Financijska matematika

Dr. Petra Posedel

Vedran Horvatić, dipl. inž.

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 25.5.2010.

2.6. Unaprijedni ugovori.

- **Definicija. (Unaprijedni ugovor**, engl. forward contract) je **dogovor** za kupnju ili prodaju nekog vrijednosnog papira ili imovine na točno određeni datum u budućnosti T (vrijeme isporuke, engl. delivery time)

  - Kažemo da je stranka ugovora koja se usuglasi na **prodaju** vrijednosnog papira ili imovine zauzela *kratku unaprijednu poziciju*
  - Druga stranka dogovora, odnosno ona koja se obvezuje na **kupnju** vrijednosnog papira ili imovine kažemo da ima *dugu unaprijednu poziciju* u dogovoru.

- Koji su mogući razlozi ulaska u unaprijedni ugovor?
  - **Nezavisnost** o budućim (nepoznatim!) cijenama rizične imovine

- Primjeri.
  - Mogućnost da se **unaprijed** dogovori i fiksira prodajna cijena nekog proizvoda
  - Prilikom uvoza: kupnja strane valute po fiksnom tečaju na neki budući datum
  - Fond manager koji želi dogovoriti prodaju neke dionice po unaprijed poznatoj cijeni

- Unaprijedni ugovor je direktni dogovor između dviju strana

- Dogovora se direktnom (fizičkom) isporukom imovine na dogovoreni datum ili alternativno u gotovini

- $F(0,T)$ – unaprijedna cijena ugovora **dogovorenog** (izmjena ugovora) **u trenutku t=0**, s datumom **isporuke T**.
- $S(t)$ cijena (slučajna!) vrijednosnog papira ili imovine od interesa u trenutku t
- U trenutku dogovora (odnosno izmjene dogovora ili ugovora), **nema nikakvih isplata** s niti jedne od strana ugovora

Koje su mogućnosti dobitka odnosno gubitka pri trgovanju unaprijednim ugovorima?

- U trenutku isporuke T, stranka s dugom unaprijednom pozicijom (*kupac*) će **profitirati** od posjedovanja ugovora ukoliko će vrijediti $F(0,T) < S(T)$
  - Može kupiti vrijednosni papir ili imovinu po cijeni $F(0,T)$, iako je tržišna cijena vrijednosnice $S(T)$ čime može ostvariti (prodajom po tržišnoj cijeni) direktni profit od $S(T)- F(0,T) >0$.

- U trenutku isporuke T, stranka s kratkom unaprijednom pozicijom (*prodavač*) će u tom slučaju $[F(0,T) < S(T)]$ pretrpjeti direktni **gubitak** od posjedovanja ugovora, u iznosu od $S(T)$-$F(0,T)$ budući da će morati prodati vrijednosni papir ili imovinu ispod trenutne tržišne cijene

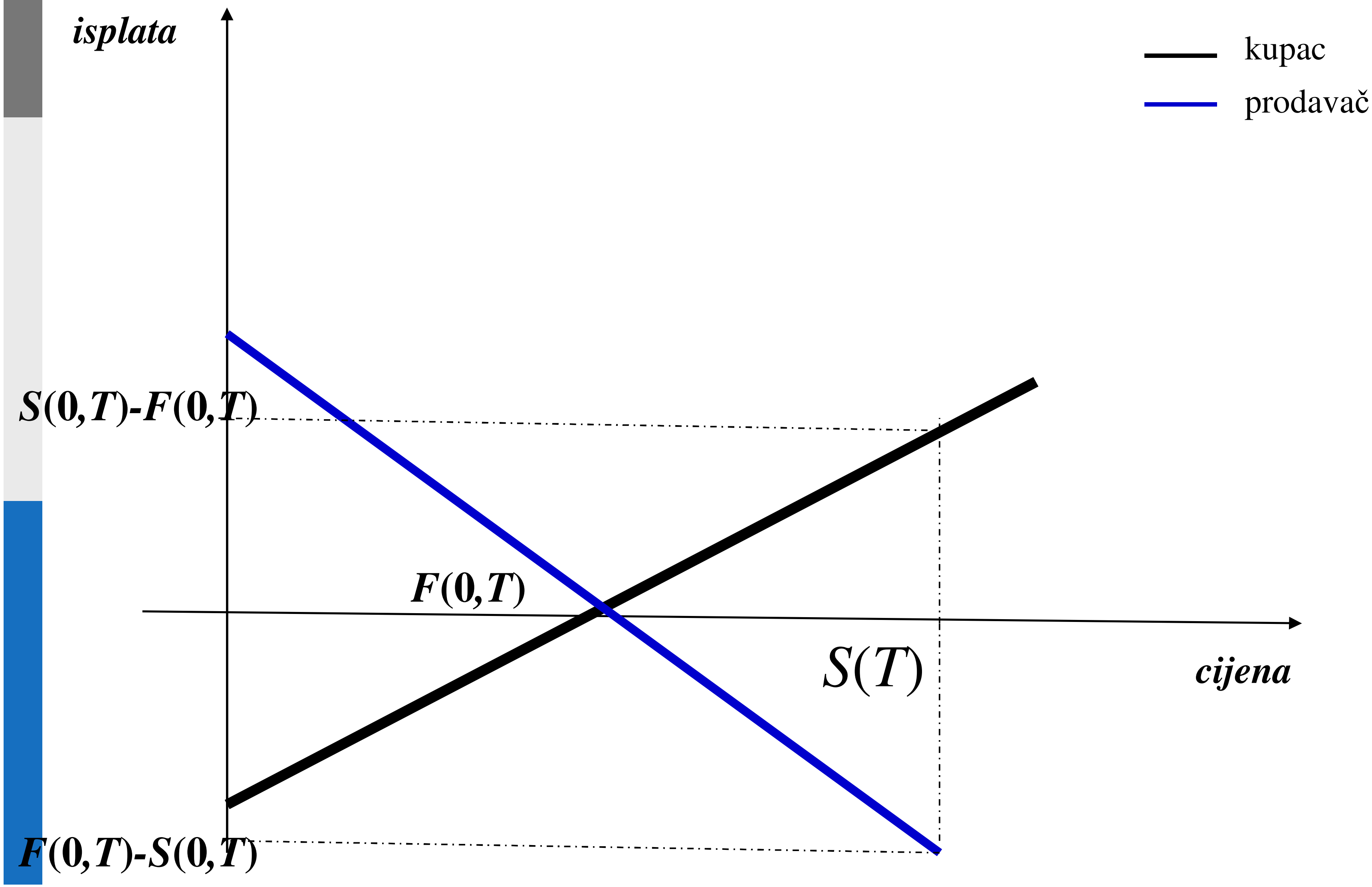
U trenutku isporuke je novčani tok dan sljedećom funkcijom:

$$Isplata = \begin{cases} S(T) - F(0,T), & \text{za dugu poziciju} \\ F(0,T) - S(T), & \text{za kratku poziciju} \end{cases}$$

slučajna varijabla, ovisna je o cijeni vrijednosnice od interesa u nekom budućem trenutku T, tj. o $S(T)$, a takvu cijenu u trenutku $t=0$ **ne znamo** unaprijed.

- Ukoliko je ugovor započet u trenutku t, $0<t<T$, tada ćemo sa $F(t,T)$ označiti unaprijednu cijenu, sa $S(T)-F(t,T)$ isplatu u trenutku isporuke (duga), odnosno $F(t,T)-S(T)$ u slučaju kratke unaprijedne pozicije.

Slučaj $S(T) > F(0,T)$



2.6.1. Unaprijedna cijena

- **Prema principu nearbitraže** moguće je odrediti formulu za unaprijedne cijene različitih vrsta vrijednosnica

  - Dionice koje ne isplaćuju dividende
  - Dionice koje uključuju isplatu dividende
  - Vrijednosnice koje se ukamaćuju (prinos od dividende)

Dionice koje ne isplaćuju dividende

- Označimo sa r nerizičnu kamatnu stopu u odnosu na neprekidno ukamaćivanje te pretpostavimo da je konstantna kroz cijeli period razmatranja unaprijednog dogovora
- Pitamo se koja je alternativa dugoj unaprijednoj poziciji (tj. kupnji) u dionici s isporukom u trenutku T po cijeni $F(0,T)$?
  - Posuditi iznos $S(0)$ *danas* kako bi se kupila dionica po cijeni u trenutku t=0 (danas) te držati dionicu do trenutka T.
  - U trenutku T bit će potrebno vratiti dug u iznosu od $S(0)e^{rT}$
- Dakle, jedan od kandidata za unaprijednu cijenu $F(0,T)$ je $S(0)e^{rT}$

- **Teorem**. Neka je r konstantna nerizična kamatna stopa uz neprekidno ukamaćivanje. Tada je unaprijedna cijena F(0,T) s periodom isporuke T u slučaju dionice koja ne isplaćuje dividendu dana sa

$$\boxed{F(0,T) = S(0)e^{rT}}$$

U slučaju da je ugovor započet u trenutku t, $0 < t \leq T$

tada unaprijedna cijena $F(t,T)$ s periodom isporuke T u slučaju dionice koja ne isplaćuje dividendu dana sa

$$\boxed{F(t,T) = S(t)e^{r(T-t)}}$$

- *Dokaz*: Pretpostavimo da je $F(0,T) > S(0)e^{rT}$. Tada je:
  - u trenutku t =0 moguće napraviti sljedeće transakcije:
    - Posuditi iznos S(0) za period [0,T] za kupnju jedne dionice po cijeni S(0)
    - Zauzeti kratku unaprijednu poziciju (prodaja!) tj. dogovoriti prodaju jedne dionice po cijeni F(0,T) u trenutku T. (za takav dogovor se ne plaća niti ne isplaćuje ništa, to je dogovor!)
    - Novčani tok jednak je 0
  - U trenutku T će u tom slučaju doći do sljedećih transakcija:
    - Prodati dionicu po cijeni F(0,T) (budući da je u trenutku t=0 putem unaprijednog ugovora dogovoreno da će u trenutku T do takve prodaje doći po cijeni F(0,T))
    - Vratiti dug u iznosu $S(0)e^{rT.}$
  - Dakle, u trenutku t=0 je novčani tok jednak 0, a u trenutku T se ostvaruje vrijednost novčanog toka $F(0,T)$ -$S(0)e^{rT.}$

    No, budući da prema pretpostavci vrijedi $F(0,T) > S(0)e^{rT}$ slijedi da je *n.t.*(0)=0, a *n.t.*(T)>0 što predstavlja mogućnost arbitraže.

- DZ. Slučaj $F(0,T) < S(0)e^{rT}$.

- DZ. Dokaz u slučaju da je ugovor započet u trenutku t, pri čemu je $0 < t \leq T$.

- Ukoliko tržište ne dozvoljava kratku prodaju dionice (short selling), nejednakost $F(0,T) < S(0)e^{rT}$ ne znači nužno postojanje mogućnosti arbitraže. (Riješite slučaj $F(0,T) < S(0)e^{rT}$ za DZ!)

Zadatak. Pretpostavimo da se dionicom XYZ danas trguje po cijeni od 17 te da je unaprijedna cijena dionice XYZ s isporukom T=1 dana sa F(0,1)=18, a referentna nerizična kamatna stopa na tržištu je 8%. Pretpostavimo da pri kratkoj prodaji dionica posrednik zahtjeva depozit od 30% vrijednosti dionice pri čemu se vrijednost depozita ukamaćuje po stopi od d=4%.

- Da li postoji mogućnost arbitraže?
- Odredi maksimalnu stopu na depozite d za koju ne postoji mogućnost arbitraže.

- **Napomena**. Primijetimo da vrijedi sljedeće:

$$F(t,T) = S(t)e^{r(T-t)} > S(t)$$

odnosno $\quad F(t,T) - S(t) > 0.$

- Izraz $b(t,T)=F(t,T)-S(t)$, $0<t<T$, nazivamo **baza**.

- Odredite $\quad \lim_{t \to T} b(t,T) \quad$ te interpretirajte rezultat,

- **Napomena.**

A) U slučaju diskretnog i složenog ukamaćivanja, prema prethodnom teoremu vrijedi

$$F(0,T) = S(0)\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mT}$$

pri čemu je m broj ukamaćivanje unutar jedne godine.

B) U slučaju trgovanja beskuponskim obveznicama, prema prethodnom teoremu vrijedi

$$\boxed{F(0,T) = \frac{S(0)}{B(0,T)}}$$

Dionice koje isplaćuju dividende

- Odredit ćemu unaprijednu cijenu za slučaj vrijednosnica koje generiraju prihod tokom perioda držanja, pri čemu prihod od dionica za vrijeme držanja smatramo isplatu dividende ili stope prinosa
- Može se uzeti u obzir ne samo prihod nego i određeni troškovi za vrijeme držanja vrijednosnice, poput troška držanja ili plaćanja osiguranja. Na troškove u tom slučaju gledamo kao na negativni prihod.
- Pretpostavimo da dionica isplaćuje dividendu u nekom trenutku t između započinjanja (izmjene) ugovora i isporuke T. Tada će u trenutku t vrijednost dionice pasti za iznos isplaćene dividende.

- **Teorem**. Neka je r konstantna nerizična kamatna stopa uz neprekidno ukamaćivanje. Tada je unaprijedna cijena $F(0,T)$ s periodom isporuke T u slučaju dionice koja u trenutku t isplaćuje dividendu D dana sa

$$\boxed{F(0,T) = \left[S(0) - e^{-rt} D\right] e^{rT}}$$

- **Zadatak**. Pretpostavimo da se dionicom XYZ čija je cijena na dan 1.1. 120 te koja isplaćuje dividendu u iznosu od 1 na dan 1.7. te u iznosu od 2 na dan 1.10. Referentna nerizična kamatna stopa na tržištu je 12%.

  - Da li postoji mogućnost arbitraže ukoliko na dan 1.1. unaprijedna cijena za isporuku u trenutku 1.11. iznosi 131?

Prinos od dividende

- Realnije je pretpostaviti da se dividende obično isplaćuju neprekidno po određenoj stopi, a ne u diskretnim vremenskim trenucima.
  - U slučaju visoko diverzificiranog portfelja dionica, prirodno je pretpostaviti da se dividende isplaćuju neprekidno, a ne kroz česte isplate kroz određeni vremenski period
  - Strana valuta, koja se za razliku od dionice, ukamaćuje uz odgovarajuću stopu
- Unaprijedna cijena u slučaju strane valute. Označimo cijenu jedne jedinice strane valute kupljene u domaćoj zemlji sa $P(t)$, te označimo sa r_d i r_s referentne nerizične kamatne stope za investirana u domaćoj odnosno stranoj valuti.

- Promotrimo dvije strategije:
  - Investiramo vrijednost $P(0)$ domaće valute po stopi r_d za razdoblje $[0,T]$
  - Kupimo jednu jedinicu strane valute (1 euro, npr.) po cijeni $P(0)$ (7.25 kn, npr.) te investiramo kupljenu vrijednost u stranoj valuti po stopi r_s za razdoblje $[0,T]$. Zauzmimo kratku unaprijednu poziciju za vrijednost e^{r_s} s vremenom isporuke T po cijeni $F(0,T)$.
- Budući da obje strategije zahtijevaju **isti početni iznos**, vrijednost im na kraju perioda investiranja treba biti također jednaka:

$$P(0)e^{r_d T} = e^{r_s T} F(0,T),$$

odnosno

$$F(0,T) = P(0)e^{(r_d - r_s)T}$$

- Nadalje, pretpostavimo da dionica neprekidno isplaćuje dividende po stopi $r_D > 0$ koju zovemo *prinos od dividende* (engl. dividend yield). Ukoliko se iznos od isplate dividende reinvestira u dionicu, tada će se investiranje od jednog udjela u trenutku 0 povećati i iznositi $e^{r_D T}$ udjela u trenutku T.

  - Dakle, ukoliko želimo imati jedan udio u trenutku T, potrebno je u trenutku 0 imati $e^{-r_D T}$ udjela. (Primijetite sličnost sa neprekidnim ukamaćivanjem te razmislite zašto postoji sličnost)

- **Teorem.** Neka je r konstantna nerizična kamatna stopa uz neprekidno ukamaćivanje. Tada je unaprijedna cijena $F(0,\mathrm{T})$ s periodom isporuke T u slučaju dionice koja neprekidno isplaćuje dividendu po stopi r_D dana sa

$$F(0,T) = S(0)e^{(r-r_D)T}$$

- **Zadatak**. Pretpostavimo da tvrtka XYZ u Hrvatskoj uvozi automobile iz Njemačke te želi dogovoriti unaprijedni ugovor za kupnju eura (strana valuta u Hrvatskoj!) za pola godine od danas. Referentna nerizična kamatna stopa za investiranje u domaću valutu je 4%, a za investiranja u stranu valutu je 3% te pretpostavimo da je trenutni tečaj 7.25.

  - Kolika je unaprijedna cijena eura izražena u kunama?
  - Primijetite da ste odgovorom na prethodno pitanje odredili unaprijednu vrijednost tečaja.

Vrijednost unaprijednog ugovora

- Svaki unaprijedni ugovor **ima vrijednost nula** u trenutku dogovaranja
- S prolazom vremena, cijena bazične imovine podložna je slučajnim promjenama te će se i vrijednost samog unaprijednog ugovora s vremenom mijenjati i neće biti više bez vrijednosti.
- U trenutku isporuke, vrijednost unaprijednog ugovora iznosi $S(T)\text{-}F(0,T)$ što može poprimiti pozitivnu, negativnu ili nula vrijednost.
- Kako odrediti vrijednost ugovora u općem slučaju?

- Ukoliko je unaprijedna cijena $F(t,T)$ za unaprijedni ugovor dogovoren u trenutku t, $0<t<T$, **veća** od unaprijedne cijene $F(0,T)$ (ugovora glede iste vrijednosnice, ali dogovorenog u trenutku $t=0$) to je ujedno i **dobra vijest za investitora** koji ima dugu unaprijednu poziciju u ugovoru dogovorenog u trenutku 0.
- Takav će investitor u trenutku isporuke T imati dodatnu dobit u iznosu od $F(t,T)$- $F(0,T)$ u odnosu na investitora koji je ušao u novu dugu unaprijednu poziciju u trenutku $t>0$ s istim vremenom isporuke T.

- Kako bi se odredila vrijednost unaprijednog ugovora u trenutku t, potrebno je samo diskontirati odgovarajuću dobit u trenutku isporuke T na trenutak t.
  - Takav diskontirani iznos će biti isplaćen (ili uplaćen, ukoliko je negativan) od strane investitora s dugom unaprijednom pozicijom u ugovoru dogovorenom u trenutku 0 ukoliko bi ga želio zatvoriti u trenutku t.
- Takva razmatranja vode do sljedećeg rezultata.

- **Teorem**. Vrijednost unaprijednog ugovora u trenutku t, $0 \leq t \leq T$, (gledano sa strane investitora u dugoj poziciji) s unaprijednom cijenom $F(0,T)$ dana je sa

$$\boxed{V(t) = \left[F(t,T) - F(0,T)\right]e^{-r(T-t)}}$$

- **Napomena**. Ukoliko promatramo ugovor s cijenom isporuke X (umjesto unaprijedne cijene $F(0,T)$), cijena takvog ugovora u trenutku t dana je sa

$$V(t) = \left[F(t,T) - X\right]e^{-r(T-t)}$$

- U slučaju dionice koja ne isplaćuje dividendu, vrijednost u trenutku 0 može biti i ne nula:

$$V(0) = \left[F(0,T) - X\right]e^{-rT} = S(0) - Xe^{-rT}$$

- U slučaju dionice koja isplaćuje dividendu u nekom trenutku unutar intervala $(0,T)$, početna je vrijednost ugovora jednaka

$$V(0) = S(0) - D_0 - Xe^{-rT}$$

pri čemu je D_0 diskontirana vrijednost dividende na trenutak $t=0$

- U slučaju neprekidne isplate dividende po stopi r_D

$$V(0) = S(0)e^{-r_D T} - Xe^{-rT}$$

- **Zadatak**. Pretpostavimo da je cijena dionice XYZ na početku godine bila 45, referentna nerizična kamatna stopa 6% te da se isplaćuje dividenda u iznosu 2 nakon pola godine. Odredite vrijednost nakon 9 mjeseci duge unaprijedne pozicije čiji je period isporuke godinu dana, ako se ispostavi da je cijena dionice XYZ tog dana
  - 49
  - 51

2.7. Futuresi

- Jedna od strana u unaprijednom ugovoru će biti na gubitku
- Kako bi se eliminirao rizik odlaska u default stanje one stranke u unaprijednom ugovoru koja trpi gubitak, osmišljeni su futures ugovori.

- Kao i unaprijedni ugovori, i futures ugovori uključuju bazičnu imovinu (dionice, npr.) i točno određeno vrijeme isporuke.
- Baš poput cijena dionica, tržište diktira i cijena futures ugovora

- Cijene futures ugovora su nepoznate unaprijed stoga na njih gledamo kao na slučajne varijeble.

- Baš kao i kod unaprijednih ugovora, ništa ne košta započeti poziciju u futures ugovoru.

- Razlika se očituje u novčanom toku tokom perioda trajanja samog ugovora:
- Duga pozicija u unaprijednom ugovoru zahtjeva **samo jednu** isplatu $S(T)$-$F(0,T)$ i to u trenutku isporuke

- Futures ugovor uključuje **slučajni novčani tok**, poznat kao *marking to market* : u svakom od vremenskih trenutaka $n_k \leq T$, onom koji drži dugu poziciju u futures ugovoru isplaćuje se iznos $f(n_k,T)-f(n_{k-1},T)$ ukoliko je pozitivan, odnosno mora se uplatiti taj iznos ukoliko je negativan.
- Suprotni smjer isplata odvija se u slučaju kratke pozicije u futures ugovoru.
- Vrijedi
  - $f(T,T)=S(T)$
  - U svakom vremenskom trenutku $n_k \leq T$, vrijednost pozicije u futures ugovoru je jednaka nula (tj, nema troška prilikom zatvaranja, otvaranja ili promjene pozicije u futures ugovoru u svakom vremenskom trenutku između 0 i T.