Financijska matematika

Dr. Petra Posedel

Vedran Horvatić, dipl. inž.

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 16.3.2010.

1.2. 2. Duracija (trajanje)

- Vidjeli smo da varijabilne kamate vode do nesigurnosti u vidu budućih vrijednosti investiranja u obveznice, što može biti nepoželjno, ili čak neprihvatljivo (npr. mirovinski fondovi)

- **Cilj:** želimo naći *alat* koji će nam omogućiti **imunizaciju** takvih vrsta investicija:

  - U posebnom slučaju kada su kamatne stope nezavisne o dospijeću

  - U općem slučaju (opća vremenska struktura)

$\Rightarrow$ duracija

Analiza osjetljivosti cijena obveznica o prinosu

Prisjetimo se: obveznice su *rizične* jer su cijene takvih financijskih instrumenata osjetljive na promjene u kamatnim stopama.

$\longrightarrow$ rizik kamatnih stopa

- Veća tržišna cijena povlači manji prinos do dospijeća (PDD).

Nedostatak: rizik reinvestiranja! PDD nije stvarni prinos koji ćemo ostvariti investiranjem u obveznicu po cijeni *C* $\longrightarrow$ nemamo garancije da ćemo tokove novca prije dospijeća moći *reinvestirati* po prinosu PDD.

- Kako *kvantificirati rizik* kamatnih stopa?

- Duracija (engl. Duration) je bolja mjera **vremenskih karakteristika** obveznice od vremena do dospijeća jer uzima u obzir i <u>veličinu</u> i <u>vrijeme do dospijeća</u> pojedinih novčanih tokova.

- Kako se cijene obveznica *mijenjaju* ovisno o promjeni kamatnih stopa?

- Ukoliko je N nominalna vrijednost kuponske obveznice s dospijećem T_N, $\boldsymbol{y(0)=y}$ trenutni prinos, $\boldsymbol{K_i}$, $\boldsymbol{i=1,2,\ldots,M}$, iznosi kupona koji se isplaćuju u vremenima $T_1, T_2, \ldots, T_M$, pri čemu je $T_M = T_N$, tada je **trenutna** cijena takve obveznice dana sa:

$$C(y) = K_1 e^{-T_1 y} + K_2 e^{-T_2 y} + \ldots + (K_M + N) e^{-T_N y}$$

- **Duracija** (kuponske) obveznice definira se kao:

$$\boxed{D(y) = \frac{1}{C(y)} \left(T_1 K_1 e^{-T_1 y} + T_2 K_2 e^{-T_2 y} + \ldots + T_N \left(K_M + N \right) e^{-T_N y} \right)}$$

- Brojevi $\dfrac{K_1 e^{-T_1 y}}{C(y)}, \dfrac{K_2 e^{-T_2 y}}{C(y)}, \ldots, \dfrac{(K_M + N) e^{-T_1 y}}{C(y)}$ su nenegativni te je njihova suma jednaka jedan stoga na njih možemo gledati kao na pondere odnosno vjerojatnosti.

- Drugim riječima, duracija ujedno predstavlja vaganu mjeru prosjeka budućih vremena isplata, odnosno dospijeća (dakle, *to je neko vrijeme*), pri čemu su ponderi (težine) proporcionalni čistim sadašnjim vrijednostima novčanih tokova (kuponske isplate i nominalne vrijednosti).

- Duracija mjeri **osjetljivost cijene obveznice** na promjene u kamatnim stopama.

Računamo:

$$\frac{d}{dy}C(y) = -T_1 K_1 e^{-T_1 y} - T_2 K_2 e^{-T_2 y} - \ldots - T_N \left(K_M + N\right) e^{-T_N y}$$

iz čega slijedi:

$$\boxed{\frac{d}{dy}C(y) = -D(y)C(y)}$$

- Ova se formula često uzima kao definicija duracije.

Svojstva duracije

- *inverzna relacija* između <u>duracije i kupona</u>

- beskuponska obveznica ima duraciju jednaku svom vremenu do dospijeća (vijeku same obveznice)

- *inverzna relacija* između <u>prinosa do dospijeća i duracije</u>

- duracija **linearne kombinacije portfelja je linearna kombinacija** duracija tih portfelja

- **Primjer.** Kuponska obveznica nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od šest godina i godišnjim kuponima u iznosu od 10, uz prinos 6% ima duraciju od 4.857 godina.

  Kuponska obveznica s dospijećem od šest godina, s istim iznosom godišnjih kupona i istim prinosom, ali drugačije nominalne vrijednosti, 500, ima duraciju od 5.616 godina.

- **Napomena.** Kuponsku obveznicu možemo promatrati kao *portfelj* beskuponskih obveznica različitih dospijeća

Primjer. (Beskuponske obveznice)

- Promjene cijena beskuponskih obveznica mogu se aproksimirati ***malim promjenama*** u prinosima do dospijeća. Računamo (uz nominalnu vrijednost 1):

$$\frac{\partial}{\partial y} C_{BK}(T, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\exp(-Ty)\right] \approx -T \exp\left(-Ty_T\right) = -TC_{BK}(T, y)$$

pri čemu $C_{BK}(T,y)$ označava cijenu beskuponske obveznice nominalne vrijednosti 1 s dospijećem T i prinosom do dospijeća y.

- Dakle, vrijedi

$$\frac{\Delta C_{BK}}{C_{BK}} \approx -T \cdot \Delta y \qquad (1)$$

Možemo odmah primijetiti sljedeće:

- negativan predznak desne strane relacije (1) pokazuje da se cijene obveznica kreću u suprotnom smjeru od kamatnih stopa (prinos do dospijeća je usrednjena kamatna stopa)

- **relativna promjena cijene obveznica** (koja je dana lijevom stranom relacije) je proporcionalna sa T što kvantificira princip da dugoročnije obveznice imaju veće rizike kamatnih stopa od kratkoročnih obveznica.

Pretpostavimo da se svi prinosi do dospijeća promjene za neki mali iznos δ, tj. $\Delta y=\delta$ za **svako** dospijeće T.

Tada jednadžbu relativne promjene cijena obveznica možemo primijeniti na svaki od novčanih tokova kuponske obveznice i *usrednjiti* s adekvatnim ponderima (težinama), iz čega slijedi:

$$\frac{\Delta C_K}{C_K} \approx -D(y) \cdot \Delta y \qquad (2)$$

Dokaz: Pretpostavimo da obveznica isplaćuje kupon K_i u trenutku T_i za i=1,2…,N. Tada je čista sadašnja vrijednost, *SV*, (budućih) novčanih tokova K_i dana sa $SV_i = K_i \exp(-T_i \cdot y_{Ti})$.

Ako definiramo pondere (težine) sa $$w_i = \frac{SV_i}{\sum_{j=1}^{N} SV_j}$$

te duraciju obveznice kao ponderiranu (vaganu) sumu dospijeća novčanih tokova, tj.

$$D = \sum_{i=1}^{N} w_i T_i$$

Tada slijedi:

$$\frac{d}{d\delta}\sum_{i=1}^{N} K_i \exp\left[-T_i\left(y_{T_i}+\delta\right)\right]\Big|_{\delta=0} = -\sum_{i=1}^{N} K_i T_i \exp\left[-T_i y_{T_i}\right] = -\sum_{i=1}^{N} SV_i T_i$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} T_i w_i \left(\sum_{i=1}^{N} K_i \exp\left(-T_i y_{T_i}\right)\right) = -D\left(\sum_{i=1}^{N} K_i \exp\left(-T_i y_{T_i}\right)\right)$$

S druge strane,

$$C_K = \sum_{i=1}^{N} K_i \exp\left(-T_i y_{T_i}\right)$$

iz čega slijedi

$$\frac{dC_K}{d\delta} = -D \cdot C_K$$

odnosno $\Delta C_K \approx -D \cdot C_K \cdot \delta$ što se i tvrdilo

$\square$

Relaciju (2) možemo zapisati kao

$$D \approx -\frac{1}{C_K} \cdot \frac{\Delta C_K}{\Delta y} \qquad \text{(D2)}$$

i relaciju (2) koristimo kao *definiciju* duracije.

Veća duracija (tj. osjetljivost na promjene u prinosima) → **rizičniji** vrijednosni papir!

Za kuponsku obveznicu čije su isplate kupona **jednakih** vrijednosti, tj. $K_i = K$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, N$, u *diskretnim vremenskim opažanjima* imamo:

$$C_K = \frac{K}{1+y} + \frac{K}{(1+y)^2} + \ldots + \frac{K+N}{(1+y)^T}$$

pri čemu je y prinos do dospijeća na **godišnjoj razini**.

Tada vrijedi:

$$C_K^{'} = \frac{dC_K}{dy} = -\frac{K}{(1+y)^2} - \frac{2K}{(1+y)^3} - .... - \frac{T(K+N)}{(1+y)^{T+1}}$$

Iz upravo dobivene jednakosti slijedi:

$$\frac{dC_K}{dy}\cdot\frac{1}{C_K} = -\underbrace{\frac{1}{1+y}\cdot\underbrace{\left[\frac{K}{1+y}+\frac{2K}{(1+y)^2}+\ldots+\frac{T(K+N))}{(1+y)^T}\right]\cdot\frac{1}{C_K}}_{\textbf{Macaulayeva duracija}}}_{\textbf{modificirana duracija}}$$

Zadaci.

- Obveznica s dospijećem dvije godine od danas, nominalne vrijednosti 100, isplaćuje kupone u iznosu 6 svakog kvartala te ima prinos 11%. Izračunajte duraciju obveznice.

- Koja bi trebala biti nominalna vrijednost obveznice s dospijećem od pet godina, prinosom 10%, koja isplaćuje kupone u iznosu 10 na godišnjoj razini i čija je duracija 4 godine?

  - Izračunajte raspon duracija koje se mogu postići uz promjenu nominalne vrijednosti dokle god kuponi ne mogu premašiti nominalnu vrijednost.
  - Ako je nominalna vrijednost fiksna, npr. 100, odredite vrijednost kupona kako bi duracija obveznice bila 4. Koje se sve duracije mogu postići na taj način?

- **Primjer**. Pretpostavimo da investiramo u obveznicu s ciljem da zatvorimo poziciju u trenutku t.

  - Tada je buduća vrijednost imovine investirane u samo jednu obveznicu u slučaju da se kamatne stope ne promijene jednaka $C(y)e^{Ty}$.

  - Odredite osjetljivost tog iznosa na promjene u kamatnim stopama.

Kako bismo odredili osjetljivost na promjene u kamatnim stopama, potrebno je derivirati odgovarajuću vrijednost u odnosu na prinos do dospijeća y:

$$\frac{d}{dy}C(y)e^{ty} = C'(y)e^{ty} + tC(y)e^{ty},\ C'(y) = -D(y)C(y)$$

$$= \big(t - D(y)\big)C(y)e^{ty}$$

- **Ukoliko je duracija jednaka dospijeću**, tj. $D(y)=t$, tada prema prethodnoj jednakosti slijedi:

$$\frac{d}{dy}C(y)e^{ty} = \left(t - D(y)\right)C(y)e^{ty} = 0$$

- Dakle, *male promjene* u kamatnoj stopi imat će *slab utjecaj* na buduću vrijednost investicije.

Portfelj obveznica

- Ukoliko obveznica određene duracije nije dostupna na tržištu, moguće je *kreirati sintetičku obveznicu* investirajući u odgovarajući portfelj obveznica **različitih duracija**.

- Primjer. Pretpostavimo da je početna kamatna stopa 14%.
  - Tada obveznica s dospijećem 4 godine, nominalne vrijednosti 100, s isplatom godišnjih kupona iznosa 10 ima duraciju 3.44 godine.
  - Beskuponska obveznica nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od godinu dana ima duraciju 1.
  - Pretpostavimo da analiziramo portfelj dviju obveznica, svake od prethodnih vrsta po jedna. U tom slučaju tako konstruiranu obveznicu možemo gledati kao na *jednu* obveznicu s kuponima K_1=110, K_2=K_3=K_4=10, N=100. Duracija je takve obveznice jednaka 2.21 godina.

- **Cilj**: naći zatvorenu formulu za **duraciju portfelja** u terminima duracija pojedinih komponenti portfelja.

  Koje svojstvo duracije želimo pokazati?

- Neka su $C_A(y)$ i $C_B(y)$ cijene dviju vrsta obveznica, A i B, s duracijama $D_A(y)$ i $D_B(y)$. Pretpostavimo da se portfelj sastoji od a komada obveznica A i b komada obveznica B. Tada je vrijednost portfelja jednaka $a\,C_A(y) + b\,C_B(y)$.

- Postupak određivanja duracije tako konstruiranog portfelja sastoji se od dva koraka.

- 1. korak. Odredi se duracija portfelja koji se sastoji od a komada obveznica A, označimo takav portfelj sa aA. Cijena tog portfelja je $aC_A(y)$, a budući da vrijedi

$$\frac{d}{dy}\big(aC_A(y)\big) = -D_A(y)\big(aC_A(y)\big),$$

tada je

$$\boxed{D_{aA}(y) = D_A(y).}$$

- Primijetimo da su u slučaju portfelja aA, svaki kupon kao i nominalna vrijednost pomnoženi s faktorom a.

- 2. korak. Odredi se duracija portfelja koji se sastoji od jedne obveznice A i jedne obveznice B, što ćemo označiti sa A+B. Cijena je takvog portfelja $C_A(y)+C_B(y)$.

Deriviranjem funkcije cijene takvog portfelja slijedi:

$$\frac{d}{dy}\left(C_A(y)+C_B(y)\right)=\frac{d}{dy}C_A(y)+\frac{d}{dy}C_B(y)$$
$$=-D_A(y)C_A(y)-D_B(y)C_B(y)$$

Desna strana jednakosti bit će jednaka $D_{A+B}(y)(C_A(y)+C_B(y))$ u slučaju da je

$$D_{A+B}(y)=D_A(y)\frac{C_A(y)}{C_A(y)+C_B(y)}+D_B(y)\frac{C_B(y)}{C_A(y)+C_B(y)}$$

- Drugim riječima, $D_{A+B}(y)$ je **linearna kombinacija** duracija D_A i D_B, pri čemu su koeficijenti linearne kombinacije dani sa

$$w_A = \frac{aC_A(y)}{aC_A(y)+bC_B(y)} \quad \text{i} \quad w_B = \frac{bC_B(y)}{aC_A(y)+bC_B(y)}$$

i predstavljaju udjele pojedinih obveznica u portfelju, $w_1+w_2=1$.

- Ukoliko su vrijednosti a i b negativne, tj u slučaju posuđivanja novca (izdavanje obveznica) umjesto njegovog investiranja u obveznice (kupnje obveznica), tada duracija portfelja može poprimiti bilo koju vrijednost za dvije <u>različite</u> duracije obveznica A i B.

- Negativna vrijednost duracije predstavlja negativni novčani tok, odnosno količinu novca koja se mora platiti, a ne biti isplaćena.

Zadaci.

- Neka je D_A=1 i D_B=3 godine. Pretpostavimo da neki investitor želi investirati 1000 $ na 6 mjeseci. Odredite kolike udjele u obveznice A i B tvrtka mora investirati kako bi se duracija podudarala sa željenim periodom investiranja. Ukoliko su C_A=0.92 i C_B=1.01 $, odredite koliko novaca će investirati u obveznicu A, a koliko u obveznicu B.
- Pretpostavimo da želite investirati 1000 kn u portfelj obveznica duracije 2 ukoliko se pritom koristite sljedećim obveznicama kojima se trguje na tržištu: beskuponskim obveznicama nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od godinu dana te kuponskim obveznicama nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od 4 godine i godišnjim kuponima u iznosu od 15 čija je tržišna cijena 102. Na koji ćete način investirati željeni iznos?

- Portfelj duracije koja se podudara s periodom trajanja investicije neosjetljiv je na promjene u kamatnim stopama.

- No, u praksi bi se portfelj trebao modificirati ukoliko je npr. je horizont investiranja tri godine, a jedan od obveznica u portfelju je beskuponska obveznica s dospijećem od godinu dana. Također, moguće je da duracija ode izvan zadanih okvira.
- Kao rezultat, postat će nužno promijeniti udjele u portfelju kroz period držanja investicije.

→ dinamički *hedging*

Dinamički hedging

- Stvaranje portfelja čija se duracija podudara s periodom držanja investicije i koji će biti *imun* na promjene u kamatnim stopama, odnosno stvaranje portfelja na koji će promjene u kamatnim stopama imati vrlo mali i ujedno neznatan utjecaj.

- Čak i u slučaju da je portfelj odabran na način da se duracija podudara sa traženim horizontom ulaganja (*vijek investicije*), to će jedino biti moguće u početnom trenutku budući da se **duracija mijenja s vremenom** kao **i s kamatnim stopama**.

- **Primjer**. Pretpostavimo da promatramo obveznicu nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od 5 godina i godišnjim kuponima u iznosu od 10.
    - Ako je trenutna kamatna stopa 10%, tada će duracija biti 4.16 godina.
    - Prije isplate prvog kupona, duracija opada **linearno** s vremenom: Nakon šest mjeseci iznosit će 3.66, a nakon 9 mjeseci 3.31
    - Ako se duracija podudara s periodom držanja investicije te ako se kamatne stope ne promijene, neće biti potrebno poduzeti nikakvu akciju <u>do isplate prvog kupona</u>
    - Nakon isplate prvog kupona (nakon godinu dana), obveznica će postati ujedno četverogodišnja, duracije 3.48 što više nije konzistentno s periodom trajanja investicije.

- Obveznica iz prethodnog primjera će imati duraciju 4.23 u slučaju da je kamatna stopa jednaka 6% te 4.08 u slučaju da je kamatna stopa jednaka 14%.

- Dokažite da je duracija obveznice s dospijećem od dvije godine s godišnjom isplatom kupona padajuća funkcija prinosa (kamatne stope)

Primjena duracije na konstrukciju investicijske strategije (*portfelja*) imunog na **promjene u kamatnim stopama.**

- Usredotočenost je na zauzimanju pozicije unutar investicije na **kraju svakog perioda** od interesa u kojem postoji mogućnost za promjenom u kamatnim stopama.

- Strategiju konstrukcije *portfelja* s ciljem da bude imun na promjene u kamatnim stopama bit će predočena na sljedećem primjeru.

- Pretpostavimo da planirate investiciju <u>s horizontom ulaganja od 3 godine</u> s ciljem ostvarivanja vrijednosti 100000 kn. Pretpostavimo da je trenutna referentna kamatna stopa 12%.

- Ukoliko se kamatne na tržištu ne bi mijenjale kroz period trajanja investicije, tada bi bilo potrebno danas uložiti iznos od 69767.63 kn.

- Pretpostavimo da se na tržištu trguje sljedećim obveznicama:
  - kuponska obveznica A nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od 5 godina koja isplaćuje godišnje kupone u iznosu od 10
  - beskuponska obveznica tipa B s dospijećem od godinu dana iste nominalne vrijednosti kao obveznica tipa A te pretpostavljamo da su takve vrste obveznica uvijek dostupne na tržištu (tj. svake sljedeće godine takvom se beskuponskom obveznicom trguje na tržištu)

Strategija konstrukcije takvog portfelja:

- U trenutku 0 cijena cijena obveznice A iznosi 90.27 kn, a obveznice B 88.69 kn, D_A=4.12 godina, D_B=1. Budući da je duracija željenog portfelja 3 godine, udio je obveznica tipa A u portfelju 64.05%, a obveznica B 35.95%.
- Sukladno tome, potrebno je uložiti 44687.93 kn u obveznice tipa A, kupujući time $n_A = 495.05$ obveznica A.
- Nadalje, potrebno je uložiti 25079.70 kn u obveznice tipa B, kupujući time $n_B = 282.77$ obveznica B.

- Pretpostavimo da je nakon godinu dana kamatna stopa **porasla** za 2 postotna poena, dakle na 14%.

- Tada vrijedi:
  - od prvih kupona obveznica A: 4950.51
  - od unovčenih vrijednosti obveznica B (nominalna!) : 28277.29
  - tržišna je vrijednost obveznica A koje se i dalje drže u portfelju (a koje su sada obveznice s dospijećem od 4 godine tržišne vrijednosti 85.65 kn): 42403.53 kn
  - **Ukupno**: 75631.32 kn
  - U trenutku t =1, duracija obveznice A je 3.44 (zašto nije 3.12?), ciljana duracija je sada 2 godine, stoga je potrebno ažurirati portfelj sljedećim udjelima: 40.94% u obveznice A i 59.06% u obveznice B čime se ujedno dobiva n_A = 361.53 obveznica A u portfelju i n_B = 513.76 obveznica B.
  - Potrebno je stoga **prodati** 133.52 obveznica A i **kupiti** 513.76 novih obveznica B.

- Slučaj A: Pretpostavimo da je nakon godinu dana (dakle nakon ukupno dvije godine od početka investiranja) kamatna stopa pala na 9% (pala za 5 pp). Tada vrijedi:
  - Trenutnoj vrijednosti imovine dodali su se isplaćeni kuponi obveznica A: 3615.30 kn, nominalne vrijednosti obveznica B u ukupnom iznosu od 51376.39 kn i vrijednost (tržišna!) od prodaje obveznica A po cijeni (trenutnoj!) od 101.46 kn, koja iznosi 36682.22 kn, što **ukupno** predstavlja vrijednost od 91673.92 kn.
  - Investira se cijela vrijednost imovine u obveznice B budući da je ciljana duracija investicije sada 1 godina, a isplata obveznica B je *garantirana* sljedeće godine.
  - Moguće je (s obzirom na vrijednost imovine) **kupiti** 1003.07 obveznica B koje se prodaju po cijeni od 91.39 kn.
  - Ukupna će vrijednost investicije nakon tri godine od početka investiranja biti 100307 kn >100000 (ciljane vrijednosti).

- Slučaj B: Pretpostavimo da je nakon godinu dana (dakle nakon ukupno dvije godine od početka investiranja) kamatna stopa narasla na 16% (narasla za 2 pp). Odredite strategiju investiranja u posljednjoj, trećoj, godini.