Financijska matematika

Dr. sc. Petra Posedel

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 30.3.2018.

Varijabilne kamatne stope

- Uz slučajne promjene u kamatnim stopama problemu menadžmenta rizika se pristupa uvođenjem matematičkog alata *duracije* (trajanje) investicija u obveznicama.

- Nadalje, vidjet ćemo da stope <u>ovisne o dospijeću</u> također ne mogu biti determinističke, što vodi do stohastičkih kamatnih stopa.

Prinosi nezavisni o dospijeću: beskuponske obveznice

- Sadašnja vrijednost beskuponske obveznice **određuje** kamatnu stopu koju zovemo *prinos* (engl. yield) i označavamo sa $y(0)$ kako bismo naglasili da se računa u trenutku 0:

$$B(0,T) = e^{-Ty(0)}$$

- U nekom drugom vremenskom trenutku $t < T$

$$B(t,T) = e^{-(T-t)y(t)}$$

- Općenito (i u mnogim realnim situacijama), obveznica s različitim dospijećem implicira različiti prinos.

Pojam **arbitraže**: uvod

- *Princip nearbitraže*: Ne postoji investitor koji može ostvariti profit bez preuzimanja rizika kao niti bez početnog ulaganja.
- Drugim riječima ne postoji *portfelj* čija je početna vrijednost $V(0)=0$ takav da je $V(1) > 0$ s pozitivnom vjerojatnošću. Ukoliko je početna vrijednost mogućeg portfelja jednaka 0, tj. V(0)=0, tada je V(1)=0 s vjerojatnošću 1.
- Ukoliko postoji portfelj ulaganja koji narušava taj princip tada kažemo da **postoji mogućnost arbitraže**.

- **Propozicija**. Ako je prinos $y(t)$ za neki $t > 0$ poznat u trenutku 0, tada je $y(0) = y(T)$ ili je moguće naći strategiju arbitraže.

Dokaz: Pretpostavimo da je $y(0) < y(T)$. Promatramo sljedeću investiciju:

1. Posudimo jednu novčanu jedinicu za period od 0 do T+1 te taj iznos oročimo od trenutka 0 do T, po stopi od $y(0)$

2. u trenutku T podignemo oročenu glavnicu (uvećanu za kamatu) i dobiveni iznos investiramo u trajanju od jednog vremenskog perioda po stopi $y(T)$. U trenutku T+1 će vrijednost biti $e^{Ty(0)+y(T)}$.

- U trenutku T+1 za posuđenu iznos potrebna je isplata od $e^{(T+1)y(0)}$ što ujedno daje pozitivnu bilancu u iznosu od $e^{Ty(0)}(e^{y(T)}-e^{y(0)}) > 0$ što predstavlja profit uz arbitražu.

  Slično u slučaju da je $y(0) > y(T)$.

  $\square$

- Napomena: prema propoziciji slijedi da ukoliko su kamatne stope **nezavisne** o dospijeću i **determinističke** (tj. $y(T)$ je poznat unaprijed za svaki T veći ili jednak 0), tada one moraju biti **konstantne**.
- Prije: $\boldsymbol{y(T)=y(0)=r}$

- Dakle, uz uvjet nearbitraže:

$$\boxed{B(0,T) = B(0,t)\cdot B(t,T), \qquad 0 \le t \le T}$$

- Primjer. Pretpostavimo da promatramo mjesečni obračun. Odredite strategiju koja omogućava arbitražu ako su prinosi nezavisni o dospijeću, ukoliko se na tržištu trguje obveznicama nominalne vrijednosti 1 s dospijećem od 6 mjeseci s cijenama $B(0,6)=0.9320$ te $B(3,6)=0.9665$. Cijene su poznate u trenutku 0.

Primijetimo:

- Empirijski gledano, prinosi implicirani povijesnim cijenama obveznica variraju kroz vrijeme. U modelu bez arbitraže, kako bi se omogućilo da prinosi variraju kroz vrijeme, a da su istovremeno nezavisni o dospijeću, potrebno je omogućiti da su oni **slučajni**, što ujedno znači da je <u>nemoguće unaprijed predvidjeti</u> hoće li $y(T)$ biti veći ili manji od $y(0)$.

- Dakle, podrazumijevat ćemo da je u svakom vremenskom trenutku t, $y(t)$ pozitivan slučajan broj, nezavisan o dospijeću odgovarajuće obveznice.
- **Cilj** je dakle analizirati povrat na investiranje u obveznice te prijeteći ***rizik*** koji proizlazi od slučajnih promjena u kamatnim stopama.

- Uočimo da u slučaju investiranja u beskuponske obveznice koje se držе do dospijeća, stopa povrata je **osigurana**, budući da je završna isplata fiksirana unaprijed i nije pod utjecajem eventualnih **promjena** u kamatnim stopama.

- **Problem:** ukoliko odlučimo zatvoriti investiciju prije dospijeća prodajom obveznice, susrećemo se s rizikom da će se kamatne stope u međuvremenu promijeniti što može *nepovoljno* utjecati na konačnu vrijednost investicije.

- Primjer. Pretpostavimo da investiramo u obveznicu na period od šest mjeseci te neka je obračun kamata mjesečni. Pretpostavimo nadalje da na tržištu kupimo nekoliko jediničnih obveznica s dospijećem od godinu dana i cijenom od $B(0,12)=0.93$. Budući da je horizont planirane investicije šest mjeseci, analizirajte sljedeće slučajeve (odredite povrat na investiciju):

  a) $y(6) = 7.26\%$

  b) $y(6) = 6.26\%$ (tj kamatna stopa na tržištu je pala za 1 postotni poen)

  c) $y(6) = 8.26\%$ (tj kamatna stopa na tržištu je narasla za 1 postotni poen)

- Nađite zatvorenu formulu u općem slučaju ukoliko dođe do promjena kamatnih stopa na tržištu, kao i uz uvjet da se odlučite na investiciju s horizontom ulaganja kraćim od dospijeća. Što možete zaključiti?

Zadaci.

- Pretpostavljamo da promatramo mjesečni obračun. Ukoliko investiramo 100 kn u beskuponsku obveznicu s dospijećem od šest mjeseci tržišne cijene $B(0,6)=0.94$ kn. Nakon šest mjeseci reinvestirate dobiveni iznos u obveznice istog tipa kojima se trguje po cijeni od $B(6,12)=0.9368$ kn. Izračunajte odgovarajuće implicirane kamatne stope te broj obveznica koje posjedujete u svakom trenutku. Izračunajte logaritamski povrat na investiciju kroz godinu dana.

- Pretpostavimo da godina ima 360 dana. Pretpostavimo nadalje da se na tržištu trguje obveznicom s dospijećem od godinu dana po cijeni od $B(0,360)=0.92$ te da kamatna stopa ostaje nepromijenjena prvih šest mjeseci, zatim na 180. dan naraste za 2 postotna poena te ostaje na toj razini do kraja godine. Ukoliko je obveznica kupljena na početku godine, odredite u kojem trenutku treba prodati obveznicu kako bi se ostvario logaritamski povrat od 4.88% ili više?

Prinosi nezavisni o dospijeću (cont): kuponske obveznice

- Investiranje u kuponske obveznice je kompliciranije nego ono u beskuponske obveznice

- Čak i u slučaju da se obveznica drži do dospijeća, kuponi se isplaćuju u međuvremenu te se isplate mogu reinvestirati.

- Povrat na takvu investiciju ovisi o prevladavajućim kamatnim stopama u trenucima isplate kupona.

- **Primjer**. Pretpostavimo da investiramo sumu od 1000 kn u obveznicu s dospijećem od 4 godine, nominalne vrijednosti 100 koja isplaćuje godišnje kupone u iznosu od 10 kn. (Na takvu se obveznicu može gledati kao na kolekciju četiri beskuponske obveznice s dospijećima 1,2,3 i 4 godine i nominalnim vrijednostima 10,10,10 te 110). Pretpostavimo da se takvim obveznicama trenutno na tržištu trguje cijenom od 91.78 kn. Odredite isplatu u kuponima nakon godinu dana. Pretpostavimo da nakon isplate prvog kupona odlučite prodati obveznice kojima raspolažete, a na tržištu je došlo do promjene u kamatnim stopama. Odredite iznos koji ćete ostvariti u tom trenutku ako kamatna stopa a) padne na 10% i b) naraste na 14%. Odredite kolika bi trebala biti stopa $y(1)$ ukoliko želite ostvariti logaritamski povrat na investiciju od 10%.

Zadaci.

- Pretpostavimo da su trenutno uvjeti na tržištu takvi da je $B(0,T) < B(0,T+1)$, pri čemu $B(0,T)$ predstavlja cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0 s dospijećem T.

  a) Kako se navedena nejednakost reflektira na odnos odgovarajućih prinosa $y(0,T)$ i $y(0,T+1)$?

  b) Predstavlja li to ujedno mogućnost arbitraže?

  c) Odredite strategiju arbitraže

  d) Interpretirajte situaciju na tržištu koja je određena takvom nejednakosti cijena obveznica.

- Na tržištu se nude beskuponske obveznice s dospijećem od godinu dana i nominalne vrijednosti 100 po cijeni 95.12, kao i kuponske obveznice nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od dvije godine i kuponskom stopom 10 % po cijeni 104.95. Pretpostavka investitora je da će se nakon godinu dana na tržištu također nuditi beskuponske obveznice s dospijećem od godinu dana i nominalne vrijednosti 100 po cijeni 95.12.
  - Može li investitor ostvariti strategiju za arbitražu? Ako da, odredite ju. Pretpostavlja se da je dopuštena kratka pozicija u obveznici, odnosno izdavanje obveznica ili prodavanje obveznica koje ne posjedujete.

1.2.5. Duracija (trajanje) i imunizacija portfelja

- Vidjeli smo da varijabilne kamate vode do nesigurnosti u vidu budućih vrijednosti investiranja u obveznice, što može biti nepoželjno, ili čak neprihvatljivo (npr. mirovinski fondovi)

- **Cilj:** želimo naći *alat* koji će nam omogućiti **imunizaciju** takvih vrsta investicija:

  - U posebnom slučaju kada su kamatne stope nezavisne o dospijeću
  - U općem slučaju (opća vremenska struktura)

$\Longrightarrow$ duracija

Analiza osjetljivosti cijena obveznica o prinosu

Prisjetimo se: obveznice su *rizične* jer su cijene takvih financijskih instrumenata osjetljive na promjene u kamatnim stopama.

$\Rightarrow$ rizik kamatnih stopa

- Veća tržišna cijena povlači manji prinos do dospijeća (PDD).

Nedostatak: rizik reinvestiranja! PDD nije stvarni prinos koji ćemo ostvariti investiranjem u obveznicu po cijeni *C* $\longrightarrow$ nemamo garancije da ćemo tokove novca prije dospijeća moći *reinvestirati* po prinosu PDD.

- Kako *kvantificirati rizik* kamatnih stopa?

- Duracija (engl. Duration) je bolja mjera **vremenskih karakteristika** obveznice od vremena do dospijeća jer uzima u obzir i <u>veličinu</u> i <u>vrijeme do dospijeća</u> pojedinih novčanih tokova.

- Kako se cijene obveznica *mijenjaju* ovisno o promjeni kamatnih stopa?

- Ukoliko je **N** nominalna vrijednost kuponske obveznice s dospijećem T_N, $\boldsymbol{y(0)=y}$ trenutni prinos, $\boldsymbol{K_i}$**,** $\boldsymbol{i=1,2,\dots,M}$**,** iznosi kupona koji se isplaćuju u vremenima $T_1, T_2, \dots, T_M$, pri čemu je $T_M = T_N$, tada je <u>**trenutna**</u> cijena takve obveznice dana sa:

$$C(y) = K_1 e^{-T_1 y} + K_2 e^{-T_2 y} + \dots + (K_M + N) e^{-T_N y}$$

- **Duracija (**(kuponske) obveznice definira se kao:

$$\boxed{D(y) = \frac{1}{C(y)} \left(T_1 K_1 e^{-T_1 y} + T_2 K_2 e^{-T_2 y} + \dots + T_N \left(K_M + N \right) e^{-T_N y} \right)}$$

- Brojevi $\frac{K_1 e^{-T_1 y}}{C(y)}, \frac{K_2 e^{-T_2 y}}{C(y)}, \ldots, \frac{(K_M + N) e^{-T_1 y}}{C(y)}$ su nenegativni te je njihova suma jednaka jedan stoga na njih možemo gledati kao na pondere odnosno vjerojatnosti.

- Drugim riječima, duracija ujedno predstavlja vaganu mjeru prosjeka budućih vremena isplata, odnosno dospijeća (dakle, *to je neko vrijeme*), pri čemu su ponderi (težine) proporcionalni čistim sadašnjim vrijednostima novčanih tokova (kuponske isplate i nominalne vrijednosti).

- Duracija mjeri **osjetljivost cijene obveznice** na promjene u kamatnim stopama.

Računamo:

$$\frac{d}{dy}C(y) = -T_1K_1e^{-T_1y} - T_2K_2e^{-T_2y} - \ldots - T_N\left(K_M + N\right)e^{-T_Ny}$$

iz čega slijedi:

$$\boxed{\frac{d}{dy}C(y) = -D(y)C(y)}$$

- Ova se formula često uzima kao definicija duracije.

Svojstva duracije

- *inverzna relacija* između **<u>duracije i kupona</u>**

- beskuponska obveznica ima duraciju jednaku svom vremenu do dospijeća (vijeku same obveznice)

- *inverzna relacija* između **<u>prinosa do dospijeća i duracije</u>**

- duracija **linearne kombinacije portfelja je linearna kombinacija** duracija tih portfelja

- **Primjer.** Kuponska obveznica nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od šest godina i godišnjim kuponima u iznosu od 10, uz prinos 6% ima duraciju od 4.857 godina.

  Kuponska obveznica s dospijećem od šest godina, s istim iznosom godišnjih kupona i istim prinosom, ali drugačije nominalne vrijednosti, 500, ima duraciju od 5.616 godina.

- **Napomena.** Kuponsku obveznicu možemo promatrati kao *portfelj* beskuponskih obveznica različitih dospijeća