Financijska matematika

Dr. Petra Posedel

Vedran Horvatić, dipl. inž.

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 20.4.2010.

2. 3. Dinamika kretanja cijene dionica

- Buduće cijene bilo koje vrste imovine su uglavnom nepredvidive (dionice, strana valuta pa i neki nepredvidivi budući novčani tok…)
- Tržišne cijene ovise o izborima i odlukama mnogih agenata koji djeluju u uvjetima nesigurnosti.

- Označimo sa $S(t)$ cijenu neke dionice u trenutku t.
  - Pretpostavljamo da je $S(t) > 0$ za svaki t.
  - $S(0)$ je trenutna cijena dionice, **poznata** svakom investitoru, dok je $S(t) > 0$ općenito **nepoznata**

- $S(t)$ je pozitivna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru Ω, odnosno

$$S(t):\Omega \to (0,\infty)$$

- Skup Ω se sastoji od svih mogućih scenarija $\omega \in \Omega$ kretanja cijene. Ukoliko želimo naglasiti da cijena u trenutku t tržište prati scenarij $\omega \in \Omega$, to ćemo označiti sa $S(t,\omega)$
- Pretpostavljamo da je vrijednost $S(0)$ konstantna, dok je $S(t)$ slučajna varijabla koja nije konstantna:

$$\exists \text{ barem dva scenarija } \omega_1, \omega_2 \in \Omega \text{ takva da vrijedi}$$

$$S(t,\omega_1) \neq S(t,\omega_2)$$

- Pretpostavljamo da cijene opažamo u diskretnim vremenskim periodima: godina, kvartal, mjesec, tjedan, dan…

- Dakle, $t = nk$, pri čemu
  - $n = 0,1,2,3….$
  - $k = 1$ u slučaju godine, $k = 1/52$ u slučaju tjednih opažanja…

Vjerojatnosti neutralne na rizik

- Buduće vrijednosti dionica (ili neke vrijednosnice od interesa) nemoguće je znati sa sigurnosti, ali je moguće unutar nekog modela analizirati odnosno modelirati njihove **očekivane** cijene
- **Cilj**: usporediti očekivane cijene dobivene pomoću nekog modela sa nerizičnim investicijama.

➡ iako intuitivno jednostavno, ima vrlo korisne aplikacije u teoriji izvedenica (derivativa)

Kako odredite očekivanu cijenu dionice u trenutku t ?

- Označimo očekivanu cijenu dionice u trenutku t sa $E[S(t)]$ te očekivani povrat u slučaju kretanja cijene prema gore sa g, a očekivani povrat pri kretanju cijene prema dolje sa d čije su odgovarajuće vjerojatnosti p i 1-p. Tada u trenutku t =1vrijedi:

$$
\begin{aligned}
E[S(1)] &= S(0)\cdot p(1+g) + S(0)\cdot(1-p)(1+d) \\
&= S(0)[1+pg+(1-p)d] = S(0)[1+E[R(1)]]
\end{aligned}
$$

pri čemu je $E[R(1)]$ očekivani povrat u trenutku 1.

- **Propozicija 1**. Ukoliko su povrati R(1), R(2),…R(n) nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable, tada je očekivana cijena u trenutku n=0,1,2,3…dana sa

$$E[S(n)] = S(0)[1 + E[R(1)]]^n$$

- *Dokaz*:

$$\begin{aligned} E[S(n)] &= E[S(0)(1+R(1))(1+R(2))\cdots(1+R(n))] \\ &= nez = S(0)E[1+R(1)]E[1+R(2)]\cdots E[1+R(n)] \\ &= j.d. = S(0)E[1+R(1)]^n. \end{aligned}$$

$\square$

Napomena. Usporedba s nerizičnom investicijom na horizont ulaganja od *n perioda*.

- Označimo početnu vrijednost sa $S(0)$.
- U slučaju nerizične investicije i konstantne kamatne stope r, vrijedi $$S(n) = S(0)(1+r)^n$$
- U slučaju ulaganja u npr. dionice, *uključivanje faktora rizika* je neizbježno. Nadalje, vrijedi $$E[S(n)] = S(0)(1+E[R(1)])^n$$
- Kako usporediti $S(n)$ i $E[S(n)]$?

- Tipičan investitor koji je averzivan glede rizika zahtjeva

$$E[R(1)] > r$$

budući da očekuje *nagradu* za ulaganje u rizičnu imovinu, odnosno očekuje veći očekivani prinos kao **premiju za rizik**.

- U slučaju da vrijedi $E[R(1)] < r$ investitori kojima su takvi slučajevi interesantni ujedno *tragaju za rizikom,* odnosno nisu averzivni prema riziku. Vjerojatnost velikih očekivanih prinosa je mala i pozitivna, dok je vjerojatnost malih prinosa velika.

- Slučaj $E[R(1)] = r$ je **neutralan na rizik**

Vjerojatnosna mjera neutralna na rizik

- Označimo sa p^* i E^* vjerojatnost odnosno očekivanje za koje vrijedi

$$E^*[R(1)] = p^* g + (1 - p^*)d = r$$

odnosno

$$\boxed{p^* = \frac{r-d}{g-d}.}$$

- p^* zovemo **vjerojatnost neutralna na rizik**, a E^* očekivanje neutralno na rizik.

Napomena.

- p^* je apstraktni matematički objekt i koji može i ne mora biti jednak vjerojatnosti svih agenata na tržištu p. **Samo** u tržištu neutralnom na rizik vrijedi $p=p^*$.

- Zašto analizirati financijske instrumente u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik p^* ukoliko ona ne mora imati nikakve relacije s aktualnom vjerojatnosti p?

$\Rightarrow$ vrednovanje izvedenica (derivativa)

Primjeri.

- **Primjer 1**. Pretpostavimo da je g=0.2 te nerizična kamatna stopa r=0.1. Analizirajte svojstva vjerojatnosti neutralne na rizik kao funkcije povrata u slučaju pada cijene vrijednosnice.

- **Primjer 2**. Dokažite da vrijedi $d < r < g$ ako i samo ako je $0 < p^* < 1$.

- **Primjer 3.** Analizirajte ortogonalnost vektora u ravnini $(p^*, 1\text{-}p^*)$ s vektorom koordinata mogućih jednoperiodnih profita odnosno gubitka investitora koji posjeduje udio dionice kupljene pozajmicom po kamatnoj stopi r.

Martingalno svojstvo: uvod i motivacija

- Kako odrediti očekivanu vrijednost cijene dionice u trenutku n u odnosu na vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik, tj. $E^*[S(n)]=?$

- Intuitivno, uz nerizičnu (konstantnu) kamatnu stopu r kroz n perioda, $S(n)=S(0)(1+r)^n$

- Prema propoziciji 1 vrijedi $E^*[S(n)] = S(0)\left(1+E^*[R(1)]\right)^n$ a kako u slučaju neutralnosti na rizik mora vrijediti

$$E^*[R(1)] = r$$

slijedi da je

$$E^*[S(n)] = S(0)(1+r)^n$$

- **Primjer**. Pretpostavimo da promatramo dvoperiodni model binomnog stabla takav da je trenutna cijena dionice XYZ 100, povrati u slučaju porasta ili pada vrijednosti dionice 0.2, odnosno -0.1. Pretpostavim da je nerizična stopa povrata r=0.1. Tada je:
  - Vjerojatnost neutralna na rizik p^*=2/3
  - Očekivana je cijena dionice XYZ nakon dva vremenska perioda u odnosu na vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik jednaka

$$E^*[S(2)] = S(0)(1+r)^2 = 121.$$

  - Skicirajte odgovarajuće stablo, odredite moguće scenarije na tržištu neutralnom na rizik te izračunajte odgovarajuće cijene dionice XYZ u svakom vremenskom trenutku.

- U prethodnom primjeru izračunajte sljedeća uvjetna očekivanja:
  - $E^*[S(2)|S(1)=90]$
  - $E^*[S(2)|S(1)=120]$
  - $E^*[S(2)|S(1)]$

- Prisjetite se svojstava uvjetnog očekivanja.

- **Propozicija 2**. Uvjetno očekivanje neutralno na rizik cijene neke dionice u trenutku n+1 uz uvjet da u trenutku n raspolažemo informacijama dostupnima do tog trenutka u modelu binomnog stabla jednako je

$$E^*[S(n+1) \mid S(n)] = S(n)(1+r).$$

- *Dokaz*: Primijetimo odmah da cijena neke dionice u trenutku n, $S(n)$, postaje investitoru poznata u trenutku n. Pretpostavimo da je $S(n)=x$ za neki pozitivan broj x. Tada vrijedi:

$$E^*[S(n+1) \mid S(n) = x] = x(1+g)p^* + x(1+d)(1-p^*). \qquad (1)$$

- No, prema definiciji vjerojatnosti neutralne na rizik vrijedi

$$p^* g + \left(1 - p^*\right) d = r$$

iz čega slijedi

$$p^*(1 + g) + \left(1 - p^*\right) d = 1 + r. \qquad (2)$$

Prema (1) i (2) slijedi

$$E^*\left[S(n+1) \mid S(n) = x\right] = x(1 + r).$$

što se i tvrdilo.

$\square$

- **Napomena**. **Diskontirana vrijednost** cijene neke dionice definirana je kao

$$S^D(n) = S(n)(1+r)^{-n}.$$

- **Martingalno svojstvo.** Prema propoziciji 2 slijedi

$$\boxed{E^*\left[S^D(n+1) \mid S(n)\right] = S^D(n)}$$

- Kažemo da je diskontirana cijena dionice, $S^D(n)$, martingal u odnosu na vjerojatnosnu mjeru neutralnu na rizik p^*. Vjerojatnosna mjera p^* se također naziva martingalna (vjerojatnosna) mjera.

2.3. Tržišni modeli u diskretnom vremenu

- Pretpostavimo da neki investitor trguje sa ***m* rizičnih investicija** (dionice uglavnom)
- Opća notacija: cijene takvih investicija u trenutku n označavat ćemo sa $\boldsymbol{S_1(n),\ldots,S_m(n)}$.
- Dodatno pretpostavljamo da investitori imaju na raspolaganju i **mogućnost trgovanja nerizičnom imovinom**, tj. investiranje na tržištu novca te označimo sa $\boldsymbol{A(n)}$ vrijednost nerizične investicije u trenutku n; pretpostavljamo da je $A(0)=1$ ili 100.
- Označimo sa $x_1,\ldots,x_m$ **udjele** (*pozicija*) u pojedinoj rizičnoj investiciji, a sa y udio u nerizičnoj imovini.

Vrijednost imovine investitora

- Pretpostavimo da su pozicije investitora u trenutku n zadane sa
  - $(x_1,\ldots,x_m)$ udjeli u rizičnoj imovini čije su cijene u trenutku n zadane sa $S_1(n),\ldots,S_m(n)$.
  - y pozicija u nerizičnoj imovini čija je vrijednost $A(n)$
- Tada je vrijednost imovine investitora u trenutku n zadana sa

$$V(n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_i S_i(n)}_{\textbf{Vrijednost u rizičnoj imovini}} + \underbrace{yA(n)}_{\textbf{Vrijednost u nerizičnoj imovini}}.$$

Pretpostavke modela u diskretnom vremenu

- **P1. (Slučajnost)** Buduće cijene rizične imovine (dionica) $S_1(n),\ldots,S_m(n)$ su slučajne varijable za svaki $n=1,2,\ldots$ Buduće cijene nerizične imovine $A(n)$ nisu slučajne, već su poznate za svaki $n=1,2,\ldots$

- **P2. (Pozitivnost cijena)** Cijene rizične i nerizične imovine su strogo pozitivne u svakom vremenskom trenutku:

$$S(n) > 0 \quad \text{i} \quad A(n) > 0 \quad \text{za svaki } n = 0,1,2,\ldots$$

- **P3. (Djeljivost, likvidnost i kratka pozicija (short selling))** Investitor u svakom trenutku može kupiti ili prodati bilo koji broj (udio) svake od dionica i zauzeti bilo koju poziciju u nerizičnoj imovini:

$$x_1,\ldots,x_m, y \in R$$

- **P4. (Solventnost)**. Vrijednost imovine investitora je u svakom vremenskom trenutku nenegativna:

$$V(n) \geq 0, \quad \text{za svaki } n = 0,1,2,3,\ldots$$

- **P5. (Diskretne jedinične cijene)**. Cijene svakog od pojedinih udjela $S_1(n),\ldots,S_m(n)$ su slučajne varijable koje mogu poprimiti **konačno mnogo** vrijednosti, za svaki $n=0,1,2,\ldots$

Investicijske strategije

- Pozicije koje investitor drži u rizičnoj i nerizičnoj imovini mogu se mijenjati u svakom vremenskom trenutku prodajom određene imovine i kupnjom neke druge.
- Pretpostavljamo da nije moguće podizanje gotovine iz ukupne imovine u cilju potrošnje, kao niti dodatna uplate gotovine u postojeću vrijednost imovine.
- Investicijske odluke o promjeni pozicija u ukupnoj imovini (portfelju vrijednosnica) donose se na bazi dostupnih informacija na tržištu: povijesne informacije o tržištu do (i uključujući) trenutka određene investicijske odluke (isključuje se mogućnost *insajderskih* informacija kao i *vidovitost* glede budućnosti)

- **Definicija (Portfelj i investicijska strategija).** Kažemo da je portfelj vektor

$$v(n)=\left(x_1(n),\ldots,x_m(n),y(n)\right)$$

koji označava broj udjela koje investitor drži u rizičnoj i nerizičnoj imovini unutar vremenskog intervala $(n\text{-}1,n)$. Niz portfelja (vektora) $(v_n)_{n=1,2,\ldots}$ zove se investicijska strategija.

- Vrijednost imovine u trenutku $n\geq 1$:

$$V(n)=\sum_{i=1}^{m}x_i(n)S_i\left(n\right)+y(n)A(n).$$

- Vrijednost imovine u trenutku 0:

$$V(0)=\sum_{i=1}^{m}x_i(1)S_i\left(0\right)+y(1)A(0).$$

- **Primjer 1**. Pretpostavimo da je početna vrijednost nekog investitora jednaka 3000 kn te da su zadane sljedeće vrijednosti:
  - $S_1(0)=60$, $S_1(1)=65$, $S_1(2)=75$
  - $S_2(0)=20$, $S_2(1)=15$, $S_2(2)=25$
  - $A(0)=100$, $A(1)=110$, $A(2)=121$

Početna vrijednost portfelja može se investirati u 18.22 udjela dionice A, kratkom pozicijom od ukupno 16.81 udjela dionice B te kupnjom 22.43 obveznica XYZ:

$$(x_1, x_2, y) = (18.22, -16.81, 22.43)$$

U trenutku $n=1$ vrijednost takvog portfelja jednaka je 3399.45. Primijetite da je kratkom pozicijom u dionici B investitor profitirao budući da je cijena dionice u trenutku 1 pala.

- Sadržaj portfelja (udjeli pojedinih *komponenti* portfelja) mogu se mijenjati (kupnjom ili prodajom određenih komponenti) u svakom (diskretnom!) vremenskom trenutku dokle god trenutna vrijednost portfelja ostane **nepromijenjena**.

- **Definicija (Samofinancirajuća strategija).** Kažemo da je investicijska strategija samofinancirajuća ako konstruirani portfelj u trenutku $n \geq 1$ koji se planira držati kroz sljedeći period se u **potpunosti** financira od trenutne vrijednosti portfelja $V(n)$:

$$V(n) = \sum_{i=1}^{m} x_i(n+1)S_i(n) + y(n+1)A(n)$$

- **Definicija (Predvidivost).** Kažemo da je investicijska strategija predvidiva ako za svaki n=0,1,2,… portfelj $(x_1(n+1), x_2(n+1), \ldots, x_m(n+1), y(n+1))$ konstruiran u trenutku n ovisi samo o čvorovima stabla tržišnih scenarija do (i uključujući) trenutka n.

- **Propozicija.** Pretpostavimo da je zadana početna vrijednost imovine $V(0)$ i predvidiv niz $(x_1(n), \ldots, x_m(n))$, n=1,2,… pozicija u rizičnoj imovini. Tada je uvijek moguće naći niz pozicija u nerizičnoj imovini $(y(n))$, n=1,2,…takav da je $(x_1(n), \ldots, x_m(n), y(n))$ predvidiva i samofinancirajuća strategija.
- *Dokaz*: DZ.

- **Zadatak 1.** Odredite broj obveznica koje investitor drži u prvom i drugom vremenskom trenutku ako je njegova investicijska strategija predvidiva i samofinancirajuća te ukoliko je početna vrijednost portfelja $V(0)=200$, cijene rizične i nerizične imovine dane su u primjeru 1,a udjeli u rizičnoj imovini su redom
  - $x_1(1)=35.24$, $x_1(2)= -40.5$
  - $x_2(1)=24.18$, $x_2(2)= 10.13$

  Odredite vrijednost imovine investitora u vremenskim trenucima 1 i 2 uz takvu investicijsku strategiju.

- **Definicija (Dopustivost).** Kažemo da je investicijska strategija dopustiva ukoliko je samofinancirajuća, predvidiva i ako za svaki n=0,1,2,… vrijedi

$$V(n) \geq 0$$

s vjerojatnosti 1.

- **P6. (Pretpostavka nearbitraže).** Ne postoji dopustiva investicijska strategija za koju vrijedi $V(0)=0$ i $V(n)>0$ s pozitivnom vjerojatnosti za neki n=1,2,…

- **Napomena.** Dopustivu strategiju arbitraže je moguće ostvariti ukoliko postoji predvidiva samofinancirajuća strategija za koju je $V(0)=0$ i

$$0 \neq V(n) \geq 0 \quad \text{za neki } n > 0.$$

- **Zadatak 2**. Dokažite da će princip nearbitraže biti narušen ukoliko postoji samofinancirajuća strategija čija je početna vrijednost $V(0)=0$, konačna vrijednost $V(2) > 0$ i za koju je $V(1) < 0$ s pozitivnom vjerojatnosti.