Financijska matematika

Doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 8.6. 2018.

3. dio: Dinamičko modeliranje cijena vrijednosnica. Financijsko inženjerstvo.

- Prethodno smo analizirali vrednovanje opcija uz pretpostavku da se cijena vrijednosnice kreće po modelu binomnog stabla

  - Binomni model, iako popularan zbog svoje jednostavnosti i intuitivnog načina vrednovanja opcija, također u sebi krije dublju poruku za vrednovanje izvedenica:

    - Uz određene pretpostavke o <u>nesigurnosti glede kretanja cijene bazične imovine</u> te uz <u>zadanu nerizičnu kamatnu stopu</u>, pokazuje da je **vrednovanje** opcija i općenito imovine koja ovisi o cijeni bazične imovine, **moguće**!

- Problem vrednovanja opcija pomoću modela binomnog stabla sastoji se u tome da nije moguće naći jednostavne formule u zatvorenoj formi za samo cijenu financijske izvedenice
  - Prethodno smo usvojili princip koji **nije analitički**, već (iz)računski

- **Cilj:** raspolagati *formulom* za vrednovanje opcija (poput Black-Scholesove)

→ vjerojatnosne i statističke pretpostavke na kretanje cijene bazične imovine

3.1. Lognormalna distribucija

- Motivacija: osnovna pretpostavka Black-Scholesovog modela za vrednovanje opcija je da su cijene (dionica) **log-normalno distribuirane**

  - Što to znači?
    - Najjednostavnije rečeno: slučajna varijabla X je log-normalno distribuirana, ako je slučajna varijabla $\log X$ normalno distribuirana.
    - Log-normalna distribucija je logičniji izbor glede modeliranja cijena financijske imovine zbog nenegativnosti cijena

  - Koji su parametri takve distribucije? Zašto je lognormalna distribucija prikladna distribucija za cijene dionica?

- **Primjer.** Pretpostavimo da su povrati na portfelj XY normalno distribuirani, $N(\mu, \sigma^2)$ pri čemu su očekivanje i varijanca izraženi na godišnjoj razini. Pretpostavimo nadalje da je trenutna vrijednost portfelja dana sa X_0. Tada je $log X_T$, odnosno logaritamska funkcija vrijednosti portfelja u trenutku T, normalno distribuirana:

$$\ln X_T \sim N\left(\ln\left(X_0\right) + \mu T, \sigma^2 T\right)$$

  - Vrlo često se log-normalnom distribucijom modelira ona varijabla koja se može prikazati kao produkt od mnogo nezavisnih slučajnih varijabli od kojih je svaka pozitivna (diskontni faktor dugog roka, gušenje signala uzrokovano sporom promjenom jakosti…)

Očekivanje i varijanca lognormalne distribucije.

$$Y \sim \ln N\left(\mu, \sigma^2\right),$$ može poprimiti samo pozitivne vrijednosti

$$f_Y(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E\left[Y\right] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$Var\left[Y\right] = \left(e^{\sigma^2} - 1\right)e^{2\mu + \sigma^2}$$

- Kako izgledaju cijene dionica te koje su razumne pretpostavke o njihovom ponašanju kroz vrijeme?

- Cijene dionica i mnogih financijskih instrumenata su slučajne veličine. Za danu cijenu na *današnji* dan, ne znamo njihovu cijenu u sljedećem periodu.

- Koja je njihova distribucija? Jedan od načina kako odgovoriti na takvo pitanje je analizirati statistička svojstva cijena dionica. Neke od razumnih pretpostavki bi bile:

  - Promjene u cijeni dionica su neprekidne. Kroz kratke vremenske periode, promjene u cijeni su jako male i teže ka nuli kada vremenski raspon promatranja promjene teži nuli

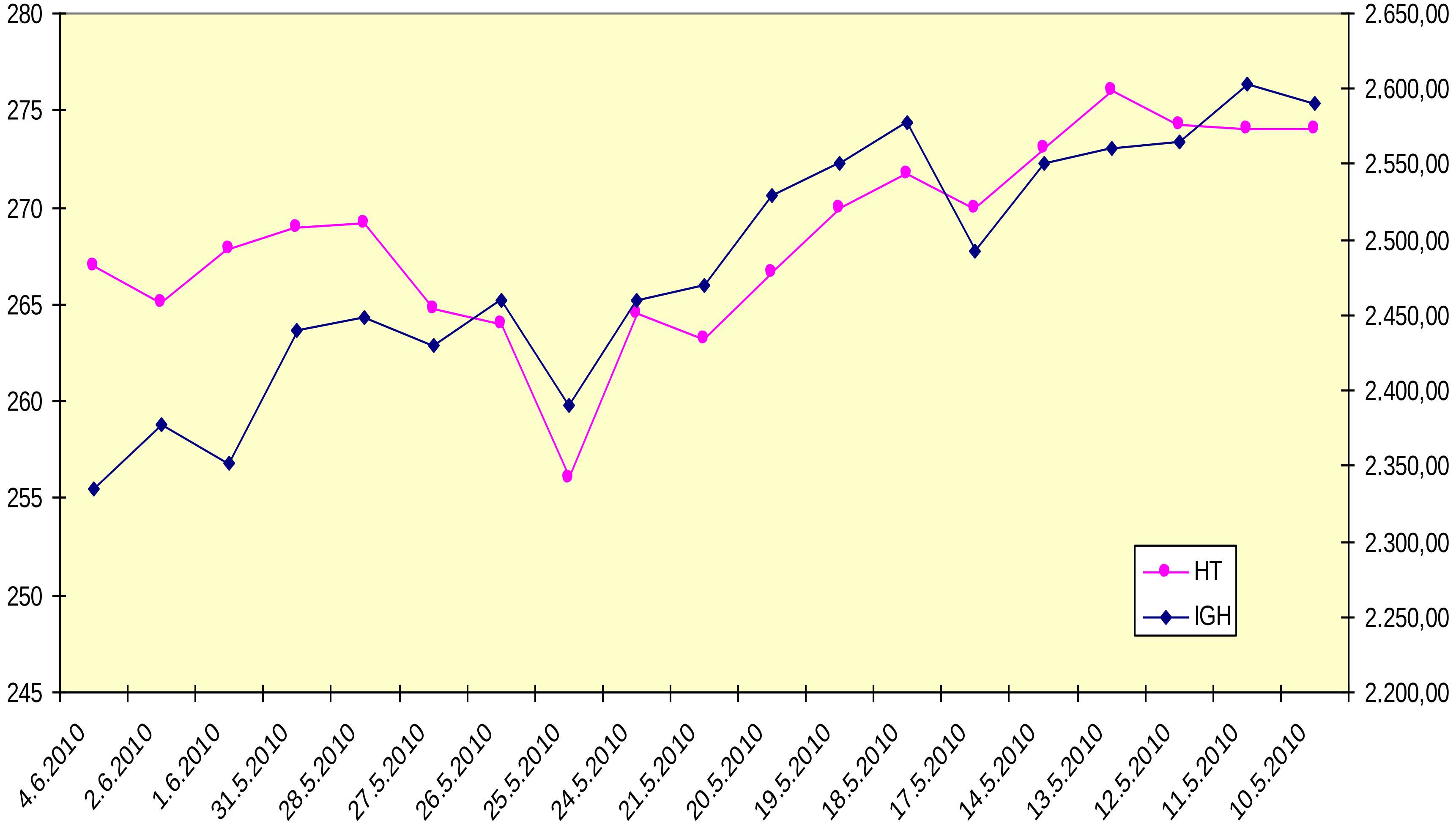
- Cijena neke dionice nije nikad nula. To svojstvo ujedno znači da isključujemo dionice “mrtvih” kompanija

---

- Prosječni prinos od držanja dionice *teži* porastu kroz vrijeme. To **ne znači** da znamo da će držanjem neke dionice na duže vrijeme implicirati i veći prinos, već samo da **očekujemo** da će držanjem rizične imovine kroz duži period će dovesti do većeg *prosječnog* prinosa.

- Nesigurnost koja je povezana s prinosom na držanje dionice također teži porastu s povećanjem perioda držanja: drugim riječima, uz danu današnju cijenu dionice, varijanca cijene dionice u sljedećem periodu je mala, ali je varijanca cijene dionice u sve daljim i daljim nadolazećim periodima sve veća i veća.

Zaključne cijene nekih dionica



Koje karakteristike primjećujemo?

- *Iregularne krivulje* (trajektorije procesa)
- Krivulje koje su neprekidne, bez *skokova*
- U određenom vremenskom trenutku, prosjek kroz sve reprezentativne krivulje je veći od početne cijene same dionice. Što dalje u vremenu gledamo, taj prosjek postaje sve veći
- Standardna devijacija je sve veća i veća što dalje u vremenu gledamo

- Označimo sa S_t cijenu jednog udjela neke dionice u trenutku t
- Log-normalna distribucija pretpostavlja da je prirodni logaritam slučajne varijable

$$X = 1 + \frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \frac{S_{t+dt}}{S_t}$$

normalno distribuiran s očekivanjem μ i varijancom σ^2

- Označimo sa $\boldsymbol{r_{dt}}$ stopu prinosa (slučajna varijabla!) na intervalu $[t,t+dt]$. Uz pretpostavku **kontinuiranog** ukamaćivanja tada vrijedi

$$S_{t+dt} = S_t e^{r_{dt} dt}.$$

- Ukoliko pretpostavimo normalnu distribuiranost za slučajnu varijablu S_{t+dt}/S_t, tada u terminima stope prinosa r_{dt} pretpostavljamo **normalnu distribuiranost** za slučajnu varijablu

$$\frac{S_{t+dt}}{S_t} = e^{r_{dt} dt}$$

odnosno pretpostavljamo da je stopa prinosa kroz interval dt normalno distribuirana s očekivanjem μdt i varijancom $\sigma^2 dt$.

- **Drugim riječima,** pretpostavljamo da vrijedi

$$\boxed{\frac{S_{t+dt}}{S_t} = e^{\mu dt + \sigma\sqrt{dt}Z}}$$

pri čemu je Z **standardna normalna** slučajna varijabla, tj. Z~N(0,1)

- U slučaju da je varijanca jednaka nuli, imamo

$$S_{t+dt} = S_t e^{\mu dt}$$

što ujedno govori da proces cijene vrijednosnice raste u skladu s eksponencijalnom stopom rasta **sa sigurnošću**.

- U tom je slučaju vrijednosnica poput nerizične obveznice sa stopom prinosa μ uz kontinuirano ukamaćivanje.

- Koristeći difuzijske procese, log-normalni proces cijene je geometrijska difuzija:

$$\boxed{\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW}$$

$\mu = \text{drift}$

$\sigma = \text{volatilnost}$

pri čemu je W Wienerov proces ("bijeli šum"), odnosno

$$dW = Z\sqrt{dt}$$

pri čemu je Z standardna normalna slučajna varijabla.

Pretpostavimo nadalje da je *volatilnost* $\sigma > 0$

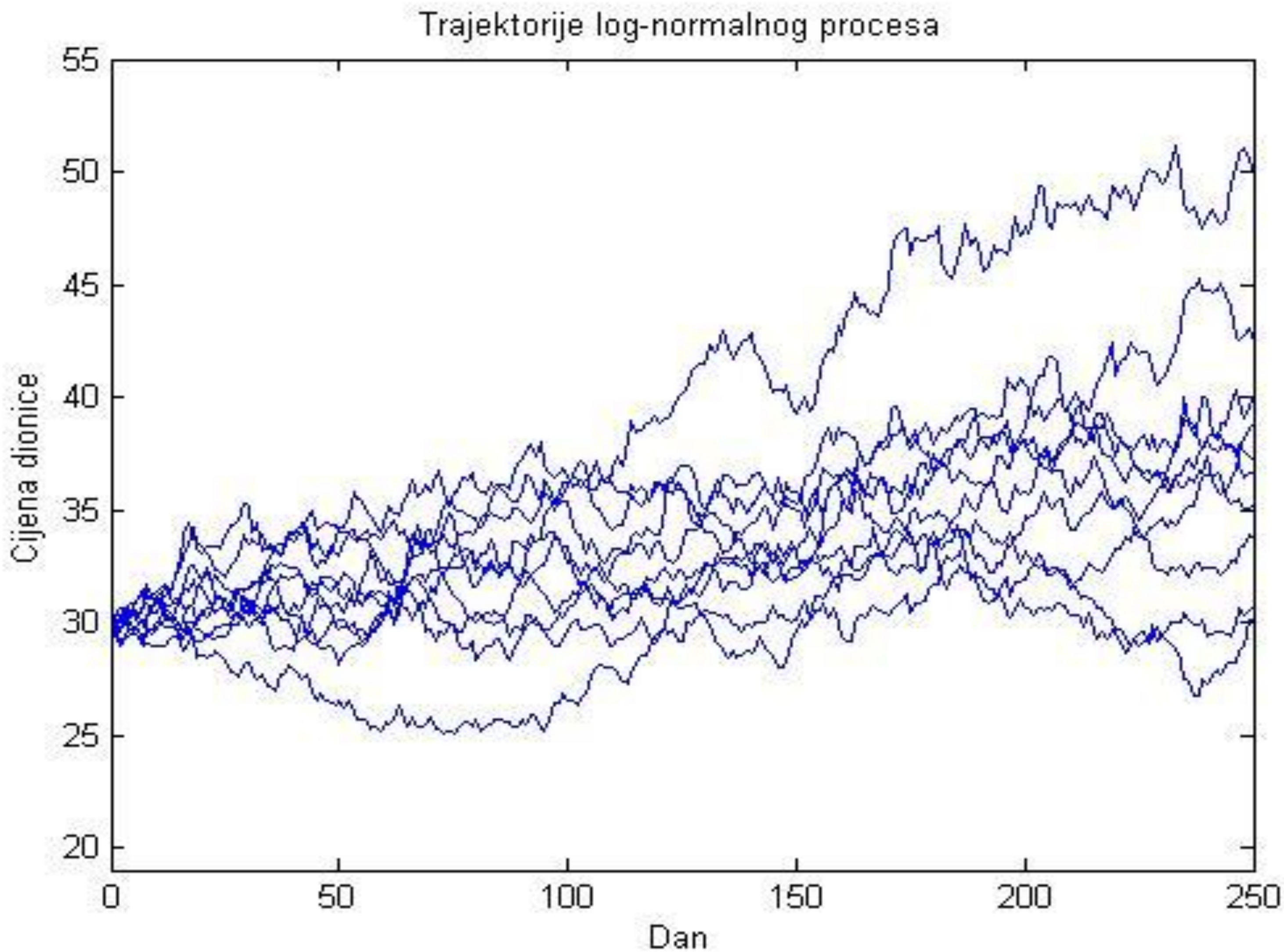
- Tada pretpostavka log-normalnosti kaže da iako postoji tendencija rasta cijene dionice, element koji uvodi nesigurnost (slučajnost-normalna distribucija) u model mora biti uzet u obzir
- Simulacije: generiramo niz standardnih normalnih slučajnih varijabli *Z*, ulazni parametri su očekivanje i varijanca za log-normalni proces cijene neke vrijednosnice za određeni vremenski period *dt*, početna cijena vrijednosnice S_0. Tada vrijedi

$$S_{dt} = S_0 e^{\mu dt + \sigma \sqrt{dt} Z}$$

- Vrlo često *dt*=1/250=0.004, tj. 1 dan izražen na godišnjoj razini

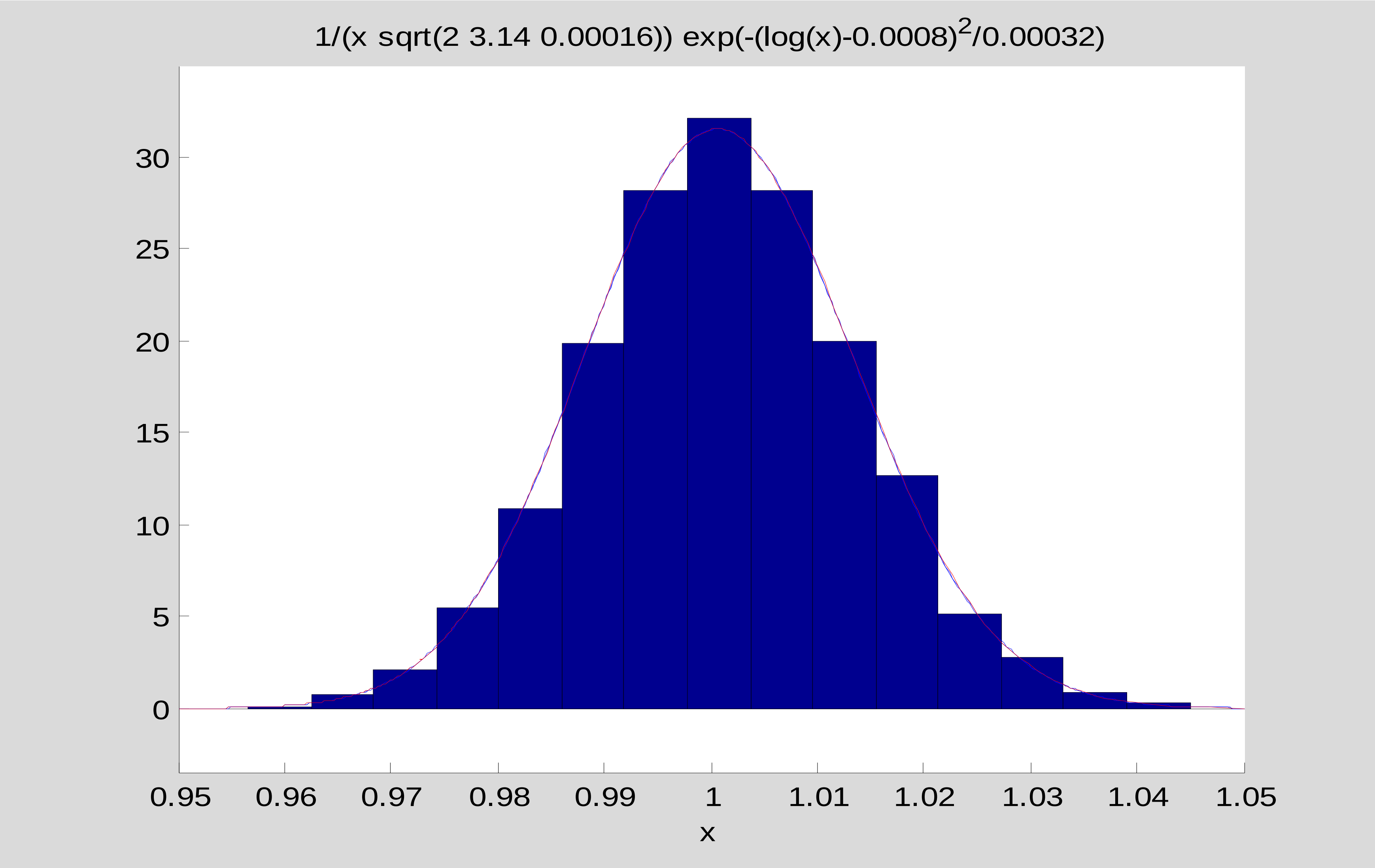
- Primjer. Simulirani proces cijene:

$dt=1/250,\ \mu = 20\%,\ \sigma = 20\%,\ S_0 = 30$



Histogram log-normalne distribucije

$$\frac{S_{t+dt}}{S_t} = e^{\mu dt + \sigma \sqrt{dt} Z}$$



Računanje parametara log-normalne distribucije na bazi cijena dionica

- **Cilj:** kako upotrijebiti podatke o cijenama dionica kroz vrijeme upotrijebiti za računanje očekivanja i varijance kao parametre potrebne za log-normalnu distribuciju

- Primijetimo odmah da vrijedi:

$$E\left[\ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right)\right] = E\left[\mu dt + \sigma\sqrt{dt}Z\right] = \mu dt$$

$$Var\left[\ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right)\right] = Var\left[\mu dt + \sigma\sqrt{dt}Z\right] = \sigma^2 dt$$

odnosno

$$\mu = \frac{E\left[\ln\left(S_{t+dt} / S_t\right)\right]}{dt}, \qquad \sigma^2 = \frac{Var\left[\ln\left(S_{t+dt} / S_t\right)\right]}{dt}$$

podaci

- Dakle, ne procjenjujemo parametre log-nomalne slučajne varijable S_t, već **normalne** slučajne varijable $ln(S_{t+dt}/S_t)$

Wienerov proces (Brownovo gibanje) – cont

- **Definicija**. Neka je (Ω, F, P) vjerojatnosni prostor. Slučajni proces $\{W_t, t \in [0,T]\}$ adaptiran s obzirom na filtraciju $\{F_t, t \in [0,T]\}$ je Wienerov proces ili Brownovo gibanje ako
  - Za fiksni $w \in \Omega$, funkcija $t \in [0,T] \mapsto W_t(w)$ je g.s. neprekidna
  - $P[W_0(w)=0]=1$, tj. proces kreće iz ishodišta
  - Za $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_k \le T$ su prirasti $W(t_1)$, $W(t_2)$- $W(t_1)$, $W(t_3)$- $W(t_2)$, …, $W(t_k)$- $W(t_{k-1})$ **nezavisni**
  - Vrijedi

$$W_{t_j}(w) - W_{t_{j-1}}(w) \sim N\left(0, t_j - t_{j-1}\right)$$

- Specijalno za $t_j = t$ i $t_{j-1} = 0$ imamo

$$W_t - W_0 = W_t \sim N(0,t)$$

$$E[W_t] = 0$$

$$Var[W_t] = t$$

→ **disperzija** procesa povećava se s vremenom

Svojstva Wienerovog procesa.

- **Svojstvo 1.** Wienerov proces je **martingal** u odnosu na filtraciju *F*.

  Dokaz: Potrebno je pokazati da za bilo koje t_1, t_2, $t_1 < t_2$, vrijedi

$$E[W_{t_2} \mid F_{t_1}] = W_{t_1}, \text{ odnosno } E[W_{t_2} - W_{t_1} \mid F_{t_1}] = 0.$$

No,

$$E[W_{t_2} - W_{t_1} \mid F_{t_1}] = nez.prirasta$$

$$= E[W_{t_2} - W_{t_1}] = \{W_t \sim N(0,t)\} = 0$$

što se i tvrdilo. $\square$

- **Svojstvo 2**. Prirasti Wienerovog procesa su stacionarni, tj. vrijedi

$$W_{t_j} - W_{t_{j-1}} \overset{D}{=} W_{t_j - t_{j-1}} \overset{D}{=} N(0, t_j - t_{j-1})$$

- **Generalizirani Wienerov proces** $\{ B_t \}$

$$B_t = mt + \sqrt{v} W_t$$

pri čemu je W standardni Wienerov proces, a m,v realne konstante takve da je $v > 0$.

3.2. Black-Scholesova formula

- Za detaljnu analizu potrebne su osnove *stohastičkog računa*
- Daje nam osnovne rezultate za određivanje cijene europske call (put) opcije
- Pretpostavimo da je dinamika cijene neke dionice dana sa

$$S_t = S_0 e^{mt+\sigma W_t}$$

pri čemu je W_t standardni Wienerov proces (odnosno S_t ima lognormalnu distribuciju)

- Pretpostavimo da promatramo europsku opciju na dionicu XYZ s dospijećem T i isplatnom funkcijom $f(S_T)$.
- Tada je (fer) **cijena takve opcije** dana sa

$$C_{op} = e^{-rT} E^{*}\left[f(S_T) \right]$$

pri čemu E^{*} predstavlja očekivanje u odnosu na vjerojatnost neutralnu na rizik prema kojoj je diskontirani proces cijene dionice XYZ, tj. $e^{-rt}S_t$, martingal.

- Kako odrediti vjerojatnost neutralnu na rizik?
  - Nužan uvjet, kao i u diskretnom slučaju, je da je očekivanje diskontiranog procesa cijene bazične imovine (dionice XYZ), tj. $e^{-rt}S_t$, konstantno (nezavisno o vremenu t)

- Računanje očekivane vrijednosti diskontiranog procesa cijene u odnosu na vjerojatnost P:

$$E\left[e^{-rt}S_t\right]=e^{-rt}E\left[S_0e^{mt+\sigma W_t}\right]=S_0E\left[e^{\sigma W_t+(m-r)t}\right]$$

$$=S_0\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(m-r)t}e^{\sigma x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx$$

$$=S_0e^{(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}}dx$$

$$=S_0e^{(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

- Ukoliko $m - r + \frac{1}{2}\sigma^2 \neq 0$ tada očekivanje diskontiranog procesa cijena ovisi o vremenu pa ne može biti niti martingal u odnosu na *P*.

- No, u slučaju da se vjerojatnosna mjera *P* modificirala na način da očekivanje diskontiranog procesa cijene uz tako modificiranu mjeru ne ovisi o vremenu, tada bismo dobili martingalno svojstvo u odnosu na takvu mjeru.

- Cilj: zamijeniti vjerojatnosnu mjeru *P* sa vjerojatnosnom mjerom P^* u odnosu na koju je proces

$$V_t = W_t + \frac{\left(m - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma}$$

Wienerov proces u odnosu na P^*.

- U tom slučaju će eksponencijalni faktor $e^{\left(m-r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t}$ nestati iz prethodnog očekivanja:

- **Postojanje** takve vjerojatnosti P^* je jedan od vrlo bitnih rezultata stohastičkog računa, *Girsanov teorem*.

- Uočimo da budući da je proces V_t standardni Wienerov proces u odnosu na P^*, tada je $E^*[V_t]=0$ i $Var^*[V_t]=t$

- U tom slučaju vrijedi

$$E^*\left[e^{-rt}S_t\right] = S_0 e^{-rt} E^*\left[e^{mt+\sigma W_t}\right] = S_0 E^*\left[e^{(m-r)t+\sigma W_t}\right]$$

$$= S_0 E^*\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma V_t}\right] = S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

$$= S_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-\sigma t)^2}{2t}} dx = S_0.$$

- Činjenica da očekivanje diskontiranog procesa cijene u odnosu na vjerojatnost P^* ne ovisi o vremenu t je nužan uvjet da diskontirani proces cijene bude martingal u odnosu na vjerojatnost P^* .

- Kako bismo pokazali da je diskontirani proces cijene doista martingal u odnosu na vjerojatnost P^*, potrebno je provjeriti i jači uvjet:

$$E^*\left[e^{-rt_2} S_{t_2} \mid S_{t_1}\right] = e^{-rt_1} S_{t_1}, \text{ za svaki } 0 < t_1 < t_2.$$

- Jednom kada se vjerojatnost P^* identificira, moguće je vrednovati cijene izvedenica.

- Pretpostavimo da promatramo europsku call opciju na dionicu XYZ, čija je izvršna cijena X i dospijeće T.

- Tada je (fer!) cijena europske call opcije jednaka

$$C_{op} = e^{-rt} E^{*}\left[\max\left(S_T - X, 0\right)\right]$$

- Uz pretpostavku log-normalnosti cijene dionice XYZ, u odnosu na vjerojatnost ***P***, te činjenice da je

$$V_T = W_T + \left(m - r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{T}{\sigma}$$

Wienerov proces u odnosu na ***P****** očekivanja 0 i varijance *T*, vrijedi:

$$C_{op} = E^{*}\left[e^{-rT}\left(S_T - X\right)^{+}\right] = E^{*}\left[\left(S_0 e^{\sigma V_t - \frac{1}{2}\sigma^2 T} - Xe^{-rT}\right)^{+}\right] \quad (*)$$

$$= S_0 N\left(d_1\right) - Xe^{-rT} N\left(d_2\right),$$

pri čemu su

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{X} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

i

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

je funkcija distribucije normalne slučajne varijable.

Formula (*) je poznata **Black-Scholesova formula** za europsku call opciju .

- **Napomena**. Prema prethodnoj formuli određena je cijena europske call opcije u trenutku t =0, odnosno *današnja* cijena takve opcije.
- Cijenu opcije s dospijećem T moguće je izračunati u bilo kojem trenutku t , $0< t <T$. U tom slučaju je preostalo vrijeme do dospijeća jednako T-t i vrijedi

$$C_{op}(t) = S_t N\left(d_1\right) - Xe^{-r(T-t)} N\left(d_2\right),$$

pri čemu su

pri čemu su

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S_t}{X} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

- **Zadatak.** Odredite cijenu europske put opcije izvršne cijene X i dospijećem T.