

Financijska matematika

Dr. sc. Petra Posedel

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zagreb, 27.3.2015.

Varijabilne kamatne stope

- Uz slučajne promjene u kamatnim stopama problemu menadžmenta rizika se pristupa uvođenjem matematičkog alata *duracije* (trajanje) investicija u obveznicama.
- Nadalje, vidjet ćemo da stope ovisne o dospeljeću također ne mogu biti determinističke, što vodi do stohastičkih kamatnih stopa.

Prinosi nezavisni o dospijeću: beskuponske obveznice

- Sadašnja vrijednost beskuponske obveznice **određuje** kamatnu stopu koju zovemo *prinos* (engl. yield) i označavamo sa $y(0)$ kako bismo naglasili da se računa u trenutku 0:

$$B(0, T) = e^{-Ty(0)}$$

- U nekom drugom vremenskom trenutku $t < T$

$$B(t, T) = e^{-(T-t)y(t)}$$

- Općenito (i u mnogim realnim situacijama), obveznica s različitim dospijećem implicira različiti prinos.

Pojam arbitraže: uvod

- *Princip nearbitraže*: Ne postoji investitor koji može ostvariti profit bez preuzimanja rizika kao niti bez početnog ulaganja.
- Drugim riječima ne postoji *portfelj* čija je početna vrijednost $V(0)=0$ takav da je $V(1) > 0$ s pozitivnom vjerojatnošću. Ukoliko je početna vrijednost mogućeg portfelja jednaka 0, tj. $V(0)=0$, tada je $V(1)=0$ s vjerojatnošću 1.
- Ukoliko postoji portfelj ulaganja koji narušava taj princip tada kažemo da **postoji mogućnost arbitraže**.

□ **Propozicija.** Ako je prinos $y(t)$ za neki $t > 0$ poznat u trenutku 0, tada je $y(0) = y(T)$ ili je moguće naći strategiju arbitraže.

Dokaz: Pretpostavimo da je $y(0) < y(T)$. Promatramo sljedeću investiciju:

1. Posudimo jednu novčanu jedinicu za period od 0 do $T+1$ te taj iznos oročimo od trenutka 0 do T , po stopi od $y(0)$
2. u trenutku T podignemo oročenu glavniciu (uvećanu za kamatu) i dobiveni iznos investiramo u trajanju od jednog vremenskog perioda po stopi $y(T)$. U trenutku $T+1$ će vrijednost biti $e^{Ty(0)+y(T)}$.

- U trenutku $T+1$ za posuđenu iznos potrebna je isplata od $e^{(T+1)y(0)}$ što ujedno daje pozitivnu bilancu u iznosu od $e^{Ty(0)}(e^{y(T)} - e^{y(0)}) > 0$ što predstavlja profit uz arbitražu.

Slično u slučaju da je $y(0) > y(T)$.



- Napomena: prema propoziciji slijedi da ukoliko su kamatne stope **nezavisne** o dospijeću i **determinističke** (tj. $y(T)$ je poznat unaprijed za svaki T veći ili jednak 0), tada one moraju biti **konstantne**.
- Prije: $y(T)=y(0)=r$
- Dakle, uz uvjet nearbitraže:

$$B(0, T) = B(0, t) \cdot B(t, T), \quad 0 \leq t \leq T$$

-
- **Primjer.** Pretpostavimo da promatramo mjesečni obračun. Odredite strategiju koja omogućava arbitražu ako su prinosi nezavisni o dospijeću, ukoliko se na tržištu trguje obveznicama nominalne vrijednosti 1 s dospijećem od 6 mjeseci s cijenama $B(0,6)=0.9320$ te $B(3,6)=0.9665$. Cijene su poznate u trenutku 0.

Primijetimo:

- Empirijski gledano, prinosi implicirani povijesnim cijenama obveznica variraju kroz vrijeme. U modelu bez arbitraže, kako bi se omogućilo da prinosi variraju kroz vrijeme, a da su istovremeno nezavisni o dospijeću, potrebno je omogućiti da su oni **slučajni**, što ujedno znači da je nemoguće unaprijed predvidjeti da li će $y(T)$ biti veći ili manji od $y(0)$.
- Dakle, podrazumijevat ćemo da je u svakom vremenskom trenutku t , $y(t)$ pozitivan slučajan broj, nezavisan o dospijeću odgovarajuće obveznice.
- **Cilj** je dakle analizirati **povrat na investiranje** u obveznice te prijeteci **rizik** koji proizlazi od slučajnih promjena u kamatnim stopama.

-
- Uočimo da u slučaju investiranja u beskuponske obveznice koje se drže do dospeljeća, stopa povrata je **osigurana**, budući da je završna isplata fiksirana unaprijed i nije pod utjecajem eventualnih **promjena** u kamatnim stopama.
 - **Problem:** ukoliko odlučimo zatvoriti investiciju prije dospeljeća prodajom obveznice, susrećemo se s rizikom da će se kamatne stope u međuvremenu promijeniti što može *nepovoljno* utjecati na **konačnu vrijednost investicije**.

- **Primjer.** Pretpostavimo da investiramo u obveznicu na period od šest mjeseci te neka je obračun kamata mjesečni. Pretpostavimo nadalje da na tržištu kupimo nekoliko jediničnih obveznica s dospijećem od godinu dana i cijenom od $B(0,12)=0.93$. Budući da je horizont planirane investicije šest mjeseci, analizirajte sljedeće slučajeve (odredite povrat na investiciju):

a) $y(6) = 7.26\%$

b) $y(6) = 6.26\%$ (tj kamatna stopa na tržištu je pala za 1 postotni poen)

c) $y(6) = 8.26\%$ (tj kamatna stopa na tržištu je narasla za 1 postotni poen)

- Nađite zatvorenu formulu u općem slučaju ukoliko dođe do promjena kamatnih stopa na tržištu, kao i uz uvjet da se odlučite na investiciju s horizontom ulaganja kraćim od dospijeća. Što možete zaključiti?

Zadaci.

- Pretpostavljamo da promatramo mjesečni obračun. Ukoliko investiramo 100 kn u beskuponsku obveznicu s dospijećem od šest mjeseci tržišne cijene $B(0,6)=0.94$ kn. Nakon šest mjeseci reinvestirate dobiveni iznos u obveznice istog tipa kojima se trguje po cijeni od $B(6,12)=0.9368$ kn. Izračunajte odgovarajuće implicirane kamatne stope te broj obveznica koje posjedujete u svakom trenutku. Izračunajte logaritamski povrat na investiciju kroz godinu dana.

-
- Pretpostavimo da je obračun kamata dnevni i da godina ima 360 dana. Pretpostavimo nadalje da se na tržištu trguje obveznicom s dospijećem od godinu dana po cijeni od $B(0,360)=0.92$ te da kamatna stopa ostaje nepromijenjena prvih šest mjeseci, zatim na 180. dan naraste za 2 postotna poena te ostaje na toj razini do kraja godine. Ukoliko je obveznica kupljena na početku godine, odredite u kojem trenutku treba prodati obveznicu kako bi se ostvario logaritamski povrat od 4.88% ili više?

Prinosi nezavisni o dospijeću (cont): kuponske obveznice

- ❑ Investiranje u kuponske obveznice je kompliciranije nego ono u beskuponske obveznice
- ❑ Čak i u slučaju da se obveznica drži do dospijeća, kuponi se isplaćuju u međuvremenu te se isplate mogu reinvestirati.
- ❑ Povrat na takvu investiciju ovisi o prevladavajućim kamatnim stopama u trenucima isplate kupona.

□ **Primjer.** Pretpostavimo da investiramo sumu od 1000 kn u obveznicu s dospijećem od 4 godine, nominalne vrijednosti 100 koja isplaćuje godišnje kupone u iznosu od 10 kn. (Na takvu se obveznicu može gledati kao na kolekciju četiri beskuponske obveznice s dospijećima 1,2,3 i 4 godine i nominalnim vrijednostima 10,10,10 te 110). Pretpostavimo da se takvim obveznicama trenutno na tržištu trguje cijenom od 91.78 kn. Odredite isplatu u kuponima nakon godinu dana. Pretpostavimo da nakon isplate prvog kupona odlučite prodati obveznice kojima raspolazete, a na tržištu je došlo do promjene u kamatnim stopama. Odredite iznos koji ćete ostvariti u tom trenutku ako kamatna stopa a) padne na 10% i b) naraste na 14%. Odredite kolika bi trebala biti stopa $y(1)$ ukoliko želite ostvariti logaritamski povrat na investiciju od 10%.

Zadaci.

- Pretpostavimo da su trenutno uvjeti na tržištu takvi da je $B(0,T) < B(0,T+1)$, pri čemu $B(0,T)$ predstavlja cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0 s dospijećem T .
 - a) Kako se navedena nejednakost reflektira na odnos odgovarajućih prinosa $y(0,T)$ i $y(0,T+1)$?
 - b) Da li to ujedno predstavlja mogućnost arbitraže?
 - c) Odredite strategiju arbitraže
 - d) Interpretirajte situaciju na tržištu koja je određena takvom nejednakosti cijena obveznica.

-
- Na tržištu se nude beskuponske obveznice s dospijećem od godinu dana i nominalne vrijednosti 100 po cijeni 95.12, kao i kuponske obveznice nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od dvije godine i kuponskom stopom 10 % po cijeni 104.95. Pretpostavka investitora je da će se nakon godinu dana na tržištu također nuditi beskuponske obveznice s dospijećem od godinu dana i nominalne vrijednosti 100 po cijeni 95.12.
 - Da li investitor može ostvariti strategiju za arbitražu? Ako da, odredite ju. Pretpostavlja se da je dopuštena kratka pozicija u obveznici, odnosno izdavanje obveznica ili prodavanje obveznica koje ne posjedujete.