**Fakultet elektrotehnike i računarstva**
**Financijska matematika**
**Zadaci za vježbu i samostalan rad**
**20. 3. 2015.**

**Napomena za studente:** Za vježbu za treći tjedan nastave dovoljno je riješiti prva tri zadatka. Ostali zadaci odnose se na ostatak prezentacije_03 i na prezentaciju_04 za 4. tjedan nastave.

**1.** Izračunajte cijenu obveznice nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od četiri godine i godišnjim kuponima iznosa 5 uz kontinuirano ukamaćivanje i kamatnu stopu a) 8% i b) 5%. Što primjećujete? (**Rj: a) B(0,4)=89.055, b) B(0,4)=99.5506 =>pad kamatne stope uzrokuje rast cijene obveznice )**

**2.** Promatramo obveznicu nominalne vrijednosti 100 i godišnjih kupona u iznosu 8 s dospijećem od tri godine. Pretpostavimo da se obveznicom trguje po nominali. Odredite impliciranu neprekidnu kamatnu stopu. (**Rj: r=7.696%**)

**3.** Kuponska obveznica nominalne vrijednosti 1000 s dospijećem 10 godina isplaćuje polugodišnje kupone iznosa 18.

- **a)** Pretpostavimo da je trenutna stopa za takvu obveznicu 4% na godišnjoj razini uz složeno polugodišnje ukamaćivanje. Kolika je cijena takve obveznice? (**Rj: B(0,10)=967.3 kn**)
- **b)** Da li se obveznica prodaje po većoj ili manjoj cijeni od nominalne vrijednosti? Zašto? (Rj: Obveznica se prodaje po cijeni manjoj od nominalne pa vrijedi: kuponska stopa<trenutna stopa<prinos do dospijeća)

**4.** Pretpostavimo da se na tržištu prodaje kuponska obveznica nominalne vrijednosti 1000 s dospijećem 5 godina po cijeni 1100. Polugodišnje isplate kupona iznose 25.

- **a)** Izračunajte prinos do dospijeća takve obveznice (Iskoristite programsku potporu Mathematica). Napišite jednadžbu čije je rješenje prinos do dospijeća.

  (**Rj**. $1100 = \sum_{i=1}^{10} \frac{25}{e^{\frac{r}{2}i}} + \frac{1000}{e^{\frac{r}{2}10}} \Rightarrow r = 2.82\%$)
- **b)** Koji je trenutni prinos (*current yield*) takve obveznice? (Rj. 4.545%)
- **c)** Da li je prinos do dospijeća takve obveznice manji ili veći od trenutnog prinosa? Zašto? Objasnite da li će u trenutku dospijeća doći do gubitka ili dobitka kapitala. (Rj: prinos do dospijeća je manji od trenutnog prinosa jer se kuponska obveznica prodaje po cijeni većoj od nominalne)

**5.** Pretpostavimo da promatrate kuponsku obveznicu s dospijećem od 20 mjeseci, nominalne vrijednosti 100 koja isplaćuje kupone na polugodišnjoj razini (zadnja isplata u trenutku dospijeća, a prva nakon dva mjeseca od danas: broji se unazad šest mjeseci od dospijeća) i kuponska stopa iznosi 6% (na godišnjoj razini!). Ukoliko je kamatna stopa zadana funkcijom $r(t) = 0.0525 + \frac{\ln(1+2t)}{200}$, odredite cijenu takve obveznice. (**Rj**. Do isplate prvog kupona vrijedi kamatna stopa $r(0)$, nakon toga do isplate drugog kupona $r(2/12)$ itd.), 102.51 kn)

**6.** Pretpostavimo da ste danas investirali jednu kunu u beskuponsku obveznicu s dospijećem od godinu dana. Na kraju svake godine reinvestiraju se isplate u nove obveznice istog tipa. Koliko obveznica ste u mogućnosti kupiti na kraju 9. godine? Izrazite rješenje u terminima implicirane neprekidne kamatne stope. (**Rj**: $e^{10r}$ )

**7.** Pretpostavimo da je obračun kamata neprekidni te da se na tržištu trguje obveznicom s dospijećem od godinu dana po cijeni $B(0,12)$=0.87 kn. Izračunajte kamatnu stopu nakon šest mjeseci, ako investiranje na horizont od šest mjeseci daje logaritamski prinos od 14%. (**Rj**. Takva situacija s beskuponskom obveznicom nije moguća budući da bi uz zadani logaritamski prinos cijena obveznice već nakon 6 mjeseci trebala biti 1.000738, dakle veća od nominalne)

**8.** Pretpostavimo da investiramo sumu od 1000 kn u obveznicu s dospijećem od 4 godine, nominalne vrijednosti 100 koja isplaćuje godišnje kupone u iznosu od 10 kn. Pretpostavimo da se takvim obveznicama trenutno na tržištu trguje cijenom od 91.78 kn.

**a)** Odredite prinos u trenutku 0 (Riješite jednadžbu) (**Rj**. $r$=12%)

**b)** Pretpostavimo da ste isplaćeni novac u obliku kupona nakon godinu dana reinvestirali u obveznice iste vrste, ali s dospijećem od tri godine. Kolika je ukupna vrijednost vaše imovine nakon tri godine od trenutka kupnje obveznica s dospijećem od tri godine ukoliko a) kamatna stopa ostane nepromijenjena i b) ukoliko kamatna stopa padne za 2 pp u trenutku prodaje prvog kupona i ostane na toj razini kroz naredne tri godine. Što možete zaključiti? (Rj. a) V(4)=1616.046571 kn, b) V(4)=1599.088304 kn. Zbog pada kamatne stope ukupna je vrijednost imovine manja.

**d)** Odredite kolika bi trebala biti stopa ukoliko želite ostvariti logaritamski povrat na investiciju od a) 12% i b) 14% (Rj. Tako mali logaritamski povrat nije moguće ostvariti jer već samo uz početno investiranje u takve obveznice, bez reinvestiranja kupona svake godine, logaritamski povrat je jednak 42.22%

**9.** Pretpostavimo da su trenutno uvjeti na tržištu takvi da je $B$(0,T)< $B$(0,T+1), pri čemu $B$(0,T) predstavlja cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0 s dospijećem T.

a) Kako se navedena nejednakost reflektira na odnos odgovarajućih prinosa y(0,T) i y(0,T+1)?
b) Da li to ujedno predstavlja mogućnost arbitraže?
c) Odredite strategiju arbitraže
d) Interpretirajte situaciju na tržištu koja je određena takvom nejednakosti cijena obveznica.

**10.** Na tržištu se nude beskuponske obveznice s dospijećem od godinu dana i nominalne vrijednosti 100 po cijeni 95.12, kao i kuponske obveznice nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od dvije godine i kuponskom stopom 10 % po cijeni 104.95. Pretpostavka investitora je da će se nakon godinu dana na tržištu također nuditi beskuponske obveznice s dospijećem od godinu dana i nominalne vrijednosti 100 po cijeni 95.12.
Da li investitor može ostvariti strategiju za arbitražu? Ako da, odredite ju. Pretpostavlja se da je dopuštena kratka pozicija u obveznici, odnosno izdavanje obveznica ili prodavanje obveznica koje ne posjedujete.

**11.** Pretpostavimo da se trenutno na tržištu trguje obveznicama nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od 2 i 4 godine čije su cijene B(0,4)= 93.20 te B(0,2)= $x$, pri čemu je $x$ > 93.20, te da su prinosi do dospijeća tih obveznica nezavisni o dospijeću, odnosno da vrijedi $y$(0,2)=$y$(0,4). Također, pretpostavimo da će se u trenutku $t$=2 godine trgovati obveznicom s dospijećem od dvije godine cijene B(2,4)= $c$, $c$ > 0, nominalne vrijednosti 100 i prinosa do dospijeća $y$(2,4).
a) odredite koja bi relacija trebala vrijediti između cijena $x$ i $c$ ukoliko na tržištu ne postoji mogućnost arbitraže. (**Rj.** ***xc*****=0.9320**)
b) odredite koja bi relacija trebala vrijediti između cijena $x$ i $c$ ukoliko na tržištu postoji mogućnost arbitraže. U tom slučaju, odredite strategiju arbitraže. ( **Rj.** ***xc*** **< 0.9320 ;** u $t$=0 izdamo B(0,4)/B(0,2) obveznica B(0,2) i kupimo 1 obveznicu B(0,4); V(0)=0; u $t$=2 podmirimo obaveze koje dolaze na naplatu zbog izdavanja obveznice B(0,2) tako što izdamo odgovarajuću količinu obveznica B(2,4); V(2)=0; u $t$=4 dobivamo 1 n.j. od obveznice B(0,4), a na naplatu dolazi nominalna vrijednost za svaku od obveznica B(2,4), njih 0.9320/($xc$).