päiviä kertyy 7

Yhteensä korkopäiviä kertyy siis 237 kpl.

Ratkaisuehdotus

Lasketaan todellinen korkopäivien lukumäärä (välittämättä karkausvuosista).

- Tammikuussa päiviä kertyy 31-13 = 18 kpl.
- Helmikuussa päiviä on 28, maaliskuussa 31, huhtikuussa 30, toukokuussa 31, kesäkuussa 30
- Heinäkuussa ja elokuussa päiviä on 31
- Syyskuulta päiviä kertyy 7

Yhteensä korkopäiviä kertyy siis 237 kpl. Koron suuruus on lähdevero huomioiden

$$r = kit = 700 \cdot 0,70 \cdot 0,0075 \cdot \frac{237}{360} \approx 0{,}66$$

tai

$$r = kit = 700 \cdot 0,70 \cdot 0,0075 \cdot \frac{237}{365} \approx 0{,}65$$

euroa.

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa.

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä,

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä, a_1 summan ensimmäinen termi ja

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä, a_1 summan ensimmäinen termi ja a_n summan viimeinen termi.

Aritmeettinen jono ja summa

Aritmeettinen jono

Lukujono on *aritmeettinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten erotus (etäisyys) on vakio.

Aritmeettinen summa

Aritmeettinen summa on aritmeettisen lukujonon (n ensimmäisen jäsenen) summa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2},$$

missä n on yhteenlaskettavien lukumäärä, a_1 summan ensimmäinen termi ja a_n summan viimeinen termi.

Aritmeettisen summan kaava on oivallinen työkalu, kun tarkastellaan toistuvia talletuksia yksinkertaisen korkolaskennan puitteissa.

Yksinkertainen korko – toistuvat talletukset

Esimerkki

Tilille, jonka korkokanta on 1,5 % p.a, talletetaan maaliskuusta alkaen 100 euroa kunkin kuukauden lopussa. Viimeinen talletus tehdään joulukuun lopussa, jonka jälkeen tilille maksetaan korko. Laske koron ja nettokoron suuruus.

Yksinkertainen korko

Ratkaisuehdotus

- Maaliskuun talletus kasvaa korkoa huhti–joulukuun eli 9 kk
- Huhtikuun talletus kasvaa korkoa 8 kk
- Toukokuun talletus kasvaa korkoa 7 kk jne.
- Marraskuun talletus kasvaa korkoa yhden kuukauden
- Joulukuun talletus ei kasva korkoa

Yksinkertainen korko

Ratkaisuehdotus

Edellisen perusteella koron suuruus on

Yksinkertainen korko

Ratkaisuehdotus

Edellisen perusteella koron suuruus on

$$
\begin{aligned}
&100 \cdot 0,015 \cdot \frac{8}{12} + 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{7}{12} + \ldots + 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{12} \\
&= 100 \cdot 0,015 \cdot \left(\frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \cdots + \frac{1}{12} \right) \\
&= 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{12} \cdot (9 + 8 + \cdots + 1) \\
&= \frac{1,5}{12} \cdot (9 + 8 + \cdots + 1) \\
&= \frac{1,5}{12} \cdot \left(9 \cdot \frac{9+1}{2} \right) = 5,625
\end{aligned}
$$

euroa.

Yksinkertainen korko

Ratkaisuehdotus

Edellisen perusteella koron suuruus on

$$
\begin{aligned}
&100 \cdot 0,015 \cdot \frac{8}{12} + 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{7}{12} + \ldots + 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{12} \\
&= 100 \cdot 0,015 \cdot \left(\frac{9}{12} + \frac{8}{12} + \cdots + \frac{1}{12} \right) \\
&= 100 \cdot 0,015 \cdot \frac{1}{12} \cdot (9 + 8 + \cdots + 1) \\
&= \frac{1,5}{12} \cdot (9 + 8 + \cdots + 1) \\
&= \frac{1,5}{12} \cdot \left(9 \cdot \frac{9+1}{2} \right) = 5,625
\end{aligned}
$$

euroa. Lähdeveron jälkeen nettokoroksi jää $0,70 \cdot 5,625 = 3,94$ euroa.

Koronkorko

Esimerkki

Säästötilille, jonka korkokanta on 1,5 % p.a. talletetaan 1500 euroa. Kuinka paljon tililtä on nostettavissa rahaa viiden vuoden kuluttua, jos lähdevero

(a) jätetään huomiotta

(b) huomioidaan?

Koronkorko

Kasvanut pääoma koronkoron tapauksessa

$$K = kq^n$$

Kasvanut pääoma K riippuu alkuperäisestä pääomasta k, korkotekijästä q ja korkokausien lukumäärästä n

Yllä korkotekijä (tai korkokerroin) q on korkokannasta saatava prosenttikerroin.

Ratkaisuehdotus

(a) Jos lähdevero jätetään huomiotta, korkotekijä on $1 + 0,015 = 1,015$ ja kasvanut pääoma $K = 1500 \cdot 1,015^5 \approx 1615,93$ euroa.

(b) Jos lähdevero huomioidaan, korkotekijä on $1 + 0,7 \cdot 0,015 = 1,0105$. Silloin kasvanut pääoma on $K = 1500 \cdot 1,0105^5 \approx 1580,42$ euroa.

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa geometrisen jonon (n ensimmäisen jäsenen) summaa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad q \neq 1,$$

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa geometrisen jonon (n ensimmäisen jäsenen) summaa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad q \neq 1,$$

missä n on summattavien lukumäärä,

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa geometrisen jonon (n ensimmäisen jäsenen) summaa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \qquad q \neq 1,$$

missä n on summattavien lukumäärä, a_1 ensimmäinen summattava

Geometrinen jono ja summa

Geometrinen jono

Lukujono on *geometrinen*, jos sen peräkkäisten jäsenten suhde (osamäärä) on vakio.

Geometrinen summa

Geometrinen summa tarkoittaa geometrisen jonon (n ensimmäisen jäsenen) summaa. Se saadaan kaavasta

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \qquad q \neq 1,$$

missä n on summattavien lukumäärä, a_1 ensimmäinen summattava ja q suhdeluku.

Pääsykoetehtävä

Eräs tuotantolaitos tuottaa haitallisia päästöjä tänä vuonna 27 tonnia vuodessa. Päästöjä on päätetty pienentää 5 % vuodessa. Jos oletetaan, että tuotantolaitos jatkaa toimintaansa ikuisesti, niin päästöjä syntyy yhteensä tämä vuosi mukaan lukien

1. 420 tonnia
2. 540 tonnia
3. 600 tonnia
4. enemmän kuin 600 tonnia

(Pääsykoetehtävä 48/2014)

Koronkorko: toistuvat talletukset

Esimerkki

Säästötilille, jonka korkokanta on 2,7 % p.a. talletetaan 900 euroa vuosittain aina vuoden alussa. Kuinka paljon tililtä on nostettavissa rahaa viiden vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta? Kuinka paljon korkoa on kertynyt yhteensä?

Ratkaisuehdotus

Ratkaisuehdotus

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on
$0,7 \cdot 0,027 = 0,0189.$

Ratkaisuehdotus

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on $0,7 \cdot 0,027 = 0,0189$. Siis korkotekijä on $1 + 0,0189 = 1,0189$.

Ratkaisuehdotus

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on $0,7 \cdot 0,027 = 0,0189$. Siis korkotekijä on $1 + 0,0189 = 1,0189$.

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee $1,0189^5$-kertaiseksi

Ratkaisuehdotus

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on $0,7 \cdot 0,027 = 0,0189$. Siis korkotekijä on $1 + 0,0189 = 1,0189$.

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee $1,0189^5$-kertaiseksi
- Toinen talletus kasvaa korkoa 4 kertaa, eli tulee $1,0189^4$-kertaiseksi

Ratkaisuehdotus

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on $0,7 \cdot 0,027 = 0,0189$. Siis korkotekijä on $1 + 0,0189 = 1,0189$.

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee $1,0189^5$-kertaiseksi
- Toinen talletus kasvaa korkoa 4 kertaa, eli tulee $1,0189^4$-kertaiseksi
- Kolmas talletus kasvaa korkoa 3 kertaa, eli tulee $1,0189^3$-kertaiseksi

Ratkaisuehdotus

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on $0,7 \cdot 0,027 = 0,0189$. Siis korkotekijä on $1 + 0,0189 = 1,0189$.

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee $1,0189^5$-kertaiseksi
- Toinen talletus kasvaa korkoa 4 kertaa, eli tulee $1,0189^4$-kertaiseksi
- Kolmas talletus kasvaa korkoa 3 kertaa, eli tulee $1,0189^3$-kertaiseksi
- Neljäs talletus kasvaa korkoa 2 kertaa, eli tulee $1,0189^2$-kertaiseksi

Ratkaisuehdotus

Korkokanta on 0,027, joten nettokorkokanta on $0,7 \cdot 0,027 = 0,0189$. Siis korkotekijä on $1 + 0,0189 = 1,0189$.

- Ensimmäinen talletus kasvaa korkoa 5 vuotta, eli tulee $1,0189^5$-kertaiseksi
- Toinen talletus kasvaa korkoa 4 kertaa, eli tulee $1,0189^4$-kertaiseksi
- Kolmas talletus kasvaa korkoa 3 kertaa, eli tulee $1,0189^3$-kertaiseksi
- Neljäs talletus kasvaa korkoa 2 kertaa, eli tulee $1,0189^2$-kertaiseksi
- Viides talletus kasvaa korkoa yhden kerran, eli tulee $1,0189$-kertaiseksi

Ratkaisuehdotus

Kaiken kaikkiaan tilillä on viiden vuoden kuluttua rahaa

$$900 \cdot 1,0189^5 + 900 \cdot 1,0189^4 + 900 \cdot 1,0189^3 + 900 \cdot 1,0189^2 + 900 \cdot 1,0189$$

euroa, eli

Ratkaisuehdotus

Kaiken kaikkiaan tilillä on viiden vuoden kuluttua rahaa

$$900 \cdot 1,0189^5 + 900 \cdot 1,0189^4 + 900 \cdot 1,0189^3 + 900 \cdot 1,0189^2 + 900 \cdot 1,0189$$

euroa, eli

$$\begin{aligned} &900(1,0189^5 + 1,0189^4 + 1,0189^3 + 1,0189^2 + 1,0189) \\ =&900(1,0189 + 1,0189^2 + 1,0189^3 + 1,0189^4 + 1,0189^5) \\ =&900 \cdot 1,0189 \cdot \frac{1 - 1,0189^5}{1 - 1,0189} \\ \approx&4761,67 \end{aligned}$$

euroa.

Ratkaisuehdotus

Kaiken kaikkiaan tilillä on viiden vuoden kuluttua rahaa

$$900 \cdot 1,0189^5 + 900 \cdot 1,0189^4 + 900 \cdot 1,0189^3 \\ + 900 \cdot 1,0189^2 + 900 \cdot 1,0189$$

euroa, eli

$$\begin{aligned} &900(1,0189^5 + 1,0189^4 + 1,0189^3 + 1,0189^2 + 1,0189) \\ =&900(1,0189 + 1,0189^2 + 1,0189^3 + 1,0189^4 + 1,0189^5) \\ =&900 \cdot 1,0189 \cdot \frac{1 - 1,0189^5}{1 - 1,0189} \\ \approx&4761,67 \end{aligned}$$

euroa. Korkoa on saatu $4761,68 - 5 \cdot 900 = 261,68$ euroa.

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Esimerkki

Avaat vuoden alussa tilin, jolle talletat joka kuukauden alussa 100 euroa. Tilin korkokanta on 2 %. Kuinka paljon rahaa tilillä on kolmen vuoden kuluttua korkojen lisäämisen jälkeen? Kuinka paljon korkoa on kertynyt yhteensä? Huomioi 30 % lähdevero.

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Ratkaisuehdotus

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta.

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta. Tammikuussa talletetun summan korkoaika on 12/12 vuotta, helmikuussa talletetun summan 11/12 vuotta jne.

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta. Tammikuussa talletetun summan korkoaika on 12/12 vuotta, helmikuussa talletetun summan 11/12 vuotta jne. Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,02 = 0,014$, joten vuoden lopussa tilille maksettava korko on

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta. Tammikuussa talletetun summan korkoaika on 12/12 vuotta, helmikuussa talletetun summan 11/12 vuotta jne. Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,02 = 0,014$, joten vuoden lopussa tilille maksettava korko on

$$\begin{aligned}
&100 \cdot 0,014 \cdot \frac{12}{12} + 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \\
=&100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \ldots + 1) = 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 \\
=&9,10
\end{aligned}$$

euroa.

Koronkorkolaskenta: toistuvat talletukset

Ratkaisuehdotus

Tarkastellaan ensin yhden vuoden tilannetta. Tammikuussa talletetun summan korkoaika on 12/12 vuotta, helmikuussa talletetun summan 11/12 vuotta jne. Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,02 = 0,014$, joten vuoden lopussa tilille maksettava korko on

$$\begin{aligned}
&100 \cdot 0,014 \cdot \frac{12}{12} + 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{11}{12} + \ldots + 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \\
=&100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \cdot (12 + 11 + \ldots + 1) = 100 \cdot 0,014 \cdot \frac{1}{12} \cdot 78 \\
=&9,10
\end{aligned}$$

euroa. Tilille vuosittain talletettava summa (1200 euroa) kasvaa siis korkoa 9,10 euroa samana vuonna.

Ratkaisuehdotus

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna.

Ratkaisuehdotus

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna. Näin ollen tilillä on loppujen lopuksi, eli kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, rahaa

Ratkaisuehdotus

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna. Näin ollen tilillä on loppujen lopuksi, eli kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, rahaa

$$1209,10 \cdot 1,014^2 + 1209,10 \cdot 1,014 + 1209,10 \approx 3678,32$$

euroa.

Ratkaisuehdotus

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna. Näin ollen tilillä on loppujen lopuksi, eli kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, rahaa

$$1209,10 \cdot 1,014^2 + 1209,10 \cdot 1,014 + 1209,10 \approx 3678,32$$

euroa. Kaiken kaikkiaan tilille on talletettu $3 \cdot 12 \cdot 100 = 3600$ euroa.

Ratkaisuehdotus

Kukin näin laskettu vuosittainen summa kasvaa seuraavan kerran korkoa vasta seuraavana vuonna. Näin ollen tilillä on loppujen lopuksi, eli kolmen vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, rahaa

$$1209,10 \cdot 1,014^2 + 1209,10 \cdot 1,014 + 1209,10 \approx 3678,32$$

euroa. Kaiken kaikkiaan tilille on talletettu $3 \cdot 12 \cdot 100 = 3600$ euroa. Korkoa on siis kertynyt yhteensä 78,32 euroa.

Diskonttaus

Diskonttaus

Esimerkki

Kuinka suuri summa pitäisi tallettaa pankkitilille, jotta neljän vuoden kuluttua siltä olisi nostettavissa 1 000 euroa? Tilin vuotuinen korko on 4 %. Ratkaise tehtävä

(a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.

(b) lähdevero huomioiden.

Diskonttaus

Esimerkki

Kuinka suuri summa pitäisi tallettaa pankkitilille, jotta neljän vuoden kuluttua siltä olisi nostettavissa 1 000 euroa? Tilin vuotuinen korko on 4 %. Ratkaise tehtävä

(a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.

(b) lähdevero huomioiden.

Korkokausien aikana kertyneen koron poistamista pääoman arvosta eli alkuperäisen pääoman selvittämistä kutsutaan *diskonttaukseksi*.

Diskonttaus

Esimerkki

Kuinka suuri summa pitäisi tallettaa pankkitilille, jotta neljän vuoden kuluttua siltä olisi nostettavissa 1 000 euroa? Tilin vuotuinen korko on 4 %. Ratkaise tehtävä

(a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.

(b) lähdevero huomioiden.

Korkokausien aikana kertyneen koron poistamista pääoman arvosta eli alkuperäisen pääoman selvittämistä kutsutaan *diskonttaukseksi*. Diskonttauksella saatua alkuperäistä pääomaa nimitetään *nykyarvoksi*.

Ratkaisuehdotus

Olkoon alkuperäinen pääoma k.

(a) Korkokerroin on $1,04$, joten neljän vuoden kuluttua tililtä on nostettavissa $1,04^4 k$ euroa.

Ratkaisuehdotus

Olkoon alkuperäinen pääoma k.

(a) Korkokerroin on $1,04$, joten neljän vuoden kuluttua tililtä on nostettavissa $1,04^4 k$ euroa. Nyt

$$1,04^4 k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1000}{1,04^4} \approx 854,80$$

euroa.

(b) Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,04 = 0,028$, joten korkokerroin on $1,028$, kun lähdevero otetaan huomioon.

Ratkaisuehdotus

Olkoon alkuperäinen pääoma k.

(a) Korkokerroin on $1,04$, joten neljän vuoden kuluttua tililtä on nostettavissa $1,04^4 k$ euroa. Nyt

$$1,04^4 k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1000}{1,04^4} \approx 854,80$$

euroa.

(b) Nettokorkokanta on $0,70 \cdot 0,04 = 0,028$, joten korkokerroin on $1,028$, kun lähdevero otetaan huomioon. Jotta tilillä olisi neljän vuoden kuluttua 1000 euroa, täytyy olla

$$1,028^4 \cdot k = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1000}{1,028^4} \approx 895,42$$

euroa.

Diskonttaus: nykyarvo koronkoron tapauksessa

Diskonttaus: nykyarvo koronkoron tapauksessa

Nykyarvo eli alkuperäinen pääoma k koronkoron tapauksessa on

$$k = Kq^{-n} = \frac{K}{q^n},$$

missä K on kasvanut pääoma, q on korkotekijä ja $n \geq 1$ on korkokausien lukumäärä.

Diskonttaus: nykyarvo koronkoron tapauksessa

Nykyarvo eli alkuperäinen pääoma k koronkoron tapauksessa on

$$k = Kq^{-n} = \frac{K}{q^n},$$

missä K on kasvanut pääoma, q on korkotekijä ja $n \geq 1$ on korkokausien lukumäärä.

Kerroin $q^{-n} = \dfrac{1}{q^n}$ on nimeltään *diskonttaustekijä*.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

- Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

- Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten.
- Investoinnin kannattavuuden arvioimiseen voidaan käyttää *nykyarvomenetelmää*, jossa kaikki menot ja tulot diskontataan investoinnin alkuhetkeen.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

- Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten.
- Investoinnin kannattavuuden arvioimiseen voidaan käyttää *nykyarvomenetelmää*, jossa kaikki menot ja tulot diskontataan investoinnin alkuhetkeen.
- Investointi on kannattava, jos tulot ovat suuremmat kuin menot.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

- Investointi tarkoittaa välineiden tai maan hankkimista tuotantoa tai toimintaa varten.
- Investoinnin kannattavuuden arvioimiseen voidaan käyttää *nykyarvomenetelmää*, jossa kaikki menot ja tulot diskontataan investoinnin alkuhetkeen.
- Investointi on kannattava, jos tulot ovat suuremmat kuin menot.
- Diskonttauksessa käytetty korkokanta voi määräytyä esimerkiksi yrityksen omista tuottovaatimuksista tai pankin korkokannasta.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

- *Perushankintakustannus*: investoinnin alkuun liittyvä kertakustannus.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

- *Perushankintakustannus*: investoinnin alkuun liittyvä kertakustannus.
- *Investointiaika*: aika, jolloin investoinnista oletetaan saatavan hyötyä.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

Investointilaskelmiin liittyviä peruskäsitteitä ovat

- *Perushankintakustannus*: investoinnin alkuun liittyvä kertakustannus.
- *Investointiaika*: aika, jolloin investoinnista oletetaan saatavan hyötyä.
- *Jäännösarvo*: investoinnin arvo investointiajan lopussa.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

Esimerkki

Yritys harkitsee uusien monitoimikopiokoneiden hankkimista. Kopiokoneiden yhteishinta on 6 000 euroa. Niiden käyttöiäksi on arvioitu 5 vuotta ja jälleenmyyntiarvoksi 5 % hankintahinnasta. Kopiokoneiden arvellaan vähentävän kustannuksia kolmena ensimmäisenä vuonna 1 500 euroa vuodessa ja kahtena viimeisenä vuonna 1 000 euroa vuodessa.

Investointilaskelmia nykyarvomenetelmällä

Esimerkki

Yritys harkitsee uusien monitoimikopiokoneiden hankkimista. Kopiokoneiden yhteishinta on 6 000 euroa. Niiden käyttöiäksi on arvioitu 5 vuotta ja jälleenmyyntiarvoksi 5 % hankintahinnasta. Kopiokoneiden arvellaan vähentävän kustannuksia kolmena ensimmäisenä vuonna 1 500 euroa vuodessa ja kahtena viimeisenä vuonna 1 000 euroa vuodessa.

Onko kopiokoneiden hankkiminen yritykselle kannattavaa, jos hankinta rahoitetaan lainalla, jonka vuosikorko on 3 %?

Ratkaisuehdotus

Säästöt olisivat nykyhetkessä

$$\frac{1500}{1,03} + \frac{1500}{1,03^2} + \frac{1500}{1,03^3} + \frac{1000}{1,03^4} + \frac{1000}{1,03^5} \approx 5994,01$$

euroa ja jälleenmyyntiarvo

$$0,05 \cdot \frac{6000}{1,03^5} \approx 258,78$$

euroa. Tuotot olisivat nykyhetkessä yhteensä 6252,80 euroa. Koska lainaa tarvitsee ottaa vain 6000 euroa, investointi on tämän menetelmän valossa kannattava.

Nelilaskintekniikkaa: eksponentin ratkaiseminen

Nelilaskintekniikkaa: eksponentin ratkaiseminen

Esimerkki

Missä ajassa tilille talletettu 500 euroa on kasvanut 600 euroksi, jos tilin korkokanta on 4 % p.a.? Ratkaise tehtävä

(a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.

(b) 30 % lähdevero huomioiden.

Nelilaskintekniikkaa: eksponentin ratkaiseminen

Esimerkki

Missä ajassa tilille talletettu 500 euroa on kasvanut 600 euroksi, jos tilin korkokanta on 4 % p.a.? Ratkaise tehtävä

(a) olettaen, että lähdeveroa ei peritä.

(b) 30 % lähdevero huomioiden.

Kysytyn eksponentin eli korkokausien määrän n voi selvittää kokeilemalla!

Nelilaskintekniikkaa: kantaluvun selvittäminen

Esimerkki

Talletit säästötilille 5 000 euroa. Kolmen vuoden kuluttua nostit tilisi tyhjäksi ja sait 5 950 euroa. Oletetaan, että tilillä ei ollut koronmaksun lisäksi muita tilitapahtumia. Mikä oli tilin

(a) nettokorkokanta

(b) bruttokorkokanta?

Nelilaskintekniikkaa: kantaluvun selvittäminen

Esimerkki

Talletit säästötilille 5 000 euroa. Kolmen vuoden kuluttua nostit tilisi tyhjäksi ja sait 5 950 euroa. Oletetaan, että tilillä ei ollut koronmaksun lisäksi muita tilitapahtumia. Mikä oli tilin

(a) nettokorkokanta

(b) bruttokorkokanta?

Myös kantaluvun eli korkotekijän q voi selvittää kokeilemalla!

Nelilaskintekniikkaa: kantaluvun selvittäminen

Esimerkki

Talletit säästötilille 5 000 euroa. Kahdeksan vuoden kuluttua nostit tilisi tyhjäksi ja sait 6 250 euroa. Oletetaan, että tilillä ei ollut koronmaksun lisäksi muita tilitapahtumia. Mikä oli tilin

(a) nettokorkokanta

(b) bruttokorkokanta?

Nelilaskintekniikkaa: kantaluvun selvittäminen

Esimerkki

Talletit säästötilille 5 000 euroa. Kahdeksan vuoden kuluttua nostit tilisi tyhjäksi ja sait 6 250 euroa. Oletetaan, että tilillä ei ollut koronmaksun lisäksi muita tilitapahtumia. Mikä oli tilin

(a) nettokorkokanta

(b) bruttokorkokanta?

Myös kantaluvun eli korkotekijän q voi selvittää kokeilemalla!