Financijska matematika

Dr. Petra Posedel

Vedran Horvatić, dipl. inž.

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 15.6.2010.

3.3. Financijsko inženjerstvo. Primjena financijskih izvedenica za upravljanje izloženosti riziku

- Jedan od osnovnih problema s kojim se financijski management susreće odnosi se na pronalaženje metoda za **eliminaciju ili redukciju rizika** koji se preuzima prilikom izdavanja opcija.
  - Izdavatelj opcije: dobiva određenu proviziju za izdavanje izvedenice. No, ujedno preuzima i određenu vrstu rizika budući s obzirom na neizvjesnost kretanja cijene bazične imovine u trenutku dospijeća opcije.
  - Investitor u opcije: želi se zaštititi od mogućih gubitaka koji mogu nastati uslijed nepredvidivih kretanja cijena bazične imovine. Takva vrsta usluge, odnosno zaštite, plaća se cijenom same izvedenice.

- **Financijske institucije** koje izdaju i prodaju izvedenice:

  - Tipičan problem s kojim se susreću je pronalaženje metoda za redukciju ili eliminaciju rizika
  - Često se zadovoljavaju pristojbama koje se plaćaju za njihove usluge, a da nužno ne zauzimaju neku aktivnu ulogu na samom tržištu

- **Cilj**: želimo analizirati metode za redukciju **neželjenog** rizika koji proizlazi iz preuzimanja određenih poslovnih aktivnosti

  → aktivno upravljanje rizikom

3.3.1. *Hedgiranje* pozicija u opcijama

- Izdavatelj **europske call opcije** izložen je riziku u slučaju da opcija završi *u novcu* (engl. in the money), tj. u slučaju da je cijena bazične imovine u trenutku dospijeća T <u>veća</u> od izvršne cijene opcije X: $\boldsymbol{S(T)>X}$.

  - Prihod (ili gubitak) za izdavatelja opcije u trenutku dopsijeća iznosi $C^E e^{rT} - (S(T)\text{-}X)^+$
  - U slučaju da je cijena bazične imovine u trenutku dospijeća T *jako visoka*, gubitak za izdavatelja može teoretski biti jako veliki

- Izdavatelj **europske put opcije** izložen je riziku (iako znatno umjerenijem nego u slučaju call opcije) u slučaju da opcija završi *u novcu,* tj. u slučaju da je cijena bazične imovine u trenutku dospijeća T manja od izvršne cijene opcije X: $\boldsymbol{S(T) < X}$.

  - Prihod (ili gubitak) za izdavatelja opcije u trenutku dopsijeća iznosi $P^E e^{rT} - (X\text{-}S(T))^+$
  - Gubitak za izdavatelja je ograničen iako može biti veliki u odnosu na dobivenu premiju P^E

- Želimo analizirati kako eliminirati ili u najmanju ruku reducirati rizik kroz **kratki vremenski horizont** upravljanja *portfeljem*, odnosno financijskim instrumentima

- Na koji način alocirati imovinu u baznoj imovini i, ukoliko potrebno, u ostalim izvedenicama na baznu imovinu.
  - U praksi nije moguće na savršen način *hedgirati* pozicije u jedinstvenom portfelju koje će se držati od početka investiranja do trenutka dospijeća T.
  - Replicirajući će se portfelj će općenito biti potrebno modificirati kad god se varijable koje utječu na opciju promijene!

- Problem: Budući da u praksi postoje transakcijski troškovi, modifikacije pozicija u portfelju ne bi se trebale vršiti često.

- U sljedećim ćemo razmatranjima analizirati slučajeve hedginga kroz kratki vremenski interval uz pretpostavku da nema transakcijskih troškova.

Delta hedging

- Pretpostavljamo **Black-Scholesov model** za kretanje cijene bazične imovine
- Vrijednost europske call ili put opcije dane Black-Scholesovom formulom ovisi o **cijeni bazične imovine *S*** u nekom vremenskom trenutku od interesa
  - Pretpostavimo da promatramo portfelj čija vrijednost ovisi o trenutnoj vrijednosti dionice XYZ, $S=S(0)$ te označimo vrijednost takvog portfelja sa $V(S)= V(S(0))$.
  - Ovisnost **vrijednosti portfelja** o cijeni dionice može se *mjeriti* pomoću derivacije

    $$\frac{d}{dS}V(S)$$

    i dobivenu vrijednost nazivamo ***deltom portfelja***.

- Za *infinitezimalno* male promjene u cijeni dionice (za vrijednost ΔS), vrijednost će se portfelja promijeniti za

$$\boxed{\Delta V(S) \cong \frac{d}{dS} V(S) \cdot \Delta S}$$

- Princip **delta hedginga** bazira se na uključivanje izvedenica u sam portfelj kako se vrijednost samog portfelja bila *imuna (*ili barem ne bi previše varirala*)* na promjene u cijeni bazične imovine (dionice)

➡ to se postiže izjednačavanjem delte portfelja sa **nulom.** Takav portfelj zovemo **delta neutralnim**.

- Pretpostavimo da se portfelj sastoji od dionice (rizične imovine), obveznica (ili nerizične imovine) te neke izvedenice za hedging, te da su udjeli sastavnica redom x, y i z. Tada je vrijednost portfelja u trenutku 0 dana sa

$$V(S) = xS + y + z\Pi(S),$$

pri čemu pretpostavljamo da je vrijednost nerizične imovine u trenutku nula jednaka 1, a Π predstavlja cijenu izvedenice.

- Promatrat ćemo slučaj da financijska institucija izdaje **jednu** izvedenicu, tj. $z = -1$.

- Tada vrijedi:

$$\frac{d}{dS}V(S) = x - \frac{d}{dS}\Pi(S)$$

- Vrijednost $\frac{d}{dS}\Pi(S)$ zovemo <u>deltom izvedenice</u>.
- Nadalje, računanje delte izvedenice je općenito moguće u slučaju da postoji
  - eksplicitna formula za cijenu izvedenice
  - općenito ukoliko je model za kretanje cijene bazične imovine (dionice) specificiran.

- **Propozicija.** Uz pretpostavku Black-Scholesovog modela, označimo cijenu europske call opcije sa $C^E(S)$, pri čemu je $S=S(0)$ cijena bazične imovine u trenutku $t=0$. Tada je delta opcije dan sa

$$\frac{d}{dS}C^E(S) = N(d_1),$$

pri čemu su d_1 i N definirani kao i u slučaju Black-Scholesove formule.

$\square$

- **Zadatak.** Uz pretpostavku Black-Scholesovog modela, odredite deltu europske put opcije.

- Prema prethodnoj poziciji vrijedi da je udio rizične imovine u delta neutralnom portfelju jednak $x = N(d_1)$.

- Pretpostavimo dakle da su udjeli u rizičnoj, nerizičnoj imovini i izvedenici u delta neutralnom portfelju dani sa

$$\left(N\left(d_1\right), y, -1\right)$$

za bilo koju vrijednost udjela u nerizičnoj imovini y, a vrijednost d_1 izračunata je koristeći trenutnu cijenu rizične imovine $S(0)$.

- Vrijednost delta neutralnog portfelja u tom slučaju dana je sa

$$V(S) = N\left(d_1\right)S + y - C^E(S)$$

- U slučaju da želimo odrediti udio u nerizičnoj imovini y takav da je početna vrijednost portfelja jednaka nuli, tj. $V(S)=0$, tada vrijedi

$$y = C^E(S) - N(d_1)S,$$

odnosno koristeći Black-Scholesovu formulu za cijenu europske call opcije $C^E(S)$, vrijedi

$$y = -Xe^{-rT}N(d_2)$$

pri čemu su X izvršna cijena europske call opcije, a T njezino dospijeće, a d_2 je definiran kao u Black-Scholesovoj formuli.

- **Primjer.** Pretpostavimo da je nerizična kamatna stopa 8% te da se na tržištu trguje europskom call opcijom na dionicu XYZ izvršne cijene 60, s dospijećem 90 dana te da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ 60. Pretpostavimo da je volatilnost dionice XYZ 30%.
  - Koristeći Black-Scholesovu formulu, cijena europske call opcije iznosi 4.1445, a delta opcije iznosi 0.582.
- Pretpostavimo da određena financijska institucija želi izdati i prodati 1000 call opcija.
  - Time ostvaruje *premiju* od 4144. 5
  - Za hedgiranje je potrebno kupiti 581.96 udjela u vrijednosti od 34917.39 te posuditi od banke iznos od 30772.88
  - Drugim riječima, udjeli u delta neutralnom portfelju čija je početna vrijednost nula jednaki su

$$(581.96, -30772.88, -1000)$$

- Pretpostavimo da želimo analizirati vrijednost portfelja nakon jednog dana u tri moguća slučaja uz pretpostavku da se volatilnost dionice kao niti referentna nerizična kamatna stopa neće promijeniti:
  - Slučaj 1: cijena dionice ostaje nepromijenjena
  - Slučaj 2: cijena dionice naraste za vrijednost 1
  - Slučaj 3: cijena dionice padne za 1
- Primijetite da je nakon jednog dana u svim slučajevima period do dospijeća jednak 89 dana

Slučaj 1. Cijena dionice ostaje nepromijenjena, tj. S(1/365)=60. Trenutna cijena opcije je sada (89 dana do dospijeća!) 4.1183 (manja nego prethodnog dana) te:

- Obveza zbog kratke pozicije u opciji su reducirana
- Pozicija u dionicama vrijedi kao i prethodnog dana (cijena dionice se nije promijenila)
- Pozicija (dug!) u nerizičnoj imovini se povećava
- Bilanca na kraju prvog dana je sljedeća:

$$\begin{array}{lr} dionica & 34917.39 \\ dio\_u\_novcu & -30779.62 \\ opcije & -4118.33 \\ \hline \text{UKUPNO} & 19.45 \end{array}$$

Slučaj 2. Cijena dionice naraste, tj. S(1/365)=61. Trenutna cijena opcije je sada (89 dana do dospijeća!) 4.7215 (**veća** nego prethodnog dana) te za vlasnika delta neutralnog portfelja vrijedi:

- Vlasnik delta neutralnog portfelja gubitak na vrijednosti opcije (cijena opcije je narasla,ali je pozicija u opciji **kratka** stoga vlasnik koji drži kratku poziciju u opciji čija je vrijednost narasla ima potencijalni gubitak) gotovo u potpunosti balancira povećanjem u vrijednosti dionice (u dionicama ima **dugu** poziciju)
- Bilanca na kraju prvog dana je sljedeća:

$$\begin{array}{lr} dionica & 35499.35 \\ dio\_u\_novcu & -30779.62 \\ opcije & -4721.5 \\ \hline \text{UKUPNO} & -1.77 \end{array}$$

- Pozicija bez hedginga bi trpila potencijalni gubitak u iznosu od 576.07

Slučaj 3. Cijena dionice padne, tj. S(1/365)=59. Trenutna cijena opcije je sada (89 dana do dospijeća!) 3.55908 (**manja** nego prethodnog dana) te za vlasnika delta neutralnog portfelja vrijedi:

- Vrijednost od pozicije u dionicama također pada
- Delta neutralni portfelj donosi mali gubitak
- Bilanca na kraju prvog dana je sljedeća:

$$\begin{array}{lr} dionica & 34335.44 \\ dio\_u\_novcu & -30779.62 \\ opcije & -3559.08 \\ \hline \text{UKUPNO} & -3.26 \end{array}$$

- Pozicija bez hedginga bi osigurala dobitak od 586.35, dakle u ovom slučaju bi bilo bolje da se niej hedgiralo (u smislu dobiti)

- **Zadatak.** Odredite cijenu dionice prvog dana za koju replicirajući portfelja ostvaruje maksimalnu vrijednost

- **Zadatak.** Pretpostavimo da ste manager financijske institucije koja je izdala 50000 put opcija na dionicu XYZ s dospijećem od 90 dana i izvršne cijene 1.8 te da je trenutna tržišna cijena dionice XYZ 1.82 i volatilnosti 14%. Referentna nerizična kamatna stopa iznosi 5%. Konstruirajte delta neutralni portfelj kako biste se zaštitili od rizika pada cijene dionice na tržištu. Odredite cijenu tako konstruiranog portfelja u slučaju da cijena dionice XYZ u sljedećem danu trgovanja padne na 1.81.

- Iz prethodnih slučajeva možemo primijetiti da u slučaju da cijena dionice ostaje nepromijenjena replicirajući portfelj može ostvariti dobit za instituciju.

Vrijedi i općenitija tvrdnja:

- **Zadatak.** U slučaju da cijena dionice, volatilnost i referentna nerizična kamatna stopa ostanu nepromijenjene, delta neutralni portfelj početne vrijednosti nula koji replicira (hedgira) call opciju će osigurati dobit za investitora u takav portfelj.

- Ukoliko su **promjene** u cijeni bazične **imovine značajne,** replicirajući portfelj ne mora biti zadovoljavajuće rješenje

- Bez obzira da li cijena dionice naraste ili padne, delta neutralni portfelj može donijeti gubitke, iako značajno manje nego pozicije *bez pokrića*

- Što se događa s vrijednosti replicirajućeg portfelja ukoliko se, osim cijene same dionice, promijene i neke ostale varijable koje utječu na cijenu opcije?

- Može se dogoditi sljedeće:

  - U nekim okolnostima delta hedging može biti daleko ispod zadovoljavajuće razine

  - U slučaju značajnih promjena u cijeni bazične imovine (dionice) kao i u slučaju promjene istovremene promjene nekih drugih (tržišnih) varijabli, bit će potrebno **učvrstiti stabilnost repliciranja**

Grci (engl. Greek Parameters)

- Opisuju osjetljivost portfelja u odnosu na promjene različitih varijabli koje određuju cijenu opcije

- Izvršna cijena opcije, kao i njezino dospijeće su fiksne vrijednosti jednom kada je opcija izdana.

- **Cilj:** analizirati osjetljivostcijene opcije u odnosu na promjene u:
  - Cijeni bazične imovine (dionice) S
  - Vremenu t i nerizičnoj kamatnoj stopi r
  - Volatilnosti σ

- Označimo sa $V(S,t,r\sigma)$ vrijednost portfelja koji sadrži baziĉnu imovinu (dionicu) i neke sluĉajne zahtjeve (izvedenice) koje se baziraju na baziĉnoj imovini (dionici) od interesa.
- Definiramo

$$\boxed{\begin{aligned} delta_V &= \frac{\partial V}{\partial S} \\ gamma_V &= \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \\ theta_V &= \frac{\partial V}{\partial t} \\ vega_V &= \frac{\partial V}{\partial \sigma} \\ rho_V &= \frac{\partial V}{\partial r} \end{aligned}}$$

- Za *male* promjene u vrijednostima varijabli, cijene bazične imovine (dionice), volatilnosti, nerizične kamatne stope, i vremena vrijedi aproksimativno sljedeća jednakost:

$$\Delta V \cong delta_V \cdot \Delta S + theta_V \cdot \Delta t + vega_V \cdot \Delta \sigma + rho_V \cdot \Delta r + \frac{1}{2} gamma_V \cdot (\Delta S)^2$$

- Drugim riječima, u cilju *imunizacije* portfelja od malih promjena vrijednosti određenih varijabli potrebno je osigurati da određeni “Grk” parametar bude jednak nuli.

- Npr. U cilju hedginga od kretanja (mogućih promjena) volatilnosti, potrebno je konstruirati *vega neutralni* portfelj, odnosno portfelj čija je vrijednost vege jednaka nuli.

- Ukoliko želimo zadržati prednosti od delta-hedginga, ali usporedo imati i vega neutralni replicirajući portfelj, potrebno je konstruirati (*dizajnirati*) portfelj koji je i delta neutralan i vega neutralan, odnosno koji je **delta-vega-neutralan**.

- Delta-gamma neutralni portfelj će biti imun od **značajnijih** (apsolutno većih!) promjena u cijeni bazične imovine (dionice).

Black-Scholesova formula i *Grci*

- Pretpostavimo da kretanje cijene bazične imovine analiziramo pomoću **Black-Scholesovog modela**.
- Koristeći Black-Scholesovu formulu za cijenu europske call opcije C^E u trenutku t=0, vrijedi sljedeće:

:

$$delta_{C^E} = N(d_1)$$

$$gamma_{C^E} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$theta_{C^E} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} - rXe^{-rT} N(d_2)$$

$$vega_{C^E} = \frac{S\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

$$rho_{C^E} = TXe^{-rT} N(d_2).$$

Napomena. Može se pokazati da vrijedi sljedeća relacija

$$theta_{C^E} + rS \cdot delta_{C^E} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 gamma_{C^E} = rC^E$$

- Nadalje, u općenitom slučaju može se pokazati da vrijedi tzv. Black-Scholesova jednadžba

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS\frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial \Pi}{\partial S^2} = r\Pi$$

pri čemu je Π cijena europske izvedenice.

3.4. Itova formula

- Pretpostavljamo da promatramo sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dX_t(w) = a(t,w)dt + b(t,w)dW_t(w) \qquad (*)$$

te da promatramo funkciju $g(t,x) \in C^{1,2}([0,T] \times R)$

- Da li je moguće odrediti **dinamiku kretanja** procesa $Y_t(w)=g(t,X_t(w))$ ukoliko znamo dinamiku kretanja procesa $X_t(w)$?

Itova formula

$$dY_t = dg(t, X_t) = \underbrace{\left(g_t + a g_x + \frac{1}{2} b^2 g_{xx} \right)}_{drift} dt + \underbrace{b g_x}_{volatilnost} dW_t$$

stohastička diferencijalna jednadžba je zadana u istom obliku kao i stohastička diferencijalna jednadžba (*)

- **Primjer.**
  - $g(t,x)=ln(x)$
  - $g(t,x)=e^x$

- Pretpostavimo da analiziramo dinamiku kretanja cijene dionice XYZ pomoću sljedeće stohastičke diferencijalne jednadžbe (SDJ):

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad \sigma > 0. \qquad (1)$$

- Kako riješiti takvu SDJ, odnosno kako odrediti kretanje cijene dionice XYZ kroz vrijeme, S_t=?

- Pokušajmo iskoristiti Itovu formulu uz $g(t,x)=ln(x)$

- Tada vrijedi:
  - $a(t,w)=\mu S_t(w), \quad b(t,w)=\sigma S_t(w)$
  - $g_t=0$, $g_x=1/x$, $g_{xx}=-1/x^2$
- Prema Itovoj fomuli slijedi:

$$dY(t,S_t)=d\ln S_t=\left(0+\mu S_t\frac{1}{S_t}-\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\frac{1}{S_t^2}\right)dt+\sigma S_t\frac{1}{S_t}dW_t$$

$$=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dW_t$$

- Odnosno u terminima Itovog integrala:

$$\int_0^\tau d\ln S_t = \int_0^\tau \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \int_0^\tau \sigma dW_t \Rightarrow$$

$$\ln S_\tau - \ln S_0 = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma(W_\tau - W_0) \Rightarrow$$

$$\ln S_\tau = \ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma(W_\tau - W_0),$$

odnosno

$$\boxed{S_\tau = e^{\ln S_0} \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma W_t} = S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau + \sigma W_t}} \quad (2)$$

Proces zadan sa (2) je rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe (1).

- Distribucijski gledano,

$$\ln S_\tau \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)\tau, \sigma^2 \tau \right)$$

odnosno proces cijene S je log-normalno distribuirana slučajna varijabla.