Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za samostalan rad
8. 6. 2010.

Napomena za studente: Zadaci predstavljaju uobičajene zadatke za zadaću koji se odnose na zadnja dva predavanja kao i dodatne zadatke za vježbu koji su vam obećani za predavanje koje se nije održalo zbog državnog praznika. Zbog činjenice da se predavanje nije održalo, neke dodatne tvrdnje koje su navedene u zadacima potrebno je usvojiti za završni ispit. Posebno obratite pažnju na detaljnije specifikacije analize kretanja cijene bazične imovine po modelu Blacka i Scholesa. To podrazumijeva da kretanje cijene bazične imovine ili neke vrijednosnice može biti zadano ili pomoću direktne specifikacije (1) ili pomoću stohastisčke diferencijalne jednadžbe (2) te uočite vezu između parametara. Uz određene pretpostavke, (1) je rješenje SDJ (2).

Napomena. Za računanje zadataka u kojima se pretpostavlja da se proces cijene neke vrijednosnice (bazične imovine, konkretno i najčešće dionice) analizira pomoću Black-Scholesovog modela, vrlo je važno primijetiti da pretpostavka log-normalnosti na proces cijene dionice podrazumijeva sljedeće:

a) $$S(t) = S(0)e^{\left(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W(t)} \qquad (1)$$

U odnosu na fizičku ili objektivnu vjerojatnost *P*, vrijedi

$$\ln[S(T)] \sim N\left(\ln S(0) + \left(\mu-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right),$$

Također u tom slučaju vrijedi da je dinamika kretanja cijene dionice pomoću stohastičke diferencijalne jednadžbe dana sa

$$dS_t = (\mu-\delta)S_t dt + \sigma S_t dW_t \qquad (2)$$

pri čemu su μ i σ drift odnosno volatilnost, *W* je Brownovo gibanje, a δ je prinos od dividende u slučaju da dionica neprekidno isplaćuje dividendu. U slučaju da dionica **ne isplaćuje dividendu**, tada je δ **=0.** U tom slučaju kažemo da se proces cijene dionice $S(t)$ kreće po modelu **geometrijskog Brownovog gibanja**.

b) u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik P^*, vrijedi

$$\ln[S(T)] \sim N\left(\ln S(0) + \left(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right),$$

pri čemu je *r* nerizična kamatna stopa. Primijetite da u slučaju vjerojatnosti neutralne na rizik, parametar drifta μ iščezava.

U slučaju da **dionica neprekidno isplaćuje dividendu** čija je stopa prinosa δ, **Black-Scholesova formula** glasi:

$$C_{op} = S(0)e^{-\delta T}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2),$$

pri čemu su X izvršna cijena opcije, a T dospijeće, a d_1, d_2 zadani sa $d_1 = \dfrac{\ln\dfrac{S_0}{X} + \left(r - \delta + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = \dfrac{\ln\dfrac{S_0}{X} + \left(r - \delta - \dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$, dok je $N(.)$ funkcija distribucije normalne slučajne varijable. Uočite da jedina promjena u odnosu na formule sa predavanja je u parametru δ koji se oduzima od referentne nerizične kamatne stope r.

1. Pretpostavimo da je na dan 1.6.2010. cijena dionice XYZ 10% niža nego što je bila 1.3.2010. Pretpostavimo da je referentna nerizična kamatna stopa 6% te da promatramo unaprijedni ugovor s dospijećem 1.12. 2010.

a) Da li je cijena takvog unaprijednog ugovora na dan 1.6. veća ili manja od one na dan 1.3.?

b) Izračunajte za koliko (u %) će se promijeniti unaprijedna cijena 1.6.2010. u usporedbi s onom 1.3.2010. za takav unaprijedni ugovor.

2. Pretpostavimo da je referentna tržišna kamatna stopa na tržištu 8%. No, kao mali investitor možete posuđivati novac od banke po stopi od 10%, a oročiti ili investirati novac po stopi od 7%. Pretpostavimo nadalje da je unaprijedna cijena ugovora s dospijećem od jedne godine dana sa $F(0,1)=89$, te da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ koja isplaćuje dividendu u iznosu od 2 za pola godine dana sa 83. Da li postoji mogućnost arbitraže? Ako da, odredite strategiju arbitraže.

.

3. Pretpostavimo da se dionicom XYZ koja ne isplaćuje dividendu trenutno na tržištu trguje cijenom od 15.6 te da je cijena europske call opcije na dionicu XYZ izvršne cijene 15 i dospijećem tri mjeseca trguje po cijeni od 2.83. Referentna nerizična kamatna stopa je 6.72%. Kolika je cijena europske put opcije iste izvršne cijene i dospijeća?

4. Pretpostavimo da je trenutna tržišna cijena europske call opcije na dionicu XYZ izvršne cijene 24 i dospijeća od pola godine 5.09, a europske put opcije iste izvršne cijene i istog dospijeća 7.78. Trenutna tržišna cijena dionice je 20.37, a referentna nerizična kamatna stopa na tržištu je 7.48%. Odredite da li na tržištu postoji mogućnost arbitraže te ukoliko postoji, odredite strategiju arbitraže.

5. Pretpostavimo da tvrtka XYZ u Hrvatskoj uvozi automobile iz Njemačke te želi dogovoriti unaprijedni ugovor za kupnju eura (strana valuta u Hrvatskoj!) za pola godine od danas. Referentna nerizična kamatna stopa za investiranje u domaću valutu je 4%, a za investiranja u stranu valutu je 3% te pretpostavimo da je trenutni tečaj 7.25. Odredite izvršnu cijenu europske call i put opcije na tečaj s dospijećem od pola godine uz uvjet da je cijena europske call opcije jednaka cijeni europske put opcije. (Uputa: primijetite da kod call-put paritetne relacije vrijedi $C_0^E - P_0^E = V_X(0)$, pri čemu je $V_X(t)$ cijena unaprijednog ugovora unaprijedne cijene X u trenutku t. Primijetite da call-put paritetnu relaciju možete zapamtiti i pomoću takve relacije)

6. Neka su C^E, C^A cijena europske call odnosno američke call opcije izvršne cijene X i dopsijeća T.

a) Pokušajte dati neki intuitivni razlog zašto bi bilo logično pretpostaviti da vrijedi $C^E \le C^A$

b) Dokažite da vrijedi $C^E \le C^A$ koristeći argument arbitraže.

c) Pretpostavite da analizirate dionicu XYZ trenutne tržišne cijene $S(0)$. Neka je C^E trenutna tržišna cijena europske call opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća T. Dokažite da vrijedi $C^E < S(0)$ koristeći argument arbitraže.

7. Neka su C^E, C^A, P^E, P^A redom cijena europske call opcije, američke call opcije, europske put opcije i američke put opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća T. Neka je trenutna tržišna cijena dionice XYZ $S(0)$ te neka je r referentna nerizična kamatna stopa. Koje od sljedećih relacija vrijede:

a) $S(0) \le Xe^{-rt} + C^E$

b) $P^E > Xe^{-rT}$

c) $Xe^{-rT} - P^E \le S(0)$

d) $C^E + X \le C^E \le C^A$

8. Pretpostavimo da analiziramo cijenu dionice XYZ pomoću Black-Scholesovog modela te da je poznato sljedeće: referentna nerizična kamatna stopa je 5.5%, cijena izvedenice na dionicu XYZ u trenutku t dana je sa $e^{rt}\ln[S(t)]$, pri čemu je $S(t)$ cijena dionice XYZ u trenutku t, volatilnost dionice XYZ je 30%, dionica isplaćuje dividendu neprekidno po stopi koja je proporcionalna cijeni dionice, a izvedenica ne isplaćuje dividendu (drugim riječima, ako izvedenicu promatramo kao vrijednosnicu za sebe, posjedovanje takvog vrijednosnog papira ne osigurava isplatu dividende). Odredite prinos od dividende na dionicu XYZ.

Uputa uz prethodne napomene: na predavanjima je analiziran slučaj kada dionica (bazična imovina!) **ne** isplaćuje dividendu i u tom slučaju uz pretpostavku log-normalne distribucije za cijenu bazične imovine S, vrijedi sljedeće: <u>u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik</u> $\ln[S(T)] \sim N\left(\ln S(0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right)$ (Uvjerite se u istinitost ove tvrdnje koristeći definiciju Brownovog gibanja s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik). Ukoliko dionica **isplaćuje dividendu** po stopi δ, tada uz pretpostavku log-normalne distribucije za cijenu bazične imovine S, vrijedi $\ln[S(T)] \sim . N\left(\ln S(0) + \left(r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \sigma^2 T\right)$. Drugim riječima, prinos od dividende utječe samo na *drift*, odnosno na očekivanu vrijednost cijene dionice (bazične imovine!). Nadalje, prisjetite se da prema fundamentalnom teoremu vrednovanja imovine, (diskontirani!) slučajni proces $\{e^{-rt}V(S(t),t)\}$ je martingal u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik. Budući da je, u ovom zadatku, proces od interesa zapravo cijena izvedenice na dionicu XYZ u trenutku t koja je zadana sa

$$V(S(t),t) =) \, e^{rt} \ln[S(t)],$$

to znači da mora vrijediti

$$E^*\left[e^{-rT}V(S(T)) \mid S(0)\right] = def\_od\_V(S(t)) = E^*\left[e^{-rT}e^{rT}\ln[S(T)] \mid S(0)\right] = \ln[S(0)],$$

odnosno

$$E^*\left[\ln[S(T)] \mid S(0)\right] = \ln[S(0)]. \qquad (*)$$

Budući da s lijeve strane jednakosti uvjetujete očekivanu vrijednost na konstantu $S(0)$ koja je ujedno i uključena u parametre distribucije slučajne varijable $\ln[S(T)]$, vrijedi da je $E^*[\ln[S(T)] \mid S(0)] = E^*[\ln[S(T)]]$, a budući da vam je poznata distribucija slučajne varijable $\ln[S(T)]$, izračunajte očekivanje na lijevoj strani jednadžbe (*), a zatim riješite jednadžbu (*) po δ.

U ovom zadatku također **uočite** da nije bilo potrebno zadavati parametar drifta μ budući da se potrebno računanje vrši s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik, a prethodno smo vidjeli da u specifikacijama vrednovanja s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik, parametar drifta nestaje, tj. ne pojavljuje se u formulama! To nije slučajno, već ima svoju i ekonomsku interpretaciju.

Napomena: u sljedećim zadacima prisjetite se formule za udjele rizične i nerizične imovine (x,y) u replicirajućem portfelju za izvedenicu čija je isplatna (ugovorna) funkcija zadana sa $f(S_T)$, pri čemu je T dospijeće izvedenice, uz pretpostavku modela binomnog stabla. Prisjetite se također da kad su vam ti udjeli poznati, da je tada vrijednost takvog portfelja u trenutku 0 dana sa $V(0) = xS(0) + y,$ pri čemu pretpostavljamo da vrijedi da je $A(0)=1$, odnosno da je vrijednost nerizične imovine u trenutku 0 jednaka jedan. Ukoliko vrijednost nerizične imovine u trenutku 0 nije jednaka jedan, tada je vrijednost takvog portfelja u trenutku 0 dana sa $V(0) = xS(0) + yA(0).$

Uz **uvjet nearbitraže,** cijena izvedenice (u bilo kojem vremenskom trenutku pa tako i u trenutku $t=0$ odnosno *danas*) mora biti jednaka vrijednosti replicirajućeg portfelja u tom istom trenutku (teorem s predavanja!). Drugim riječima, $V(t) = \Pi(t),$ pri čemu je Π cijena izvedenice.

9. Pretpostavimo da analiziramo model binomnog stabla. Dokažite da je cijena europske call opcije izvršne cijene X i dospijeća 1 rastuća funkcija povrata u slučaju kretanja cijene prema gore, g, uz uvjet da su ostale varijable konstantne odnosno da se ne mijenjaju, uz pretpostavku da za izvršnu cijenu opcije vrijedi $S_d < X < S_g$, pri čemu su S_g odnosno S_d cijene bazične imovine u trenutku 1 u slučaju kretanja cijene prema gore odnosno prema dolje. Analizirajte utjecaj promjene povrata u slučaju kretanja cijene prema dolje, d, na cijenu opcije.

10. Uz pretpostavku modela binomnog stabla, odredite formulu za trenutnu cijenu europske call opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća 1, tj. odredite $C^E(0)$, ukoliko je referentna nerizična kamatna stopa jednaka nula, cijena dionice XYZ u trenutku nula iznosi $S(0)=X=1$. Izračunajte cijenu takve opcije ukoliko su $g=5\%$, $d= -5\%$ te ukoliko su $g=1\%$, $d= -19\%$.

11. Pretpostavimo da promatramo jednoperiodni model binomnog stabla. Odredite početnu vrijednost portfelja koji replicira call opciju na dionicu XYZ ukoliko se pri svakoj prodaji dionice investitor susreće sa troškovima transakcija proporcionalnima vrijednosti dionice XY u iznosu od 2% (drugim riječima, prodavač dionice dobiva 98% vrijednosti dionice), dok prilikom kupnje dionice XYZ nema transakcijskih troškova. Usporedite tako dobivenu vrijednost portfelja sa početnom vrijednosti porteflja ukoliko nema nikakvih transakcijskih troškova. Pretpostavimo da su zadane sljedeće vrijednosti: izvršna cijena opcije $X=S(0)=100$, pri čemu je $S(0)$ vrijednost dionice XYZ u trenutku 0, povrati u slučaju rasta odnosno pada cijene dionice dani su sa g=10%, d= -10%, a referentna nerizična kamatna stopa jednaka je 5%.

12. Pretpostavimo da promatramo jednoperiodni model binomnog stabla. Neka je trenutna cijena dionice XYZ dana sa $S(0)=75$, povrati u slučaju rasta odnosno pada cijene dionice dani su sa g=20%, d= -10% te da novac možete posuđivati po kamatnoj stopi od 12%, ali kamatna stopa na depozite iznosi 8%. Odredite vrijednost replicirajućeg portfelja za put i call opciju.

Napomena: Ovdje je **jako bitno da primijetite sljedeće:** ukoliko je udio nerizične imovine u replicirajućem portfelju negativan, to znači da novac morate <u>posuditi</u> što ujedno znači da u tom slučaju koristite kamatnu stopu od 12% kao nerizičnu kamatnu stopu. Ukoliko je udio nerizične imovine u replicirajućem portfelju **pozitivan**, to znači da novac oročavate pa kao referentnu nerizičnu kamatnu stopu uzimate kamatnu stopu na depozite! Dakle prvo izračunate udjele rizične i nerizične imovini u replicirajućem portfelju. Izbor referentne nerizične kamatne stope je ključan za određivanje vjerojatnosti neutralne na rizik budući da je u modelu binomnog stabla $p_g^* = \dfrac{r-d}{g-d}$. Dakle, ovisno o tome da li je udio nerizične imovine u replicirajućem portfelju pozitivan ili negativan, koristit ćete različite referentne nerizične kamatne stope (ukoliko se kamatna stopa na depozite razlikuje u odnosu na onu za pozajmljivanje) te dobiti različite vjerojatnosti neutralne na rizik. Tada se vrednovanje opcija može računati po formuli

$$\Pi(0) = \frac{1}{1+r} E^*\left[f(S_1)\right], \qquad (**)$$

pri čemu je f ugovorna funkcija opcije, 1 je dospijeće budući da pretpostavljamo jednoperiodni binomni model, a očekivanje se računa u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik.

Provjerite da li su cijene koje ste izračunali konzistentne s formulom za vrednovanje (**). (Kako biste odredili cijenu opcije u skladu s formulom (**) potrebno je odrediti vjerojatnosti neutralne na rizik u slučaju negativnog udjela nerizične imovine u replicirajućem portfelju kao i u slučaju pozitivnog udjela nerizične imovine u replicirajućem portfelju, i te dvije vjerojatnosti će se općenito razlikovati!