Financijska matematika

Dr. sc. Petra Posedel

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 20.3.2015.

1.2. Tržište novca

- Sastoji se od ***nerizičnih*** (nemogućnost *defaulta*) vrijednosnih papira.

- **Primjer:** obveznice (engl. bond), financijski vrijednosni papir koji vlasniku *obećava* niz osiguranih budućih isplata.

- **Definicija** – Obveznica je dužnički instrument koji zahtjeva od izdavatelja obveznice (*dužnik*) da isplati investitoru (*pozajmljivač, vjerovnik)* posuđeni iznos uvećan za kamate kroz vremenski specificirani period.

- **Napomena**:
  - I u tom slučaju rizik se ne može u potpunosti izbjeći budući da *tržišne cijene* takvih vrijednosnih papira mogu nepredvidivo *fluktuirati*.
  - Pod *nerizično* ćemo u tom slučaju podrazumijevati da će odgovarajući iznosi sigurno biti isplaćeni

Uvod: obveznice

- Korporacije financiraju svoje operacije prodajom dionica i obveznica; dionice vs. obveznice

- **Posjedovanje dionica**: parcijalno vlasništvo tvrtke

- **Posjedovanje obveznica**: Kupnjom obveznica se ujedno pozajmljuje novac korporaciji koja se time *obvezuje* povratiti glavnicu te platiti kamatu na način ugovoren obveznicom.

- **Izdavatelj obveznica.** Postoje dvije široke kategorije: državne i korporacijske; svaki izdavatelj ima različite sposobnosti ispunjavanja ugovornih obaveza vjerovniku

Obveznice: dospijeće

- **Dospijeće.** Dospijeće (engl. maturity) je broj godina do otkupa obveznice od strane izdavatelja.

- Uobičajena klasifikacija obveznica:
  - < 5 godina: kratkoročne
  - 5-15 srednjoročne
  - > 15 godina: dugoročne
  - Ono što je obično važnije od samog originalnog dospijeća je *rezidualno dospijeće*.

- **Vrste**: trezorski zapisi, komercijalni zapisi, kreditne obveznice te mnoge druge ovisno o posebnim dogovorima koji se odnose na instituciju izdavatelja, *duraciju*, broj isplata, osiguranja i prava.

Obveznice: nominalna vrijednost

- **Nominalna vrijednost** (engl. face value) je vrijednost po kojoj je obveznica otkupljena (*isplaćena*) u trenutku dospijeća.
  - *par vrijednost*, glavnica obveznice

- Glavnica nije nužno vrijednost/cijena po kojoj se obveznica izdaje
  - Neke se obveznice izdaju **s diskontom** (ispod *par vrijednosti*) ili **s premijom** (iznad *par vrijednosti*) u odnosu na *par vrijednost*.

1.2.1. Beskuponske obveznice (engl. Zero coupon bonds)

- Najjednostavniji slučaj obveznica; uključuje **samo jednu** isplatu.

- *Institucija izdavatelj* (država, banka ili tvrtka) obećava zamjenu obveznice za točno određeni iznos ***N*** koji nazivamo **nominalna vrijednost** (engl. face value) na točno određeni datum u budućnosti ***T***, odnosno **dospijeće** (engl. maturity), obično do godinu dana.

- Obveznica bez kupona obično se prodaje po vrijednosti koja je **manja od nominalne** što je ujedno razlog zašto se obično naziva diskontirana obveznica.

- Za danu kamatnu stopu *r*, sadašnja vrijednost obveznice s dospijećem *T* izračuna se vrlo jednostavno: kao diskontirana vrijednost nominalne vrijednosti *N*:

$$V(0) = \frac{N}{(1+r)^T}$$

- **Primjer:** Pretpostavimo da se na tržištu prodaje beskuponska obveznica s dospijećem od godinu dana, nominalne vrijednosti 100 ($) uz kamatnu stopu 10%. Tada je tržišna cijena takve obveznice:

$$C_t = 100(1.1)^{-1} = 90.91$$

- **U praksi se događa suprotno**: trguje se obveznicama i njihove su cijene određene uvjetima na tržištu, dok su kamatne stope **implicirane** cijenama obveznica:

$$\boxed{r = \frac{N}{V(0)} - 1}$$

godišnja i složena kamatna stopa!

Napomena:

Ukoliko je obračuna kamata polugodišnji, tada *nominalnu* kamatnu stopu (godišnju!) pretvaramo u polugodišnju i tržišna cijena obveznice je

$$C_t = \frac{100}{(1.05)^2} = 90.7$$

Primijetite! Uz isto vrijeme dospijeća, cijena obveznice uz godišnji obračun je veća od cijene obveznice uz polugodišnji obračun!

- **Kotiranje cijena**. Cijene obveznica kotiraju se u postocima nominalne vrijednosti
  - Obveznica koja se prodaje po *par* vrijednosti kotira se kao 100, što znači da označava 100% svoje nominalne vrijednosti

- Obično su karakteristike same obveznice navedene u samom "nazivu"
  - Electricitè de France 8.75% 2002: isplaćuje 8.75 eura godišnje do 2002. godine (*kuponi*!) kada se otkupljuje po svojoj *par vrijednosti*
  - Treasury 9% 2008.

Napomena: BSO možemo promatrati slučaj N=1

- Općenito se obveznice mogu prodati u **bilo kojem** vremenskom trenutku prije dospijeća po tržišnoj cijeni.
- Označimo sa $B(t,T)$ cijenu takve obveznice u trenutku t.
  - Tada vrijedi $B(T,T)=1$ (ili općenito N)
  - $B(0,T)$ je *trenutna*, u trenutku 0, cijena takve obveznice
  - $T-t$ je **period do dospijeća**
- Kamatna stopa dobije se primjenom složenog ukamaćivanja, pri čemu vrijedi:

$$\boxed{V(t) = B(t,T) \quad \text{i} \quad V(T) = (N)=1}$$

Važno je primijetiti sljedeće:

- Implicirana godišnja i složena kamatna stopa zadovoljava jednadžbu:

$$B(t,T) = (1+r)^{-(T-t)}$$

- Uz upotrebu periodičkog složenog ukamaćivanja s frekvencijom ukamaćivanja *m:*

$$B(t,T) = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{-m(T-t)}$$

- U slučaju neprekidnog ukamaćivanja $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$

- Budući da cijena obveznice **ne ovisi** o načinu ukamaćivanja, odgovarajuće implicirane i različite kamatne stope su međusobno **ekvivalentne!**

$\boxed{B(0,T) \text{ je } \textbf{diskontni faktor}\text{, a } B(0,T)^{-1} \textbf{ faktor rasta!}}$

- Ti univerzalni faktori su sve što je potrebno kako bi se izračunala **vremenska vrijednost novca**, bez potrebe za pretvaranjem u odgovarajuće kamatne stope.
  - Kamatne stope se obično koriste jer su intuitivnije.

- Npr. Za prosječnog klijenta banke, informacija da se obveznica nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od godine dana može kupiti za 90.5, ne mora biti toliko jasna kao i *ekvivalentna tvrdnja* da će depozitom na štedni račun osigurati 10.5% kamata uz oročenje na godinu dana.

Primjeri: konstantna kamatna stopa

- Primjer **1**. Neki investitor plaća 95 za obveznicu nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od šest mjeseci. Kada će obveznica dostići vrijednost od 99 ako kamatna stopa ostane nepromijenjena?

- Primjer **2.** Izračunajte kamatnu stopu uz godišnje, polugodišnje i neprekidno ukamaćivanje jedinične obveznice za koju vrijedi $B(0.5,1)=0.9455$. Odgovarajuće su kamatne stope **ekvivalentne!**
- Što primjećujete?

Općenito vrijedi:

- Implicirana kamatna stopa <u>može ovisiti</u> o:

  - Trenutku trgovanja *t*
  - Dospijeću *T*

Kamatna stopa može biti **varijabilna.**

→ Opća **vremenska struktura** kamatnih stopa

- Kamatna stopa može biti i **stohastička.**

1.2.2. Kuponske obveznice (engl. Coupon Bonds)

- Obveznice koje *obećavaju* **niz** isplata (*kupona*)

- Takav niz isplata sastoji se od nominalne vrijednosti u trenutku dospijeća te kupona koji se isplaćuju u regularnim vremenskim periodima, obično na godišnjoj, polugodišnjoj ili kvartalnoj razini

- U trenutku dospijeća vlasnik takve obveznice dobiva glavnicu i zadnju isplatu kamate.

- Uz pretpostavku konstantnih kamatnih stopa moguće je izračunati cijenu takve obveznice **diskontiranjem** svih budućih isplata.

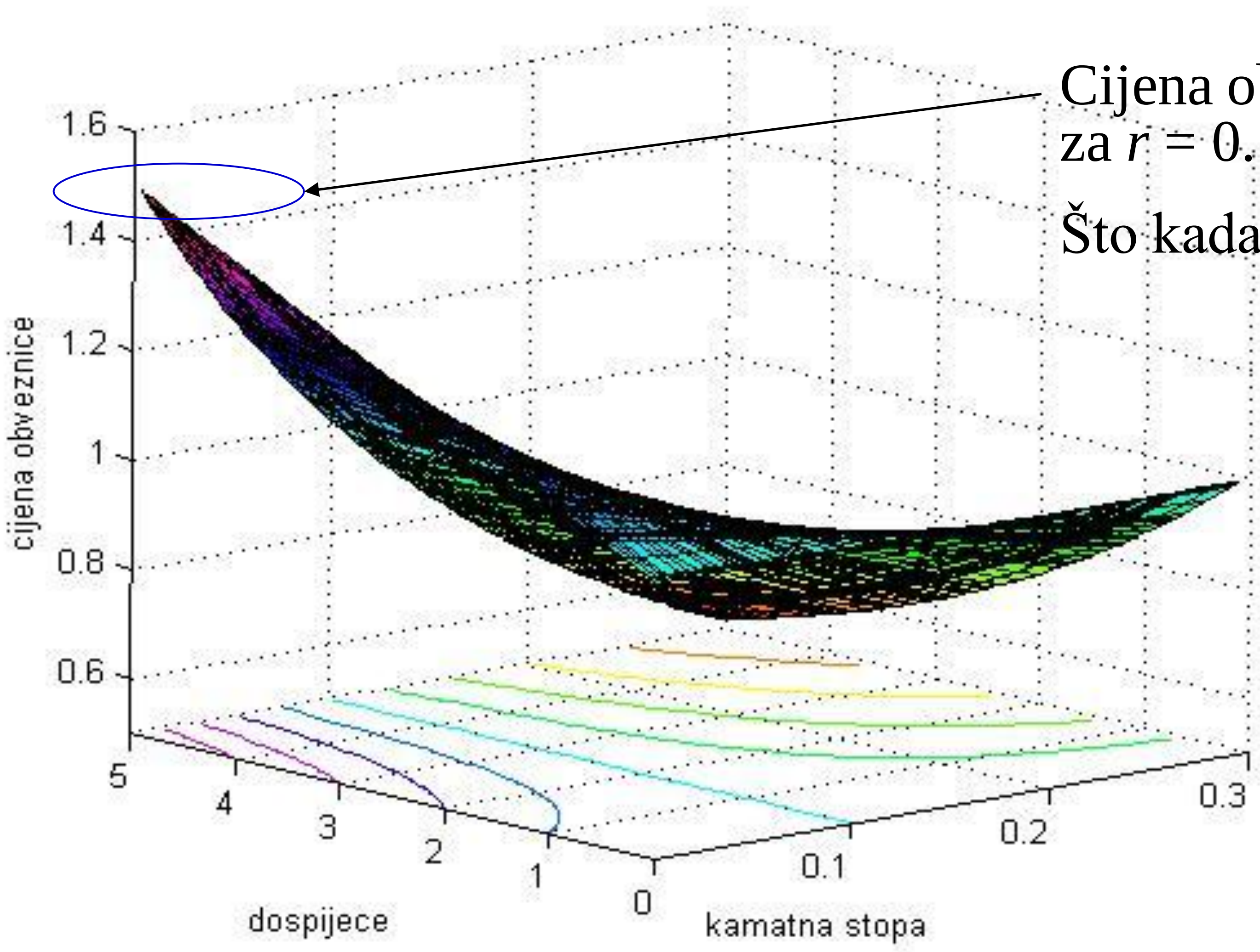
- Ukoliko je ***N*** nominalna vrijednost obveznice, ***T*** vrijeme do dospijeća, ***r*** kamatna stopa, ***K*** iznos kupona, tada je uz *godišnju isplatu kupona*, cijena kuponske obveznice dana sa:

$$C_K = \sum_{t=1}^{T} \frac{K}{(1+r)^t} + \frac{N}{(1+r)^T}$$

$$= \frac{K}{(1+r)} \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{1}{r+1} \right)^{t-1} + \frac{N}{(1+r)^T} = \frac{K}{(1+r)} \sum_{s=0}^{T-1} \left(\frac{1}{r+1} \right)^{s} + \frac{N}{(1+r)^T}$$

$$= \boxed{\frac{K}{r} + \left[N - \frac{K}{r} \right] \cdot (1+r)^{-T},} \qquad \text{uz uvjet da je } r \neq 0$$

Ovisnost cijene obveznice o kamatnoj stopi: N=1, K=0.1



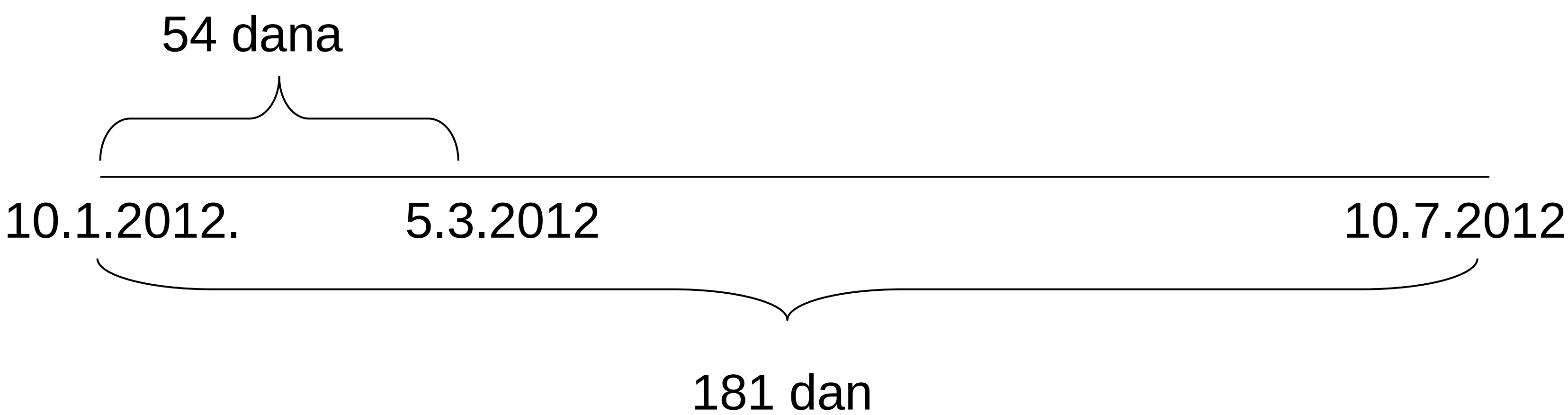
Cijena obveznice za $r = 0$.

Što kada $r \to \infty$?

- **Primjer.**
  - Electricitè de France 8.75% 2002 i Treasury 9% 2008 su primjeri tradicionalnih karakteristika obveznica; tzv. *plain vanilla* obveznice
  - BTp 6.25% 10DC09 (Buono del Tesoro poliennale), par value 5000 € kotira 102.5:
    - Cijena takve obveznice je 5125 €
    - Kupon koji se plaća svakog polugodišta iznosi 156.25 €
- Ukoliko se obveznica kupuje između datuma isplate kupona, kupac mora *kompenzirati* prodavatelja za kuponsku kamatu zarađenu od perioda isplate zadnjeg kupona do datuma nagodbe. Taj se iznos naziva **obračunata kamata** (engl. accrued interest); to je udio kuponske isplate koji je zarađen od zadnjeg datuma isplate.
  - Kupac stoga plaća cijenu:

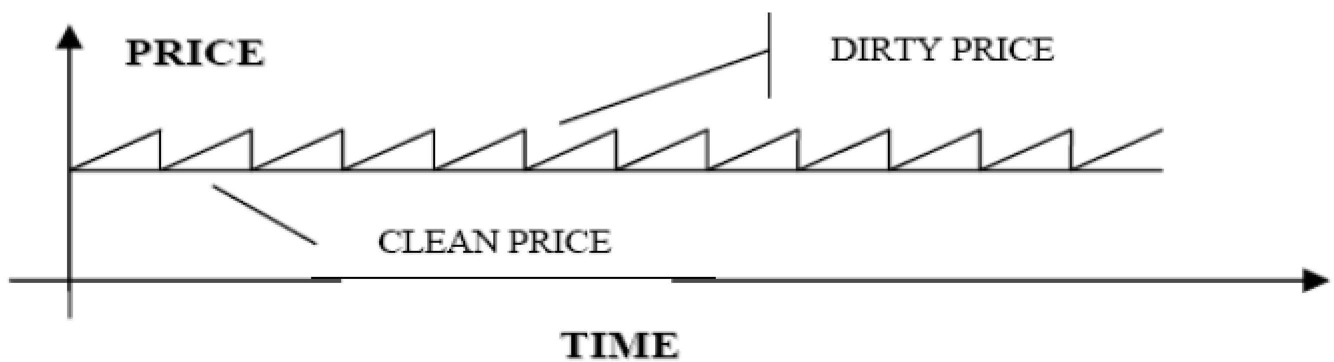
$$\boxed{\text{prljava cijena} = \text{čista cijena} + \text{obračunata kamata}}$$

- **Primjer.** Pretpostavimo da je danas 5.3.2012. Promatrajmo obveznicu BTp-10JL13 11% (par value 100000). Čista cijena takve obveznice je 95.5 (kotira!). Zadnja isplata kupona bila je 10.1.2012, a sljedeća je isplata 10.7.2012. Između ta dva datuma ima 181 dan.



- Obračunata kamata iznosi 1640 € (54/181 x 5500)
- Stoga je prljava cijena takve obveznice 97140 (95500+1640)

- Tržište (ponuda i potražnja!) određuju <u>čistu cijenu.</u>
  - Čista se cijena mijenja iz više razloga prvenstveno zbog promjene u kamatnim stopama koje je teško predvidjeti.
  - Uz uvjet da se čista cijena ne mijenja, prljava će se cijenja mijenjati kao linearna funkcija perioda do sljedeće isplate kupona



  - Razlika u skoku u čistoj cijeni u odnosu na porast zbog obračunate kamate je u praksi nužnost: prihod se <u>oporezuje</u> drugačije od kapitalne dobiti.

Primjeri.

- Primjer 1. Pretpostavimo da promatramo obveznicu nominalne vrijednosti N=100 kn s dospijećem od 5 godina s kuponima koji se isplaćuju na godišnjoj razini u iznosu od 10% nominalne vrijednosti na kraju svake godine, zadnji u trenutku dospijeća. Tada je uz npr. <u>neprekidnu</u> kamatnu stopu od 12%, cijena takve obveznice

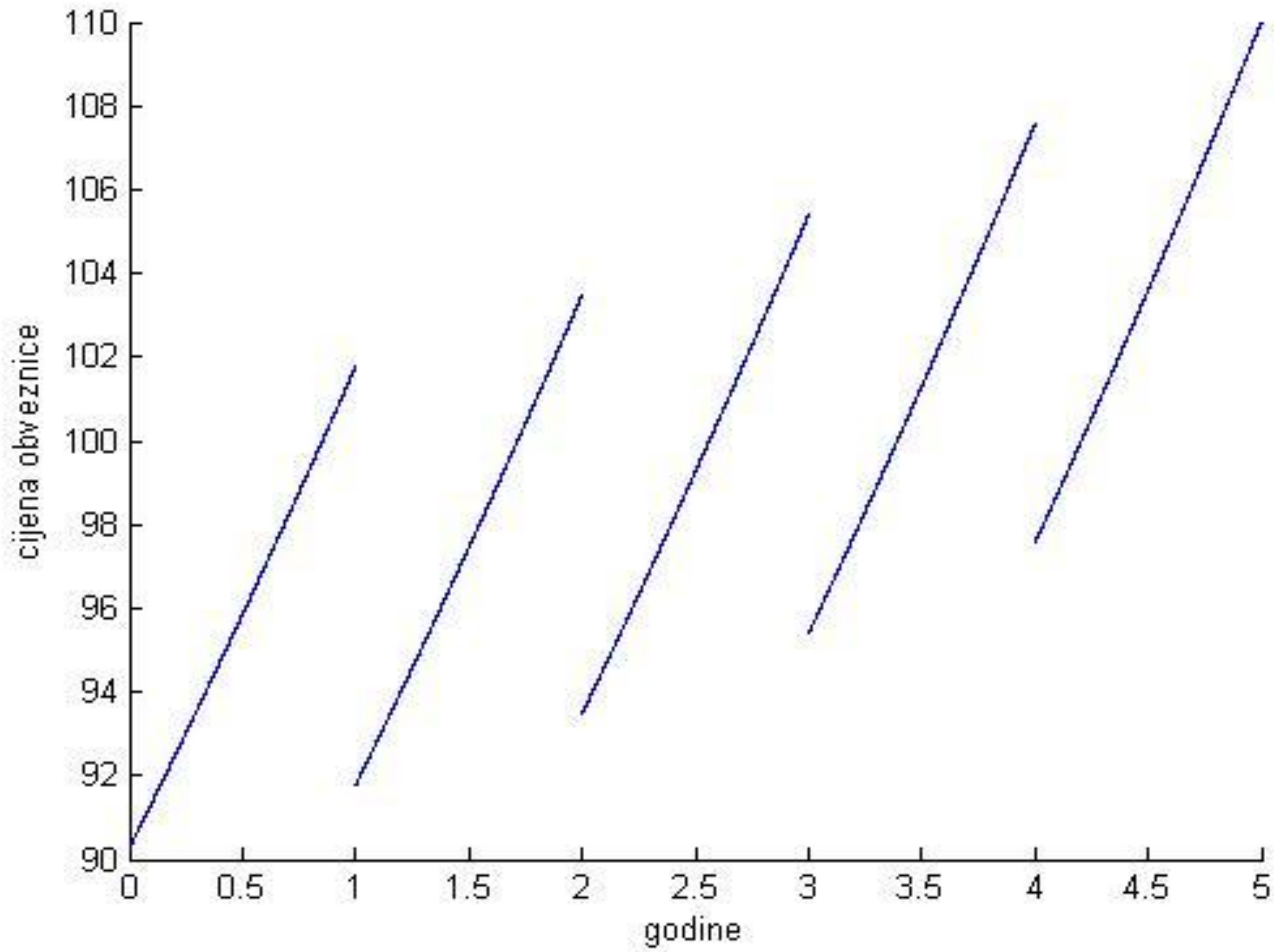
$$V(0) = 10\sum_{i=1}^{5} e^{-ir} + 100e^{-5r} = 90.27$$

- Kuponi se često izražavaju u postotku nominalne vrijednosti, tj. $K=iN$, pri čemu je ***i*** tzv. kuponska stopa (engl. Coupon rate)

- **Primjer 2.** Vrijedi $V(1)+K=V(0)e^r$, pri čemu je V(1) vrijednost obveznice nakon godine dana i isplaćenog prvog kupona. Vrijednost kupona **u bilo kojem trenutku** je moguće naći diskontiranjem svih budućih isplata.

- **Primjer 3.** Koliko je vremena potrebno da bi obveznica iz Primjera 1. postigla cijenu od 95 po prvi put?

Ovisnost cijene obveznice (pr. 3) o godinama do dospijeća



- **Propozicija**. Kada se kuponi isplaćuju na godišnjoj razini, kuponska je stopa jednaka kamatnoj stopi za godišnje ukamaćivanje ako i samo ako je cijena obveznice jednaka svojoj nominalnoj vrijednosti. U tom slučaju kažemo da se obveznica prodaje po nominali (*at par)*.

Dokaz: $\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $r=i$ te neka je nominalna vrijednost obveznice N, a dospijeće T. Tada je cijena obveznice

$$C_K = \frac{K}{r} + \left[N - \frac{K}{r} \right] \cdot (1+r)^{-T}, \quad K = iN = rN$$

$$= N$$

$\Leftarrow$ Obratno, ako je cijena obveznice jednaka svojoj nominalnoj vrijednosti, tada vrijedi:

$$N=\frac{K}{1+r}+\frac{K}{(1+r)^2}+...+\frac{K}{(1+r)^{T-1}}+\frac{K+N}{(1+r)^T},$$

što je ujedno strogo padajuća funkcija argumenta *r*. Stoga postoji točno jedna vrijednost kamatne stope *r* za koju je vrijednost funkcije u toj točki jednaka *N*, a prema prethodnom znamo da je ta vrijednost jednaka *i*.

Dakle, $r=i$. □

- Ukoliko se obveznica prodaje po cijeni koja je **manja od nominalne**, to ujedno znači da je implicirana kamatna stopa (povrat za investitora!) veća od kuponske stope.
- Ukoliko se obveznica prodaje po cijeni koja je **veća od nominalne**, to ujedno znači da je implicirana kamatna stopa (povrat za investitora!) manja od kuponske stope.

Primjer.

- Pretpostavimo da promatramo investiciju u beskuponsku obveznicu nominalne vrijednosti 1 čiju poziciju želimo zatvoriti u trenutku t prije dospijeća T. Ukoliko raspolažemo s iznosom $V(0)$, a cijena svake takve obveznice danas iznosi $B(0,T)$ tada je moguće kupiti $V(0)/ B(0,T)$ takvih obveznica. U nekom trenutku $t < T$ cijena jedne takve obveznice je $B(t,T)= e^{-r(T-t)} =e^{rt}B(0,T)$.
- Vrijednost investicije u trenutku $t < T$ je:

$$V(t) = \frac{V(0)}{B(0,T)} B(t,T) = V(0)e^{rt}$$

- Dakle, uz pretpostavku da je kamatna stopa **konstantna**, funkcija $V(t)$ **ne ovisi** o vrsti obveznica koje su odabrane za investiranje kao niti o metodi proširenja investicije nakon dospijeća obveznice.

- Naime, ako iznos $V(T)$ u trenutku dospijeća T uložimo u beskuponsku obveznicu nominalne vrijednosti 1 s dospijećem $T' > T$, tada je vrijednost takve investicije u trenutku t', $T < t' < T'$ jednaka:

$$V(t') = \frac{V(T)}{B(T,T')} e^{-r(T'-t')} = V(T) e^{r(t'-T)}$$

$$= V(0) e^{rt'}$$

Zadaci.

- Izračunajte povrat na sedamdeset i petodnevnu investiciju u beskuponsku obveznicu ako je $B(0,1)=0.89$.

- Povrat na obveznicu kroz šest mjeseci je 7%. Odredite impliciranu neprekidnu kamatnu stopu.

- Nakon koliko dana će obveznica kupljena po cijeni od $B(0,1)=0.92$ ostvariti povrat od 5%?

Rizici obveznica

- **Tržišni.** Cijena obveznice promjeni se u suprotnom smjeru od promjene u kamatnim stopama. Ukoliko investitor proda obveznicu prije dospijeća, izložen je tržišnom riziku.

- **Rizik reinvestiranja**. Promjene u kamatnim stopama mogu se odraziti na prinos od reinvestiranja novčanih tokova.

- **Default.** Rizik default-a (ili kreditni rizik) se odnosi na rizik da izdavatelj obveznica nije sposoban vršiti periodičke isplate i isplatu glavnice.
  - Mjeri se kreditnim rejtinzima koje dodjeljuju rejting agencije (Mody's, Standard & Poors's, Fitch…)

1.2. 3. Mjere povrata. Prinos do dospijeća

- Za kuponske obveznice, povrat ovisi o kuponima i dobitku/gubitku kapitala.

- Stoga, kako bi se izračunala mjera povrata potrebno je uzeti u obzir nekoliko varijabli:
  - Kapitalni dobitak/gubitak
  - Kuponi (veličina, frekvencija isplate, reinvestiranje)
  - dospijeće

- **Primjer**. Pretpostavimo da promatramo obveznicu nominalne vrijednosti 1000 s dospijećem 30 godina, koja isplaćuje polugodišnje kupone u vrijednosti 40 te da se takva obveznica prodaje po cijeni od 1200, odnosno 200 iznad nominalne vrijednosti.

- Ukoliko bi se obveznica prodavala po nominalnoj vrijednosti, tada bi kamatna stopa bila 4% na polugodišnjoj razini (isplata kupona od 4% nominalne vrijednosti svakog polugodišta), odnosno 8% na godišnjoj razini.

- Kamatna stopa od 4% je **kuponska (kamatna) stopa**

- No, obveznica se prema pretpostavci ne prodaje po nominalnoj vrijednosti, već po cijeni **iznad nominalne vrijednosti**, pa će povrat za investitora na godišnjoj razini biti **manji** od 8%.

Postoje dva razloga za to:

1. Isplate kupona u vrijednosti od 40, odnosno (40/1200)=3.333% na polugodišnjoj razini (ili 6.67% na godišnjoj) za investiciju od 1200. Vrijednost 6.67% nazivamo **trenutni prinos** (engl. Current yield)

2. U trenutku dospijeća vlasnik obveznice dobiva 1000, a ne 1200 odnosno uloženu vrijednost. Trenutni prinos od 6.67% (na godišnjoj razini), što je ujedno **manje** od kuponske (kamatne) stope od 8%, precjenjuje povrate buduće da ne uračunava takav gubitak kapitala.

Budući da se trenutni prinos računa kao omjer veličine kupona i cijene obveznice (čista cijena!)

- trenutni prinos uzima u obzir <u>samo</u> povrat koji proizlazi iz kupona
- Ne uzima u obzir dospijeće obveznice, niti dobitak odnosno gubitak kapitala

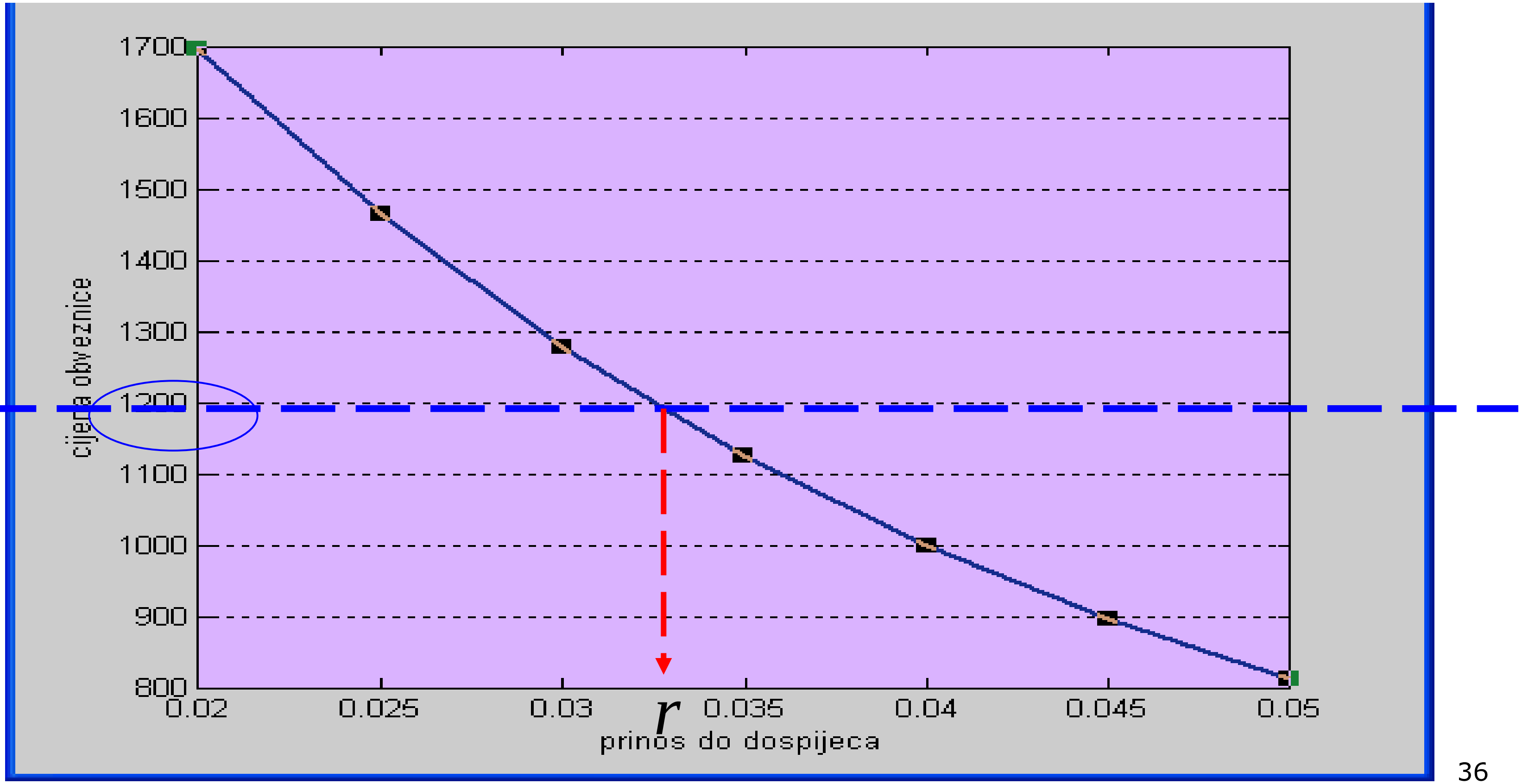
→ želimo mjeru povrata koja će uzeti u obzir spomenute varijable: prinos do dospijeća

Prinos do dospijeća (engl. Yield to maturity) (ili kraće prinos) je mjera srednje vrijednosti povrata, uključujući gubitak (ili dobitak) kapitala budući da je obveznica kupljena iznad (ispod) nominalne vrijednosti. Za takvu obveznicu, prinos do dospijeća *r* je rješenje jednadžbe:

$$1200 = \frac{40}{r} + \left[1000 - \frac{40}{r}\right] \cdot (1+r)^{-60}$$

Primijetite! Prinos do dospijeća je interna stopa rentabilnosti.

Rješenje ove jednadžbe je r =0.0324=3.24% (na polugodišnjoj razini!)



- Na polugodišnjoj razini: zahtijevani prinos do dospijeća (3.24%) je manji od trenutnog prinosa (3.33%) koji je ujedno manji od kuponske (kamatne) stope (4%)

- Vrijedi i općenito: ukoliko se obveznice prodaju po cijeni koja je veća od nominalne vrijednosti, tada će kuponska stopa biti veća od trenutnog prinosa te će trenutni prinos biti ujedno i veći od (zahtijevanog) prinosa do dospijeća.

Budući da prinos do dospijeća uračunava gubitak kapitala ako u trenutku dospijeća vlasnik obveznice dobije samo nominalnu vrijednost, a ne ukupni investirani iznos, tada vrijedi:

Cijena obveznice > nominalne

kuponska stopa > trenutni prinos > prinos do dospijeća

Ukoliko se obveznica prodaje po cijeni nižoj od nominalne vrijednosti, tada je zaključak suprotan, odnosno:

Cijena obveznice < nominalne

kuponska stopa < trenutni prinos < prinos do dospijeća

- Prinos do dospijeća je **zahtijevana** stopa prinosa, a ne ona realizirana budući da se temelji na dvije <u>pretpostavke</u>:
  - Držanje do dospijeća
  - Reinvestiranje međuisplata (kupona!) po istom prinosu do dospijeća

- Ukoliko su pretpostavke <u>narušene</u> dolazi do pojave dviju vrsta rizika: tržišnog i onog reinvestiranja

1.2. 4. Fluktuacija cijena i povrata ovisno o kamatnim stopama

- Investitor u obveznice dobiva **fiksni tok prinosa** osim u slučaju da korporacija ne ode u *default-stanje*.

  Upravo se zbog toga obveznice nazivaju vrijednosnice ***fiksnog prinosa***.

  Da li su obveznice nerizične?

- Mnogo je dugoročnih obveznica (na 20 ili 30 godina).

- Čak i ako je tvrtka solventna, dohodak od obveznica je osiguran samo ako se obveznice drže do *dospijeća*.

- **Primjer**. Pretpostavimo da je obračun kamata polugodišnji. Promatramo beskuponsku obveznicu s dospijećem 20 godina nominalne vrijednosti 1000 kn uz kamatnu stopu 6% koja je kupljena po tržišnoj cijeni od 306.56 kn.
  - **Slučaj A**: Šest mjeseci nakon toga kamatna stopa porasla je na 7%. Trenutna cijena takve obveznice jednaka je:

$$C = \frac{1000}{(1.035)^{39}} = 261.41$$

- Dakle, vrijednost takve investicije je pala za 45.15 kn.

  Ukoliko obveznicu zadržimo do dospijeća, tada ćemo, u trenutku dospijeća, dobiti 1000 kn.

- S druge strane, ukoliko sada prodamo takvu obveznicu, tada gubimo 45.15 kn što predstavlja povrat od

  (-45.15/306.56)= - 14.73%

  na polugodišnjoj razini, odnosno -29.46% na godišnjoj razini, iako se kamatna stopa promijenila (porasla) za *samo* 1 postotni poen.

- Dakle, kamatne stope su **porasle**, a cijena obveznice je **pala**!

- Ako kamatne stope na tržištu nakon šest mjeseci **padnu**, tada će cijena obveznice **porasti!**

- Ako se nakon šest mjeseci kamatna stopa nije promijenila, tada tada je naša dobit 9.19 kn što predstavlja povrat od

  (9.19/306.56)=3%

  na polugodišnjoj razini (6% na godišnjoj).

- Dakle, ako se kamatna stopa **promijeni**, tada je stopa povrata od 6% garantirana samo ako se obveznica zadrži do dospijeća.

Cilj:

- Analizirati kako **cijene obveznica fluktuiraju** ovisno o ***promjenama*** u kamatnim stopama

- Kako odrediti **vremensku strukturu** (engl. Term structure), odnosno ovisnost kamatnih stopa o dospijeću.

- Ukoliko su stope determinističke tada one moraju biti konstantne i dobiveni model je prejednostavan za opisivanje bilo koje realne situacije.