Fakultet elektrotehnike i računarstva
Financijska matematika
Zadaci za samostalan rad
20. 4. 2010.

1. Pretpostavimo da je model binomnog stabla za stope povrata zadan na sljedeći način:

$lR(1,3;g)= 0.26\%$ → $lR(2,3;gg)= 0.22\%$, $lR(2,3;gd)= y$

$lR(1,3;d)= x$ → $lR(2,3;dg)= 0.20\%$, $lR(2,3;dd)= z$

Pretpostavimo da promatramo mjesečne promjene cijena obveznica s dospijećem od tri mjeseca te da su povrati u zadnjem vremenskom trenutku zadani sa: $lR(3,3;gg)$=0.16%, $lR(3,3;gd)$=0.18%, $lR(3,3;dg)$=0.21%, $lR(3,3;dd)$=0.25%. Odredite:

a) x, y i z

b) odredite vrijednosti cijena obveznica $B(i,3;s_i)$, i=1,2,3, te skicirajte odgovarajuće binomno stablo cijena obveznica (Uočite da odgovarajuće vrijednosti za i=3 nisu slučajne)

2. Pretpostavimo da je model binomnog stabla za cijene obveznica zadan na sljedeći način:

$B(0,3)= 0.9726$ → $B(1,3;g)= 0.9848$, $B(1,3;d)= 0.9808$

$B(1,3;g)= 0.9848$ → $B(2,3;gg)= 0.9905$, $B(2,3;gd)= 0.9875$

$B(1,3;d)= 0.9808$ → $B(2,3;dg)= 0.9908$, $B(2,3;dd)= 0.9891$

a) odredite implicirane prinose do dospijeća $y(i,3;s_i)$, i=0,1,2,3 te skicirajte odgovarajuće binomno stablo impliciranih prinosa do dospijeća (Uočite da odgovarajuće vrijednosti za i=3 nisu slučajne. Također uočite da se termini kretanja prema gore odnosno dolje ne odnose na kamatne stope, već na cijene obveznica, no skiciranje se stabla vrši u vidu kretanja cijena obveznica).

b) odredite unaprijedne kamatne stope $f(i,j,3;\ s_i)$, pri čemu je $i \leq j$, j=0,12,3.

3. Pretpostavimo da analiziramo tržište koje se sastoji od jedne rizične vrijednosnice i nerizične imovine. Neka su $A(t)$ i $S(t)$ vrijednosti nerizične odnosno rizične imovine u trenutku t te pretpostavimo da vrijedi $A(0)$=10 i $A(1)$=11 te $S(0)$=10 i $S(1)$=13 ili 9. Prikažite grafički u ravnini skup mogućih portfelja (x,y) koji predstavljaju dopustive jednoperiodne strategije uz pretpostavku da x predstavlja poziciju u rizičnoj, a y poziciju u nerizičnoj imovini.

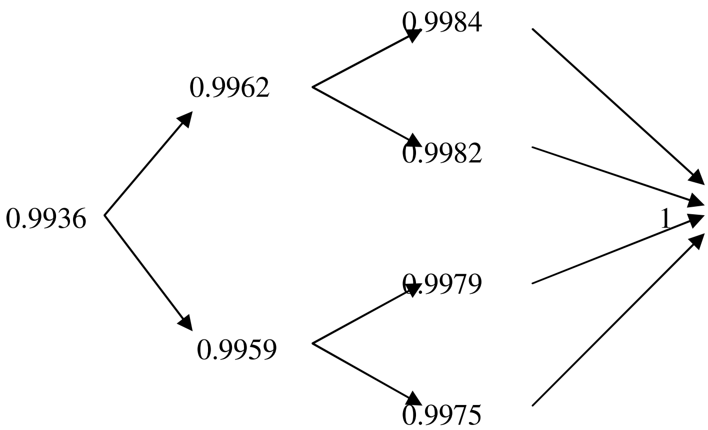
4. Analiziramo tržište koje se sastoji od jedne dionice i nerizične imovine te pretpostavimo da cijena dionice prati dinamiku kretanja modela binomnog stabla. Pretpostavimo nadalje da možete predvidjeti da će svaki puta kada cijena dionice naraste, u sljedećem vremenskom trenutku cijena dionice pasti. Odredite samofinancirajuću strategiju koja nije nužno predvidiva i za koju vrijedi $V(0)=0$ i $V(2)>=0$ i s pozitivnom vjerojatnošću je $V(2)>0$. Što takva strategija ujedno predstavlja?

5. Dokažite da jednoperiodni binomni model ne dozvoljava strategiju arbitraže ako i samo ako vrijedi $d < r < u$, pri čemu je r nerizična kamatna stopa. [Uputa: uočite da prilikom osmišljavanja strategije arbitraže morate voditi računa da li se, ovisno o međusobnim odnosima povrata na rizičnu i nerizičnu imovinu, više isplati investirati u dionice (rizična) ili obveznice (depoziti odnosno nerizična imovina). Pretpostavite jednu od suprotnih relacija, zaključite što takva relacija implicira u smislu isplativosti investiranja u određenu klasu imovine te u skladu s tim osmislite strategiju arbitraže]. Prilikom konstruiranja strategije arbitraže odredite pozicije (x, y) u rizičnoj odnosno nerizičnoj imovini u portfelju.

Rješenja:

1) a) U trenutku t=0 cijena obveznice je jedinstvena i iznosi B(0,3). Isto tako, cijena obveznice je jedinstvena i u trenutku dospijeća (t=3). Sada iz aditivnosti logaritamskih povrata i činjenice da logaritamski povrat za agregatno razdoblje [0,3] mora biti isti za sve scenarije, a koja slijedi iz jedinstvenosti cijena u t=0 i t=3, slijedi da je x=0.23%, y=0.20%, z=0.16%.

b) Uz pretpostavku da je nominalna cijena obveznice jednaka 1, dobivamo sljedeće stablo:



2) a) Vrijedi $B(i,3;s_i) = e^{-\frac{y(i,3;s_i)}{12}(3-i)}$, pa iz te formule direktno slijedi $y(0,3)$=11.11%, $y(1,3;g)$=9.19%, $y(1,3;d)$=11.632%, itd.

b) Za $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3$ vrijedi $B(t_1,t_3) = B(t_1,t_2) \cdot e^{-(t_3-t_2)\cdot f(t_1,t_2,t_3)}$. Dakle za izračun unaprijedne stope $f(i,j,3;s_i)$ potrebna nam je obveznica s dospijećem t_2=*j*. Kako mi imamo na raspolaganju samo obveznicu s dospijećem 3, slijedi da možemo izračunati samo one unaprijedne stope koje vrijede od trenutka njihovog određivanja (*i*=*j*) do dospijeća obveznice (t_3=3):

npr. $f(0,0,3) = 11.11\%$, $f(1,1,3;g) = 9.19\%$, $f(1,1,3;d) = 11.63\%$, itd.

(Napomena: uočimo da su te unaprijedne stope koje u ovom slučaju možemo izračunati zapravo jednake odgovarajućim prinosima do dospijeća)

3) Mora biti zadovoljeno $V(0) \ge 0$ i $V(1) \ge 0$. Dakle, istovremeno moraju biti zadovoljene sljedeće tri nejednadžbe: $\begin{matrix} 10x+10y \ge 0 \\ 13x+11y \ge 0 \\ 9x+11y \ge 0 \end{matrix}$. Rješenje je skup točaka $\left\{ (x,y) : y \begin{cases} \ge -\frac{13}{11}x, x \le 0 \\ \ge -\frac{9}{11}x, x \ge 0 \end{cases}, x \in R \right\}$.

4) U t=0 ne investiramo ništa, tj. $(x(1),y(1))=(0,0)$. Tada u $t=1$ imamo vrijednost $V(1)=0$. U $t=1$ radimo sljedeće: ako je cijena dionice u trenutku $t=1$ pala tada ponovno ne investiramo ništa tj. $(x(2),y(2))=(0,0)$. U tom slučaju će biti i $V(2)=0$. Ako je cijena dionice u $t=1$ porasla, tada znamo da će u $t=2$ cijena sigurno pasti pa nam se isplati ući u kratku poziciju dionice. Drugim riječima formiramo portfelj $(x(2), y(2))=(-1, S(1)/A(1))$. U tom slučaju će biti $V(2)=-S(2)+S(1)A(2)/A(1)$. Kako je $S(2)<S(1)$, a $A(2)>A(1)$ imamo da je u tom scenariju $V(2)>-S(1)+S(1)=0$.

Napomena: Time nije formirana arbitražna strategija iako je osiguran nerizičan profit, tj. vrijedi $V(0)=0$, $V(1)=0$, $V(2)>=0$ i s pozitivnom vjerojatnošću $V(2)>0$. Naime, navedena strategija nije predvidiva (budući da je investitor formirao portfelj $(x(2), y(2))$ na temelju informacije za trenutak $t=2$, jer je znao da će tada vrijednost dionice pasti).

5) Pogledati dokaz Propozicije 1 u prezentaciji 08.