Fakultet elektrotehnike i računarstva **Zagreb, 24. 6. 2010.**
Financijska matematika
Završni ispit

1. (10 bodova) Odredite istinitost sljedećih tvrdnji (T/N) uz objašnjenje vašeg odgovora ili nadopunite rečenicu:

a) Pretpostavimo da su vam dane dvije ponude: P1) 100 kn sada, 200 kn u trenutku n i 300 kn u trenutku $2n$ te P2) 600 kn u trenutku 10. Ukoliko je $\left(\frac{1}{1+r_e}\right)^n = 0.76$ tada će dvije ponude imati istu sadašnju vrijednost ako je efektivna kamatna stopa r_e manja od 3%.

b) Duracija kuponske obveznice nominalne vrijednosti 1000 s dospijećem od 3 godine koja isplaćuje polugodišnje kupone po kuponskoj stopi od 5%, veća je od 4 ukoliko je prinos do dospijeća veći od 4%, a manji od 6%.

c) Pretpostavimo da je tržište dano modelom binomnog stabla, pri čemu su moguće vrijednosti dionice XYZ na sutrašnji dan jednake 76 i 91.2, a vrijednost dionice danas jednaka je x. Ako je povrat pri padu vrijednosti dionice jednak -5%, tada povrat pri rastu vrijednosti dionice ne može biti veći od 25%.

d) Pretpostavimo da se na tržištu trguje europskom call opcijom na dionicu XYZ, čija je izvršna cijena 70 i dospijeće godinu dana. U trenutku dospijeća moguće su dvije cijene dionice XYZ: 67 i 79, svaka s vjerojatnosti 0.5. Ako je investitor danas posudio novac od banke (uz neprekidno ukamaćivanje) kako bi kupio europsku call opciju u iznosu od 2.5, tada investitor očekuje gubitak od takve investicije samo u slučaju da je novac posudio po nerizičnoj stopi od većoj od ____ %

e) Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli očekivanja μ, varijance σ^2 te definiramo n-tu parcijalnu sumu kao $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$, $n \geq 1$. Ako je $\mu = 0,$ tada je niz S_n, $n \geq 1$ martingal.

f) Pretpostavimo da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ koja ne isplaćuje dividendu jednaka 500 te da je unaprijedna cijena dionice XYZ s isporukom od godine dana jednaka 580.917. Pretpostavimo da je referentna tržišna kamatna stopa 15%. Tada ne postoji komparativna prednost od ulaganja u dionicu u odnosu na investiranje u unaprijedni ugovor

g) Pretpostavimo da promatramo dionicu XYZ koja isplaćuje dividendu u iznosu od 5 za tri mjeseca od danas. Ukoliko je referentna nerizična kamatna stopa 10%, a unaprijedna cijena dionice XYZ s trenutkom isporuke od godinu dana 94.076, tada postoji mogućnost arbitraže ukoliko je trenutna tržišna cijena dionice XYZ manja od 90.

OKRENITE LIST!

h) Označimo sa P^E cijenu europske put opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća T. Tada je $P^E \geq Xe^{-rT} - S(0)$ pri čemu je r referentna nerizična kamatna stopa, a $S(0)$ trenutna tržišna cijena dionice XYZ.

i) Cijena američke call opcije uvijek je veća ili jednaka cijeni europske call opcije budući da vam američka call opcija daje barem jednaka prava kao i europska call opcija.

j) Ukoliko volatilnost dionice XYZ raste, tada cijena europske call opcije na dionicu XYZ raste uz uvjet da ostale varijable koje utječu na cijenu europske call opcije na dionicu XYZ ostanu nepromijenjene.

2. (3 boda) Neka osoba počinje danas štedjeti kako bi u dogledno vrijeme kupila novi automobil. U tu svrhu krajem svake godine oroči 2000 eura uz kamatnu stopu od 6% godišnje. Na kraju treće godine (taman kada je osoba obavila treće oročenje), banka smanji kamatnu stopu na 3% godišnje. Zbog toga osoba odluči da više neće štedjeti za automobil, nego će ga kupiti odmah, i to ušteđenim sredstvima i iznosom zajma koji podiže, uz otplatu jednakih anuiteta od 2000 eura krajem godine, tijekom tri naredne godine. Koliko je osoba platila automobil ako je obračun kamata godišnji, složen i dekurzivan?

3. (3 boda) Neka je $S(0) = 100$ i neka su mogući sljedeći scenariji za cijenu dionice XYZ:

Scenarij	$S(1)$	$S(2)$
w_1	95	85
w_2	95	104
w_3	110	99
w_4	110	126

Nadalje, neka je referentna nerizična kamatna stopa na tržištu tokom ova dva perioda fiksna i iznosi 5%.

a) Da li na tržištu postoji mogućnost arbitraže?

b) Na tržištu se trguje europskom put opcijom izvršne cijene 100 s dospijećem $T = 2$. Koja je fer cijena takve opcije u trenutku 1 u situaciji kada je vrijednost dionice 95?

4. (3 boda) Pretpostavimo da se na tržištu danas trguje dionicom XYZ po cijeni od 100 te da će u trenutku t=1 cijena dionice XYZ biti ili 130 ili 70. Pretpostavimo da je referentna nerizična kamatna stopa 10%.

a) Da li na tržištu postoji mogućnost arbitraže?

b) Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik.

c) Odredite vrijednosti isplatne (ugovorne) funkcije europske call opcije na dionicu XYZ s dospijećem t=1 ukoliko je izvršna cijena call opcije 90.

d) Kolika je fer cijena europske call opcije (iz b) dijela zadatka) danas?

e) Odredite replicirajući portfelj (ako postoji) za europsku call opciju (iz c) dijela zadatka). Da li je takva call opcija dostižna?

5. (2 boda) Pretpostavimo da je cijena dionice XYZ na početku godine bila 50, referentna nerizična kamatna stopa 6% te da dionica XYZ isplaćuje dividendu u iznosu 5 nakon pola godine od danas te u iznosu uvećanom za 50% od prethodne dividende točno nakon godinu dana od danas. Odredite trenutnu cijenu unaprijednog ugovora s isporukom od godinu dana u slučaju da na tržištu ne postoji mogućnost arbitraže.

6. (2 boda) Trenutna tržišna cijena jednog udjela dionice XYZ koja ne isplaćuje dividendu je 500, dok su trenutne tržišne cijene europske call i put opcije na jedan udio dionice XYZ s dospijećem od godinu dana i izvršne cijene X redom 86.79 i 28.9. Ukoliko je referentna nerizična kamatna stopa 6%, odredite izvršnu cijenu opcije.

7. (2 boda) Pretpostavimo da ste market-maker unaprijednih ugovora na određene dionice. Trenutna cijena dionice XYZ je 110, referentna nerizična kamatna stopa je 5%, a prinos od dividende na dionicu XYZ je 2%. Pretpostavimo da je trenutna unaprijedna cijena unaprijednog ugovora na dionicu XYZ s isporukom od 6 mjeseci 112 te da se na tržištu trguje i sintetičkim ugovorima glede vrijednosnica koje su predmet interesa (ugovor čija je cijena određena na fer način, tj. ugovor nearbitražne cijene) . Odredite strategiju arbitraže na tržištu ukoliko je ona moguća.

8. (3 boda) Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po Black-Scholesovom modelu. Referentna nerizična kamatna stopa je 5%, volatilnost dionice 30%, a vrijednost dionice u trentku 0 je 100. Investitor kupuje izvedenicu s dospijećem od pola godine specifične isplate: ukoliko je cijena dionice nakon pola godine, S(1/2), manja od 100 investitor dobiva 100-S(1/2), ukoliko je cijena dionice između 100 i 120 investitor ne dobiva ništa i ukoliko je veća od 120 investitor dobiva S(1/2)-120. Nacrtajte graf vrijednosti izvedenice nakon pola godine u ovisnosti o cijeni dionice i izračunajte fer cijenu za takvu izvedenicu. Poznato je N(0.2239)=0.5886, N(0.0118)=0.5047, N(-0.6356)=0.2625, N(-0.8477)=0.1983. (Uputa: povežite isplatnu funkciju navedene izvedenice sa isplatnim funkcijama put i call opcije).

9. (3 boda) Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ koja ne isplaćuje dividendu kreće po Black-Scholesovom modelu. Želeći ulagati na tržištu izvedenica, prije 8 mjeseci ste posudili novac po nerizičnoj kamatnoj stopi kako biste kupili europsku call opciju na dionicu XYZ s dospijećem od godinu dana, izvršne cijene 75. U to je vrijeme cijena call opcije bila 10. Danas je cijena dionice XYZ 85, a volatilnost 26%. Izračunajte da li ste i koliki profit ostvarili od držanja call opcije kroz period od proteklih 8 mjeseci, ukoliko nerizična kamatna stopa na tržištu iznosui 5%. Poznato je N(1.02)=0.8461 i N(0.87)=0.8078.

OKRENITE LIST!

10. (4 boda) Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po Black-Scholesovom modelu. Nadalje pretpostavimo da je cijena dionice u trenutku nula jednaka 2, volatilnost 15% i referentna nerizična kamatna stopa 5%. Investicijska banka ABC je na tržištu prodala 1000 europskih call opcija izvršne cijene 2.1 s dospijećem pola godine i 500 europskih put opcija izvršne cijene 1.9 s periodom do dospijeća 9 mjeseci. Investicijska se banka želi zaštiti od rizika u promijeni cijene dionice. Konstruirajte odgovarajući delta-neutralni portfelj početne vrijednosti nula. Poznato je da N(-0.1713)=0.4320, N(-0.2773)=0.3908, N(0.7485)=0.7729,N(0.6186)=0.7319.

<u>Napomena</u>: Podsjećamo na nekoliko formula koje se pojavljuju u Black-Scholesovom modelu:

$$C^E = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_0}{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_0}{X} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$