Fakultet elektrotehnike i računarstva **Zagreb, 17. 5. 2010.**
Financijska matematika
2. međuispit

1. (7 bodova) Odredite istinitost sljedećih tvrdnji (T/N) uz objašnjenje vašeg odgovora ili nadopunite rečenicu:

a) Ako su kroz tri dana trgovanja jednodnevni povrati na vrijednost neke imovine redom dani sa $R(0,1)$=1%, $R(1,2)$=7% i $R(2,3)$=5%, tada vrijednost imovine na kraju trećeg dana trgovanja ne može biti 1.13 puta veća od vrijednosti dionice na početku perioda.

b) Pretpostavimo da je cijena dionice XYZ zadana modelom n-periodnog binomnog stabla, pri čemu su jednoperiodni povrati dani sa 5% i -3%. Ukoliko je početna cijena dionice jednaka 100, tada vrijednost dionice XYZ u 10. periodu ne može biti veća od __________ niti manja od ___________.

c) Pretpostavimo da je tržište dano modelom binomnog stabla, pri čemu su moguće vrijednosti dionice na sutrašnji dan jednake 95 i 105, a vrijednost dionice danas jednaka je 100. Ako je pozitivna referentna kamatna stopa manja ili jednaka 4.5% tada ne postoji mogućnost arbitraže na zadanom tržištu.

d) Pretpostavimo da promatramo obveznicu s dospijećem 3 godine takvu da u trenutku t=0 vrijedi $B(0,3)$=0.96, a u slučaju rasta cijene obveznice vrijedi $B(1,3;g)$=0.9848 u trenutku t=1. Time je u trenutku t=1 implicirana kamatna stopa $y(1,3;\mathrm{g})$ koja je jednaka jednaka 0.766%.

e) Pretpostavimo da cijena dionice XYZ može poprimiti za mjesec dana vrijednosti 160 i 60. Europska put opcija na dionicu XYZ s dospijećem od mjesec dana i izvršne cijene 100 je u trenutku dospijeća bezvrijedna u slučaju da cijena dionice XYZ za mjesec dana naraste.

f) Pretpostavimo da je nerizična kamatna stopa r=0. Portfelj h=(-2/5,64) (-2/5 je udio u rizičnoj imovini, a 64 u nerizičnoj) je replicirajući portfelj za europsku put opciju iz e) dijela .

g) Ako za neku samofinancirajuću i predvidivu investicijsku strategiju ABC vrijedi da je $V(0)$=0, $V(1)$<0 i $V(2)$>0, V(3)>0, tada je ona dopustiva.

2. (3 boda) Pretpostavimo da se cijena dionice XYZ kreće po modelu n-periodnog binomnog stabla, pri čemu su g=10%, d=-5% i p_g=0.2 i vrijede za sva jednoperiodna podstabla. Odredite očekivanu cijenu dionice XYZ uz uvjet da vam je poznato da cijena dionice u trenutku 2 iznosi a, tj. odredite $E\left[S(10) \mid S(2)=a\right]$, ako znate da su svi jednoperiodni povrati nezavisni.

OKRENITE LIST!

3. (3 boda) Pretpostavimo da se na tržištu danas trguje dionicom XYZ po cijeni od 100 te da će u trenutku t=1 cijena dionice XYZ biti ili 150 ili 50. Pretpostavimo da je nerizična kamatna stopa r =10%.

a) Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik.

b) Odredite vrijednosti isplatne (ugovorne) funkcije europske put opcije na dionicu XYZ s dospijećem t=1 ukoliko je izvršna cijena put opcije 90.

c) Kolika je fer cijena europske put opcije (iz b) dijela zadatka) danas?

d) Odredite replicirajući portfelj (ako postoji) za europsku put opciju (iz b) dijela zadatka). Da li je takva put opcija dostižna?

4. (3 boda) Neka je $S(0) = 100$ i neka su mogući sljedeći scenariji za cijenu dionice XYZ:

Scenarij	$S(1)$	$S(2)$
w_1	105	99
w_2	105	108
w_3	110	109
w_4	110	115

Nadalje, neka je nerizična kamatna stopa na tržištu tokom ova dva perioda fiksna i iznosi r%. U ovisnosti o r diskutirajte postoji li taktika za arbitražu.

5. (3 boda) Zamislite da odlučujete pokrenuti igru na sreću sličnu lotu. Igra se sastoji od izvlačenja jedne kuglice iz bubnja u kojem se nalazi 30 bijelih, 15 plavih i 5 crvenih kuglica. Ukoliko igrač izvuče bijelu kuglicu, ne dobiva ništa, ukoliko izvuče plavu, dobiva određeni iznos x, a ukoliko izvuče crvenu kuglicu dobiva dvostruko više, $2x$. Da bi igrač odigrao jedno izvlačenje, mora uplatiti 50 kn (i taj novac mu se ne vraća niti u slučaju dobitka). Modelirajte igru tj. definirajte proces ukupnog dobitka do n-tog izvlačenja za igrača i odredite distribuciju dobitka u jednom bacanju, te odredite koliki mora biti x da bi igra bila fer. Ako vi kao organizator igre želite dugoročno profitirati, koje vrijednosti x dolaze u obzir?

6. (3 boda) Pretpostavimo da su u jednoperiodnom modelu cijene nerizične imovine $A(0)=100$, $A(1)=110$ dok su cijene dionice XYZ ovisno o različitim scenarijima dane tablicom:

Scenarij	$S(0)$	$S(1)$
ω_1	100	120
ω_2	100	115

Da li postoji strategija arbitraže u slučaju da tržište dozvoljava kratku poziciju u dionicama? Da li postoji strategija arbitraže u slučaju da tržište ne dozvoljava kratku poziciju u dionicama? Odredite strategiju arbitraže ukoliko je moguća.

7. (3 boda) Pretpostavimo da se na tržištu trenutno trguje dionicom XYZ po cijeni od 50 te da su dvije moguće cijene dionice XYZ za godinu dana jednake 40 i 55. Referentna kamatna stopa na tržištu je 5% i fiksna je kroz cijelu godinu. Pretpostavimo da Ivan čitajući Financial Post uočava da se europskom call opcijom na dionicu XYZ trguje po cijeni od 1.9, pri čemu je izvršna cijena te opcije 50, a dospijeće 1 godina. Ivan se pita da li je opcija fer vrednovana te vas glede toga pita za savjet budući da ste mu vi pričali o takvim financijskim instrumentima. Vi mu objašnjavate da koristite binomni model za vrednovanje opcija kako biste odredili da li postoji mogućnost arbitraže.

a) Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik (kako biste Ivanu mogli odrediti fer cijenu opcije).

b) Odredite fer cijenu europske call opcije.

c) Koje biste od sljedećih taktika preporučili Ivanu, na tržištu na kojem se trguje zadanom europskom call opcijom, dionicom XYZ i nerizičnom imovinom (obavezno obrazložite svoj odgovor!):

A) Budući da ne postoji mogućnost arbitraže ne investirati ništa.

B) Posuditi određenu količinu novca u banci, kupiti replicirajući portfelj za europsku call opciju i kratko prodati europsku call opciju.

C) Prodati replicirajući portfelj za europsku call opciju, kupiti europsku call opciju i ostatak novca oročiti u banci.