

## Financijska matematika, rješenja 2. međuispita

1. a) N (priznaje se i T, uz obrazloženje  $1.13 \neq 1.134$ ) b) 162.89, 73.74 c) T d) T e) T f) T g) N.  
(Napomena: Rješenja bez obrazloženja se ne boduju.)

2.

$$\begin{aligned} E[S(10)|S(2) = a] &= E[S(2) \cdot (1 + R_3) \cdot \dots \cdot (1 + R_{10})|S(2) = a] \\ &= E[a \cdot (1 + R_3) \cdot \dots \cdot (1 + R_{10})] = (\text{n.j.d.}) = a[E(1 + R_1)]^8 \\ &= a \cdot 0.98^8 = 0.85a. \end{aligned}$$

3. a)  $1.5 \cdot p^* + 0.5 \cdot (1 - p^*) = 1.1 \Rightarrow p^* = 0.6$ .

$$\text{b) } (K - S(1))^+ = \begin{cases} (90 - 150)^+ = 0, & S(1) = 150, \\ (90 - 50)^+ = 40, & S(1) = 50. \end{cases}$$

$$\text{c) } P = E^*\left[\frac{(K - S(1))^+}{1 + r}\right] = \frac{1}{1.1}[0.6 \cdot 0 + 0.4 \cdot 40] = 14.54.$$

$$\text{d) } 150x + 1.1y = 0, \quad 50x + 1.1y = 40 \Rightarrow x = -0.4, y = 54.54.$$

Replicirajući portfelj postoji, dakle opcija je dostižna.

4. U 1. čvoru granične kamatne stope su  $d = 5\%$ ,  $g = 10\%$ , a u podstablama  $d_1 = -0.91\%$ ,  $g_1 = 4.55\%$ , odnosno  $d_2 = -5.71\%$ ,  $g_2 = 2.88\%$ . Uvjet za nearbitražu je  $d < r < g$ , dakle trebalo bi istovremeno vrijediti  $5 < r < 10$  i  $-0.91 < r < 4.55$ , ili  $5 < r < 10$  i  $-5.71 < r < 2.88$ . U oba slučaja vidimo da je to nemoguće, dakle uvijek postoji strategija za arbitražu. Općenito, za  $r < d$  u nekom čvoru treba kupiti dionicu, a za  $r > g$  treba kratko prodati dionicu.

5. Dobitak u jednom bacanju:  $X_i \sim \begin{pmatrix} -50 & x - 50 & 2x - 50 \\ 3/5 & 3/10 & 1/10 \end{pmatrix}$ ,  $E[X_i] = \frac{x}{2} - 50$ .

$$\text{Proces ukupnog dobitka do } n\text{-tog bacanja: } S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

$$\text{Uvjet za fer igru: } E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n.$$

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = S_n + E[X_{n+1}] = S_n + \frac{x}{2} - 50.$$

Dakle, da bi igra bila fer mora vrijediti  $\frac{x}{2} - 50 = 0$ , tj.  $x = 100$ . Da bi organizator dugoročno profitirao, mora vrijediti  $x < 100$ .

6.  $r = 10\%$ ,  $d = 15\%$ ,  $g = 20\%$ . Vrijedi  $r < d < g$  pa postoji mogućnost arbitraže. Strategija:

$t=0$ : Posudimo 100 u banci i kupimo dionicu za 100.  $(X(1), Y(1)) = (1, -100)$ ,  $V(0) = 0$ .

$t=1$ : Prodamo dionicu za 115 ili 120, vratimo 110 banci.  $V(1) = 1 \cdot S(1) - 110 = \begin{cases} 10, & S(1) = 120, \\ 5, & S(1) = 115. \end{cases}$

7. a)  $\frac{55}{50} \cdot p^* + \frac{40}{50} \cdot (1 - p^*) = 1.05 \Rightarrow p^* = 0.833$ .

b)  $ferC = E^*\left[\frac{(S(1) - K)^+}{1 + r}\right] = \frac{1}{1.05}[0.833 \cdot 5 + 0.166 \cdot 0] = 3.96$ .

c) Odgovor je C. Naime, stvarna cijena je manja od fer cijene (što je ujedno i cijena replicirajućeg portfelja), pa prodajom repl. portfelja za 3.96 i kupnjom opcije za 1.9 ostaje 2.06 što oročimo u banci. U  $t = 1$  prodajom opcije se točno namiri obveza iz portfelja, a čisti profit je  $2.06 \cdot 1.05 = 2.17$ .