Financijska matematika

Doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 11.5.2018.

2. dio: Rizična ulaganja

2. 1. Prinos i rizičnost: preliminarije

Računanje <u>očekivanog</u> prinosa investicije

- Ulaganja u uvjetima nesigurnosti.
- Pretpostavimo da je vjerojatnosna distribucija prinosa kroz određeni vremenski interval **poznata**.
- Ovisnost analize i rezultata o <u>distribuciji prinosa.</u>

Neka su:

- R_i = mogući ishod (povrat) ulaganja, $i = 1,\ldots, n$
- P_i = vjerojatnost pojedinog ishoda, $i = 1,\ldots, n$

Tada je **očekivani prinos**

$$\boxed{E\left[R_i\right] = \sum_{i=1}^{n} R_i P_i}$$

Stope povrata: slučajne varijable

- **Definicija.** Stopa povrata ili **povrat** za vremenski interval $[t_1,t_2]$, u oznaci $R(t_1,t_2)$, je **slučajna varijabla**

$$R(t_1,t_2)=\frac{V(t_2)-V(t_1)}{V(t_1)}, \qquad t_1<t_2$$

pri čemu $V(t)$ označava vrijednost imovine u trenutku t .

- Ukoliko je $V(t_1)$ vrijednost imovine u trenutku t_1, tada je vrijednost imovine u trenutku t_2 jednaka

$$\boxed{V(t_2)=V(t_1)\big(1+R(t_1,t_2)\big)}$$

- **Definicija**. Logaritamski povrat za vremenski interval $[t_1,t_2]$, u oznaci $lR(t_1,t_2)$, je **slučajna varijabla**

$$lR(t_1,t_2) = \ln\frac{V(t_2)}{V(t_1)} = \ln V(t_2) - \ln V(t_1), \qquad t_1 < t_2$$

pri čemu $V(t)$ označava vrijednost imovine u trenutku t .

- Ukoliko je $V(t_1)$ vrijednost imovine u trenutku t_1, tada je vrijednost imovine u trenutku t_2 jednaka

$$\boxed{V(t_2) = V(t_1)e^{lR(t_1,t_2)}}$$

- Relacija između stope povrata $R(t_1,t_2)$ i logaritamskog povrata $lR(t_1,t_2)$ dana je sa

$$1 + R(t_1,t_2) = e^{lR(t_1,t_2)}$$

Napomena.

1) U slučaju da su jednoperiodni povrati **nezavisni,** tada je

$$1+E[R(n,m)]=(1+E[R(n,n+1)])\cdot(1+E[R(n+1,n+2)])\cdots(1+E[R(m-1,m)])$$

2) U slučaju **logaritamskih povrata**, sljedeća relacija vrijedi i u slučaju da jednoperiodni (logaritamski) povrati <u>nisu nezavisni</u>

$$E[lR(n,m)]=E[lR(n,n+1)]+E[lR(n+1,n+2)]+\ldots+E[lR(m-1,m)]$$

Zadaci.

- Pretpostavimo da promatramo tri moguća tržišna scenarija, $\Omega = \{w_1, w_2, w_3\}$ te da su ovisno o vrsti scenarija moguće tri vrijednosti portfelja XYZ u dva vremenska trenutka:

Scenarij	$V(0)$	$V(1)$	$V(2)$
ω_1	55	58	60
ω_2	55	58	52
ω_3	55	52	53

  - Odredite stope povrata $R(0,1)$ i $R(1,2)$
  - Usporedite povrat kroz agregatno razdoblje [0,2] sa sumom povrata kroz odgovarajuća jednoperiodna razdoblja. Što primjećujete?
  - Odredite $lR(0,1)$, $lR(1,2)$ i $lR(0,2)$. Usporedite $lR(0,2)$ sa $lR(0,1)+ lR(1,2)$

- Pretpostavimo da je $R(0,1)$=10% ili -10% te $R(0,2)$=21%, 10% ili -1%. Odredite moguću strukturu scenarija takvih da $R(1,2)$ poprima najviše dvije različite vrijednosti.

- Pretpostavimo da vremenski interval odgovara periodu od tri mjeseca te da su tromjesečni povrati $R(0,1)$, $R(1,2)$, $R(2,3)$, $R(3,4)$ nezavisni i jednako distribuirani. Odredite očekivani kvartalni povrat $E[R(0,1)]$ i očekivani godišnji povrat $E[R(0,4)]$ ako je očekivani povrat $E[R(0,3)]$ kroz tri kvartala jednak 12%.

Mjere **rizičnosti** očekivanih stopa prinosa

- **Varijanca**

$$\sigma_R^2 = Var(R) = \sum_{i=1}^{n} \left(R_i - E\left(R_i\right)\right)^2 P_i$$

$$= E\left[\left(R - E\left(R\right)\right)^2\right] = E\left[R^2\right] - \left(E\left[R\right]\right)^2$$

- **Standardna devijacija**

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_R^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(R_i - E\left(R_i\right)\right)^2 P_i}$$

2.2. Model binomnog stabla

- Jednostavno ga je matematički analizirati jer uključuje mali broj parametara

- Podrazumijeva **identičnu** jednostavnu strukturu u **svakom** od korijena stabla *cijena*

- Može opisati i obuhvatiti iznenađujuće mnogo značajki tržišta

Definicija modela

- Uvjet 1.
  - Jednoperiodni povrati $R(n)$ na vrijednost imovine (dionica, obveznica) su **nezavisne, jednako distribuirane** slučajne varijable takve da vrijedi

$$R(n) = \begin{cases} g & \text{s vjerojatnosti} \quad p \\ d & \text{s vjerojatnosti} \quad 1\text{-}p \end{cases}$$

    u svakom trenutku n, pri čemu je $-1 < d < g$ te $0 < p < 1$.

  - Drugim riječima, vrijednost imovine $V(n)$ se kreće gore ili dolje uz faktorom rasta $1+g$ ili $1+d$ u **svakom vremenskom trenutku**
  - Nejednakosti $-1 < d < g$ osiguravaju da će sve cijene (vrijednosti imovine) $V(n)$ biti **pozitivne** ukoliko je to $V(0)$.

Uvjet 2.

- Jednoperiodni povrat na nerizičnu investiciju r **jednak** je u **svakom vremenskom trenutku** i vrijedi

$$d < r < g$$

- Uvjet opisuje kretanje vrijednosti imovine s obzirom na nerizičnu imovinu poput obveznica ili depozita na štednom računu.

- Da li su nejednakosti $d < r < g$ *opravdane?* Da, u slučaju da neka od nejednakosti nije ispunjena postojat će strategija arbitraže.

- Budući da je $V(1)=V(0)[1+R(1)]$, uvjet 1. implicira da slučajna varijabla $V(1)$ može poprimiti dvije vrijednosti:

$$V(1)=\begin{cases} V(0)(1+g) & \text{s vjerojatnosti} \quad p \\ V(0)(1+d) & \text{s vjerojatnosti} \quad 1\text{-}p \end{cases}$$

- Primjer. Koliko različitih vrijednosti mogu poprimiti varijable $V(2)$ i $V(3)$? Koje su te vrijednosti i kojih vjerojatnosti?

- Vrijednosti koje slučajna varijabla $V(n)$ može poprimiti, kao i njihove vjerojatnosti mogu se izračunati za svaki prirodni broj n. Na koji način?

Ponavljanje: korištenjem binomne slučajne varijable

- Ukoliko promatramo stablo vrijednosti imovine (cijena) za n koraka, **svaki scenarij** (odnosno grana stabla) s točno i kretanja cijene prema gore i (dakle!) n-i kretanja prema dolje, određuje vrijednost imovine (cijenu dionice, obveznice…) u trenutku n koja je dana sa

$$V(0)(1+g)^{i}(1+d)^{n-i}$$

- Postoji $\binom{n}{i}$ takvih scenarija, pri čemu je vjerojatnost **svakog** jednaka

$$\boxed{p^{i}(1-p)^{n-i}}$$

- Dakle,

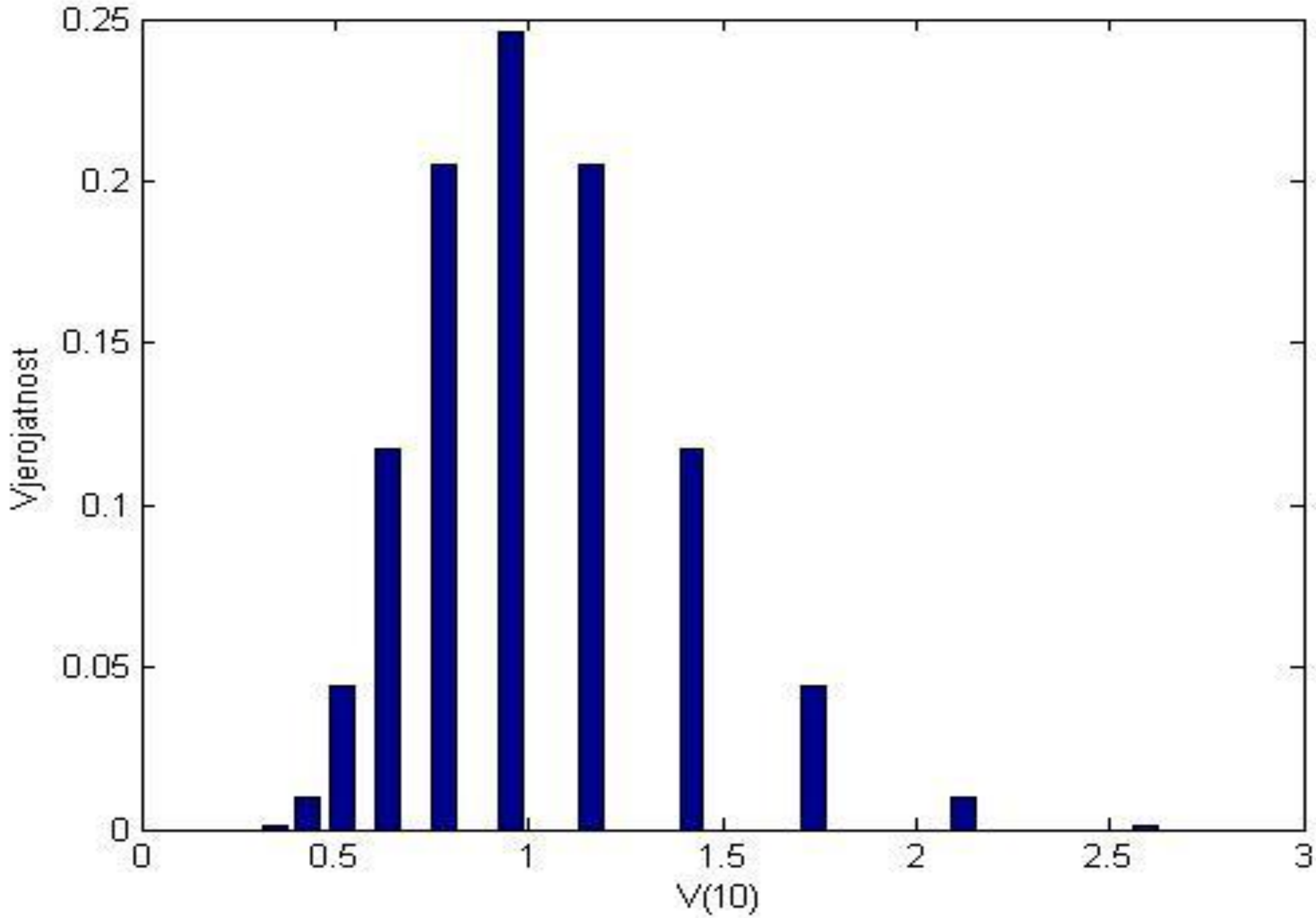
$$\boxed{V(n) = V(0)\left(1+g\right)^{i}\left(1+d\right)^{n-i}}$$

s vjerojatnosti

$$\binom{n}{i} p^{i}\left(1-p\right)^{n-i} \qquad i = 1,\ldots,n.$$

- Vrijednost imovine (cijena) u trenutku n je diskretna slučajna varijabla koja može poprimiti $n+1$ **različitih** vrijednosti.

Primjer. Distribucija od $V(n)$: $g = 0.1$, $d = -0.1$, $p = 0.5$, $n = 10$, $V(0)=1$



Što primjećujete?

- Broj kretanja vrijednosti prema gore, *i*, je slučajna varijabla s **binomnom distribucijom**, a isto vrijedi i za broj kretanja vrijednosti prema dolje, *n*-*i*

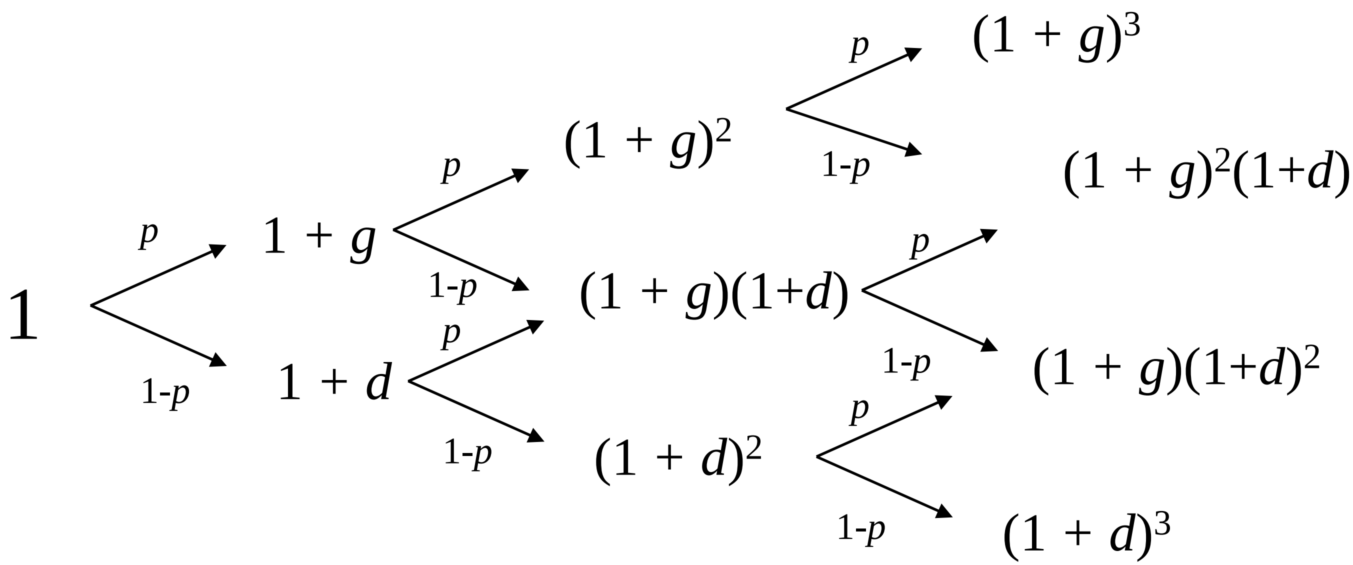
- Reći ćemo da proces vrijednosti imovine slijedi **binomno stablo.**

- U binomnom stablu s *n* koraka imamo:

  Ω = skup svih scenarija, u svakom su koraku moguća dva ishoda: kretanje prema gore ili dolje

  Ω ukupno ima 2^n elemenata.

- Ilustracija. Binomno stablo s tri koraka. $V(0)=1$.



- Odredite vrijednost povrata u slučaju kretanja vrijednosti portfelja prema gore ili dolje, ako vrijednost vašeg portfelja u trenutku 1 može poprimiti vrijednosti 87 kn i 76 kn, ta ukoliko je najveća moguća vrijednost portfelja u trenutku 2 jednaka 92.

Model binomnog stabla: obveznice

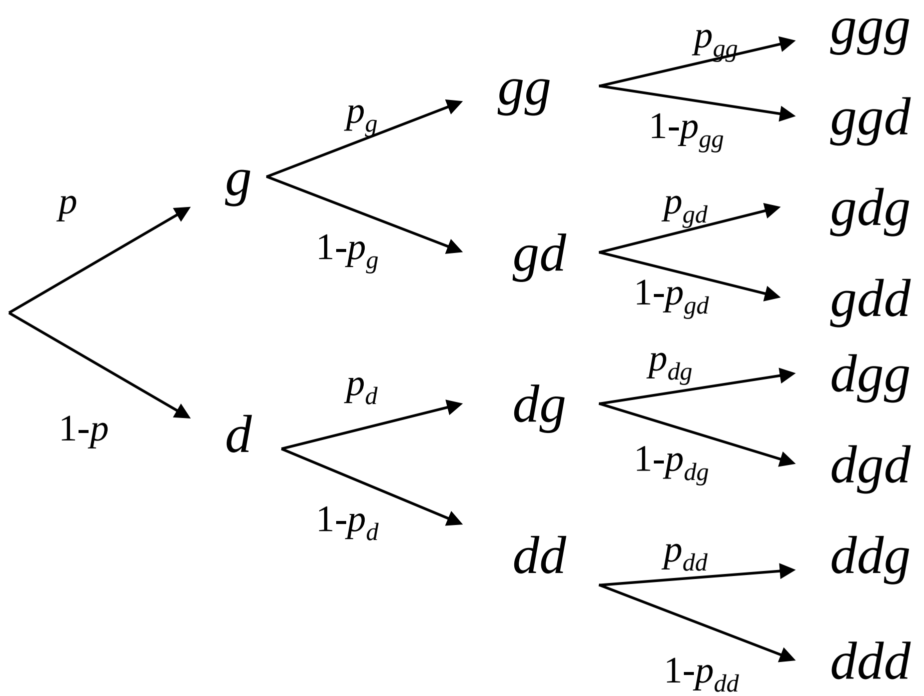
- Struktura modela je slična kao u općoj strukturi binomnog stabla, ali će vjerojatnosti kretanja prema gore ili dolje ovisiti o **poziciji unutar stabla**:

$$p_i \neq p_j, \quad i \neq j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- **Stanjem** ćemo zvati konačni niz sukcesivnih kretanja prema gore ili dolje. Svako stanje ovisi o vremenskom trenutku odnosno o vremenskom koraku unutar stabla:
  - Stanje s_1: g ili d (ukupno 2)
  - Stanje s_2: gg, gd, dg ili dd (ukupno 4)
  - Općenito s_n: $s_{n-1}g$ ili $s_{n-1}d$

- Budući da vjerojatnosti mogu ovisiti o stanju, koristimo sljedeće oznake:

  - $p(s_n)$ ćemo označiti vjerojatnost kretanja prema gore u trenutku $n+1$ ukoliko se kreće iz stanja s_n u trenutku n
  - p označava vjerojatnost kretanja prema gore u prvom trenutku iz početnog stanja.
  - Primjer. $p=0.3$, $p(g) = 0.2$, $p(d) = 0.4$
  - N je vremenski horizont. U slučaju obveznica, N predstavlja gornju granicu dospijeća svih obveznica korištenih u analizi. U tom slučaju s_N predstavlja ukupne scenarije kretanja cijena obveznica



p
$1\text{-}p$
g
d
p_g
$1\text{-}p_g$
p_d
$1\text{-}p_d$
gg
gd
dg
dd
p_{gg}
$1\text{-}p_{gg}$
p_{gd}
$1\text{-}p_{gd}$
p_{dg}
$1\text{-}p_{dg}$
p_{dd}
$1\text{-}p_{dd}$
ggg
ggd
gdg
gdd
dgg
dgd
ddg
ddd

Evolucija kretanja cijena obveznica

- U **trenutku 0** dane su početne cijene obveznica za dospijeća 1, 2, …, N:
  - $B(0,1), B(0,2),\ldots, B(0,N\text{-}1), B(0,N)$

- U **trenutku 1**, cijena $B(0,1)$ postaje suvišna, odnosno na tržištu se trguje obveznicama s preostalih N-1 dospijeća:
  - Slučajnost se uvodi tako što se u svakom trenutku omogućavaju dva stanja: g i d stoga imamo dva moguća niza:
    - $B(1,2;\, g), B(1,3;\, g),\ldots, B(1,N\text{-}1;\, g), B(1,N;\, g)$
    - $B(1,2;\, d), B(1,3;\, d),\ldots, B(1,N\text{-}1;\, d), B(1,N;\, d)$

- U **trenutku 2** imamo ukupno četiri različita stanja odnosno četiri moguća niza slučajnih varijabli, svaki dužine N-2:
  - $B(2,3;\, gg), B(2,4;gg),\ldots, B(2,N\text{-}1;gg), B(2,N;gg)$
  - $B(2,3;\, gd), B(2,4;gd),\ldots, B(2,N\text{-}1;gd), B(2,N;gd)$
  - $B(2,3;\, dg), B(2,4;dg),\ldots, B(2,N\text{-}1;dg), B(2,N;dg)$
  - $B(2,3;\, dd), B(2,4;dd),\ldots, B(2,N\text{-}1;dd), B(2,N;dd)$

- U ovom slučaju se cijene u stanjima *gd* i *dg* ne podudaraju!

$$gd\ "\neq"\ dg$$

- U svakom koraku dužina svakog od nizova smanjuje se za jedan, a broj se nizova **udvostručuje**; u trenutku N-1 ukupno imamo 2^{N-1} vrijednosti
  - $B(N\text{-}1,N;\ s_{N-1})$, pri čemu s_{N-1} označava sva moguća stanja u trenutku N-1

- Struktura stabla prekida se u trenutku N-1 budući da je u zadnjem koraku kretanje **sigurno**, tj. u trenutku N vrijedi

$$B(N,N;s_N)=1$$

za svako od stanja s_N .

- U trenutku n **logaritamski se povrat** definira kao

$$lR(n, N; s_{n-1}g) = \ln \frac{B(n, N; s_{n-1}g)}{B(n-1, N; s_{n-1})}$$

$$lR(n, N; s_{n-1}d) = \ln \frac{B(n, N; s_{n-1}d)}{B(n-1, N; s_{n-1})}$$

pri čemu pretpostavljamo da vrijedi

$$lR(n, N; s_{n-1}g) \geq lR(n, N; s_{n-1}d)$$

za svaki n=1,…, N.

- Također vrijedi:

$$lR\left(n,n;s_{n-1}g\right)=lR\left(n,n;s_{n-1}d\right)=\ln\frac{1}{B(n-1,n;s_{n-1})}$$

budući da je $B(n, n; s_n)=1$ za svako stanje s_n.

- **Zadatak**. Pretpostavimo da promatramo mjesečne promjene cijena te da promatramo sljedeću evoluciju cijena obveznice s dospijećem od tri mjeseca: B(0,3)=0.9726, B(1,3;g)=0.9848, B(1,3;d)=0.9808, B(2,3;gg)=0.9905, B(2,3;gd)=0.9875, B(2,3;dg)=0.9908, B(2,3;dd)=0.9891. Odredite moguće logaritamske povrate $lR(i,3;s_n)$, i=1,..,3, za svaki od mogućih scenarija evolucije cijene odgovarajuće obveznice.

2. 3. Dinamika kretanja cijene dionica

- Buduće cijene bilo koje vrste imovine su uglavnom nepredvidive (dionice, strana valuta pa i neki nepredvidivi budući novčani tok…)
- Tržišne cijene ovise o izborima i odlukama mnogih agenata koji djeluju u uvjetima nesigurnosti.

- Označimo sa $S(t)$ cijenu neke dionice u trenutku t.
  - Pretpostavljamo da je $S(t) > 0$ za svaki t.
  - $S(0)$ je trenutna cijena dionice, **poznata** svakom investitoru, dok je $S(t) > 0$ općenito **nepoznata**

- $S(t)$ je pozitivna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru Ω, odnosno

$$S(t):\Omega \to (0,\infty)$$

- Skup Ω se sastoji od svih mogućih scenarija $\omega \in \Omega$ kretanja cijene. Ukoliko želimo naglasiti da cijena u trenutku t prati scenarij $\omega \in \Omega$, to ćemo označiti sa $S(t,\omega)$.
- Pretpostavljamo da je vrijednost $S(0)$ konstantna, dok je $S(t)$ slučajna varijabla koja nije konstantna:

$$\exists \text{ barem dva scenarija } \omega_1, \omega_2 \in \Omega \text{ takva da vrijedi}$$

$$S(t,\omega_1) \neq S(t,\omega_2)$$

- Pretpostavljamo da cijene opažamo u diskretnim vremenskim periodima: godina, kvartal, mjesec, tjedan, dan…

- Dakle, $t = nk,$ pri čemu
  - n = 0,1,2,3….
  - k =1 u slučaju godine, k = 1/52 u slučaju tjednih opažanja…

2. 3. 1. Vjerojatnosti neutralne na rizik

- Buduće vrijednosti dionica (ili neke vrijednosnice od interesa) nemoguće je znati sa sigurnošću, ali je moguće unutar nekog modela analizirati odnosno modelirati njihove **očekivane** cijene
- **Cilj**: usporediti očekivane cijene dobivene pomoću nekog modela sa nerizičnim investicijama.

→ iako intuitivno jednostavno, ima vrlo korisne aplikacije u teoriji izvedenica (derivativa)

Kako odrediti **očekivanu cijenu** dionice u trenutku *t* ?

- Označimo očekivanu cijenu dionice u trenutku t sa $E[S(t)]$ te očekivani prinos/povrat u slučaju kretanja cijene prema gore sa g, a očekivani prinos pri kretanju cijene prema dolje sa d čije su odgovarajuće vjerojatnosti p i $1-p$. Tada u trenutku t =1vrijedi:

$$
\begin{aligned}
E\left[S(1)\right] &= S(0)\cdot p(1+g)+S(0)\cdot(1-p)(1+d) \\
&= S(0)\left[1+pg+(1-p)d\right]=S(0)\left[1+E\left[R(1)\right]\right]
\end{aligned}
$$

pri čemu je $E[R(1)]$ očekivani prinos u trenutku 1.

- **Propozicija 1**. Ukoliko su prinosi R(1), R(2),…R(n) nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable, tada je očekivana cijena u trenutku *n*=0,1,2,3…dana sa

$$E[S(n)] = S(0)[1 + E[R(1)]]^n$$

- *Dokaz*:

$$\begin{aligned} E[S(n)] &= E[S(0)(1+R(1))(1+R(2))\cdots(1+R(n))] \\ &= nez = S(0)E[1+R(1)]E[1+R(2)]\cdots E[1+R(n)] \\ &= j.d. = S(0)E[1+R(1)]^n. \end{aligned}$$

$\square$

Napomena. Usporedba s nerizičnom investicijom na horizont ulaganja od *n perioda*.

- Označimo početnu vrijednost sa $S(0)$.
- U slučaju nerizične investicije i konstantne kamatne stope r, vrijedi $$S(n) = S(0)(1+r)^n$$
- U slučaju ulaganja u npr. dionice, *uključivanje faktora rizika* je neizbježno. Nadalje, vrijedi

$$E[S(n)] = S(0)(1+E[R(1)])^n$$

- Kako usporediti $S(n)$ i $E[S(n)]$?

- Tipičan investitor koji je averzivan glede rizika zahtjeva
$$E\left[R(1)\right] > r$$

budući da očekuje *nagradu* za ulaganje u rizičnu imovinu, odnosno očekuje veći očekivani prinos kao **premiju za rizik**.

- U slučaju da vrijedi $E\left[R(1)\right] < r$ investitori kojima su takvi slučajevi interesantni ujedno *tragaju za rizikom*, odnosno nisu averzivni prema riziku. Vjerojatnost velikih očekivanih prinosa je mala i pozitivna, dok je vjerojatnost malih prinosa velika.

- Slučaj $E\left[R(1)\right] = r$ je **neutralan na rizik**

Vjerojatnosna mjera neutralna na rizik

- Označimo sa p^* i E^* vjerojatnost odnosno očekivanje za koje vrijedi

$$E^*\left[R(1)\right] = p^* g + \left(1 - p^*\right) d = r$$

odnosno

$$\boxed{p^* = \frac{r-d}{g-d}.}$$

- p^* zovemo **vjerojatnost neutralna na rizik**, a E^* očekivanje neutralno na rizik.

Napomena.

- p^* je apstraktni matematički objekt koji može i ne mora biti jednak vjerojatnosti svih agenata na tržištu p. **Samo** u tržištu neutralnom na rizik vrijedi $p=p^*$.

- Zašto analizirati financijske instrumente u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik p^* ukoliko ona ne mora imati nikakve relacije s aktualnom vjerojatnosti p?

$\Rightarrow$ vrednovanje izvedenica (derivativa)

Primjeri.

- **Primjer 1**. Pretpostavimo da je g=0.2 te nerizična kamatna stopa r=0.1. Analizirajte svojstva vjerojatnosti neutralne na rizik kao funkcije prinosa u slučaju pada cijene vrijednosnice.

- **Primjer 2**. Dokažite da vrijedi $d < r < g$ ako i samo ako je $0 < p^* < 1$.

- **Primjer 3.** Analizirajte ortogonalnost vektora u ravnini $(p^*,1\text{-}p^*)$ s vektorom koordinata mogućih jednoperiodnih profita odnosno gubitka investitora koji posjeduje udio dionice kupljene pozajmicom po kamatnoj stopi r.

2.3.2. Martingalno svojstvo: uvod i motivacija

- Kako odrediti očekivanu vrijednost cijene dionice u trenutku n u odnosu na vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik, tj. $E^*[S(n)]=?$

- Intuitivno, uz nerizičnu (konstantnu) kamatnu stopu r kroz n perioda, $S(n)=S(0)(1+r)^n$

- Prema propoziciji 1 vrijedi $E^*\left[S(n)\right]=S(0)\left(1+E^*\left[R(1)\right]\right)^n$

  a kako u slučaju neutralnosti na rizik mora vrijediti

$$E^*\left[R(1)\right]=r$$

  slijedi da je

$$E^*\left[S(n)\right]=S(0)(1+r)^n$$

- **Primjer**. Pretpostavimo da promatramo dvoperiodni model binomnog stabla takav da je trenutna cijena dionice XYZ 100, prinosi u slučaju porasta ili pada vrijednosti dionice 0.2, odnosno -0.1. Pretpostavimo da je nerizična stopa prinosa r=0.1. Tada je:
  - Vjerojatnost neutralna na rizik p^*=2/3
  - Očekivana je cijena dionice XYZ nakon dva vremenska perioda u odnosu na vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik jednaka

$$E^*[S(2)] = S(0)(1+r)^2 = 121.$$

  - Skicirajte odgovarajuće stablo, odredite moguće scenarije na tržištu neutralnom na rizik te izračunajte odgovarajuće cijene dionice XYZ u svakom vremenskom trenutku.

- U prethodnom primjeru izračunajte sljedeća uvjetna očekivanja:
  - $E^*[S(2)|S(1)=90]$
  - $E^*[S(2)|S(1)=120]$
  - $E^*[S(2)|S(1)]$

- Prisjetite se svojstava uvjetnog očekivanja.

- **Propozicija 2**. Uvjetno očekivanje neutralno na rizik cijene neke dionice u trenutku $n+1$ uz uvjet da u trenutku n raspolažemo informacijama dostupnima do tog trenutka u modelu binomnog stabla jednako je

$$E^*\left[S(n+1) \mid S(n)\right] = S(n)(1+r).$$

- *Dokaz*: Primijetimo odmah da cijena neke dionice u trenutku n, $S(n)$, postaje investitoru poznata u trenutku n. Pretpostavimo da je $S(n)=x$ za neki pozitivan broj x. Tada vrijedi:

$$E^*\left[S(n+1) \mid S(n) = x\right] = x(1+g)p^* + x(1+d)(1-p^*). \quad (1)$$

- No, prema definiciji vjerojatnosti neutralne na rizik vrijedi

$$p^* g + (1 - p^*) d = r$$

iz čega slijedi

$$p^* (1 + g) + (1 - p^*)(1 + d) = 1 + r. \qquad (2)$$

Prema (1) i (2) slijedi

$$E^* [S(n+1) \mid S(n) = x] = x(1 + r).$$

što se i tvrdilo.

$\square$

- **Napomena**. **Diskontirana vrijednost** cijene neke dionice definirana je kao

$$S^D(n) = S(n)(1+r)^{-n}.$$

- **Martingalno svojstvo.** Prema propoziciji 2 slijedi

$$\boxed{E^*\left[S^D(n+1) \mid S(n)\right] = S^D(n)}$$

- Kažemo da je diskontirana cijena dionice, $S^D(n)$, martingal u odnosu na vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik p^*. Vjerojatnosna mjera p^* se također naziva martingalna (vjerojatnosna) mjera.