Financijska matematika

Doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb,20.4.2018.

1.3. Opća vremenska struktura kamatnih stopa

Uvod i motivacija: od krivulje prinosa do vremenske strukture kamatnih stopa

- **Krivulja prinosa** je funkcija prinosa do dospijeća u ovisnosti o dospijeću za sve kuponske i beskuponske obveznice (all Treasury bonds)
  - Ukoliko je specificirana za svaku vrijednost *t*, krivulja prinosa neprekidna je funkcija vremena ***t*.**
  - Povezuje prinos do dospijeća trezorskih obveznica sa odgovarajućim dospijećima

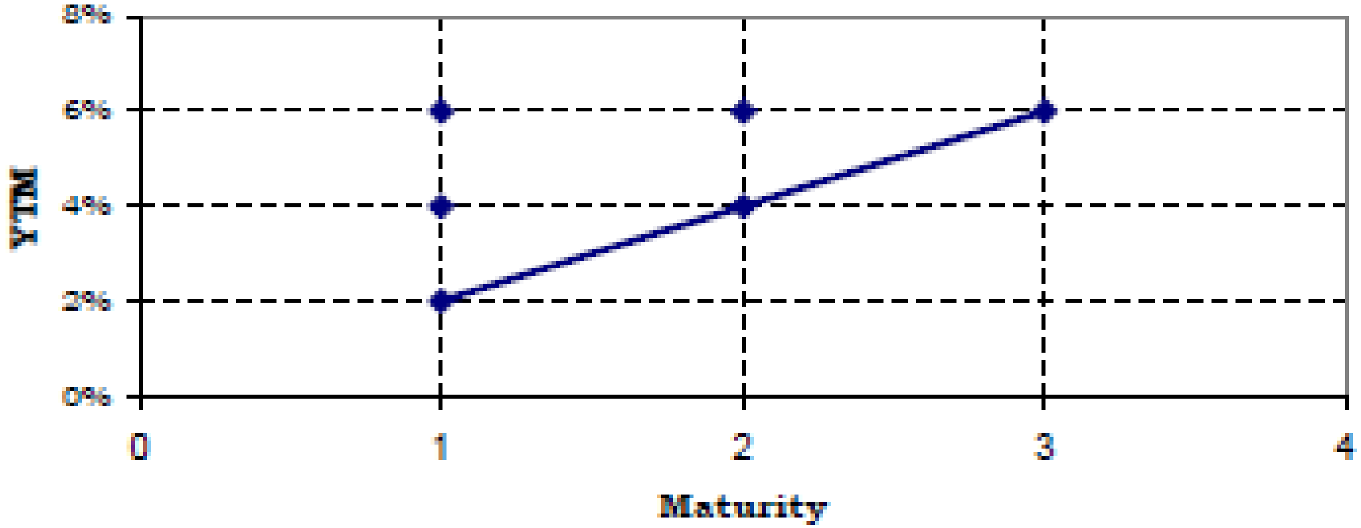
Zašto je krivulja prinosa "netočna"?

- Nije model za vrednovanje: cijena određuje PDD, a ne obrnuto!

- **Narušava** osnovni princip u financijama (princip nearbitraže): dva novčana toka sa istim dospijećem i koje isplaćuje isti izdavač, moraju *proizvesti* isti povrat/prinos.

Primjer.

- Krivulja prinosa se sastoji od tri obveznice (dospijeća 1, 2 i 3).



- Promotrimo obveznice s dospijećima 1 i 2: obje obveznice isplaćuju novčani tok u t=1. Isti je izdavač (Vlada), i dospijeće novčanog toka (1), ali se diskontiraju po **različitim stopama** (2% i 4%)

- **Cilj**: analizirati model cijena obveznica bez pretpostavke da je *prinos y u nekom trenutku*, nezavisan o dospijeću
- Cijene $B(t,T)$ beskuponskih obveznica s različitim dospijećima određuju familiju prinosa $y(t,T)$ pomoću relacije

$$B(t,T) = e^{-(T-t)y(t,T)}.$$

- Prinosi $y(t,T)$ moraju biti pozitivni kako bi cijena $B(t,T)$ bila manja od (nominalne) vrijednosti 1 za $t < T$

- Funkcija $y(t,T)$ dviju varijabli $t < T$ zove se **vremenska struktura kamatnih stopa** (engl. Term structure of interest rates)**.**

- Prinosi $y(0,T)$ koji su određeni trenutnim cijenama na tržištu zovu se **spot stope.**

- Vremenska struktura kamatnih stopa opisuje kako, u određenom vremenskom trenutku, **prinos do dospijeća** ovisi o **dospijeću.**

- **Vremenska struktura kamatnih stopa** je funkcija prinosa do dospijeća u ovisnosti o dospijeću za (kratkoročne) **beskuponske obveznice** (Treasury zero-coupon bonds), koje su obično kratkih dospijeća

  - Povezuje prinos do dospijeća beskuponskih obveznica sa odgovarajućim dospijećima
  - Kamatne stope vremenske strukture nazivaju se **nula kupon stope** ili **spot stope**.
  - Primjena vremenske strukture kamatnih stopa:
    - Predviđanja kamatnih stopa
    - Vrednovanje obveznica i izvedenica kamatnih stopa
    - Management portfelja obveznica

Spot stope ili nula stope (cont)

- ***n*-spot stopa** je kamatna stopa koja označava povrat na investiciju koja počinje *danas* i traje **točno *n* godina**
  - **Nema nikakvih isplata** u međuvremenu

- **Primjer.** Ukoliko je 5-godišnja spot stopa 5%, tada to znači da 100 novčanih jedinica investiranih danas, za 5 godina od danas imaju vrijednost:

$$100 \cdot e^{0.05 \cdot 5} = 128.4$$

- **Problem u praksi:** Većina kamatnih stopa koje opažamo na tržištu nisu nužno spot-stope.

  - Promotrimo 5-godišnju državnu obveznicu sa kuponom 6%.
  - Cijena takve obveznice ne određuje nužno 5-godišnju spot stopu, budući da se neki povrat/prinos na obveznicu realizira u obliku kupona **prije kraja 5. godine**

- Kako onda odrediti vremensku strukturu kamatnih stopa?

1.3.1. Procjena vremenske strukture kamatnih stopa

- Jedan od načina određivanja spot-stopa je promatrati prinose na tzv. STRIPS (Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities)
  - STRIPS: sintetički stvorene beskuponske obveznice od prodaje kupona kuponske obveznice, odvojeno od nominalne vrijednosti.
  - Prvi kuponski *stripping* 1982: Merrill Lynch i Salomon Brothersi u SAD-u.
  - Od 1998 *stripping* je reguliran i u Italiji

- STRIPS stope nisu spot stope, ali su često doista slične, osobito za **kraća dospijeća.**

Napomena.

- Kako bi se odredila <u>inicijalna vremenska struktura</u>, potrebno je znati cijene beskuponskih obveznica

- No, za duža dospijeća (preko godine dana) moguće je da se trguje samo kuponskim obveznicama stoga je potrebno napraviti **dekompoziciju** kuponskih obveznica u beskuponske obveznice <u>različitih dospijeća</u> (STRIPS program, 1985)

“Bootstrapping”

- *Bootstrapping* pristup podrazumijeva analizu **kuponske obveznice kao portfelj beskuponskih obveznica**, čije su nominalne vrijednosti jednake vrijednostima pojedinog novčanog toka
- **Postupak:**
  - Rekurzivno rješavanje jednadžbi: u svakoj sljedećoj jednadžbi koristimo rješenje iz prethodnog koraka
  - Ukoliko krivulja prinosa ima:
    - Pozitivni koeficijent smjera: vremenska struktura kamatnih stopa je “više pozitivna”
    - Negativni koeficijent smjera: vremenska struktura kamatnih stopa je “više negativna”
  - Ukoliko je krivulja prinosa **ravna**, takva je i vremenska struktura.

- **Primjer.** Analiziramo sljedeće tržište sastavljeno od četiri obveznice

Obveznica	Cijena	Dospijeće	Kuponska stopa	PDD	Spot stopa
B1	98.04	1	0%	2%	2%
B2	94.26	2	0%	3%	3%
B3	102.78	3	5%	4%	**?**
B4	100	4	5%	5%	**?**

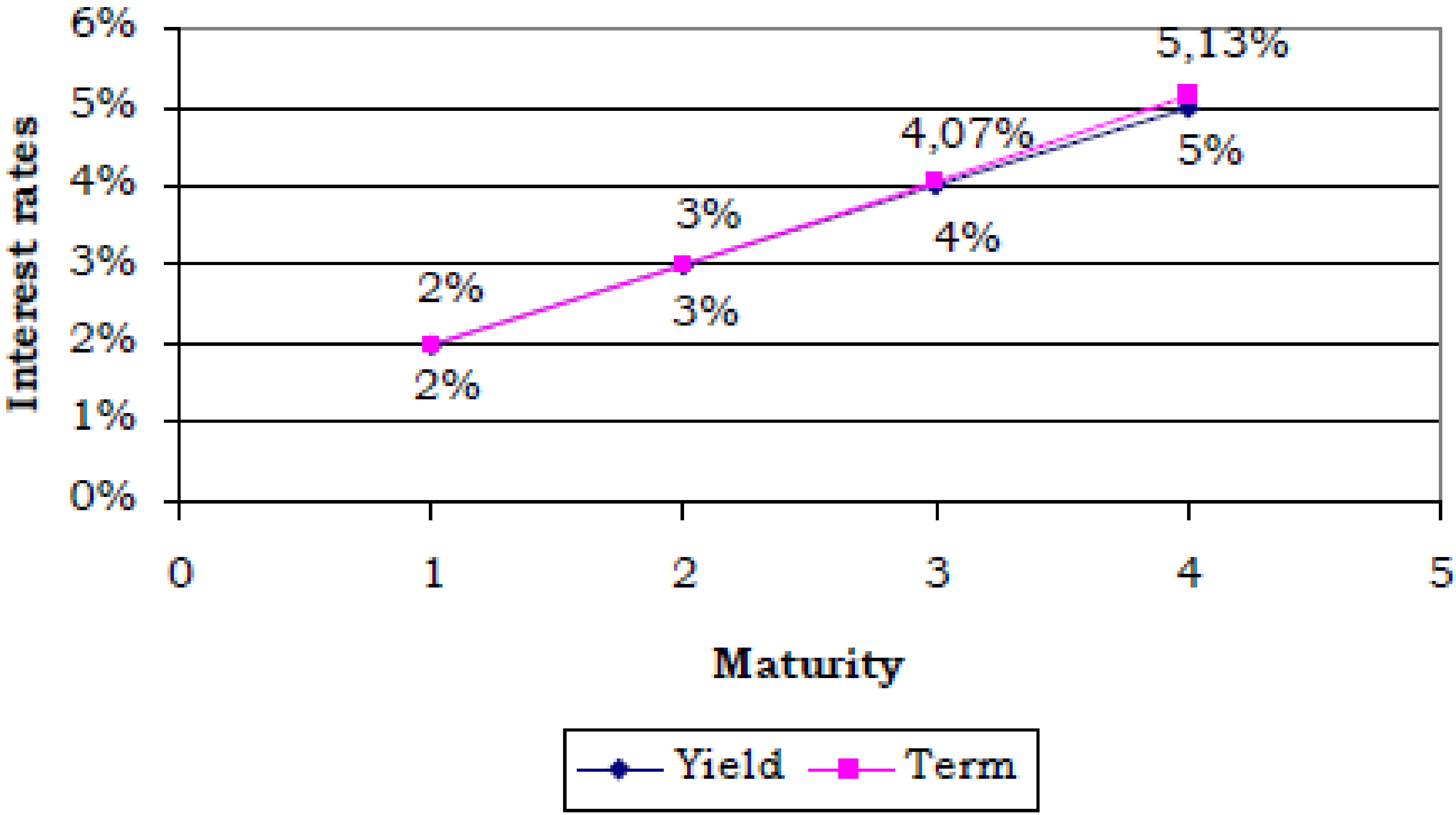
- **PRINOS:**

$$102{,}78 = \frac{5}{(1+4\%)} + \frac{5}{(1+4\%)^2} + \frac{105}{(1+4\%)^3}$$

- **VREMENSKA STRUKTURA:**

$$102{,}78 = \frac{5}{(1+2\%)} + \frac{5}{(1+3\%)^2} + \frac{105}{(1+r_3\%)^3} \Rightarrow r^3 = 4.07\%$$

- Krivulja prinosa i vremenska struktura kamatnih stopa



"Matrična inverzija"

- Nije druga metodologija u odnosu na "bootstrapping", već drugačiji pristup za dobivanje istih rezultata
  - 1. Koristimo diskontne faktore s_t :

$$s_t := \frac{1}{1+r_t}; \qquad \text{Tada vrijedi :}$$

$$102.78 = 5 \cdot s_1 + 5 \cdot s_2^2 + 105 \cdot s_3^3$$
$$= 5 \cdot 98.04\% + 5 \cdot 94.26\% + 105 \cdot 88.72\%$$

  - 2. Pomoću vektorskog zapisa:

$$102.78 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 105 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 98.04 \\ 94.26 \\ 88.72 \end{bmatrix}$$

- 3. Zapis cijelog tržišta u **matričnom obliku**:

$$\begin{bmatrix} 98.04 \\ 94.26 \\ 102.78 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 105 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 105 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2^2 \\ s_3^3 \\ s_4^4 \end{bmatrix},$$ odnosno

$$P = F \cdot S$$

$$P = F \cdot S \Rightarrow S = F^{-1} \cdot P,$$ pri čemu je

$$F \cdot F^{-1} = F^{-1} \cdot F = I$$

- Rješenje matrične jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2^2 \\ s_3^3 \\ s_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0005 & -0.0005 & 0.0095 & 0 \\ -0.0005 & -0.0005 & -0.0005 & 0.0095 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 98.04 \\ 94.26 \\ 102.78 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98.04\% \\ 94.26\% \\ 88.72\% \\ 81.86\% \end{bmatrix}$$

$$S_4 = s_4^4$$

$$r_4 = S_4^{-\frac{1}{4}} - 1 = 5.13\%$$

- **Napomena** 1. Ukoliko želimo invertirati matricu novčanih tokova u prethodnom primjeru, potrebno je da ista bude **kvadratna.**
  - Drugim riječima, potrebno je imati isti broj obveznica kao i broj spot stopa

- **Napomena 2.** Pri računanju cijene obveznica, trgovci obveznicama ponekad koriste **istu diskontnu stopu** za diksontiranje svih novčanih tokova obveznice.
  - No, **precizniji pristup** bi bio korištenje <u>različitih spot-stopa</u> za svaki novčani tok.

- **Inicijalna vremenska struktura $y(0,T)$** koja se sastoji od spot stopa je funkcija jedne varijable T.

- Ukoliko je inicijalna vremenska struktura ***ravna*** tada su prinosi nezavisni o dospijeću.

- **Cijena kuponske obveznice** koristeći spot stope jednaka je sadašnjoj vrijednosti budućih isplata,

$$C_K = K_1 e^{-t_1 y(0,t_1)} + K_2 e^{-t_2 y(0,t_2)} + \ldots + \left(K_N + N\right) e^{-t_N y(0,t_N)}$$

pri čemu su $K_1,\ldots,K_N$ iznosi kupona koji dospijevaju u vremenima $t_1 < \ldots < t_N$, a N nominalna vrijednost s dospijećem T_N.

Primjer. Računanje cijena obveznica pomoću spot-stopa.

- Pretpostavimo da promatramo dvogodišnju državnu obveznicu nominalne vrijednosti 100 koja isplaćuje polugodišnje kupone 6%. Nadalje, pretpostavimo da su spot stope dane prema sljedećoj tablici:

Dospijeće (godine)	Spot stopa (%)
0.5	5
1	5.8
1.5	6.4
2	6.8

- Tada je teoretska cijena obveznice jednaka:

$$3e^{-0.05x0.5} + 3e^{-0.058x1} + 3e^{-0.064x1.5} + 103e^{-0.068x2} = 98.39$$

- Označimo sa $B(0,T)$ cijenu beskuponske obveznice nominalne vrijednosti 1 s dospijećem T.
- Vrijedi:

$$B(0,0) = 1$$

$$B(0,+\infty) = 0$$

$$B(0,T) > B(0,T+1)$$

Cilj: Investiranje novca od trenutka s do t, $0 \leq s \leq t \leq T$

tako što želimo **danas** konstruirati portfelj koji nam to omogućava.

- *Izdamo* $\dfrac{B(0,t)}{B(0,s)}$ beskuponskih jediničnih obveznica s dospijećem s čija je cijena $B(0,s)$

- Kupimo jednu beskuponsku jediničnu obveznicu s dospijećem t cijene $B(0,t)$
  - novčani tok u trenutku 0 jednak je nula

- U trenutku *s* potrebno je isplatiti nominalnu vrijednost obveznice s dospijećem *s* za svaku obveznicu koja je *izdana* u trenutku 0; ukupni je trošak jednak $B(0,t)/\,B(0,s)$

- U trenutku *t* za svaku beskuponsku obveznicu kupljenu u trenutku 0 s dospijećem *t*, bit će isplaćena (nominalna) vrijednost 1

- Drugim riječima, u trenutku *s* potrebno je platiti $\boldsymbol{B(0,t)/\,B(0,s)}$ kako bi se dobila **jedna** novčana jedinica u trenutku *t*

- U skladu s prethodnim, na izraz $\dfrac{B(0,t)}{B(0,s)}$ može se gledati kao na **diskontni** faktor od trenutka t do s, koji je određen u uvjetima na tržištu **u trenutku 0**, tj.

$$\boxed{B_0(s,t) := \frac{B(0,t)}{B(0,s)}, \quad s < t}$$

Izraz $B_0(s,t)$ zvat ćemo ***unaprijednom cijenom.***

- Funkciju $B_0(s,t)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ zovemo **vremenska struktura** cijena beskuponskih obveznica (tržišnih diskontnih faktora).

- **Napomena**. (Pretpostavka nearbitraže)

U trenutku 0 može se investirati novac od trenutka 0 do t plaćajući *danas* $B(0,t)$ za svaku novčanu jedinicu koja će se dobiti u trenutku t.

- Alternativno, može se investirati novac od trenutka 0 do trenutka $s < t$, plaćajući *danas* $B(0,s)$ te zatim koristeći konačnu vrijednost u unaprijednoj investiciji od trenutka s do trenutka t.

- Trošak je takvih strategija $B(0,t)$ odnosno $\boldsymbol{B(0,s)*B(s,t)}$.

- **Propozicija.** Ukoliko je vremenska struktura deterministička, tada je prema principu nearbitraže

$$B(0,t) = B(0,s) \cdot B(s,t), \qquad 0 \leq s < t \leq T$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $B(0,t)<B(0,s)B(s,t)$. Pretpostavimo da su buduće cijene obveznica poznate u sadašnjem trenutku.

  - Pretpostavimo nadalje da u trenutku 0 kupimo obveznicu s dospijećem t te izdamo $B(s,t)=B(0,t)/B(0,s)$ obveznica dospijeća s, čime dobivamo $B(0,s)B(s,t)-B(0,t)$ novčanih jedinica u trenutku 0
  - U trenutku s *izdamo* jednu obveznicu s dospijećem t čime se isplati vrijednost obveznica izdanih u trenutku 0
  - U trenutku t zatvorimo poziciju: isplaćena nam je nominalna vrijednost 1 s kojom isplatimo nominalnu vrijednost obveznice izdane u trenutku s, zadržavajući inicijalni profit.

- Slično u slučaju da vrijedi $B(0,t) > B(0,s)B(s,t)$ promatrajući suprotnu strategiju.

$\square$

- Prema prethodnom vrijedi

$$B(t_1,t_2) = \frac{B(0,t_2)}{B(0,t_1)} = e^{t_1 y(0,t_1) - t_2 y(0,t_2)}$$

što ujedno znači da se sve cijene obveznica (a time i vremenska struktura) mogu odrediti inicijalnom vremenskom strukturom.

$\Rightarrow$ nije realno takvo što očekivati na tržištu obveznica, te takvu relaciju ne podržavaju povijesni podaci.