Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za vježbu i samostalan rad
17. 4. 2015.

1. Pretpostavimo da su zadane sljedeće cijene obveznica

$$B(0,1)=0.9901, B(0,2)=0.9828, B(1,2)=0.9947, B(0,3)=0.9726, B(1,3)=0.9848, B(2,3)=0.9905,$$

pri čemu $B(0,T)$ označava cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0 s dospijećem od T mjeseci.

a) odredite odgovarajuće spot stope
b) odredite odgovarajuće trenutačne unaprijedne stope $f(k,l) = f(k,l,l+1)$ koja označavaju unaprijednu stopu dogovorenu u trenutku k za jedan vremenski interval ($[l,l+1]$).
c) odredite logaritamski povrat na beskuponsku obveznicu s dospijećem od tri godine. Pretpostavite da raspolažete sa 100 kn prije kretanja u investiciju.
d) odredite logaritamski povrat na tri uzastopna investiranja u jednoperiodnu beskuponsku obveznicu $B(t,t+1)$, za t=0,1,2. Pretpostavite da raspolažete sa 100 kn prije kretanja u investiciju.
Rj:

a) Iz $B(0,t)=1\cdot e^{-y(0,t)\cdot t}$ dobije se $y(0,1)=0.9949\%, y(0,2)=1.735\%, y(0,3)=2.7782\%$

b) Iz $B(k,l+1)=B(k,l)\cdot e^{-f(k,l,l+1))\cdot 1}$ slijedi $f(k,l,l+1)=-\dfrac{\ln B(k,l+1)-\ln B(k,l)}{1}$, pa je

$$f(0,1,2)=0.74\%,\ f(0,2,3)=1.04\%,\ f(1,1,2)=0.53\%,\ f(1,2,3)=1.00\%,\ f(2,2,3)=0.95\%$$

c) $r(0,3)=\ln(\dfrac{V(3)}{V(0)})=2.78\%$

d) U t=0 kupimo $\dfrac{100}{0.9901}=100.999899$ obveznica po cijeni $B(0,1)$.

U t=1 imamo 100.999899, pa kupujemo $\dfrac{100.999899}{0.9947}=101.5386507$ obveznica po cijeni $B(1,2)$.

U t=2 imamo 101.5386507 pa kupujemo $\dfrac{101.5386507}{0.9905}=102.5119139$ obveznica po cijeni $B(2,3)$.

U t=3 imamo 102.5119139 kn pa je logaritamski povrat jednak $\ln\dfrac{102.5119139}{100}=0.024808838=2.48\%.$

2. Pretpostavimo da su nula-kuponske stope s neprejkidnim ukamaćivanjem dane sljedećom tablicom:

Dospijeće (mjeseci)	*Kamatna stopa (%)*
3	8.0
6	8.2
9	8.4
12	8.5
15	8.6
18	8.7

Odredite unaprijedne kamatne stope za drugi, treći, četvrti, peti i šesti kvartal.

Rj.

Qtr 2	8.4%
Qtr 3	8.8%
Qtr 4	8.8%
Qtr 5	9.0%
Qtr 6	9.2%

3. Pretpostavimo da su sljedeće spot stope osigurane od strane središnjih londonskih banaka (LIBOR; LIBID)

Stopa	LIBOR	LIBID
1 mj	8.41%	8.59%
2 mj	8.44%	8.64%
3 mj	9.01%	9.23%
6 mj	9.35%	9.54%

Pretpostavimo da je nekoj tvrtki potrebno osmisliti unaprijedni ugovor na bazi kojeg će moći podići zajam od 100000 kn za dva mjeseca od danas na period od 4 mjeseca. Kolika će biti odgovarajuća unaprijedna kamatna stopa?

Rj:

I način: Da bismo za 2 mj. imali na raspolaganju 100000kn danas je potrebno investirati $100000 \cdot e^{-0.0844\frac{2}{12}} = 98603.18066$ kn. Da bi to bilo moguće danas se zadužujemo za taj iznos na 6 mjeseci. Nakon 6 mjeseci moramo vratiti $98603.18066 \cdot e^{0.0954\frac{6}{12}} = 103420.5329.$ Sada iz $100000 = 103420.5329 \cdot e^{-f(0,2,6)\cdot\frac{4}{12}}$ slijedi $f(0,2,6) = 10.09\%$.

II način: $f(0,2,6) = \dfrac{\frac{6-0}{12}\cdot y(0,6) - \frac{2-0}{12}\cdot y(0,2)}{\frac{6-2}{12}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0.0954 - \frac{1}{6}\cdot 0.0844}{\frac{1}{3}} = 10.09\%$.

4. Pretpostavimo da je diskontni faktor zadan funkcijom

$$D(t) = \begin{cases} e^{-0.05t} & \text{za } t \le 2 \text{ godine} \\ e^{-(0.04+0.06t)} & \text{za } t \ge 2 \text{ godine} \end{cases}$$

Koliko je danas potrebno platiti za ugovor koji nam osigurava 1 kn u trenutku t =3?

Rj: $V(0) = 1 \cdot D(3) = e^{-0.22} = 0.8025$

5. Pretpostavimo da je trenutačna kamatna stopa zadana funkcijom

$$r(t) = \begin{cases} 0.06 \text{ za } t \le 4 \text{ godine} \\ 0.04 \text{ za } t \ge 4 \text{ godine} \end{cases}$$

Odredite konačnu vrijednost glavnice X nakon 6 godina.

Rj: $V(6) = X \cdot e^{\int_0^6 r(t)dt} = X \cdot e^{\int_0^4 0.06dt} \cdot e^{\int_4^6 0.04dt} = X \cdot e^{0.32} = 1.3771X$

6. Pretpostavimo da je diskontni faktor zadan funkcijom $D(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

a) Odredite trenutačnu kamatnu stopu

b) Odredite prinos do dospijeća.

Napomena: uz trenutačnu kamatnu stopu (koja je ujedno i neprekidna) $r(t)$, $t \geq 0,$ diskontni je faktor zadan funkcijom $D(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}$. Provjerite da je $r(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)}$ te iskoristite taj rezultat za a) dio zadatka, a zatim za b) dio zadatka primijnite rezultat da je prinos do dospijeća srednja vrijednost trenutačnih stopa na nekom intervalu $[0,t]$.

Rj: $D'(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds} \cdot \frac{\partial(-\int_0^t r(s)ds)}{\partial t} = e^{-\int_0^t r(s)ds} \cdot (-r(t)) \Rightarrow r(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)}$

a) $r(t) = -\frac{D'(t)}{D(t)} = \frac{-(\frac{1}{1+t^2})'}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{-\frac{-1}{(1+t^2)^2} \cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2}$

b) y je PDD ako vrijedi $e^{-\int_0^T r(t)dt} = e^{-yT} \Rightarrow y = \frac{1}{T}\int_0^T r(t)dt$

Kako je u našem slučaju $D(T) = e^{-\int_0^T r(t)dt} = \frac{1}{1+T^2} = e^{-yT} \Rightarrow y = \frac{-1}{T} \cdot \ln(\frac{1}{1+T^2})$.