Financijska matematika

Dr. sc. Petra Posedel

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb,17.4.2015.

1.3. Opća vremenska struktura kamatnih stopa

Uvod i motivacija: od krivulje prinosa do vremenske strukture kamatnih stopa

- **Krivulja prinosa** je funkcija prinosa do dospijeća u ovisnosti o dospijeću za sve kuponske i beskuponske obveznice (all Treasury bonds)
  - Ukoliko je specificirana za svaku vrijednost *t*, krivulja prinosa neprekidna je funkcija vremena ***t*.**
  - Povezuje prinos do dospijeća trezorskih obveznica sa odgovarajućim dospijećima

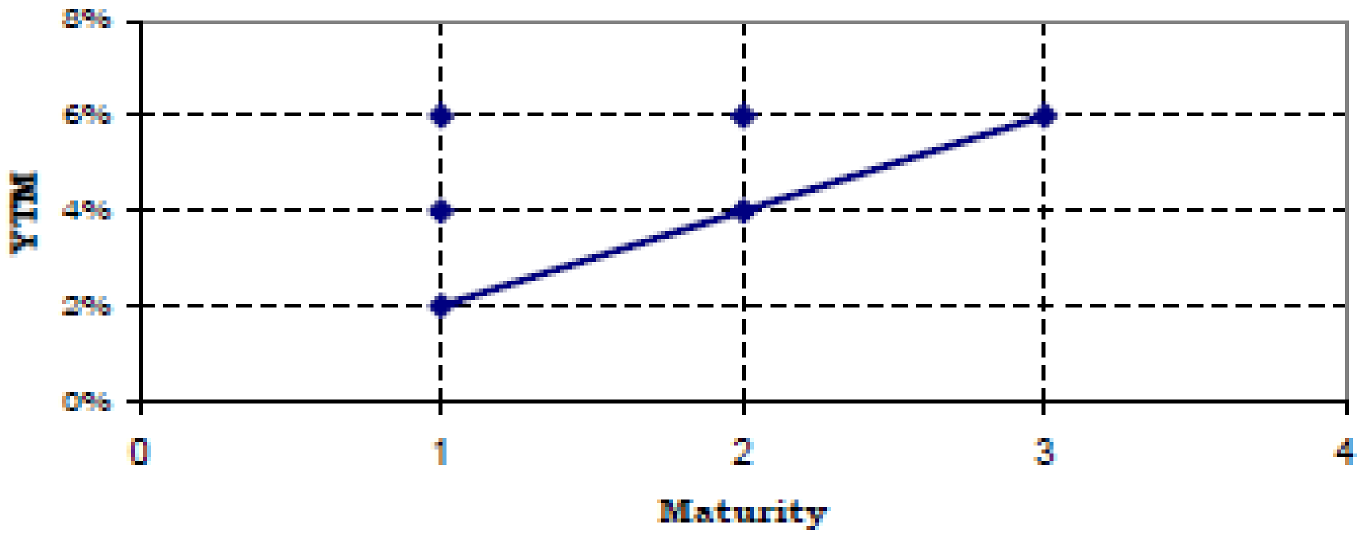
Zašto je krivulja prinosa “netočna”?

- Nije model za vrednovanje: cijena određuje PDD, a ne obrnuto!

- **Narušava** osnovni princip u financijama (princip nearbitrže): dva novčana toka sa istim dospijećem i koje isplaćuje isti izdavač, moraju *proizvesti* isti povrat/prinos.

Primjer.

- Krivulja prinosa se sastoji od tri obveznica (dospijeća 1, 2 i 3).



- Promotrimo obveznice s dospijećima 1 i 2: obje obveznice isplaćuju novčani tok u t=1. Isti je izdavač (Vlada), i dospijeće novčanog toka (1), ali se diskontiraju po **različitim stopama** (2% i 4%)

- **Cilj**: analizirati model cijena obveznica bez pretpostavke da je *prinos y u nekom trenutku*, nezavisan o dospijeću
- Cijene $B(t,T)$ beskuponskih obveznica s različitim dospijećima određuju familiju prinosa $y(t,T)$ pomoću relacije

$$B(t,T) = e^{-(T-t)y(t,T)}.$$

- Prinosi $y(t,T)$ moraju biti pozitivni kako bi cijena $B(t,T)$ bila manja od (nominalne) vrijednosti 1 za $t < T$

- Funkcija $y(t,T)$ dviju varijabli $t < T$ zove se **vremenska struktura kamatnih stopa** (engl. Term structure of interest rates)**.**

- Prinosi $y(0,T)$ koji su određeni trenutnim cijenama na tržištu zovu se **spot stope.**

- Vremenska struktura kamatnih stopa opisuje kako, u određenom vremenskom trenutku, **prinos do dospijeća** ovisi o **dospijeću.**

- **Vremenska struktura kamatnih stopa** je funkcija prinosa do dospijeća u ovisnosti o dospijeću za (kratkoročne) **beskuponske obveznice** (Treasury zero-coupon bonds), koje su obično kratkih dospijeća

  - Povezuje prinos do dospijeća beskuponskih obveznica sa odgovarajućim dospijećima
  - Kamatne stope vremenske strukture nazivaju se **nula kupon stope** ili **spot stope**.
  - Primjena vremenske strukture kamatnih stopa:
    - Predviđanja kamatnih stopa
    - Vrednovanje obveznica i izvedenica kamatnih stopa
    - Management portfelja obveznica

Spot stope ili nula stope (cont)

- ***n*-spot stopa** je kamatna stopa koja označava povrat na investiciju koja počinje *danas* i traje **točno *n* godina**
  - **Nema nikakvih isplata** u međuvremenu

- **Primjer.** Ukoliko je 5-godišnja spot stopa 5%, tada to znači da 100 novčanih jedinica investiranih danas, za 5 godina od danas imaju vrijednost:

$$100 \cdot e^{0.05 \cdot 5} = 128.4$$

- **Problem u praksi:** Većina kamatnih stopa koje opažamo na tržištu nisu nužno spot-stope.

  - Promotrimo 5-godišnju državnu obveznicu sa kuponom 6%.
  - Cijena takve obveznice ne određuje nužno 5-godišnju spot stopu, budući da se neki povrat/prinos na obveznicu realizira u obliku kupona **prije kraja 5. godine**

- Kako onda odrediti vremensku strukturu kamatnih stopa?

1.3.1. Procjena vremenske strukture kamatnih stopa

- Jedan od načina određivanja spot-stopa je promatrati prinose na tzv. STRIPS (Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities)
  - STRIPS: sintetički stvorene beskuponske obveznice od prodaje kupona kuponske obveznice, odvojeno od nominalne vrijednosti.
  - Prvi kuponski *stripping* 1982: Merrill Lynch i Salomon Brothersi u SAD-u.
  - Od 1998 *stripping* je reguliran i u Italiji

- STRIPS stope nisu spot stope, ali su često doista slične, osobito za **kraća dospijeća.**

Napomena.

- Kako bi se odredila inicijalna vremenska struktura, potrebno je znati cijene beskuponskih obveznica

- No, za duža dospijeća (preko godine dana) moguće je da se trguje samo kuponskim obveznicama stoga je potrebno napraviti **dekompoziciju** kuponskih obveznica u beskuponske obveznice različitih dospijeća (STRIPS program, 1985)

“Bootstrapping”

- *Bootstrapping* pristup podrazumijeva analizu **kuponske obveznice kao portfelj beskuponskih obveznica**, čije su nominalne vrijednosti jednake vrijednostima pojedinog novčanog toka
- **Postupak:**
  - Rekurzivno rješavanje jednadžbi: u svakoj sljedećoj jednadžbi koristimo rješenje iz prethodnog koraka
  - Ukoliko krivulja prinosa ima:
    - Pozitivni koeficijent smjera: vremenska struktura kamatnih stopa je “više pozitivna”
    - Negativni koeficijent smjera: vremenska struktura kamatnih stopa je “više negativna”
  - Ukoliko je krivulja prinosa **ravna**, takva je i vremenska struktura.

- **Primjer.** Analiziramo sljedeće tržište sastavljeno od četiri obveznice

Obveznica	Cijena	Dospijeće	Kuponska stopa	PDD	Spot stopa
B1	98.04	1	0%	2%	2%
B2	94.26	2	0%	3%	3%
B3	102.78	3	5%	4%	**?**
B4	100	4	5%	5%	**?**

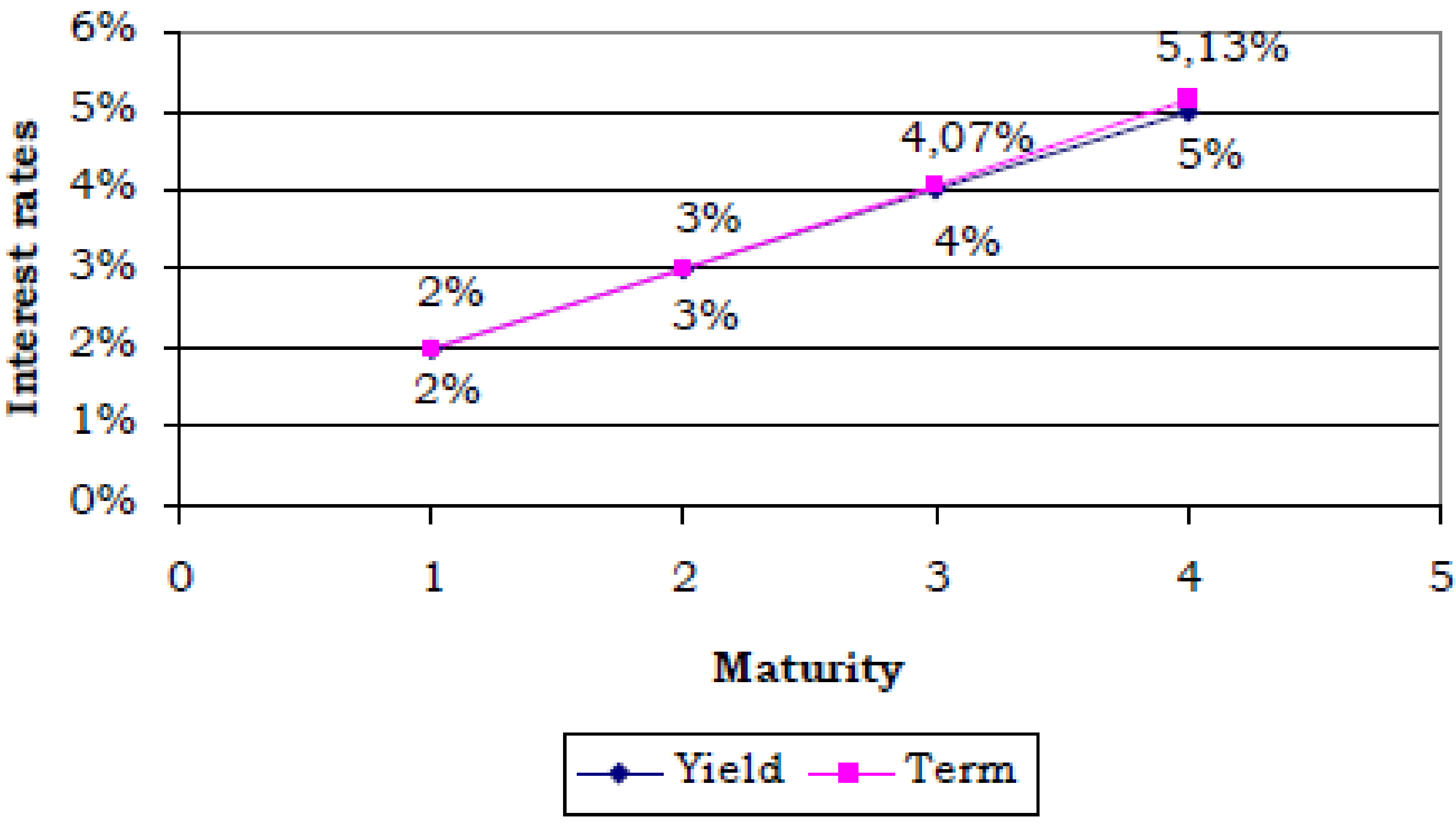
- **PRINOS:**

$$102{,}78 = \frac{5}{(1+4\%)} + \frac{5}{(1+4\%)^2} + \frac{105}{(1+4\%)^3}$$

- **VREMENSKA STRUKTURA:**

$$102{,}78 = \frac{5}{(1+2\%)} + \frac{5}{(1+3\%)^2} + \frac{105}{(1+r_3\%)^3} \Rightarrow r^3 = 4.07\%$$

- Krivulja prinosa i vremenska struktura kamatnih stopa



“Matrična inverzija”

- Nije druga metodologija u odnosu na “bootstrapping”, već drugačiji pristup za dobivanje istih rezultata
  - 1. Koristimo diskontne faktore s_t :

$$s_t := \frac{1}{1+r_t}; \qquad \text{Tada vrijedi :}$$

$$\begin{aligned} 102.78 &= 5 \cdot s_1 + 5 \cdot s_2^2 + 105 \cdot s_3^3 \\ &= 5 \cdot 98.04\% + 5 \cdot 94.26\% + 105 \cdot 88.72\% \end{aligned}$$

  - 2. Pomoću vektorskog zapisa:

$$102.78 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 105 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 98.04 \\ 94.26 \\ 88.72 \end{bmatrix}$$

- 3. Zapis cijelog tržišta u **matričnom obliku**:

$$\begin{bmatrix} 98.04 \\ 94.26 \\ 102.78 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 105 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 105 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2^2 \\ s_3^3 \\ s_4^4 \end{bmatrix}, \quad \text{odnosno}$$

$$P = F \cdot S$$

$$P = F \cdot S \Rightarrow S = F^{-1} \cdot P, \qquad \text{pri čemu je}$$

$$F \cdot F^{-1} = F^{-1} \cdot F = I$$

- Rješenje matrične jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2^2 \\ s_3^3 \\ s_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ -0.0005 & -0.0005 & 0.0095 & 0 \\ -0.0005 & -0.0005 & -0.0005 & 0.0095 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 98.04 \\ 94.26 \\ 102.78 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98.04\% \\ 94.26\% \\ 88.72\% \\ 81.86\% \end{bmatrix}$$

$$S_4 = s_4^4$$

$$r_4 = S_4^{-\frac{1}{4}} - 1 = 5.13\%$$

- **Napomena** 1. Ukoliko želimo invertirati matricu novčanih tokova u prethodnom primjeru, potrebno je da ista bude **kvadratna.**
  - Drugim riječima, potrebno je imati isti broj obveznica kao i broj spot stopa

- **Napomena 2.** Pri računanju cijene obveznica, trgovci obveznicama ponekad koriste **istu diskontnu stopu** za diksontiranje svih novčanih tokova obveznice.
  - No, **precizniji pristup** bi bio korištenje <u>različitih spot-stopa</u> za svaki novčani tok.

- **Inicijalna vremenska struktura *y*(0,*T*)** koja se sastoji od spot stopa je <u>funkcija jedne varijable</u> *T*.

- Ukoliko je inicijalna vremenska struktura ***ravna*** tada su <u>prinosi nezavisni o dospijeću</u>.

- **Cijena kuponske obveznice** koristeći spot stope jednaka je <u>sadašnjoj vrijednosti</u> budućih isplata,

$$C_K = K_1 e^{-t_1 y(0,t_1)} + K_2 e^{-t_2 y(0,t_2)} + \ldots + \left(K_N + N\right) e^{-t_N y(0,t_N)}$$

pri čemu su $K_1,\ldots,K_N$ iznosi kupona koji dospijevaju u vremenima $t_1 < \ldots < t_N$, a N nominalna vrijednost s dospijećem T_N.

- **Primjer.** Računanje cijena obveznica pomoću spot-stopa.
  - Pretpostavimo da promatramo dvogodišnju državnu obveznicu nominalne vrijednosti 100 koja isplaćuje polugodišnje kupone 6%. Nadalje, pretpostavimo da su spot stope dane prema sljedećoj tablici:

Dospijeće (godine)	Spot stopa (%)
0.5	5
1	5.8
1.5	6.4
2	6.8

  - Tada je teoretska cijena obveznice jednaka:

$$3e^{-0.05x0.5} + 3e^{-0.058x1} + 3e^{-0.064x1.5} + 103e^{-0.068x2} = 98.39$$

- Označimo sa $B(0,T)$ cijenu beskuponske obveznice nominalne vrijednosti 1 s dospijećem T.
- Vrijedi:

$$B(0,0) = 1$$

$$B(0,+\infty) = 0$$

$$B(0,T) > B(0,T+1)$$

Cilj: Investiranje novca od trenutka s do t, $0 \le s \le t \le T$

tako što želimo **danas** konstruirati portfelj koji nam to omogućava.

- *Izdamo* $\dfrac{B(0,t)}{B(0,s)}$ beskuponskih jediničnih obveznica s dospijećem s čija je cijena $B(0,s)$
- Kupimo jednu beskuponsku jediničnu obveznicu s dospijećem t cijene $B(0,t)$
  - novčani tok u trenutku 0 jednak je nula

- U trenutku s potrebno je isplatiti nominalnu vrijednost obveznice s dospijećem s za svaku obveznicu koja je *izdana* u trenutku 0; ukupni je trošak jednak $B(0,t)/ B(0,s)$

- U trenutku t za svaku beskuponsku obveznicu kupljenu u trenutku 0 s dospijećem t, bit će isplaćena (nominalna) vrijednost 1

- Drugim riječima, u trenutku s potrebno je platiti $\boldsymbol{B(0,t)/ B(0,s)}$ kako bi se dobila **jedna** novčana jedinica u trenutku t

- U skladu s prethodnim, na izraz $\dfrac{B(0,t)}{B(0,s)}$ može se gledati kao na **diskontni** faktor od trenutka t do s, koji je određen u uvjetima na tržištu **u trenutku 0**, tj.

$$\boxed{B_0(s,t) := \frac{B(0,t)}{B(0,s)}, \quad s < t}$$

Izraz $B_0(s,t)$ zvat ćemo ***unaprijednom cijenom.***

- Funkciju $B_0(s,t)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ zovemo **vremenska struktura** cijena beskuponskih obveznica (tržišnih diskontnih faktora).

- **Napomena**. (Pretpostavka nearbitraže)

U trenutku 0 može se investirati novac od trenutka 0 do t plaćajući *danas* $B(0,t)$ za svaku novčanu jedinicu koja će se dobiti u trenutku t.

- Alternativno, može se investirati novac od trenutka 0 do trenutka $s < t$, plaćaju *danas* $B(0,s)$ te zatim koristeći konačnu vrijednost u unaprijednoj investiciji od trenutka s do trenutka t.

- Trošak je takvih strategija $B(0,t)$ odnosno $\boldsymbol{B(0,s)*B(s,t)}$.

- **Propozicija.** Ukoliko je vremenska struktura deterministička, tada je prema principu nearbitraže

$$B(0,t) = B(0,s) \cdot B(s,t), \qquad 0 \leq s < t \leq T$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $B(0,t) < B(0,s)B(s,t)$. Pretpostavimo da su buduće cijene obveznica poznate u sadašnjem trenutku.

- Pretpostavimo nadalje da u trenutku 0 kupimo obveznicu s dospijećem t te izdamo $B(s,t)=B(0,t)/B(0,s)$ obveznica dospijeća s, čime dobivamo $B(0,s)B(s,t)-B(0,t)$ novčanih jedinica u trenutku 0
- U trenutku s *izdamo* jednu obveznicu s dospijećem t čime se isplati vrijednost obveznica izdanih u trenutku 0
- U trenutku t zatvorimo poziciju: isplaćena nam je nominalna vrijednost 1 s kojom isplatimo nominalnu vrijednost obveznice izdane u trenutku s, zadržavajući inicijalni profit.

- Slično u slučaju da vrijedi $B(0,t) > B(0,s)B(s,t)$ promatrajući suprotnu strategiju. $\square$

- Prema prethodnom vrijedi

$$B(t_1,t_2)=\frac{B(0,t_2)}{B(0,t_1)}=e^{t_1 y(0,t_1)-t_2 y(0,t_2)}$$

što ujedno znači da se sve cijene obveznica (a time i vremenska struktura) mogu odrediti <u>inicijalnom vremenskom strukturom</u>.

$\Rightarrow$ nije realno takvo što očekivati na tržištu obveznica, te takvu relaciju ne podržavaju povijesni podaci.

1.3.2. Općenita vremenska struktura: teorija i unaprijedne stope

- Postavlja se pitanje što točno određuje oblik vremenske strukture?
- Postoji nekoliko različitih teorija:
  - Najjednostavnija je teorija očekivanja
  - Teorija likvidnosti
  - Teorija tržišne segmentacije
  - …

- **Teorija očekivanja (Pure expectations theory)**: dugoročne kamatne stope trebale bi reflektirati očekivane *buduće* kratkoročne kamatne stope.
  - tzv. *unaprijedna* stopa za neki budući period jednaka je očekivanoj budućoj spot stopi za taj period.

- **Teorija tržišne segmentacije (Market segmentation theory):** Ne bi trebala postojati relacija među kratkoročnim, srednjeročnim te dugoročnim kamatnim stopama.
  - Kamatne stope (kratkoročne, srednjeročne, dugoročne) određene su zakonima ponude i potražnje na odgovarajućem tržištu obveznica

- **Teorija preferencije likvidnosti (Liquidity preference theory):** investitori preferiraju sačuvati svoju likvidnost i investirati sredstva za **kraće** vremenske periode.
  - Dužnici, s druge strane, obično preferiraju posuđivati sredstva po fiksnoj kamatnoj stopi kroz duže periode.
  - To dovodi do situacije da su tzv. *unaprijedne* stope veće od očekivanih budućih spot stopa.

Empirijski gledano:

- Vrlo često su **kratkoročne stope niže od dugoročnih** što i ima smisla budući da su dugoročne obveznice rizičnije. Zašto?
  - Cijene dugoročnih obveznica više fluktuiraju s promjenama kamatnih stopa i takve se obveznice obično prodaju prije dospijeća.
  - Kažemo da su kratkoročne stope *volatilnije* od dugoročnih stopa i obično manje od njih
- No, kroz periode jako visokih kratkoročnih stopa, kratkoročne stope mogu biti veće od onih dugoročnih.

1.3.2. Teorija očekivanja i unaprijedne stope

Vremenska struktura za sva dospijeća do T godina može se opisati bilo čime od sljedećeg:

- **Cijene beskuponskih obveznica** s dospijećima 1,2,…, T godina koje označavamo sa $C(1)$, $C(2)$,…,$C(T)$;
- **Spot stopama** (prinos do dospijeća beskuponskih obveznica) s dospijećima 1,2,…,T; $y(0,1)$, $y(0,2)$,…,$y(0,T)$
- **Unaprijednim stopama** (engl. Forward rates) $f_1, f_2, \ldots, f_T$ pri čemu je f_i unaprijedna stopa koja se isplaćuje u i-toj budućoj godini (i=1 za sljedeću godinu itd.).

- Unaprijedne stope su kamatne stope za buduće periode (godine)

- **Unaprijedni ugovor** je dogovor za kupnju ili prodaju imovine u nekom fiksnom budućem vremenskom trenutku po fiksnoj cijeni.

- Budući da su $f_1, f_2, \ldots, f_n$ stope koje su zaključene u **sadašnjem trenutku** za buduće posudbe ili pozajmice ujedno ih zovemo i *unaprijednim stopama*.

Napomena.

- Svaki od skupova $\{ C(1), C(2),\ldots,C(T)\}$, $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$ i $\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ može se izračunati iz nekog od preostalih skupova.

- Vremenska struktura se može opisati podjelom vremenskog intervala od sadašnjeg trenutka do dospijeća obveznice na manje vremenske segmente s <u>konstantnom kamatnom stopom</u> unutar svakog segmenta, ali promjenjivom kamatnom stopom između pojedinih segmenata.

- **Primjer.** Dvogodišnja obveznica, N=100, koja isplaćuje godišnje kupone 5%, te neka su spot stope dane sa $y(0,1)$=3%, te $y(0,2)$=5.05%.

  - Imamo:

$$100 = \frac{5}{1+3\%} + \frac{105}{(1+5.05\%)^2}$$

  - Pretpostavka: $(1+5,05\%)^2 = \underbrace{(1+5,05\%)}_{1.\text{godina}} \cdot \underbrace{(1+5,05\%)}_{2.\text{godina}}$

    No, kamatna stopa za prvu godinu je 3%, a ne 5.05% !

  - **Napomena.** Uz složeno ukamaćivanje promatramo geometrijsku sredinu, a uz neprekidno ukamaćivanje aritmetičku!

- Nadalje, **tražimo rješenje jednadžbe**:

$$100 = \frac{5}{1+3\%} + \frac{105}{(1+3\%)\cdot(1+x)}$$

$$odnosno:$$

$$(1+5.05\%)^2 = (1+3\%)\cdot(1+x) \Rightarrow x = 7.14\%$$

x je jednogodišnja spot stopa za **drugu godinu,** odnosno ***unaprijedna kamatna stopa.***

- Vrijedi:

$$(1+y_T)^T=(1+f_1)\cdot(1+f_2)\cdot\ldots(1+f_T)=\prod_{t=1}^{T}(1+f_t)$$

- Teorija očekivanja bazira se na principu nearbitraže:
  - Ako $$(1+y_T)>\prod_{t=1}^{T}(1+f_t)$$

    Prodati unaprijedne *n* nula-kuponske (jednogodišnje)

    Kupiti beskuponske (*n* godina)

  - Ako $$(1+y_T)<\prod_{t=1}^{T}(1+f_t)$$

    Prodati beskuponske (*n* godina)

    Kupiti unaprijedne *n* nula-kuponske (jednogodišnje)

- Kako **unaprijed osigurati** odgovarajuću kamatnu stopu za depozit koji se tek mora napraviti ili za neku posudbu u nekom budućem vremenskom trenutku?

- **Primjer**. Pretpostavimo da je poslovni plan neke tvrtke uzimanje zajma u iznosu od 100000 kn u cilju opreme novog postrojenja. Očekuje se da bi tvrtka trebala imati sredstva za otplatu zajma nakon godinu dana od *danas*. Stoga bi se voljeli osigurati uvjeti zajma na <u>današnji dan</u> po nekoj fiksnoj kamatnoj stopi, u odnosu na uvjete nesigurnosti glede budućih i neizvjesnih kamatnih stopa.

Pretpostavimo da su trenutne spot stope na tržištu $y(0,1)=8\%$ i $y(0,2)=9\%$ te da je nominalna vrijednost odgovarajućih beskuponskih obveznica 100.

- Kupnjom 1000 komada beskuponskih obveznica nominalne vrijednosti 100 s dospijećem godinu dana, danas je potrebno izdvojiti $1000000e^{-0.08} = 92311.63$
- Traženi se iznos posudi na dvije godine po stopi od 9%.
- Nakon godinu dana, od obveznica se dobije 100000, dok se nakon dvije godine vrati posuđeni iznos uvećan za kamatu: $92311.63e^{0.09*2} = 110517.09$

- Drugim riječima, kamatna stopa na *konstruirani budući zajam* će biti $ln(110517.09)-ln(100000)=10\%$
- Financijski posrednici mogu pojednostaviti zahtjev tvrtke tako što će ponuditi tzv. ugovor s unaprijednim stopama te u ime tvrtke provesti opisanu konstrukciju zajma.

Koje se kamatne stope koriste u praksi?

- **LIBOR** (London Interbank Offered rate)
  - Referentna kamatna stopa;
  - obično se smatra **nerizičnom kamatnom stopom**
  - Za financijsku instituciju rangiranu kao AA (najbolji rejting je AAA prema S&P-u i Fitch-u) LIBOR je kratkoročni trošak kapitala
  - Računa se na dnevnoj bazi od strane Britanske asocijacije banaka (British Bankers Association)
  - Kamatna stopa koju AA rangirana banka zahtjeva na depozite koje plasira ostalim bankama

- **LIBID** (London Interbank Bid rate)
  - Kamatna stopa koju je banka spremna platiti na depozite od drugih AA rangiranih banaka.
- LIBOR je uvijek veći od LIBID.
  - Uvijek postoji mali spread između kamatnih stopa LIBOR i LIBID
- LIBOR stope imaju dospijeća uglavnom do godinu dana

Zadatak. Pretpostavimo da su sljedeće spot stope osigurane od strane središnjih londonskih banki (LIBOR; LIBID)

Stopa	LIBOR	LIBID
1 mj	8.41%	8.59%
2 mj	8.44%	8.64%
3 mj	9.01%	9.23%
6 mj	9.35%	9.54%

- Pretpostavimo da je u funkciji managera određene banke potrebno za klijenta osigurati zajam od 100000 kn unutar mjesec dana na period od 5 mjeseci. Koju je kamatnu stopu moguće ponuditi klijentu u cilju konstrukcije zajma.
- Pretpostavimo da neka druga institucija nudi mogućnost depozita na 4 mjeseca počevši od drugog mjeseca od danas po stopi od 10.23%. Da li to predstavlja mogućnost arbitraže?

- **Primjer.** Objasnite kako se može ostvariti depozit od 50000 kn na šest mjeseci koji bi započeo nakon šest mjeseci od danas. Odredite po kojoj stopi se ugovor može ostvariti ukoliko je y(0,0.5)=6% i y(0,1)=7%.

- Općenito, inicijalna unaprijedna stopa $f(0,s,t)$ je ona kamatna stopa za koju vrijedi

$$B(0,t) = B(0,s)e^{-(t-s)\,f\,(0,s,t)},$$

odnosno

$$f\,(0,s,t) = -\frac{1}{t-s}\ln\left(\frac{B(0,t)}{B(0,s)}\right) = -\frac{\ln\big(B(0,t)\big) - \ln\big(B(0,s)\big)}{t-s}$$

Trenutačne stope

- Tokom vremena cijene će se obveznica mijenjati i sukladno tome i unaprijedne stope. **Unaprijedna stopa na intervalu [s,t]** određena u trenutku $t_1 < s < t$ definirana je sa

$$B(t_1,t) = B(t_1,s)e^{-(t-s)f(t_1,s,t)},$$

odnosno

$$f(t_1,s,t) = -\frac{\ln B(t_1,t) - \ln B(t_1,s)}{t-s} = \frac{ty(0,t) - sy(0,s)}{t-s}$$

- **Trenutačne unaprijedne stope** $f(t_1,t) = f(t_1,t,t+dt)$ su stope koje se definiraju kroz interval [t, $t+dt$] (prekonoćna kamatna stopa ukoliko je razlika jednaka jednom danu)

- **Trenutačna stopa** $y(t)$ u trenutku t je stopa prinosa na depozite u trenutku t s dospijećem u trenutku $t+dt$, pri čemu je dt infinitezimalno mali vremenski trenutak

- Što kada $dt \to 0$?

- Ukoliko je $V(t)$ vrijednost imovine u trenutku t, tada vrijedi:

$$r(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \frac{V(t+dt) - V(t)}{V(t)} = \frac{V'(t)}{V(t)}$$

- Funkcija $V(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = r(t), \quad \text{za svaki } t > 0$$

uz početni uvjet da je $V(t)$ u trenutku $t = 0$ jednak $V(0)$.

- Integriranjem prethodnog izraza na intervalu $[0,t]$ slijedi

$$\int_0^t r(s)ds = \int_0^t \frac{V'(s)}{V(s)} ds = \ln V(t) - \ln V(0)$$

- Prema prethodnom izrazu slijedi da je konačna vrijednost u trenutku *t*:

$$\boxed{V(t) = V(0)e^{\int_0^t r(s)ds}, \quad \text{za svaki } t > 0}$$

- Početna je vrijednost jednaka:

$$V(0) = V(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}, \quad \text{za svaki } t > 0$$

Kamatne bi se stope trebale modelirati kao funkcija koja se ***neprekidno*** mijenja **kroz vrijeme**.

Kako bi se realno predočila vremenska struktura, pretpostavlja se da postoji funkcija $r(t)$ koja se zove funkcija trenutačnih stopa takva da je trenutna cijena obveznice bez kupona nominalne vrijednosti 1 s dospijećem T, zadana sa

$$\underbrace{D(T)}_{\text{Diskontni faktor}} = e^{-\int_0^T r(t)dt} = \exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right)$$

Dokažite da vrijedi:

- $r(0,t)$ je prosjek trenutačnih stopa na intervalu $[0,t]$, tj. vrijedi

$$r(0,t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds$$

pri čemu je $r(t)$ trenutačna stopa u trenutku t.

- U slučaju beskuponske obveznice s dospijećem T, vrijedi

$$r(0,t) = y(0,T) = \frac{1}{T}\int_0^T r(s)ds$$

pri čemu je $y(0,T)$ prinos do dospijeća.