Financijska matematika

Dr. Petra Posedel

Vedran Horvatić, dipl. inž.

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 23.3.2010.

1.3. Opća vremenska struktura kamatnih stopa

Uvod i motivacija

- Označimo sa $B(0,T)$ cijenu beskuponske obveznice nominalne vrijednosti 1s dospijećem T, drugim riječima, danas je potrebno platiti iznos $B(0,T)$ kako bi se dobila 1 novčana jedinica u trenutku T.

- Vrijedi:

$$B(0,0) = 1$$

$$B(0,+\infty) = 0$$

$$B(0,T) > B(0,T+1)$$

Cilj: Investiranje novca od trenutka s do t, $0 \leq s \leq t \leq T$

tako što želimo **danas** konstruirati portfelj koji nam to omogućava.

- *Izdamo* $\dfrac{B(0,t)}{B(0,s)}$ beskuponskih jediničnih obveznica s dospijećem s čija je cijena $B(0,s)$

- Kupimo jednu beskuponsku jediničnu obveznicu obveznicu s dospijećem t cijene $B(0,t)$
  - novčani tok u trenutku 0 jednak je nula

- U trenutku s potrebno je isplatiti nominalnu vrijednost obveznice s dospijećem s za svaku obveznicu koja je *izdana* u trenutku 0; ukupni je trošak jednak $B(0,t)/ B(0,s)$

- U trenutku t za svaku beskuponsku obveznicu kupljenu u trenutku 0 s dospijećem t, bit će isplaćena (nominalna) vrijednost 1

- Drugim riječima, u trenutku s potrebno je platiti $\boldsymbol{B(0,t)/ B(0,s)}$ kako bi se dobila **jedna** novčana jedinica u trenutku t

- U skladu s prethodnim, na izraz $\dfrac{B(0,t)}{B(0,s)}$ može se gledati kao na **diskontni** faktor od trenutka t do s, koji je određen u uvjetima na tržištu **u trenutku 0**, tj.

$$\boxed{B_0(s,t) := \frac{B(0,t)}{B(0,s)}, \quad s < t}$$

Izraz $B_0(s,t)$ zvat ćemo ***unaprijednom cijenom.***

- Funkciju $B_0(s,t)$, $0 \le s \le t \le T$ zovemo **vremenska struktura** cijena beskuponskih obveznica (tržišnih diskontnih faktora).

- **Napomena**. (Pretpostavka nearbitraže)

U trenutku 0 može se investirati novac od trenutka 0 do t plaćajući *danas* $B(0,t)$ za svaku novčanu jedinicu koja će se dobiti u trenutku t.

- Alternativno, može se investirati novac od trenutka 0 do trenutka $s < t$, plaćaju *danas* $B(0,s)$ te zatim koristeći konačnu vrijednost u unaprijednoj investiciji od trenutka s do trenutka t.

- Trošak je takvih strategija $B(0,t)$ odnosno $B(0,s)*B(s,t)$.

Opća vremenska struktura

- Cilj: analizirati model cijena obveznica bez pretpostavke da je *prinos y u nekom trenutku,* nezavisan o dospijeću
- Cijene $B(t,T)$ beskuponskih obveznica s različitim dospijećima određuju familiju prinosa $y(t,T)$ pomoću relacije

$$B(t,T) = e^{-(T-t)\,y(t,T)}.$$

- Prinosi $y(t,T)$ moraju biti pozitivni kako bi cijena $B(t,T)$ bila manja od (nominalne) vrijednosti 1 za $t < T$

- Funkcija $y(t,T)$ dviju varijabli $t < T$ zove se **vremenska struktura kamatnih stopa** (engl. Term structure if interest rates)**.**

- Prinosi $y(0,T)$ koji su određeni trenutnim cijenama na tržištu zovu se **spot stope.**

- Kratkoročne stope su volatilnije od dugoročnih stopa i obično su manje od njih.

- Vremenska struktura kamatnih stopa opisuje kako, u određenom vremenskom trenutku, **prinos do dospijeća** ovisi o **dospijeću.**

- Kratkoročne i dugoročne stope se obično razlikuju.

- Vrlo često su **kratkoročne stope niže od dugoročnih** što i ima smisla budući da su dugoročne obveznice rizičnije.

Zašto?

- Cijene dugoročnih obveznica više fluktuiraju s promjenama kamatnih stopa i takve se obveznice obično prodaju prije dospijeća.
  - No, kroz periode jako visokih kratkoročnih stopa, kratkoročne stope mogu biti veće od onih dugoročnih.

- **Inicijalna vremenska struktura $y(0,T)$** koja se sastoji od spot stopa je funkcija jedne varijable T.

- Ukoliko je inicijalna vremenska struktura *ravna* tada su prinosi nezavisni o dospijeću.

- **Cijena kuponske obveznice** koristeći spot stope jednaka je sadašnjoj vrijednosti budućih isplata,

$$C_K = K_1 e^{-t_1 y(0,t_1)} + K_2 e^{-t_2 y(0,t_2)} + \ldots + \left(K_N + N\right) e^{-t_N y(0,t_N)}$$

pri čemu su $K_1, \ldots, K_N$ iznosi kupona koji dospijevaju u vremenima $t_1 < \ldots < t_N$, a N nominalna vrijednost s dospijećem T_N.

Napomena.

- Kako bi se odredila inicijalna vremenska struktura, potrebno je znati cijene beskuponskih obveznica

- No, za duža dospijeća (preko godine dana) moguće je da se trguje samo kuponskim obveznicama stoga je potrebno napraviti **dekompoziciju** kuponskih obveznica u beskuponske obveznice <u>različitih dospijeća</u> (STRIPS program, 1985)

- **Propozicija.** Ukoliko je vremenska struktura deterministička, tada je prema principu nearbitraže

$$B(0,t) = B(0,s) \cdot B(s,t), \qquad 0 \leq s < t \leq T$$

Dokaz: Pretpostavimo da je $B(0,t)<B(0,s)B(s,t)$. Pretpostavimo da su buduće cijene obveznica poznate u sadašnjem trenutku.

  - Pretpostavimo nadalje da u trenutku 0 kupimo obveznicu s dospijećem t te izdamo B(s,t)=B(0,t)/B(0,s) obveznica dospijeća s, čime dobivamo $B(0,s)B(s,t)-B(0,t)$ novčanih jedinica u trenutku 0
  - U trenutku s *izdamo* jednu obveznicu s dospijećem t čime se isplati vrijednost obveznica izdanih u trenutku 0
  - U trenutku t zatvorimo poziciju: isplaćena nam je nominalna vrijednost 1 s kojom isplatimo nominalnu vrijednost obveznice izdane u trenutku s, zadržavajući inicijalni profit.

- Slično u slučaju da vrijedi $B(0,t) > B(0,s)B(s,t)$ promatrajući suprotnu strategiju. $\square$

- Prema prethodnom vrijedi

$$B(t_1,t_2)=\frac{B(0,t_2)}{B(0,t_1)}=e^{t_1 y(0,t_1)-t_2 y(0,t_2)}$$

što ujedno znači da se sve cijene obveznica (a time i vremenska struktura) mogu odrediti <u>inicijalnom vremenskom strukturom</u>.

$\Rightarrow$ nije realno takvo što očekivati na tržištu obveznica, te takvu relaciju ne podržavaju povijesni podaci

- Dakle, pretpostavljanjem determinističkih cijena obveznica značajno bi se reducirala kompleksnost samog modela

- Buduća vremenska struktura bit će **slučajna**, samo će inicijalna vremenska struktura biti poznata sa sigurnošću.

$\Downarrow$

- Buduće vrijednosti cijena obveznica bit će slučajne kao i vrijednosti koje one određuju.

Unaprijedne stope

Vremenska struktura za sva dospijeća do T godina može se opisati bilo čime od sljedećeg:

- **Cijene beskuponskih obveznica** s dospijećima 1,2,…, T godina koje označavamo sa C(1), C(2),…,C(T);
- **Spot stopama** (prinos do dospijeća beskuponskih obveznica) s dospijećima 1,2,…,T; $y(0,1)$, $y(0,2)$,…,$y(0,T)$
- **Unaprijednim stopama** (engl. Forward rates) $f_1, f_2, \ldots, f_T$ pri čemu je f_i unaprijedna stopa koja se isplaćuje u i-toj budućoj godini (i=1 za sljedeću godinu itd.).

- Unaprijedne stope su kamatne stope za buduće periode (godine)

- Unaprijedni ugovor je dogovor za kupnju ili prodaju imovine u nekom fiksnom budućem vremenskom trenutku po fiksnoj cijeni.

- Budući da su $f_1, f_2, \ldots, f_n$ stope koje su zaključene u **sadašnjem trenutku** za buduće posudbe ili pozajmice ujedno ih zovemo i *unaprijednim stopama.*

Napomena.

- Svaki od skupova { C(1), C(2),…,C(T)}, {y_1,y_2,…,y_n} i { f_1,f_2,…,f_n} može se izračunati iz nekog od preostalih skupova.

- Vremenska struktura se može opisati podjelom vremenskog intervala od sadašnjeg trenutka do dospijeća obveznice na manje vremenske segmente s konstantnom kamatnom stopom unutar svakog segmenta, ali promjenjivom kamatnom stopom između pojedinih segmenata.

- Kako **unaprijed osigurati** odgovarajuću kamatnu stopu za depozit koji se tek mora napraviti ili za neku posudbu u nekom budućem vremenskom trenutku?

- **Primjer**. Pretpostavimo da je poslovni plan neke tvrtke uzimanje zajma u iznosu od 100000 kn u cilju opreme novog postrojenja. Očekuje se da bi tvrtka trebala imati sredstva za otplatu zajma nakon godinu dana od *danas*. Stoga bi se voljeli osigurati uvjeti zajma na <u>današnji dan</u> po nekoj fiksnoj kamatnoj stopi, u odnosu na uvjete nesigurnosti glede budućih i neizvjesnih kamatnih stopa.

Pretpostavimo da su trenutne spot stope na tržištu $y(0,1)=8\%$ i $y(0,2)=9\%$ te da je nominalna vrijednost odgovarajućih beskuponskih obveznica 100.

- Kupnjom 1000 komada beskuponskih obveznica nominalne vrijednosti 100 s dospijećem godinu dana, danas je potrebno izdvojiti 1000000$e^{-0.08}$ = 92311.63
- Traženi se iznos posudi na dvije godine po stopi od 9%.
- Nakon godinu dana, od obveznica se dobije 100000, dok se nakon dvije godine vrati posuđeni iznos uvećan za kamatu: 92311.63$e^{0.09*2}$ = 110517.09

- Drugim riječima, kamatna stopa na *konstruirani budući zajam* će biti *ln*(110517.09)-*ln*(100000)=10%
- Financijski posrednici mogu pojednostaviti zahtjev tvrtke tako što će ponuditi tzv. ugovor s unaprijednim stopama te u ime tvrtke provesti opisanu konstrukciju zajma.

- Primjer. Objasnite kako se može ostvariti depozit od 50000 kn na šest mjeseci koji bi započeo nakon šest mjeseci od danas. Odredite po kojoj stopi se ugovor može ostvariti ukoliko je y(0,0.5)=6% i y(0,1)=7%.

- Općenito, inicijalna unaprijedna stopa $f(0,s,t)$ je ona kamatna stopa za koju vrijedi

$$B(0,t) = B(0,s)e^{-(t-s)f(0,s,t)},$$

odnosno

$$f(0,s,t) = -\frac{1}{t-s}\ln\left(\frac{B(0,t)}{B(0,s)}\right) = -\frac{\ln(B(0,t)) - \ln(B(0,s))}{t-s}$$

Zadatak. Pretpostavimo da su sljedeće spot stope osigurane od strane središnjih londonskih banki (LIBOR; LIBID)

Stopa	LIBOR	LIBID
1 mj	8.41%	8.59%
2 mj	8.44%	8.64%
3 mj	9.01%	9.23%
6 mj	9.35%	9.54%

- Pretpostavimo da je u funkciji managera određene banke potrebno za klijenta osigurati zajam od 100000 kn unutar mjesec dana na period od 5 mjeseci. Koju je kamatnu stopu moguće ponuditi klijentu u cilju konstrukcije zajma.
- Pretpostavimo da neka druga institucija nudi mogućnost depozita na 4 mjeseca počevši od drugog mjeseca od danas po stopi od 10.23%. Da li to predstavlja mogućnost arbitraže?

Trenutačne stope

- Tokom vremena cijene će se obveznica mijenjati i sukladno tome i unaprijedne stope. **Unaprijedna stopa na intervalu [*s*,*t*]** određena u trenutku $t_1 < s < t$ definirana je sa

$$B(t_1,t) = B(t_1,s)e^{-(t-s)f(t_1,s,t)},$$

odnosno

$$f(t_1,s,t) = -\frac{\ln B(t_1,t) - \ln B(t_1,s)}{t-s}$$

- **Trenutačne unaprijedne stope** $f(t_1,t) = f\left(t_1,t,t+dt\right)$ su stope koje se definiraju kroz interval [t, $t+dt$] (prekonoćna kamatna stopa ukoliko je razlika jednaka jednom danu)

Krivulja prinosa.

- Označimo sa $y(0,t)$ stopu povrata za depozite u trenutku 0 s dospijećem u trenutku t.
- Ukoliko je specificirana za svaku vrijednost t, tada se $y(0,t)$ zove **krivulja prinosa** i neprekidna je funkcija vremena $\boldsymbol{t}$.
- **Trenutačna stopa** $y(t)$ u trenutku t je stopa prinosa na depozite u trenutku t s dospijećem u trenutku $t+dt$, pri čemu je dt infinitezimalno mali vremenski trenutak

- Što kada $dt \to 0$?

- Ukoliko je $V(t)$ vriednost imovine u trenutku t, tada vrijedi:

$$r(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \frac{V(t+dt) - V(t)}{V(t)} = \frac{V'(t)}{V(t)}$$

- Funkcija $V(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = r(t), \quad \text{za svaki } t > 0$$

uz početni uvjet da je $V(t)$ u trenutku $t = 0$ jednak $V(0)$.

- Integriranjem prethodnog izraza na intervalu $[0,t]$ slijedi

$$\int_0^t r(s)ds = \int_0^t \frac{V'(s)}{V(s)}ds = \ln V(t) - \ln V(0)$$

- Prema prethodnom izrazu slijedi da je konačna vrijednost u trenutku *t*:

$$\boxed{V(t)=V(0)e^{\int_0^t r(s)ds}, \quad \text{za svaki } t>0}$$

- Početna je vrijednost jednaka:

$$V(0)=V(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}, \quad \text{za svaki } t>0$$

Kamatne bi se stope trebale modelirati kao funkcija koja se ***neprekidno*** mijenja **kroz vrijeme**.

Kako bi se realno predočila vremenska struktura, pretpostavlja se da postoji funkcija $r(t)$ koja se zove funkcija trenutačnih stopa takva da je trenutna cijena obveznice bez kupona nominalne vrijednosti 1 s dospijećem T, zadana sa

$$D(T) = e^{-\int_0^T r(t)dt} = \exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right)$$

Diskontni faktor

Dokažite da vrijedi:

- $r(0,t)$ je prosjek trenutačnih stopa na intervalu $[0,t]$, tj. vrijedi

$$r(0,t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds$$

pri čemu je $r(t)$ trenutačna stopa u trenutku t.

- U slučaju beskuponske obveznice s dospijećem T, vrijedi

$$r(0,t) = y(0,T) = \frac{1}{T}\int_0^T r(s)ds$$

pri čemu je $y(0,T)$ prinos do dospijeća.