Financijska matematika

Doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović

Izv. prof. dr. sc. Zvonko Kostanjčar

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 6.3.2020.

Općenite informacije

- **Predavanja i vježbe**
  - Doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović
    - E-mail: pposedel@agr.hr
    - http://petraposedelsimovic.from.hr/
  - Izv. prof. dr. sc. Zvonko Kostanjčar
    - E-mail:zvonko.kostanjcar@fer.hr

- **Literatura:**
  - M. Capiński and T. Zastawniak (2003), Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering, Springer-Verlag
  - John C. Hull (2006). Options, Futures and Other Derivatives, 6th ed., Prentice Hall
  - …

Sadržaj kolegija:

Nerizična ulaganja i investiranje

- Vremenska vrijednost novca; ukamaćivanje
- Tržište novca
  - Obveznice (kuponske, beskuponske)
- Vremenska struktura kamatnih stopa

Rizična ulaganja

- Dionice; dinamičko modeliranje cijene opcije
- Menadžment portfelja
- Izvedenice; forward i futures ugovori
- Vrednovanje opcija; financijsko inženjerstvo

Od FER-a (Zagreb) do Goldman Sachsa….a i Morgan Stanleya (London)

- **Željan Juretić**

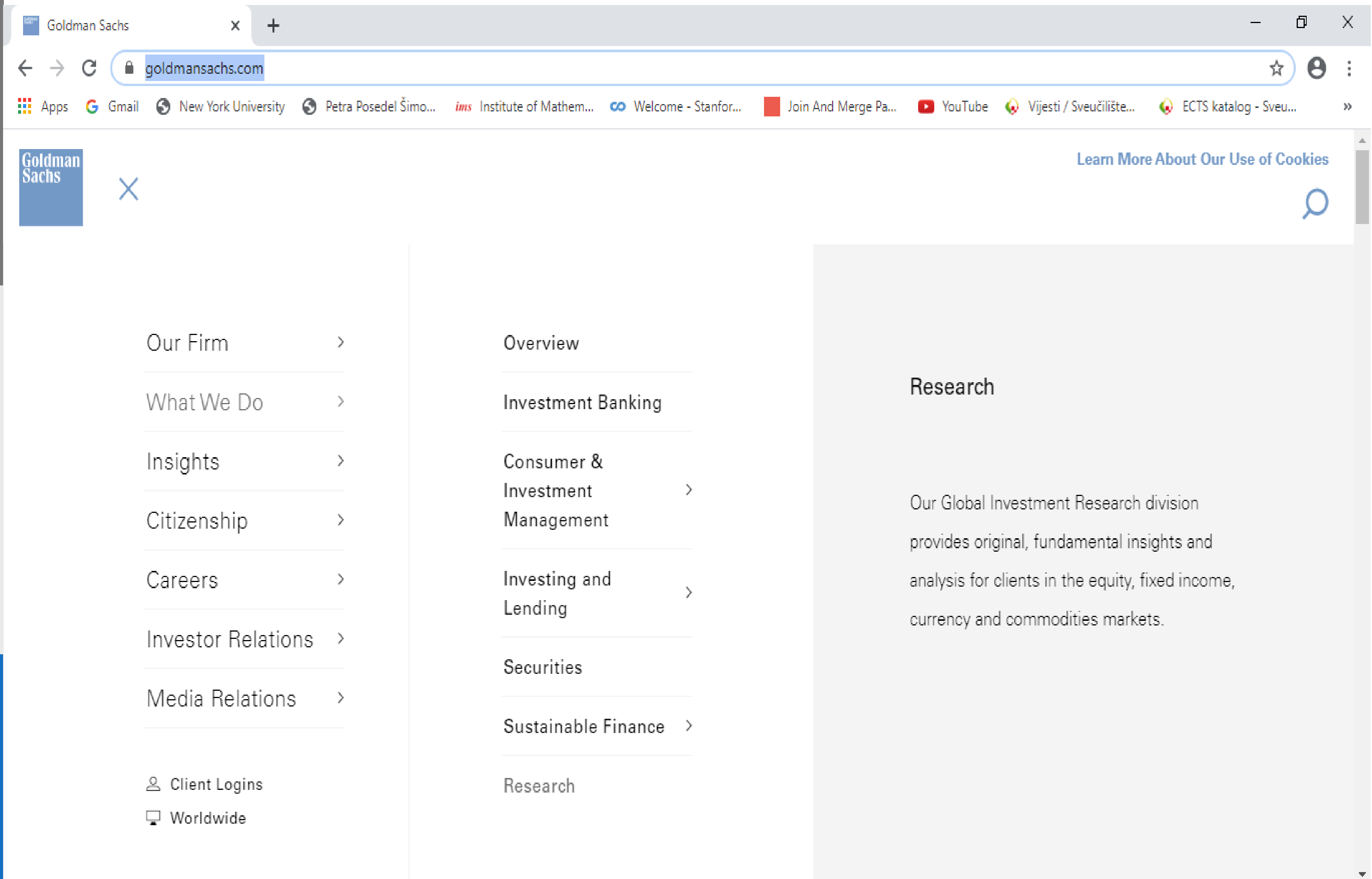
- Obrazovanje:
  - FER (BSc, MSc), Sveučilište u Zagrebu, 2006-2011
  - Sveučilište Bocconi, Milano, Italija, 2011-2012,
    - **Master of Quantitative Finance and Risk Management**
- 2013- **Morgan Stanl**ey, http://www.morganstanley.com/
  - Electronic & Algorithmic trading; research i razvijanje novih ideja za trading algoritme.
  - Američka multinacionalna korporacija (financijske usluge, financijska savjetovanja kompanijama, vladi i investitorima iz cijelog svijeta)
    - Posluje u 42 zemlje , više od 1300 ureda i 60,000 zaposlenih
  - MS: "*Pruža nove mogućnosti za individualne i institucionalne investitore*"

- 2013- **Morgan Stanl**ey, http://www.morganstanley.com/
  - Electronic & Algorithmic trading; research i razvijanje novih ideja za trading algoritme.

https://www.goldmansachs.com/

- 2016- **Goldman Sachs Group, Inc.**

  https://www.goldmansachs.com/


Goldman Sachs
goldmansachs.com
Apps
Gmail
New York University
Petra Posedel Šimo...
Institute of Mathem...
Welcome - Stanfor...
Join And Merge Pa...
YouTube
Vijesti / Sveučilište...
ECTS katalog - Sveu...
Goldman Sachs
Learn More About Our Use of Cookies
Our Firm
What We Do
Insights
Citizenship
Careers
Investor Relations
Media Relations
Client Logins
Worldwide
Overview
Investment Banking
Consumer & Investment Management
Investing and Lending
Securities
Sustainable Finance
Research
Research
Our Global Investment Research division provides original, fundamental insights and analysis for clients in the equity, fixed income, currency and commodities markets.

1. dio: Nerizična ulaganja i investiranje

Pojam investicije → odricanje (*danas!*) od sredstava (*novac*) na neko vrijeme kako bi se ostvarili budući prinosi koji će kompenzirati investitora za:

- **Vrijeme** na koje su sredstva uložena
- Očekivanu stopu **inflacije**
- **Rizik**: nesigurnost budućih isplata

Pitanje: Na koji bismo način *trebali* investirati imovinu?

Ključni pojmovi: investitor, investicijska strategija

Investitor *žrtvuje* neki znani iznos novca danas za **očekivani tok isplata** koje bi ukupno trebale biti veće od uloženih sredstava.

neovisno o investitoru (fizička osoba, država, investicijski fond,…) i mediju investicije (depoziti, obveznice, dionice, nekretnine,…)

Racionalni investitor: preferira više novca u odnosu na manje.

Investicijska strategija je nešto mnogo kompleksnije od koncepta “kupi jeftino, a prodaj skupo” i uključuje:

- Usvajanje investicijske filozofije
- Odabir strategije
- Alokaciju imovine u investicijske klase i unutar njih
- Kontrolu rizika

→ ovisno o investicijskim potrebama (često i stavova o načinu investiranja) vlasnika sredstava.

1.1. Vremenska vrijednost novca:
1.1.1. Preliminarije: ukamaćivanje

- Posuđeni novac je **glavnica**
- Naknada koja se plaća na glavnicu je **kamata**
- Kamate se obračunavaju za neko razdoblje koje se zove **razdoblje ukamaćivanja ili razdoblje kapitalizacije**
- **Kamatnjak (kamatna stopa)** – iznos kamata za sto novčanih jedinica (kn) u nekom vremenskom razdoblju

Terminologija 1:

- **Godišnji kamatnjak** je 5: nakon **godinu dana** na glavnicu od 100 kn kamata je 5 kn

- **Mjesečni kamatnjak** je 0.5: nakon **mjesec dana** na glavnicu od 100 kn kamata je 0.5 kn
  - Kolika je kamata na isti iznos glavnice za period od godinu dana?

Terminologija 2 : kamata vs. investicija

- **Prinos na investiciju**, ovisno o kontekstu, često se naziva i **kamata**.

- **Kamata** se može razložiti u tri komponente:
  - Čista vremenska vrijednost novca (realna kamatna stopa na bezrizični novac; ne može se samo po sebi naći, ali je otprilike veličine rasta BDP-a na globalnoj razini dugoročno, oko 2%)
  - Kompenzacija za očekivanu inflaciju
  - Kompenzacija za rizik

- Npr. ako je realna kamatna stopa na bezrizični novac 2%, očekivana stopa inflacije 4%, a kompenzacija za rizik 5%, tada je zahtijevana kamatna stopa jednaka

$$(1+2\%)(1+4\%)(1+5\%)-1 \approx 2\%+4\%+5\%=11\%$$

- S obzirom na ostvarenu kamatnu stopu, gledano unazad, ukupna ostvarena stopa zove se **nominalna**, a nominalna korigirana za ostvarenu inflaciju zove se **realna kamatna stopa**.

Sadašnja vs. buduća vrijednost novca: uvod i motivacija

- 100 kn u nekom **budućem periodu** vrijedi <u>manje</u> nego taj iznos (100 kn) **sada** (*danas*)***!***

  <u>Glavni (ekonomski) razlozi</u>:

  - Novac s dospijećem u budućnosti ili oročen na neki fiksni termin ne može se *potrošiti* odmah!
  - Drugim riječima, očekujemo da ćemo biti nagrađeni za *odgođenu potrošnju*
  - Cijene u međuvremenu mogu narasti (inflacija!) te raspoloživi iznos neće imati istu *moć potrošnje* kao u sadašnjem trenutku!
  - Konačno, postoji i **rizik** (iako *zanemariv*!) da novac neće biti vraćen

Promjena vrijednosti novca kroz vrijeme

- Način na koji novac *mijenja* svoju vrijednost kroz vrijeme je od fundamentalne važnosti u **financijama**.
- Zanimaju nas uglavnom dva ključna pitanja:

1. Koja je **buduća vrijednost** iznosa investiranog ili posuđenog <u>danas</u>?
2. Koja je **sadašnja vrijednost** iznosa koji se mora nekom platiti ili biti nekom isplaćen u određenom trenutku <u>u budućnosti</u>?

➡ **Odgovor ovisi o različitim faktorima.**

- **Kamate:**
  - jednostavne
  - složene
- **Obračun kamata:**
  - dekurzivan

Analiziramo

Kamate (cont)

- **Jednostavne kamate**
  - Kamate koje se obračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od **iste** glavnice
  - <u>Kratkoročne transakcije</u>

- **Složene kamate**
  - Kamate koje se obračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od **promjenjive** glavnice
  - <u>Dugoročne transakcije</u>

Obračun kamata (cont)

- **Dekurzivan obračun**
  - Kamate se obračunavaju **na kraju** razdoblja ukamaćivanja od glavnice s početka tog razdoblja
- **Anticipativan obračun**
  - Kamate se obračunavaju **na početku** razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja

Buduća vrijednost uz godišnje ukamaćivanje: jednostavne kamate

- Pretpostavimo da je neki iznos oročen uz kamate.
- Buduća vrijednost takve investicije sastoji se od početnog depozita kojeg zovemo **glavnica**, i dobivenih kamata budući da je iznos oročen
- **Primjer:** Pretpostavimo da se kamate računaju samo na glavnicu koja ostaje <u>nepromijenjena</u> tokom perioda kapitalizacije. Oznake:
  - Glavnica (početna vrijednost): P
  - Godišnja kamatna stopa (*konstantna* tokom razdoblja ukamaćivanja): r

- Nakon godinu dana, ukupne su kamate Pr, pri čemu je $r > 0$.
- Ukupna vrijednost investicije nakon godinu dana:

$$V(1) = P + rP = (1 + r)P$$

- Ukupna vrijednost investicije nakon dvije godine:

$$V(2) = P + rP + rP = (1 + 2r)P$$

- Ukupna vrijednost investicije nakon *n* godina:

$$V(n) = P + \underbrace{rP + rP + \ldots + rP}_{n \text{ puta}} = (1 + nr)P$$

- $V(0)=P$
- Vrijednost $1+nr$ zovemo **faktor rasta** (engl. growth factor)
- Dakle, uz jednostavno ukamaćivanje, **konačna vrijednost** investicije P u trenutku t koju označavamo sa $V(t)$, dana je sa:

$$\boxed{V(t)=(1+tr)P}$$

- Ukoliko se glavnica investira u trenutku s (a ne u trenutku 0), tada je vrijednost investicije P u trenutku t,

$$\boxed{V_s(t)=\big(1+(t-s)r\big)P, \qquad t\geq s}$$

Primjer.

- Pretpostavimo da promatramo depozit od 15000 kn na 20 dana po (**godišnjoj**) kamatnoj stopi od 8%. Tada je vrijednost depozita nakon 20 dana jednaka:

$$V\left(\frac{20}{365}\right)=15000\left(1+\frac{20}{365}\cdot 0.08\right)=15066$$

- **Uvijek vrijedi**:

Konačna vrijednost = početna vrijednost +ukupne kamate

Primjeri.

- Konačna vrijednost oročenog iznosa od 9000 kn na 61 dan će uz jednostavno ukamaćivanje biti 9020 kn na kraju ugovorenog perioda. Odredite kamatnu stopu i prinos na takvu investiciju.

- Rj:

$$V\left(\frac{61}{365}\right) = V(0)\left(1 + \frac{61}{365} \cdot r\right) \Rightarrow r = 0.0133 = 1.33\%$$

$$\text{Prinos:} \quad \frac{V(t) - V(0)}{V(0)} = 0.0022 = 0.22\%$$

Prinos je 61.dnevni!

- Koliko biste novaca bili voljni uložiti danas u investiciju koja isplaćuje 1000 kn u nekom budućem trenutku ukoliko zahtijevate prinos na takvu investiciju od 3%.

- Rj: prinos=3%= $\frac{V(t)}{V(0)} - 1$

$$\Rightarrow V(0) = \frac{V(t)}{1.03} = 970.8738$$

- Koliko je razdoblje ukamaćivanja ako uz jednostavne kamate je konačna vrijednost oročenog iznosa od 8000 kn uz kamatnu stopu od 9% jednaka 8300 kn? Odredite prinos na takvu investiciju.

  Usporedite vrijednost prinosa s kamatnom stopom u svakom od primjera. Što primjećujete?

- Rj:

$$V(t) = V(0)\left(1 + t \cdot r\right) \Rightarrow t = \frac{8300/8000 - 1}{r} = 0.416667 god$$

~ 152 dana

$$\text{Prinos:} = \frac{8300}{8000} - 1 = 3.75\% \ \left(\approx 1/3\,\text{god. k.s.}\right)$$

Buduća vrijednost uz godišnje ukamaćivanje: složene kamate

- U praksi se jednostavne kamate koriste samo za kratkoročne investicije i za određene vrste depozita po tekućim računima
- Kao takve, ne predstavljaju realan opis vrijednosti novca dugoročno.

- Pretpostavimo da je danas oročen iznos ***P*** uz godišnju kamatnu stopu ***r*** i **jednostavni** obračun kamata.

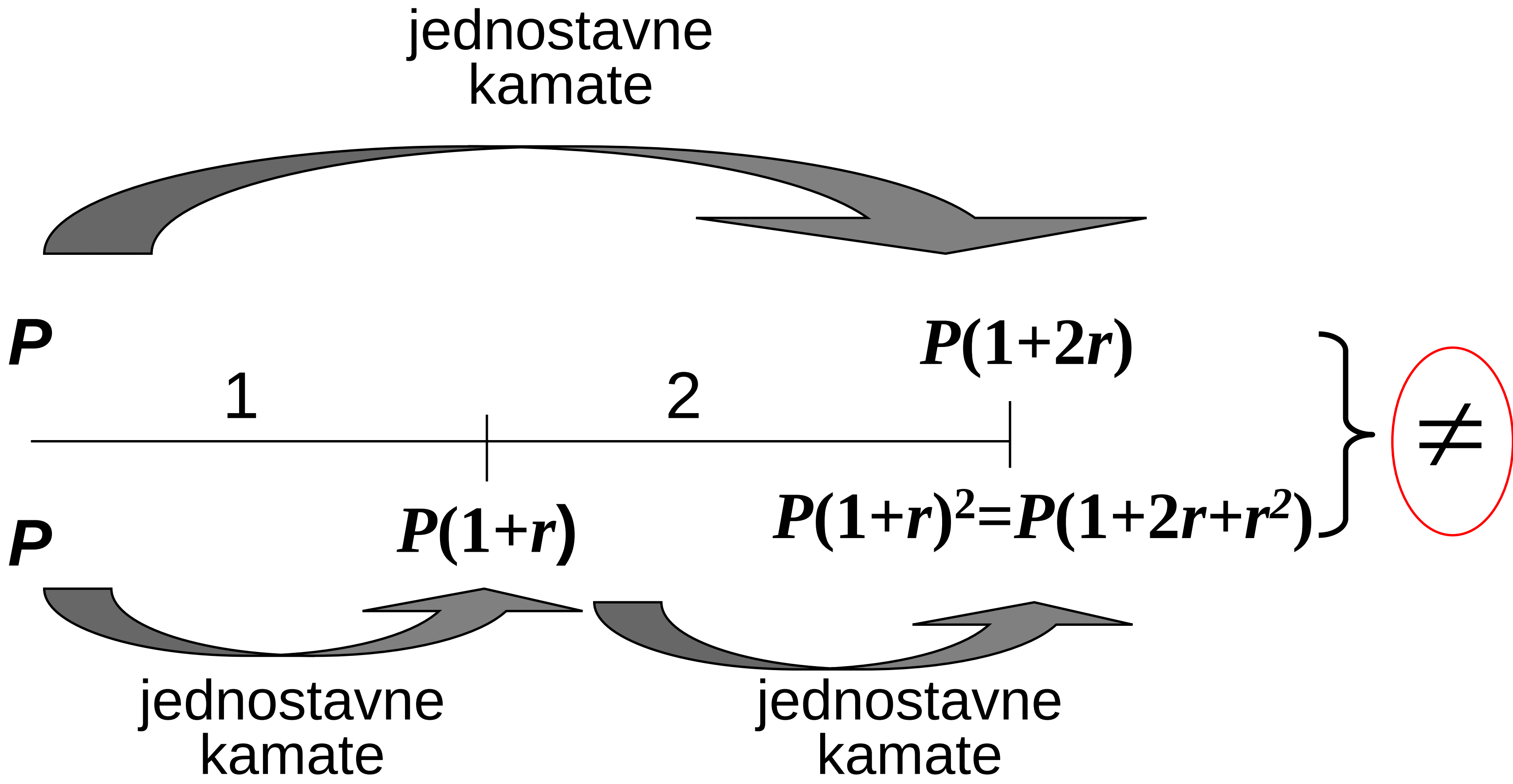
  Pretpostavimo nadalje da je kamatna stopa *r* osigurana za naredne dvije godine te da se račun može zatvoriti i otvoriti u svakom trenutku.

- Zatvaranjem računa nakon godinu dana, konačna je vrijednost oročenog iznosa $\boldsymbol{P(1+r)}$.

- Ukoliko se iznos $P(1+r)$ oroči na drugi račun uz **jednostavne** kamate, konačna je vrijednost nakon godinu dana $P(1+r)\,(1+r) = P(1+r)^2 = \boldsymbol{P(1+2r+r^2)}$.

- Ukoliko se početni iznos $\boldsymbol{P}$ oroči uz jednostavni obračun i godišnju kamatni stopu r, ali na dvije godine, konačna je vrijednost tako oročenog iznosa $\boldsymbol{P(1+2r)}$.

Dakle,


jednostavne kamate
P
P(1+2r)
1
2
P
P(1+r)
P(1+r)²=P(1+2r+r²)
≠
jednostavne kamate
jednostavne kamate

- Iznos $Pr^2=(Pr)r$ predstavlja dodatnu ekstra isplatu na kraju perioda od dvije godine uz prvi način *odabira ulaganja*.

→ Kamata koja sama stvara kamatu

- **Investitor**: racionalni investitor bira onaj način *oročenja* koji stvara veći prinos (uz pretpostavku da ne postoje troškovi otvaranja i zatvaranja računa) .

  Banka: teško bi na administrativnoj razini mogla spriječiti otvaranje i zatvaranje računa takvog tipa

  ↓

  Kako bi se prvenstveno motivirala ulaganja na **duži** horizont, za horizonte duže od godinu dana plaća se **složena kamata**

Složeno ukamaćivanje

- Označimo sa $V(t)$ konačnu vrijednost investicije P u trenutku t.

  Tada je vrijednost koju će investitor ostvariti na kraju bilo kojeg *perioda* jednaka vrijednosti koju bi investitor ostvario zatvaranjem računa u prethodnom periodu uvećanu za iznos kamata na taj iznos. Algebarski,

$$V(t) = V(t-1) + rV(t-1) = (1+r)V(t-1)$$

$$V(0) = P$$

- Napomena: kao *period* uobičajeno uzimamo <u>jednu godinu.</u>

- $V(0)=P$
- Dakle, uz složeno ukamaćivanje, **konačna vrijednost** investicije P u trenutku t koju označavamo sa $V(t)$, dana je sa:

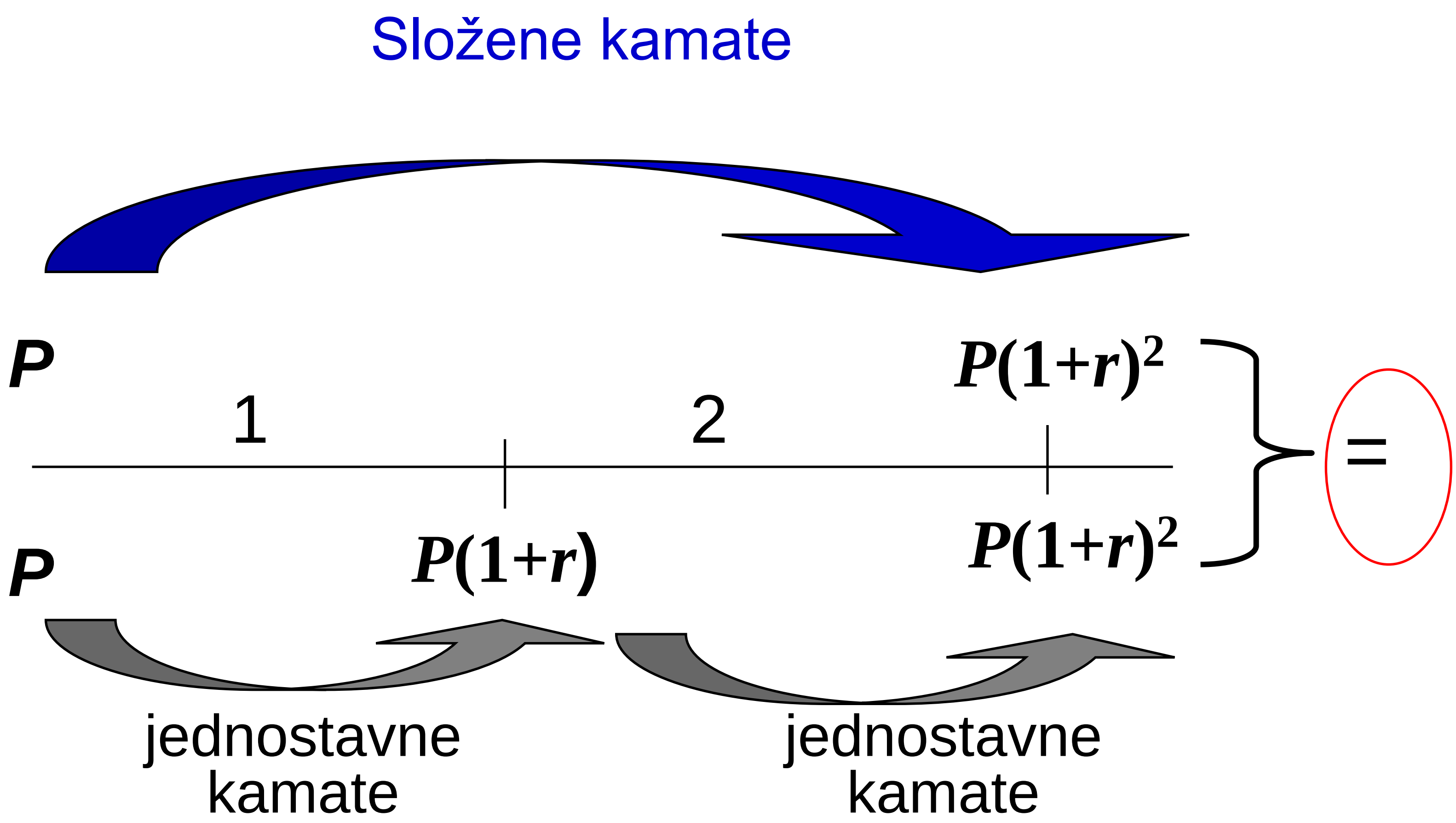
$$\boxed{V(t) = P(1+r)^t}$$

- Vrijednost $(1+r)^t$ zovemo **faktor rasta**.

- Ukoliko se glavnica investira u trenutku s (a ne u trenutku 0), tada je vrijednost investicije P u trenutku t,

$$\boxed{V_s(t) = P(1+r)^{t-s}, \qquad t \geq s}$$

Dakle,


Složene kamate
P
1
2
$P(1+r)^2$
=
P
$P(1+r)$
$P(1+r)^2$
jednostavne kamate
jednostavne kamate

- Dakle, kamate koje se obračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od **promjenjive** glavnice.

- Za razliku od jednostavnih kamata, dobivene se kamate dodaju glavnici periodično, godišnje (polugodišnje, kvartalno, mjesečno, ili čak i na dnevnoj razini, *neprekidno*).

- To ujedno znači da kamate nisu privučene samo originalnim depozitom, već i kamatama dobivenima <u>do tog trenutka</u>.

- **Primjer.** Tvrtka ABC oročila je iznos od 100 000 kn na pet godina. Ako je banka prve dvije godine primjenjivala godišnji kamatnjak 3, a u preostalom razdoblju 2, izračunajte konačnu vrijednost uloženog iznosa. Obračun je kamata godišnji i složen.

$$V(0) = 100000, t = 5, t_1 = 2, t_2 = 3$$

$$r_1 = 0.03$$

$$r_2 = 0.02$$

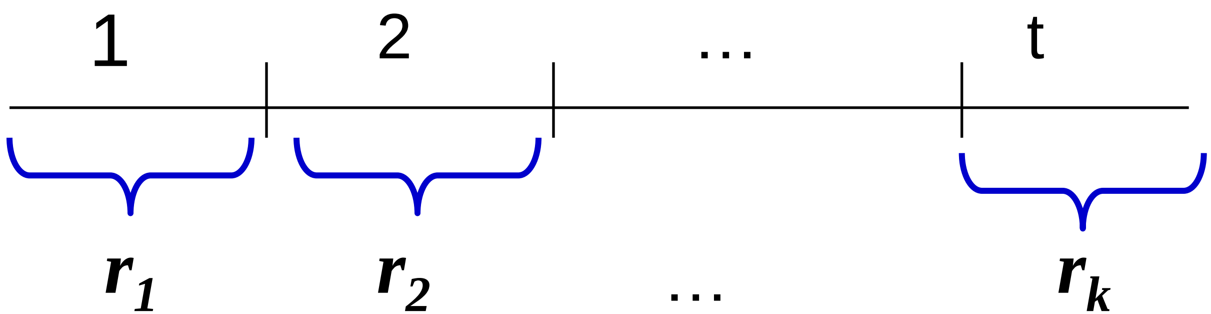
$$V(5)=V(2)(1+r_2)^3=C_0(1+r_1)^2(1+r_2)^3=$$

$$=100000\cdot(1.03)^2(1.02)^3=112583.60$$

- **Općenito:**

$$\boxed{V(t)=V(0)(1+r_1)^{t_1}(1+r_2)^{t_2}\cdot\ldots\cdot(1+r_k)^{t_k}}$$

Dakle,



$$V(t) = V(0)(1+r_1)^{t_1}(1+r_2)^{t_2}\cdot\ldots\cdot(1+r_k)^{t_k}$$

$$\Downarrow$$

$$V(0) = V(t)(1+r_1)^{-t_1}(1+r_2)^{-t_2}\cdot\ldots\cdot(1+r_k)^{-t_k}$$

Prinos (povrat) na investiciju vs. kamatna stopa

- **Prinos *R*(*s*,*t*)** na investiciju započetu u trenutku *s* i završenu u trenutku *t*, dan je sa:

$$\boxed{R(s,t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)} \qquad (\%)}$$

- U slučaju jednostavnih ili složenih kamata vrijedi (provjerite!):

$$R(s,t) = (t-s)r, \quad \text{odnosno} \quad R(s,t) = (1+r)^{t-s} - 1$$

- Posebno, (<u>godišnja</u>) **kamatna stopa** jednaka je **prinosu** kroz <u>godinu dana</u>!

$$R(0,1) = r$$

Ekvivalentne stope kraćih razdoblja: konformni kamatnjak

- Neka je r_g godišnja kamatna stopa. Kolika bi bila polugodišnja, mjesečna itd. kamatna stopa, r_m , da **efekt ukamaćivanja** bude isti uz složene kamate?

- Za m=2, vrijedi:

$$P_0(1+r_g) = P_0(1+r_2)^2 \Rightarrow \quad r_2 = (1+r_g)^{1/2} - 1$$

$$\Rightarrow \qquad r_{12} = (1+r_g)^{1/12} - 1$$

$$\Rightarrow \qquad r_{365} = (1+r_g)^{1/365} - 1,$$

…

$$\Rightarrow \qquad \boxed{r_m = (1+r_g)^{1/m} - 1.}$$

- Poznati kamatnjak za određeni vremenski interval zove se **nominalni** ili zadani kamatnjak

- U slučaju da je zadan godišnji nominalni kamatnjak i mjesečni obračun kamata, svi se elementi obračuna kamata moraju izraziti u mjesecima (godišnji se kamatnjak mora pretvoriti u mjesečni, a broj godina u broj mjeseci).

- Dakle, svi se potrebni elementi obračuna kamata moraju **izraziti** u vremenskom intervalu u kojem se **obračunavaju kamate**
- Veličina ***m*** govori koliko se puta obavlja ukamaćivanje unutar vremenskog intervala nominalnog kamatnjaka.

Ukamaćivanje u kraćim razdobljima

- Obratno, neka je r **godišnja kamatna stopa**. Konvencija u bankarstvu: godišnja kamatna stopa je r, ali se može pripisivati u kraćim razdobljima.
- godišnje: 1 obračun kamata u godinu dana
- polugodišnje: 2 obračuna kamata u godinu dana
- mjesečno: 12 obračuna kamata u godinu dana

- **Relativni (proporcionalni)** se **kamatnjak** dobije tako da se nominalni kamatnjak podijeli s *m:*

$$r_R = \frac{r}{m}$$

- Primjer: $P_0 = 100$, $r = 10\%$ godišnje.

m = 1:	100	$\rightarrow$	$100\,(1+0{,}1)$	$= 110$
m = 2:	100	$\rightarrow$	$100\,(1+0{,}1/2)^2$	$= 110{,}25$
m = 12:	100	$\rightarrow$	$100\,(1+0{,}1/12)^{12}$	$\approx 110{,}38$
m = 365:	100	$\rightarrow$	$100\,(1+0{,}1/365)^{365}$	$\approx 110{,}52$

Primjer.

- Izračunajte konačnu vrijednost glavnice od 25000 kn na kraju četvrte godine ako je godišnji kamatnjak 5, a obračun kamata složen i (a) godišnji, (b) mjesečni. Koristite relativni kamatnjak.

$$V(0) = 25000, t = 4, r = 0.05$$

- (a) Sve je u godinama, pa ništa ne moramo pretvarati.

$$V(4) = 25000(1+r)^4 = 25000(1.05)^4 = 30387.66$$

- (b) Obračun je mjesečni, pa sve pretvaramo u mjesece!

  t=48 mjeseci

- Relativni kamatnjak:

$$r(M)=\frac{5}{12}=0.4167\Rightarrow 1+r(M)=1+\frac{0.4167}{100}=1.004167$$

$$C_{48}=25000(1+r(M))^{48}=25000(1.004167)^{48}=30522.38$$

- **Napomena**: uz konformni kamatnjak:

$$r(M)=100\left[\left(1+\frac{5}{100}\right)^{\frac{1}{12}}-1\right]=0.04074$$

$$\Rightarrow 1+\mathrm{r}=1.004074$$

$$V(48)=25000(1+r)^{48}=30387.66$$

- **Zadatak (DZ)**. Dokažite da su uz godišnji nominalni kamatnjak i mjesečni (kvartalni, polugodišnji) obračun, kamate su veće ukoliko se koristi relativni kamatnjak.

Sadašnja vrijednost: složene kamate

- **Pitanje:** Koliki je iznos potrebno uložiti **danas** kako bi se u trenutku t raspolagalo iznosom $V(t)$ uz složeno ukamaćivanje i pretpostavku da je r stopa po kojoj se novac može uložiti ?

- 100 kn u budućnosti vrijedi manje nego 100 kuna danas (ako su kamatne stope pozitivne); naime 100 kuna *danas* mogu se uložiti kako bi se u budućnosti imalo više!

- Uz pretpostavku da se kamatna stopa r neće promijeniti, vrijedi:

$$V(0) = \frac{V(t)}{(1+r)^t}$$

što nazivamo **diskontiranom ili sadašnjom vrijednošću** budućeg iznosa $V(t)$

- Broj $(1+r)^{-t}$ naziva se **diskontni faktor** (engl. discount factor)

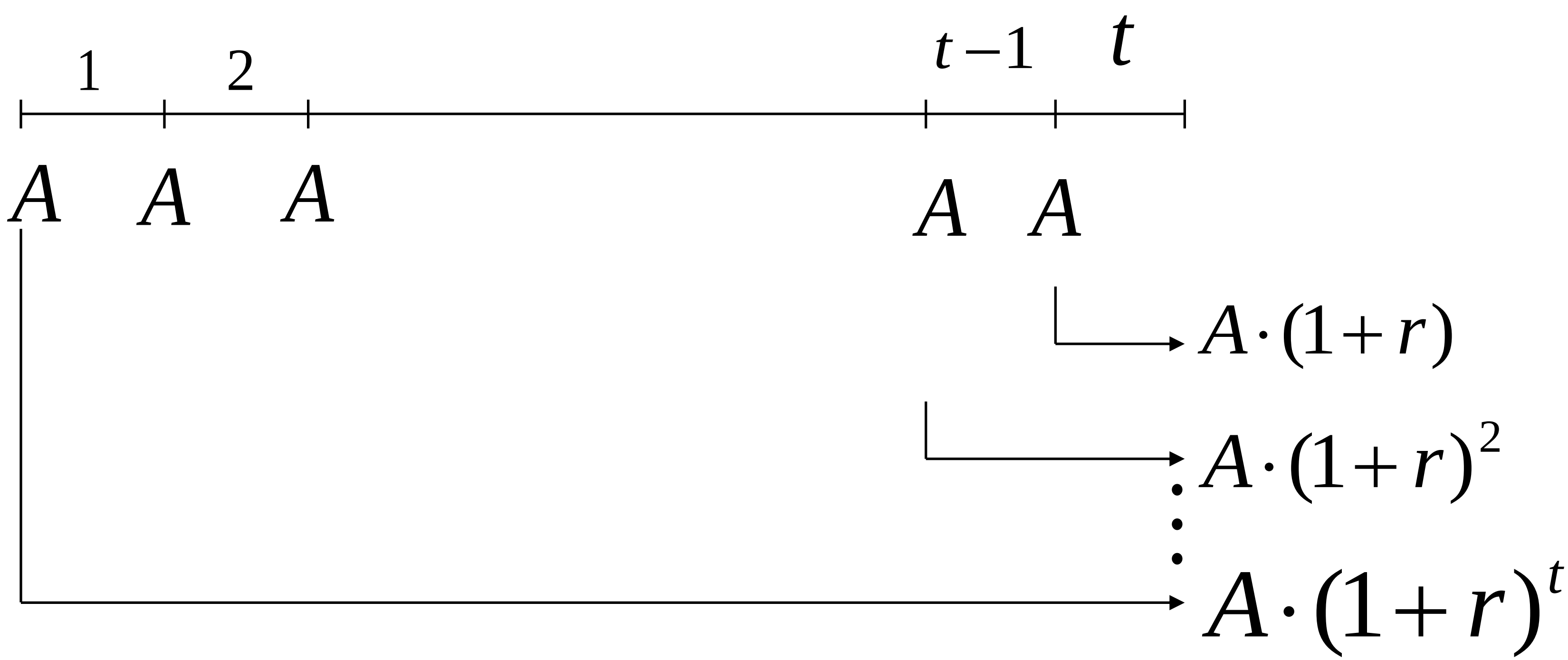
Tokovi uplata/isplata

- **Anuitet** je niz konačno mnogo isplata (uplata) fiksnog iznosa koji dospijevaju u jednakim vremenskim intervalima

- Uplaćujete iznos *A* svake godine od sad tokom *t* godina (prva rata odmah, druga za godinu dana, ... zadnja za *t*-1 godinu). Koliki iznos imate nakon *t* godina uz godišnju kamatnu stopu *r* (godišnji obračun i složene kamate)?

  → Konačna vrijednost

Konačna vrijednost



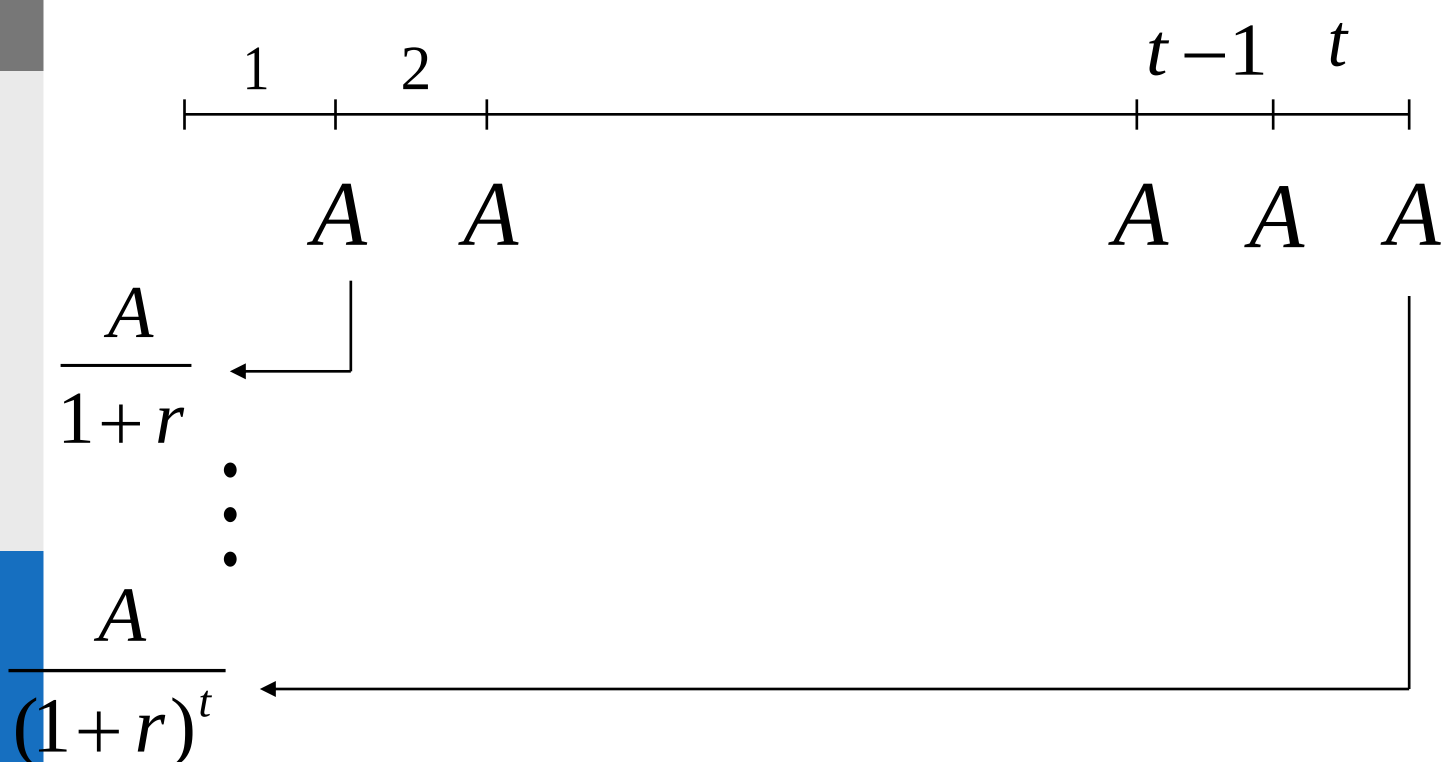
$$V(t) = A\cdot(1+r) + A\cdot(1+r)^2 + \ldots + A\cdot(1+r)^t$$

$$= A(1+r)\frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

- Koliki iznos moramo uplatiti danas ako želimo na bazi tog iznosa primati iznos *A* svake godine tokom *t* godina (prva rata za godinu dana, ... zadnja za *t* godina) uz godišnju kamatnu stopu *r* (godišnji obračun i složene kamate)?

→ Početna vrijednost

Početna vrijednost



$$\boxed{V_t(0)=\frac{A}{1+r}+\ldots+\frac{A}{(1+r)^t}=\frac{A}{(1+r)^t}\cdot\frac{(1+r)^t-1}{r}}$$

Primjer: zajam (kredit)

- Odobren vam je zajam u iznosu 100000 kn na 5 godina uz 15% godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta krajem godine. Anuitet uključuje kamatu koja se plaća krajem svake godine uz određenu kamatnu stopu i otplatnu kvotu. Zajam takvog tipa naziva se **amortizacijski**. Tada je vrijednost anuiteta jednaka:

$$A = \frac{V(0)r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{100000 \cdot 0.15(1.15)^5}{1.15^5 - 1} = 29831.56$$

- Zajam je ekvivalentan anuitetu s gledišta *zajmodavca*.

Vječna renta

- Beskonačna vrijednost niza isplata (uplata) fiksnog iznosa A na kraju svakog *razdoblja* (godine).

$$\lim_{t\to\infty} V_t(0) = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \ldots$$

$$= \frac{A}{r}$$

- Primjer: određivanje vrijednosti poduzeća uz zadane buduće novčane tokove

Zadaci

- Netko vam posudi 1000 kn. Trebate ih vratiti u 10 jednakih godišnjih rata, uz poček 3 godine (prva rata nakon 3 godine) uz kamatnu stopu od 10%. Koliki su anuiteti?

- Rj: $C_3 = 1000 * 1.1^3 = 1331$

$$C_3 = A + \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^9}$$

$$= \frac{A}{(1+r)^9} \frac{(1+r)^{10} - 1}{r}, \quad r = 10\%$$

$$A = 231.1156$$

Zadaci

- Dobijete kredit od 10.000 kn koji trebate vratiti tokom 8 godina uz jednake anuitete; prvi anuitet dospijeva za 1 godinu, a kamata je 10% godišnje. Pretpostavimo da nakon 3 godine želite otplatiti kredit u cijelosti. Koliko trebate platiti?
- Rj: $$C = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^8}$$

$$= \frac{A}{(1+r)^8} \frac{(1+r)^8 - 1}{r}, \quad r = 10\%$$

$$\Rightarrow A = 1874.44$$

Ostatak duga na kraju 3. godine (nakon isplate 3. anuiteta):

$$OD_3 = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^5} = 7105.62$$

Zadaci

- Nađite zatvorenu formulu za ostatak koji treba uplatiti na kraju treće godine za uvjete kao gore.

- Rj: ostatak duga nakon *k*-te godine:

$$OD_k = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^{n-k}}$$

$$= \frac{A}{(1+r)^{n-k}} \cdot \frac{(1+r)^{n-k} - 1}{r}$$

Zadaci

- Uzimate u nekoj banci kredit. Uvjeti su sljedeći. Da biste dobili 10.000 kn kredita uz kamatu od 12% na 5 godina, morate dati depozit od 2.000 kn na koje ne dobijate kamate. Depozit vam se vraća po isplati kredita.

  Kolika je efektivna kamatna stopa, tj. koliko vas zaista košta novac koji posuđujete?

Rj:

$$C = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{A}{(1+r)^5}$$

$$\Rightarrow A = \frac{C \cdot r \cdot (1+r)^5}{(1+r)^5 - 1}, \quad r = 12\%$$

$$\Rightarrow A = 2774.097$$

- Efektivna kamatna stopa zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$C-2000=\frac{A}{1+r_{ef}}+\ldots+\frac{A}{(1+r_{ef})^4}+\frac{A-2000}{(1+r_{ef})^5}$$

$$\Rightarrow r_{ef}\approx 16.98\%$$

- Isti uvjeti kao u prethodnim zadacima uz općenite brojeve: depozit u visini od *x*% od kredita. Kamatna stopa od *r*% godišnje, a na depozit dobijate *s*% godišnje. K tome morate platiti pri izdavanju kredita jednokratnu naknadu od 1% od iznosa kredita. Kolika je efektivna kamatna stopa?

$$\left(1-\frac{x}{100}-1\%\right)C=\frac{A}{1+r_{ef}}+\ldots+\frac{A}{(1+r_{ef})^n}-\frac{\frac{x}{100}C\left(1+\frac{s}{100}\right)^n}{(1+r_{ef})^n}$$