Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za samostalan rad
27. 4. 2010.

1. Pretpostavimo da je da su cijene nerizične imovine $A(0)=100$, $A(1)=110$, $A(2)=121$, dok su cijene dionice XYZ ovisno o različitim scenarijima dane tablicom:

Scenarij	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	112
ω_2	90	100	106
ω_3	90	80	90
ω_4	90	80	80

a) Da li postoji strategija arbitraže ako tržište dozvoljava kratku poziciju u dionicama, ali prema pravilniku managementa investicijskog fonda broj udjela svake od vrijednosnica u portfelju mora biti cijeli broj?

b) Da li postoji strategija arbitraže ako tržište dozvoljava kratku poziciju u dionicama, ali se prema pravilniku trgovanja naplaćuje provizija u iznosu od 5% od ukupnog volumena trgovanja ukoliko se trguje dionicama?

2. Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli očekivanja μ, varijance σ^2 te definiramo *n*-tu parcijalnu sumu kao $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$. Nadalje neka je $\varphi(.)$ generirajuća funkcija momenata slučajne varijable X_1 $\left(\varphi(t) = E\left[e^{tX_1}\right]\right)$. Pokažite sljedeće:

a) Ako je $\mu = 0$, tada je niz S_n, $n \geq 1$ martingal

b) Niz $M_n = S_n - n\mu$, $n \geq 1$ je martingal

c) Niz $V_n = (S_n - n\mu)^2 - n\sigma^2$, $n \geq 1$ je martingal (uputa: iskoristite svojstvo uvjetnog očekivanja da za sigma algebru *G* i sl. varijablu *Y* koja je *G*-izmjeriva vrijedi $E[Y \cdot X | G] = Y \cdot E[X | G]$)

d) (Martingalni niz omjera vjerodostojnosti u slučaju Bernoullijevih slučajnih varijabli). Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ niz n.j.d. Bernoullijevih slučajnih varijabli, *B*(*p*). Definiramo $Z_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{2S_n - n}$, $n \geq 0$. Tada je niz $(Z_n)_{n\geq 0}$ martingal (uputa: Ako je *f* neprekidna funkcija, a X F-izmjeriva slučajna varijabla, tada je $f(X)$ također F-izmjeriva slučajna varijabla.).

e) (Martingalni niz omjera vjerodostojnosti u općem slučaju) Niz $K_n(y) = \frac{e^{yS_n}}{\varphi(y)^n}$, $n \geq 1$ je martingal za svaki $y > 0$ za koji je $\varphi(y) < \infty$.

3. Neka je X integrabilna slučajna varijabla, $E[|X|] < \infty$ te neka je $(F_n)_{n\geq 0}$ niz rastućih sigma algebri na vjerojatnosnom prostoru (Ω, F, P). Tada je niz definiran sa $X_n = E[X \mid F_n]$, $n \geq 1$ martingal. (Uputa: prema svojstvu uvjetnog očekivanja vrijedi $E[E[X \mid G] | H] = E[X | H]$, za svaku integrabilnu slučajnu varijablu X na vjerojatnosnom prostoru (Ω, F, P), pri čemu su G i H sigma algebre za koje vrijedi $H \subseteq G \subseteq F$, tj. sigma algebra H „sadrži“ manje informacija od sigma algebre G.) **Napomena:** primijetite i upamtite činjenicu da je moguće krenuvši samo od integrabilne slučajne varijable konstruirati martingal.

4. Pretpostavimo da promatramo sljedeću igru: igrač opetovano baca simetrični novčić konačan broj puta. Ishodi pojedinih bacanja su $X_1, X_2, \ldots$, pri čemu je X_n=1 u slučaju da padne glava, odnosno X_n= -1 u slučaju da padne pismo, $n \geq 1$. Pretpostavimo da se pri svakom bacanju možete kladiti s koeficijentom veličine W_n>0 na ishod svakog od sljedećeg bacanja, uz napomenu da je za razliku od uobičajenog klađenja ovdje i gubitak proporcionalan koeficijentu, te da veličina koeficijenta W_n može **ovisiti** o prethodno opaženim ishodima bacanja $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, ali ne i o *trenutnom* ishodu X_n (uočite da to znači da su vaša *nova* "saznanja" o koeficijentu W_n ovisna eventualno o $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ odnosno o informacijama kojima raspolažete do *trenutka* (i uključujući) n-1, ali ne i o ishodu u *n-tom* bacanju odnosno okladi. To ujedno implicira da je niz $(W_n), n \geq 1$, **predvidiv** u odnosu na $(X_n), n \geq 1$. Drugim riječima, predvidivost možete uvijek objasniti takvim argumentom, dakle vrlo često (ukoliko slučajna varijabla nije analitički zadana) opisnim argumentom odnosno ovisno o interpretaciji i značenju).

a) Odredite isplatu za igrača u svakom bacanju novčića

b) Odredite koji je neto dobitak za igrača nakon n odigranih bacanja (strategijsko investiranje)

c) Pokušajte dokazati da je niz, neto dobitaka za igrača nakon n bacanja, $(D_n), n \geq 1$ martingal. Kako biste interpretirali tu činjenicu, odnosno što takva činjenica znači u terminima neto dobiti za igrača.

5. Pretpostavimo da u jednoperiodnom modelu binomnog stabla ne postoji mogućnost arbitraže. Dokažite da u tom slučaju postoji jedinstvena martingalna mjera čija je vjerojatnost rasta cijene rizične imovine dana sa $q_g = \frac{r-d}{g-d}$. Kolika je vjerojatnost pada cijene rizične imovine u svijetu neutralnom na rizik? Zadatak riješite koristeći činjenicu da je diskontirani proces cijene rizične imovine martingal [prethodno uočite a) da se na nastavi do mjere neutralne na rizik došlo na malo drugačiji način (iz činjenice da je očekivani povrat uz vjerojatnost neutralnu na rizik jednek nerizičnoj kamatnoj stopi) te b) da je nemogućnost arbitraže ekvivalentna činjenici da postoji ekvivalentna martingalna mjera u odnosu na koju je diskontirani proces cijene svake vrijednosnice martingal!]