# Financijska matematika


Doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva


Zagreb, 16.3.2018.

# Neprekidno ukamaćivanje

- Točnu vrijednost investicije je ponekad potrebno znati u vremenskim trenucima između perioda ukamaćivanja; npr. u slučaju da investitor želi zatvoriti račun na dan kada nema pripisa kamate.

- Pitanje: Kolika je vrijednost depozita na tekući račun od 1000 kn nakon 10 dana, uz mjesečni obračun kamata i kamatnu stopu od 12%?

    - 1000 kn? (prvi obračun tek za mjesec dana od danas?)

- Konačna (buduća) vrijednost glavnice $P$ na kraju godine $t$ uz godišnji kamatnjak $r$ i složeno i godišnje ukamaćivanje, jednaka je

$$V(t) = P(1+r)^t$$

- Ukoliko se u svakoj godini vrši ***m* ukamaćivanja** uz relativnu kamatnu stopu $\frac{r}{m}$ , tada uz sve veći $m$ konačna vrijednost teži prema

$$\boxed{V(t) = Pe^{rt}, \quad t \geq 0}$$

- **neprekidno ukamaćivanje** = *beskonačno* mnogo ukamaćivanja unutar jedne godine.

- Uz $m$ dodatnih ukamaćivanja uz relativnu kamatnu stopu $\frac{r}{m}$, buduća je vrijednost glavnice:

$$V(t) = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = P\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}\right)^{t}$$

- Budući da vrijedi

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} = e^{r},$$

tada je

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}\right)^{t} = \left(e^{r}\right)^{t} = e^{rt}$$

- Dakle, buduća vrijednost glavnice, nakon $t$ razdoblja, uz neprekidno ukamaćivanje jednaka je

$$\boxed{V(t) = V(0)e^{rt}}$$

- Sadašnja je vrijednost jednaka:

$$\boxed{V(0) = V(t)e^{-rt}}$$

- Vrijednost $e^{rt}$ je u neprekidnom slučaju **faktor rasta**

## Uz <u>češće</u> ukamaćivanje, **veći** je konačni iznos (za istu glavnicu i kamatnu stopu)!

- **Primjer**: $P_0 = 100$, $r = 10\%$ godišnje.

$$m = 1: \quad 100 \rightarrow 100\,(1+0{,}1) = 110$$

$$m = 2: \quad 100 \rightarrow 100\,(1+0{,}1/2)^2 = 110{,}25$$

$$m = 12: \quad 100 \rightarrow 100\,(1+0{,}1/12)^{12} \approx 110{,}38$$

$$m = 365: \quad 100 \rightarrow 100\,(1+0{,}1/365)^{365} \approx 110{,}52$$

$$m = \infty \quad 100 \rightarrow 100e^{0.1} = 110{,}52$$

$$\Rightarrow u\ praksi\ \ \infty \approx 365$$

# Veza između neprekidnog i diskretnog ukamaćivanja

- **Primjer:** $r$ – “neprekidna” kamata, $r_m$ – kamata koja se upisuje $m$ puta godišnje

  Kolika mora biti kamata $r_m$ da bi **efekt** ukamaćivanja njome $m$ puta godišnje bio isti kao i neprekidno ukamaćivanje? Obratno?

  Imamo:

  $e^r = (1 + r_m / m)^m$, odnosno $r = m \ln (1 + r_m / m)$

  $$\Rightarrow r_m = m ( e^{r/m} - 1)$$

  Godišnja!

- **Primjer.** Netko vam posudi novac uz 8% kamata godišnje s neprekidnim ukamaćivanjem, Koliko mu morate plaćati ako se kamata obračunava tromjesečno, a kredit je 100.000 kn?

  $$r_4 = 4 (e^{0,02} - 1) \approx 0,08080.$$

  Dakle, morate mu plaćati 2020 kn tromjesečno. Koliko biste morali plaćati da se kamata obračunava godišnje?

- U slučaju **neprekidnog** ukamaćivanja stopa rasta proporcionalna je trenutnoj vrijednosti imovine odnosno bogatstva. Dokažite. Koji je faktor proporcionalnosti?

- **Primjer:** Izračunajte razliku u vrijednosti sljedećih dviju investicija: vrijednost glavnice od 100 kn nakon godinu dana uz godišnji kamatnjak 10% i a) mjesečni obračun kamata te 2) neprekidno ukamaćivanje. Kojom se frekvencijom mora izvršavati upis kamate ukoliko želimo da razlika dviju vrijednosti ne bude veća od 0.01 kn?

- Uz neprekidno ukamaćivanje vrijednost glavnice nakon godinu dana iznosi

$$V(1) = 100e^{0.1} = 110.5171$$

- Uz mjesečno ukamaćivanje proporcionalni kamatnjak iznosi 10/12=0.8333%, te je vrijednost nakon godinu dana jednaka

$$V(1) = 100(1 + 0.00833)^{12} = 110.4713$$

Dakle, razlika je 0.0458.

- Ukoliko želimo da razlika bude manja od 0.01 kn uz neku određenu frekvenciju *m* upisa kamate, tada mora vrijediti

$$V_N(1) - V_m(1) < 0.01 \Rightarrow V_m(1) > 110.5171 - 0.01$$

$$\Rightarrow 100\left(1 + \frac{0.1}{m}\right)^m > 110.51,$$

odnosno $m > 55.19$.

- Napomena. Prinos na investiciju uz <u>složeno ukamaćivanje</u> **ne zadovoljava** svojstvo aditivnosti, tj:

$$R(0,1) = R(1,2) = r$$

$$R(0,2) = (1+r)^2 - 1 = r^2 + 2r$$

dakle, $$R(0,1) + R(1,2) \neq R(0,2)$$

- Uz neprekidno ukamaćivanje: $R(0,1) + R(1,2) \neq R(0,2)$

- Uz <u>jednostavni</u> kamatni račun: $R(0,1) + R(1,2) = R(0,2)$

- Koje bi prinose trebalo promatrati kako bi vrijedilo svojstvo aditivnosti?

# Logaritamski povrat vs. prinos

- Definiramo **logaritamski povrat**

$$lr(s,t) = \ln\frac{V(t)}{V(s)} = \ln V(t) - \ln V(s)$$

Uz <u>neprekidno ukamaćivanje</u> vrijedi

$$lr(s,t) = r(t-s),$$

pri čemu je $r$ kamatna stopa na investiciju. Tada je

$$r = \frac{lr(s,t)}{t-s}$$

- **DZ.** Dokažite da logaritamski povrat zadovoljava svojstvo aditivnosti, odnosno da vrijedi

$$lr(s,t)+lr(t,u)=lr(s,u), \qquad s<t<u$$

- **Napomena:**
  - Uz <u>jednostavno</u> ukamaćivanje: $R(s,t)=(t-s)r, \qquad s<t$
  - Uz složeno ukamaćivanje: $R(s,t)=(1+r)^{t-s}-1, \qquad s<t$
  - Uz neprekidno ukamaćivanje: $lr(s,t)=(t-s)r,$

# Kako usporediti metode ukamaćivanja?

- Do sada smo vidjeli: frekventnije ukamaćivanje ima kao posljedicu veće buduće vrijednosti uz uvjet da su <u>kamatne stope i početna glavnica jednake</u>.

  Naime, ako je $m < k$, tada je

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} < \left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

- Analizirat ćemo općenite situacije u kojima jedna metoda ukamaćivanja ima kao posljedicu **jednake ili veće buduće vrijednosti** od neke druge metode <u>uz istu početnu glavnicu</u>.

# Ekvivalentne metode ukamaćivanja

- Definicija. Za dvije metode ukamaćivanja kažemo da su **ekvivalentne** ukoliko su odgovarajući **faktori rasta** kroz period od jedne *godine* <u>jednaki</u>.

  Ukoliko je faktor rasta uz jednu metodu ukamaćivanja veći od faktora rasta uz drugu metodu ukamaćivanja, reći ćemo da *preferiramo* metodu ukamaćivanja uz veći faktor rasta u odnosu na drugu metodu.

## Primjer.

- Polugodišnje ukamaćivanje uz kamatnjak od 10 ekvivalentno je godišnjem ukamaćivanju uz kamatnjak 10.25%. Također, oba načina ukamaćivanja preferiramo u odnosu na mjesečno ukamaćivanje uz (godišnju) kamatnu stopu od 8%. Naime,

$$\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^2 = 1.1025 = 1 + 0.1025.$$

$$\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} = 1.083$$

- Uočimo: u oba slučaja radi se o kamatnim stopama izraženima na <u>godišnjoj razini</u>!

# Efektivna kamatna stopa

- Umjesto uspoređivanja faktora rasta, uspoređivat ćemo tzv. *efektivne stope*.

- **Definicija.** Za dani način obračuna kamata uz kamatnu stopu $r$, **efektivna kamatna stopa**, u oznaci $r_e$, je ona kamatna stopa koja daje <u>isti faktor rasta</u> kroz period od *godine* dana uz *godišnje* ukamaćivanje.

- U slučaju složenog ukamaćivanja uz frekvenciju $m$ i kamatnu stopu $r$, efektivna kamatna stopa zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$\boxed{1+r_e=\left(1+\frac{r}{m}\right)^m}$$

*godišnje*!

- U slučaju neprekidnog ukamaćivanja: $\boxed{1+r_e = e^r}$

- **Napomena**:

$1+r_e \rightarrow \left(1+\dfrac{r}{m}\right)^m$ diskretno ukamaćivanje

$1+r_e \rightarrow e^r$ neprekidno ukamaćivanje

$1+r_e$

$\downarrow$

**godišnje ukamaćivanje**

# Primjeri.

- Nađite onu kamatnu stopu koja je uz neprekidno ukamaćivanje ekvivalentna mjesečnom obračunu kamata uz kamatnu stopu od 12%.

- Rj:

$$e^r = \left(1 + r_m/12\right)^{12}, \quad r_m = 12\%$$

$$r = 11.94\%$$

- Odredite efektivnu kamatnu stopu u odnosu na sljedeće dvije metode ukamaćivanja: a) dnevno ukamaćivanje uz kamatnu stopu od 15% te b) polugodišnje ukamaćivanje uz kamatnu stopu 14%. Koja se metoda obračuna preferira?

- Rj: a) $$1+r_e=(1+r_d/365)^{365},\ r_d=15\%$$

$$r_e=16.18\%$$

- b) $$1+r_e=(1+r_p/2)^{2},\ r_d=14\%$$

$$r_e=14.49\%$$

# Primjeri.

- Izračunajte frekvenciju složenog ukamaćivanja uz kamatnu stopu 20% uz koju je investicija ekvivalentna godišnjem ukamaćivanju uz kamatnu stopu od 21%

- Rj:

$$1+r=\left(1+r_m/m\right)^m,\ \ r=21\%, r_m=20\%$$

$$m=2$$

- Propozicija. Dvije metode ukamaćivanja su ekvivalentne ako i samo ako su odgovarajuće efektivne kamatne stope jednake. Metoda ukamaćivanja s efektivnom kamatnom stopom $r_e$ se preferira u odnosu na neku drugu metodu ukamaćivanja s efektivnom kamatnom stopom $r_e'$ ako i samo je

$$r_e > r_e'.$$

- Dokaz: direktno prema definiciji faktora rasta.

- U terminima efektivne kamatne stope, buduća je vrijednost glavnice *P* nakon *t* perioda dana sa

$$V(t) = P(1 + r_e)^t, \qquad t \geq 0.$$

*ili* $$V(t) = Pe^{rt}, \qquad t \geq 0.$$

- Prethodna propozicija implicira da uz <u>jednaku glavnicu</u>, ekvivalentne će metode ukamaćivanja dati **jednaku** buduću vrijednost za bilo koji period $t \geq 0.$

- Također, metoda ukamaćivanja koja se *preferira* u odnosu na neku drugu daje veće buduće vrijednosti za bilo koji period $t \geq 0.$

## 1. 1. 2. Pokazatelji isplativosti ulaganja: usporedba investicijskih projekata

- Problem: Poduzeća ili investitori su često suočeni s odlukom između alternativnih projekata ili investicija. Kod donošenja odluka o financiranju projekata, vodi se računa o **isplativosti ulaganja**

→ prednost u principu imaju oni investicijski projekti u kojima se sredstva *učinkovitije* koriste.

- Analiza isplativosti ulaganja temelji se na **procjeni** budućih prihoda i troškova vezanih uz poslovanje.
- Pri procjeni budućih prihoda koristimo pojam **novčanog tijeka** ili **tijeka novca** (engl. cash flow)

- Postoji više pokazatelja koji se koriste u ocjenjivanju efikasnosti projekata temeljenih na analizi novčanog toka, a među njima se kao najvažniji, među financijskim parametrima, ističu:
  - Metoda čiste sadašnje vrijednosti
  - Metoda interne stope rentabilnosti
  - Rok povrata

- Računovodstveni parametri: prinos na kapital (ROE), prinos na imovinu (ROA), zarada po udjelu (dionici) (EPS)...

# Koji parametri bolje mjere investicijsku isplativost?

- Često se donositelji odluke odlučuju za isključivo jednu od metoda kojoj dodjeljuju apsolutno značenje. To obično ne otkriva niti jedan intrinzični tehnički problem.

- Prihvatiti neku od metoda ujedno znači prihvatiti njezine pretpostavke koje se obično odnose na ciljeve (obično maksimizacija bogatstva) i kontekst donošenja same odluke te su u tom kontekstu na njih i oslanjaju.



- Također, faktor *nesigurnosti* ne smije se zanemariti.

## Metoda čiste sadašnje vrijednosti (eng. Net Present Value)

- Između više ponuđenih investicija odabiremo onu najpovoljniju ili ocjenjujemo jednu investiciju kao povoljnu, odnosno nepovoljnu.

1. potrebno je <u>*procijeniti*</u> neto dobitke (ili izdatke) poslovanja u pojedinim razdobljima.

2. dobitci (ili izdaci) poslovanja u pojedinim godinama **diskontiraju** se na <u>početak</u> razdoblja trajanja investicije

- Korištena kamatna stopa poznata je kao cijena/trošak kapitala te se može raditi o trošku posuđivanja novca ili o željenoj stopi prinosa za investitora.

- *Distribucija* novčanih tokova kroz vremenski horizont ulaganja u interakciji je s ekonomsko-financijskim okruženjem.

- Naime, prihodi će se **reinvestirati** uz uvjete koji mogu utjecati na odluku, dok će novac apsorbiran od troškova biti posuđen drugim financijskim operacijama čiji trošak/profitabilnost obično utječe na procjenu (odnosno evaluaciju) same investicije.

- Svaka metoda evaluacije pretpostavlja određene pretpostavke o takvim uvjetima reinvestiranja. Ukoliko su oni konzistentni s aktualnom situacijom donositelja odluke, sugestije modela će biti vrlo korisne za konkretno donošenje odluka.

# Oznake:

- $N_t$ novčani tijek u vremenu $t$, $N_t \in R$, a $N_0$ označava vrijednost početnog ulaganja (negativnog predznaka)

- $r$ trošak (cijena) kapitala u danom periodu

- Čista sadašnja vrijednost dana je

$$V_{NPV} = N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t}{(1+r)^t}$$

- Budući da su budući novčani tokovi često procjene, zaokružujemo vrijednost na najbližu stotinu ili tisućinu

- Pozitivna vrijednost čiste sadašnje vrijednosti sugerira **profitabilnu investiciju**, dok negativna vrijednost označava gubitak, odnosno investicijski projekt u koji *razuman* investitor ne bi trebao ulaziti.
- Ukoliko se uspoređuje nekoliko investicijskih projekata, <u>prednost se daje</u> onom projektu <u>veće</u> čiste sadašnje vrijednosti.

- Cijena kapitala je uz procjenu novčanih tokova <u>odlučujuća</u> u ocjeni investicijskog projekta
- Prilikom procjene možemo uzeti u obzir i *nekoliko scenarija* (obično se gledaju optimistički, pesimistički te najbolja procjena)

# Primjer 1.

- Za neki se projekt pretpostavljaju sljedeći novčani tokovi ( u kunama):

| godina | 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| | 40000 | 25000 | 35000 | 30000 |

- Da li biste investirali 100000 kn u takav projekt ukoliko je trošak kapitala a) $r$ = 7%, b) $r$ = 14% ?

- Budući da je 100000 kn iznos početnog ulaganja, čista je sadašnja vrijednost projekta uz trošak kapitala od 7%:

$$V_{NPV} = -100000 + \frac{40000}{1+0.07} + \frac{25000}{(1+0.07)^2} + \frac{35000}{(1+0.07)^3} + \frac{30000}{(1+0.07)^4} = 10676$$

- Uz 14%:

$$V_{NPV} = -100000 + \frac{40000}{1+0.07} + \frac{25000}{(1+0.14)^2} + \frac{35000}{(1+0.14)^3} + \frac{30000}{(1+0.14)^4} = -4289$$

- Dakle, uz trošak kapitala od 7% je čista sadašnja vrijednost pozitivna.

# Primjer 2.

- Investitoru su prezentirana dva projekta, ABC010 te XYZ020. Dobici krajem godina za oba projekta dani su u sljedećoj tablici:

| godina | 1. | 2. | 3. | 4. |
|---|---|---|---|---|
| ABC010 | 180000 | 160000 | 170000 | 200000 |
| XYZ020 | 80000 | 105000 | 215000 | 300000 |

U svaki projekt treba investirati 600000 kn. Koji je projekt isplativiji ako je cijena kapitala 5%?

- Čista sadašnja vrijednost projekta ABC010:

$$V_{NPV} = -600000 + \frac{180000}{1+0.05} + \frac{160000}{(1+0.05)^2} + \frac{170000}{(1+0.05)^3} + \frac{200000}{(1+0.05)^4} = 27946.17$$

- Čista sadašnja vrijednost projekta XYZ020:

$$V_{NPV} = -600000 + \frac{80000}{1+0.05} + \frac{105000}{(1+0.05)^2} + \frac{215000}{(1+0.05)^3} + \frac{300000}{(1+0.05)^4} = 3964.4$$

- Dakle, projekt ABC010 ima <u>veću</u> čistu sadašnju vrijednost pa je i <u>isplativiji</u>

## Metoda interne stope rentabilnosti (engl. Internal Rate of Return)

- Kod metode čiste sadašnje vrijednosti smo pretpostavljali da investitor kreće s ciljanom stopom prinosa i na temelju toga uspoređuje *alternative* prilikom investiranja.

- Metoda interne stope rentabilnosti se također koristi za uspoređivanje i odabir *najpovoljnijeg* ulaganja za investitora.

- No, metoda interne stope rentabilnosti se prvenstveno koristi za **određivanje** kamatne stope kojom ćemo opisati uspješnost ili neuspješnost neke investicije.

- Određuje se stopa povrata/prinosa koju će projekt ili investicija proizvoditi

- Definicija. **Interna stopa rentabilnosti** nekog ulaganja je kamatna stopa za koju je čista sadašnja vrijednost tog ulaganja jednaka nuli (stopa povrata projekta)

- Drugim riječima, određivanje interne stope rentabilnosti svodi se na rješavanje sljedeće jednadžbe po *r:*

$$N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{N_t}{(1+r)^t} = 0 \qquad (*)$$

- Jednadžbu (*) moguće je zapisati kao

$$\frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t}{(1+r)^t} = I,$$

pri čemu je $I$ vrijednost <u>početnog ulaganja</u> (>0 !)

- Ukoliko znamo cijenu kapitala $r$, tj. kamatnu stopu uz koju posuđujemo novac, tada vrijedi

$r_{ISR} > r$ $\Rightarrow$ *isplativo* ulaganje

$r_{ISR} < r$ $\Rightarrow$ *ulaganje* s gubitkom

- Ukoliko je neki od novčanih tokova $N_1, N_2, \ldots, N_t$ negativan, tada postoji mogućnost višestrukih internih stopa rentabilnosti.

- Nakon određivanja interne stope rentabilnosti, investitor uspoređuje njezinu vrijednost s postojećim kamatnim stopama na tržištu ili s troškom kapitala za investitora.

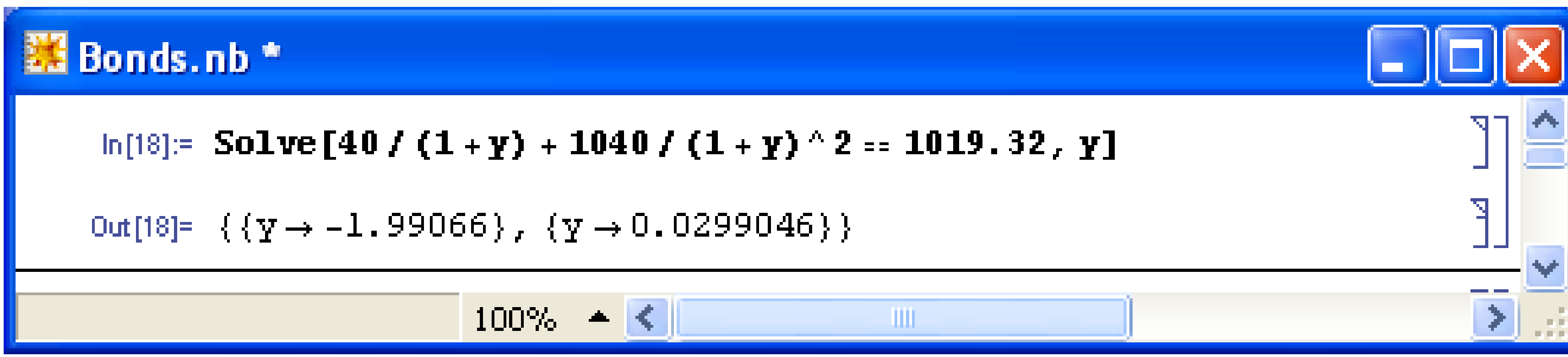
- Također, investitor mora voditi računa i o *riziku* koji određena alternativna investicija nosi.

# Napomena.

- Jednadžba (*) je algebarska jednadžba većeg stupnja

  → kako ju riješiti? *Eksplicitno*?

- Softver Mathematica:




- Excel: 1. Alati → Rješavač (Solver)

  2. Financijske funkcije NPV i IRR

# NPV vs IRR: koju metodu koristiti?

- Sumiranjem pravila za obje metode imamo:

| Kriterij | DA ili NE (da li odabrati određeni projekt) | **Rangiranje projekta** (usporedba dva međusobno isključiva projekta) |
|---|---|---|
| NPV | Projekt bi trebalo *preuzeti* ukoliko je čista sadašnja vrijednost pozitivna, tj. NPV > 0 | Projekt A se preferira projektu B ukoliko je NPV(A) > NPV(B) |
| IRR | Projekt bi trebalo *preuzeti* ukoliko vrijedi IRR > *r*, pri čemu je *r* odgovarajuća diskontna stopa | Projekt A se preferira projektu B ukoliko je IRR(A) > IRR(B) |

# Što ako NPV i IRR metoda daju različite zaključke?

- Pretpostavimo da promatramo dva projekta, A i B takve da je NPV(A) > NPV(B), ali je IRR(A)< IRR(B).

- U tom se slučaju često koristi kriterij čiste sadašnje vrijednosti prilikom donošenja odluke.

- Naime, ukoliko je cilj investitora maksimizacija *bogatstva* (vrijednosti imovine) tada se koristi metoda čiste sadašnje vrijednosti koja mjeri prirast vrijednosti imovine od preuzimanja projekta.

- Prilikom “Da” ili “NE” kriterija, ukoliko metoda čiste sadašnje vrijednosti upućuje na odluku “Da”, tada će istu odluku implicirati i interna stopa rentabilnosti (i obratno)

- Projekti su međusobno isključivi budući da oba predstavljaju način dobivanja istog ishoda, stoga biramo samo jedan među njima.

- Priliko rangiranja projekata, metode čiste sadašnje vrijednosti i interne stope rentabilnosti ne rangiraju nužno projekte na jednaki način, čak iako su oba projekta isplativa. Ukoliko postoji konflikt u metodi odluke, tada je metoda čiste sadašnje vrijednosti korektna metoda za budžetiranje kapitala.

**Primjer.** Pretpostavimo da promatramo novčane tokove za dva projekta, A i B. Oba projekta imaju **isti** početni trošak, ali **različite** novčane tokove (u 000 kn)

| | **Trošak kapitala 15%** | |
|---|---|---|
| **Godina** | **Projekt A** | **Projekt B** |
| 0 | -500 | -500 |
| 1 | 100 | 250 |
| 2 | 100 | 250 |
| 3 | 150 | 200 |
| 4 | 200 | 100 |
| 5 | 400 | 50 |
| **NPV** | **74.42** | **119.96** |
| **IRR** | **19.77%** | **27.38%** |

| | Trošak kapitala 8% | |
|---|---|---|
| **Godina** | **Projekt A** | **Projekt B** |
| 0 | -500 | -500 |
| 1 | 100 | 250 |
| 2 | 100 | 250 |
| 3 | 150 | 200 |
| 4 | 200 | 100 |
| 5 | 400 | 50 |
| **NPV** | **216.64** | **212.11** |
| **IRR** | **19.77%** | **27.38%** |

# Možemo primijetiti da:

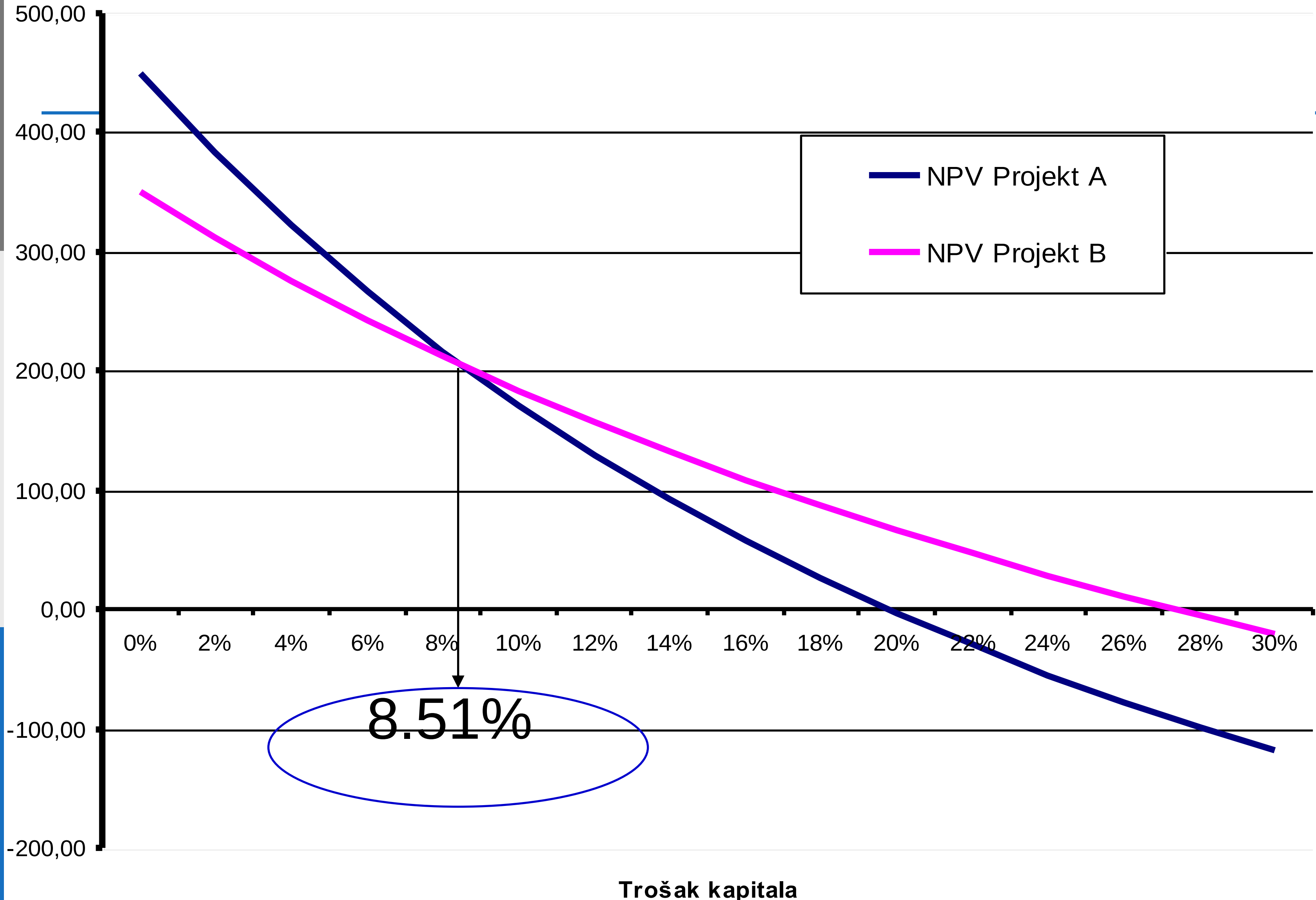
- Ukoliko koristimo metodu interne stope rentabilnosti, *preferiramo* projekt B

- Ukoliko koristimo metodu čiste sadašnje vrijednosti, *preferiramo* projekt B projektu A ukoliko je trošak kapitala (kamatna stopa, diskontna stopa) 15%.

  U tom slučaju se odluka poklapa s onom dobivenom uz IRR.
- Ukoliko je trošak kapitala 8%, tada dvije metode ne daju isti zaključak te se po NPV kriteriju *preferira* projekt A

## Tablica kamatnih stopa i čiste sadašnje vrijednosti

| | Projekt A NPV | Projekt B NPV |
|---|---|---|
| 0% | 450,00 | 350,00 |
| 2% | 382,57 | 311,53 |
| 4% | 321,69 | 275,90 |
| 6% | 266,60 | 242,84 |
| 8% | 216,64 | 212,11 |
| 10% | 171,22 | 183,49 |
| 12% | 129,85 | 156,79 |
| 14% | 92,08 | 131,84 |
| 16% | 57,53 | 108,47 |
| 18% | 25,86 | 86,57 |
| 20% | -3,22 | 66,00 |
| 22% | -29,96 | 46,66 |
| 24% | -54,61 | 28,45 |
| 26% | -77,36 | 11,28 |
| 28% | -98,39 | -4,93 |
| 30% | -117,87 | -20,25 |


500,00
400,00
300,00
200,00
100,00
0,00
-100,00
-200,00
0%
2%
4%
6%
8%
10%
12%
14%
16%
18%
20%
22%
24%
26%
28%
30%
NPV Projekt A
NPV Projekt B
8.51%
Trošak kapitala

- Projekt B ima veću internu stopu rentabilnosti (27.38%) od projekta A (19.77%)

- Ukoliko je **kamatna stopa** (trošak kapitala) **niska**, projekt A ima veću čistu sadašnju vrijednost od projekta B, no ukoliko je ona **visoka**, tada projekt B ima veću čistu sadašnju vrijednost od projekta A

- Postoji točka presjeka koja označava raspon (ne) podudaranja jednakosti dotičnih vrijednosti.

- Čista sadašnja vrijednost projekta A **osjetljivija** je na promjene troška kapitala od čiste sadašnje vrijednosti projekta B. Zašto?

- Novčani tokovi projekta A su *raspršeniji* kroz vrijeme od onih projekta B; drugim riječima projekt A ima značajno više svojih novčanih tokova u kasnijim vremenima od projekta B

# Točka presjeka 8.51%

| Kriterij | Trošak kapitala < **8.51%** | **= 8.51%** | **> 8.51%** |
|---|---|---|---|
| NPV | *Preferira* se projekt A<br>NPV(A) > NPV(B) | *Indiferentnost* među projektima:<br>NPV(A)= NPV(B) | *Preferira* se projekt B<br>NPV(B) > NPV(A) |
| IRR | Projekt B se uvijek preferira projektu A:<br>IRR(B) > IRR(A) | | |

# Računanje točke presjeka

- Točka presjeka je kamatna stopa za koju je <u>čista sadašnja vrijednost</u> (NPV) za oba projekta **jednaka**.

- Može se pokazati da je točka presjeka interna stopa rentabilnosti razlika u novčanim tokovima dvaju projekata.

- *Dokaz*: Pretpostavimo da je trošak kapitala jednak $r$ te da je NPV(A)=NPV(B). Označimo sa $N_i^A$ i $N_i^B$ novčane tokove projekata A, odnosno B za $i=0,\dots,t$.

- Tada vrijedi:.

$$NPV(A) = N_0^A + \frac{N_1^A}{1+r} + \frac{N_2^A}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t^A}{(1+r)^t}$$

$$= N_0^B + \frac{N_1^B}{1+r} + \frac{N_2^B}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t^B}{(1+r)^t} = NPV(B)$$

$$\Rightarrow 0 = NPV(A) - NPV(B) = N_0^A - N_0^B + \frac{N_1^A - N_1^B}{1+r} + \frac{N_2^A - N_2^B}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t^A - N_t^B}{(1+r)^t}$$

- Odnosno *r* je interna stopa rentabilnosti.

- Ukoliko dolazi do nepodudaranja u zaključku glede odabira među investicijskim projektima na bazi dviju metoda evaluacije (npr. za slučaj troška kapitala 8%), odluka se **najčešće** temelji na čistoj sadašnjoj vrijednosti (dakle, projekt A u ovom konkretnom slučaju)

- Korištenje NPV metode se preferira budući da čista sadašnja vrijednost predstavlja dodatno bogatstvo koje se dobiva, dok je kamatna stopa (složena) stopa povrata.

Ekonomska intuicija glede takvog načina odabira: potrošači maksimiziraju svoje bogatstvo (*vrijednost imovine)*, a ne svoje stope povrata.

# Vrijeme (rok) povrata (engl. Payback period)

- Rok povrata sredstava je vrijeme potrebno da se ostvarenim efektima vrate sva ulaganja

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Kamatnjak/100 | 0,05 | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | **Godina** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 4 | | **Novčani tok** | -1000 | 450 | 425 | 350 | 450 | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | NPV(1) | -1000,00 | | | | | |
| 7 | | NPV(2) | -571,43 | | | | | |
| 8 | | NPV(3) | -185,94 | | | | | |
| 9 | | NPV(4) | 116,40 | | | | | |
| 10 | | NPV(5) | 486,62 | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |

Vrijeme povrata je između **početka** treće i **početka** četvrte godine

$$npr.\ \ NPV(2) = -1000 + \frac{450}{1.05} = -571.43$$

- Općenito, ako je vrijeme povrata T iz intervala $\langle t, t+1 \rangle$, ono se računa po formuli:

$$T = t + \frac{NPV(t)}{NPV(t) - NPV(t+1)}$$

- U našem je slučaju:

$$T = 3 + \frac{-185{,}94}{-185{,}94 - 116{,}40} = 3.615$$

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Kamatnjak/100 | 0,05 | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | **Godina** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 4 | | **Novčani tok** | -1000 | 450 | 425 | 350 | 450 | |
| 5 | | | | | | | | |
| 6 | | NPV(1) | -1000,00 | | | | | |
| 7 | | NPV(2) | -571,43 | | | | | |
| 8 | | NPV(3) | -185,94 | | | | | |
| 9 | | NPV(4) | 116,40 | | | | | |
| 10 | | NPV(5) | 486,62 | | | | | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | |
| 13 | Vrijeme povrata | 3,615 | | | | | | |
| 14 | | | | | | | | |
| 15 | | | | | | | | |

=3+C8/(C8-C9)

- U donošenju odluke na temelju vremena povrata, investicija čije je vrijeme povrata kraće od referentnog roka (vrijeme povrata za slične projekte) je dobra investicija.

- Investicija čije je vrijeme povrata duže od referentnog roka je loša investicija.