Financijska matematika

Dr. Petra Posedel

Vedran Horvatić, dipl. inž.

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 2.3.2010.

Neprekidno ukamaćivanje: uvod i motivacija

- Točnu vrijednost investicije je ponekad potrebno znati u vremenskim trenucima između perioda ukamaćivanja; npr. u slučaju da investitor želi zatvoriti račun na dan kada nema pripisa kamate.

- Pitanje: Kolika je vrijednost depozita na tekući račun od 1000 kn nakon 10 dana, uz mjesečni obračun kamata i kamatnu stopu od 12%?

  - 100 kn? (prvi obračun tek za mjesec dana od danas?)

- Konačna (buduća) vrijednost glavnice P na kraju godine t uz godišnji kamatnjak r i složeno i godišnje ukamaćivanje, jednaka je

$$V(t) = P(1+r)^t$$

pri čemu je t cijeli multiplikator perioda $\frac{1}{m}$, uz m ukamaćivanja godišnje

- Ukoliko se u svakoj godini vrši m **ukamaćivanja** uz relativnu kamatnu stopu $\frac{r}{m}$ dokažite da kada bi m postajao sve veći i veći, da bi tada konačna vrijednost težila prema

$$V(t) = Pe^{rt}, \qquad t \geq 0$$

- **neprekidno ukamaćivanje** = *beskonačno* mnogo ukamaćivanja unutar jedne godine.

- Uz m dodatnih ukamaćivanja uz relativnu kamatnu stopu $\frac{r}{m}$, buduća je vrijednost glavnice

$$V(t) = P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} = P\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}\right)^{t}$$

- Budući da vrijedi

$$\lim_{m\to+\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m=e^r$$

tada je

$$\lim_{m\to+\infty}\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right)^t=\left(e^r\right)^t=e^{rt}$$

- Dakle, buduća vrijednost glavnice, nakon *t* razdoblja, uz neprekidno ukamaćivanje jednaka je

$$\boxed{V(t) = V(0)e^{rt}}$$

- Sadašnja je vrijednost jednaka:

$$\boxed{V(0) = V(t)e^{-rt}}$$

- Vrijednost e^{rt} je u neprekidnom slučaju **faktor rasta**

- Primjer: $P_0 = 100$, $r = 10\%$ godišnje.

$m = 1$:	$100 \rightarrow$	$100\,(1+0{,}1)$	$= 110$
$m = 2$:	$100 \rightarrow$	$100\,(1+0{,}1/2)^2$	$= 110{,}25$
$m = 12$:	$100 \rightarrow$	$100\,(1+0{,}1/12)^{12}$	$\approx 110{,}38$
$m = 365$:	$100 \rightarrow$	$100\,(1+0{,}1/365)^{365}$	$\approx 110{,}52$
$m = \infty$	$100 \rightarrow$	$100e^{0.1} = 110{,}52$	

Veza između neprekidnog i diskretnog ukamaćivanja

- **Primjer:** r – "neprekidna" kamata, r_m – kamata koja se upisuje m puta godišnje

  Kolika mora biti kamata r_m da bi efekt ukamaćivanja njome m puta tokom godine bio isti kao neprekidno ukamaćivanje? Obratno?

  Imamo:

  $e^r = (1 + r_m / m)^m$, odnosno $r = m \ln (1 + r_m / m)$

  $$\Rightarrow \quad r_m = m\,(e^{r/m} - 1)$$

- **Primjer.** Netko vam posudi novac uz 8% kamata godišnje s neprekidnim ukamaćivanjem. Koliko mu morate plaćati ako se kamata obračunava tromjesečno, a kredit je 100.000 kn?

  $$r_4 = 4\,(e^{0,02} - 1) \approx 0{,}08080.$$

  Dakle, morate mu plaćati 2020 kn tromjesečno. Koliko biste morali plaćati da se kamata obračunava godišnje?

- U slučaju **neprekidnog** ukamaćivanja stopa rasta proporcionalna je trenutnoj razini imovine odnosno bogatstva. Dokažite. Koji je faktor proporcionalnosti?

- **Primjer:** Izračunajte razliku u vrijednosti sljedećih dviju investicija: vrijednost glavnice od 100 kn nakon godinu dana uz godišnji kamatnjak 10% i a) mjesečni obračun kamata te 2) neprekidno ukamaćivanje. Kojom se frekvencijom mora izvršavati upis kamate ukoliko želimo da razlika dviju vrijednosti ne bude veća od 0.01 kn?

- Uz neprekidno ukamaćivanje vrijednost glavnice nakon godinu dana iznosi

$$V(1) = 100e^{0.1} = 110.5171$$

- Uz mjesečno ukamaćivanje proporcionalni kamatnjak iznosi 10%/12=0.8333%, te je vrijednost nakon godinu dana jednaka

$$V(1) = 100(1 + 0.00833)^{12} = 110.4713$$

Dakle, razlika je 0.0458.

- Ukoliko želimo da razlika bude manja od 0.01 kn uz neku određenu frekvenciju m upisa kamate, tada mora vrijediti

$$100\left(1+\frac{0.1}{m}\right)^{m} > 110.5071,$$

odnosno $m > 55.19$.

- Napomena. Povrat na investiciju uz složeno ukamaćivanje **ne zadovoljava** svojstvo aditivnosti, tj:

$$R(0,1) = R(1,2) = r$$

$$R(0,2) = (1+r)^2 - 1 = r^2 + 2r$$

dakle,

$$R(0,1) + R(1,2) \neq R(0,2)$$

Logaritamski povrat vs. povrat

- Definiramo **logaritamski povrat**

$$lr(s,t) = \ln \frac{V(t)}{V(s)} = \ln V(t) - \ln V(s)$$

Uz <u>neprekidno ukamaćivanje</u> vrijedi

$$lr(s,t) = r(t-s),$$

pri čemu je r kamatna stopa na investiciju. Tada je

$$r = \frac{lr(s,t)}{t-s}$$

- **DZ.** Dokažite da logaritamski povrat zadovoljava svojstvo aditivnosti, odnosno da vrijedi

$$lr(s,t) + lr(t,u) = lr(s,u), \qquad s < t < u$$

- **Napomena:**
  - Uz jednostavno ukamaćivanje: $R(s,t) = (t-s)r, \qquad s < t$
  - Uz složeno ukamaćivanje: $R(s,t) = (1+r)^{t-s} - 1, \qquad s < t$
  - Uz neprekidno ukamaćivanje: $lr(s,t) = (t-s)r,$

Kako usporediti metode ukamaćivanja?

- Do sada smo vidjeli: frekventnije ukamaćivanje ima kao posljedicu veće buduće vrijednosti uz uvjet da su kamatne stope i početna glavnica jednake.

  Naime, ako je $m < k$, tada je

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt} < \left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

- Analizirat ćemo općenite situacije u kojima jedna metoda ukamaćivanja ima kao posljedicu jednake ili veće buduće vrijednosti od neke druge metode uz istu početnu glavnicu.

Ekvivalentne metode ukamaćivanja

- Definicija. Za dvije metode ukamaćivanja kažemo da su **ekvivalentne** ukoliko su odgovarajući faktori rasta kroz period od jedne *godine* <u>jednaki</u>.

  Ukoliko je faktor rasta uz jednu metodu ukamaćivanja veći od faktora rast uz drugu metodu ukamaćivanja, reći ćemo da *preferiramo* metodu ukamaćivanja uz veći faktor rasta u odnosu na drugu metodu. Zašto?

Primjer.

- Polugodišnje ukamaćivanje uz kamatnjak od 10% ekvivalentno je godišnjem ukamaćivanju uz kamatnjak 10.25%. Također, oba načina ukamaćivanja preferiramo u odnosu na mjesečno ukamaćivanje uz (godišnju) kamatnu stopu od 8%. Naime,

$$\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^2 = 1.1025 = 1+0.1025.$$

$$\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12} = 1.083$$

- Uočimo: u oba slučaja radi se o kamatnim stopama izraženima na **godišnjoj razini**!

Efektivna kamatna stopa (cont)

- Umjesto uspoređivanja faktora rasta, uspoređivat ćemo tzv. *efektivne stope*.

- Definicija. Za dani način obračuna kamata uz kamatnu stopu r, **efektivna kamatna stopa**, u oznaci r_e, je ona kamatna stopa koja daje isti faktor rasta kroz period od *godine* dana uz *godišnje* ukamaćivanje.

- U slučaju složenog ukamaćivanja uz frekvenciju m i kamatnu stopu r, efektivna kamatna stopa zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$\boxed{1 + r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m}$$

- U slučaju neprekidnog ukamaćivanja: $\boxed{1+r_e = e^r}$

- Propozicija. Dvije metode ukamaćivanja su ekvivalentne ako i samo ako su odgovarajuće efektivne kamatne stope jednake. Metoda ukamaćivanja s efektivnom kamatnom stopom r_e se preferira u odnosu na neku drugu metodu ukamaćivanja s efektivnom kamatnom stopom r_e' ako i samo je

$$r_e > r_e'.$$

- Dokaz: direktno prema definiciji faktora rasta.

- U terminima efektivne kamatne stope, buduća je vrijednost glavnice P nakon t perioda dana sa

$$V(t) = P(1 + r_e)^t, \qquad t \geq 0.$$

- Izraz je primjenjiv i na neprekidno i na složeno ukamaćivanje za svaki period $t \geq 0.$

- Prethodna propozicija implicira da uz jednaku glavnicu, ekvivalentne će metode ukamaćivanja dati **jednaku** buduću vrijednost za bilo koji period $t \geq 0.$

- Također, metoda ukamaćivanja koja se *preferira* u odnosu na neku drugu daje veće buduće vrijednosti za bilo koji period $t \geq 0.$

Primjeri.

- Nađite onu kamatnu stopu koja je uz neprekidno ukamaćivanje ekvivalentna mjesečnom obračunu kamata uz kamatnu stopu od 12%. Uočiti: 12% je gks.

- Izračunajte frekvenciju složenog ukamaćivanja uz kamatnu stopu 20% uz koju je investicija ekvivalentna godišnjem ukamaćivanju uz kamatnu stopu od 21%

- Odredite efektivnu kamatnu stopu u odnosu na sljedeće dvije metode ukamaćivanja: a) dnevno ukamaćivanje uz kamatnu stopu od 15% te b) polugodišnje ukamaćivanje uz kamatnu stopu 14%. Koja se metoda obračuna preferira?

1. 1. 2. Pokazatelji isplativosti ulaganja: usporedba investicijskih projekata

- Problem: Poduzeća ili investitori su često suočeni s odlukom između alternativnih projekata ili investicija. Kod donošenja odluka o financiranju projekata, vodi se računa o **isplativosti ulaganja**

→ prednost u principu imaju oni investicijski projekti u kojima se sredstva *učinkovitije* koriste.

- Analiza isplativosti ulaganja temelji se na **procjeni** budućih prihoda i troškova vezanih uz poslovanje.
- Pri procjeni budućih prihoda koristimo pojam **novčanog tijeka** ili **tijeka novca** (engl. cash flow)

- Postoji više pokazatelja koji se koriste u ocjenjivanju efikasnosti projekata temeljenih na analizi novčanog toka, a među njima se kao najvažniji, među financijskim parametrima, ističu:
  - Metoda čiste sadašnje vrijednosti
  - Metoda interne stope rentabilnosti
- Računovodstveni parametri: Povrat na kapital (ROE)

Koji parametri bolje mjere investicijsku isplativost?

- Često se donositelji odluke odlučuju za isključivo jednu od metoda kojoj dodjeljuju apsolutno značenje. To obično ne otkriva niti jedan intrinzični tehnički problem.
- Prihvatiti neku od metoda ujedno znači prihvatiti njezine pretpostavke koje se obično odnose na ciljeve (obično maksimizacija bogatstva) i kontekst donošenja same odluke te su u tom kontekstu na njih i oslanjaju.
- Također, faktor *nesigurnosti* ne smije se zanemariti.

Metoda čiste sadašnje vrijednosti (eng. Net Present Value)

- Između više ponuđenih investicija odabiremo onu najpovoljniju ili ocjenjujemo jednu investiciju kao povoljnu, odnosno nepovoljnu.

1. potrebno je *procijeniti* neto dobitke (ili izdatke) poslovanja u pojedinim razdobljima.

2. dobitci (ili izdaci) poslovanja u pojedinim godinama diskontiraju se na početak razdoblja trajanja investicije

- Jedan od načina usporedbe (i odluke glede istog) investicijskih projekata je evaluacija budućih novčanih tokova projekta ili investicije računanjem sadašnje vrijednosti takvih novčanih tokova uz posebnu kamatnu stopu.

- Korištena kamatna stopa poznata je kao trošak kapitala te se može raditi o trošku posuđivanja novca ili o željenoj stopi povrata za investitora.

- Distribucija novčanih tokova kroz vremenski horizont ulaganja u interakciji je s ekonomsko-financijskim okruženjem.

- Naime, prihodi će se reinvestirati uz uvjete koji mogu utjecati na odluku, dok će novac apsorbiran od troškova biti posuđen drugim financijskim operacijama čiji trošak/profitabilnost obično utječe na procjenu (odnosno evaluaciju) same investicije.

- Svaka metoda evaluacije pretpostavlja određene pretpostavke o takvim uvjetima reinvestiranja. Ukoliko su oni konzistentni s aktualnom situacijom donositelja odluke, sugestije modela će biti vrlo korisne za konkretno donošenje odluka.

Oznake:

- N_t novčani tijek u vremenu t, $N_t \in R$, a N_0 označava vrijednost početnog ulaganja (negativnog pedznaka)

- r trošak (cijena) kapitala u danom periodu

- Čista sadašnja vrijednost dana je

$$V_{NPV} = N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t}{(1+r)^t}$$

- Budući da su budući novčani tokovi često procjene, zaokružujemo vrijednost na najbližu stotinu ili tisućinu

- Pozitivna vrijednost čiste sadašnje vrijednosti sugerira profitabilnu investiciju, dok negativna vrijednost označava gubitak, odnosno investicijski projekt u koji *razuman* investitor ne bi trebao ulaziti.
- Ukoliko se uspoređuje nekoliko investicijskih projekata, prednost se daje onom veće čiste sadašnje vrijednosti.

- Cijena kapitala je uz procjenu novčanih tokova odlučujuća u ocjeni investicijskog projekta
- Prilikom procjene možemo uzeti u obzir i *nekoliko scenarija* (obično se gledaju optimistički, pesimistički te najbolju procjena)

Primjer 1.

- Za neki se projekt pretpostavljaju sljedeći novčani tokovi (u kunama):

godina	1.	2.	3.	4.
	40000	25000	35000	30000

- Da li biste investirali 100000 kn u takav projekt ukoliko je trošak kapitala a) $r = 7\%$, b) $r = 14\%$?

- Budući da je 100000 kn iznos početnog ulaganja, čista je sadašnja vrijednost projekta uz trošak kapitala od 7%:

$$V_{NPV} = -100000 + \frac{40000}{1+0.07} + \frac{25000}{(1+0.07)^2} + \frac{35000}{(1+0.07)^3} + \frac{30000}{(1+0.07)^4} = 10676$$

- Uz 14%:

$$V_{NPV} = -100000 + \frac{40000}{1+0.14} + \frac{25000}{(1+0.14)^2} + \frac{35000}{(1+0.14)^3} + \frac{30000}{(1+0.14)^4} = -4289$$

- Dakle, uz trošak kapitala od 7% je čista sadašnja vrijednost pozitivna.

Primjer 2.

- Investitoru su prezentirana dva projekta, ABC010 te XYZ020. Dobici krajem godina za oba projekta dani su u sljedećoj tablici:

godina	1.	2.	3.	4.
ABC010	180000	160000	170000	200000
XYZ020	80000	105000	215000	300000

U svaki projekt treba investirati 600000 kn. Koji je projekt isplativiji ako je cijena kapitala 5%?

- Čista sadašnja vrijednost projekta ABC010:

$$V_{NPV} = -600000 + \frac{180000}{1+0.05} + \frac{160000}{(1+0.05)^2} + \frac{170000}{(1+0.05)^3} + \frac{200000}{(1+0.05)^4} = 27946.17$$

- Čista sadašnja vrijednost projekta XYZ020:

$$V_{NPV} = -600000 + \frac{80000}{1+0.05} + \frac{105000}{(1+0.05)^2} + \frac{215000}{(1+0.05)^3} + \frac{300000}{(1+0.05)^4} = 3964.4$$

- Dakle, projekt ABC010 ima veću čistu sadašnju vrijednost pa je i isplativiji

Metoda interne stope rentabilnosti (engl. Internal Rate of Return)

- Kod metode čiste sadašnje vrijednosti smo pretpostavljali da investitor kreće s ciljanom stopom prinosa i na temelju toga uspoređuje *alternative* prilikom investiranja.

- Metoda interne stope rentabilnosti se također koristi za uspoređivanje i odabir *najpovoljnijeg* ulaganja za investitora.

- No, metoda interne stope rentabilnosti se prvenstveno koristi za **određivanje** kamatne stope kojom ćemo opisati uspješnost ili neuspješnost neke investicije.

- Određuje se stopa povrata koju će projekt ili investicija proizvoditi

- Definicija. **Interna stopa rentabilnosti** nekog ulaganja je kamatna stopa za koju je čista sadašnja vrijednost tog ulaganja jednaka nuli (stopa povrata projekta)

- Drugim riječima, određivanje interne stope rentabilnosti svodi se na rješavanje sljedeće jednadžbe po *r*:

$$N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t}{(1+r)^t} = 0 \quad (*)$$

- Jednadžbu (*) moguće je zapisati kao

$$\frac{N_1}{1+r}+\frac{N_2}{(1+r)^2}+\ldots+\frac{N_t}{(1+r)^t}=I,$$

pri čemu je I vrijednost <u>početnog ulaganja</u> (>0 !)

- Ukoliko znamo cijenu kapitala *r,* tj. kamatnu stopu uz koju posuđujemo novac, tada vrijedi

$r_{ISR} > r$ ⟹ *isplativo* ulaganje

$r_{ISR} < r$ ⟹ *ulaganje* s gubitkom

- Ukoliko je neki od novčanih tokova $N_1, N_2, \ldots, N_t$ negativan, tada postoji mogućnost višestrukih internih stopa rentabilnosti.

- Nakon određivanja interne stope rentabilnosti, investitor uspoređuje njezinu vrijednost s postojećim kamatnim stopama na tržištu ili s troškom kapitala za investitora.

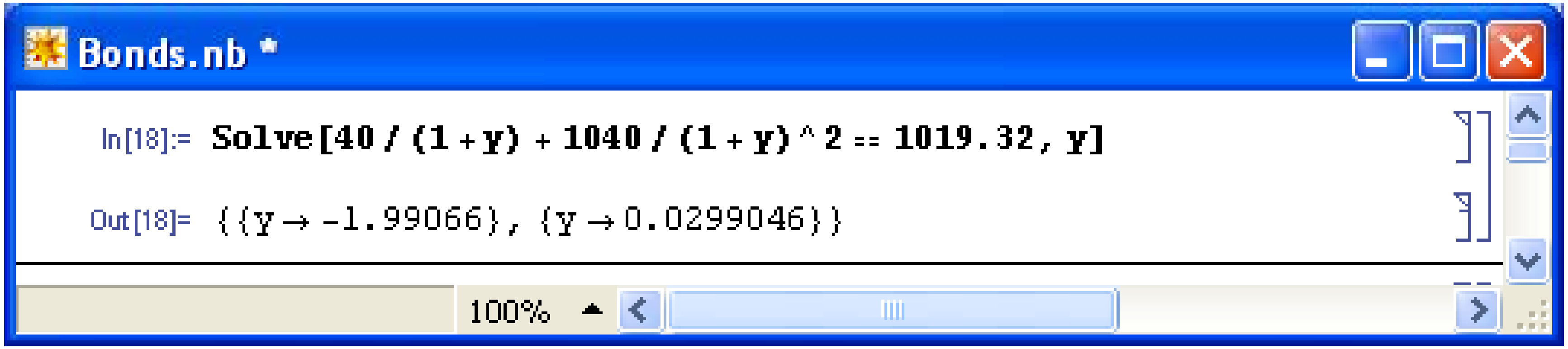
- Također, investitor mora voditi računa i o *riziku* koji određena alternativna investicija nosi.

Napomena.

- Jednadžba (*) je algebarska jednadžba većeg stupnja

  → kako ju riješiti? *Eksplicitno*?

- Softver Mathematica:



- Excel: 1. Alati → Rješavač (Solver)

  2. Financijske funkcije NPV i IRR

NPV vs IRR: koju metodu koristiti?

- Sumiranjem pravila za obje metode imamo:

Kriterij	DA ili NE (da li odabrati određeni projekt)	**Rangiranje projekta** (usporedba dva međusobno isključiva projekta)
NPV	Projekt bi trebalo *preuzeti* ukoliko je čista sadašnja vrijednost pozitivna, tj. NPV > 0	Projekt A se preferira projektu B ukoliko je NPV(A) > NPV(B)
IRR	Projekt bi trebalo *preuzeti* ukoliko vrijedi IRR > *r*, pri čemu je *r* odgovarajuća diskontna stopa	Projekt A se preferira projektu B ukoliko je IRR(A) > IRR(B)

Što ako NPV i IRR metoda daju različite zaključke?

- Pretpostavimo da promatramo dva projekta, A i B takve da je NPV(A) > NPV(B), ali je IRR(A)< IRR(B).

- U tom se slučaju često koristi kriterij čiste sadašnje vrijednost prilikom donošenja odluke.

- Naime, ukoliko je cilj investitora maksimizacija *bogatstva* tada se koristi metoda čiste sadašnje vrijednosti koja mjeri prirast bogatstva od preuzimanja projekta.

- Prilikom “Da” ili “NE” kriterija, ukoliko metoda čiste sadašnje vrijednosti upućuje na odluku “Da”, tada će istu odluku implicirati i interna stopa rentabilnosti (i obratno)

- Projekti su međusobno isključivi budući da oba predstavljaju način dobivanja istog ishoda, stoga biramo samo jedan među njima.

- Priliko rangiranja projekata, metode čiste sadašnje vrijednosti i interne stope rentabilnosti ne rangiraju nužno projekte na jednaki način, čak i ako su oba projekta isplativa. Ukoliko postoji konflikt u metodi odluke, tada je metoda čiste sadašnje vrijednosti korektna metoda za budžetiranje kapitala.

Primjer. Pretpostavimo da promatramo novčane tokove za dva projekta, A i B. Oba projekta imaju **isti** početni trošak, ali **različite** novčane tokove (u 000 kn)

	Trošak kapitala 15%	
Godina	**Projekt A**	**Projekt B**
0	-500	-500
1	100	250
2	100	250
3	150	200
4	200	100
5	400	50
NPV	**74.42**	**119.96**
IRR	**19.77%**	**27.38%**

	Trošak kapitala 8%	
Godina	**Projekt A**	**Projekt B**
0	-500	-500
1	100	250
2	100	250
3	150	200
4	200	100
5	400	50
NPV	**216.64**	**212.11**
IRR	**19.77%**	**27.38%**

Možemo primijetiti da:

- Ukoliko koristimo metodu interne stope rentabilnosti, *preferiramo* projekt B

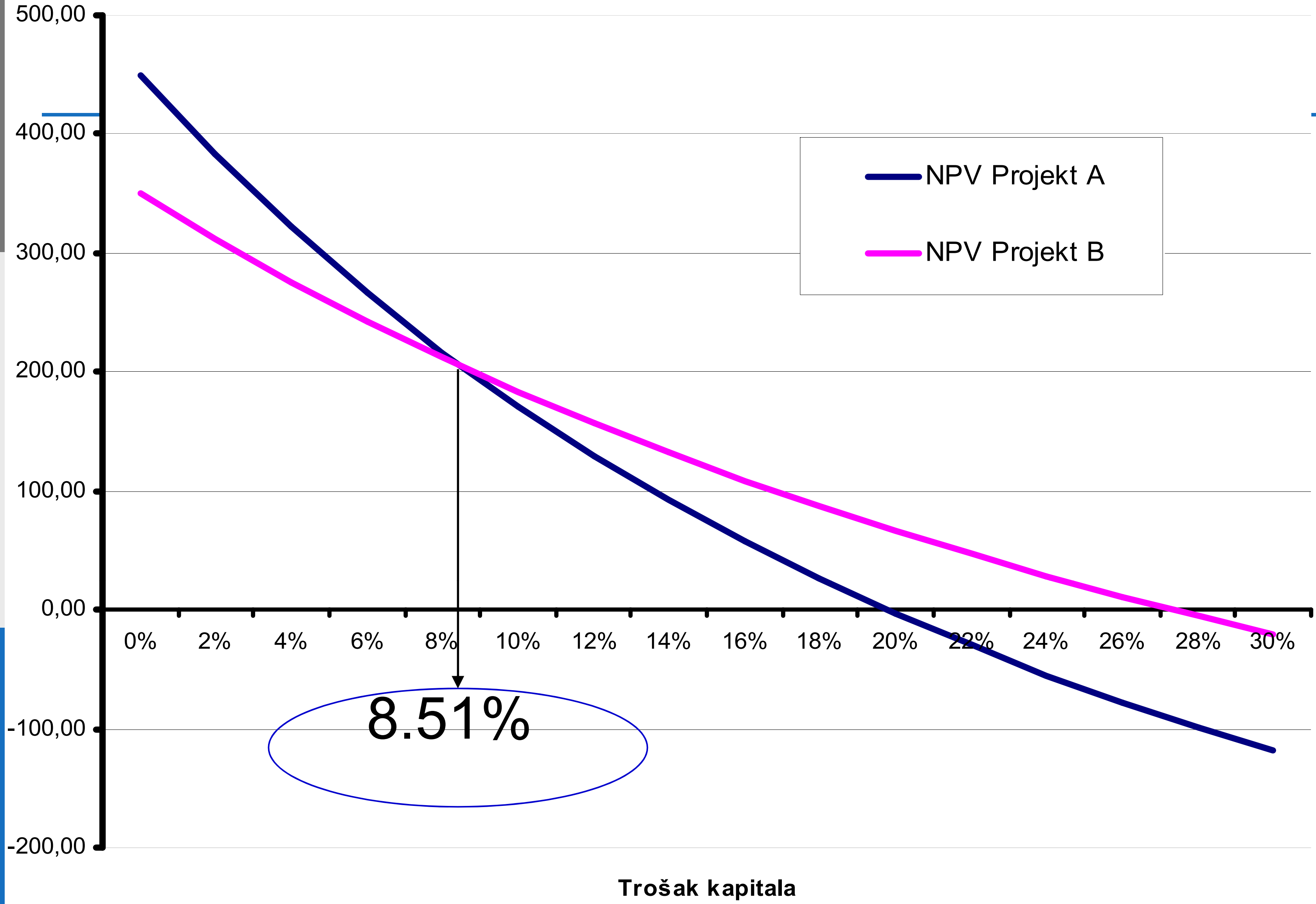
- Ukoliko koristimo metodu čiste sadašnje vrijednosti, *preferiramo* projekt B projektu A ukoliko je trošak kapitala (kamatna stopa, diskontna stopa) 15%.

  U tom slučaju se odluka poklapa s onom dobivenom uz IRR.

- Ukoliko je trošak kapitala 8%, tada dvije metode ne daju isti zaključak te se po NPV kriteriju *preferira* projekt A

Tablica kamatnih stopa i čiste sadašnje vrijednosti

	Projekt A NPV	Projekt B NPV
0%	450,00	350,00
2%	382,57	311,53
4%	321,69	275,90
6%	266,60	242,84
8%	216,64	212,11
10%	171,22	183,49
12%	129,85	156,79
14%	92,08	131,84
16%	57,53	108,47
18%	25,86	86,57
20%	-3,22	66,00
22%	-29,96	46,66
24%	-54,61	28,45
26%	-77,36	11,28
28%	-98,39	-4,93
30%	-117,87	-20,25


500,00
400,00
300,00
200,00
100,00
0,00
-100,00
-200,00
0%
2%
4%
6%
8%
10%
12%
14%
16%
18%
20%
22%
24%
26%
28%
30%
NPV Projekt A
NPV Projekt B
8.51%
Trošak kapitala

- Projekt B ima <u>veću internu stopu rentabilnosti</u> (27.38%) od projekta A (19.77%)

- Ukoliko je **kamatna stopa** (trošak kapitala) **niska**, <u>projekt A ima veću čistu sadašnju vrijednost</u> od projekta B, no ukoliko je ona **visoka**, tada <u>projekt B ima veću čistu sadašnju vrijednost</u> od projekta A

- Postoji točka presjeka koja označava raspon (ne) podudaranja jednakosti dotičnih vrijednosti.

- Čista sadašnja vrijednost projekta A **osjetljivija** je na promjene troška kapitala od čiste sadašnje vrijednosti projekta B. Zašto?

- Novčani tokovi projekta A su *raspršeniji* kroz vrijeme od onih projekta B; drugim riječima projekt A ima značajno više svojih novčanih tokova u kasnijim vremenima od projekta B

Točka presjeka 8.51%

Kriterij	Trošak kapitala < **8.51%**	**= 8.51%**	**> 8.51%**
NPV	*Preferira* se projekt A NPV(A) > NPV(B)	*Indiferentnost* među projektima: NPV(A)= NPV(B)	*Preferira* se projekt B NPV(B) > NPV(A)
IRR	Projekt B se uvijek preferira projektu A: IRR(B) > IRR(A)		

Računanje točke presjeka

- Točka presjeka je kamatna stopa za koju je čista sadašnja vrijednost (NPV) za oba projekta **jednaka**.

- Može se pokazati da je točka presjeka interna stopa rentabilnosti razlika u novčanim tokovima dvaju projekata.

- *Dokaz*: Pretpostavimo da je trošak kapitala jednak r te da je NPV(A)=NPV(B). Označimo sa N_i^A i N_i^B novčane tokove projekata A, odnosno B za $i=0,\ldots,t$.

- Tada vrijedi:.

$$NPV(A) = N_0^A + \frac{N_1^A}{1+r} + \frac{N_2^A}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t^A}{(1+r)^t}$$

$$= N_0^B + \frac{N_1^B}{1+r} + \frac{N_2^B}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t^B}{(1+r)^t} = NPV(B)$$

$$\Rightarrow 0 = NPV(A) - NPV(B) = N_0^A - N_0^B + \frac{N_1^A - N_1^B}{1+r} + \frac{N_2^A - N_2^B}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{N_t^A - N_t^B}{(1+r)^t}$$

- Odnosno *r* je interna stopa rentabilnosti.

- Ukoliko dolazi do nepodudaranja u zaključku glede odabira među investicijskim projektima na bazi dviju metoda evaluacije (npr. za slučaj troška kapitala 8%), odluka se najčešće temelji na <u>čistoj sadašnjoj vrijednosti</u> (dakle, projekt A u ovom konkretnom slučaju)

- Korištenje NPV metode se preferira budući da čista sadašnja vrijednost predstavlja dodatno bogatstvo koje se dobiva, dok je kamatna stopa (složena) stopa povrata.

→ Ekonomska intuicija glede takvog načina odabira: potrošači maksimiziraju svoje *bogatstvo*, a ne svoje stope povrata.