Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za vježbu
14. 5. 2010.

1. Odredite istinitost sljedećih tvrdnji (T/N) uz objašnjenje vašeg odgovora ili nadopunite rečenicu:

a) Ako je cijena udjela dionice ABC jučer na kraju trgovanja bila 40, a na kraju današnjeg dana trgovanja 50, tada je logaritamski povrat za jednodnevni vremenski interval 25%.

b) Ako su kroz tri dana trgovanja jednodnevni vremenski povrati redom dani sa $R(0,1)=5\%$, $R(1,2)=3\%$ i $R(2,3)=4\%$, tada je trodnevni vremenski povrat $R(0,3)$ strogo veći od 12%

c) Ako je logaritamski povrat za prvu godinu držanja dionice XYZ jednak 7%, a za drugu godinu 5%, tada je vrijednost dionice na kraju druge godine 1.127 puta veća od vrijednosti dionice na početku prve godine

d) Pretpostavimo da promatramo dvoperiodni model binomnog stabla. Vrijednost povrata u slučaju rasta vrijednosti imovine, g, ne može biti veća od 16% ukoliko je veća od dviju mogućih vrijednosti imovine u trenutku 1 jednaka 90, a maksimalna vrijednost u trenutku 2 jednaka je 105.

e) Pretpostavimo da je cijena dionice XYZ zadana modelom n-periodnog binomnog stabla, pri čemu su jednoperiodni povrati dani sa 10% i -5%. Ukoliko je početna cijena dionice jednaka 100, tada vrijednost dionice XYZ u 5. periodu ne može biti veća od __________ niti manja od ___________.

f) Pretpostavimo da je tržište dano modelom binomnog stabla, pri čemu su moguće vrijednosti dionice na sutrašnji dan jednake 84 i 90, a vrijednost dionice danas jednaka je 80. Ako je referentna kamatna stopa manja ili jednaka 4.5% tada ne postoji mogućnost arbitraže na zadanom tržištu.

g) Pretpostavimo da vrijednost neke dionice u bilo kojem danu može biti ili 5% veća ili 4% manja od svoje vrijednosti u prethodnom danu. Tada dionica XYZ može poprimiti 4 različite vrijednosti nakon tri dana, uz uvjet da znamo njenu cijenu danas.

h) Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po modelu n-periodnog binomnog stabla, pri čemu su $g=10\%$, $d=-5\%$ i $p_g=20\%$. Ako je cijena dionice XYZ danas jednaka 1000, tada očekivana cijena dionice XYZ u trenutku $t=10$ ne može biti veća od 820

i) Pretpostavimo da se na tržištu trguje ugovorom koji u drugom periodu od danas isplaćuje 90 u slučaju jednog scenarija i tri puta manje u slučaju drugog scenarija. Ako su oba scenarija jednako vjerojatna uz vjerojatnost neutralnu na rizik, tada je fer cijena takve opcije danas jednaka 24 ukoliko je referentna kamatna stopa na tržištu jednaka 5% kroz oba perioda od interesa.

j) Ako za neku samofinancirajuću i predvidivu investicijsku strategiju ABC vrijedi da je $V(0)=0$, $V(1)<0$ i $V(2)>0$, tada je ona dopustiva.

k) Investicijska strategija dozvoljava mogućnost arbitraže ako je strategija predvidiva i takva da je $V(n)\geq 0$ za svaki $n\geq 0$, ali nije samofinancirajuća.

2. Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po modelu n-periodnog binomnog stabla, pri čemu su g=10%, d=-5% i p_g=20% i vrijede za sva jednoperiodna podstabla. Odredite $E\left[S(10)^3 \mid S(5)\right]$, ako je $S(5)=a$. Uputa: prvo izračunajte S(10) na način da krećete gledati moguću cijenu od trenutka $t = 5$ i prisjetite se da su u modelu binomnog stabla povrati nezavisni i jednako distribuirani! Zatim izvedite odgovarajuću potenciju relacije i njezino očekivanje na način da vodite računa o uvjetu uz koji računate očekivanu vrijednost od $S(10)^3$.

3. Pretpostavimo da se cijena dionoce kreće po modelu dvoperiodnog binomnog stabla. Neka je $S(0)$ = 100, g = 10%; d = 5%, gg=4.5%, gd=-1%, dg=3%, dd=5.8%. Pretpostavimo nadalje da je referentna nerizična kamatna stopa na tržištu fiksna i iznosi r%. U ovisnosti o r diskutirajte taktiku za arbitražu.

4. Zamislite da odlučujete pokrenuti igru na sreću sličnu lotu. Igra se sastoji od izvlačenja jedne kuglice iz bubnja u kojem se nalazi 20 bijelih, 10 plavih i 5 crvenih kuglica. Ukoliko igrač izvuče bijelu kuglicu, ne dobiva ništa, ukoliko izvuče plavu, dobiva određeni iznos x, a ukoliko izvuče crvenu kuglicu dobiva dvostruko više, $2x$. Da bi igrač odigrao jedno izvlačenje, mora uplatiti 20 kn (i taj novac mu se ne vraća niti u slučaju dobitka). Modelirajte igru tj. definirajte proces ukupnog dobitka do n-tog izvlačenja za igrača i odredite distribuciju dobitka u jednom bacanju, te odredite koliki mora biti x da bi igra bila fer. Ako vi kao organizator igre želite dugoročno profitirati, koje vrijednosti x dolaze u obzir?

5. Pretpostavimo da je A(0)=1 i da za dionicu XYZ prema nekom modelu vrijedi S(0)=100, mogući su jednoperiodni povrati RA=50%, RB=25%, RC = -50% uz odgovarajuće vjerojatnosti p_{RA}=0.4, p_{RB}=0.3 i p_{RC}=0.3. Referentna nerizična kamatna stopa je 25%. Da li je europska call opcija izvršne cijene 50 dostižna? Ako da, odredite joj nearbitražnu cijenu (Primjetite da je drugi dio zadatka možete riješiti na dva načina: *teži* (duži) i *lakši* (kraći). Razmislite zašto! Mišljena sam da je malo teži način uz vjerojatnost neutralnu na rizik (jer ju morate odrediti prvo da biste izračunali cijenu opcije), a ipak malo lakši način je uz neku od tvrdnji koje, u slučaju da **ne postoji** mogućnost arbitraže, povezuju vrijednost replicirajućeg portfelja i cijenu slučajnog zahtjeva u svakom vremenskom trenutku!

Nekoliko napomena:

1. Pitalice na ispitu se mogu odnositi i na neke pojmove i relacije koje se pojavljuju u ovim zadanim zadacima za vježbu.

2. Obavezno riješite sve zadatke sa replicirajućim portfeljem, arbitražom i fer cijenom slučajnih ugovora.

3. Obavezno ponovite relacije koje se odnose na binomno stablo i implicitne kamatne stope, Zadaća 7.

4. Martingali: ili u obliku pitalica i/ili zadatak, vodite računa da kod određivanja fer cijene slučajnih ugovora radite sa diskontiranim procesom cijene, dok kod fer igre ispitati da li je nešto martingal morate samo provjeriti da li za zadani proces vrijedi relacija iz definicije martingala