

Financijska matematika

Dr. Petra Posedel

Vedran Horvatić, dipl. inž.

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 23.2.2010.

Sadržaj:

▣ *Nerizična* ulaganja i investiranje

- Vremenska vrijednost novca; ukamaćivanje
- Tržište novca
 - ▣ Obveznice (kuponske, beskuponske)
- Vremenska struktura kamatnih stopa

▣ *Rizična* ulaganja

- Dionice; dinamičko modeliranje cijene opcije
- Menadžment portfelja
- Izvedenice; Vrednovanje opcija
- Financijsko inženjerstvo

1. dio: Nerizična ulaganja i investiranje

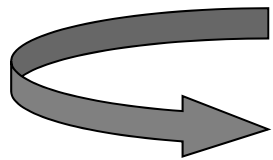
Pojam investicije ➡ odricanje (*danas!*) od sredstava (*novac*) na neko vrijeme kako bi se ostvarili budući prinosi koji će kompenzirati investitora za:

- ❑ **Vrijeme** na koje su sredstva uložena
- ❑ Očekivanu stopu **inflacije**
- ❑ **Rizik**: nesigurnost budućih isplata

Pitanje: Kako bismo *trebali* investirati imovinu?

Ključni pojmovi: investitor, investicijska strategija

Investitor žrtvuje neki znani iznos novca danas za **očekivani tok isplata** koje bi ukupno trebale biti veće od uložених sredstava.



Neovisno o investitoru (fizička osoba, država, investicijski fond,...) i mediju investicije (depoziti, obveznice, dionice, nekretnine,...)

Investicijska strategija je nešto mnogo kompleksnije od koncepta “kupi jeftino, a prodaj skupo” i uključuje:

- ❑ Usvajanje investicijske filozofije
- ❑ Odabir strategije
- ❑ Alokaciju imovine u investicijske klase i unutar njih
- ❑ Kontrolu rizika

➡ ovisno o investicijskim potrebama (često i stavova o načinu investiranja) vlasnika sredstava.

1.1. Vremenska vrijednost novca:

1.1.1. Preliminarije: ukamaćivanje

- ❑ Posuđeni novac je **glavnica**
- ❑ Naknada koja se plaća na glavnicu je **kamata**
- ❑ Kamate se obračunavaju za neko razdoblje koje se zove **razdoblje ukamaćivanja ili razdoblje kapitalizacije**
- ❑ **Kamatnjak (kamatna stopa)** – iznos kamata za sto novčanih jedinica (kn) u nekom vremenskom razdoblju

Terminologija 1:

- **Godišnji kamatnjak** je 5: nakon **godinu dana** na glavnicu od 100 kn kamata je 5 kn
- **Mjesečni kamatnjak** je 0.5: nakon **mjesec dana** na glavnicu od 100 kn kamata je 0.5 kn

Terminologija 2 : kamata vs. investicija

- **Povrat na investiciju**, ovisno o kontekstu, često se naziva i **kamata**.

- **Kamata** se može razložiti u tri komponente:
 - Čista vremenska vrijednost novca (realna kamatna stopa na bezrizični novac; ne može se samo po sebi naći, ali je otprilike veličine rasta BDP-a na globalnoj razini dugoročno, oko 2%)
 - Kompenzacija za očekivanu inflaciju
 - Kompenzacija za rizik

-
- Npr. ako je realna kamatna stopa na bezrizični novac 2%, očekivana stopa inflacije 4%, a kompenzacija za rizik 5%, tada je zahtijevana kamatna stopa jednaka

$$(1 + 2\%)(1 + 4\%)(1 + 5\%) - 1 \approx 2\% + 4\% + 5\% = 11\%$$

- S obzirom na ostvarenu kamatnu stopu, gledano unazad, ukupna ostvarena stopa zove se **nominalna**, a nominalna korigirana za ostvarenu inflaciju zove se **realna kamatna stopa**.

Sadašnja vs. buduća vrijednost novca: uvod i motivacija

- 100 kn u nekom **budućem periodu** vrijedi manje nego taj iznos (100 kn) **sada** (*danas*)!

Glavni (ekonomski) razlozi:

- Novac s dospijećem u budućnosti ili oročen na neki fiksni termin ne može se *potrošiti* odmah!
- Drugim riječima, očekujemo da ćemo biti nagrađeni za *odgođenu potrošnju*
- Cijene u međuvremenu mogu narasti (inflacija!) te raspoloživi iznos neće imati istu *moć potrošnje* kao u sadašnjem trenutku!
- Konačno, postoji i **rizik** (iako zanemariv!) da novac neće biti vraćen

Promjena vrijednosti novca kroz vrijeme

- ❑ Način na koji novac *mijenja* svoju vrijednost kroz vrijeme je od fundamentalno važnosti u **financijama**.
- ❑ Zanimaju nas uglavnom dva ključna pitanja
 1. Koja je **buduća vrijednost** iznosa investiranog ili posuđenog danas?
 2. Koja je **sadašnja vrijednost** iznosa koji se mora nekom platiti ili biti nekom isplaćen u određenom trenutku u budućnosti?

 **Odgovor ovisi o različitim faktorima.**

□ **Kamate:**

- jednostavne
- složene

□ **Obračun kamata:**

- dekurzivan
- anticipativan

Analiziramo

```
graph RL; A[Analiziramo] --> B(složene); A --> C(dekurzivan);
```

Kamate (cont)

□ Jednostavne kamate

- Kamate koje se obračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od **iste** glavnice
- Kratkoročne transakcije

□ Složene kamate

- Kamate koje se obračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od **promjenljive** glavnice
- Dugoročne transakcije

Obračun kamata (cont)

□ Dekurzivan obračun

- Kamate se obračunavaju **na kraju** razdoblja ukamaćivanja od glavnice s početka tog razdoblja

□ Anticipativan obračun

- Kamate se obračunavaju **na početku** razdoblja ukamaćivanja od glavnice s kraja tog razdoblja

Buduća vrijednost uz godišnje ukamaćivanje: jednostavne kamate

- Pretpostavimo da je neki iznos oročen uz kamate.
- **Buduća vrijednost** takve investicije sastoji se od početnog depozita kojeg zovemo **glavnica**, i dobivenih kamata budući da je iznos oročen
- **Primjer:** Pretpostavimo da se kamate računaju samo na glavnicu koja ostaje nepromijenjena tokom perioda kapitalizacije. Oznake:
 - Glavnica (početna vrijednost): P
 - Godišnja kamatna stopa (*konstantna* tokom razdoblja ukamaćivanja): r

-
- Nakon godinu dana, ukupne su kamate Pr , pri čemu je $r > 0$.

- Ukupna vrijednost investicije nakon godinu dana:

$$V(1) = P + rP = (1 + r)P$$

- Ukupna vrijednost investicije nakon dvije godine:

$$V(2) = P + rP + rP = (1 + 2r)P$$

- Ukupna vrijednost investicije nakon n godina:

$$V(n) = P + \underbrace{rP + rP + \dots + rP}_{n \text{ puta}} = (1 + nr)P$$

- $V(0)=P$
- Vrijednost $1+nr$ zovemo **faktor rasta** (engl. growth factor)
- Dakle, uz jednostavno ukamaćivanje, **konačna vrijednost** investicije P u trenutku t koju označavamo sa $V(t)$, dana je sa:

$$V(t) = (1 + tr)P$$

- Ukoliko se glavnica investira u trenutku s (a ne u trenutku 0), tada je vrijednost investicije P u trenutku t ,

$$V(t) = (1 + (t - s)r)P, \quad t \geq s$$

Primjer.

- Pretpostavimo da promatramo depozit od 15000 kn na 20 dana po (godišnjoj) kamatnoj stopi od 8%. Tada je vrijednost depozita nakon 20 dana jednaka:

$$V\left(\frac{20}{365}\right) = 15000 \left(1 + \frac{20}{365} \cdot 0.08\right) = 15066$$

- **Uvijek vrijedi:**

Konačna vrijednost = početna vrijednost + ukupne kamate

Povrat na investiciju vs. kamatna stopa

- Povrat $R(s,t)$ na investiciju započetu u trenutku s i završenu u trenutku t , dan je sa:

$$R(s,t) = \frac{V(t) - V(s)}{V(s)}$$

- U slučaju jednostavnih kamata vrijedi:

$$R(s,t) = (t - s)r$$

- Posebno, (goišnja) kamatna stopa jednaka je povratu kroz godinu dana!

$$R(0,1) = r$$

Primjeri.

- Konačna vrijednost oročenog iznosa od 9000 kn na 61 dan će uz jednostavno ukamaćivanje biti 9020 kn na kraju ugovorenog perioda. Odredite kamatnu stopu i povrat na takvu investiciju.
- Koliko biste novaca bili voljni uložiti danas u investiciju koja isplaćuje 1000 kn u nekom budućem trenutku ukoliko zahtijevate povrat na takvu investiciju od 3%.
- Koliko je razdoblje ukamaćivanja ako uz jednostavne kamate je konačna vrijednost oročenog iznosa od 8000 kn uz kamatnu stopu od 9% jednaka 8300 kn? Odredite povrat na takvu investiciju.

Usporedite vrijednost povrata s kamatnom stopom u svakom od primjera. Što primjećujete?

Buduća vrijednost uz godišnje ukamaćivanje: složene kamate

- ❑ U praksi se jednostavne kamate koriste samo za kratkoročne investicije i za određene vrste depozita po tekućim računima
- ❑ Kao takve, ne predstavljaju realan opis vrijednosti novca dugoročno.

- ❑ Pretpostavimo da je danas oročen iznos P uz godišnju kamatnu stopu r i **jednostavni** obračun kamata.

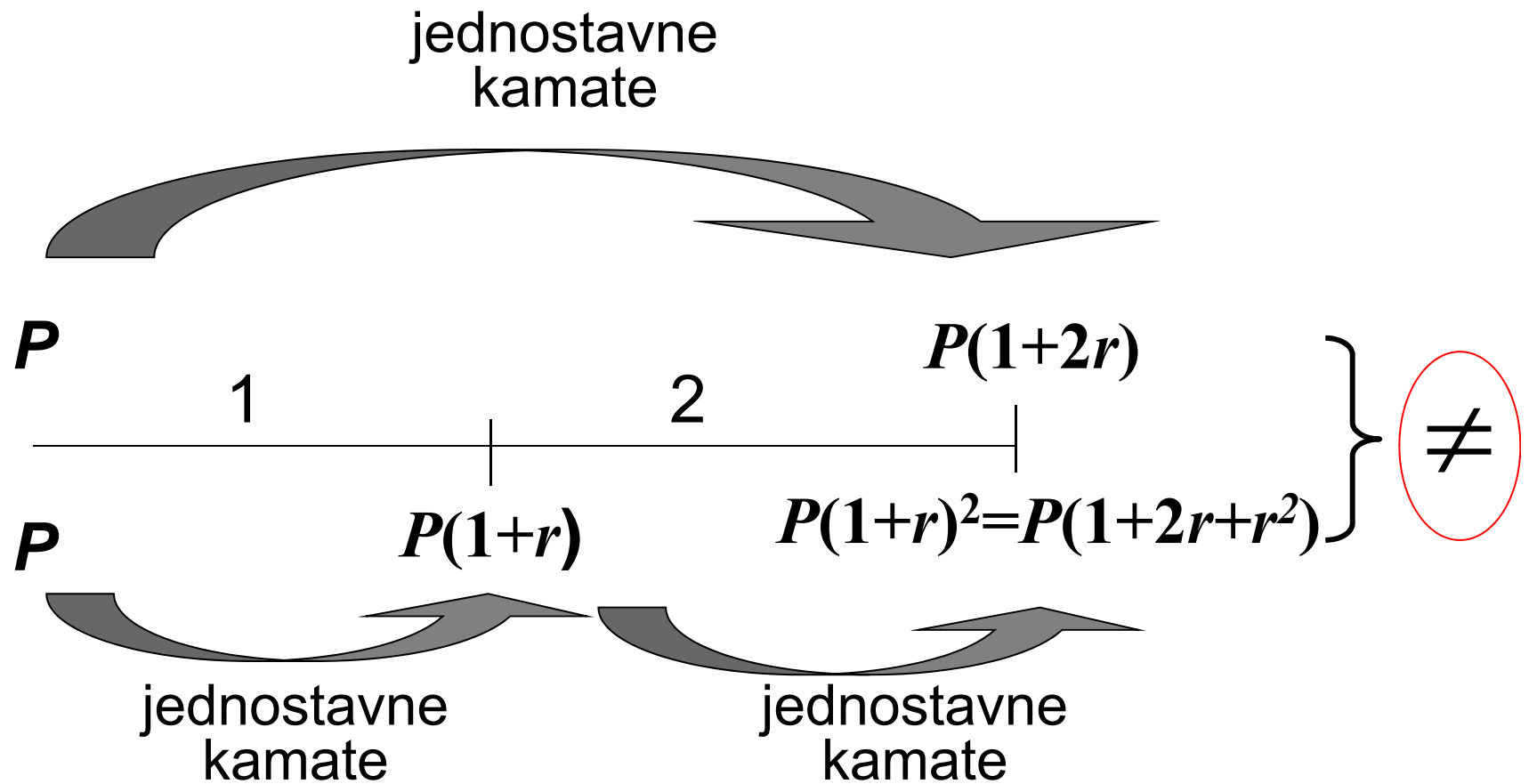
Pretpostavimo nadalje da je kamatna stopa r osigurana za naredne dvije godine te da se račun može zatvoriti i otvoriti u svakom trenutku.

- Zatvaranjem računa nakon godinu dana, konačna je vrijednost oročenog iznosa $P(1+r)$.
-


- Ukoliko se iznos $P(1+r)$ oroči na drugi račun uz **jednostavne** kamate, konačna je vrijednost nakon godinu dana $P(1+r)(1+r) = P(1+r)^2 = P(1+2r+r^2)$.

- Ukoliko se početni iznos P oroči uz **jednostavni** obračun i godišnju kamatni stopu r , ali na dvije godine, konačna je vrijednost tako oročenog iznosa $P(1+2r)$.

Dakle,

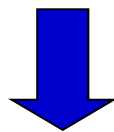


- Iznos $Pr^2=(Pr)r$ predstavlja dodatnu ekstra isplatu na kraju perioda od dvije godine uz prvi način odabira ulaganja.

 Kamata koja sama stvara kamatu

- **Investitor** : racionalni investitor bira onaj način *oročenja* koji stvara veći prinos (uz pretpostavku da ne postoje troškovi otvaranja i zatvaranja računa) .

Banka: teško bi na administrativnoj razini mogla spriječiti otvaranje i zatvaranje računa takvog tipa



Kako bi se prvenstveno motivirala ulaganja na **duži** horizont, za horizonte duže od godinu dana plaća se **složena kamata**

Složeno ukamaćivanje: definicija

- Označimo sa $V(t)$ konačnu vrijednost investicije P u trenutku t . Tada je vrijednost koju će investitor ostvariti na kraju bilo kojeg *perioda* jednaka vrijednosti koju bi investitor ostvario zatvaranjem računa u prethodnom periodu uvećanu za iznos kamata na taj iznos. Algebarski,

$$V(t) = V(t-1) + rV(t-1) = (1+r)V(t-1)$$

$$V(0) = P$$

- Napomena: kao *period* uobičajeno uzimamo jednu godinu

- $V(0)=P$

- Dakle, uz složeno ukamaćivanje, **konačna vrijednost** investicije P u trenutku t koju označavamo sa $V(t)$, dana je sa:

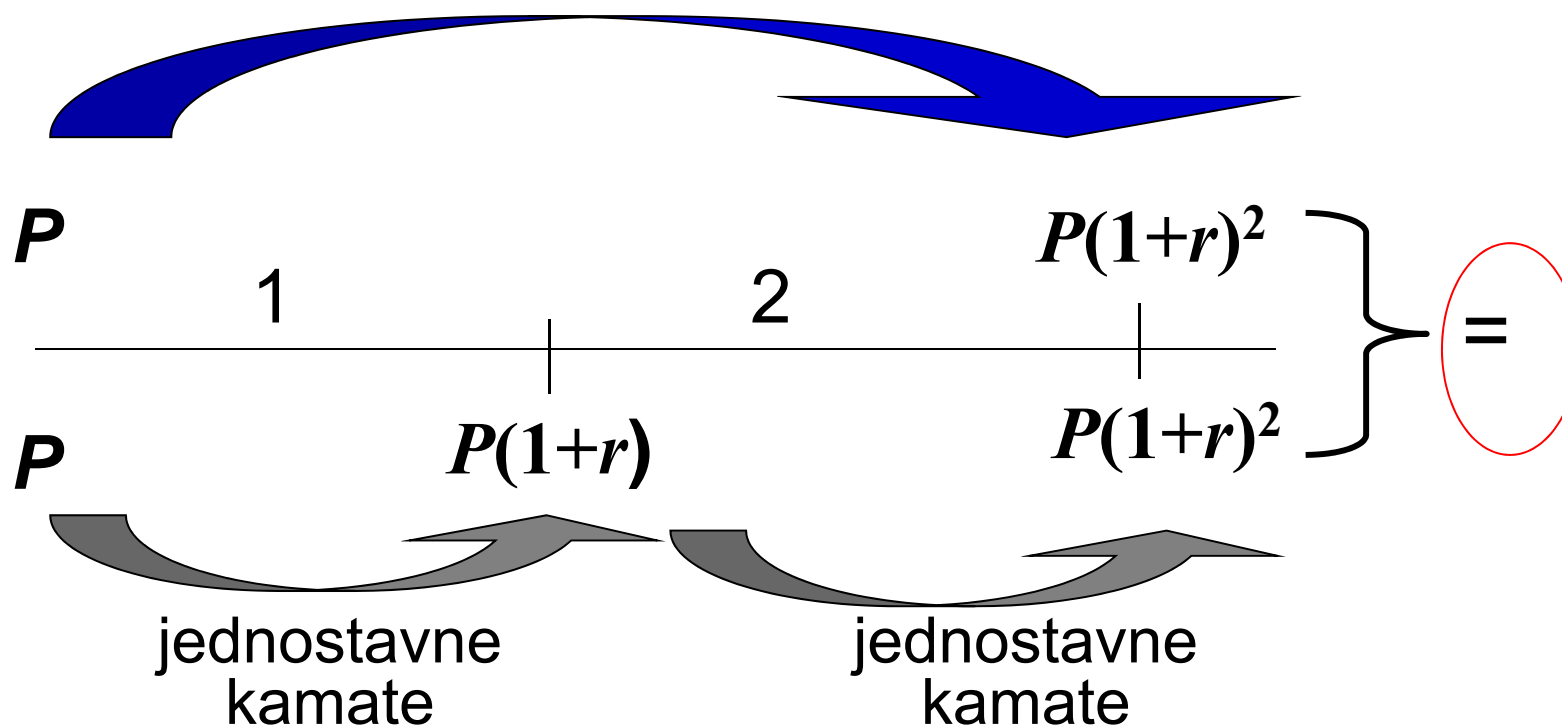
$$V(t) = P(1+r)^t$$

- Vrijednost $(1+r)^t$ zovemo **faktor rasta** (engl. growth factor)
- Ukoliko se glavnica investira u trenutku s (a ne u trenutku 0), tada je vrijednost investicije P u trenutku t ,

$$V(t) = P(1+r)^{t-s}, \quad t \geq s$$

Dakle,

Složene kamate



-
- ❑ Dakle, kamate koje se obračunavaju za svako razdoblje ukamaćivanja od **promjenljive** glavnice
 - ❑ Za razliku od jednostavnih kamata, dobivene se kamate dodaju glavnici periodično, godišnje (polugodišnje, kvartalno, mjesečno, ili čak i na dnevnoj razini, *neprekidno*).
 - ❑ To ujedno znači da kamate nisu privučene samo originalnim depozitom, već i kamatama dobivenima do tog trenutka

- **Primjer.** Tvrtna ABC oročila je iznos od 100 000 kn na pet godina. Ako je banka prve dvije godine primjenjivala godišnji kamatnjak 3, a u preostalom razdoblju 2, izračunajte konačnu vrijednost uloženog iznosa. Obračun je kamata godišnji i složen.

$$V(0) = 100000, t = 5, t_1 = 2, t_2 = 3$$

$$r_1 = 0.03$$

$$r_2 = 0.02$$

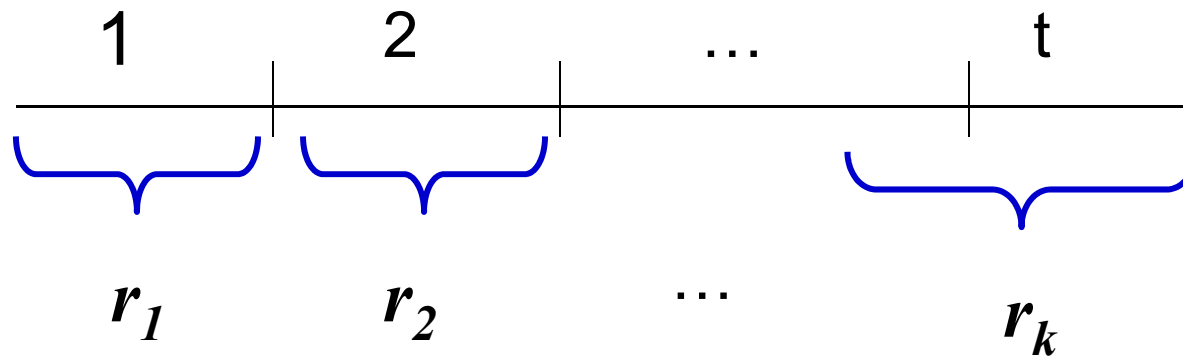
$$V(5) = V(2)(1 + r_2)^3 = C_0(1 + r_1)^2(1 + r_2)^3 =$$

$$= 100000 \cdot (1.03)^2 (1.02)^3 = 112583.60$$

□ **Općenito:**

$$V(t) = V(0)(1 + r_1)^{t_1} (1 + r_2)^{t_2} \cdot \dots \cdot (1 + r_k)^{t_k}$$

Dakle,



$$V(t) = V(0)(1 + r_1)^{t_1} (1 + r_2)^{t_2} \cdot \dots \cdot (1 + r_k)^{t_k}$$

$$V(0) = V(t)(1 + r_1)^{-t_1} (1 + r_2)^{-t_2} \cdot \dots \cdot (1 + r_k)^{-t_k}$$

Ekvivalentne stope kraćih razdoblja: konformni kamatnjak

- Neka je r_g godišnja kamatna stopa. Kolika bi bila polugodišnja, mjesečna itd. kamatna stopa da **efekt ukamaćivanja** bude isti uz složene kamate?

- Označimo $r_{g/k}$ s r_k . Tada vrijedi:

$$P_0(1+r_g) = P_0(1+r_{g/2})^2 \Rightarrow r_2 = (1+r_g)^{1/2} - 1$$

$$\Rightarrow r_{12} = (1+r_g)^{1/12} - 1$$

$$\Rightarrow r_{365} = (1+r_g)^{1/365} - 1,$$

...

$$\Rightarrow r_m = (1+r_g)^{1/m} - 1.$$

- Poznati kamatnjak za određeni vremenski interval zove se **nominalni** ili zadani kamatnjak
-

- U slučaju da je zadan godišnji nominalni kamatnjak i mjesečni obračun kamata, svi se elementi obračuna kamata moraju izraziti u mjesecima (tj., godišnji se kamatnjak mora pretvoriti u mjesečni, a broj godina u broj mjeseci).
- Dakle, svi se potrebni elementi obračuna kamata moraju **izraziti u vremenskom intervalu** u kojem se **obračunavaju kamate**
- Veličina ***m*** kaže koliko se puta obavlja ukamaćivanje unutar vremenskog intervala nominalnog kamatnjaka.

Ukamaćivanje u kraćim razdobljima

- Obratno, neka je r godišnja kamatna stopa.
Konvencija u bankarstvu: godišnja kamatna stopa je r , ali se može pripisivati u kraćim razdobljima.
- godišnje: $P_0 \rightarrow P_0 (1+r)$
- polugodišnje: $P_0 \rightarrow P_0 (1+r/2) \rightarrow P_0 (1+r/2)^2$
- mjesečno: $P_0 \rightarrow P_0 (1+r/12) \rightarrow P_0 (1+r/12)^2 \rightarrow \dots \rightarrow P_0 (1+r/12)^{12}$

- **Relativni (proporcionalni) se kamatnjak** dobije tako da se nominalni kamatnjak podijeli s m :
-

$$r_R = \frac{r}{m}$$

- Primjer: $P_0 = 100$, $r = 10\%$ godišnje.

$$m = 1: \quad 100 \rightarrow 100 (1+0,1) = 110$$

$$m = 2: \quad 100 \rightarrow 100 (1+0,1/2)^2 = 110,25$$

$$m = 12: \quad 100 \rightarrow 100 (1+0,1/12)^{12} \approx 110,38$$

$$m = 365: \quad 100 \rightarrow 100 (1+0,1/365)^{365} \approx 110,52$$

Primjer.

- Izračunajte konačnu vrijednost glavnice od 25000 kn na kraju četvrte godine ako je godišnji kamatnjak 5, a obračun kamata složen i (a) godišnji, (b) mjesečni. Koristite relativni kamatnjak.

$$V(0) = 25000, t = 4, r = 0.05$$

-
- (a) Sve je u godinama, pa ništa ne moramo pretvarati.

$$V(4) = 25000(1+r)^4 = 25000(1.05)^4 = 30387.66$$

- (b) Obračun je mjesečni, pa sve pretvaramo u mjesece!

$t=48$ mjeseci

■ Relativni kamatnjak:

$$r(M) = \frac{5}{12} = 0.4167 \Rightarrow 1 + r(M) = 1 + \frac{0.4167}{100} = 1.004167$$

$$C_{48} = 25000(1 + r(M))^{48} = 25000(1.004167)^{48} = 30522.38$$

□ **Napomena:** uz konformni kamatnjak:

$$r(M) = 100 \left[\left(1 + \frac{5}{100} \right)^{\frac{1}{12}} - 1 \right] = 0.04074$$

$$\Rightarrow 1 + r = 1.004074$$

$$V(48) = 25000(1 + r)^{48} = 30387.66$$

-
- **Zadatak (DZ).** Dokažite da su uz godišnji nominalni kamatnjak i mjesečni (kvartalni, polugodišnji) obračun, kamate su veće ukoliko se koristi relativni kamatnjak.

Sadašnja vrijednost: složene kamate

- ❑ **Pitanje:** Koliki je iznos potrebno uložiti danas kako bi se u trenutku t raspolagalo iznosom $V(t)$ uz složeno ukamaćivanje i pretpostavku da je r stopa po kojoj se novac može uložiti ?
- ❑ 100 kn u budućnosti vrijedi manje nego 100 kuna sada (ako su kamatne stope pozitivne); naime 100 kuna *danas* mogu se uložiti kako bi se u budućnosti imalo više!


-
- Uz pretpostavku da se kamatna stopa r neće promijeniti, vrijedi:

$$V(0) = \frac{V(t)}{(1+r)^t}$$

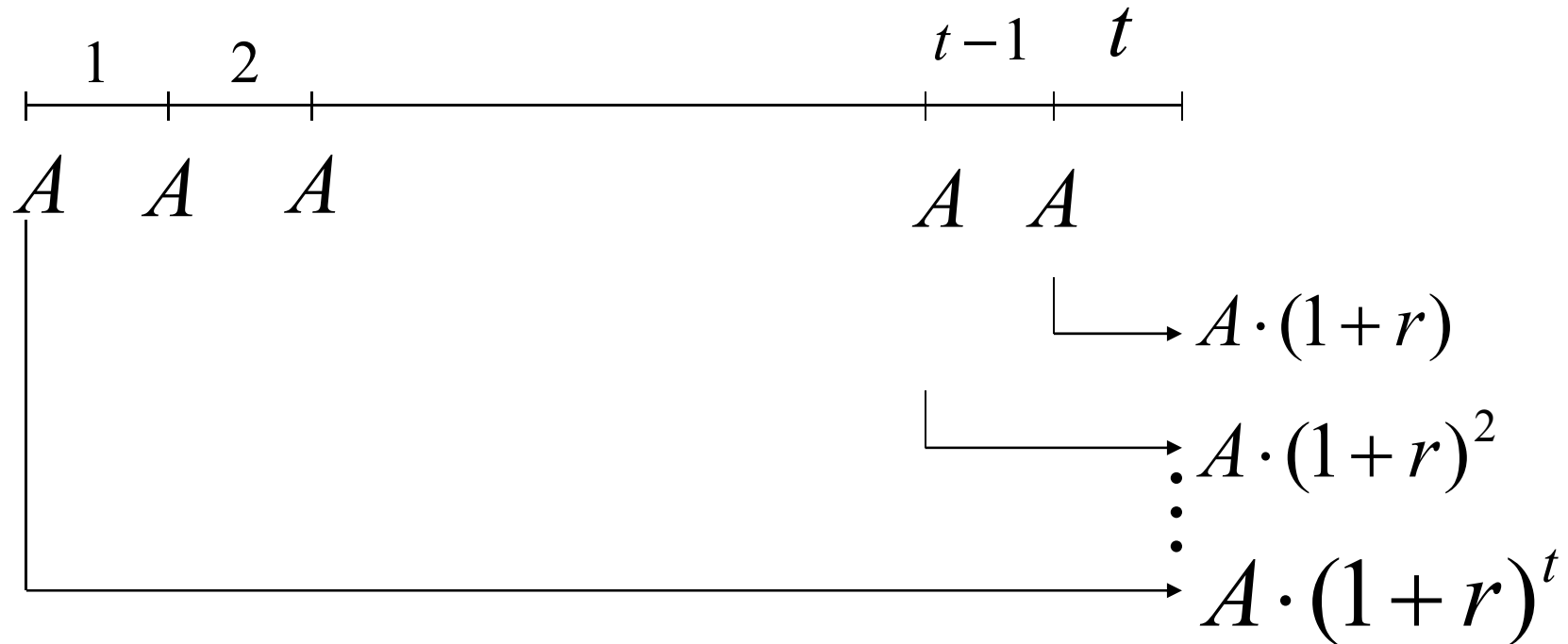
što nazivamo **diskontiranom** ili **sadašnjom vrijednošću** budućeg iznosa $V(t)$

- Broj $(1+r)^{-t}$ naziva se **diskontni faktor** (engl. discount factor)

Tokovi uplata/isplata

- **Anuitet** je niz konačno mnogo isplata (uplata) fiksnog iznosa koji dospijevaju u jednakim vremenskim intervalima
- Uplaćujete iznos A svake godine od sad tokom t godina (prva rata odmah, druga za godinu dana, ... zadnja za $t-1$ godinu). Koliki iznos imate nakon t godina uz godišnju kamatnu stopu r (godišnji obračun i složene kamate)?
 Konačna vrijednost

□ Konačna vrijednost

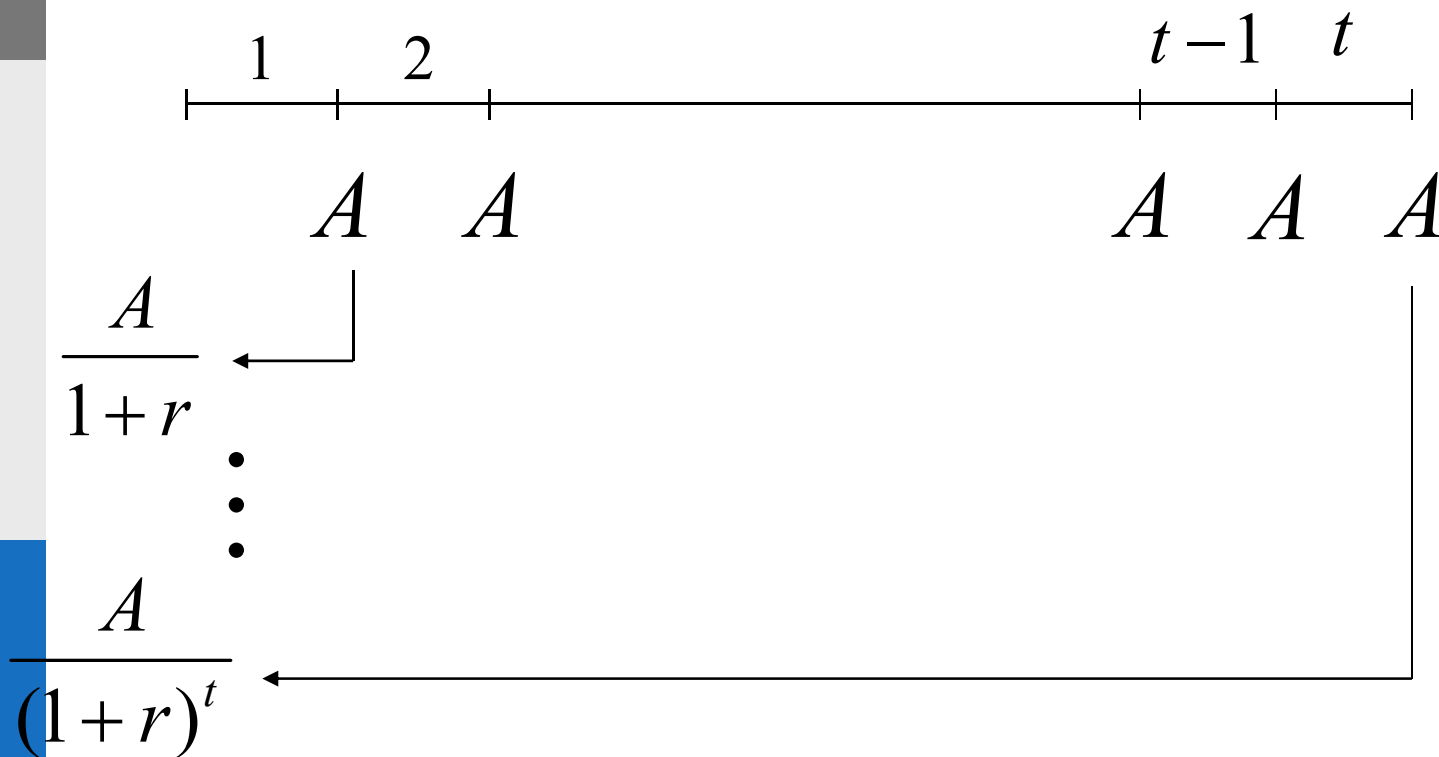


$$\begin{aligned} V(t) &= A \cdot (1+r) + A \cdot (1+r)^2 + \dots + A \cdot (1+r)^t \\ &= A(1+r) \frac{(1+r)^t - 1}{r} \end{aligned}$$

-
- Koliki iznos moramo uplatiti danas ako želimo na bazi tog iznosa primiti iznos A svake godine tokom t godina (prva rata za godinu dana, ... zadnja za $t-1$ godinu) uz godišnju kamatnu stopu r (godišnji obračun i složene kamate)?

 Početna vrijednost

□ Početna vrijednost



$$V_t(0) = \frac{A}{1+r} + \dots + \frac{A}{(1+r)^t} = \frac{A}{(1+r)^t} \cdot \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

Primjer: zajam (kredit)

- Odobren vam je zajam u iznosu 100000 kn na 5 godina uz 15% godišnjih kamata i plaćanje jednakih anuiteta krajem godine. Anuitet uključuje kamatu koja se plaća krajem svake godine uz određenu kamatnu stopu i otplatnu kvotu. Zajam takvog tipa naziva se amortizacijski. Tada je vrijednost anuiteta jednaka:

$$A = \frac{V(0)r(1+r)^t}{(1+r)^t - 1} = \frac{100000 \cdot 0.15(1.15)^5}{1.15^5 - 1} = 29831.56$$

- Zajam je ekvivalentan anuitetu s gledišta *zajmodavca*.

Vječna renta

- Beskonačna vrijednost niza isplata (uplata) fiksnog iznosa A na kraju svakog *razdoblja* (godine).

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} V_t(0) &= \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \dots \\ &= \frac{A}{r}\end{aligned}$$

- Primjer: određivanje vrijednosti poduzeća uz zadane buduće novčane tokove

Zadaci

-
- ❑ Netko vam posudi 1000 kn. Trebate ih vratiti u 10 jednakih godišnjih rata, uz poček 3 godine (prva rata nakon 3 godine) uz kamatnu stopu od 10%. Koliki su anuiteti?
 - ❑ Dobijete kredit od 10.000 kn koji trebate vratiti tokom 8 godina uz jednake anuitete; prvi anuitet dospijeva za 1 godinu, a kamata je 10% godišnje. Pretpostavimo da nakon 3 godine želite otplatiti kredit u cijelosti. Koliko trebate platiti?
 - ❑ Nađite zatvorenu formulu za ostatak koji treba uplatiti na kraju treće godine za uvjete kao gore.
 - ❑ Uzimate u nekoj banci kredit. Uvjeti su sljedeći. Da biste dobili 10.000 kn kredita uz kamatu od 12% na 5 godina, morate dati depozit od 2.000 kn na koje ne dobijate kamate (depozit). Depozit vam se vraća po isplati kredita.

Kolika je efektivna kamatna stopa, tj. koliko vas zaista košta novac koji posuđujete?

- Isti uvjeti kao u prethodnim zadacima uz općenite brojeve: depozit u visini od $x\%$ od kredita. Kamatna stopa od $r\%$ godišnje, a na depozit dobijate $s\%$ godišnje. K tome morate platiti pri izdavanju kredita jednokratnu naknadu od 1% od iznosa kredita. Kolika je efektivna kamatna stopa?