Financijska matematika

Dr. sc. Petra Posedel

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb,10.4.2015.

Duracija (cont).

- Vidjeli smo da je promjena u cijeni obveznice povezana sa dvije karakteristike obveznica:
  - Dospijeće: što je duže vrijeme do dospijeća, veća je promjena u cijeni
  - Kuponi: štite obveznicu od promjene u kamatnim stopama; što je kupon veći, manja je promjena u cijeni

- **Cilj:** usporediti različite obveznice s obzirom na njihov **rizik**!
  Rizičnija je obveznica koja:

  - Dužim dospijećem, ukoliko su kuponi obveznica jednaki

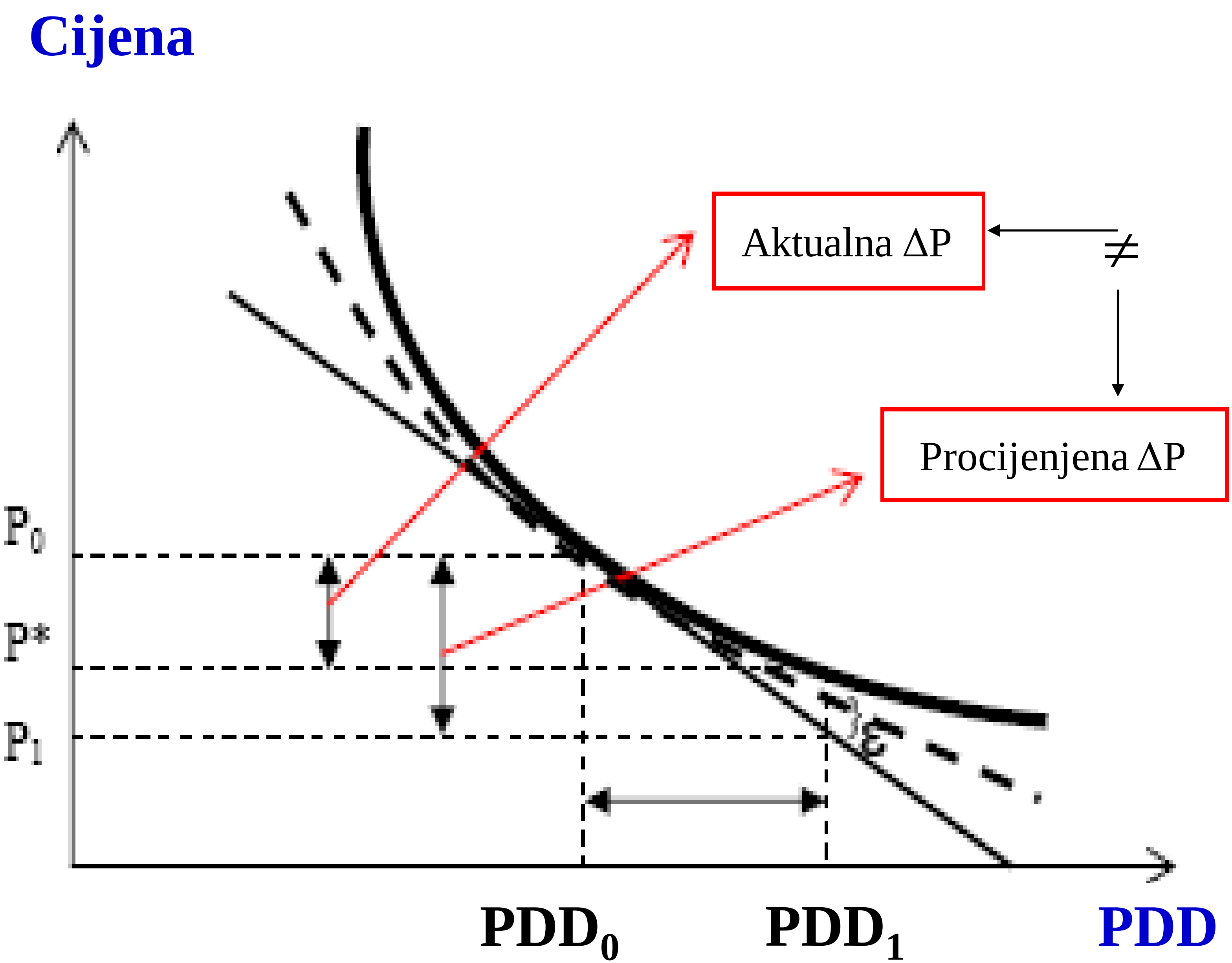
  - Manjim kuponima, ukoliko su dospijeća obveznica jednaka

- Što ako obveznice nemaju niti jednake kupone niti dospijeća?
  - Kako ih usporediti u tom slučaju?

(Macauleyeva) duracija! (*svojevrsna mješavina* kupona i dospijeća koja **kvantificira** rizik cijene obveznice.

- Nije općenito jednaka dospijeću!

- Macauleyeva duracija je **linearna aproksimacija** relacije cijene i prinosa do dospijeća, dok je sama relacija cijena i prinosa do dospijeća konveksna!

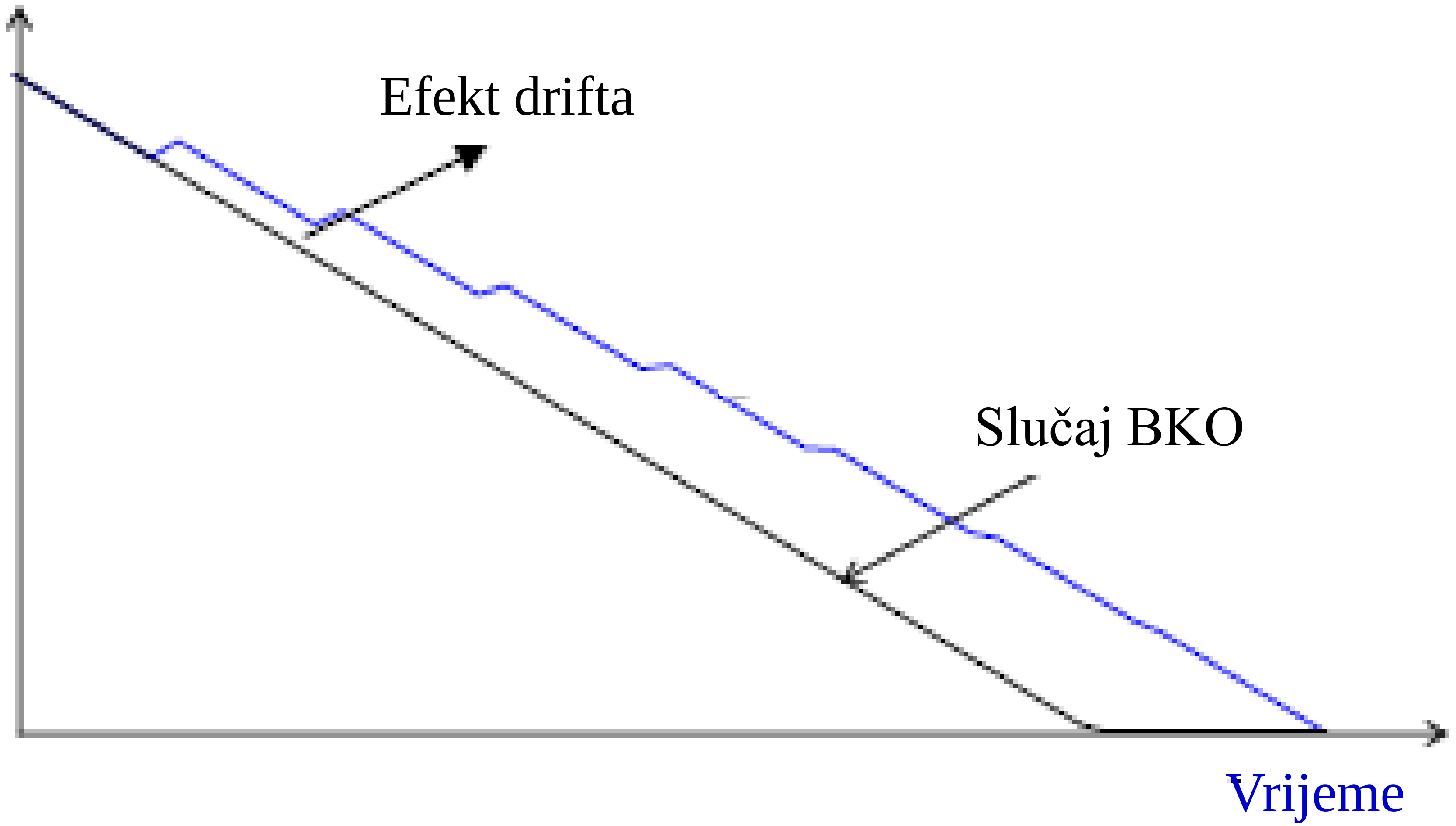

Cijena
Aktualna ΔP
≠
Procijenjena ΔP
P0
P*
P1
PDD0
PDD1
PDD

- Razlika u nejednakosti aktualne i procijenjene promjene cijene ovisi o pomaku u kamatnim stopama: što je **veća** promjena u kamatnim stopama greška u aproksimaciji je veća! (Sjetite se definicije derivacije).

- u slučaju da kamatne stope narastu, duracija **precjenjuje** aktualni pad cijena, dok u slučaju da kamatne stope padnu duracija podcjenjuje aktualni rast cijena

- Za **kuponske obveznice** evolucija duracije kroz vrijeme nije linearna. Razlog je što duracija naglo naraste u svakom trenutku isplate kupona (**efekt drifta**), budući da se ponderi resetiraju na preostale novčane tokove (isplate kupona).

Duracija



Mjere rizika: od duracije do konveksnosti

- Ovisnost cijene obveznice o prinosu do dospijeća je konveksna.
- Mogući je aproksimirati takvu relaciju na nelinearni način **koristeći konveksnost,** smanjujući time procijenjenu grešku.

  - Označimo sa NT_t *novčani tok* u trenutku *t*. Aproksimacija promjene cijene zbog promjene u kamatnim stopama koristeći drugu derivaciju

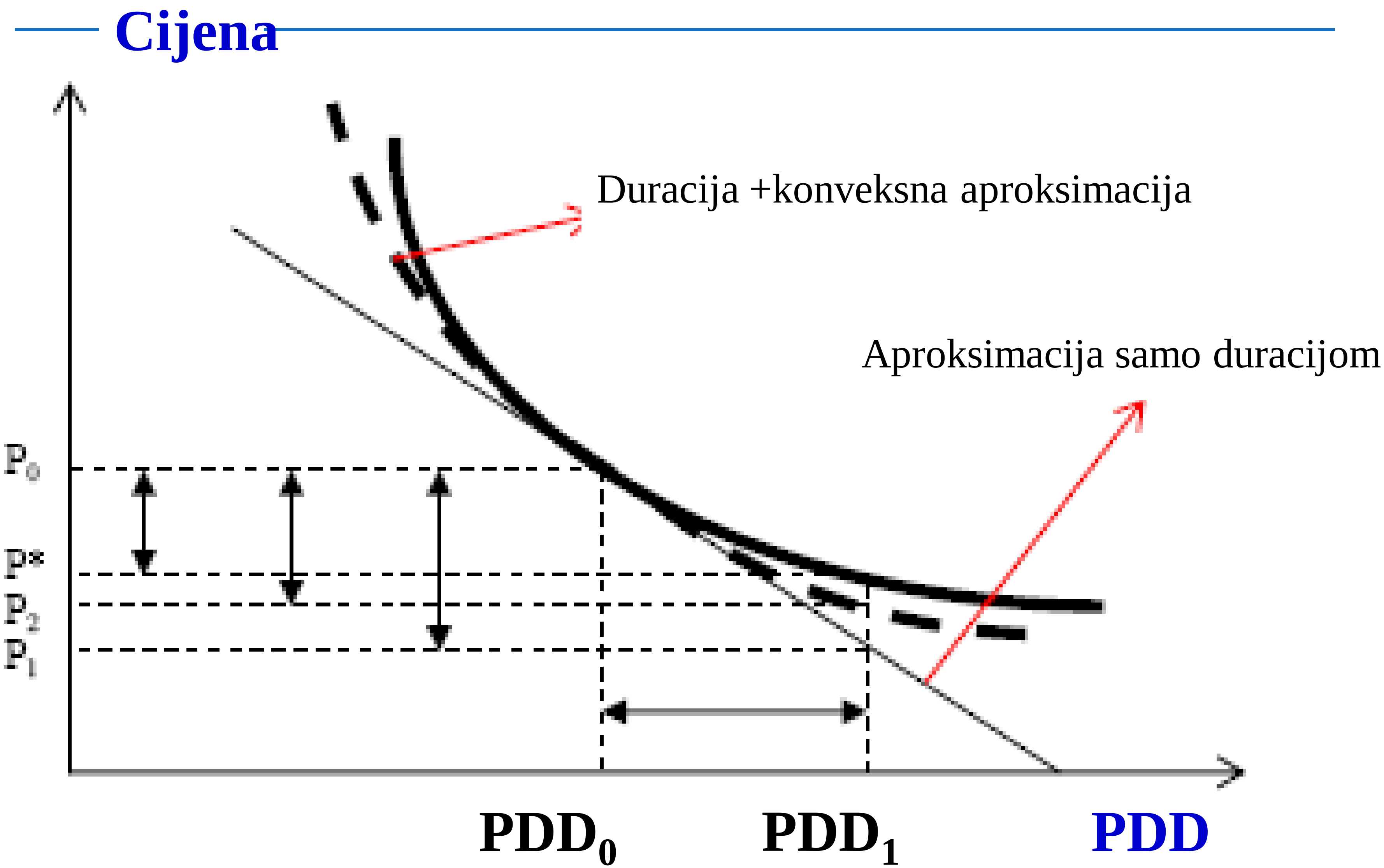
$$\frac{\partial C_K}{\partial y} = -\sum_{t=1}^{n} \frac{t \cdot NT_t}{(1+y)^{t+1}} \Rightarrow \frac{\partial^2 C_K}{\partial y^2} = -\sum_{t=1}^{n} \frac{(t+t^2) \cdot NT_t}{(1+y)^{t+2}}$$

- **Konveksnost** definiramo kao:

$$\boxed{\dfrac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n}\frac{\left(t+t^{2}\right)\cdot NT_t}{\left(1+y\right)^{t}}}{C_K}}$$

- Koristeći Taylorovu formulu (drugog reda), može se pokazati da je **relativna promjena cijene obveznice** uslijed promjene u kamatnim stopama dana sa:

$$\frac{\Delta C_K}{C_K} \approx -\frac{1}{\left(1+y\right)}\cdot D\cdot \Delta y+\frac{1}{\left(1+y\right)^{2}}\cdot Conv\cdot \frac{\Delta y^{2}}{2}$$


Cijena
Duracija +konveksna aproksimacija
Aproksimacija samo duracijom
P_0
P^*
P_2
P_1
PDD_0
PDD_1
PDD

- Konveksnost je izvedena iz kvadratne aproksimacije krivulje cijene obveznice u odnosu na kamatne stope.
  - Daje bolju procjenu <u>promjene cijene</u>
  - Konveksnost je uvijek pozitivna, stoga u slučaju porasta kamatnih stopa reducira pad cijena, dok u slučaju pada kamatnih stopa, povećava porast cijena.

$$\Downarrow$$

Uz istu duraciju, preferira se veća konveksnost, ali to vrijedi samo u slučaju <u>jedne obveznice</u>, a ne portfelja obveznica!

Interpretacija konveksnosti

- Mjere rizika cijene obveznice: duracija i konveksnost

- Konveksnost je mjera *disperzije* (raspršenja) novčanih tokova oko duracije. Što to točno predstavlja?

  - Disperzija dospijeća novčanih tokova oko duracije (trajanja!) kao

$$V_D^2 = \sum_{t=1}^{n} (t - D)^2 \cdot \frac{\frac{NT_t}{(1+y)^t}}{C_K}$$

- Može se pokazati da vrijedi (DZ!):

$$\boxed{Conv = D + D^2 + V_D^2}$$

odnosno, za istu duraciju konveksnija je ona obveznica (ili portfelj obveznica) koja ima raspršenije novčane tokove.

- Kako se **mjere povrata** (PDD) i **rizika** (duracija i konveksnost) računaju za portfelj obveznica?
  - Prisjetimo se: PDD i duracija su vagani prosjeci tih mjera za pojedine obveznice u portfelju, pri čemu je ponder dan sa tržišnom vrijednosti obveznica u portfelju (npr. duracija portfelja je vagani prosjek duracija pojedinih obveznica)

- Takav pristup ima dva nedostatka:
  - Daje samo aproksimaciju odgovarajućih mjera
  - Ne može se iskoristiti za računanje konveksnosti portfelja

→ Management portfelja obveznica

- Upravljanje portfeljem obveznica s mjerama povrata i rizika, zapravo znači upravljanje portfeljem s **krivuljom prinosa**, odnosno funkcije prinosa do dospijeća <u>u ovisnosti o dospijeću,</u> ***y*(0,*T*).**
  - Korištenje Macaulayeve duracije u managementu portfelja obveznica zahtjeva ključnu pretpostavku o pomacima u krivulji prinosa

- **Kod imunizacije portfelja:** za promjenu u kamatnoj stopi, svaki početni kapitalni gubitak (dobitak) može se *kompenzirati* (kroz vrijeme) većom (manjom) stopom reinvestiranja.
  - Vidjeli smo: bez obzira što su promjene u kamatnim stopama neočekivane, moguće je *osigurati* određeni povrat kompozicijom portfelja čija je duracija jednaka definiranom periodu držanja investicije.
    - Koliki je povrat u pitanju?
  - U svakom periodu, ostatak duracije mora biti jednak ostatku perioda držanja investicije.

  - Problem: kuponske obveznice! Zbog ujednačavanja efekta drifta, portfelj se mora **rekonstruirati** pri svakoj isplati kupona

- Pritom je, za potrebe imunizacije portfelja, ključna pretpostavka **ravna krivulja prinosa** sa paralelnim pomacima.
  - U suprotnom će kamatna stopa prilikom reinvestiranja biti drugačija od one koja je uzrokovala promjenu u vrijednosti portfelja!

- Označimo sa t period držanja investicije, a sa V_t vrijednost portfelja u trenutku t. Tada vrijedi:

$$V_t = C_K(\delta) \cdot (1 + PDD + \delta)^t$$

Želimo da V_t bude **konstantno**!

  - Ukoliko npr. kamatne stope narastu, prvi faktor desne strane će se smanjiti, a drugi će se faktor povećati! (i obrnuto).

Za t =D

- Ukoliko se kamatna stopa ne promjeni, povrat za vrijeme držanja investicije jednak je prinosu do dospijeća.

$$V_t = \sum_{s=0}^{t} NT_s \cdot (1+PDD)^{t-s} + \sum_{s>t} \frac{NT_s}{(1+PDD)^{s-t}}$$

$$= (1+PDD)^t C_K$$

- **Babcockova procjena povrata**. Ukoliko pretpostavimo jednokratan pomak krivulje prinosa, tada je povrat portfelja moguće procijeniti formulom:

$$R = PDD + \left[1 - \frac{D}{t}\right] \cdot \Delta PDD$$

- Ukoliko je:
  - $D > t$ tada je efekt cijene dominirajući
  - $D < t$ tada je efekt reinvestiranja dominirajući

- U praksi se za određeni period držanja investicije maksimizira povrat:
  - Povećanjem duracije portfelja ukoliko se očekuje pad u kamatnim stopama
  - Smanjivanjem duracije portfelja ukoliko se očekuje rast u kamatnim stopama

Aktivna strategija $(D \neq t)$ za razliku od pasivne strategije (imunizacije), ima za cilj maksimizaciju povrata (apsolutnog kada $D \neq t$ ili relativnog $MD \neq MD_{Benchmark}$)

Što ako pomaci u krivulji prinosa (prilikom imunizacije) nisu paralelni?

- Dva portfelja s istom duracijom nemaju istu konveksnost ukoliko su im disperzije novčanih tokova oko duracije različite.
- U slučaju neparalelnih pomaka krivulje prinosa, različite konveksnosti portfelja mogu objasniti različite povrate portfelja
- Ukoliko se promatraju svi mogući pomaci u krivulji, ne preferira se nužno portfelj s većom konveksnosti!
- Portfelji veće konveksnosti, a iste duracije nazivaju se ***barbell***, dok se oni manje konveksnosti (a iste duracije) nazivaju ***bullet.***

- **Zadatak.** Portfelj A sastoji se od jednogodišnje beskuponske obveznice nominalne vrijednosti 2000 $ i desetogodišnje beskuponske obveznice nominalne vrijednosti 6000$. Portfelj B sastoji se od 5.95-godišnje beskuponske obveznice nominalne vrijednosti 5000$. Trenutna kamatna stopa na sve obveznice je 10%.
  - Pokažite da oba portfelja imaju istu duraciju
  - Pokažite da su relativne promjene u vrijednosti oba portfelja za povećanje od 0.1% u kamatnim stopama jednake
  - Izračunajte relativnu promjenu vrijednosti oba portfelja za povećanje od 5% u kamatnim stopama.