Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za vježbu i samostalan rad
11. 3. 2016.

1. Poduzeće duguje 60000 kn za dvije godine od danas i 140000 kn za četiri godine od danas. Odlučeno je da će se ukupni dug otplatiti s dvije jednake rate koje dospijevaju danas i početkom druge godine od danas. Izračunajte iznos rata ako je godišnji kamatnjak 5. (**Rj. 86868.35 kn**)

2. Osoba je prije tri godine uložila 4000 kn, prije dvije godine 8000 kn, a prije godinu dana podigla 5000 kn. Koliko ta osoba ima na računu danas, ako je banka prve dvije godine primjenjivala godišnji kamatnjak 2, a u preostalom razdoblju 1? (**Rj. 7394.816 kn**)

3. Banka nudi dvije vrste oročene štednje – mjesečnu sa kamatnom stopom r_1 i godišnju sa kamatnom stopom r_2=10%. Ako kroz period od 5 godina svoju ušteđevinu reinvestirate jednom godišnje, na kraju ćete imati 20% više ušteđevine nego ako reinvestirate svaki mjesec. Koliki je r_1? (**Rj. r_1 = 5.899%)**

4. Koliki iznos treba oročiti danas na 10 godina uz godišnji kamatnjak 4 za prve četiri godine, a 3 u preostalom razdoblju, ako se želi da konačna vrijednost bude 30000 kn? (**Rj. 21476.55 kn**)

5. Neka je osoba uplaćivala u banku početkom svake godine po 5000 eura kroz 5 godina. Koliko će ta osoba imati u banci na kraju desete godine ako je banka prve tri godine primjenjivala kamatnu stopu 6%, u preostalom razdoblju 5%, i ako je osoba na kraju sedme godine podigla iznos od 10000 eura? (**Rj. 25901.85 eura**)

6. Neka osoba uloži u banku početkom prve godine 50000 kn, a početkom četvrte podigne 20000 kn. Koliku će svotu ta osoba imati u banci krajem četvrte godine ako je godišnji kamatnjak 2, a obračun kamata mjesečni, uz
a) relativni kamatnjak, (**Rj. 3375.706 kn**)
b) konformni kamatnjak? (**Rj. 3372.161 kn**)

7. Neka osoba uloži u banku 10000 eura. Koliku će svotu imati ta osoba u banci krajem pete godine ako banka prve tri godine primjenjuje godišnju kamatnu stopu 10%, a zadnje dvije 7%? Obračun kamata polugodišnji. (**Rj. 15377.91 eura**)

8. Početkom svake godine osoba uplaćuje u banku po 10000 eura kroz tri godine. Na početku četvrte godine počinje joj se isplaćivati polugodišnja renta početkom svakog polugodišta kroz dvije godine. Izračunajte visinu rente ako banka za prve tri godine primjenjuje godišnju kamatnu stopu 6%, a u preostalom razdoblju 5%. Obračun kamata je polugodišnji. (**Rj. 8766.702 eura**)

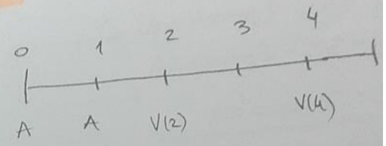
9. Poduzeće traži zajam od 200000 kn uz 9% godišnjih kamata i može plaćati anuitet od 50000 kn krajem godine. Odredite vrijeme amortizacije i ukupne kamate. (**Rj. t=5.1787 godina $\Rightarrow$ 5 anuiteta u iznosu od 50000 i šesti, *krnji anuitet*, u iznosu od 9253.29 kn**)

10. Marko je kupio automobil vrijedan 50000 eura. Za to je podigao kredit na 10 godina koji se isplaćuje na kraju svakog mjeseca, uz kamatnu stopu 7%. Automobil svake godine gubi 20% vrijednosti. Na kraju 5. godine Marko odlučuje prodati automobil te za taj novac isplatiti dio preostalog kredita, a ostatak duga otplatiti kroz sljedećih 10 godina uz mjesečnu kamatnu stopu 5%. Kolika je rata novog kredita? (**Rj. Anuitet za kredit na 10 godina je 580.5576, vrijednost automobila na kraju 5.godine 16384 eura (!), anuitet novog kredita je 137.19 eura)**

Napomena:
Ukoliko nije drugačije naznačeno, obračun je kamata godišnji i složen.

1. ZADACI ZA VJEŽBU

1. ZADACI



① $V(2) = 60\,000$ kn

$V(4) = 140\,000$ kn

→ otplata s 2 jednake rate: danas / početkom 2. godine

$V(0) = ?$

$r = 5\%$

$A = ?$ (rate)

$$V(0) = \frac{V(2)}{(1+r)^2} + \frac{V(4)}{(1+r)^4} = 169600{,}115 \text{ kn}$$ (dug danas koji se mora otplatiti)

$$V(0) = \frac{A}{(1+r)^0} + \frac{A}{(1+r)^1} \rightarrow \boxed{A = 86868{,}35 \text{ kn}}$$

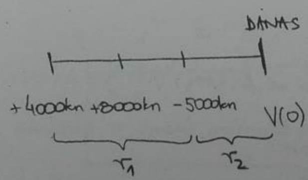
② $V(3) = 4000$ kn

$V(2) = 8000$ kn

$V(1) = 5000$ kn

$r_1 = 2$ (prve dvije godine)

$r_2 = 1$ (preostali dio)



+ uložila
− podigla

$V = ?$

$$V = 4000(1+r_1)^2 \cdot (1+r_2)^1 + 8000(1+r_1)^1 \cdot (1+r_2)^1 - 5000(1+r_2)^1$$

$\boxed{V = 7394{,}816 \text{ kn}}$

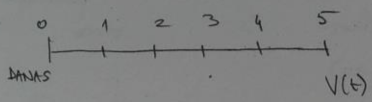
③ MJESEČNA štednja r_1

GODIŠNJA štednja $r_2 = 10\%$

$t = 5$ godina

→ reinvestiranje jednom godišnje

$V_2(t) = 1.2\, V_1(t)$



$r_1 = ?$

$$\left.\begin{array}{l} V_2(t) = (1+r_2)^5 \cdot V(0) \\ V_1(t) = (1+r_1)^{5 \cdot 12} \cdot V(0) \end{array}\right\}$$

$$(1+r_2)^5 \cdot \cancel{V(0)} = 1.2 \cdot (1+r_1)^{60} \cdot \cancel{V(0)}$$

$r_1 = 0.004916$ (mjesečna)

$$r_1 = \frac{r}{12} \rightarrow r = 12 \cdot r_1$$

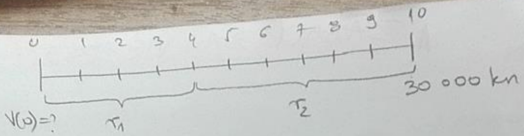
$\boxed{r = 5.899\%}$ (godišnja)

$t = 10$ godina

$r_1 = 4\%$ (prve 4 godine)

$r_2 = 3\%$ (preostalo)

$V = 30\,000$ kn



$V(0) = ?$

$$V(0) = V(t) \cdot (1+r_2)^{-6} \cdot (1+r_1)^{-4}$$

$$\boxed{V(0) = 21476.55 \text{ kn}}$$

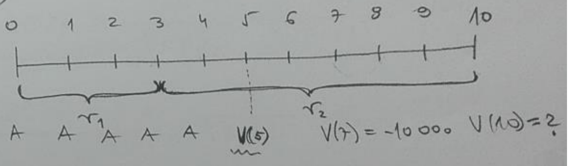
5.) $A = 5000$ € (početkom svake godine)

$t = 5$ godina

$r_1 = 6\%$ (prve 3 godine)

$r_2 = 5\%$ (preostali dio)

$V(7) = -10\,000$ € (podigla)



$V(10) = ?$

$$V(5) = A(1+r_1)^3(1+r_2)^2 + A(1+r_1)^2(1+r_2)^2 + A(1+r_1)\cdot(1+r_2)^2 + A(1+r_1)^0(1+r_2)^2 + A(1+r_2)^1$$

$V(5) = 29365{,}0707$ kn (na kraju 5. godine imamo toliko novaca)

$$V(10) = V(5)\cdot(1+r_2)^5 + V(7)\cdot(1+r_2)^3$$

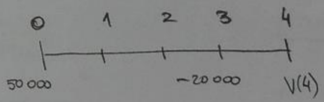
$$\boxed{V(10) = 25901.85 \text{ kn}}$$

6.) $V(0) = 50\,000$ kn

$V(3) = -20\,000$ kn

$V(4) = ?$ (krajem)

$r = 2\%$ (godišnji) mjesečni obračun



a) $r_R = ?$ uz

b) $r_M = ?$ uz

a) $r_R = \frac{r}{12}$ (mjesečni obračun)

$$V(4) = 50\,000(1+r_R)^{48} - 20\,000(1+r_R)^{12} = \boxed{33757.06 \text{ kn}}$$

b) $r_M = (1+r_g)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0.00165$

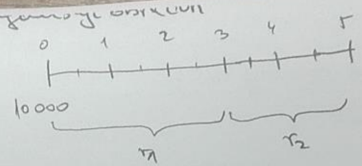
$$V(4) = 50\,000(1+r_M)^{48} - 20\,000(1+r_M)^{12} = \boxed{33721.61 \text{ kn}}$$

$V(0) = 10\,000$ € (ulog) polugodišnji obračun

$r_1 = 10\%$ (prve 3 god)

$r_2 = 7\%$ (zadnje dvije)

$V(5) = ?$



$$r_{R1} = \frac{r_1}{2} = 0{,}05$$

$$r_{R2} = \frac{r_2}{2} = 0{,}035$$

godine · polugodišnje

$$V(5) = 10.000 \cdot (1 + r_{R1})^{3\cdot 2} \cdot (1 + r_{R2})^{2\cdot 2} = \boxed{15377{,}906 \text{ kn}}$$

⑧ $A = 10\,000$ € (početkom godine) · polugodišnji obračun kamata

$t = 3$ god.

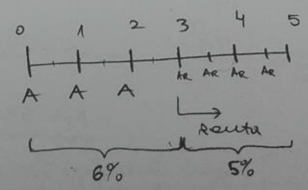
$t - 2$ god. (isplaćivanje polugodišnje rente)

V(poč. 4. godine) … počinje isplaćivanje rente

$r_1 = 6\%$ (prve 3 god.)

$r_2 = 5\%$ (ostalo razdoblje)

$A_{RENTA} = ?$



$$r_{R1} = \frac{6\%}{2} = 3\%$$

$$r_{R2} = \frac{5\%}{2} = 2{,}5\%$$

$$V(3) = A(1 + r_{R1})^{3\cdot 2} + A(1 + r_{R1})^{2\cdot 2} + A\cdot(1 + r_{R1})^{1\cdot 2} = 33804{,}611 \text{ kn}$$ (imam na početku 4. godine)

$$V(3) = \frac{A_R}{(1+r_{R2})^0} + \frac{A_R}{(1+r_{R2})^1} + \frac{A_R}{(1+r_{R2})^2} + \frac{A_R}{(1+r_{R2})^3}$$

$$\boxed{A_R = 8766{,}702 \text{ kn}}$$

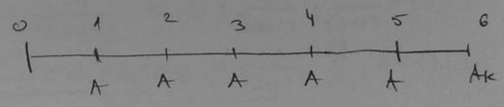
⑨ $V(0) = 200\,000$ kn

$r = 3\%$ (godišnja)

$A = 50\,000$ kn (krajem godine)

$t = ?$ (vrijeme amortizacije)

~~ukupne kamate ?~~



$$V(0) = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \frac{A}{(1+r)^4} + \frac{A}{(1+r)^5} + \frac{A_K}{(1+r)^6}$$

$$\frac{A_K}{(1+r)^6} = V(0) - A \cdot \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{(1+r)^i}$$

$$A_K = (1+r)^6 \cdot \left[V(0) - A \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{(1+r)^i} \right]$$

$$\boxed{A_K = 9253{,}29 \text{ kn}}$$

· 5 anuiteta po 50 000 + A_K = 9253,29 kn

$$\rightarrow V(0) = \frac{A}{(1+r)^t} \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

$$\frac{V(0)\cdot r}{A} = 1 - \frac{1}{(1+r)^t}$$

$$\frac{1}{(1+r)^t} = 1 - \frac{V(0)\cdot r}{A}$$

$$(1+r)^t = \frac{1}{1 - \frac{V(0)\cdot r}{A}}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{1}{1 - \frac{V(0)\cdot r}{A}}\right)}{\ln(1+r)} = 5{,}1787 \text{ godina}$$

(10) $V(0) = 50\,000\,€$

$t = 10$ godina

A_1 – rata kredita se isplaćuje krajem svakog mjeseca

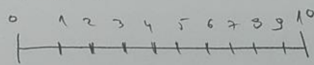
$r = 7\%$ (godišnja)

→ svake god. auto gubi –20% na vrijednosti

na kraju 5. godine odluči prodati auto

- otplati s time DIO preostalog duga
- ostatak duga otplati kroz idućih 10 god. za $r = 5\%$ (mjesečno)

$A_2 = ?$ (RATA NOVOG kredita)



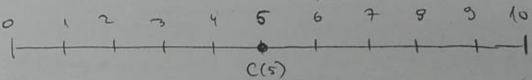
godina , 10 godina = 120 mjeseci

$$r_M = \frac{r}{12} = \frac{0.07}{12}$$

$$V(0) = \frac{A_1}{(1+r)^t} \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

$$V(0) = \frac{A_1}{(1+r_M)^{120}} \cdot \frac{(1+r_M)^{120} - 1}{r_M} \rightarrow A_1 = \frac{V(0) \cdot (1+r_M)^{120} \cdot r_M}{(1+r_M)^{120} - 1}$$

$$A_1 = 580.542\,€$$



→ na kraju 5. godine auto vrijedi:

$$C_A(5) = C(0) \cdot 0.8^5 = 16384\,€$$

→ preostalo duga:

$$C(5) = \frac{A_1}{(1+r_M)} + \frac{A_1}{(1+r_M)^2} + \ldots + \frac{A_1}{(1+r_M)^{5 \cdot 12}}$$

$$C(5) = A_1 \sum_{i=1}^{60} \frac{1}{(1+r_M)^i} = 29318.53\,kn$$

$$C_0' = C(5) - C_A(5) = 29318{,}53 - 16384 = 12934{,}53\,kn$$ (preostalo za platiti sa drugim kamatama)

$$C_0' = \frac{A_2}{(1+r_{M_2})^t} \cdot \frac{(1+r_{M_2})^t - 1}{r_{M_2}} \quad ; \quad r_{M_2} = \frac{0.05}{12}$$

$t = 10 \cdot 12 = 120$ mj.

$$A_2 = \frac{C_0' \cdot (1+r_{M_2})^{120} \cdot r_{M_2}}{(1+r_{M_2})^{120} - 1}$$

$$\boxed{A_2 = 137.19\,€}$$

6. ZADACI

(1.) $C_0 - 100\,000$ kn

$t = 5$ godina

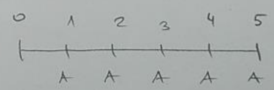
$r = 8\%$ (godišnja)

A – krajem svake godine

→ na kraju 3. godine odluči unaprijed zatvoriti cijeli zajam

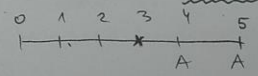
→ naknada 2% od iznosa koji se unaprijed vraća

$r_{ef} = ?$



$$C_0 = \frac{A}{(1+r)^5} \cdot \frac{(1+r)^5 - 1}{r} \Rightarrow A = \frac{C_0 \cdot (1+r)^5 \cdot r}{(1+r)^5 - 1}$$

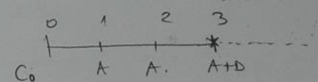
$A = 25\,045.645$ kn



$$C(3) = \frac{A}{(1+r)} + \frac{A}{(1+r)^2} = 44663{,}016 \text{ (preostalo duga)}$$

→ jednokratna nadoknada: $2\%\, C(3) = 893{,}26$ kn

⇒ $D = 2\%(C(3)) + C(3) = 45556.276$ kn (to mora platiti na kraju 3. godine)



$$C_0 = \frac{A}{(1+r_{ef})} + \frac{A}{(1+r_{ef})^2} + \frac{A+D}{(1+r_{ef})^3} \rightarrow \boxed{r_{ef} = 8.37\%}$$

(2) VJEČNA RENTA

→ dvomjesečne uplate u iznosu od C; izrazi u r_e

$\downarrow r_m = \frac{r}{6}$

$$\boxed{C = \frac{A}{r_m}} = \frac{A}{\frac{r}{6}} = \frac{6A}{r}$$

$$1 + r_e = \left(1 + \frac{r}{m}\right)^m$$

$$1 + r_e = \left(1 + \frac{r}{6}\right)^6$$

$$\frac{r}{6} = \sqrt[6]{1 + r_e} - 1$$

$$C = \frac{A}{\sqrt[6]{1+r_e} - 1}$$

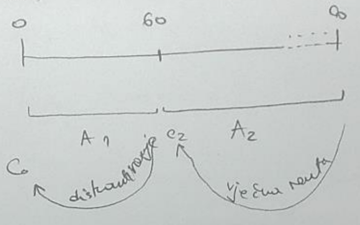
$$A = \frac{C}{\sqrt[6]{1+r_e} - 1}$$

4.) $A_1 = 1000$ kn (krajem mjeseca)

$t = 60$ mj

$r = 6\%$ (godišnja)

$A_2 = 2000$ kn



$C_0' = ?$ (sadašnja vrijednost)

$$r_R = \frac{r}{12} = \frac{0.06}{12} = 0.005$$

$$C_0 = \frac{A_1}{(1+r_R)^{60}} \cdot \frac{(1+r_R)^{60}-1}{r_R} = 51725.56 \text{ kn}$$

$$C_2 = \frac{A_2}{r_R} = 400\,000 \text{ kn}$$

$$C_0' = C_0 + \frac{C_2}{(1+r_R)^{60}}$$

$$C_0' = 348274.44 \text{ kn}$$

5. 1990. ustanovljena je zaklada

$C_0 = 300\,000$ kn

$A = 40\,000$ kn (svake godine, krajem) VJEČNO

a) $r = ?$

$$C_0 = \frac{A}{r} \Rightarrow r = \frac{A}{C_0} = 13.33\%$$

b) na kraju 2005. stopa $r_1 = 9\%$, $A = ?$

$$C = \frac{A_2}{r_1} \rightarrow A_2 = C \cdot r_1$$

$$A_2 = 27\,000 \text{ kn}$$

c) $A_{kon.} = 40\,000$ kn, $r = 9\%$ (KONAČNE ISPLATE)

$n = ?$ (broj mogućih isplata)

$$C_0 = \frac{A_{KON}}{(1+r)^n} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$n = 13.042$

$n = 13$ isplata

6. $N_0 = -200\,000$ kn

$N_1 = 50\,000$ kn

$N_2 = 180\,000$ kn

$r = 7\%$

NPV = ?

$$V_{NPV} = N_0 + \frac{N_1}{(1+r)} + \frac{N_2}{(1+r)^2}$$

$$V_{NPV} = -200\,000 + \frac{50\,000}{1+0{,}07} + \frac{180\,000}{(1+0{,}07)^2}$$

$\underbrace{V_{NPV} = 3947{,}94 \text{ kn}}$ > 0 ISPLATIVO

7. $N_0 = -150\,000$ €

$V_{NPV} = 25\,000$ €

$N_2 = 60\,749{,}23$ €

$N_3 = 85\,000$ €

$r = 4\%$

$N_1 = ?$

$$V_{NPV} = N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \frac{N_3}{(1+r)^3}$$

$$N_1 = (1+r)\cdot\left[V_{NPV} - N_0 - \frac{N_2}{(1+r)^2} - \frac{N_2}{(1+r)^3}\right]$$

$\underbrace{N_1 = 45\,000 \text{ €}}$

8. $N_0 = -14\,000\,000$ kn

$N_1 = \dots = N_5 = 3\,400\,000$ kn

$N_{11} = -6\,400\,000$ kn (na kraju 11. god.)

$r = 20\%$

---

odluka o pokretanju?

$$V_{NPV} = N_0 + N\cdot\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{(1+r)^i} + \frac{N_{11}}{(1+r)^{11}}$$

$\underbrace{V_{NPV} = -4693281{,}833 \text{ kn}}$

→ ne preporuča se ulazak u investi

9. $N_0 = -100\,000$ kn

$N_1 = 208\,000$ kn

$N_2 = -108\,150$ kn

$r = 4\%$

---

a) $V_{NPV} = N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2}$

$\underbrace{V_{NPV} = 9{,}246 \text{ kn}}$ - isplati se ná

b) isplativo je kada je $V_{NPV} > 0$

$$N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} > 0$$

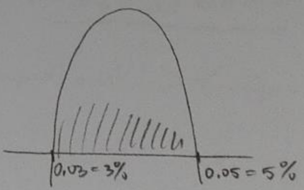
$$N_0(1+r)^2 + N_1(1+r) + N_2 > 0$$

$$N_0 + 2N_0\cdot r + N_0\cdot r^2 + N_1 + N_1 r + N_2 > 0$$

$$N_0 r^2 + r(2N_0 + N_1) + N_0 + N_1 + N_2 > 0$$

$r_1 = 0{,}05$

$r_2 = 0{,}03$



→ nije isplativo ako je $\underbrace{r < 3{,}0\%}$ ili r

(10) $r = 10\%$

a)

FAZA	1 god.	2 god.	3 god	4 god.
RAZVOJ	−800 000	−800 000		
POKRETANJE PROIZV.		−400 000		
MARKETING i PODRŠKA		−250 000	−250 000	−250 000
PROIZVOD. i PRODAJA			+2 400 000	+3 000 000

Σ : −800 000 ; −1450000 ; +2 150 000 ; +2 750000

N_0 ; N_1 ; N_2 ; N_3

b)

$$V_{NPV} = N_0 + \frac{N_1}{(1+r)} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \frac{N_3}{(1+r)^3}$$

$V_{NPV} = 1\,724\,793{,}388\ €$, > 0 ISPLATIVO JE

(11) NAJAM STANA

$A = -300\ €$ (svakog mj. na početku)

KUPNJA STANA

$t = 30$ godina

$A = 600\ €$ (krajem svakog mj)

$N(20) = -10\,000\ €$

$r = 5\%$ (god.) $\rightarrow r_R = \frac{r}{12} = \frac{5\%}{12}$ (mjesečna)

$N(30) = 100\,000\ €$
vrijedi stan

NAJAM :

$$V_{NVP}(\text{najam}) = -300 + A \cdot \sum_{i=1}^{30\cdot 12-1} \frac{1}{(1+r_R)^i}$$

30 god.

$$V_{NVP}(\text{najam}) = -300 + \frac{(-300)}{(1+r_R)^{359}} \cdot \frac{(1+r_R)^{359}-1}{r_R} = -56117{,}337\ kn$$

KUPNJA

$$V_{NVP}(\text{kupnja}) = \frac{-600}{(1+r_R)^{360}} \cdot \frac{(1+r_R)^{360}-1}{r_R} + \frac{N_2}{(1+r_R)^{20\cdot 12}} + \frac{N_3}{(1+r_R)^{30\cdot 12}}$$

$V_{NVP} = -93072{,}756\ kn$

$V_{NVP}(\text{najam}) < V_{NVP}(\text{kupnja})$ $\rightarrow$ isplati se unajmiti stan

(12.) a) ŠTEDNJA

$r = 3\%$

$A = -300€$ (odričemo se)

$A = +300€$ (od oročenja)

b) KUPNJA STANA

$A = -600€$ (brojem mjeseca)

$A_2 = +300€$ (od najma, brojem mjeseca)

$N(30) = 100\,000\,€$

$$V_{NPV} \text{ (štednja)} = \frac{(-300+300)}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^1} + \frac{(-300+300)}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^2} + \dots + \frac{(-300+300)}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{360}} = \emptyset \quad \text{– ISPLATI SE}$$

$$V_{NPV} \text{ (kupnja)} = \frac{(-600+300)}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^1} + \frac{(-600+300)}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^2} + \dots + \frac{(-600+300)+100\,000}{\left(1+\frac{r}{12}\right)^{360}} < 0 \quad (-30454.1598!)$$

(14.)

$N_{0A} = -120000$

$N_{0B} = -130\,000$

$r = ?$ da je A isplativiji od B.

$$\overbrace{N_{0A} + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \frac{N_3}{(1+r)^3} + \frac{N_4}{(1+r)^4} + \frac{N_5}{(1+r)^5}}^{A} = \overbrace{N_{0B} + \frac{N_1}{(1+r)} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \frac{N_3}{(1+r)^3} + \frac{N_4}{(1+r)^4} + \frac{N_5}{(1+r)^5}}^{B}$$

$$N_{0A} - N_{0B} + \frac{N_{1A} - N_{1B}}{1+r} + \frac{N_{2A} - N_{2B}}{(1+r)^2} = 0$$

$$\underbrace{(-120\,000 + 130\,000)}_{10\,000} + \frac{30\,000}{1+r} + \frac{-50\,000}{(1+r)^2} = 0$$

$$10\,000(1+r)^2 + 30\,000(1+r) - 50\,000 = 0$$

$$(1+r)^2 + 3(1+r) - 5 = 0$$

$$1 + 2r + r^2 + 3 + 3r - 5 = 0$$

$$r^2 + 5r - 1 = 0$$

$r_1 = 0.1926$ $\boxed{r = 19.26\%}$

$r_2 = \cancel{-5.1926}$

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za vježbu i samostalan rad
25. 3. 2016.

Napomena za studente: Za vježbu za treći tjedan nastave dovoljno je riješiti prvih pet zadataka. Ostali zadaci odnose se na ostatak prezentacije_03 i na prezentaciju_04 za 4. tjedan nastave.

1. Izračunajte cijenu obveznice nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od četiri godine i godišnjim kuponima iznosa 5 uz kontinuirano ukamaćivanje i kamatnu stopu a) 8% i b) 5%. Što primjećujete? (**Rj: a) B(0,4)=89.055, b) B(0,4)=99.5506 =>pad kamatne stope uzrokuje rast cijene obveznice)**

2. Promatramo obveznicu nominalne vrijednosti 100 i godišnjih kupona u iznosu 8 s dospijećem od tri godine. Pretpostavimo da se obveznicom trguje po nominali. Odredite impliciranu neprekidnu kamatnu stopu. (**Rj: r=7.696%**)

3. Kuponska obveznica nominalne vrijednosti 1000 s dospijećem 10 godina isplaćuje polugodišnje kupone iznosa 18.

- **a)** Pretpostavimo da je trenutna stopa za takvu obveznicu 4% na godišnjoj razini uz složeno polugodišnje ukamaćivanje. Kolika je cijena takve obveznice? (**Rj: B(0,10)=967.3 kn**)
- **b)** Da li se obveznica prodaje po većoj ili manjoj cijeni od nominalne vrijednosti? Zašto? (Rj: Obveznica se prodaje po cijeni manjoj od nominalne pa vrijedi: kuponska stopa<trenutna prinos<prinos do dospijeća)

4. Pretpostavimo da se na tržištu prodaje kuponska obveznica nominalne vrijednosti 1000 s dospijećem 5 godina po cijeni 1100. Polugodišnje isplate kupona iznose 25.

- **a)** Izračunajte prinos do dospijeća takve obveznice (Iskoristite neku programsku potporu npr Mathematica). Napišite jednadžbu čije je rješenje prinos do dospijeća.

  (**Rj**. $1100=\sum_{i=1}^{10}\frac{25}{e^{\frac{r}{2}i}}+\frac{1000}{e^{\frac{r}{2}10}} \Rightarrow r = 2.82\%$)
- **b)** Koji je trenutni prinos (*current yield*) takve obveznice? (Rj. 4.545%)
- **c)** Da li je prinos do dospijeća takve obveznice manji ili veći od trenutnog prinosa? Zašto? Objasnite da li će u trenutku dospijeća doći do gubitka ili dobitka kapitala. (Rj: prinos do dospijeća je manji od trenutnog prinosa jer se kuponska obveznica prodaje po cijeni većoj od nominalne)

5. Pretpostavimo da promatrate kuponsku obveznicu s dospijećem od 20 mjeseci, nominalne vrijednosti 100 koja isplaćuje kupone na polugodišnjoj razini (zadnja isplata u trenutku dospijeća, a prva nakon dva mjeseca od danas: broji se unazad šest mjeseci od dospijeća) i kuponska stopa iznosi 6% (na godišnjoj razini!). Ukoliko je kamatna stopa zadana funkcijom $r(t)=0.0525+\frac{\ln(1+2t)}{200}$, odredite cijenu takve obveznice. (**Rj**. Do isplate prvog kupona vrijedi kamatna stopa $r(0)$, nakon toga do isplate drugog kupona $r(2/12)$ itd.), 102.51 kn)

6. Pretpostavimo da ste danas investirali jednu kunu u beskuponsku obveznicu s dospijećem od godinu dana. Na kraju svake godine reinvestiraju se isplate u nove obveznice istog tipa. Koliko obveznica ste u mogućnosti kupiti na kraju 9. godine? Izrazite rješenje u terminima implicirane neprekidne kamatne stope. (**Rj**: e^{10r})

7. Pretpostavimo da je obračun kamata neprekidni te da se na tržištu trguje obveznicom s dospijećem od godinu dana po cijeni $B(0,12)$=0.87 kn. Izračunajte kamatnu stopu nakon šest mjeseci, ako investiranje na horizont od šest mjeseci daje logaritamski prinos od 14%. (**Rj**. Takva situacija s beskuponskom obveznicom nije moguća budući da bi uz zadani logaritamski prinos cijena obveznice već nakon 6 mjeseci trebala biti 1.000738, dakle veća od nominalne)

8. Pretpostavimo da investiramo sumu od 1000 kn u obveznicu s dospijećem od 4 godine, nominalne vrijednosti 100 koja isplaćuje godišnje kupone u iznosu od 10 kn. Pretpostavimo da se takvim obveznicama trenutno na tržištu trguje cijenom od 91.78 kn.

a) Odredite prinos u trenutku 0 (Riješite jednadžbu) (**Rj**. r=12% uz neprekidno ukamaćivanje)

b) Pretpostavimo da ste isplaćeni novac u obliku kupona nakon godinu dana reinvestirali u obveznice iste vrste, ali s dospijećem od tri godine. Kolika je ukupna vrijednost vaše imovine nakon tri godine od trenutka kupnje obveznica s dospijećem od tri godine ukoliko a) kamatna stopa ostane nepromijenjena i b) ukoliko kamatna stopa padne za 2 pp u trenutku prodaje prvog kupona i ostane na toj razini kroz naredne tri godine. Što možete zaključiti? (Rj. a) V(4)=1616.046571 kn, b) V(4)=1599.088304 kn. Zbog pada kamatne stope ukupna je vrijednost imovine manja.

d) Odredite kolika bi trebala biti stopa ukoliko želite ostvariti logaritamski povrat na investiciju od a) 12% i b) 14% (Rj. Tako mali logaritamski povrat nije moguće ostvariti jer već samo uz početno investiranje u takve obveznice, bez reinvestiranja kupona svake godine, logaritamski povrat je jednak 42.22%

9. Pretpostavimo da su trenutno uvjeti na tržištu takvi da je $B(0,T) < B(0,T+1)$, pri čemu $B(0,T)$ predstavlja cijenu beskuponske obveznice u trenutku 0 s dospijećem T.

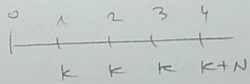
a) Kako se navedena nejednakost reflektira na odnos odgovarajućih prinosa y(0,T) i y(0,T+1)?
b) Da li to ujedno predstavlja mogućnost arbitraže?
c) Odredite strategiju arbitraže
d) Interpretirajte situaciju na tržištu koja je određena takvom nejednakosti cijena obveznica.

10. Na tržištu se nude beskuponske obveznice s dospijećem od godinu dana i nominalne vrijednosti 100 po cijeni 95.12, kao i kuponske obveznice nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od dvije godine i kuponskom stopom 10 % po cijeni 104.95. Pretpostavka investitora je da će se nakon godinu dana na tržištu također nuditi beskuponske obveznice s dospijećem od godinu dana i nominalne vrijednosti 100 po cijeni 95.12.
Da li investitor može ostvariti strategiju za arbitražu? Ako da, odredite ju. Pretpostavlja se da je dopuštena kratka pozicija u obveznici, odnosno izdavanje obveznica ili prodavanje obveznica koje ne posjedujete.

11. Pretpostavimo da se trenutno na tržištu trguje obveznicama nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od 2 i 4 godine čije su cijene B(0,4)= 93.20 te B(0,2)= x, pri čemu je x > 93.20, te da su prinosi do dospijeća tih obveznica nezavisni o dospijeću, odnosno da vrijedi $y(0,2)=y(0,4)$. Također, pretpostavimo da će se u trenutku t=2 godine trgovati obveznicom s dospijećem od dvije godine cijene B(2,4)= c, c > 0, nominalne vrijednosti 100 i prinosa do dospijeća $y(2,4)$.
a) odredite koja bi relacija trebala vrijediti između cijena x i c ukoliko na tržištu ne postoji mogućnost arbitraže. (**Rj. xc=0.9320**)
b) odredite koja bi relacija trebala vrijediti između cijena x i c ukoliko na tržištu postoji mogućnost arbitraže. U tom slučaju, odredite strategiju arbitraže. (**Rj. xc > 0.9320 ;** u t=0 izdamo B(0,4)/B(0,2) obveznica B(0,2) i kupimo 1 obveznicu B(0,4); V(0)=0; u t=2 podmirimo obaveze koje dolaze na naplatu zbog izdavanja obveznice B(0,2) tako što izdamo odgovarajuću količinu obveznica B(2,4); V(2)=0; u t=4 dobivamo 1 n.j. od obveznice B(0,4), a na naplatu dolazi nominalna vrijednost za svaku od obveznica B(2,4), njih 0.9320/(xc).

3. ZADACI

① $N=100$ naprekidno (kontinuirano) ukamaćivanje
$T = 4$ god.
$K = 5$ (godišnji)



a) $y = 8\%$

$$B(0,T) = K \cdot \sum_{i=1}^{4} e^{-y \cdot i} + N e^{-4 \cdot y}$$

→ PAD kamatne stope uzrokuje RAST cijene obveznica

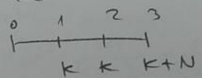
$B(0,4) = 89.055$ kn

b) $y = 5\%$

$$B(0,T) = K \cdot \sum_{i=1}^{4} e^{-y \cdot i} + N e^{-4y}$$

$B(0,T) = 99.55$ kn

② $N=100$ $C = N = 100$ → obveznica se trguje po nominali
$K = 8$ (godišnji)
$T = 3$ god.



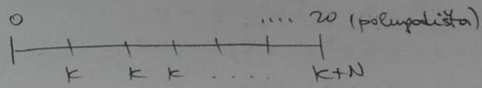
$y = ?$

$$C = K \cdot \sum_{i=1}^{3} e^{-y \cdot i} + N \cdot e^{-3y}$$

$$100 = 8\left(e^{-y} + e^{-2y} + e^{-3y}\right) + 100 e^{-3y}$$

$y = r = \underline{7.696\%}$

③ kuponska obveznica
$N = 1000$
$T = 10$ god.
$K = 18$ (polugodišnji)



a) $r = 4\%$ (godišnje) uz složeno polug. ukam.

$B(0,10) = ?$ $r_R = \frac{0.04}{2} = \frac{0.04}{2}$

$$B(0,10) = K \cdot \sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(1+r_R)^i} + N \cdot \frac{1}{(1+r_R)^{20}}$$

$\boxed{B(0,10) = 967.297 \text{ kn}}$

b) prodaje se po manjoj od nominalne pa vrijedi
kuponska stopa < trenutni prinos < prinos do dospijeća

4. kuponska obveznica

$N = 100$

$T = 5$ god. (10 polugodišta)

$B(0,T) = 1100$

$K = 25$ (polugodišnje)

---

a) prinos do dospijeća $(r) = ?$

$$B(0,T) = K \cdot \sum_{i=1}^{10} e^{-\frac{r}{2} \cdot i} + N \cdot e^{-\frac{r}{2} \cdot 10}$$

$r = 2.82\%$

b) trenutni prinos takve obveznice?

$$CY = \frac{25}{1100} = 2.2727\% \text{ (polugodišnji)}$$

$$CY = 2.2727 \cdot 2 = \underline{4.545\%} \text{ (godišnji)}$$

c) jel PDD $\times$ trenutnog prinosa

PDD < trenutnog prinosa jer se obveznica prodaje po cijeni već od nominalne. Doći će do gubitka kapitala

5. kuponska obveznica

$T = 20$ mjeseci

$N = 100$ godišnja razina $\rightarrow$ **$K = 3$** (polug.)

$K = 6\%$ (na polugodišnjoj razini) isplaćuje

$r(t) = 0.0525 + \dfrac{\ln(1+2t)}{200}$ (godišnja)

C_K

0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 mj.

K K K K+N

$r(0)$ $r\left(\frac{2}{12}\right)$ $r\left(\frac{8}{12}\right)$ $r\left(\frac{14}{12}\right)$

$C_K = ?$

$$C_K = K \cdot e^{-\frac{r_1}{12} \cdot 2} + K \cdot e^{-\frac{r_2}{12} \cdot 8} + K \cdot e^{-\frac{r_3}{12} \cdot 14} + (K+N)\, e^{-\frac{r_4}{12} \cdot 20}$$

$r_1 = r(0) = 0.0525$ (do isplate prvog kupona vrijedi to)

$r_2 = r\left(\frac{2}{12}\right) = 0.0539$ (do isplate drugog kupona vrijedi to)

$r_3 = r\left(\frac{8}{12}\right) = 0.0567$

$r_4 = r\left(\frac{14}{12}\right) = 0.0585$

$\boxed{C_K = 102.107 \text{ kn}}$

POGLEDAJ

6) $T = 1$ god., BKO

investirali 1 kn

→ reinvestiraju se isplate u nove obveznice istog tipa

koliko mogu kupiti obveznica na kraju 9. godine?

$B(0,T) = N \cdot e^{-rT}$

$B(0,T) = 1 \cdot e^{-r}$

→ na početku mogu kupiti: $\# \frac{1}{B(0,T)} = \frac{1}{e^{-r}} = e^{r}$

→ na početku 2. godine mogu kupiti: $\frac{1 \cdot e^{r}}{e^{-r}} = e^{2r}$

⋮

→ na početku 9. godine mogu kupiti: $\# \frac{1 \cdot e^{8r}}{e^{-r}} = e^{9r}$

→ na kraju devete dobijem $1 \cdot e^{9r}$, mogu kupiti: $\# \frac{1e^{9r}}{e^{-r}} = e^{10r}$

7) neprekidni obračun kamata

0 6 12 mjeseci

B(0,12) B(6,12)

$T = 1$ god.

$B(0,12) = 0.87$ kn

ln prinos $= 14\%$ (horizont ulaganja = 6 mjeseci)

$y(6) = ?$ (kamatna stopa nakon 6 mjeseci)

$B(0,12) = N \cdot e^{-T \cdot y(0)}$

$y(0) = 13.926\%$

$\ln B(6,12) - \ln B(0,12) = 14\%$

$\ln B(6,12) - \ln e^{-y(0)} = 14\%$

$\ln B(6,12) = 14\% - 13.926\%$

$B(6,12) = e^{\frac{0.074}{100}}$

$B(6,12) = 1.00074$ kn $> N$ već nakon 6 mjeseci ⇒ NIJE MOGUĆE

(8). investiramo sumu 1000kn

$T = 4$ god.

$N = 100$

$K = 10$ (godišnji kuponi)

$C_K = 91.78$ kn

---

a) prinos u trenutku 0 =?

$$C_K = K\sum_{i=1}^{4} e^{-y\cdot i} + Ne^{-y\cdot 4}$$

$$C_K = Ke^{-y} + Ke^{-2y} + Ke^{-3y} + (K+N)e^{-4y}$$

$$\underline{y(0) = 12\%}$$

b) – nakon godinu dana reinvestiramo kupone u istu obveznicu $T = 3$ god.

A) $V(4) = ?$ $r = 12\%$

B) $V(4) = ?$ $r = 10\%$

0	1	2	3	4
C_K	K	K	K	$K+N$
	$B(1,4)$	$B(2,4)$	$B(3,4)$	

u t=0 kupili smo: $\# \frac{1000}{91.78} = \underline{10.896}$ obveznica

A slučaj:

u t=1 od kupona dobijemo: 10.896 obv. $\cdot 10 = \underline{108.96\text{kn}}$

- u tom trenutku obveznica vrijedi:

$$B(1,4) = Ke^{-y} + Ke^{-2y} + (K+N)e^{-3y} \quad ; y = 12\%$$

$$\underline{B(1,4) = 93.48\text{kn}}$$

→ kupimo: $\# \frac{108.96}{93.48} = \underline{1.166}$ obveznica $B(1,4)$ u trenutku $t = 1$

→ sada imam $10.896 + 1.166 = \underline{12.062}$ obveznica ukupno

u t=2 od kupona dobijem: $12.062 \cdot 10 = \underline{120.62}$ kn

→ obveznica vrijedi: $B(2,4) = Ke^{-y\cdot 1} + (K+N)e^{-y\cdot 2}$

$$\underline{B(2,4) = 95.398\text{ kn}}$$

→ kupimo: $\# \frac{120.62}{95.398} = \underline{1.2644}$ obveznica $B(2,4)$ u trenutku $t = 2$

→ sada ukupno imam: $12.062 + 1.264 = \underline{13.326}$ obveznica u t=3 → od kupona dobijem: 13.326 · 10 = 133.26 kn

→ u tom trenutku obveznica vrijedi: $B(3,4) = (K+N)e^{-y} = 97.56$ kn

→ kupim obv. B(3,4): $\# \frac{133.26}{97.56} = 1.366$ obveznica

→ ukupno imam: 13.326 + 1.366 = 14.692 obveznica

u t=4

$V(4) = N \cdot 14.692 + 10 \cdot 14.692$

$\boxed{V(4) = 1616.12 \text{ kn}}$

B SLUČAJ) $y = 10\%$

u t=0 kupili smo 10.896 obveznica

u t=1 → od kupona dobijem: 10.896 · 10 = 108.96 kn

→ obveznica $B(1,4) = Ke^{-y} + Ke^{-2y} + (K+N)e^{-3y} = 98.726$ kn

→ kupim: $\# \frac{108.96}{98.726} = 1.1037$ obveznica B(1,4)

→ ukupno imam: 10.896 + 1.1037 = 11.9997 obveznica

u t=2 → od kupona dobijem: 11.9997 · 10 = 119.997 kn

→ obveznica vrijedi $B(2,4) = Ke^{-y} + (K+N)e^{-2y} = 99.1087$ kn

→ kupim: $\# = \frac{119.997}{99.1087} = 1.2108$ obveznica B(2,4)

→ ukupno imam: 11.9997 + 1.2108 = 13.2105 obveznica

u t=3 → od kupona dobijem: 13.2105 · 10 = 132.105 kn.

→ obveznica vrijedi $B(3,4) = (K+N)e^{-y} = 99.5321$ kn

→ kupim: $\# = \frac{132.105}{99.5321} = 1.3273$ obveznica

→ ukupno imam: 14.5378 obveznica

u t=4

→ dobijem:

$V(4) = N \cdot 14.5378 + K \cdot 14.5378$

$\boxed{V(4) = 1599.158 \text{ kn}}$

→ zbog pada kamatne stope vrijednost imovine je manja

d) log povrat A) 12%

B) 14%

→ bez reinvestiranja:

0	1	2	3	4
	K	K	K	V(4) K+N

u t=0 kupim: $\# \frac{1000}{91.78} = 10.896$ dvez

$\ln V(4) - \ln 1000 = x$

$V(4) = 10.896 \cdot \overset{N}{100} + 10.896 \cdot \overset{K}{10} \cdot 4 = 1525.44$ kn

$\ln 1525.44 - \ln 1000 = 42.22\%$

→ dakle s reinvestiranjem nije moguće tako mali log povrat, jer i bez reinvestiranja je on 42,22%

(10)

BKO: T=1 god, N=100, B(0,1) = 95.12kn, B(1,2) = 95.12kn (u t=1)

KO: T=2 god, N=100, K=10%, B(0,2) = 104.95 kn

BK: $B(0,1) = N \cdot e^{-y}$ → $y_{BK}(0,1) = 5\%$ → IZDAMO njih

K: $B(0,2) = K \cdot e^{-y} + (K+N)e^{-2y}$ → $y_K(0,2) = 7\%$ → INVESTIRAMO u njih jer imaju veći prinos do dospijeća

u t=0 → izdamo 1 BKO B(0,1)

→ za to dobijemo: $1 \cdot 95.12 = 95.12$kn

→ kupimo KOB(0,2): $\# = \frac{95.12}{104.95} = 0.9063$ komada dvenica

V(0) = 0

u t=1 → moramo vratiti 1·100 kn (BKO) −100 kn

→ od kupona dobijem: 0.9063dov. · 10 = 9.063kn

} $\frac{90.937 \text{ kn moram}}{\text{platiti}}$

→ izdam dvenicu B(1,2) i to komada: $\# = \frac{90.937}{95.12} = 0.956$ komada

V(1) = 0

u t=2 → od kuponske B(0,2) dobivam: $0.9063 \cdot (100+10) = 99.693$kn

→ moram platiti za BK B(1,2): $0.956 \cdot 100 = -95.6$kn

$V(2) = 99.693 - 95.6 = 4.093\text{kn} > 0$ MOŽE OSTVARITI STRATEGIJU ARBITRAŽE

3) $N=100$

$B(0,4)=93{,}20$

$B(0,2)=X \;;\; X>93.20$

$y(0,2)=y(0,4)$ - NEZAVISNI O DOSPIJEĆU

$B(2,4)=c \;,\; c>0$

$N=100,\; y(2,4)$

a) odredi relaciju koja bi trebala vrijediti između cijena X i c ako na tržištu ne postoji mogućnost arbitraže.

$$\frac{B(0,T)}{N(0,T)}=\frac{B(0,t)}{N(0,t)}\cdot\frac{B(t,T)}{N(t,T)}$$

$$\frac{B(0,4)}{N(0,4)}=\frac{B(0,2)}{N(0,2)}\cdot\frac{B(2,4)}{N(2,4)}$$

$$\frac{93.20}{100}=\frac{X}{100}\cdot\frac{c}{100}$$

$$\boxed{X\cdot c=9320}$$

b) Ako postoji mogućnost arbitraže, odredi strategiju

$B(0,2) > B(0,4)$

$\downarrow$ izdajem $\qquad \downarrow$ investiram u nju (kupujem)

u $t=0$: $\rightarrow$ izdam 1 obveznicu $B(0,2)$

$\rightarrow$ za to dobijem $B(0,2)$ kn

$\rightarrow$ kupim obveznicu $B(0,4)$ komada: $\# = \frac{B(0,2)}{B(0,4)} = \frac{X}{93.20}$

$V(0)=0$

u $t=2$: moram vratiti -100 kn (za obveznicu $B(0,2)$), ali nemam

$\rightarrow$ izdajem obveznicu $B(2,4)$ i to komada: $\# = \frac{100}{B(2,4)} = \frac{100}{c}$ komada

$V(2)=0$

u $t=4$: $\rightarrow$ dobijem od obveznice $B(0,4)$: $100\cdot\frac{X}{93.20}$

$\rightarrow$ moram vratiti: $-\frac{100}{c}\cdot 100$ (nominala) za obveznicu $B(2,4)$

$$\frac{100X}{93.20}-\frac{100}{c}\cdot 100=\frac{Xc-9320}{93.20c}\cdot 100>0$$

za $Xc > 9320$ postoji strategija arbitraže

II: Slučaj

→ izdajem $B(0,4)$

→ kupujem $B(0,2)$

u $t=0$: → izdajem 1 $B(0,4)$: dobijem $B(0,4)$ kn $= 93{,}20$ kn

→ kupujem $B(0,2)$: # $\frac{93{,}20}{x}$

$V(0) = 0$

u $t=2$: → dobijem od $B(0,2)$: $\frac{93.20}{x} \cdot 100$ kn

→ s tim novcem kupim $B(2,4)$: # $\frac{\frac{93.20}{x} \cdot 100}{B(2,4)_{\cdot c}} = \frac{9320}{x \cdot c}$

$V(2) = 0$

u $t=4$: → za 1 $B(0,4)$ moram platiti -100 kn (nominalna)

→ od $B(2,4)$ dobijem $\frac{9320}{x \cdot c} \cdot 100$ kn

$-100 + \frac{9320}{xc} \cdot 100 = 100\left(-1 + \frac{9320}{xc}\right)$ je veće od nula za $xc < 9320$