Financijska matematika

Doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 25. 5. 2018.

2.5. Slučajni ugovori. Opcije.

2.5.1. Jednoperiodni slučajni ugovori. Potpunost tržišta

- **Definicija. (Slučajni ugovor**, engl. contingent claim**)** Slučajni ugovor je F_1 izmjeriva slučajna varijabla X, pri čemu je F_1 *sigma algebra* generirana slučajnom varijablom cijene rizične imovine u trenutku $n=1$, S_1.
  - Drugim riječima, postoji *izmjeriva* (!) funkcija f takva da je

$$X = f(S_1)$$

  - U jednoperiodnom modelu binomnog stabla

$$f(g)=X(w_g),\ f(d)=X(w_d)$$

  - Funkcija f zove se ugovorna funkcija (engl. contract function) i daje nam formulu kako izračunati vrijednost slučajnog zahtjeva jednom kada se specificira cijene osnovne vrijednosnice ili predmetne imovine (engl. underlying)

- Europska call opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo (ne i obavezu!) **kupnje** određene vrijednosnice (osnovna vrijednosnica, *underlying*) za unaprijed dogovorenu i fiksnu cijenu K (izvršna cijena, engl. exercise price, strike price) na točno određeni datum u budućnosti T (dospijeće, engl. exercise time, expiry time, maturity)
  - Umjesto specifikacije dospijeća, moguće je ugovor izraziti u u terminima broja dana do datuma dospijeća (engl. time to maturity).
- Europska put opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo (ne i obavezu!) **prodaje** određene vrijednosnice po izvršnoj cijeni K i dospijeću T.

- **Primjer 1. (**Europska call opcija).

Pretpostavimo da ste vlasnik europske call opcije na tržišni indeks S&P (Standard and Poor Indeks S&P500, indeks američke burze, NYSE) izvršne cijene 800 s datumom dospijeća T

- K=800, drugim riječima u trenutku T imate pravo kupiti udio indeksa po cijeni od 800
- Posjedovanje opcije za vlasnika predstavlja mogućnost direktnog profita ukoliko je u trenutku T vrijednost S&P indeksa **veća** od izvršne cijene odnosno 800 u ovom slučaju.
- U slučaju indeksa K=800 ne mora nužno predstavljati novčanu vrijednost već npr. broj *bodova*.

- **Američka call (put) opcija** je ugovor koji vlasniku daje pravo kupnje (prodaje) osnovne vrijednosnice po izvršnoj cijeni K **u bilo kojem trenutku** između trenutka ugovoranja i trenutka dospijeća T.
  - Američku je opciju moguće izvršiti u bilo kojem trenutku do i uključujući trenutak dospijeća.
- Korištenje termina osnovne ili bazične vrijednosnice (*underlying*) uobičajeno je kako bi se naglasilo da nije riječ samo o dionicama i npr. stranoj valuti ili tečaju, već da je moguće imati opcije na dioničke tržišne indekse, kamatne stope, vremensku prognozu pa i nivo snijega.
  - Neke osnovne vrijednosnice nije moguće prodati ili kupiti pa je se opcija specificira u novčanim jedinicama i gotovini i to na način koji opisuje dogovaranje oklade ili npr. klađenje

- Označimo izvršnu cijene opcije sa K, dospijeće sa *T* te neka je u trenutku dospijeća cijena osnovne vrijednosnice na koju je opcija pisana dana sa *S*(*T*). Opcija je određena svojom **isplatom**, odnosno u slučaju europske call opcije vrijedi:

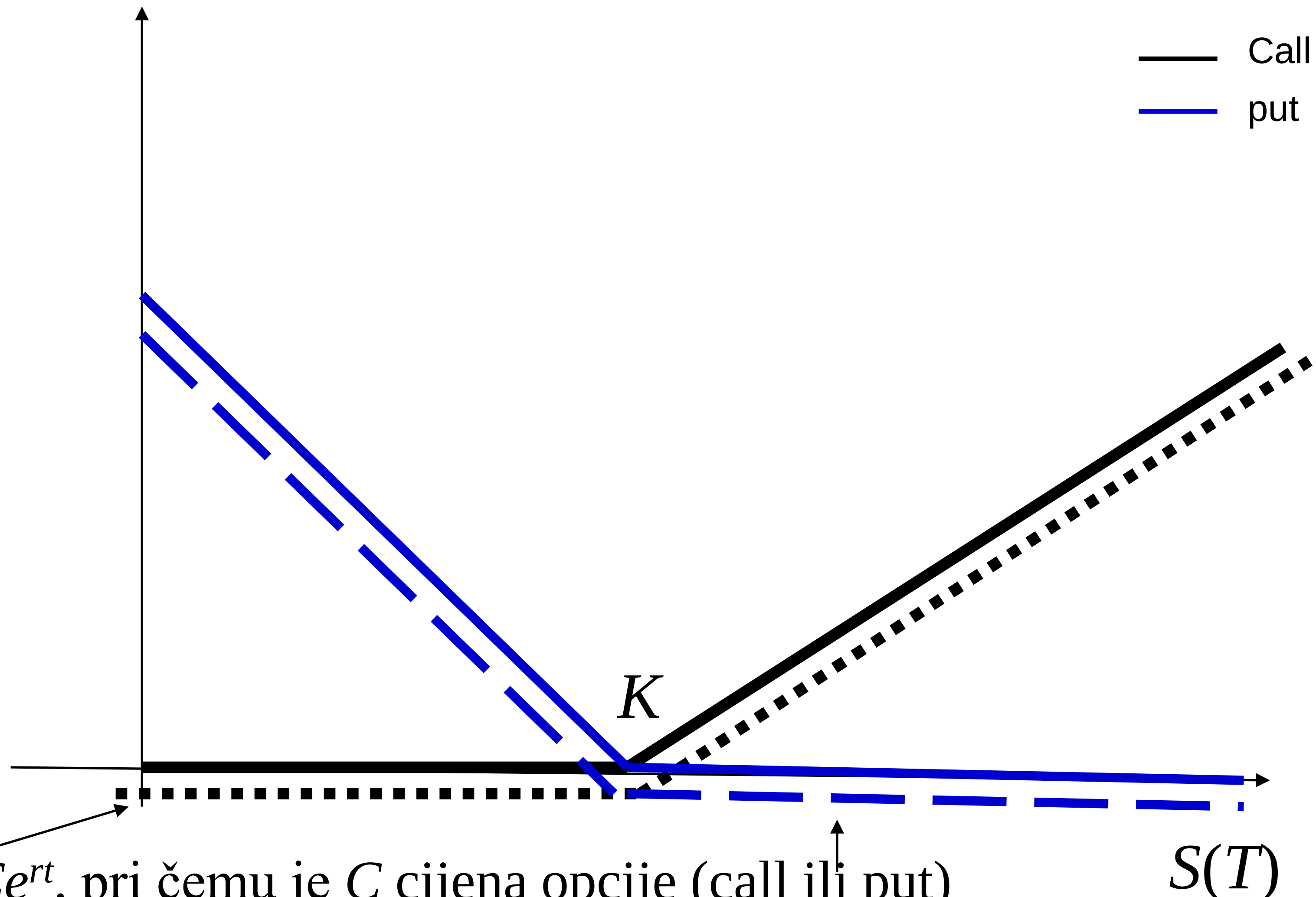
$$Isplata_{call} = \max\{S(T) - K, 0\} = \begin{cases} S(T) - K, & \text{ako je } S(T) > K \\ 0 & \text{ako je } S(T) \leq K \end{cases}$$

Isplata je slučajna varijabla, ovisna je o cijeni osnovne vrijednosnice u nekom budućem trenutku *T*, tj. o *S*(*T*), a takvu cijenu u trenutku $t<T$ **ne znamo** unaprijed.

- U slučaju europske put opcije, isplata je:

$$Isplata_{put} = \max\left\{K - S(T), 0\right\} = \begin{cases} 0, & \text{ako je } S(T) > K \\ K - S(T), & \text{ako je } S(T) \le K \end{cases}$$

Funkcija isplate europske call i put opcije



-Ce^{rt}, pri čemu je C cijena opcije (call ili put)

- **Primjer 2. (**Europska call opcija).

Primjer 1. pokazuje nam zašto opciju često nazivamo slučajnim zahtjevom. Uočimo također da za vlasnika opcije potencijalni gubitak ne može nikad biti veći od tržišne cijene takve opcije, dok za izdavatelja opcije potencijalni gubitak može biti znatno veći, u nekim slučajevima i neograničen.

- U slučaju jednoperiodnog modela binomnog stabla, europska call opcija s izvršnom cijenom K i dospijećem 1 je slučajni zahtjev
  - $X=max\{S(1)-K,0\}=[S(1)-K]^+$ čija je ugovorna funkcija
  - $f(x)=[\mathrm{S}(0)x-\mathrm{K}]^+$, $x=1+g$ ili $1+d$

- Označimo sa PX(t ;X) cijenu slučajnog zahtjeva X u trenutku t.
  - U većini slučajeva analizirat ćemo cijenu takvog ugovora *danas*, tj. u trenutku t=0, i u tom slučaju cijenu slučajnog zahtjeva X označit ćemo sa PX(X) ili jednostavno PX.

- Vrijedi: PX(1,X)=X, odnosno dva financijska instrumenta koji imaju iste vrijednosti isplata ***moraju*** imati <u>istu cijenu</u>.

Primjer.

- Pretpostavimo da je neki investitor posudio novac od banke po konstantnoj kamatnoj stopi od 6% (uz kontinuirano ukamaćivanje) kako bi investirao u europsku call opciju na dionicu XYZ, izvršne cijene 190 s terminom dospijeća od 2 mjeseca te da je takvu opciju investitor platio 19.5.
  - Ukoliko se banci u trenutku dospijeća vraća posuđeni novac, potrebno je vratiti $19.5e^{0.06*2/12}=19.696$
  - Takva će investicija ostvariti dobit za investitora ukoliko cijena dionice u trenutku dospijeća (za 2 mjeseca od trenutka kupnje) bude veća od 209.696

Zadatak.

- Pretpostavimo da je neki investitor posudio novac od banke po stopi 9% (kontinuirano ukamaćivanje) kako bi investirao u europsku call opciju na dionicu XYZ, izvršne cijene 90 s terminom dospijeća od 6 mjeseci te da je takvu opciju investitor platio 8. Pretpostavimo nadalje da u trenutku dospijeća postoje tri moguće cijene dionice XYZ na koju je opcija pisana: 87, 92 i 97, svaka s vjerojatnosti 1/3.
  - Interpretirajte značenje opcije za investitora s obzirom na navedena obilježja i s obzirom na mogućnosti cijene dionice XYZ u trenutku dospijeća
  - Odredite koliki je očekivani dobitak (gubitak) za investitora

- **Napomena.** Ako nije drugačije naznačeno, promatramo jednoperiodne tržišne modele, tj. T=1, odnosno t=0,1 (oznake u definicijama).

- **Definicija (Replicirajući portfelj)**. Slučajni zahtjev X je dostižan (engl. reachable, attainable) ako postoji portfelj h takav da je

$$V^h(T) = X,$$

pri čemu $\boldsymbol{V(t)}$ označava <u>vrijednost nekog portfelja u trenutku t</u>, t =0,1,..,T.

U tom slučaju kažemo da je portfelj h **replicirajući portfelj** (engl. hedging portfolio, replicating portfolio) za slučajni zahtjev X.

- **Definicija (Potpunost** (A,S) tržišta**)**. Kažemo da je tržište (A,S) , tj. tržište koje se sastoji od investiranja u nerizičnu imovinu i rizične vrijednosne papire, potpuno ako je **svaki** slučajni zahtjev dostižan.

- **Princip vrednovanja.** Ako je slučajni zahtjev dostižan s replicirajućim portfeljem h tada je jedina *razumna* cijena u trenutku t takvog slučajnog zahtjeva jednaka vrijednosti portfelja u istom vremenskom trenutku, tj. vrijedi

$$\mathrm{PX}\left(t; X\right) = V^{h}(t), \quad t = 0,1,\ldots, T$$

- **Napomena 1.** U potpunom tržištu, svaki slučajni zahtjev koji ima jedinstvenu nearbitražnu cijenu može se replicirati trgovanjem samo u nerizičnoj imovini A i rizičnim vrijednosnim papirima S.
  - U tom slučaju su svi slučajni zahtjevi redundantni
  - Kompletna tržišta su primjer *idealizacije* samih tržišta.

- Potpunost u jednoperiodnom modelu binomnog stabla podrazumijeva
  - **Dva** moguća buduća stanja (scenarija)
  - **Dvije moguće** vrijednosti nekog slučajnog zahtjeva
  - **Dva financijska instrumenta** kojima se trguje – obveznica i dionica – odnosno nerizična i rizična imovina
  - Portfelji su dvodimenzionalni
  - Repliciranje se svodi (matematički) na dvije jednadžbe s dvije nepoznanice što obično daje jedinstveno rješenje.

- **Propozicija.** Pretpostavimo da je X dostižna strategija s replicirajućim portfeljem h te da je $\mathrm{PX}(0;X) \neq V^h(0)$.

  Tada postoji mogućnost arbitraže na tržištu koji se sastoji od nerizične imovine, dionice i slučajnog zahtjeva (npr. opcije)

- *Dokaz*: Pretpostavimo da je $\mathrm{PX}(0;X) > V^h(0)$ te označimo replicirajući portfelj h sa $h=(x,y)$.
  - U trenutku t=0 odaberemo sljedeću strategiju: prodajom slučajnog zahtjeva dobiva se iznos $\mathrm{PX}(0;X)$ koji se (ali ne u potpunosti!) investira u x dionica jedinične cijene $S(0)$, a ostatak $y^*=\mathrm{PX}(0;X)- xS(0)> 0$ se uloži u banku. BSOMP A(0)=1.
  - U trenutku $t=1$: vlasniku slučajnog zahtjeva plati se iznos $\mathrm{PX}(1;X)=X$. Proda se x kupljenih dionica od čega se ostvaruje dobit $x\ S(1)$, a od banke se dobije $\mathrm{PX}(0;X)- xS(0)]A(1)$ u ukupnoj vrijednosti od

$$x\,S(1)+[\mathrm{PX}(0;X)- xS(0)]A(1) - X \qquad (1)$$

- No, $h=(x,y)$ je prema pretpostavci replicirajući portfelj za slučajni zahtjev X, odnosno vrijedi

$$X=V^h(1)=xS(1)+y\mathrm{A}(1) \quad (2)$$

- Prema pretpostavci je $\mathrm{PX}(0;X) > V^h(0) = xS(0)+y$ pa prema (1) slijedi:

$x\,S(1)+[\mathrm{PX}(0;\mathrm{X})-xS(0)]A(1) - X > x\,S(1)+yA(1) - X.$

No, prema relaciji (2) zadnji izraz $x\,S(1)+yA(1) - X$ jednak je nuli, odnosno vrijednost tako konstruiranog portfelja u trenutku $t=1$ je strogo pozitivna što predstavlja mogućnost arbitraže.

- Slučaj $\mathrm{PX}(0;X) < V^h(0)$ DZ.

$\square$

- **Napomena.** U dokazu prethodne propozicije, još smo mogli reći da je

$$h' = (\mathrm{PX} - xS(0), x, -1)$$

portfelj arbitraže za tržište (A, S, PX).

U drugom dijelu dokaza (DZ), takav će portfelj biti

$$h' = (xS(0) - \mathrm{PX}, -x, 1)$$

- **Propozicija.** Pretpostavimo da promatramo jednoperiodni model binomnog stabla. Tada je tržište (A,S) potpuno.

- *Dokaz*: Potrebno je pokazati da je svaki slučajni zahtjev na takvom tržištu dostižan, odnosno da za proizvoljni slučajni zahtjev X postoji replicirajući portfelj h takav da je $V^h(1)=X$.
  - Neka je X proizvoljni slučajni zahtjev s ugovornom funkcijom f. Potrebno je naći one udjele (x,y) u portfelju za koje u (jednoperiodnom) modelu binomnog stabla na tržištu (A,S) vrijedi:

$$xS(1)+y(1+r)=xS(0)\left(1+g\right)+y(1+r)=f(g)$$
$$xS(1)+y(1+r)=xS(0)\left(1+d\right)+y(1+r)=f(d)$$

- Drugim riječima potrebno je riješiti dvije jednadžbe u nepoznanicama *x* i *y*, odnosno udjelima u rizičnoj i nerizičnoj imovini. Rješenje je dano sa:

$$x = \frac{f(g) - f(d)}{S(0)(g-d)} \quad \text{i} \quad y = \frac{(1+g)f(d) + (1+g)f(g)}{(1+r)(g-d)}$$

- U tom slučaju vrijedi (uz A(0)=1):

$$\begin{aligned}
\mathrm{PX}(0;X) &= \frac{f(g) - f(d)}{S(0)(g-d)} S(0) + \frac{(1+g)f(d) - (1+g)f(g)}{(1+r)S(0)(g-d)} \\
&= \frac{f(d)}{1+r}\frac{g-r}{g-d} + \frac{f(g)}{1+r}\frac{r-d}{g-d} \\
&= \frac{f(d)}{1+r}\left(1-p^*\right) + \frac{f(g)}{1+r}p^* = \frac{1}{1+r}E^*[X],
\end{aligned}$$

pri čemu je p^* vjerojatnost neutralna na rizik, a $X=f(S_1)$. $\square$

- **Napomena.** Prema prethodnoj propoziciji vrijedi sljedeće: ako jednoperiodni binomni model ne dozvoljava strategiju arbitraže tada postoji jedinstvena cijena slučajnog zahtjeva X koja je dana sa:

$$\mathrm{PX}(0; X) = E^{*}\left[\frac{X}{1+r}\right]$$

pri čemu se očekivanje računa u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik.

Zadatak.

- Pretpostavimo da promatramo jednoperiodni binomni model za tržište (A,S) te da je situacija na tržištu sljedeća: S(0)=100, g=10%, d=-10%, a nerizična kamatna stopa jednaka je 5%. Pretpostavimo da investitor želi kupiti europsku put opciju izvršne cijene 95.
  - Odredite cijenu europske put opcije
  - Odredite replicirajući portfelj
  - Pretpostavimo da se takvom opcijom na tržištu trguje po cijeni 2. Što možete zaključiti? Analizirajte mogućnost arbitraže u tom slučaju.