Fakultet elektrotehnike i računarstva **Zagreb, 15. 6. 2012.**
Financijska matematika
Završni ispit

1. (10 bodova) Odredite istinitost sljedećih tvrdnji (T/N) uz objašnjenje vašeg odgovora ili nadopunite rečenicu:

a) Ako je jednodnevni povrat na vrijednost neke imovine dan sa $R(0,1)$=9.5%, tada jednodnevni logaritamski povrat ne može biti manji od 9.1%

b) Pretpostavimo da je cijena dionice XYZ zadana modelom n-periodnog binomnog stabla, pri čemu su jednoperiodni povrati nezavisni i jednako distribuirani i dani sa 10% i -4%. Ukoliko je očekivani povrat uz vjerojatnost neutralnu na rizik jednak 6%, tada vjerojatnost neutralna na rizik u slučaju rasta vrijednosti dionice iznosi ___________.

c) Pretpostavimo da u modelu binomnog stabla promatramo obveznicu s dospijećem 3 godine takvu da u trenutku t=0 vrijedi $B(0,3)$=0.96, a u slučaju kretanja cijene obveznice prema gore vrijedi $B(1,3;g)$=0.9848 u trenutku t=1. Time je u trenutku t=1 implicirana kamatna stopa $y(1,3;g)$ jednaka 0.766%.

d) Pretpostavimo da je tržište dano modelom binomnog stabla, pri čemu su moguće vrijednosti dionice XYZ na sutrašnji dan jednake 95 i 105, a vrijednost dionice danas jednaka je 100. Ako je pozitivna referentna kamatna stopa manja ili jednaka 4.5% tada ne postoji mogućnost arbitraže na zadanom tržištu.

e) Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po modelu n-periodnog binomnog stabla, pri čemu su g=10%, d=-5% i p_g=20%. Ako je cijena dionice XYZ danas jednaka 1000, tada očekivana cijena dionice XYZ u trenutku t=10 ne može biti veća od 820

f) Investicijska strategija dozvoljava mogućnost arbitraže ako je strategija predvidiva i takva da je $V(n) \geq 0$ za svaki $n \geq 0$, ali nije samofinancirajuća.

g) Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli očekivanja μ -1, varijance σ^2 te definiramo n-tu parcijalnu sumu kao $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$, $n \geq 1$. Ako je $\mu = 1$, tada je niz S_n, $n \geq 1$ martingal.

h) Pretpostavimo da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ koja ne isplaćuje dividendu jednaka 500 te da je unaprijedna cijena dionice XYZ s isporukom od godine dana jednaka 580.917. Pretpostavimo da je referentna tržišna kamatna stopa 15%. Tada ne postoji komparativna prednost od ulaganja u dionicu u odnosu na investiranje u unaprijedni ugovor.

OKRENITE LIST!

i) Neka su C^E,P^E redom cijena europske call i europske put opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća T. Neka je trenutna tržišna cijena dionice XYZ $S(0)$ te neka je r referentna nerizična kamatna stopa. Tada je diskontirana vrijednost izvršne cijene opcije s trenutka dospijeća na današnji trenutak manja ili jednaka zbroju cijene europske put opcije i trenutne tržišne cijene dionice XYZ.

j) Ukoliko volatilnost dionice XYZ raste, tada cijena europske put opcije na dionicu XYZ pada uz uvjet da ostale varijable koje utječu na cijenu europske put opcije na dionicu XYZ ostanu nepromijenjene.

2. (4 boda) Zamislite da razmišljate o pokretanju igre na sreću sličnu lotu. Igra se sastoji od izvlačenja jedne kuglice iz bubnja u kojem se nalazi 30 bijelih, 15 plavih i 5 crvenih kuglica. Ukoliko igrač izvuče bijelu kuglicu, ne dobiva ništa, ukoliko izvuče plavu, dobiva određeni iznos x, a ukoliko izvuče crvenu kuglicu dobiva dvostruko više, $2x$. Da bi igrač odigrao jedno izvlačenje, mora uplatiti 50 kn (i taj novac mu se ne vraća niti u slučaju dobitka). Modelirajte igru tj. definirajte proces ukupnog dobitka do n-tog izvlačenja za igrača i odredite distribuciju dobitka u jednom bacanju, te odredite koliki mora biti x da bi igra bila fer. Ako vi kao organizator igre želite dugoročno profitirati, koje vrijednosti x dolaze u obzir?

3. (4 boda) Pretpostavimo da se na tržištu trenutno trguje dionicom XYZ po cijeni od 50 te da su dvije moguće cijene dionice XYZ za godinu dana jednake 55 i 40. Referentna kamatna stopa na tržištu je 5% i fiksna je kroz cijelu godinu. Pretpostavimo da Vaš kolega Petar čitajući jedan financijski dnevni list uočava da se europskom put opcijom na dionicu XYZ trguje po cijeni od 1.12, pri čemu je izvršna cijena te opcije 50. Petar se pita da li je opcija fer vrednovana te vas glede toga pita za savjet budući da ste mu vi pričali o takvim financijskim instrumentima. Vi mu objašnjavate da koristite binomni model za vrednovanje opcija kako biste odredili da li postoji mogućnost arbitraže.

a) Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik (kako biste Petru mogli odrediti fer cijenu opcije).

b) Odredite fer cijenu europske put opcije.

c) Koje biste od sljedećih strategija preporučili Petru, na tržištu na kojem se trguje zadanom europskom put opcijom na dionicu XYZ, dionicom XYZ i nerizičnom imovinom (obavezno obrazložite svoj odgovor!)

A) Budući da ne postoji mogućnost arbitraže, ne ulaziti ni u kakvu investiciju.

B) Kratko prodati europsku put opciju, posuditi određenu količinu novca u banci i kupiti replicirajući portfelj za europsku put opciju.

C) Prodati replicirajući portfelj za europsku put opciju, kupiti europsku put opciju i ostatak novca oročiti u banci.

d) Da li Petar može zaključiti da je takva put opcija dostižna?

OKRENITE LIST!

4. (4 boda) Pretpostavimo da su u jednoperiodnom modelu cijene nerizične imovine $A(0)=100$, $A(1)=110$ dok su cijene dionice XYZ ovisno o različitim scenarijima dane tablicom:

Scenarij	$S(0)$	$S(1)$
ω_1	100	120
ω_2	100	115

Da li postoji strategija arbitraže ako tržište dozvoljava kratku poziciju u dionicama, ali se prema pravilniku trgovanja u trenutku t=0 naplaćuje provizija u iznosu od 5% na iznos trgovanja dionicom (bilo da se dionica kupuje ili (kratko) prodaje)?

5. (5 bodova) Neka je $S(0) = 100$ i neka su mogući sljedeći scenariji za cijenu dionice XYZ:

Scenarij	$S(1)$	$S(2)$
w_1	95	85
w_2	95	104
w_3	110	99
w_4	110	126

Nadalje, neka je nerizična kamatna stopa na tržištu tokom ova dva perioda fiksna i iznosi 5%.

a) Da li na tržištu postoji mogućnost arbitraže?

b) Na tržištu se trguje europskom call opcijom izvršne cijene 100 s dospijećem T = 2. Koja je fer cijena takve opcije u trenutku 1 u situaciji kada je vrijednost dionice 95?

c) Koja je fer cijena za opciju u trenutku 0?

6. (4 boda) Pretpostavimo da je cijena dionice XYZ na početku godine bila 50, referentna nerizična kamatna stopa 6% te da dionica XYZ isplaćuje dividendu u iznosu 5 nakon pola godine od danas te u iznosu uvećanom za 50% od prethodne dividende točno nakon godinu dana od danas. Odredite trenutnu cijenu unaprijednog ugovora s isporukom od godinu dana u slučaju da na tržištu ne postoji mogućnost arbitraže.

7. (4 bodova) Pretpostavimo da ste u investicijskoj banci ABC market-maker unaprijednih ugovora na dionice. Trenutna cijena dionice XYZ je 115, referentna nerizična kamatna stopa je 6%, a prinos od dividende na dionicu XYZ je 2%. Pretpostavimo da je trenutna tržišna cijena unaprijednog ugovora na dionicu XYZ s isporukom od tri mjeseca 119 te da se na tržištu trguje i sintetičkim ugovorima glede vrijednosnica koje su predmet interesa (tj. ugovorima nearbitražne cijene). Odredite strategiju arbitraže na tržištu ukoliko je ona moguća.

OKRENITE LIST!

komb. put i call

8. **(6 bodova)** Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po Black-Scholesovom modelu. Referentna nerizična kamatna stopa je 5%, volatilnost dionice 30%, a vrijednost dionice u trentku 0 je 100. Investitor kupuje financijsku izvedenicu s dospijećem od pola godine specifične isplate: ukoliko je cijena dionice nakon pola godine, S(1/2), manja od 100 investitor dobiva 100-S(1/2), ukoliko je cijena dionice između 100 i 120 investitor ne dobiva ništa i ukoliko je veća od 120 investitor dobiva S(1/2)-120. Nacrtajte graf vrijednosti izvedenice nakon pola godine u ovisnosti o cijeni dionice i izračunajte fer cijenu za takvu izvedenicu. Poznato je N(0.8477)=0.8017, N(0.6356)=0.7375, N(0.2239)=0.5886, N(0.0118)=0.5047, N(-0.2239)=0.4114, N(-0.6356)=0.2625, N(-0.8477)=0.1983.

r=5%

9. **(4 boda)** Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ koja ne isplaćuje dividendu kreće po Black-Scholesovom modelu. Želeći ulagati na tržištu izvedenica, prije 8 mjeseci ste posudili novac po nerizičnoj kamatnoj stopi kako biste kupili europsku call opciju na dionicu XYZ s dospijećem od godinu dana, izvršne cijene 75. U to je vrijeme cijena call opcije bila 10. Danas je cijena dionice XYZ 85, a volatilnost 26%. Izračunajte da li ste i koliki profit ostvarili od držanja call opcije kroz period od proteklih 8 mjeseci. Poznato je: N(0.6477)=0.7414, N(0.7978)=0.7875, N(0.8698)=0.8078, N(1.0199)=0.8461, r=5% ZADANO

10. **(5 boda)** Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po Black-Scholesovom modelu. Nadalje pretpostavimo da je cijena dionice u trenutku nula jednaka 2, volatilnost 15% i referentna nerizična kamatna stopa 5%. Investicijska banka ABC je na tržištu prodala 1000 europskih call opcija izvršne cijene 2.1 s dospijećem pola godine i 500 europskih put opcija izvršne cijene 1.9 s periodom do dospijeća 9 mjeseci. Investicijska se banka želi zaštiti od rizika u promijeni cijene dionice. Konstruirajte odgovarajući delta-neutralni portfelj početne vrijednosti nula. Poznato je da N(-0.1713)=0.4320, N(-0.2773)=0.3908, N(0.7485)=0.7729,N(0.6186)=0.7319.

Napomena: Podsjećamo na nekoliko formula koje se pojavljuju u Black-Scholesovom modelu:

$$C^E = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$delta_{C^E} = N(d_1)$$

$$gamma_{C^E} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$theta_{C^E} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} - rXe^{-rT} N(d_2)$$

$$vega_{C^E} = \frac{S\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$rho_{C^E} = TXe^{-rT} N(d_2).$$