Sadržaj

6 FINANCIJSKA MATEMATIKA 186

6.1 Jednostavni kamatni račun . . . 186

6.1.1 Dekurzivni obračun kamata . . . 186

6.1.2 Anticipativni obračun kamata . . . 187

6.2 Složeni kamatni račun . . . 188

6.3 Relativna i konformna kamatna stopa . . . 193

6.4 Konačna (buduća) vrijednost prenumerando i postnumerando uplata ili isplata . . . 198

6.5 Početna (sadašnja) vrijednost prenumerando i postnumerando isplata (renti) . . . 202

6.6 Zajam . . . 205

6.6.1 Model otplate zajma uz jednake anuitete . . . 205

6.6.2 Model otplate zajma uz jednake otplatne kvote . . . 209

6.6.3 Model otplate zajma unaprijed dogovorenim anuitetima 210

6.7 Potrošački kredit . . . 212

6.8 Kontinuirano ukamaćivanje . . . 215

Poglavlje 6

FINANCIJSKA MATEMATIKA

6.1 Jednostavni kamatni račun

Smisao jednostavnog kamatnog računa je da se kamate obrčunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od iste glavnice.

6.1.1 Dekurzivni obračun kamata

Dekurzivni obračun kamata podrazumijeva da se kamate obračunavaju na kraju razdoblja od glavnice s početka razdoblja.
Uvodimo sljedeće oznake:

C_0	–	početna vrijednost (glavnica)
n	–	broj razdoblja ukamaćivanja
p	–	dekurzivni kamatnjak
C_n	–	konačna vrijednost na kraju n-tog razdoblja
K_n	–	kamata na kraju n-tog razdoblja
(ili K	–	ukupne kamate)

Uz dane oznake vrijedi:

$$C_n = C_0(1 + \frac{np}{100})$$
$$K_n = C_n - C_0$$
$$K_n = \frac{np}{100}C_0$$

Primjer 6.1. *Iznos od* 10000 *kn oroči se na* 5 *godina uz godišnji kamatnjak* 3*. Kolika je konačna vrijednost tog iznosa na kraju pete godine ako je obračun kamata jednostavan, godišnji i dekurzivan? Koliko iznose ukupne kamate na kraju* 5*. godine?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 10000 \\ n &= 5 \\ p &= 3(\%) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 &= ? \\ K_5 &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 &= C_0(1+\frac{np}{100}) = 10000(1+\frac{5\cdot 3}{100}) = 11500 \text{ kn} \\ K_5 &= C_5 - C_0 = 11500 - 10000 = 1500 \text{ kn} \\ (\text{ili } K_5 &= \frac{np}{100}C_0 = \frac{5\cdot 3}{100}\cdot 10000 = 1500 \text{ kn}) \end{aligned}$$

□

6.1.2 Anticipativni obračun kamata

Anticipativni obračun kamata podrazumijeva da se kamate obračunavaju na početku razdoblja od glavnice s kraja razdoblja.
Koristimo iste oznake kao i ranije, uz dodatak

q – anticipativni kamatnjak

Vrijedi:

$$\begin{aligned} K &= \frac{qn}{100}C_n \\ C_n &= \frac{100}{100-qn}C_0 \\ K &= C_n - C_0 \end{aligned}$$

Primjer 6.2. *Kolika je konačna vrijednost glavnice od* 15000 *kn na kraju pete godine uz* 5% *godišnjih kamata ako je obračun jednostavan, godišnji i anticipativan?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 15000 \\ n &= 5 \\ q &= 5 \\ \hline C_5 &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_5 &= \frac{100}{100-nq} C_0 = \frac{100}{100-5\cdot 5} \cdot 15000 = 20000 \text{ kn} \\ K &= C_5 - C_0 = 20000 - 15000 = 5000 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

6.2 Složeni kamatni račun

Dekurzivni obračun

Koristimo sljedeće oznake:

K_i	–	kamata na kraju i-te godine (nastala u toj godini)
C_i	–	glavnica na kraju i-te godine
r	–	dekurzivni kamatni faktor
$p(G)$	–	godišnji dekurzivni kamatnjak
C_n	–	konačna vrijednost glavnice nakon n godina
C_0	–	početna vrijednost glavnice
K	–	ukupne kamate

Vrijede sljedeće (osnovne) formule:

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{C_{i-1} \cdot p(G)}{100} \\ C_i &= C_{i-1} + K_i \\ r &= 1 + \frac{p(G)}{100} \\ C_n &= C_0 \cdot (r^n) \\ K &= C_0(r^n - 1) \\ K &= C_n - C_0 \\ C_0 &= \frac{C_n}{r^n} \end{aligned}$$

Ukratko:

- **konačna vrijednost glavnice:**

$$C_n = C_0 \cdot r^n$$

- **početna vrijednost glavnice:**

$$C_0 = \frac{C_n}{r^n}$$

Ako imamo zadani broj godina kapitalizacije (n), te početnu i konačnu vrijednost glavnice, dekurzivni kamatni faktor računamo po formuli

$$r = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}},$$

a ako imamo zadani dekurzivni kamatni faktor (r), te početnu i konačnu vrijednost glavnice, broj godina kapitalizacije računamo po formuli

$$n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log r}.$$

Zadatak 6.3. *U banku je danas uložen iznos od* 10000 *kn. Kolika je vrijednost tog uloga na kraju pete godine ako je godišnji kamatnjak* 3*, a obračun kamata dekurzivan, godišnji i složen?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 10000 \\ n &= 5 \\ p(G) &= 3 \\ \hline C_5 &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{p(G)}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1.03 \\ C_5 &= C_0 \cdot r^5 = 10000 \cdot (1.03)^5 = 11592.74 \text{ kn} \end{aligned}$$

□

Zadatak 6.4. *Iznos od* 10000 *kn oroči se na* 5 *godina. Ako je banka prve dvije godine primjenjivala godišnji kamatnjak* 3*, a u preostalom razdoblju* 2*, izračunajte konačnu vrijednost uloženog iznosa. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 10000 \\
n &= 5 \\
n_1 &= 2, \quad p_1(G) = 3 \\
n_2 &= 3, \quad p_2(G) = 2
\end{aligned}
$$

$$C_5 = ?$$

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 1 + \frac{p_1(G)}{100} = 1 + \frac{3}{100} = 1.03 \\
r_2 &= 1 + \frac{p_2(G)}{100} = 1 + \frac{2}{100} = 1.02 \\
C_n &= C_0 \cdot r_1^{n_1} \cdot r_2^{n_2} \\
C_5 &= C_0 \cdot r_1^2 \cdot r_2^3 = 10000 \cdot (1.03)^2 \cdot (1.02)^3 = 11258.36 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.5. *Jedno poduzeće duguje iznose od* 100000 *kn na kraju druge i* 200000 *kn na kraju treće godine. Kojim iznosom može to poduzeće podmiriti navedeno dugovanje krajem pete godine, ako je godišnji kamatnjak* 8*? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
D_1 &= 100000 \\
D_2 &= 200000 \\
p(G) &= 8
\end{aligned}
$$

$$C_5 = ?$$

$$
\begin{aligned}
r &= 1 + \frac{p(G)}{100} = 1 + \frac{8}{100} = 1.08 \\
C_5 &= D_1 \cdot r^3 + D_2 \cdot r^2 = 100000 \cdot (1.08)^3 + 200000 \cdot (1.08)^2 = 359251.20 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.6. *U banci je oročeno* 10000 *kn na* 5 *godina. Na kraju treće godine vlasnik računa je podigao iznos od* 5000 *kn. Koliko će na računu biti na kraju pete godine ako je godišnji kamatnjak za prve dvije godine* 4*, a za ostatak razdoblja* 5*? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 10000 \\
D_1 &= 5000 \\
p_1(G) &= 4 \Rightarrow r_1 = 1.04 \\
p_2(G) &= 5 \Rightarrow r_1 = 1.05
\end{aligned}
$$

$$C_5 = ?$$

$$C_5 = C_0 \cdot r_1^2 \cdot r_2^3 - D_1 \cdot r_2^2 = 12520.87 - 5512.5 = 7008.37 \text{ kn}$$

□

Zadatak 6.7. *Koliki iznos treba oročiti danas na* 10 *godina uz godišnji kamatnjak* 4 *za prve četiri godine, a* 3 *u preostalom razdoblju, ako se želi da konačna vrijednost bude* 30000 *kn? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
C_{10} &= 30000 \\
n &= 10 \\
p_1(G) &= 4 \Rightarrow r_1 = 1.04 \\
p_2(G) &= 3 \Rightarrow r_1 = 1.03
\end{aligned}
$$

$$C_0 = ?$$

$$
\begin{aligned}
C_{10} &= C_0 \cdot r_1^4 \cdot r_2^6 \quad \Rightarrow \\
C_0 &= \frac{C_{10}}{r_1^4 r_2^6} = \frac{30000}{(1.04)^4 (1.03)^6} = 21476.55 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.8. *Poduzeće duguje iznos od* 100000 *kn na kraju treće i* 150000 *kn na kraju pete godne od danas. Kojim se iznosom može podmiriti cijeli dug*

a) *danas*

b) *na kraju druge godine*

c) *na kraju treće godine*

d) *na kraju šeste godine*

od danas ako je godišnji kamatnjak za prve dvije godine 8*, a u preostalom razdoblju* 7*? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
D_3 &= 100000 \\
D_5 &= 150000 \\
p_1(G) &= 8 \Rightarrow r_1 = 1.08 \\
p_2(G) &= 7 \Rightarrow r_1 = 1.07
\end{aligned}
$$

a)

$$C_0 = \frac{D_3}{r_1^2 r_2} + \frac{D_5}{r_1^2 r_2^3} = \frac{100000}{1.08^2 \cdot 1.07} + \frac{150000}{1.08^2 \cdot 1.07^3} = 185101.70 \text{ kn}$$

b)

$$C_2 = \frac{D_3}{r_2} + \frac{D_5}{r_2^3} = \frac{100000}{1.07} + \frac{150000}{1.07^3} = 215902.63 \text{ kn}$$

c)

$$C_3 = D_3 + \frac{D_5}{r_2^2} = 100000 + \frac{150000}{1.07^2} = 231015.81 \text{ kn}$$

d)

$$C_6 = D_3 \cdot r_2^3 + D_5 \cdot r_2 = 100000 \cdot 1.07^3 + 150000 \cdot 1.07 = 283004.30 \text{ kn}$$

□

Zadatak 6.9. *Iznos od* 20000 *kn oroči se na* 3 *godine. Ako su ukupne kamate jednake* 3152.50 *kn, uz koju je godišnju stopu izvršeno oročenje? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 20000 \\ n &= 3 \\ K &= 3152.50 \\ \hline p &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 &= C_0 + K = 20000 + 3152.50 = 23152.50 \\
C_3 &= C_0 \cdot r^3 \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{C_3}{C_0} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{C_3}{C_0}} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{23152.50}{20000}} = 1.05 \\
r &= 1 + \frac{p}{100} \quad \Rightarrow \quad p = (r-1) \cdot 100 = 0.05 \cdot 100 = 5
\end{aligned}$$

□

Općenito vrijedi formula:

$$p = 100 \cdot (\sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1).$$

6.3 Relativna i konformna kamatna stopa

Relativna i konformna kamatna stopa koriste se ako osnovno razdoblje ukamaćivanja nije jednake duljine kao osnovno razdoblje na koje se odnosi **nominalna** (propisana) kamatna stopa.

Neka je:

d_1 – duljina vremenskog intervala na koji se odnosi nominalna kamatna stopa

d – duljina vremenskog intervala u kojem se obavlja ukamaćivanje.

Tada je

$$m = \frac{d_1}{d}$$

broj osnovnih razdoblje ukamaćivanja u razdoblju na koje se odnosi nominalna kamatna stopa.

Definiramo:

- RELATIVNI KAMATNJAK

$$p_R = \frac{p}{m}$$

- KONFORMNI KAMATNJAK

$$r_K = r^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{r}$$

$$\Rightarrow \quad p_K = 100(r_K - 1).$$

Napomena:
Ako drugačije nije naglašeno, koristi se konformni kamatnjak!

Zadatak 6.10. *Na koju vrijednost naraste* 50000 *kn na kraju osme godine ako je godišnja kamatna stopa* 4%*? Obračun kamata je*

a) *polugodišnji,*

b) *dvogodišnji,*

c) *kvartalni.*

Koristite relativni kamatnjak.

Rješenje.

$$\begin{aligned} C_0 &= 50000 \\ n &= 8 \\ p &= 4 \text{ godišnje} \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} d_1 &= 1 \text{ godina} \\ d &= 1 \text{ polugodište} \\ m &= \frac{d_1}{d} = \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ pol}} = \frac{2 \text{ pol}}{1 \text{ pol}} = 2 \\ p_R &= \frac{p}{m} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad r_R = 1.02 \\ n &= 8 \text{ godina} = 16 \text{ polugodišta} \\ C_{16} &= C_0 \cdot r_R^{16} = 68639.29 \text{ kn} \end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1 \text{ godina} \\
d &= 2 \text{ godine} \\
m &= \frac{d_1}{d} = \frac{1 \text{ g}}{2 \text{ g}} = \frac{1}{2} \\
p_R &= \frac{p}{m} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \quad \Rightarrow \quad r_R = 1.08 \\
n &= 8 \text{ godina} = 4 \text{ dvogodišta} \\
C_4 &= C_0 \cdot r_R^4 = 68024.45 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
d_1 &= 1 \text{ godina} \\
d &= 1 \text{ kvartal} \\
m &= \frac{d_1}{d} = \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ kvartal}} = \frac{4 \text{ kvartala}}{1 \text{ kvartal}} = 4 \\
p_R &= \frac{p}{m} = \frac{4}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad r_R = 1.01 \\
n &= 8 \text{ godina} = 32 \text{ kvartala} \\
C_{32} &= C_0 \cdot r_R^{32} = 68747.03 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.11. *Neka osoba uloži u banku početkom prve godine* 50000 *eura, a početkom četvrte godine podigne* 20000 *eura. Koliku će svotu ta osoba imati u banci krajem četvrte godine ako je polugodišnji kamatnjak* 3%*, a obračun kamata*

a) *polugodišnji,*

b) *mjesečni.*

Koristite relativni kamatnjak.

Rješenje.

a) Jedno obračunsko razdoblje je jedno polugodište pa sve preračunavamo u polugodišta.

$$
\begin{aligned}
p &= 3 \quad \Rightarrow \quad r = 1.03 \\
n &= 8 \text{ polugodišta} \\
C_8 &= 50000 \cdot r^8 - 20000 \cdot r^2 = 42120.50 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

b) Jedno obračunsko razdoblje je jedan mjesec pa sve preračunavamo u mjesece.

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ pol}}{1 \text{ mj}} = \frac{6 \text{ mj}}{1 \text{ mj}} = 6 \\
p_R &= \frac{p}{m} = \frac{3}{6} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad r_R = 1.005 \\
n &= 4 \text{ godine} = 48 \text{ mjeseci} \\
C_{48} &= 50000 \cdot r^{48} - 20000 \cdot r^{12} = 42290.90 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.12. *Neka osoba uloži u banku početkom prve godine* 50000 *eura, a početkom treće i četvrte godine podigne po* 10000 *eura. Koliku će svotu ta osoba imati u banci na kraju pete godine ako je obračun*

a) *godišnji,*

b) *mjesečni,*

a godišnja kamatna stopa 9%*? Primijenjujemo konformni kamatnjak.*

Rješenje.

a)

$$
\begin{aligned}
p &= 9 \quad \Rightarrow \quad r = 1.09 \\
C_5 &= 50000 \cdot r^5 - 10000 \cdot r^3 - 10000 \cdot r^2 = 52099.90 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

b) Jedno obračunsko razdoblje je jedan mjesec pa sve preračunavamo u mjesece.

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ mj}} = \frac{12 \text{ mj}}{1 \text{ mj}} = 12 \\
r_K &= r^{\frac{1}{m}} = r^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{1.09} = 1.00721 \\
n &= 5 \text{ godina} = 60 \text{ mjeseci} \\
C_{60} &= 50000 \cdot r_K^{60} - 10000 \cdot r_K^{36} - 10000 \cdot r_K^{24} = 52099.90 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

<u>Važno:</u>
Primijetimo da se, za razliku od relativnog, s konformnim kamatnjakom dobiva uvijek isti iznos, bez obzira na vremenski interval između obračuna. □

Zadatak 6.13. *Neka osoba uloži u banku* 10000 *eura. Koliku će svotu imati ta osoba u banci krajem pete godine ako banka prve tri godine primjenjuje godišnju kamatnu stopu* 10%*, a zadnje dvije* 7%*? Obračun kamata je složen, polugodišnji i dekurzivan.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1\text{ god}}{1\text{ polug}} = \frac{2\text{ polug}}{1\text{ polug}} = 2\\
r_1 &= 1.1 \quad \Rightarrow \quad r_{K1} = 1.1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1.1} = 1.04881\\
r_2 &= 1.07 \quad \Rightarrow \quad r_{K2} = 1.07^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1.07} = 1.03441\\
n &= 5\text{ godina} = 10\text{ polugodišta}\\
C_{10} &= 10000 \cdot r_{K1}^6 \cdot r_{K2}^4 = 15238.62\text{ kn}
\end{aligned}
$$

□

Zadatak 6.14. *Neka osoba uloži u banku početkom prve godine* 50000 *kn, a početkom četvrte podigne* 20000 *kn. Koliku će svotu ta osoba imati u banci krajem četvrte godine ako je godišnji kamatnjak* 2*, a obračun kamata složen, dekurzivan, mjesečni, uz*

a) *relativni kamatnjak,*

b) *konformni kamatnjak?*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
n &= 4\text{ god} = 48\text{ mj}\\
p(G) &= 2 \Rightarrow r = 1.02\\
\hline
C_{48} &= ?
\end{aligned}
$$

Godišnju kamatnu stopu moramo pretvoriti u mjesečnu.

a)

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1\text{ god}}{1\text{ mj}} = \frac{12\text{ mj}}{1\text{ mj}} = 12 \Rightarrow\\
p_R(M) &= \frac{p(G)}{m} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0.166666667 \Rightarrow r_R = 1.001666667\\
C_{48} &= 50000 \cdot r_R^{48} - 20000 \cdot r_R^{12} =\\
&= 50000 \cdot (1.001666667)^{48} - 20000 \cdot (1.001666667)^{12} =\\
&= 54160.75 - 20403.69 = 33757.06\text{ kn}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
m = 12 \Rightarrow r_K &= r^{\frac{1}{12}} = 1.02^{\frac{1}{12}} \\
C_{48} &= 50000 \cdot r_K^{48} - 20000 \cdot r_K^{12} = \\
&= 50000 \cdot (r^{\frac{1}{12}})^{48} - 20000 \cdot (r^{\frac{1}{12}})^{12} = \\
&= 50000 \cdot r^4 - 20000 \cdot r = \\
&= 50000 \cdot 1.02^4 - 20000 \cdot 1.02 = \\
&= 54121.608 - 20400 = 33721.61 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

□

6.4 Konačna (buduća) vrijednost prenumerando i postnumerando uplata ili isplata

Pretpostavimo da imamo višekratne jednake uloge u određenim, jednakim vremenskim intervalima. Pitamo se kolika je konačna vrijednost svih tih uloga na kraju n-tog razdoblja.

Uvodimo sljedeće oznake:

- R – konstantna uplata (isplata) u određenim, jednakim vremenskim intervalima
- n – broj razdoblja ukamaćivanja
- p – konstantni godišnji kamatnjak
- S_n – konačna vrijednost prenumerando uplata (isplata) na kraju n-tog razdoblja
- S'_n – konačna vrijednost postnumerando uplata (isplata) na kraju n-tog razdoblja

PRENUMERANDO uplate (isplate) su uplate (isplate) koje se izvršavaju uvijek na početku vremenskog razdoblja. Konačna vrijednost na kraju n-tog razdoblja uplata (isplata) izvršenih početkom svakog od n razdoblja (ili kraće, **konačna vrijednost n prenumerando uplata (isplata)**) jednaka je:

$$\begin{aligned} S_n &= R \cdot r^n + R \cdot r^{n-1} + \ldots + R \cdot r^2 + R \cdot r = \\ &= R \cdot r \cdot (r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1) = \\ &= R \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = R \cdot r \cdot \tfrac{r^n - 1}{r - 1}}$$

POSTNUMERANDO uplate (isplate) su uplate (isplate) koje se izvršavaju uvijek na kraju vremenskog razdoblja. Konačna vrijednost na kraju n-tog razdoblja uplata (isplata) izvršenih krajem svakog od n razdoblja (ili kraće, **konačna vrijednost n postnumerando uplata (isplata)**) jednaka je:

$$\begin{aligned} S_n' &= R \cdot r^{n-1} + R \cdot r^{n-2} + \ldots + R \cdot r + R = \\ &= R \cdot (r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + r + 1) = \\ &= R \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n' = R \cdot \tfrac{r^n - 1}{r - 1}}$$

Zadatak 6.15. *Osoba ulaže u banku početkom svake godine po* 15000 *kn kroz pet godina. Ako je godišnji kamatnjak* 7*, kolika je konačna vrijednost svih uplata na kraju pete, a kolika na kraju osme godine? Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$R = 15000$$
$$p = 7 \Rightarrow r = 1.07$$

$$S_5 = ?$$
$$C_8 = ?$$

$$S_5 = R \cdot r \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1} = 15000 \cdot 1.07 \cdot \frac{1.07^5 - 1}{1.07 - 1} = 92299.36 \text{ kn}$$
$$C_8 = S_5 \cdot r^3 = 92299.36 \cdot 1.07^3 = 113070.67 \text{ kn}$$

□

Zadatak 6.16. *Neka osoba početkom svake godine u prve tri godine uplaćuje po* 10000 *eura uz* 10% *godišnje kamatne stope, a u daljnjih sedam godina po* 15000 *eura uz* 8% *godišnje kamatne stope. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju petnaeste godine ako se i dalje primjenjuje godišnja kamatna stopa od* 8%*?*

Rješenje.

$$R_1 = 10000$$
$$R_2 = 15000$$
$$p_1 = 10 \Rightarrow r_1 = 1.1$$
$$p_2 = 8 \Rightarrow r_2 = 1.08$$

$$C_{15} = ?$$

$$S_3 = R_1 \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^3 - 1}{r_1 - 1} = 10000 \cdot 1.1 \cdot \frac{1.1^3 - 1}{1.1 - 1} = 36410$$
$$S_7 = R_2 \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^7 - 1}{r_2 - 1} = 15000 \cdot 1.08 \cdot \frac{1.08^7 - 1}{1.08 - 1} = 144549.42$$
$$C_{15} = S_3 \cdot r_2^{12} + S_7 \cdot r_2^5 = 304077.09 \text{ eur}$$

□

Zadatak 6.17. *Osoba ulaže u banku na ime stambene štednje krajem svakog mjeseca po* 500 *kn. Koliku će svotu ta osoba imati u banci na kraju godine ako joj se u tom trenutku uplate i državna poticajna sredstva od* 1250 *kn? Godišnji kamatnjak je* 3*, a obračun kamata mjesečni, složen i dekurzivan?*

Rješenje.

$$
\begin{array}{l}
R = 500 \\
n = 12 \text{ mjeseci} \\
p = 3 \Rightarrow r = 1.03 \\
\hline
C_{12} = ?
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ mj}} = \frac{12}{1} = 12 \\
r_K &= r^{\frac{1}{m}} = 1.03^{\frac{1}{12}} = 1.00246627 \\
S'_{12} &= R \cdot \frac{r_K^{12} - 1}{r_K - 1} = 6082.06 \\
C_{12} &= S'_{12} + 1250 = 7332.06 \text{ kn}
\end{aligned}
$$

$\square$

Zadatak 6.18. *Osoba treba na kraju pete godine platiti iznos od* 30000 *eura. U dogovoru s vjerovnikom dužnik se obvezao da će krajem svake godine kroz pet godina uplaćivati određenu svotu. Koja je to svota ako vjerovnik traži* 8% *godišnjih kamata, a obračun je godišnji, složen i dekurzivan?*

Rješenje.

$$
\begin{array}{l}
S'_5 = 30000 \\
n = 5 \\
p = 8 \Rightarrow r = 1.08 \\
\hline
R = ?
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
S'_5 &= R \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1} \Rightarrow \\
R &= S'_5 \cdot \frac{r - 1}{r^5 - 1} = 30000 \cdot \frac{1.08 - 1}{1.08^5 - 1} = 5113.69 \text{ eur}
\end{aligned}
$$

$\square$

Zadatak 6.19. *Neka je osoba uplaćivala u banku početkom svake godine po* 5000 *eura kroz* 5 *godina. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju desete godine ako je banka prve tri godine primjenjivala kamatnu stopu* 6%*, u preostalom razdoblju* 5%*, i ako je osoba na kraju sedme godine podigla iznos od* 10000 *eura?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} R &= 5000 \\ n &= 5 \\ p_1 &= 6 \Rightarrow r_1 = 1.06 \\ p_2 &= 6 \Rightarrow r_2 = 1.05 \end{aligned}$$

$$C_{10} = ?$$

$$\begin{aligned} S_3 &= R \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^3 - 1}{r_1 - 1} = 16873.08 \\ S_2 &= R \cdot r_2 \cdot \frac{r_2^2 - 1}{r_2 - 1} = 10762.50 \\ C_{10} &= S_3 \cdot r_2^7 + S_2 \cdot r_2^5 - 10000 \cdot r_2^3 = 25901.85 \text{ eur} \end{aligned}$$

□

6.5 Početna (sadašnja) vrijednost prenumerando i postnumerando isplata (renti)

Pretpostavimo da imamo višekratne jednake isplate u određenim, jednakim vremenskim intervalima. Pitamo se kolika je početna vrijednost svih tih uloga na početku prvog razdoblja.

Dodatno, koristimo još i ove oznake:

A_n – početna vrijednost postnumerando isplata
A'_n – početna vrijednost prenumerando isplata

Početna vrijednost na početku prvog razdoblja isplata izvršenih krajem svakog od n razdoblja (ili kraće, **početna vrijednost n postnumerando isplata**) jednaka je:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{R}{r} + \frac{R}{r^2} + \ldots + \frac{R}{r^n} = \\ &= \frac{R}{r^n}(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + 1) = \\ &= \frac{R}{r^n} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{A_n = \tfrac{R}{r^n} \cdot \tfrac{r^n-1}{r-1}}$$

Početna vrijednost na početku prvog razdoblja isplata izvršenih početkom svakog od n razdoblja (ili kraće, **početna vrijednost n prenumerando isplata**) jednaka je:

$$\begin{aligned} A'_n &= R + \frac{R}{r} + \ldots + \frac{R}{r^{n-1}} = \\ &= \frac{R}{r^{n-1}}(r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + 1) = \\ &= \frac{R}{r^{n-1}} \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \end{aligned}$$

$$\boxed{A'_n = \tfrac{R}{r^{n-1}} \cdot \tfrac{r^n-1}{r-1}}$$

Zadatak 6.20. *Koliki iznos treba danas uložiti u banku da se osigura* 5 *godišnjih postnumerando isplata po* 30000 *kn i na kraju šeste godine jednokratna isplata od* 50000 *kn? Obračun kamata je složen, godišnji i dekurzivan, a godišnja kamatna stopa* 8%.

Rješenje.

$$R = 30000$$
$$n = 5$$
$$p = 8 \Rightarrow r = 1.08$$

$$C_0 = ?$$

$$C_0 = A_5 + \frac{50000}{r^6} = \frac{R}{r^5} \cdot \frac{r^5 - 1}{r - 1} + \frac{50000}{r^6} = 151289.78 \text{ kn}$$

□

Zadatak 6.21. *Početkom svake godine osoba uplaćuje u banku po* 10000 *eura kroz tri godine. Na početku četvrte godine počinje joj se isplaćivati polugodišnja renta početkom svakog polugodišta kroz dvije godine. Izračunajte visinu rente ako banka za prve tri godine primjenjuje godišnju kamatnu stopu* 6%*, a u preostalom razdoblju* 5%*. Obračun kamata je polugodišnji složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$R_1 = 10000$$
$$p_1 = 6 \Rightarrow r_1 = 1.06 \Rightarrow r_{K_1} = \sqrt{1.06}$$
$$p_2 = 5 \Rightarrow r_2 = 1.05 \Rightarrow r_{K_2} = \sqrt{1.05}$$

$$R_2 = ?$$

Budući da se koristi konformni kamatnjak, S_3 možemo izračunati i tako da obračunavamo gorišnje kamate:

$$S_3 = R_1 \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^3 - 1}{r_1 - 1} = 33746.16 \text{ kn}$$

S druge strane, početnu vrijednost prenumerando rente, A'_4 moramo računati obračunavajući kamatnu stopu polugodišnje. Koristeći da S_3 mora biti jednako A'_4 dobivamo:

$$A'_4 = \frac{R_2}{r_{K_2}^3} \cdot \frac{r_{K_2}^4 - 1}{r_{K_2} - 1} = 33746.16$$

$$\Rightarrow R_2 = 33746.16 \cdot \frac{r_{K_2}^3(r_{K_2}-1)}{r_{K_2}^4 - 1} = 8747.72 \text{ kn}$$

Napomena:
Uvjerimo se još jednom da je, zbog konformnosti kamatne stope, svejedno da li računamo S_3 preko polugodišnjeg ili preko godišnjeg obračuna:

$$S_3 = R_1 \cdot r_{K_1}^6 + R_1 \cdot r_{K_1}^4 + R_1 \cdot r_{K_1}^2 = R_1 \cdot r_{K_1}^2 \cdot (r_{K_1}^4 + r_{K_1}^2 + 1) =$$
$$= R_1 \cdot r_1 \cdot (r_1^2 + r_1 + 1) = R_1 \cdot r_1 \cdot \frac{r_1^3 - 1}{r_1 - 1}$$

□

6.6 Zajam

Model zajma temelji se na činjenici da početna vrijednost svih uplaćenih anuiteta mora biti jednaka visini odobrenog zajma.

6.6.1 Model otplate zajma uz jednake anuitete

Koristimo sljedeće oznake:

$C = C_0$	–	visina zajma
a	–	jednaki anuiteti
p	–	konstantni dekurzivni kamatnjak
n	–	broj razdoblja otplate zajma
$r = 1 + \frac{p}{100}$	–	dekurzivni kamatni faktor
C_k	–	ostatak duga na kraju k-tog razdoblja
I_k	–	kamata na kraju k-tog razdoblja nastala u tom razdoblju
R_k	–	otplatna kvota na kraju k-tog razdoblja

Vrijedi:

$$C = C_0 = a \cdot \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} \quad \Rightarrow \quad a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$$

$$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$$

$$R_k = a - I_k$$

$$C_k = C_{k-1} - R_k$$

Navedene formule omogućavaju nam sastavljanje otplatne tablice zajma.

Lako se izvedu još i ove formule:

$$R_n = C_{n-1}$$
$$R_k = R_{k-1} \cdot r$$
$$C_k = a \cdot \frac{r^{n-k} - 1}{r^{n-k}(r-1)}$$

Smisao otplate zajma je da se kroz anuitete otplati sam zajam ali i kamate stvorene u svim razdobljima. Stoga vrijedi:

$$\sum_{1}^{n} a = \sum_{1}^{n} I_k + \sum_{1}^{n} R_k = \sum_{1}^{n} I_k + C$$

Zadatak 6.22. *Zajam od* 30000 *kn odobren je na* 3 *godine uz godišnji kamatnjak* 10 *i plaćanje jednakih anuiteta krajem godine. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$C = 30000$$
$$p = 10 \Rightarrow r = 1.1$$
$$n = 3$$

$$a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1} = 30000 \cdot \frac{1.1^3(1.1-1)}{1.1^3 - 1} = 12063.44$$

1. godina:

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{30000 \cdot 10}{100} = 3000$$
$$R_1 = a - I_1 = 12063.44 - 3000 = 9063.44$$
$$C_1 = C_0 - R_1 = 30000 - 9063.44 = 20936.56$$

2. godina:

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{20936.56 \cdot 10}{100} = 2093.66$$
$$R_2 = a - I_2 = 12063.44 - 2093.66 = 9969.79$$
$$C_2 = C_1 - R_2 = 20936.56 - 9969.79 = 10966.77$$

3. godina:

$$I_3 = \frac{C_2 \cdot p}{100} = \frac{10966.77 \cdot 10}{100} = 1096.68$$
$$R_3 = a - I_3 = 12063.44 - 1096.68 = 10966.77$$
$$C_3 = C_2 - R_3 = 10966.77 - 10966.77 = 0$$

Konačno, otplatna tablica izgleda ovako:

k	a	I_k	R_k	C_k
0	–	–	–	30000
1	12063.44	3000	9063.44	20936.56
2	12063.44	2093.66	9969.79	10966.77
3	12063.44	1096.68	10966.77	0
$\sum$	36190.33	6190.33	30000	

□

Zadatak 6.23. *Zajam od* 100000 *kn odobren je na* 2 *godine uz godišnji kamatnjak* 10 *i plaćanje jednakih anuiteta krajem polugodišta. Sastavite otplatnu tablicu ako je obračun složen, dekurzivan i polugodišnji.*

Rješenje.

$$C = 100000$$
$$p(G) = 10 \Rightarrow r = 1.1$$
$$n = 2 \text{ god} = 4 \text{ polugodišta}$$

$$m = \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ pol}} = \frac{2 \text{ pol}}{1 \text{ pol}} = 2 \Rightarrow r_K = r^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1.1} \Rightarrow p_K = 100(\sqrt{1.1} - 1)$$
$$a = C \cdot \frac{r_K^4(r_K - 1)}{r_K^4 - 1} = C \cdot \frac{r^2(r_K - 1)}{r^2 - 1} = 100000 \cdot \frac{1.1^2(\sqrt{1.1} - 1)}{1.1^2 - 1} = 28123.19$$

Koristeći formule

$$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p_K}{100},$$
$$R_k = a - I_k,$$
$$C_k = C_{k-1} - R_k,$$

dobivamo sljedeću otplatnu tablicu:

k	a	I_k	R_k	C_k
0	–	–	–	100000
1	28123.19	4880.88	23242.31	76757.69
2	28123.19	3746.45	24376.74	52380.95
3	28123.19	2556.65	25566.54	26814.41
4	28123.19	1308.78	26814.41	0
$\sum$	112492.76	12492.76	100000	

$\square$

Zadatak 6.24. *Zajam od* 100000 *kn treba otplatiti u dvije godine jednakim anuitetima krajem polugodišta. Koliki su anuiteti ako se prve godine primjenjuje mjesečni kamatnjak* 1.1*, a druge godine godišnji kamatnjak* 10*. Obračun kamata je složen, dekurzivan i polugodišnji. Primijenite relativni kamatnjak!*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C &= 100000 \\ p_1(M) &= 1.1 \\ p_2(G) &= 10 \\ n &= 2 \text{ god} = 4 \text{ polugodišta} \end{aligned}$$

Kako je obračun polugodišnji, oba kamatnjaka moramo pretvoriti u polugodišnje i to relativno.

$$m_1 = \frac{1 \text{ mj}}{1 \text{ pol}} = \frac{1 \text{ mj}}{6 \text{ mj}} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow p_{R_1} = \frac{p_1 M}{m_1} = \frac{1.1}{\frac{1}{6}} = 6.6 \quad \Rightarrow r_{R_1} = 1.066$$

$$m_2 = \frac{1 \text{ god}}{1 \text{ pol}} = \frac{2 \text{ pol}}{1 \text{ pol}} = 2 \quad \Rightarrow p_{R_2} = \frac{p_2 G}{m_2} = \frac{10}{2} = 5 \quad \Rightarrow r_{R_2} = 1.05$$

Anuitete ćemo izračunati tako da izjednačimo visinu zajma sa početnom vrijednosti svih uplaćenih anuiteta:

$$C = \frac{a}{r_{R_1}} + \frac{a}{r_{R_1}^2} + \frac{a}{r_{R_1}^2 r_{R_2}} + \frac{a}{r_{R_1}^2 r_{R_2}^2} \quad / \cdot r_{R_1}^2 r_{R_2}^2$$

$$\begin{aligned} C \cdot r_{R_1}^2 r_{R_2}^2 &= a \cdot r_{R_1} r_{R_2}^2 + a \cdot r_{R_2}^2 + a \cdot r_{R_2} + a \\ &= a \cdot (r_{R_1} r_{R_2}^2 + r_{R_2}^2 + r_{R_2} + 1) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \frac{C \cdot r_{R_1}^2 r_{R_2}^2}{r_{R_1} r_{R_2}^2 + r_{R_2}^2 + r_{R_2} + 1} = 28948.72 \text{ kn}$$

$\square$

6.6.2 Model otplate zajma uz jednake otplatne kvote

U ovom modelu otplate zajma u svakom razdoblju otplati se isti dio zajma (glavnice) i pripadna kamata. Dakle otplatne kvote su iste za svako razdoblje, a različiti su anuiteti.

Koristimo sljedeće oznake:

$C = C_0$	–	visina zajma
a_k	–	anuitet na kraju k-tog razdoblja
p	–	konstantni dekurzivni kamatnjak
n	–	broj razdoblja otplate zajma
$r = 1 + \frac{p}{100}$	–	dekurzivni kamatni faktor
C_k	–	ostatak duga na kraju k-tog razdoblja
I_k	–	kamata na kraju k-tog razdoblja nastala u tom razdoblju
R	–	jednake otplatne kvote

Vrijedi:

$$R = \frac{C}{n}$$

$$I_k = \frac{C_{k-1} \cdot p}{100}$$

$$a_k = R + I_k$$

$$C_k = C_{k-1} - R$$

$$\text{ili alternativno: } C_k = C(1 - \tfrac{k}{n})$$

Zadatak 6.25. *Zajam od* 100000 *kn odobren je na* 2 *godine uz* 10% *godišnjih kamata i iste otplatne kvote. Sastavite otplatnu tablicu. Obračun kamata je godišnji, složen i dekurzivan.*

Rješenje.

$$C = 100000$$
$$p(G) = 10 \Rightarrow r = 1.1$$
$$n = 2$$

$$R = \frac{C}{n} = \frac{100000}{2} = 50000$$

1. godina:

$$I_1 = \frac{C_0 \cdot p}{100} = \frac{100000 \cdot 10}{100} = 10000$$
$$a_1 = R + I_1 = 50000 + 10000 = 60000$$
$$C_1 = C_0 - R = 100000 - 50000 = 50000$$

2. godina:

$$I_2 = \frac{C_1 \cdot p}{100} = \frac{50000 \cdot 10}{100} = 5000$$
$$a_2 = R + I_2 = 50000 + 5000 = 55000$$
$$C_2 = C_1 - R_2 = 50000 - 50000 = 0$$

dobivamo sljedeću otplatnu tablicu:

k	a_k	I_k	R	C_k
0	–	–	–	100000
1	60000	10000	50000	50000
2	55000	50000	50000	0
$\sum$	115000	15000	100000	

□

6.6.3 Model otplate zajma unaprijed dogovorenim anuitetima

U ovom modelu zajam C treba amortizirati dogovorenim jednakim anuitetima a krajem svakog razdoblja uz kamatnjak p. Pitamo se koliko je **vrijeme amortizacije**, tj. koliko će anuiteta trebati ukupno uplatiti.
Iz

$$a = C \cdot \frac{r^n(r-1)}{r^n - 1}$$

slijedi da je **vrijeme amortizacije**:

$$\boxed{n = \frac{\ln a - \ln[a - C(r-1)]}{\ln r}}$$

Ukoliko n nije cijeli broj, zaokružujemo ga na prvi manji, uz napomenu da je vrijeme amortizacije $n+1$. Na kraju računamo koliko mora iznositi posljednji, $(n+1)$. anuitet (svi prethodni anuiteti iznose a!). Taj anuitet naziva se još i **krnji anuitet** i označava se sa a'_{n+1}.

$$\boxed{a'_{n+1} = C \cdot r^{n+1} - a \cdot r \cdot \tfrac{r^n-1}{r-1}}$$

Zadatak 6.26. *Poduzeće traži zajam od* 200000 *kn uz* 9% *godišnjih kamata i može plaćati anuitet od* 50000 *kn krajem godine. Odredite vrijeme amortizacije.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C &= 200000 \\ p &= 9 \Rightarrow r = 1.09 \\ a &= 50000 \\ n &= 2 \text{ god} = 4 \text{ polugodišta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\ln a - \ln[a - C(r-1)]}{\ln r} = \\ &= \frac{\ln 50000 - \ln[50000 - 200000(1.09-1)]}{\ln 1.09} = \\ &= 5.179 \text{ godina} \end{aligned}$$

Krnji anuitet:

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= C \cdot r^{n+1} - a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r-1} \quad \Rightarrow \\ a'_6 &= C \cdot r^6 - a \cdot r \cdot \frac{r^5-1}{r-1} = \\ &= 200000 \cdot 1.09^6 - 50000 \cdot 1.09 \cdot \frac{1.09^5 - 1}{1.09 - 1} = \\ &= 9253.29 \text{ kn} \end{aligned}$$

Dakle, da bi se otplatio zajam od 200000 kn uz anuitete od 50000 kn, potrebno je krajem svake od 5 godina uplatiti anuitet od 50000 kn i još na kraju 6. godine 5253.29 kn. □

6.7 Potrošački kredit

Potrošački kredit predstavlja primjer jednostavnog i anticipativnog obračuna kamata.

Koristimo sljedeće oznake:

C	–	iznos odobrenog potrošačkog kredita
P	–	udio u gotovini
C_1	–	iznos stvarnog potrošačkog kredita
$\overline{K}$	–	ukupna kamata
C_2	–	ukupno dugovanje
R	–	mjesečna rata
p	–	postotak udjela u gotovini
k	–	kamatni koeficijent
m	–	broj **mjeseci** na koji je odobren potrošački kredit
q	–	godišnji anticipativni kamatnjak

Ukupno dugovanje po potrošačkom kreditu dobivamo kada od iznosa odobrenog potrošačkog kredita C oduzmemo udio u gotovini P i dodamo ukupne kamate $\overline{K}$:

	iznos odobrenog potrošačkog kredita	C
-	udio u gotovini	P
	iznos stvarnog potrošačkog kredita	C_1
+	ukupne kamate	$\overline{K}$
	ukupno dugovanje	C_2

Vrijedi:

$$P = C \cdot \frac{p}{100}$$
$$\overline{K} = C_1 \cdot \frac{k}{100}$$
$$R = \frac{C_2}{m}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} k = \frac{(m+1)\cdot q}{24} \\ C \cdot (1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{k}{100}) = R \cdot m \end{array}}$$

Napomena:

Obično se u praksi uzima da mjesečna rata može iznositi najviše $1/3$ mjesečne plaće.

Zadatak 6.27. *Potrošacki kredit u iznosu od* 50000 *eura banka je odobrila uz rok otplate od* 4 *godine, godišnju anticipativnu kamatnu stopu* 15% *i udjel u gotovini od* 30%*. Izračunajte iznos udjela u gotovini, ukupne kamate i iznos mjesečne rate.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} C &= 50000 \\ m &= 4 \text{ godine} = 48 \text{ mjeseci} \\ p &= 30\% \\ q &= 15\% \\ \hline P, \overline{K}, R &= ? \end{aligned}$$

$$P = C \cdot \frac{p}{100} = 50000 \cdot \frac{30}{100} = 15000$$

Za računanje ukupne kamate $\overline{K}$ potrebno je najprije izračunati iznos stvarnog potrošačkog kredita C_1 i kamatni koeficijent k:

$$C_1 = C - P = 50000 - 15000 = 35000$$
$$k = \frac{(m+1)\cdot q}{24} = \frac{49 \cdot 15}{24} = 30.625$$

$$\Rightarrow \overline{K} = C_1 \cdot \frac{k}{100} = 35000 \cdot \frac{30.625}{100} = 10718.75$$

Za računanje mjesečne rate R potrebno je najprije izračunati ukupno dugovanje C_2:

$$C_2 = C_1 + \overline{K} = 35000 + 10718.75 = 45718.75$$
$$\Rightarrow R = \frac{C_2}{m} = \frac{45718.75}{48} = 952.47$$

□

Zadatak 6.28. *Na koje je vrijeme odobren potrošacki kredit od* 30000*, ako je postotak udjela u gotovini* 20*, godišnja anticipativna kamatna stopa* 16%*,a mjesečna rata* 1166.67 *eura.*

Rješenje.

$$C = 30000$$
$$R = 1166.67$$
$$p = 20\%$$
$$q = 16\%$$

$$m = ?$$

Uvrštavanjem

$$k = \frac{(m+1)\cdot q}{24}$$

u

$$C \cdot (1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{k}{100}) = R \cdot m$$

dobivamo

$$C \cdot (1 - \frac{p}{100})(1 + \frac{(m+1)\cdot q}{2400}) = R \cdot m$$

$$\begin{aligned} 30000 \cdot (1 - \frac{20}{100})(1 + \frac{(m+1) \cdot 16}{2400}) &= 1166.67 \cdot m \\ 24000 + 160 \cdot (m+1) &= 1166.67 \cdot m \\ 24160 &= 1006.67 \cdot m \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m = 24 \text{ mjeseca}$$

□

6.8 Kontinuirano ukamaćivanje

Koristimo sljedeće oznake:

n	–	vrijeme u godinama
p	–	prosječni godišnji prirast (u postocima)
C_0	–	početna vrijednost glavnice
C_n	–	konačna vrijednost glavnice nakon n godina konstantnog ukamaćivanja

Kontinuirano ukamaćivanje je poseban obračun kamata, u kojem se kamate obračunavaju svakog trenutka i pribrajaju glavnici, tj. nema vremenskog diskontinuiteta između dva obračuna kamata i njihovog pribrajanja glavnici unutar vremenskog trajanja kapitalizacije.

Kontinuirana kapitalizacija se primjenjuje u određivanju prirodnog rasta (prirasta biljaka, životinja, ljudi) i u makroekonomskim istraživanjima.
Vrijedi:

$$\boxed{C_n = C_0 \cdot e^{\frac{n \cdot p}{100}}}$$

Iz toga lako slijedi:

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\frac{n \cdot p}{100}} \qquad \text{i} \qquad n = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{C_n}{C_0}$$

Zadatak 6.29. *Za koje će vrijeme drvne mase u nekoj šumi biti* 50% *više ako je prosječni godišnji prirast* 2.8%*?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} &C_0 \\ &C_n = C_0 + \frac{50}{100} \cdot C_0 = 1.5 \cdot C_0 \\ &\ \ p = 2.8\% \\ \hline &\ \ n = ? \end{aligned}$$

$$C_n = C_0 \cdot e^{\frac{n \cdot p}{100}} \quad \Rightarrow e^{\frac{n \cdot p}{100}} = \frac{C_n}{C_0} \quad \Rightarrow \frac{n \cdot p}{100} = \ln \frac{C_n}{C_0} \quad \Rightarrow n = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{C_n}{C_0}$$

$$n = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{C_n}{C_0} = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{1.5 \cdot C_0}{C_0} = \frac{100}{2.8} \cdot \ln 1.5 = 14.48$$

$$\Rightarrow n = 14 \text{ g } 5 \text{ mj } 23 \text{ d}$$

□

Zadatak 6.30. *Za koliko se godina drvna masa od* $9230m^3$ *neke šume povećala još za* $3000m^3$ *ako je prosječni godišnji prirast* 2%*?*

Rješenje.

$$\begin{aligned} &C_0 = 9230 \\ &C_n = C_0 + 3000 = 12230 \\ &\ \ p = 2\% \\ \hline &\ \ n = ? \end{aligned}$$

$$n = \frac{100}{p} \cdot \ln \frac{C_n}{C_0} = \frac{100}{2} \cdot \ln \frac{12230}{9230} = 14.072 \text{ godina}$$

□

Zadatak 6.31. *Koliko je teško bilo pile prije* 6 *mjeseci ako je danas njegova težina* 2 *kg, a godišnji prirast* 250%*?*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
C_n &= 2 \\
n &= 6 \text{ mj} = 0.5 \text{ god} \\
p &= 250\%
\end{aligned}
$$

$C_0 = ?$

$$C_0 = C_n \cdot e^{-\frac{n \cdot p}{100}} = 2 \cdot e^{-\frac{0.5 \cdot 250}{100}} = 2e^{-\frac{125}{100}} = 0.573 \text{ kg}$$

Pile je prije 6 mjeseci bilo teško 0.573 kg. □

Zadatak 6.32. *Koliko će kg dijete imati na svoj* 6. *rođendan ako je rođeno s* 2.5 *kg i ako se pretpostavlja da prve* 2 *godine kontinuirano dobiva na težini* 5% *mjesečno, a sljedeće* 4 *godine prosječno* 2% *mjesečno? Koristite relativnu kamatnu stopu.*

Rješenje.

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 2.5 \text{ kg} \\
n_1 &= 2 \text{ god} \\
p_1 &= 5\% \text{ mjesečno} \\
n_2 &= 4 \text{ god} \\
p_2 &= 2\% \text{ mjesečno}
\end{aligned}
$$

$C_6 = ?$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1 \text{ mj}}{1 \text{ god}} = \frac{1 \text{ mj}}{12 \text{ mj}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \\
p_{R_1} &= \frac{p_1}{m} = \frac{5}{\frac{1}{12}} = 60\% \text{ godišnje} \\
p_{R_2} &= \frac{p_2}{m} = \frac{2}{\frac{1}{12}} = 24\% \text{ godišnje} \\
C_2 &= C_0 \cdot e^{\frac{n_1 \cdot p_{R_1}}{100}}, \qquad C_6 = C_2 \cdot e^{\frac{n_2 \cdot p_{R_2}}{100}} \Rightarrow \\
C_6 &= C_0 \cdot e^{\frac{n_1 \cdot p_{R_1}}{100}} \cdot e^{\frac{n_2 \cdot p_{R_2}}{100}} = 2.5 \cdot e^{\frac{2 \cdot 60}{100}} \cdot e^{\frac{4 \cdot 24}{100}} = 21.677 \text{ kg}
\end{aligned}
$$

□