Fakultet elektrotehnike i računarstva **Zagreb, 2. 7. 2012.**
Financijska matematika
Pismeni ispit

1. **(15 bodova)** Odredite istinitost sljedećih tvrdnji (T/N) uz objašnjenje vašeg odgovora ili nadopunite rečenicu:

a) Ukoliko investirate neki iznos uz konstantu kamatnu stopu r%, tada ćete uz neprekidno ukamaćivanje udvostručiti (zaokruženo na jednu decimalu) vaš iznos za 4T polugodišta ukoliko je rT=35. (Napomena: ako je kamatna stopa npr. 12%, tada je r=12).

b) Pretpostavimo da će kamatna stopa od 4% uz neprekidno ukamaćivanje dati istu konačnu vrijednost nakon godinu dana kao i složeno ukamaćivanje uz kamatnu stopu R%. Tada je efektivna kamatna stopa jednaka 4%.

c) Ako danas uložite u banku iznos X na bazi kojeg želite dobivati na kraju svake godine vječno određenu rentu, tada je visina godišnje rente jednaka iznosu ukupnih kamata koje biste dobili za godinu dana na uloženi iznos X.

d) Ako je diskontni faktor zadan funkcijom

$$D(t) = \begin{cases} e^{-0.04t} & \text{za } t \le 2 \text{ godine} \\ e^{-(0.08+0.06(t-2))} & \text{za } t \ge 2 \text{ godine} \end{cases}$$

tada se prve dvije godine primjenjuje trenutačna kamatna stopa ________%, a nakon toga ________%.

e) Pretpostavimo da obveznica nominalne vrijednosti 100 kn isplaćuje polugodišnje kupone u iznosu od 4 kn i ima dospijeće 5 godina. Ako se danas tom obveznicom trguje po nominali, tada je prinos do dospijeća najviše 5% uz primjenu složenog ukamaćivanja.

f) Ako su spot stope za godišnju i dvogodišnju beskuponsku obveznicu redom 3% i 5.05%, tada je unaprijedna kamatna stopa za drugu godinu f(0,1,2) veća od 7%.

g) Duracija kuponske obveznice nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od 4 godine koja isplaćuje polugodišnje kupone po kuponskoj stopi od 5%, veća je od 4 ukoliko je prinos do dospijeća veći od 4%, a manji od 6%.

h) Ako su kroz tri dana trgovanja jednodnevni povrati na vrijednost neke imovine redom dani sa $R(0,1)$=1%, $R(1,2)$=7% i $R(2,3)$=5%, tada vrijednost takve imovine na kraju trećeg dana trgovanja ne može biti 1.13 puta veća od vrijednosti imovine na početku trgovanja.

i) Pretpostavimo da je cijena dionice XYZ zadana modelom n-periodnog binomnog stabla, pri čemu su jednoperiodni povrati dani sa 5% i -3%. Ukoliko je početna cijena dionice jednaka 100, tada vrijednost dionice XYZ u 10. periodu ne može biti veća od ________ niti manja od ________.

j) Pretpostavimo da je tržište dano modelom binomnog stabla, pri čemu su moguće vrijednosti dionice XYZ na sutrašnji dan jednake 95 i 105, a vrijednost dionice danas jednaka je 100. Ako je pozitivna referentna kamatna stopa manja ili jednaka 4.5% tada ne postoji mogućnost arbitraže na zadanom tržištu.

OKRENITE LIST!

k) Pretpostavimo da se na tržištu trguje europskom put opcijom na dionicu XYZ, čija je izvršna cijena 70 i dospijeće godinu dana. U trenutku dospijeća moguće su dvije cijene dionice XYZ: 67 i 79, svaka s vjerojatnosti 0.5. Ako je investitor danas posudio novac od banke (uz neprekidno ukamaćivanje) kako bi kupio europsku put opciju cijene 2.5, tada investitor očekuje gubitak od takve investicije samo u slučaju da je novac posudio po nerizičnoj stopi od većoj od ____ %

l) Pretpostavimo da je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli očekivanja μ, varijance σ^2, te definiramo n-tu parcijalnu sumu kao $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_n$, $n \geq 1$. Ako je $\mu = 0$, tada je niz $(Y_n = S_n - 3n)$, $n \geq 1$ martingal.

m) Pretpostavimo da promatramo dionicu XYZ koja isplaćuje dividendu u iznosu od 5 za tri mjeseca od danas. Ukoliko je referentna nerizična kamatna stopa 10%, a unaprijedna cijena dionice XYZ s trenutkom isporuke od godinu dana 94.076, tada postoji mogućnost arbitraže ukoliko je trenutna tržišna cijena dionice XYZ manja od 90.

n) Označimo sa P^E cijenu europske put opcije na dionicu XYZ izvršne cijene X i dospijeća T. Tada je $P^E \geq Xe^{-rT} - S(0)$ pri čemu je r referentna nerizična kamatna stopa, a $S(0)$ trenutna tržišna cijena dionice XYZ.

o) Ukoliko volatilnost dionice XYZ pada, tada cijena europske put opcije na dionicu XYZ raste uz uvjet da ostale varijable koje utječu na cijenu europske put opcije na dionicu XYZ ostanu nepromijenjene.

2. (8 bodova) Pretpostavimo da ste danas ostvarili dobitak na lotu. Ako ne namjeravate taj novac koristiti prve dvije godine, što vam se više isplati, preuzeti odmah cjelokupan iznos od 1 000 000 kn ili početkom svakog mjeseca (počevši od danas) tijekom dvije godine dobivati po 45 000 kn? Pretpostavka je da iznose do 100 000 kn možete oročavati uz fiksnu godišnju kamatnu stopu od 6%, a iznose veće od 100 000 kn uz fiksnu godišnju kamatnu stopu od 7%. Sva oročenja se prekidaju na kraju 2. godine i raniji prekidi nisu mogući.

3. (8 bodova) Investicija A traži početni polog od 100000, a investicija B polog od 150000. Pretpostavimo da su očekivani povrati na investicije kroz razdoblje od 5 godina dani sljedećom tablicom:

	1. godina	2. godina	3. godina	4. godina	5. godina
A	20000	70000	20000	20000	20000
B	20000	20000	20000	20000	120000

Investitor računa na dva moguća scenarija. Prvi scenarij je da kamatne stope ostanu konstantne 5% tokom cijelog razdoblja, a druga mogućnost je da ostanu 5% do 4. godine, a zatim u zadnjoj godini skoče na 8%. Koja je investicija isplativija u jednom, a koja u drugom scenariju?

4. (7 bodova) Pretpostavimo da se na tržištu trguje kuponskom obveznicom s dospijećem od dvije godine, kuponskom stopom 5% te da je trenutna tržišna cijena takve obveznice 96.5 Ukoliko je relativna promjene cijene takve obveznice uslijed smanjenja spot stope od 10% za 2 postotna poena približno jednaka 4%, odredite duraciju takve obveznice.

OKRENITE LIST!

5. (8 bodova) Pretpostavimo da se na tržištu trguje obveznicama tipa A i B čiju su duracije D_A=3 i D_B=1 godina. Pretpostavimo da neki investitor želi investirati 20000 kn na period od 5 mjeseci. Odredite kolike udjele u obveznice A i B investitor mora uložiti ukoliko želi da portfelj konstruiran od obveznica A i B bude imun na male promjene u kamatnim stopama na tržištu. Ukoliko su C_A=1.10 i C_B=0.91 kn, odredite koliko će novaca investitor uložiti u obveznicu A, a koliko u obveznicu B.

6. (9 bodova) Pretpostavimo da su trenutno na tržištu uvjeti takvi da je B(0,T-1) < B(0,T), za neki T>1, pri čemu B(0,T) predstavlja cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0 s dospijećem T, nominalne vrijednosti 1.

a) Odredite sve moguće odnose koji mogu vrijediti za odgovarajuće prinose do dospijeća y(0,T-1) i y(0,T) (<, = ili >) te odredite za svaki od tih odnosa kada je moguća arbitraža, a kada nije, uz kraće objašnjenje.

b) Pretpostavite da u svakom trenutku možete kupovati i (kratko) prodavati navedene obveznice, te da se u trenutku T-1 na tržištu trguje obveznicom s dospijećem u trenutku T po odgovarajućoj cijeni B(T-1,T). Odredite strategiju arbitraže, u svakom od slučajeva iz a) dijela zadatka u kojem je arbitraža moguća i računom potvrdite da ste u trenutku T ostvarili profit. Koristite kontinuirano ukamaćivanje.

7. (8 bodova) Pretpostavimo da se na tržištu danas trguje dionicom XYZ po cijeni od 100 te da će u trenutku t=1 cijena dionice XYZ biti ili 150 ili 50. Pretpostavimo da je nerizična kamatna stopa r =10%.

a) Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik.

b) Odredite vrijednosti isplatne (ugovorne) funkcije europske put opcije na dionicu XYZ s dospijećem t=1 ukoliko je izvršna cijena put opcije 90.

c) Kolika je fer cijena europske put opcije (iz b) dijela zadatka) danas?

d) Da li postoji replicirajući portfelj za europsku put opciju (iz b) dijela zadatka? Ako da, odredite ga. Da li je takva put opcija dostižna?

8. (8 bodova) Neka je $S(0)$ = 100 i neka su mogući sljedeći scenariji za cijenu dionice XYZ:

Scenarij	$S(1)$	$S(2)$
w_1	105	99
w_2	105	108
w_3	110	109
w_4	110	115

Nadalje, neka je nerizična kamatna stopa na tržištu tokom ova dva perioda fiksna i iznosi r%. U ovisnosti o r diskutirajte postoji li strategija za arbitražu, te ukoliko postoji, odredite ju.

OKRENITE LIST!

9. (7 bodova) Pretpostavimo da ste u investicijskoj banci ABC market-maker unaprijednih ugovora na dionice. Trenutna cijena dionice XYZ je 115, referentna nerizična kamatna stopa je 6%, a prinos od dividende na dionicu XYZ je 2%. Pretpostavimo da je trenutna tržišna cijena unaprijednog ugovora na dionicu XYZ s isporukom od tri mjeseca 119 te da se na tržištu trguje i sintetičkim ugovorima glede vrijednosnica koje su predmet interesa (tj. ugovorima nearbitražne cijene). Odredite strategiju arbitraže na tržištu ukoliko je ona moguća.

10. (9 bodova) Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po Black-Scholesovom modelu. Referentna nerizična kamatna stopa je 5%, volatilnost dionice 30%, a vrijednost dionice u trenutku 0 je 100. Investitor kupuje financijsku izvedenicu s dospijećem od pola godine specifične isplate: ukoliko je cijena dionice nakon pola godine, S(1/2), manja od 100 investitor dobiva 100-S(1/2), ukoliko je cijena dionice između 100 i 120 investitor ne dobiva ništa i ukoliko je veća od 120 investitor gubi S(1/2)-120. Nacrtajte graf vrijednosti izvedenice nakon pola godine u ovisnosti o cijeni dionice i izračunajte fer cijenu za takvu izvedenicu. Poznato je N(0.8477)=0.8017, N(0.6356)=0.7375, N(0.2239)=0.5886, N(0.0118)=0.5047, N(-0.2239)=0.4114, N(-0.6356)=0.2625, N(-0.8477)=0.1983.

11. (8 bodova) Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po Black-Scholesovom modelu. Nadalje pretpostavimo da je cijena dionice u trenutku nula jednaka 2, volatilnost 15% i referentna nerizična kamatna stopa 5%. Investicijska banka ABC je na tržištu izdala 5000 europskih call opcija izvršne cijene 2.1 s dospijećem pola godine i 500 europskih put opcija izvršne cijene 1.9 s periodom do dospijeća 9 mjeseci. Investicijska se banka želi zaštititi od rizika u promijeni cijene dionice. Konstruirajte odgovarajući delta-neutralni portfelj početne vrijednosti nula. Poznato je da N(-0.1713)=0.4320, N(-0.2773)=0.3908, N(0.7485)=0.7729,N(0.6186)=0.7319.

Napomena: Podsjećamo na nekoliko formula koje se pojavljuju u Black-Scholesovom modelu:

$$C^E = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT} N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$delta_{C^E} = N(d_1)$$

$$gamma_{C^E} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$theta_{C^E} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} - rXe^{-rT} N(d_2)$$

$$vega_{C^E} = \frac{S\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$rho_{C^E} = TXe^{-rT} N(d_2).$$