

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za samostalan rad
23. 3. 2010.

1. Pretpostavimo da je diskontni faktor zadan funkcijom

$$D(t) = \begin{cases} e^{-0.05t} & \text{za } t \leq 2 \text{ godine} \\ e^{-(0.04+0.06t)} & \text{za } t \geq 2 \text{ godine} \end{cases}$$

Koliko je danas potrebno platiti za ugovor koji nam osigurava 1 kn u trenutku $t=3$?

Rj: $V(0) = 1 \cdot D(3) = e^{-0.22} = 0.8025$

2. Pretpostavimo da je trenutna kamatna stopa zadana funkcijom

$$r(t) = \begin{cases} 0.06 & \text{za } t \leq 4 \text{ godine} \\ 0.04 & \text{za } t \geq 4 \text{ godine} \end{cases}$$

Odredite konačnu vrijednost glavnice X nakon 6 godina.

Rj: $V(6) = X \cdot e^{\int_0^6 r(t) dt} = X \cdot e^{\int_0^4 0.06 dt} \cdot e^{\int_4^6 0.04 dt} = X \cdot e^{0.32} = 1.3771X$

3. Pretpostavimo da je diskontni faktor zadan funkcijom $D(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) Odredite trenutnu kamatnu stopu

b) Odredite prinos do dospelja.

Napomena: uz trenutnu kamatnu stopu (koja je ujedno i neprekidna) $r(t)$, $t \geq 0$, diskontni je faktor zadan

funkcijom $D(t) = e^{-\int_0^t r(s) ds}$. Provjerite da je $r(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)}$ te iskoristite taj rezultat za a) dio zadatka, a

zatim za b) dio zadatka primijinite rezultat da je prinos do dospelja srednja vrijednost trenutnih stopa na nekom intervalu $[0, t]$.

Rj: $D'(t) = e^{-\int_0^t r(s) ds} \cdot \frac{\partial(-\int_0^t r(s) ds)}{\partial t} = e^{-\int_0^t r(s) ds} \cdot (-r(t)) \Rightarrow r(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)}$

a) $r(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)} = \frac{-\left(\frac{1}{1+t^2}\right)'}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{-\frac{-1}{(1+t^2)^2} \cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

b) y je PDD ako vrijedi $e^{-\int_0^T r(t) dt} = e^{-yT} \Rightarrow y = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt$

Kako je u našem slučaju $D(T) = e^{-\int_0^T r(t) dt} = \frac{1}{1+T^2} = e^{-yT} \Rightarrow y = \frac{-1}{T} \cdot \ln\left(\frac{1}{1+T^2}\right)$.

4. Pretpostavimo da su zadane sljedeće cijene obveznica

$B(0,1) = 0.9901, B(0,2) = 0.9828, B(1,2) = 0.9947, B(0,3) = 0.9726, B(1,3) = 0.9848, B(2,3) = 0.9905$, pri čemu $B(0,T)$ označava cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0 s dospeljećem od T mjeseci.

a) odredite odgovarajuće spot stope

b) odredite odgovarajuće trenutačne unaprijedne stope $f(k,l) = f(k,l,l+1)$ koja označavaju unaprijednu stopu dogovorenu u trenutku k za jedan vremenski interval.

c) odredite logaritamski povrat na beskuponsku obveznicu s dospeljećem od tri godine. Pretpostavite da raspolazete sa 100 kn prije kretanja u investiciju.

d) odredite logaritamski povrat na tri uzastopna investiranja u jednoperiodnu beskuponsku obveznicu $B(t,t+1)$, za $t=0,1,2$. Pretpostavite da raspolazete sa 100 kn prije kretanja u investiciju.

Rj:

a) Iz $B(0,t) = 1 \cdot e^{-y(0,t) \cdot t}$ dobije se $y(0,1) = 0.9949\%, y(0,2) = 1.735\%, y(0,3) = 2.7782\%$

b) Iz $B(k,l+1) = B(k,l) \cdot e^{-f(k,l,l+1) \cdot 1}$ slijedi $f(k,l,l+1) = -\frac{\ln B(k,l+1) - \ln B(k,l)}{1}$, pa je

$$f(0,1,2) = 0.74\%, f(0,2,3) = 1.04\%, f(1,1,2) = 0.53\%, f(1,2,3) = 1.00\%, f(2,2,3) = 0.95\%$$

c) $r(0,3) = \ln\left(\frac{V(3)}{V(0)}\right) = 2.78\%$

d) U $t=0$ kupimo $\frac{100}{0.9901} = 100.999899$ obveznica po cijeni $B(0,1)$.

U $t=1$ imamo 100.999899, pa kupujemo $\frac{100.999899}{0.9947} = 101.5386507$ obveznica po cijeni $B(1,2)$.

U $t=2$ imamo 101.5386507 pa kupujemo $\frac{101.5386507}{0.9905} = 102.5119139$ obveznica po cijeni $B(2,3)$.

U $t=3$ imamo 102.5119139 kn pa je logaritamski povrat jednak $\ln \frac{102.5119139}{100} = 0.024808838 = 2.48\%$.

5. Pretpostavimo da su sljedeće spot stope osigurane od strane središnjih londonskih banaka (LIBOR; LIBID)

Stopa	LIBOR	LIBID
1 mj	8.41%	8.59%
2 mj	8.44%	8.64%
3 mj	9.01%	9.23%
6 mj	9.35%	9.54%

Pretpostavimo da je nekoj tvrtki potrebno osmisliti unaprijedni ugovor na bazi kojeg će moći podići zajam od 100000 kn za dva mjeseca od danas na period od 4 mjeseca. Kolika će biti odgovarajuća unaprijedna kamatna stopa?

Rj:

I način: Da bismo za 2 mj. imali na raspolaganju 100000kn danas je potrebno investirati

$100000 \cdot e^{-0.0844 \cdot \frac{2}{12}} = 98603.18066$ kn. Da bi to bilo moguće danas se zadužujemo za taj iznos na 6 mjeseci.

Nakon 6 mjeseci moramo vratiti $98603.18066 \cdot e^{0.0954 \cdot \frac{6}{12}} = 103420.5329$. Sada iz $100000 = 103420.5329 \cdot e^{-f(0,2,6) \cdot \frac{4}{12}}$ slijedi $f(0,2,6) = 10.09\%$.

$$\text{II na}\check{\text{c}}\text{in: } f(0,2,6) = \frac{\frac{6-0}{12} \cdot y(0,6) - \frac{2-0}{12} \cdot y(0,2)}{\frac{6-2}{12}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0.0954 - \frac{1}{6} \cdot 0.0844}{\frac{1}{3}} = 10.09\% .$$