Financijska matematika, rješenja 1. međuispita

1. a) N b) T c) N d) 4%, 6% e) N f) N g) N.
   (Napomena: Rješenja bez obrazloženja se ne boduju.)

2. Anuitet $A = 25045.645$
   Nakon 3 godine unaprijed plaća $N = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} = 44663.09$
   Jednadžba za e.k.s.:$100000 = \frac{A}{1+r_e} + \frac{A}{(1+r_e)^2} + \frac{A + 1.02 \cdot N}{(1+r_e)^3}$.

3.

$$
\begin{aligned}
V(0) &= \left(\frac{1000}{1+\frac{r}{12}} + \frac{1000}{(1+\frac{r}{12})^2} + \ldots\right) + \frac{1}{(1+\frac{r}{12})^{60}}\left(\frac{1000}{1+\frac{r}{12}} + \frac{1000}{(1+\frac{r}{12})^2} + \ldots\right) \\
&= \frac{1000}{\frac{r}{12}} + \frac{1}{(1+\frac{r}{12})^{60}} \cdot \frac{1000}{\frac{r}{12}} = \frac{1000}{0.005} + \frac{1}{(1.005)^{60}} \cdot \frac{1000}{0.005} = 348274.44.
\end{aligned}
$$

4. $NPV = -100 + 30 \cdot 0.980 + 40 \cdot 0.957 + 40 \cdot 0.934 = 5.04 > 0 \Rightarrow$ ulaganje je isplativo.

5. $-100000 + \frac{208000}{1+r} - \frac{108150}{(1+r)^2} = 0 \Rightarrow r^2 - 0.08r + 0.0015 = 0.$
   $r_1 = 0.03, r_2 = 0.05 \Rightarrow$ investicije su isplative za kamatne stope manje od 3% i veće od 5%.

6. (a) i (b) $r(0,T) > r(0,T+1) \Rightarrow$ postoji mogućnost arbitraže.
   (c) Kupimo 1 obveznicu s dospijećem T za $B(0,T)$. Da bismo to mogli trebamo izdati $\frac{B(0,T)}{B(0,T+1)}$ obveznica s dospijećem $T+1$. Nakon T godina dobivamo 1, a nakon još godinu dana dolazi nam na naplatu $\frac{B(0,T)}{B(0,T+1)} \cdot 1 < 1$, dakle u plusu smo $1 - \frac{B(0,T)}{B(0,T+1)}$.

7. $B(0,1) = 95.12 \Rightarrow 95.12 \cdot e^{r_1} = 100 \Rightarrow r_1 = 5\%$.
   $B(0,2) = 104.95 \Rightarrow 104.95 = \frac{10}{e^{r_2}} + \frac{110}{e^{2r_2}} \Rightarrow r_2 = 7\%$.
   Strategija:

   t=0: Kupimo obveznicu s dospijećem 2 godine za 104.95. Za to treba prodati $\frac{104.95}{95.12} = 1.1033$ obveznica s dospijećem 1 godine.

t=1: Dobivamo kupon od 10, a moramo platiti 110.33 (za jednogodišnju obveznicu koju smo prodali). Dakle, nedostaje nam 100.33, i za to izdajemo $\frac{100.33}{95.12} = 1.0548$ jednogodišnjih obveznica.

t=2: Dobivamo kupon od 10 i nominalnu vrijednost 100, ukupno 110, a dužni smo 105.48. Dakle, zaradili smo $110 - 105.48 = 4.52$.

8. $96.5 = N \cdot e^{-0.1 \cdot 2} \Rightarrow N = 117.865$.
$V(0) = N \cdot e^{-yT} \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial y} = -TNe^{-yT} = -TV \Rightarrow \dfrac{\partial V}{V} \approx -T\partial y = -2 \cdot 0.01 = -2\%$.
(Napomena: Priznaje se i egzaktni izračun, promjena je -1.98%.)

9. $w_A \cdot D_A + w_B \cdot D_B = D_{A+B} \Rightarrow w_A \cdot 3 + (1 - w_A) \cdot 1 = 0.5 \Rightarrow w_A = -0.25, w_B = 1.25$.
Dakle, treba izdati obvenica A u vrijednosti 2500kn, a kupiti obveznica B u vrijednosti 12500kn.

10. (a) Mora vrijediti

$$X \cdot e^{t_1 r(0,t_1)} \cdot e^{(t_2-t_1)f(0,t_1,t_2)} = X \cdot e^{t_2 r(0,t_2)}.$$

Dakle, uvjet nearbitraže je:

$$t_1 r(0,t_1) + (t_2 - t_1) f(0,t_1,t_2) = t_2 r(0,t_2).$$

(b)

$$f(0,t_1,t_2) = \frac{t_2 r(0,t_2) - t_1 r(0,t_1)}{t_2 - t_1}.$$