

Financijska matematika

Dr. sc. Petra Posedel

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zagreb, 13.3.2015.

Neprekidno ukamaćivanje

- ❑ Točnu vrijednost investicije je ponekad potrebno znati u vremenskim trenucima između perioda ukamaćivanja; npr. u slučaju da investitor želi zatvoriti račun na dan kada nema pripisa kamate.
- ❑ Pitanje: Kolika je vrijednost depozita na tekući račun od 1000 kn nakon 10 dana, uz mjesečni obračun kamata i kamatnu stopu od 12%?
 - ❑ 1000 kn? (prvi obračun tek za mjesec dana od danas?)

- Konačna (buduća) vrijednost glavnice P na kraju godine t uz godišnji kamatnjak r i složeno i godišnje ukamaćivanje, jednaka je

$$V(t) = P(1 + r)^t$$

- Ukoliko se u svakoj godini vrši m ukamaćivanja uz relativnu kamatnu stopu $\frac{r}{m}$, tada uz sve veći m konačna vrijednost teži prema

$$V(t) = Pe^{rt}, \quad t \geq 0$$

□ **neprekidno ukamaćivanje** = beskonačno mnogo ukamaćivanja unutar jedne godine.

□ Uz m dodatnih ukamaćivanja uz relativnu kamatnu stopu $\frac{r}{m}$, buduća je vrijednost glavnice:

$$V(t) = P \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt} = P \left(\left(1 + \frac{r}{m} \right)^m \right)^t$$

□ Budući da vrijedi

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{r}{m} \right)^m = e^r,$$

tada je

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{r}{m} \right)^m \right)^t = \left(e^r \right)^t = e^{rt}$$

- Dakle, buduća vrijednost glavnice, nakon t razdoblja, uz neprekidno ukamaćivanje jednaka je
-

$$V(t) = V(0)e^{rt}$$

- Sadašnja je vrijednost jednaka:

$$V(0) = V(t)e^{-rt}$$

- Vrijednost e^{rt} je u neprekidnom slučaju **faktor rasta**

Uz češće ukamaćivanje, **veći** je konačni iznos (za istu glavnicu i kamatnu stopu)!

□ **Primjer:** $P_0 = 100$, $r = 10\%$ godišnje.

$$m = 1: \quad 100 \rightarrow 100 (1+0,1) = 110$$

$$m = 2: \quad 100 \rightarrow 100 (1+0,1/2)^2 = 110,25$$

$$m = 12: \quad 100 \rightarrow 100 (1+0,1/12)^{12} \approx 110,38$$

$$m = 365: \quad 100 \rightarrow 100 (1+0,1/365)^{365} \approx 110,52$$

$$m = \infty \quad 100 \rightarrow 100e^{0.1} = 110,52$$

\Rightarrow u praksi $\infty \approx 365$

Veza između neprekidnog i diskretnog ukamaćivanja

- **Primjer:** r – “neprekidna” kamata, r_m – kamata koja se upisuje m puta godišnje

Kolika mora biti kamata r_m da bi **efekt** ukamaćivanja njome m puta godišnje bio isti kao i neprekidno ukamaćivanje? Obratno?

Imamo:

$$e^r = (1 + r_m / m)^m, \quad \text{odnosno} \quad r = m \ln (1 + r_m / m)$$

$$\Rightarrow r_m = m (e^{r/m} - 1) \xrightarrow{\text{Godišnja!}}$$

- **Primjer.** Netko vam posudi novac uz 8% kamata godišnje s neprekidnim ukamaćivanjem, Koliko mu morate plaćati ako se kamata obračunava tromjesečno, a kredit je 100.000 kn?

$$r_4 = 4 (e^{0,02} - 1) \approx 0,08080.$$

Dakle, morate mu plaćati 2020 kn tromjesečno. Koliko biste morali plaćati da se kamata obračunava godišnje?

-
- ❑ U slučaju **neprekidnog** ukamaćivanja stopa rasta proporcionalna je trenutnoj vrijednosti imovine odnosno bogatstva. Dokažite. Koji je faktor proporcionalnosti?
 - ❑ **Primjer:** Izračunajte razliku u vrijednosti sljedećih dviju investicija: vrijednost glavnice od 100 kn nakon godinu dana uz godišnji kamatnjak 10% i a) mjesečni obračun kamata te 2) neprekidno ukamaćivanje. Kojom se frekvencijom mora izvršavati upis kamate ukoliko želimo da razlika dviju vrijednosti ne bude veća od 0.01 kn?

- Uz neprekidno ukamaćivanje vrijednost glavnice nakon godinu dana iznosi
-

$$V(1) = 100e^{0.1} = 110.5171$$

- Uz mjesečno ukamaćivanje proporcionalni kamatnjak iznosi $10/12=0.8333\%$, te je vrijednost nakon godinu dana jednaka

$$V(1) = 100(1 + 0.00833)^{12} = 110.4713$$

Dakle, razlika je 0.0458.

- Napomena. Prinos na investiciju uz složeno ukamaćivanje **ne zadovoljava** svojstvo aditivnosti, tj:
-

$$R(0,1) = R(1,2) = r$$

$$R(0,2) = (1+r)^2 - 1 = r^2 + 2r$$

dakle, $R(0,1) + R(1,2) \neq R(0,2)$

- Uz neprekidno ukamaćivanje: $R(0,1) + R(1,2) \neq R(0,2)$
- Uz jednostavni kamatni račun: $R(0,1) + R(1,2) = R(0,2)$
- Koje bi prinose trebalo promatrati kako bi vrijedilo svojstvo aditivnosti?

Logaritamski povrat vs. prinos

□ Definiramo **logaritamski povrat**

$$lr(s, t) = \ln \frac{V(t)}{V(s)} = \ln V(t) - \ln V(s)$$

Uz neprekidno ukamaćivanje vrijedi

$$lr(s, t) = r(t - s),$$

pri čemu je r kamatna stopa na investiciju. Tada je

$$r = \frac{lr(s, t)}{t - s}$$

- **DZ.** Dokažite da logaritamski povrat zadovoljava svojstvo aditivnosti, odnosno da vrijedi
-

$$lr(s, t) + lr(t, u) = lr(s, u), \quad s < t < u$$

□ **Napomena:**

- Uz jednostavno ukamaćivanje: $R(s, t) = (t - s)r, \quad s < t$
- Uz složeno ukamaćivanje: $R(s, t) = (1 + r)^{t-s} - 1, \quad s < t$
- Uz neprekidno ukamaćivanje: $lr(s, t) = (t - s)r, \quad s < t$

Kako usporediti metode ukamaćivanja?

- Do sada smo vidjeli: frekventnije ukamaćivanje ima kao posljedicu veće buduće vrijednosti uz uvjet da su kamatne stope i početna glavnica jednake.

Naime, ako je $m < k$, tada je

$$\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} < \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

- Analizirat ćemo općenite situacije u kojima jedna metoda ukamaćivanja ima kao posljedicu **jednake ili veće buduće vrijednosti** od neke druge metode uz istu početnu glavnica.

Ekvivalentne metode ukamaćivanja

- Definicija. Za dvije metode ukamaćivanja kažemo da su **ekvivalentne** ukoliko su odgovarajući **faktori rasta** kroz period od jedne *godine* jednaki.

Ukoliko je faktor rasta uz jednu metodu ukamaćivanja veći od faktora rasta uz drugu metodu ukamaćivanja, reći ćemo da *preferiramo* metodu ukamaćivanja uz veći faktor rasta u odnosu na drugu metodu.

Primjer.

- Polugodišnje ukamaćivanje uz kamatnjak od 10 ekvivalentno je godišnjem ukamaćivanju uz kamatnjak 10.25%. Također, oba načina ukamaćivanja preferiramo u odnosu na mjesečno ukamaćivanje uz (godišnju) kamatnu stopu od 8%. Naime,

$$\left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2 = 1.1025 = 1 + 0.1025.$$

$$\left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} = 1.083$$

- Uočimo: u oba slučaja radi se o kamatnim stopama izraženima na godišnjoj razini!

Efektivna kamatna stopa

- Umjesto uspoređivanja faktora rasta, uspoređivat ćemo tzv. *efektivne stope*.
- Definicija. Za dani način obračuna kamata uz kamatnu stopu r , **efektivna kamatna stopa**, u oznaci r_e , je ona kamatna stopa koja daje isti faktor rasta kroz period od *godine* dana uz *godišnje* ukamaćivanje.
- U slučaju **složenog ukamaćivanja** uz frekvenciju m i kamatnu stopu r , efektivna kamatna stopa zadovoljava sljedeću jednadžbu:

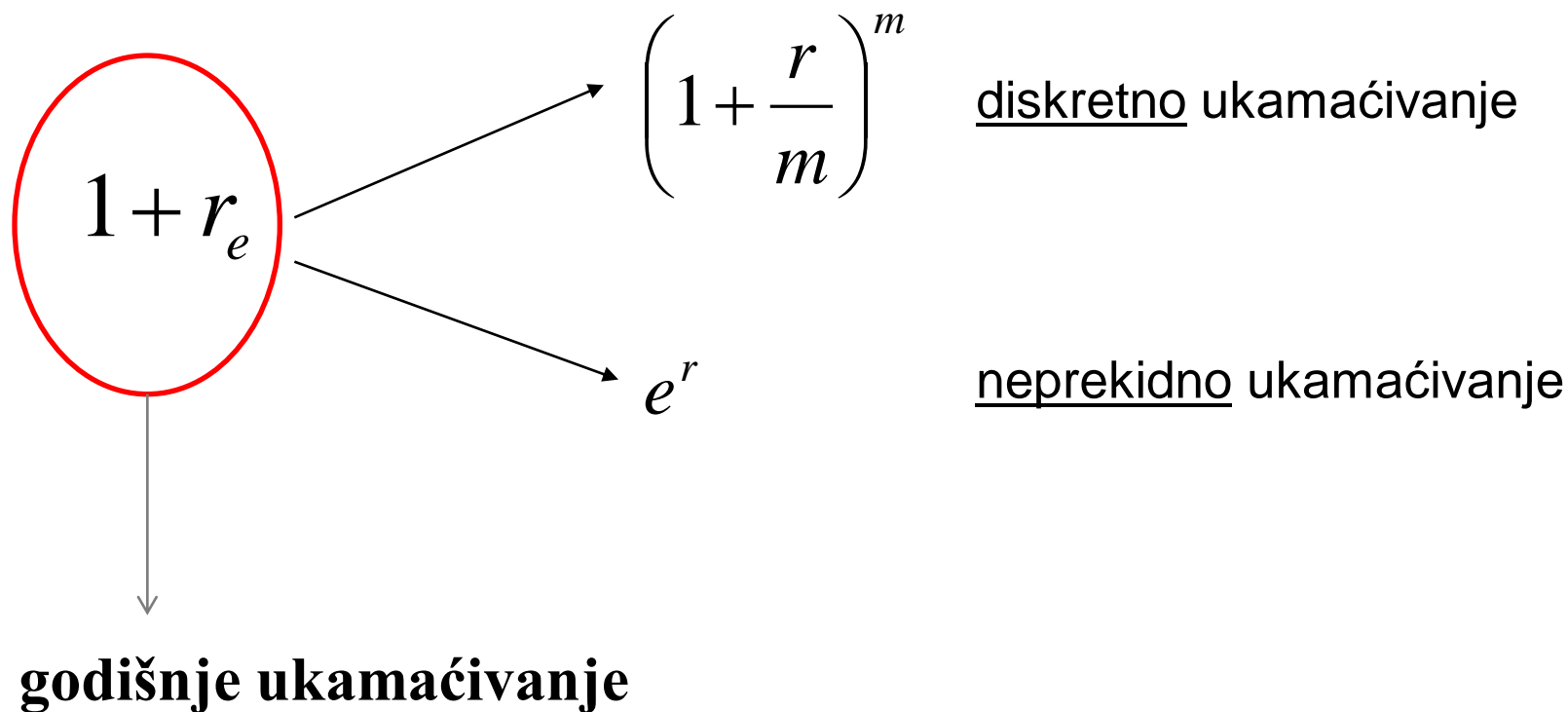
$$1 + r_e = \left(1 + \frac{r}{m} \right)^m$$

→ *godišnje!*

- U slučaju neprekidnog ukamaćivanja:

$$1 + r_e = e^r$$

- **Napomena:**



Primjeri.

- ❑ Nađite onu kamatnu stopu koja je uz neprekidno ukamaćivanje ekvivalentna mjesečnom obračunu kamata uz kamatnu stopu od 12%.
- ❑ Izračunajte frekvenciju složenog ukamaćivanja uz kamatnu stopu 20% uz koju je investicija ekvivalentna godišnjem ukamaćivanju uz kamatnu stopu od 21%
- ❑ Odredite efektivnu kamatnu stopu u odnosu na sljedeće dvije metode ukamaćivanja: a) dnevno ukamaćivanje uz kamatnu stopu od 15% te b) polugodišnje ukamaćivanje uz kamatnu stopu 14%. Koja se metoda obračuna preferira?

- Propozicija. Dvije metode ukamaćivanja su ekvivalentne ako i samo ako su odgovarajuće efektivne kamatne stope jednake. Metoda ukamaćivanja s efektivnom kamatnom stopom r_e se preferira u odnosu na neku drugu metodu ukamaćivanja s efektivnom kamatnom stopom r_e' ako i samo je

$$r_e > r_e'.$$

- Dokaz: direktno prema definiciji faktora rasta.

- U terminima efektivne kamatne stope, buduća je vrijednost glavnice P nakon t perioda dana sa
-

$$V(t) = P(1 + r_e)^t, \quad t \geq 0.$$

ili

$$V(t) = Pe^{rt}, \quad t \geq 0.$$

- Prethodna propozicija implicira da uz jednaku glavnici, ekvivalentne će metode ukamaćivanja dati **jednaku** buduću vrijednost za bilo koji period $t \geq 0$.
- Također, metoda ukamaćivanja koja se *preferira* u odnosu na neku drugu daje veće buduće vrijednosti za bilo koji period $t \geq 0$.

1. 1. 2. Pokazatelji isplativosti ulaganja: usporedba investicijskih projekata

- Problem: Poduzeća ili investitori su često suočeni s odlukom između alternativnih projekata ili investicija. Kod donošenja odluka o financiranju projekata, vodi se računa o **isplativosti ulaganja**

➡ prednost u principu imaju oni investicijski projekti u kojima se sredstva *učinkovitije* koriste.

- Analiza isplativosti ulaganja temelji se na **procjeni** budućih prihoda i troškova vezanih uz poslovanje.
- Pri procjeni budućih prihoda koristimo pojam **novčanog tijeka** ili **tijeka novca** (engl. cash flow)

□ Postoji više pokazatelja koji se koriste u ocjenjivanju efikasnosti projekata temeljenih na analizi novčanog toka, a među njima se kao najvažniji, među financijskim parametrima, ističu:

- Metoda čiste sadašnje vrijednosti
- Metoda interne stope rentabilnosti

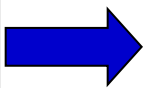
□ Računovodstveni parametri: prinos na kapital (ROE), prinos na imovinu (ROA), zarada po udjelu (dionici) (EPS)...

Koji parametri bolje mjere investicijsku isplativost?

- ❑ Često se donositelji odluke odlučuju za isključivo jednu od metoda kojoj dodjeljuju apsolutno značenje. To obično ne otkriva niti jedan intrinzični tehnički problem.
- ❑ Prihvatiti neku od metoda ujedno znači prihvatiti njezine pretpostavke koje se obično odnose na ciljeve (obično maksimizacija bogatstva) i kontekst donošenja same odluke te su u tom kontekstu na njih i oslanjaju.
- ❑ Također, faktor *nesigurnosti* ne smije se zanemariti.

Metoda čiste sadašnje vrijednosti (eng. Net Present Value)

□ Između više ponuđenih investicija odabiremo onu najpovoljniju ili ocjenjujemo jednu investiciju kao povoljnu, odnosno nepovoljnu.

- 
1. potrebno je procijeniti neto dobitke (ili izdatke) poslovanja u pojedinim razdobljima.
 2. dobitci (ili izdaci) poslovanja u pojedinim godinama **diskontiraju** se na početak razdoblja trajanja investicije

-
- ❑ Korištena kamatna stopa poznata je kao cijena/trošak kapitala te se može raditi o trošku posuđivanja novca ili o željenoj stopi prinosa za investitora.
 - ❑ *Distribucija* novčanih tokova kroz vremenski horizont ulaganja u interakciji je s ekonomsko-financijskim okruženjem.

-
- ❑ Naime, prihodi će se **reinvestirati** uz uvjete koji mogu utjecati na odluku, dok će novac apsorbiran od troškova biti posuđen drugim financijskim operacijama čiji trošak/profitabilnost obično utječe na procjenu (odnosno evaluaciju) same investicije.
 - ❑ Svaka metoda evaluacije pretpostavlja određene pretpostavke o takvim uvjetima reinvestiranja. Ukoliko su oni konzistentni s aktualnom situacijom donositelja odluke, sugestije modela će biti vrlo korisne za konkretno donošenje odluka.

Oznake:

- N_t novčani tijek u vremenu t , $N_t \in R$, a N_0 označava vrijednost početnog ulaganja (negativnog predznaka)
- r trošak (cijena) kapitala u danom periodu
- Čista sadašnja vrijednost dana je

$$V_{NPV} = N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{N_t}{(1+r)^t}$$

- Budući da su budući novčani tokovi često procjene, zaokružujemo vrijednost na najbližu stotinu ili tisućinu

- Pozitivna vrijednost čiste sadašnje vrijednosti sugerira **profitabilnu investiciju**, dok negativna vrijednost označava gubitak, odnosno investicijski projekt u koji *razuman* investitor ne bi trebao ulaziti.
- Ukoliko se uspoređuje nekoliko investicijskih projekata, prednost se daje onom projektu veće čiste sadašnje vrijednosti.
- Cijena kapitala je uz procjenu novčanih tokova odlučujuća u ocjeni investicijskog projekta
- Prilikom procjene možemo uzeti u obzir i *nekoliko scenarija* (obično se gledaju optimistički, pesimistički te najbolja procjena)

Primjer 1.

- Za neki se projekt pretpostavljaju sljedeći novčani tokovi (u kunama):

godina	1.	2.	3.	4.
	40000	25000	35000	30000

- Da li biste investirali 100000 kn u takav projekt ukoliko je trošak kapitala a) $r = 7\%$, b) $r = 14\%$?

-
- Budući da je 100000 kn iznos početnog ulaganja, čista je sadašnja vrijednost projekta uz trošak kapitala od 7%:

$$V_{NPV} = -100000 + \frac{40000}{1+0.07} + \frac{25000}{(1+0.07)^2} + \frac{35000}{(1+0.07)^3} + \frac{30000}{(1+0.07)^4} = 10676$$

- Uz 14%:

$$V_{NPV} = -100000 + \frac{40000}{1+0.07} + \frac{25000}{(1+0.14)^2} + \frac{35000}{(1+0.14)^3} + \frac{30000}{(1+0.14)^4} = -4289$$

- Dakle, uz trošak kapitala od 7% je čista sadašnja vrijednost pozitivna.

Primjer 2.

- Investitoru su prezentirana dva projekta, ABC010 te XYZ020. Dobici krajem godina za oba projekta dani su u sljedećoj tablici:

godina	1.	2.	3.	4.
ABC010	180000	160000	170000	200000
XYZ020	80000	105000	215000	300000

U svaki projekt treba investirati 600000 kn. Koji je projekt isplativiji ako je cijena kapitala 5%?

- Čista sadašnja vrijednost projekta ABC010:
-

$$V_{NPV} = -600000 + \frac{180000}{1+0.05} + \frac{160000}{(1+0.05)^2} + \frac{170000}{(1+0.05)^3} + \frac{200000}{(1+0.05)^4} = 27946.17$$

- Čista sadašnja vrijednost projekta XYZ020:

$$V_{NPV} = -600000 + \frac{80000}{1+0.05} + \frac{105000}{(1+0.05)^2} + \frac{215000}{(1+0.05)^3} + \frac{300000}{(1+0.05)^4} = 3964.4$$

- Dakle, projekt ABC010 ima veću čistu sadašnju vrijednost pa je i isplativiji

Metoda interne stope rentabilnosti (engl. Internal Rate of Return)

- ❑ Kod metode čiste sadašnje vrijednosti smo pretpostavljali da investitor kreće s ciljanom stopom prinosa i na temelju toga uspoređuje *alternative* prilikom investiranja.
- ❑ Metoda interne stope rentabilnosti se također koristi za uspoređivanje i odabir *najpovoljnijeg* ulaganja za investitora.
- ❑ No, metoda interne stope rentabilnosti se prvenstveno koristi za **određivanje** kamatne stope kojom ćemo opisati uspješnost ili neuspješnost neke investicije.

- Određuje se stopa povrata/prinosa koju će projekt ili investicija proizvoditi



- Definicija. **Interna stopa rentabilnosti** nekog ulaganja je kamatna stopa za koju je čista sadašnja vrijednost tog ulaganja jednaka nuli (stopa povrata projekta)
- Drugim riječima, određivanje interne stope rentabilnosti svodi se na rješavanje sljedeće jednačbe po r :

$$N_0 + \frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{N_t}{(1+r)^t} = 0 \quad (*)$$

- Jednadžbu (*) moguće je zapisati kao
-

$$\frac{N_1}{1+r} + \frac{N_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{N_t}{(1+r)^t} = I,$$

pri čemu je I vrijednost početnog ulaganja (>0 !)

- Ukoliko znamo cijenu kapitala r , tj. kamatnu stopu uz koju posuđujemo novac, tada vrijedi

$r_{ISR} > r$  *isplativo* ulaganje

$r_{ISR} < r$  *ulaganje s gubitkom*

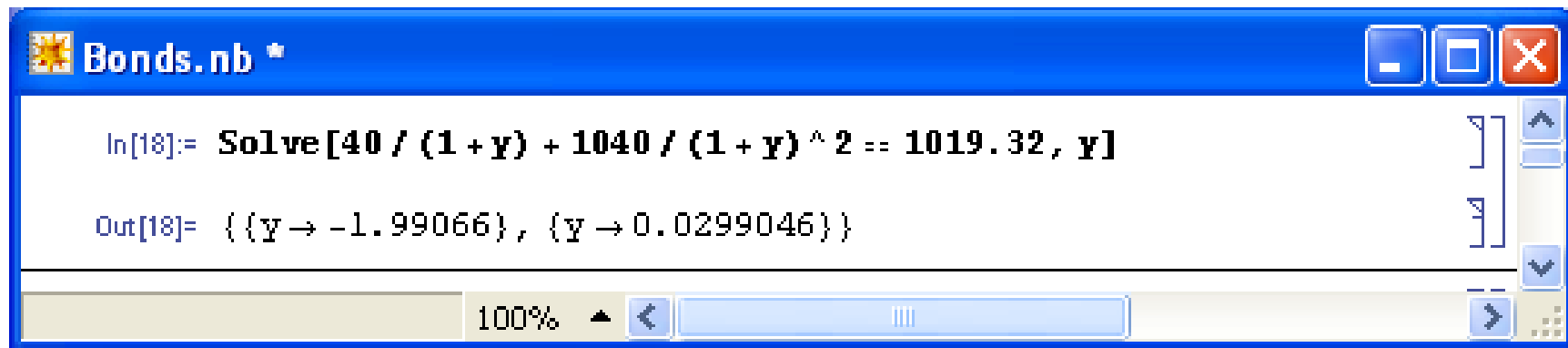
-
- Ukoliko je neki od novčanih tokova N_1, N_2, \dots, N_t negativan, tada postoji mogućnost višestrukih internih stopa rentabilnosti.
 - Nakon određivanja interne stope rentabilnosti, investitor uspoređuje njezinu vrijednost s postojećim kamatnim stopama na tržištu ili s troškom kapitala za investitora.
 - Također, investitor mora voditi računa i o *riziku* koji određena alternativna investicija nosi.

Napomena.

□ Jednadžba (*) je algebarska jednadžba većeg stupnja

➡ kako ju riješiti? *Eksplicitno?*

□ Softver Mathematica:



```
In[18]:= Solve[40 / (1 + y) + 1040 / (1 + y) ^ 2 == 1019.32, y]

Out[18]:= {{y -> -1.99066}, {y -> 0.0299046}}
```

□ Excel: 1. Alati → Rješavač (Solver)

2. Financijske funkcije NPV i IRR

NPV vs IRR: koju metodu koristiti?

- Sumiranjem pravila za obje metode imamo:

Kriterij	DA ili NE (da li odabrati određeni projekt)	Rangiranje projekta (usporedba dva međusobno isključiva projekta)
NPV	Projekt bi trebalo <i>preuzeti</i> ukoliko je čista sadašnja vrijednost pozitivna, tj. $NPV > 0$	Projekt A se preferira projektu B ukoliko je $NPV(A) > NPV(B)$
IRR	Projekt bi trebalo <i>preuzeti</i> ukoliko vrijedi $IRR > r$, pri čemu je r odgovarajuća diskontna stopa	Projekt A se preferira projektu B ukoliko je $IRR(A) > IRR(B)$

Što ako NPV i IRR metoda daju različite zaključke?

- ❑ Pretpostavimo da promatramo dva projekta, A i B takve da je $NPV(A) > NPV(B)$, ali je $IRR(A) < IRR(B)$.
- ❑ U tom se slučaju često koristi kriterij čiste sadašnje vrijednosti prilikom donošenja odluke.
- ❑ Naime, ukoliko je cilj investitora maksimizacija *bogatstva* (vrijednosti imovine) tada se koristi metoda čiste sadašnje vrijednosti koja mjeri prirast vrijednosti imovine od preuzimanja projekta.

- Prilikom “Da” ili “NE” kriterija, ukoliko metoda čiste sadašnje vrijednosti upućuje na odluku “Da”, tada će istu odluku implicirati i interna stopa rentabilnosti (i obratno)
- Projekti su međusobno isključivi budući da oba predstavljaju način dobivanja istog ishoda, stoga biramo samo jedan među njima.
- Prilikom rangiranja projekata, metode čiste sadašnje vrijednosti i interne stope rentabilnosti ne rangiraju nužno projekte na jednaki način, čak iako su oba projekta isplativa. Ukoliko postoji konflikt u metodi odluke, tada je metoda čiste sadašnje vrijednosti korektna metoda za budžetiranje kapitala.

Primjer. Pretpostavimo da promatramo novčane tokove za dva projekta, A i B. Oba projekta imaju **isti** početni trošak, ali **različite** novčane tokove (u 000 kn)

	Trošak kapitala 15%	
Godina	Projekt A	Projekt B
0	-500	-500
1	100	250
2	100	250
3	150	200
4	200	100
5	400	50
NPV	74.42	119.96
IRR	19.77%	27.38%

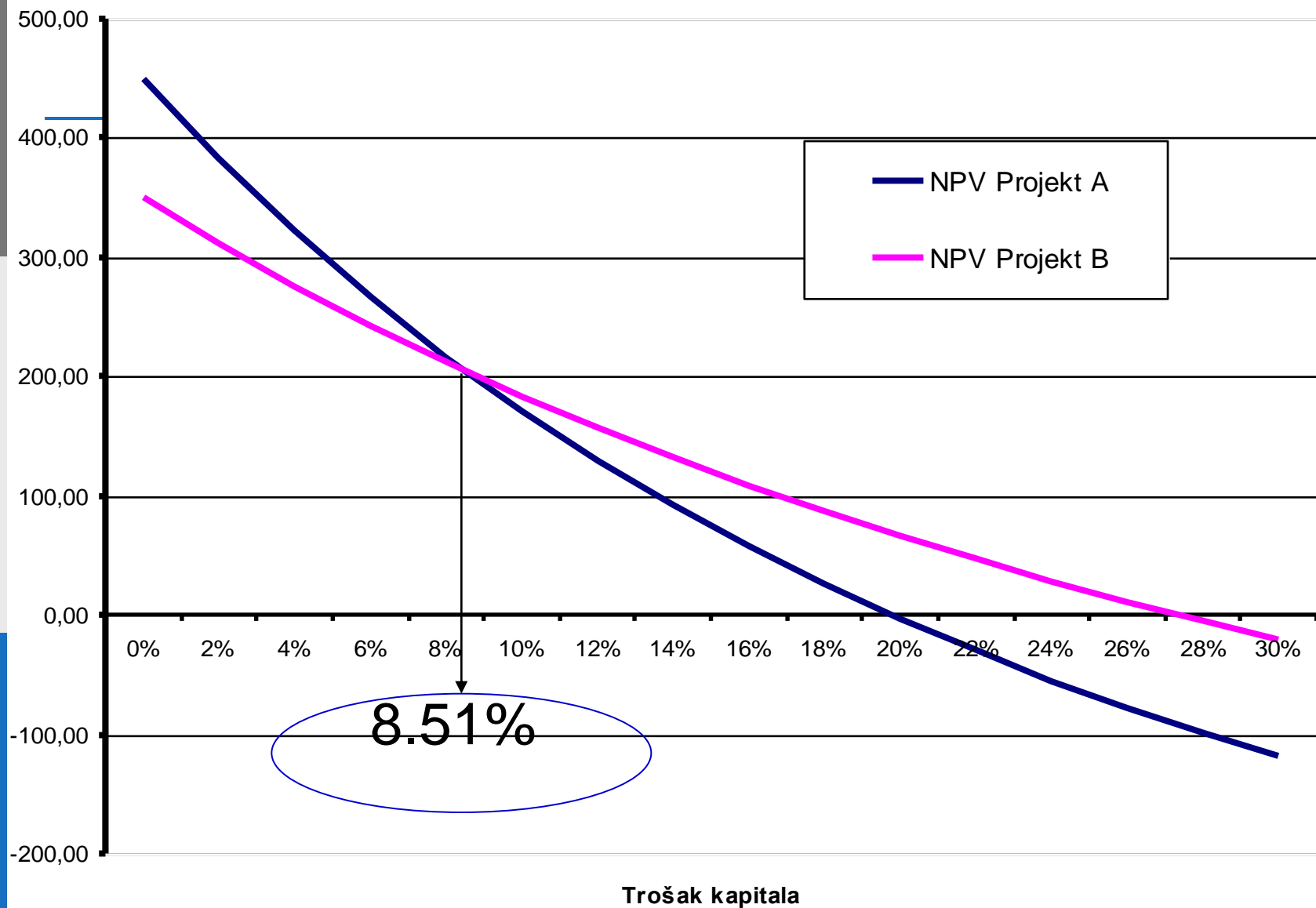
	Trošak kapitala 8%	
Godina	Projekt A	Projekt B
0	-500	-500
1	100	250
2	100	250
3	150	200
4	200	100
5	400	50
NPV	216.64	212.11
IRR	19.77%	27.38%

Možemo primijetiti da:

- Ukoliko koristimo metodu **interne stope rentabilnosti**, *preferiramo projekt B*
- Ukoliko koristimo metodu **čiste sadašnje vrijednosti**, *preferiramo projekt B projektu A* ukoliko je trošak kapitala (kamatna stopa, diskontna stopa) 15%.
U tom slučaju se odluka poklapa s onom dobivenom uz IRR.
- Ukoliko je trošak kapitala 8%, tada dvije metode **ne daju isti zaključak** te se po NPV kriteriju *preferira projekt A*

Tablica kamatnih stopa i čiste sadašnje vrijednosti

Projekt A NPV		Projekt B NPV	
0%	450,00		350,00
2%	382,57		311,53
4%	321,69		275,90
6%	266,60		242,84
8%	216,64		212,11
10%	171,22		183,49
12%	129,85		156,79
14%	92,08		131,84
16%	57,53		108,47
18%	25,86		86,57
20%	-3,22		66,00
22%	-29,96		46,66
24%	-54,61		28,45
26%	-77,36		11,28
28%	-98,39		-4,93
30%	-117,87		-20,25



-
- ❑ Projekt B ima veću internu stopu rentabilnosti (27.38%) od projekta A (19.77%)
 - ❑ Ukoliko je **kamatna stopa** (trošak kapitala) **niska**, projekt A ima veću čistu sadašnju vrijednost od projekta B, no ukoliko je ona **visoka**, tada projekt B ima veću čistu sadašnju vrijednost od projekta A
 - ❑ Postoji **točka presjeka** koja označava raspon (ne) podudaranja jednakosti dotičnih vrijednosti.

-
- ❑ Čista sadašnja vrijednost projekta A **osjetljivija** je na promjene troška kapitala od čiste sadašnje vrijednosti projekta B. Zašto?
 - ❑ Novčani tokovi projekta A su *raspršeniji* kroz vrijeme od onih projekta B; drugim riječima projekt A ima značajno više svojih novčanih tokova u kasnijim vremenima od projekta B

Točka presjeka **8.51%**

Kriterij	Trošak kapitala < 8.51%	= 8.51%	> 8.51%
NPV	<i>Preferira se projekt A</i> $NPV(A) > NPV(B)$	<i>Indiferentnost među projektima:</i> $NPV(A) = NPV(B)$	<i>Preferira se projekt B</i> $NPV(B) > NPV(A)$
IRR	Projekt B se uvijek preferira projektu A: $IRR(B) > IRR(A)$		

Računanje točke presjeka

- ❑ Točka presjeka je kamatna stopa za koju je čista sadašnja vrijednost (NPV) za oba projekta **jednaka**.
- ❑ Može se pokazati da je točka presjeka interna stopa rentabilnosti razlika u novčanim tokovima dvaju projekata.
- ❑ *Dokaz:* Pretpostavimo da je trošak kapitala jednak r te da je $\text{NPV}(A) = \text{NPV}(B)$. Označimo sa N_i^A i N_i^B novčane tokove projekata A, odnosno B za $i=0, \dots, t$.

□ Tada vrijedi:.

$$\begin{aligned} NPV(A) &= N_0^A + \frac{N_1^A}{1+r} + \frac{N_2^A}{(1+r)^2} + \dots + \frac{N_t^A}{(1+r)^t} \\ &= N_0^B + \frac{N_1^B}{1+r} + \frac{N_2^B}{(1+r)^2} + \dots + \frac{N_t^B}{(1+r)^t} = NPV(B) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = NPV(A) - NPV(B) = N_0^A - N_0^B + \frac{N_1^A - N_1^B}{1+r} + \frac{N_2^A - N_2^B}{(1+r)^2} + \dots + \frac{N_t^A - N_t^B}{(1+r)^t}$$

□ Odnosno r je interna stopa rentabilnosti.

- ❑ Ukoliko dolazi do nepodudaranja u zaključku glede odabira među investicijskim projektima na bazi dviju metoda evaluacije (npr. za slučaj troška kapitala 8%), odluka se **najčešće** temelji na čistoj sadašnjoj vrijednosti (dakle, projekt A u ovom konkretnom slučaju)
- ❑ Korištenje NPV metode se preferira budući da čista sadašnja vrijednost predstavlja dodatno bogatstvo koje se dobiva, dok je kamatna stopa (složena) stopa povrata.
- ➡ Ekonomska intuicija glede takvog načina odabira: potrošači maksimiziraju svoje bogatstvo (*vrijednost imovine*), a ne svoje stope povrata.