Financijska matematika

Dr. Petra Posedel

Vedran Horvatić, dipl. inž.

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 27.4.2010.

Arbitraža (cont)

- **Zadatak.** Pretpostavimo da analiziramo tržište tržište koje se sastoji od jedne dionice i nerizične imovine. Neka su $A(t)$ i $S(t)$ vrijednosti nerizične odnosno rizične imovine u trenutku t. Pretpostavimo nadalje da vrijedi $A(0)=100$, $A(1)=110$, $A(2)=121$ te da cijena dionice XYZ ovisi o trima mogućim scenarijima:

Scenarij	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	120	144
ω_2	100	120	96
ω_3	100	90	96

Odredite da li postoji mogućnost arbitraže u slučaju da:

- a) mogućnosti kratkih pozicija u dionicama na tržištu od interesa jesu dozvoljene (short selling)
- b) mogućnosti kratkih pozicija u dionicama na tržištu od interesa nisu dozvoljene

- Rješenje: a) U trenutku 0 nema investiranja, u niti jednu klasu imovine. U trenutku t = 1 ukoliko je $S(1)$=120 (uočite da je 120>A(1)!) tada se opet ne investira, a ukoliko je S(1)=90 (< A(1)!) tada zauzmite kratku poziciju u dionici (prodajte 1 udio) te investirajte dobiveni iznos u nerizičnu imovinu.

U trenucima t = 0 i 1 vrijednost će takve strategije biti 0 (Uočite da ste u trenutku t = 1 ili ne investirali ništa ili je novčani tok jednak 0 budući da ste iznos dobiven kratkom pozicijom u dionici uložili u nerizičnu imovinu). U trenutku t = 2 vrijednost je:

- 0 (u slučaju scenarija w_1 ili w_2) ili 3 (u slučaju scenarija w_3)

2.3.1. Primjena arbitraže na model binomnog stabla

- **Propozicija 1.** Pretpostavimo da promatramo model binomnog stabla za rizičnu imovinu. U modelu binomnog stabla ne postoji mogućnost arbitraže ako i samo ako vrijedi $d < r < g$.

- *Dokaz*: a) jednoperiodni model.

$\Longrightarrow$ Pretpostavimo da vrijedi $r \leq d$

Tada posudimo 1 novčanu jedinicu po nerizičnoj kamatnoj stopi i uložimo u $1/S(0)$ udjela odgovarajuće dionice (rizične imovine). U trenutku t=0 su pozicije u tako konstruiranom portfelju $x = 1/S(0)$, $y = -1$, a vrijednost je tako konstruiranog portfelja $V(0) = 0$. U trenutku $t = 1$ vrijedi $S(1)=S(0)(1+g)$ ili $S(1)=S(0)(1+d)$.

Nadalje, u trenutku t=1 potrebno je vratiti 1+r novčanih jedinica, a vrijednost dionice u trenutku t=1:

$$\frac{1}{S(0)} \cdot S(0)(1+g) \text{ ili } \frac{1}{S(0)} \cdot S(0)(1+d) \text{ odnosno}$$

$$(1+g) \text{ ili } (1+d)$$

Dakle,

V(1)= -1-r +1+g=g-r >0 prema pretpostavci ili

V(1)= -1-r +1+d = d-r $\geq$ 0 prema pretpostavci.

Slučaj $r \geq g$ na sličan način.

⇐ Nadalje, pretpostavimo da je $d < r < g$. Svaki portfelj koji se sastoji od jedne dionice i nerizične imovine čija je vrijednost u početnom trenutku jednaka nula, tj $V(0)=0$, mora biti oblika $x = a/S(0)$, $y = -a$, za neki realan broj a.

- Slučaj a=0, tada je V(t)=0 za t=0,1.
- Slučaj $a > 0$. U tom slučaju (budući da je $y = -a < 0$) posuđuje se novac po nerizičnoj kamatnoj stopi kako bi se dobiveni iznos investirao u rizičnu imovinu. Nadalje, u trenutku t =1 potrebno je vratiti $a(1+r)$ novčanih jedinica, a vrijednost je rizične imovine u trenutku t=1: $$S(1)=\frac{a}{S(0)}\cdot S(0)(1+g)=a(1+g) \quad \text{ili}$$

$$S(1)=\frac{a}{S(0)}\cdot S(0)(1+d)=a(1+d)$$

Dakle, $V(1) = a(g-r) > 0$ ili $V(1) = a(d-r) < 0$ dakle nije moguća arbitraža.
- Slučaj $a < 0$ slično (tada je $y = - a > 0$) ; $V(1) = a(g-r) < 0$ ili $V(1) = a(d-r) > 0$ dakle nije moguća arbitraža.

- b) višeperiodni model. Kao osnovni blok za konstrukciju koristimo jednoperiodni model budući da se višeperiodni model za rizičnu imovinu može koristiti kao niz jednoperiodnih podstabala.

⇒ Pretpostavimo da ne postoji strategija arbitraže u višeperiodnom modelu binomnog stabla. U tom slučaju za svaku strategiju za koju je V(0)=0 je i V(n)=0 za svaki n >0. Posebno za n =1 pa to prema slučaju jednoperiodnog modela povlači da je $d < r < g$.

⇐ Pretpostavimo da je $d<r<g$ i da postoji strategija arbitraže. Neka je n najmanji n>0 za koji je V(n) različit od nule. Tada je moguće pronaći podstablo za rizičnu imovinu s čvorom u trenutku n-1 za koje je $S(n\text{-}1)$ takva vrijednost za koju vrijedi:

$V(n\text{-}1)$=0 i $V(n)$ nenengativna za svaki od dva moguća scenarija koji proizlaze iz takvog čvora stabla te $V(n)$>0 za barem jedan od scenarija. No to je prema 1periodnom modelu nemoguće ako vrijedi $d<r<g$.

- **Propozicija 2**. Dokažite da u modelu binomnog stabla ne postoji strategija arbitraže ako i samo ako postoji vjerojatnost neutralna na rizik p^* za koju vrijedi $0 < p^* < 1$.
- *Dokaz:*

$\Rightarrow$ Prepostavimo da u modelu binomnog stabla ne postoji strategija arbitraže. Tada je prema Propoziciji 1 $d<r<g$. Ako definiramo

$$p^* := \frac{r-d}{g-d}$$

tada vrijedi

$$d < r < g \quad /-d$$

$$0 < r-d < g-d \quad /:(g-d)$$

$$0 < \frac{r-d}{g-d} < 1 \Leftrightarrow 0 < p^* < 1$$

⇦ Pretpostavimo da postoji mjera neutralna na rizik p^* za koju vrijedi $0< p^* <1$. Tada prema definiciji od p^* slijedi da je $d<r<g$ što je prema Propoziciji 1 ekvivalentno tome da ne postoji strategija arbitraže.

□

Dakle, prema prethodnoj propoziciji ukoliko martingalno svojstvo primijenimo na model binomnog stabla za rizičnu imovinu (tj. vrijednosnice) tada vrijedi:

- **Diskontirani proces cijene** dionice u modelu binomnog stabla je **martingal** u odnosu na mjeru neutralnu na rizik.

➡ Da li to vrijedi općenito za tržišne modele u diskretnom vremenu?

2.4. Fundamentalni teorem vrednovanja imovine

- Neka je $\{F_n\}, n=0,1,..$ rastući niz sigma-algebri na vjerojatnosnom prostoru (Ω, F, P).
  - Takve nizove nazivamo *filtracije*. Reći ćemo da je F_n skup svih informacija dostupnih do (i uključujući) trenutka n.

- **Definicija. (Martingal)** Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru (Ω, F, P). Kažemo da je niz slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots$ P-martingal, ako je za svaki n, $X(n)$ F_n-*izmjeriva* slučajna varijabla t.d. $E[|X(n)|] < \infty$ te vrijedi

$$\boxed{E^P\left[X(n+1) \mid F_n\right] = X(n)}$$

- **Napomena**. U slučaju modela binomnog stabla imali smo

$$E^*\left[S^D(n+1) \mid S(n)\right] = S^D(n)$$

pri čemu je S^D **diskontirani proces** cijene rizične imovine, a P^* vjerojatnost neutralna na rizik.

- **Definicija (Martingalna mjera).** Vjerojatnosna mjera Q za koju vrijedi da je diskontirani proces cijene rizične imovine S^D Q-martingal nazivamo martingalna mjera za imovinu S.

- Primjeri.

1. Promatrajmo kockarsku igru u koju krećemo s početnim kapitalom x_0 i koja se odvija na način da u svakom trenutku bacamo novčić te dobivamo 1 kn ako padne pismo, a gubimo 1 kn ako padne glava. Pretpostavljamo da su sva bacanja nezavisna i jednako distribuirana (vjerojatnost da će pasti pismo je p u svakom bacanju). U svakom koraku naš dobitak je dakle slučajna varijabla $X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, dok je naš ukupni kapital u trenutku n jednak $S_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$. Ako je jedina informacija koju imamo u trenutku n bazirana na opažanju dobivenih vrijednosti do trenutka n tada je niz S_1, S_2,… martingal ako i samo ako je p=0.5.

2. Promotrimo sličnu igru u kojoj ovaj put bacamo kocku kladeći se na jedan broj na kocki. U slučaju pogotka dobivamo iznos x, inače gubimo 1 kn. Ako znamo da je kocka simetrična (vjerojatnost svakog od 6 brojeva je 1/6), postavite odgovarajući model te odredite koliki treba biti dobitak u slučaju pogotka da bi igra bila fer?

3. Rulet je igra koja se odvija na sljedeći način: ulažemo 1 novčić na broj od 0 do 36. Ako pogriješimo gubimo novčić, a ako pogodimo, zadržavamo novčić i dobivamo ih još 35. Pretpostavimo da osim opaženih vrijednosti nemamo drugih informacija. Postavite odgovarajući model i pokažite da rulet nije fer igra, tj. da kuća u prosjeku dobiva.

Teorem. (Fundamentalni teorem vrednovanja imovine)

Princip nearbitraže u modelu binomnog stabla ekvivalentan je postojanju vjerojatnosne mjere P^* na skupu svih mogućih scenarija Ω za koje je $P^*(w) > 0$ za svaki $w \in \Omega$ i za koju diskontirani proces cijene $S^D(n) = S(n)/A(n)$ zadovoljava

$$E^{P^*}\left[S_j^D(n) \mid S_j(n)\right] = S_j^D(n), \quad j = 1, \ldots, m$$

za svaki n=0,1,2,…, pri čemu $E^{P^*}[\ .\ |F_n]$ označava uvjetno očekivanje u odnosu na mjeru P^* uz dostupnost svih informacija do (i uključujući) trenutka n.

- **Primjer**. Pretpostavimo da je A(0)=100, A(1)=110, A(2)=121 te da cijena dionice XYZ može poprimiti sljedeće vrijednosti ovisno o četiri različita scenarija:

Scenarij	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	112
ω_2	90	100	106
ω_3	90	80	90
ω_4	90	80	80

- Pretpostavimo da je vjerojatnost rasta cijene u trenutku t=0 dana sa p^*, u trenutku t=1 vjerojatnost rasta cijene ukoliko kreće iz čvora koji je nastao rastom u prethodnom trenutkom je q^*, a vjerojatnost također rasta cijene, ali ukoliko kreće iz čvora koji je nastao padom cijene u prethodnom trenutkom je r^*

- Skicirajte odgovarajuće stablo s obzirom na moguće scenarije

- Odredite vjerojatnosti p^*, q^* i r^* takve da
  - ne postoji mogućnost arbitraže
  - diskontirani proces cijene dionice XYZ je martingal

- Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik svakog od scenarija.
- Kolika je vjerojatnost neutralna na rizik da cijena dionice XYZ u trenutku $t = 2$ bude 90?