Financijska matematika

Doc. dr. sc. Petra Posedel Šimović

Dr. sc. Azra Tafro

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zagreb, 18. 5. 2018.

2.3. Tržišni modeli u diskretnom vremenu

- Pretpostavimo da neki investitor trguje sa ***m* rizičnih investicija** (dionice uglavnom)
- Opća notacija: cijene takvih investicija u trenutku n označavat ćemo sa $\boldsymbol{S_1(n),\ldots,S_m(n)}$.
- Dodatno pretpostavljamo da investitori imaju na raspolaganju i **mogućnost trgovanja nerizičnom imovinom**, tj. investiranje na tržištu novca te označimo sa $\boldsymbol{A(n)}$ vrijednost nerizične investicije u trenutku n; pretpostavljamo da je $A(0)=1$ ili 100.
- Označimo sa $x_1,\ldots,x_m$ **udjele** (*pozicija*) u pojedinoj rizičnoj investiciji, a sa y udio u nerizičnoj imovini.

Vrijednost imovine investitora

- Pretpostavimo da su pozicije investitora u trenutku n zadane sa
  - $(x_1,\ldots,x_m)$ udjeli u rizičnoj imovini čije su cijene u trenutku n zadane sa $S_1(n),\ldots,S_m(n)$.
  - y pozicija u nerizičnoj imovini čija je vrijednost $A(n)$
- Tada je vrijednost imovine investitora u trenutku n zadana sa

$$V(n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} x_i S_i(n)}_{\textbf{Vrijednost u rizičnoj imovini}} + \underbrace{yA(n)}_{\textbf{Vrijednost u nerizičnoj imovini}}.$$

Pretpostavke modela u diskretnom vremenu

- **P1. (Slučajnost)** Buduće cijene rizične imovine (dionica) $S_1(n),\dots,S_m(n)$ su <u>slučajne varijable</u> za svaki n=1,2,…Buduće cijene nerizične imovine $A(n)$ nisu slučajne, već su poznate za svaki n=1,2,…

- **P2. (Pozitivnost cijena)** Cijene rizične i nerizične imovine su strogo pozitivne u svakom vremenskom trenutku:

$$S(n) > 0 \quad \text{i} \quad A(n) > 0 \quad \text{za svaki } n = 0,1,2,\dots$$

- **P3. (Djeljivost, likvidnost i kratka pozicija (short selling))** Investitor u svakom trenutku može kupiti ili prodati bilo koji broj (udio) svake od dionica i zauzeti bilo koju poziciju u nerizičnoj imovini:

$$x_1, \ldots, x_m, y \in R$$

- **P4. (Solventnost)**. Vrijednost imovine investitora je u svakom vremenskom trenutku nenegativna:

$$V(n) \geq 0, \quad \text{za svaki } n = 0,1,2,3,\ldots$$

- **P5. (Diskretne jedinične cijene)**. Cijene svakog od pojedinih udjela $S_1(n),\ldots,S_m(n)$ su slučajne varijable koje mogu poprimiti **konačno mnogo** vrijednosti, za svaki n=0,1,2,…

Investicijske strategije

- Pozicije koje investitor drži u rizičnoj i nerizičnoj imovini mogu se mijenjati u svakom vremenskom trenutku prodajom određene imovine i kupnjom neke druge.
- Pretpostavljamo da nije moguće podizanje gotovine iz ukupne imovine u cilju potrošnje, kao niti dodatna uplate gotovine u postojeću vrijednost imovine.
- Investicijske odluke o promjeni pozicija u ukupnoj imovini (portfelju vrijednosnica) donose se na bazi dostupnih informacija na tržištu: povijesne informacije o tržištu do (i uključujući) trenutka određene investicijske odluke (isključuje se mogućnost *insajderskih* informacija kao i *vidovitost* glede budućnosti)

- **Definicija (Portfelj i investicijska strategija).** Kažemo da je portfelj vektor

$$v(n) = \left(x_1(n), \dots, x_m(n), y(n)\right)$$

koji označava broj udjela koje investitor drži u rizičnoj i nerizičnoj imovini unutar vremenskog intervala (n-1,n). Niz portfelja (vektora) $(v_n)_{n=1,2,,\dots}$ zove se investicijska strategija.

- Vrijednost imovine u trenutku $n \geq 1$:

$$V(n) = \sum_{i=1}^{m} x_i(n) S_i\left(n\right) + y(n) A(n).$$

- Vrijednost imovine u trenutku 0:

$$V(0) = \sum_{i=1}^{m} x_i(1) S_i\left(0\right) + y(1) A(0).$$

- **Primjer 1**. Pretpostavimo da je početna vrijednost nekog investitora jednaka 3000 kn te da su zadane sljedeće vrijednosti:
  - $S_1(0)=60$, $S_1(1)=65$, $S_1(2)=75$
  - $S_2(0)=20$, $S_2(1)=15$, $S_2(2)=25$
  - $A(0)=100$, $A(1)=110$, $A(2)=121$

  Početna vrijednost portfelja može se investirati u 18.22 udjela dionice A, kratkom pozicijom od ukupno 16.81 udjela dionice B te kupnjom 22.43 obveznica XYZ:

$$\left(x_1, x_2, y\right) = (18.22, -16.81, 22.43)$$

  U trenutku $n=1$ vrijednost takvog portfelja jednaka je 3399.45. Primijetite da je kratkom pozicijom u dionici B investitor profitirao budući da je cijena dionice u trenutku 1 pala.

- Sadržaj portfelja (udjeli pojedinih *komponenti* portfelja) mogu se mijenjati (kupnjom ili prodajom određenih komponenti) u svakom (diskretnom!) vremenskom trenutku dokle god trenutna vrijednost portfelja ostane **nepromijenjena**.

- **Definicija (Samofinancirajuća strategija).** Kažemo da je investicijska strategija samofinancirajuća ako konstruirani portfelj u trenutku $n \geq 1$ koji se planira držati kroz sljedeći period se u **potpunosti** financira od trenutne vrijednosti portfelja $V(n)$:

$$V(n) = \sum_{i=1}^{m} x_i(n+1)S_i(n) + y(n+1)A(n)$$

- **Definicija (Predvidivost).** Kažemo da je investicijska strategija predvidiva ako za svaki $n=0,1,2,\ldots$ portfelj $(x_1(n+1), x_2(n+1), \ldots, x_m(n+1), y(n+1))$ konstruiran u trenutku n ovisi samo o čvorovima stabla tržišnih scenarija do (i uključujući) trenutka n.

- **Propozicija.** Pretpostavimo da je zadana početna vrijednost imovine $V(0)$ i predvidiv niz $(x_1(n), \ldots, x_m(n))$, $n=1,2,\ldots$ pozicija u rizičnoj imovini. Tada je uvijek moguće naći niz pozicija u nerizičnoj imovini $(y(n))$, $n=1,2,\ldots$ takav da je $(x_1(n), \ldots, x_m(n), y(n))$ predvidiva i samofinancirajuća strategija.
- *Dokaz*: DZ.

- **Zadatak 1.** Odredite broj obveznica koje investitor drži u prvom i drugom vremenskom trenutku ako je njegova investicijska strategija predvidiva i samofinancirajuća te ukoliko je početna vrijednost portfelja $V(0)=200$, cijene rizične i nerizične imovine dane su u primjeru 1,a udjeli u rizičnoj imovini su redom
  - $x_1(1)=35.24$, $x_1(2)= - 40.5$
  - $x_2(1)=24.18$, $x_2(2)= 10.13$

  Odredite vrijednost imovine investitora u vremenskim trenucima 1 i 2 uz takvu investicijsku strategiju.

- **Definicija (Dopustivost).** Kažemo da je investicijska strategija dopustiva ukoliko je samofinancirajuća, predvidiva i ako za svaki n=0,1,2,… vrijedi

$$V(n) \geq 0$$

s vjerojatnosti 1.

- **P6. (Pretpostavka nearbitraže).** Ne postoji dopustiva investicijska strategija za koju vrijedi $V(0)=0$ i $V(n)>0$ s pozitivnom vjerojatnosti za neki n=1,2,…

- **Napomena.** Dopustivu strategiju arbitraže je moguće ostvariti ukoliko postoji predvidiva samofinancirajuća strategija za koju je $V(0)=0$ i

$$0 \neq V(n) \geq 0 \quad \text{za neki } n > 0.$$

- **Zadatak 2**. Dokažite da će princip nearbitraže biti narušen ukoliko postoji samofinancirajuća strategija čija je početna vrijednost $V(0)=0$, konačna vrijednost $V(2) > 0$ i za koju je $V(1) < 0$ s pozitivnom vjerojatnosti.

Arbitraža (cont)

- **Zadatak.** Pretpostavimo da analiziramo tržište tržište koje se sastoji od jedne dionice i nerizične imovine. Neka su $A(t)$ i $S(t)$ vrijednosti nerizične odnosno rizične imovine u trenutku t. Pretpostavimo nadalje da vrijedi $A(0)=100$, $A(1)=110$, $A(2)=121$ te da cijena dionice XYZ ovisi o trima mogućim scenarijima:

Scenarij	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	100	120	144
ω_2	100	120	96
ω_3	100	90	96

Odredite postoji li mogućnost arbitraže u slučaju da:

- a) mogućnosti kratkih pozicija u dionicama na tržištu od interesa su dozvoljene (short selling)
- b) mogućnosti kratkih pozicija u dionicama na tržištu od interesa nisu dozvoljene

- Rješenje: a) U trenutku 0 nema investiranja, u niti jednu klasu imovine. U trenutku $t = 1$ ukoliko je $S(1)=120$ (uočite da je 120>A(1)!) tada se opet ne investira, a ukoliko je S(1)=90 (< A(1)!) tada zauzmite kratku poziciju u dionici (prodajte 1 udio) te investirajte dobiveni iznos u nerizičnu imovinu.

U trenucima $t = 0$ i 1 vrijednost će takve strategije biti 0 (Uočite da ste u trenutku $t = 1$ ili ne investirali ništa ili je novčani tok jednak 0 budući da ste iznos dobiven kratkom pozicijom u dionici uložili u nerizičnu imovinu). U trenutku $t = 2$ vrijednost je:

- 0 (u slučaju scenarija w_1 ili w_2) ili 3 (u slučaju scenarija w_3)

2.3.1. Primjena arbitraže na model binomnog stabla

- **Propozicija 1.** Pretpostavimo da promatramo model binomnog stabla za rizičnu imovinu. U modelu binomnog stabla ne postoji mogućnost arbitraže ako i samo ako vrijedi $d < r < g$.

- *Dokaz*: BSOMP A(0)=1. a) jednoperiodni model.

  $\Longrightarrow$ Pretpostavimo da vrijedi $r \leq d$ te da je A(0)=1.

Tada posudimo 1 novčanu jedinicu po nerizičnoj kamatnoj stopi i uložimo u 1/*S*(0) udjela odgovarajuće dionice, tj. rizične imovine (ukoliko A(0) nije 1, tada je *x*=A(0)/S(0)). U trenutku *t*=0 su pozicije u tako konstruiranom portfelju $x = 1/S(0)$, $y = -1$, a vrijednost je tako konstruiranog portfelja $V(0) = 0$. U trenutku $t = 1$ vrijedi S(1)=*S*(0)(1+*g*) ili S(1)=*S*(0)(1+*d*).

Nadalje, u trenutku t=1 potrebno je vratiti 1+r novčanih jedinica, a vrijednost dionice u trenutku t=1:

$$\frac{1}{S(0)} \cdot S(0)(1+g) \text{ ili } \frac{1}{S(0)} \cdot S(0)(1+d) \text{ odnosno}$$

$$(1+g) \text{ili } (1+d)$$

Dakle,

V(1)= -1-r +1+g=g-r >0 prema pretpostavci ili

V(1)= -1-r +1+d = d-r $\geq$ 0 prema pretpostavci.

Slučaj $r \geq g$ na sličan način.

$\Leftarrow$ Nadalje, pretpostavimo da je $d < r < g$. Svaki portfelj koji se sastoji od jedne dionice i nerizične imovine čija je vrijednost u početnom trenutku jednaka nula, tj V(0)=0, mora biti oblika $x = a/S(0)$, $y = -a$, za neki realan broj a. (*ili, u slučaju da A(0) nije* 1, tada je x=aA(0)/S(0))

- Slučaj a=0, tada je V(t)=0 za t=0,1.
- Slučaj a > 0. U tom slučaju (budući da je y = -a <0) posuđuje se novac po nerizičnoj kamatnoj stopi kako bi se dobiveni iznos investirao u rizičnu imovinu. Nadalje, u trenutku t =1 potrebno je vratiti $a(1+r)$ novčanih jedinica, a vrijednost je rizične imovine u trenutku t=1:

$$S(1) = \frac{a}{S(0)} \cdot S(0)(1+g) = a(1+g) \quad \text{ili}$$

$$S(1) = \frac{a}{S(0)} \cdot S(0)(1+d) = a(1+d)$$

  Dakle, $V(1) = a(g\text{-}r) > 0$ ili $V(1) = a(d\text{-}r) < 0$ dakle nije moguća arbitraža.
- Slučaj a < 0 slično (tada je y = - a >0) ; $V(1) = a(g\text{-}r) < 0$ ili $V(1) = a(d\text{-}r) > 0$ dakle nije moguća arbitraža.

- b) višeperiodni model. Kao osnovni blok za konstrukciju koristimo jednoperiodni model budući da se višeperiodni model za rizičnu imovinu može koristiti kao niz jednoperiodnih podstabala.

⇒ Pretpostavimo da ne postoji strategija arbitraže u višeperiodnom modelu binomnog stabla. U tom slučaju za svaku strategiju za koju je V(0)=0 je i V(n)=0 za svaki n >0. Posebno za n =1 pa to prema slučaju jednoperiodnog modela povlači da je $d < r < g$.

⇐ Pretpostavimo da je $d<r<g$ i da postoji strategija arbitraže. Neka je n najmanji $n>0$ za koji je V(n) različit od nule. Tada je moguće pronaći podstablo za rizičnu imovinu s čvorom u trenutku n-1 za koje je $S(n-1)$ takva vrijednost za koju vrijedi:

$V(n-1)=0$ i $V(n)$ nenengativna za svaki od dva moguća scenarija koji proizlaze iz takvog čvora stabla te $V(n)>0$ za barem jedan od scenarija. No to je prema 1periodnom modelu nemoguće ako vrijedi $d<r<g$.

- **Propozicija 2**. Dokažite da u modelu binomnog stabla ne postoji strategija arbitraže ako i samo ako postoji vjerojatnost neutralna na rizik p^* za koju vrijedi $0< p^* <1$.
- *Dokaz:*

$\Rightarrow$ Prepostavimo da u modelu binomnog stabla ne postoji strategija arbitraže. Tada je prema Propoziciji 1 $d<r<g$. Ako definiramo

$$p^* := \frac{r-d}{g-d}$$

tada vrijedi

$$d < r < g \quad /-d$$

$$0 < r-d < g-d \quad /:(g-d)$$

$$0 < \frac{r-d}{g-d} < 1 \Leftrightarrow 0 < p^* < 1$$

⇦ Pretpostavimo da postoji mjera neutralna na rizik p^* za koju vrijedi $0< p^* <1$. Tada prema definiciji od p^* slijedi da je $d<r<d$ što je prema Propoziciji 1 ekvivalentno tome da ne postoji strategija arbitraže.

□

Dakle, prema prethodnoj propoziciji ukoliko martingalno svojstvo primijenimo na model binomnog stabla za rizičnu imovinu (tj. vrijednosnice) tada vrijedi:

- **Diskontirani proces cijene** dionice u modelu binomnog stabla je **martingal** u odnosu na mjeru neutralnu na rizik.

➡ Vrijedi li to općenito za tržišne modele u diskretnom vremenu?

2.4. Fundamentalni teorem vrednovanja imovine

- Neka je $\{F_n\}$, n=0,1,… rastući niz sigma-algebri na vjerojatnosnom prostoru (Ω, F, P).
  - Takve nizove nazivamo *filtracije*. Reći ćemo da je F_n skup svih informacija dostupnih do (i uključujući) trenutka n.

- **Definicija. (Martingal)** Neka je X_1, X_2,... niz slučajnih varijabli definiranih na vjerojatnosnom prostoru (Ω, F, P). Kažemo da je niz slučajnih varijabli X_1, X_2,... P-martingal, ako je za svaki n, $X(n)$ F_n- *izmjeriva* slučajna varijabla t.d. $E\left[\left|X(n)\right|\right] < \infty$ te vrijedi

$$\boxed{E^P\left[X(n+1) \mid F_n\right] = X(n)}$$

- **Napomena.** U slučaju modela binomnog stabla imali smo

$$E^*\left[S^D(n+1) \mid S(n)\right] = S^D(n)$$

pri čemu je S^D **diskontirani proces** cijene rizične imovine, a P^* vjerojatnost neutralna na rizik.

- **Definicija (Martingalna mjera).** Vjerojatnosna mjera Q za koju vrijedi da je diskontirani proces cijene rizične imovine, S^D , Q-martingal nazivamo martingalna mjera za imovinu S.

- Primjeri.

1. Promatrajmo kockarsku igru u koju krećemo s početnim kapitalom x_0 i koja se odvija na način da u svakom trenutku bacamo novčić te dobivamo 1 kn ako padne pismo, a gubimo 1 kn ako padne glava. Pretpostavljamo da su sva bacanja nezavisna i jednako distribuirana (vjerojatnost da će pasti pismo je p u svakom bacanju). U svakom koraku naš dobitak je dakle slučajna varijabla $X_i \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$, dok je naš ukupni kapital u trenutku n jednak $S_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$.
   Ako je jedina informacija koju imamo u trenutku n bazirana na opažanju dobivenih vrijednosti do trenutka n tada je niz S_1, S_2,… martingal ako i samo ako je p=0.5.

2. Promotrimo sličnu igru u kojoj ovaj put bacamo kocku kladeći se na jedan broj na kocki. U slučaju pogotka dobivamo iznos x, inače gubimo 1 kn. Ako znamo da je kocka simetrična (vjerojatnost svakog od 6 brojeva je 1/6), postavite odgovarajući model te odredite koliki treba biti dobitak u slučaju pogotka da bi igra bila fer?

3. Rulet je igra koja se odvija na sljedeći način: ulažemo 1 novčić na broj od 0 do 36. Ako pogriješimo gubimo novčić, a ako pogodimo, zadržavamo novčić i dobivamo ih još 35. Pretpostavimo da osim opaženih vrijednosti nemamo drugih informacija. Postavite odgovarajući model i pokažite da rulet nije fer igra, tj. da kuća u prosjeku dobiva.

- **Teorem.** (Fundamentalni teorem vrednovanja imovine)

Princip nearbitraže u modelu binomnog stabla ekvivalentan je postojanju vjerojatnosne mjere P^* na skupu svih mogućih scenarija Ω za koje je $P^*(w) > 0$ za svaki $w \in \Omega$ i za koju diskontirani proces cijene $S^D(n) = S(n)/A(n)$ zadovoljava

$$E^{P^*}\left[S_j^D(n+1) \mid S_j(n)\right] = S_j^D(n), \quad j = 1, \ldots, m$$

za svaki n=0,1,2,…, pri čemu $E^{P^*}[\ .\ |F_n]$ označava uvjetno očekivanje u odnosu na mjeru P^* uz dostupnost svih informacija do (i uključujući) trenutka n.

- **Primjer**. Pretpostavimo da je A(0)=100, A(2)=121 te da cijena dionice XYZ može poprimiti sljedeće vrijednosti ovisno o četiri različita scenarija:

Scenarij	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	112
ω_2	90	100	106
ω_3	90	80	90
ω_4	90	80	80

- Pretpostavimo da je vjerojatnost rasta cijene u trenutku t=0 dana sa p^*, u trenutku t=1 vjerojatnost rasta cijene ukoliko kreće iz čvora koji je nastao rastom u prethodnom trenutkom je q^*, a vjerojatnost također rasta cijene, ali ukoliko kreće iz čvora koji je nastao padom cijene u prethodnom trenutkom je r^*

- Skicirajte odgovarajuće stablo s obzirom na moguće scenarije

- Odredite vjerojatnosti p_1^*, p_2^* i p_3^* takve da
  - ne postoji mogućnost arbitraže
  - diskontirani proces cijene dionice XYZ je martingal

- Odredite vjerojatnost neutralnu na rizik svakog od scenarija.
- Kolika je vjerojatnost neutralna na rizik da cijena dionice XYZ u trenutku t =2 bude 90?