Fakultet elektrotehnike i računarstva **Zagreb, 22. 3. 2011.**
Financijska matematika
1. međuispit

1. **(7 bodova)** Odredite istinitost sljedećih tvrdnji (T/N) uz objašnjenje vašeg odgovora:

a) Ukoliko se neki iznos oroči na dvije godine uz kamatnu stopu $r_1\%$ tada se taj isti iznos uz neprekidno ukamaćivanje postigne u jednom kvartalu uz kamatnu stopu $4r_1\%$. (N, $2r_1 \neq \frac{1}{4}\cdot 4r_1$)

b) Ukoliko se za 4976.61 novčanih jedinica uloženih danas, za dvije godine može očekivati 5500 novčanih jedinica, tada je, uz pretpostavku da se na tržištu kamatna stopa ne mijenja, diskontni faktor zadan sa $D(t)=e^{-0.05t}$ za svaki $t \geq 0$. (T jer $r = \frac{1}{2}\ln\frac{5500}{4976.61} = 0.05$)

c) Ako se na tržištu trguje kuponskom obveznicom nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od deset godina koja isplaćuje polugodišnje kupone u iznosu od 3, tada se takva obveznica prodaje po cijeni većoj od nominalne ukoliko je trenutna referentna kamatna stopa 7%. (N, prodaje se po cijeni manjoj od nominalne)

d) Pretpostavimo da su vam dane dvije ponude: P1) 100 kn sada, 200 kn u trenutku n i 300 kn u trenutku $2n$ te P2) 600 kn u trenutku 10. Ukoliko je $\left(\frac{1}{1+r_e}\right)^n = 0.76$ tada će dvije ponude imati istu sadašnju vrijednost za neku efektivnu kamatnu stopu r_e manju od 3%. (N, $r_e = 3.5\%$)

e) Ako danas uložite u banku iznos X na bazi kojeg želite dobivati na kraju svake godine vječno određenu rentu, tada je visina godišnje rente jednaka iznosu ukupnih kamata koje biste dobili za godinu dana na uloženi iznos X. (T, $A = C\cdot r$)

f) Pretpostavimo da je trenutna referentna kamatna stopa 6.5%. Ako se beskuponskom obveznicom s dospijećem od tri godine trguje po cijeni 98 i ako se kamatna stopa poveća za 2 postotna poena, tada će se cijena takve obveznice povećati za približno 6%. (N, cijena takve obveznice će se smanjiti)

g) Ukoliko se portfelj sastoji od obveznica A, B i C čije su cijene 25, 75 i 100, te njihove duracije 3, 5 i 10 respektivno, tada portfelj vrijednosti 200 koji se sastoji od obveznica A, B i C ima duraciju 6. (N, $D_P = \frac{25}{200}\cdot 3 + \frac{75}{200}\cdot 5 + \frac{100}{200}\cdot 10 = \frac{58}{8}$)

2. **(3 boda)** Pretpostavimo da vam je odobren zajam od 100 000 kn na 5 godina uz godišnju kamatnu stopu od 8%. Odredite visinu anuiteta koji se plaćaju krajem svake godine te iznos ukupnih kamata. Ako ste u trenutku podizanja zajma morali platiti jednokratnu naknadu od 2% od iznosa zajma, postavite jednadžbu s jednom nepoznanicom, čije je rješenje iznos efektivne kamatne stope. Obračun kamata kod zajma je složen i dekurzivan.
(Rj: $a = 25045.64546$, uk.kamate= 25228.2273, jednokratna naknada=2000, $98000 = \frac{25045.64546}{1+r_e} + \ldots + \frac{25045.64546}{(1+r_e)^5}$)

3. (3 boda) Upravo ste se zaposlili te ste odlučili štedjeti i u tu svrhu svakog mjeseca ste spremni odreći se točno 300 eura od svoje plaće. Da li vam se više isplati krajem svakog mjeseca oročiti tih 300 eura uz godišnju kamatnu stopu od 3% ili kupiti stan za koji ćete podići zajam od 100 000 eura na 30 godina? Mjesečni anuitet zajma bi vam iznosio 600 eura i plaćali biste ga krajem svakog mjeseca, ali biste stan tijekom čitavog razdoblja otplate zajma iznajmljivali za 300 eura mjesečno (također krajem svakog mjeseca). Procjenjujete da će stan nakon 30 godina vrijediti jednako za koliko ste ga i kupili, dakle 100 000 eura. Obračun kamata je složen i dekurzivan. Koristite relativni kamatnjak.

(Rj: $$NPV_{štednja} = \frac{(-300+300)}{1.0025} + \frac{(-300+300)}{1.0025^2} + \cdots + \frac{(-300+300)}{1.0025^{360}} = 0$$ $$NPV_{s\tan} = \frac{(-600+300)}{1.0025} + \frac{(-600+300)}{1.0025^2} + \cdots + \frac{(-600+300)+100000}{1.0025^{360}} < 0$$, pa se više isplati štedjeti.)

4. (3 boda) Pretpostavimo da je na tržištu moguće trgovati s dvije vrste beskuponskih obveznica, jednom nominalne vrijednosti 110 kn, dospijeća 5 godina te prosječnog godišnjeg prinosa 7% i drugom nominalne vrijednosti 100 kn, dospijeća 6 godina te prosječnog godišnjeg prinosa 5%. Nadalje, dopušta se izdavanje ili short selling obveznica, ali nije moguće posuđivati niti oročavati novac u banci. Izračunajte cijene navedenih obveznica. Da li na tržištu postoji mogućnost arbitraže? Ako postoji, odredite strategiju arbitraže te izračunajte ostvareni profit nakon 6 godina. Koristite kontinuirano ukamaćivanje.
(Rj: $B(0,5) = 77.51568987$, $B(0,6) = 74.08182207$, dostupne su dvije obveznice s, unaprijed poznatim, različitim prinosima, pa je arbitraža moguća: u t=0 short selling 1.046352367 obveznica s dospijećem 6 godina, kupnja jedne obveznice s dospijećem 5 godina; u t=5 dobivamo nominalu kupljene obveznice u iznosu 110; u t=6 plaćamo dospjelu nominalu za obveznice s dospijećem 6 godina u iznosu 104.6352367, profit=110-104.6352367=5.364763307=5.364763307. NAPOMENA: zadatak se mogao shvatiti i na način da je i u trenutku t=5 moguće trgovanje navedenim obveznicama. U tom slučaju se ulaže iznos 110 na 1 godinu u obveznicu s dospijećem 6 godina, pa je krajnji profit veći.)

5. (3 boda) Pretpostavimo da su trenutno na tržištu uvjeti takvi da je B(0,T-1) > B(0,T), za neki T>1, pri čemu B(0,T) predstavlja cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0 s dospijećem T, nominalne vrijednosti 1.
a) Odredite sve moguće odnose koji mogu vrijediti za odgovarajuće prinose y(0,T-1) i y(0,T) (<, = ili >) te odredite za svaki od tih odnosa kada je moguća arbitraža, a kada nije.
b) Pretpostavite da vrijedi odnos y(0,T-1) < y(0,T). Pretpostavite također da u trenutku 0 možete kupovati i (kratko) prodavati navedene obveznice, a da u trenutku T-1 možete u banci posuditi ili oročiti bilo koji iznos na jednu godinu po godišnjoj kamatnoj stopi y=y(0,T-1). Odredite strategiju arbitraže i računom potvrdite da ste u trenutku T ostvarili profit. Koristite kontinuirano ukamaćivanje.
(Rj: a) Iz B(0,T-1) > B(0,T) zaključujemo $y(0,T-1) < y(0,T) \cdot \frac{T}{T-1}$, pa su moguće sve tri relacije, ali arbitraža je moguća samo u slučaju strogih nejednakosti.
b) U t=0 izdati $\frac{B(0,T)}{B(0,T-1)}$ obveznica s dospijećem T-1 i kupiti 1 obveznicu s dospijećem T. U t=T-1 posuditi u banci iznos $\frac{B(0,T)}{B(0,T-1)}$ i odmah njime platiti dospjelu nominalu po obveznicama koje smo izdali. U t=T dobivamo nominalu obveznice s dospijećem T u iznosu 1, a dužni smo $\frac{B(0,T)}{B(0,T-1)} \cdot e^{y(0,T-1)} = \frac{e^{-y(0,T)\cdot T}}{e^{-y(0,T-1)\cdot(T-1)}} \cdot e^{y(0,T-1)} = e^{(y(0,T-1)-y(0,T))\cdot T} < e^0 = 1$.)

6. (3 boda) Pretpostavimo da se na tržištu trguje kuponskom obveznicom s dospijećem od dvije godine, kuponskom stopom 5% te da je trenutna tržišna cijena takve obveznice 96.5 kn. Ukoliko se cijena takve obveznice, uslijed smanjenja referentne kamatne stope za 1 postotni poen sa prijašnjih 10%, promijeni za približno 1.9 kn, odredite (približnu) duraciju takve obveznice.

(Rj: Za "male" promjene kamatne stope vrijedi $\frac{\Delta C}{C} \approx -D \cdot \Delta y$, pa iz $\frac{1.9}{96.5} \approx -D \cdot (-0.01)$ dobivamo $D \approx 1.97$ godina. Napomena: priznavao se i egzaktan izračun duracije.)

7. (3 boda) Pretpostavimo da se na tržištu trguje obveznicama tipa A i B čiju su cijene C_A=1.10 i C_B=0.91 kn, te duracije D_A=3 i D_B=1 godina. Pretpostavimo da ste fond manager XYZ investicijskog fonda te da s obzirom na određenu investicijsku strategiju danas investirate 20000 kn na period od godinu dana.

a) Odredite koliko ćete novaca uložiti u obveznicu A, a koliko u obveznicu B ukoliko želite da portfelj konstruiran od obveznica A i B bude imun na male promjene u kamatnim stopama na tržištu.

b) Pretpostavimo da će nakon pola godine kamatne stope na tržištu porasti za neku vrijednost, te da će nakon pola godine od danas cijene obveznica A i B biti C_A=0.95 i C_B=0.7 kn, a njihove duracije u tom trenutku iznosit 2.5 i 0.65. Ažurirajte portfelj kojim upravljate u cilju njegove imunizacije s obzirom na male promjene kamatnih stopa na tržištu u nadolazećem polugodišnjem razdoblju. Koliko je obveznica A, a koliko obveznica B, potrebno dodatno kupiti ili prodati s obzirom na one s kojima do tog trenutka raspolažete u vašem portfelju?

(Rj: a) u t=0 portfelj mora biti duracije 1 godina pa se cjelokupni iznos ulaže u obveznicu B, dakle, potrebno je kupiti 21978.02198 obveznica B.

b) U t=0.5 vrijednost portfelja iznosi 21978.02198*0.7=15384.61538 kn. Potrebno je kreirati portfelj duracije 0.5 godina, pa iz $w_A \cdot 2.5 + (1 - w_A) \cdot 0.65 = 0.5$ dobivamo $w_A = -0.081, w_B = 1.081$, iz čega se izračuna da je potrebno napraviti short selling 1315.054 obveznica A i za taj iznos kupiti dodatnih 1782.002 obveznica B.)