Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za vježbu i samostalan rad
10. 4. 2015.

1. Dokažite da je cijena kuponske obveznice, $C(T,y)$, konveksna funkcija prinosa do dospijeća. (**Rj**. $\frac{\partial^2 C(T,y)}{\partial y^2} > 0$).

2. (Makeham-ova formula) Ako je i kuponska stopa, a r prinos do dospijeća u trenutku nula te da se potonja stopa neće promijeniti do dospijeća. Dokažite da je cijena obveznice nominalne vrijednosti N, s dospijećem T dana sa $P = \frac{N}{(1+i)^T} + \frac{r}{i}\left(N - \frac{N}{(1+i)^T}\right)$.

3. Kuponska obveznica nominalne vrijednosti 1000 \$ s dospijećem 20 godina koja isplaćuje polugodišnje kupone izdana je prošle godine kada je referentna kamatna stopa bila 10%. Danas, godinu dana kasnije, kamatna stopa je 8%.
a) Odredite iznose kupona (**Rj: *K*=50 kn**)
b) Koliko danas vrijedi takva obveznica? Pretpostavite da je drugi kupon tek isplaćen te da će prvi sljedeći biti isplaćen nakon 6 mjeseci. (**Rj**: $C(1,20)$ = 1193.679 kn, uz eksponencijalno 1175,92)

c) Koliko bi danas vrijedila takva obveznica ukoliko bi se iznos drugog kupona trebao tek isplatiti? (**Rj: 1193.679+50 kn**).

4. Na tržištu se trguje obveznicom s dospijećem 5 godina koja isplaćuje godišnji kupon od 6.5%. Pretpostavite da je obveznica upravo isplatila drugi godišnji kupon te da se trguje na razini prinosa do dospijeća od 5.5%. Dodatno pretpostavite da je krivulja prinosa ravna. Izračunajte (modificiranu) duraciju te obveznice. (Rj: Macaulayeva duracija: 2.814400666, modificirana duracija: 2.6751)

5. Pretpostavimo da se na tržištu trguje obveznicama tipa A i B te da su njihove duracije $D_A = 2$, $D_B = 3.4$ te da su njihove cijene C_A=0.98, C_B=1.02 te da želite investirati u portfelj vrijedan 5000 kn duracije 6. Odredite broj obveznica koje je potrebno investirati u obveznice A i B u cilju takve strategije investiranja.(Rj: a = -9475.22, b=14005.60)

6. Pretpostavimo da se kamatna stopa na tržištu neće promijeniti. Dokažite da prije trenutka isplate prvog kupona će duracija nakon trenutka t biti D-t, pri čemu je D duracija izračunata u trenutku 0.

7. Odredite investicijsku strategiju ukoliko investirate 20000 kn u portfelj duracije 2 godine koji se sastoji od dvije vrste kuponskih obveznica, A i B, s dospijećem od dvije godine, pri čemu su obveznice tipa A nominalne vrijednosti 100 i isplaćuju kupone u iznosu od 20, dok su obveznice tipa B nominalne vrijednosti 500 i isplaćuju kupone u iznosu od 5, a početna kamatna stopa je 8%. Kolika će biti vrijednost tako konstruiranog portfelja nakon dvije godine? .(Rj: a = -12.3527, b=49.411, V(2)=23470.22)

8. Pretpostavimo da planirate investiciju s horizontom ulaganja od 3 godine s ciljem ostvarivanja vrijednosti 100000 kn. Trenutna je referentna kamatna stopa 12% te se na tržištu trguje sljedećim obveznicama: kuponska obveznica A nominalne vrijednosti 100 s dospijećem od 5 godina koja isplaćuje godišnje kupone u iznosu od 10 te beskuponskom obveznicom tipa B s dospijećem od godinu dana iste nominalne vrijednosti kao obveznica tipa A. Pretpostavljamo da su obveznica tipa B uvijek dostupne na tržištu. Pretpostavimo da će nakon godinu dana kamatna stopa porasti na 14%, a nakon dvije godine na 16%. Konstruirajte portfelj koji će vam omogućiti planiranu vrijednost nakon tri godine. (**Rj**: U t=0 investirati 69767.63 kn, i to u a=495.05 obv. A, i b=282.77 obveznica B, u t=1 korigirati poziciju na a=361.53, b=513.76, u t=2 korigirati poziciju na a=0, b=1001.126394, konačna vrijednost nakon 3 godine= 100112.64.)

9. Koji utjecaj ima povećanje dospijeća obveznice na njezinu duraciju? Odredite duraciju financijskog instrumenta koji isplaćuje beskonačan broj kupona, odnosno odredite duraciju kuponske obveznice u slučaju da dospijeće $T \to \infty$. (**Rj.** $\lim_{T \to \infty} D(T) = \dfrac{e^r}{e^r - 1}$).