

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1884

GALJORKINOVA METODA KONAČNIH ELEMENATA

Hrvoje Radoš

Zagreb, lipanj, 2025.

Zagreb, 3. ožujka 2025.

ZAVRŠNI ZADATAK br. 1884

Pristupnik: **Hrvoje Radoš (0036548995)**
Studij: Elektrotehnika i informacijska tehnologija i Računarstvo
Modul: Računarstvo
Mentor: prof. dr. sc. Tomislav Burić

Zadatak: **Galjorkinova metoda konačnih elemenata**

Opis zadatka:

Galjorkinova metoda konačnih elemenata se često koristi u numeričkom rješavanju (parcijalnih) diferencijalnih jednadžbi te time ima veliki značaj u modeliranju i rješavanju inženjerskih problema. Njezina implementacija se bazira na raznim metodama iz numeričke matematike kao što su rješavanje linearnih sustava i numeričko integriranje. Složenost implementacije proizlazi i iz particioniranja domene na kojoj se problem rješava, a dodatna složenost je u optimizaciji pri čemu se može koristiti višedretveno programiranje. Cilj ovog rada je implementirati Galjorkinovu metodu te analizirati njene performanse na konkretnim primjerima.

Rok za predaju rada: 23. lipnja 2025.

Hvala na kavi...

Sadržaj

1. Uvod	2
2. Glavni dio	3
2.1. Mesh	4
2.1.1. Bazne funkcije	5
2.2. Slaba formulacija problema	6
2.3. Postojanje rješenja	8
2.4. Implementacijski detalji	9
2.4.1. CSR oblik matrice	9
2.4.2. Rješavanje sustava	9
2.4.3. Reprezentacija mesha u računalu	9
3. Rezultati i rasprava	10
4. Zaključak	11
Literatura	12
Sažetak	13
Abstract	14
A: The Code	15

1. Uvod

Diferencijalne jednačbe su jedan od temeljnih matematičkih alata koji se koriste za matematičko modeliranje. Njihova važnost se obično prvo primjeti u fizici gdje se one vrlo intuitivno pojavljuju u područjima kao što su klasična mehanika, elektromagnetizam, termodinamika pa i malo manje intuitivno u područjima kao što su kvantna mehanika. Diferencijalne jednačbe imaju velik utjecaj i na područja izvan fizike. S njima se mogu modelirati izmjene populacija, širenje zaraza, oblikovanje raznih genetskih obliježja (uzoraka), širenje signala u neuronima, procesiranju slika, raznim modeliranjima tržišta itd.

Diferencijalne jednačbe uglavnom nije teško tumačiti. Najveći izazov kod rada s njima je svakako traženje rješenja. Rješenje ne mora uvijek postojati, ne mora biti jedinstveno, a ako postoji i jedinstveno je ne mora biti moguće zapisati ga analitički. Tim problemima se između ostaloga bavi numerička matematika. Ovaj rad se bavi linearnim parcijalnim diferencijalnim jednačbama s konstantnim koeficijentima i rubnim uvjetom odnosno traženjem njihova rješenja koristeći Galjorkinovu metodu konačnih elemenata. Cilj rada je napraviti C++ biblioteku koja služi kao efikasan, ali iznad svega jednostavan alat za rješavanje PDJ-ova.

2. Glavni dio

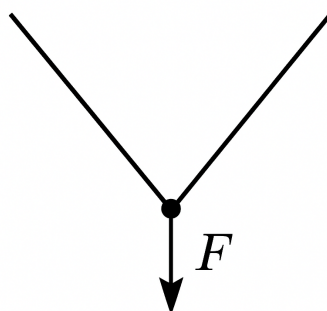
Galjorkinova metoda konačnih elemenata je složen proces koji se sastoji od više dijelova. Na početku ovog poglavlja nudim kratki opis kako ovaj proces izgleda, a u narednim poglavljima ulazim u detalje.

Jednadžba koju riješavam na domeni $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y) \quad u \in C^2(\Omega) \quad (2.1)$$

Ključna ideja ove metode je particioniranje domene na što sitnije odnosno finije dijelove koje nazivamo elementima. Takvu particiju nazivamo mesh. S meshom potom definiramo bazne funkcije koje čine bazu s kojom ćemo interpolirati rješenje koje tražimo. Dodatnim raspisivanjem ćemo dobiti linearni sustav čijim rješavanjem dobivamo naše traženo rješenje.

Postoji par napomena koje valja primijetiti. Ako obratimo pažnju na jednadžbu (2.1), možemo primijetiti da smo se ograničili na rješenja iz prostora $C^2(D)$ dodatnom analizom možemo zaključiti i da funkcija f mora biti neprekinuta. Ovo se na prvu iz perspektive primjene ne čini kao velika restrikcija jer nekako očekujemo da će fizikalne veličine u stvarnom životu uvijek biti neprekinute, ali ne samo da to nije uvijek slučaj to jako često nije slučaj. Kao primjer navodim primjer djelovanja sile (npr. ovješena utege) na nit. Za modeliranje ovakvog sustava je potrebno opisati djelovanje te sile duž cijelu nit, ali takav opis bi zahtijevao uporabu Diracove delta funkcije koja nikako nije neprekinuta, štoviše ona nije ni funkcija nego distribucija.



Slika 2.1. Djelovanje točkaste sile na nit

2.1. Mesh

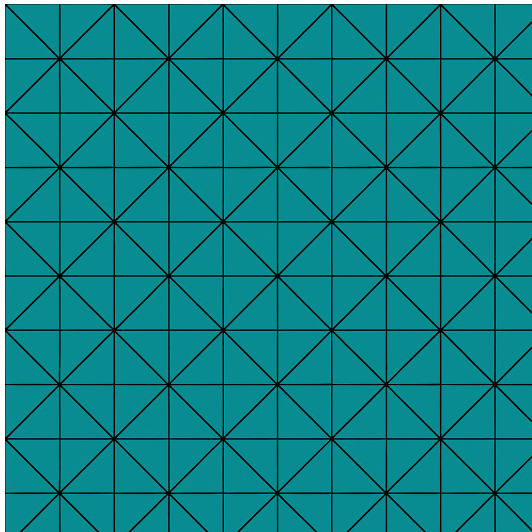
Mesh je particija domene na sitne dijelove s kojima ju možemo aproksimirati. U ovoj implementaciji ti dijelovi će biti trokuti (jer radimo s 2D domenom), pa će proces stvaranja mesha često zvati i triangulacija. S obzirom da je jednostavnost korištenja ključno svojstvo ove implementacije odlučio sam se za sljedeći način unosa mesha u računalo.

Korisnik definira funkciju koja prima koordinate, a vraća vrijednost "true" ako je točka unutar domene ili "false" ako je točka izvan domene

Ovakav pristup omogućava da se domena definira na sličan način kako bi to radili na papiru iz čega proizlazi jednostavnost. Druge C++ biblioteke za unos mesha uglavnom koriste .msh datoteke. Ovakav pristup je dobar za komplicirane domene koje se ne mogu lako definirati s implicitnim funkcijama, ali je presložen za neke jednostavnije primjene. Valja napomenuti da neke biblioteke daju mogućnost da se domena definira preko ključnih riječi kao što su "circle" ili "rectangle". U usporedbi s tim rješenjima moj pristup daje veću fleksibilnost.

Jednostavan način korištenja povlači i težinu implementacije. Naime, kvalitetan mesh može značajno smanjiti numeričku grešku rješenja. Naravno greška se uvijek može smanjiti tako da učinimo mesh finijim, ali to ne možemo raditi u nedogled. Ova implementacija mesh generira na poprilično jednostavan način. Za ulaz ona traži pravokutnik koji omeđuje domenu nad kojom rješavamo PDJ. Taj pravokutnik se potom triangulira i za mesh se uzimaju samo elementi čija su sva tri vrha unutar domene. Ovakav pristup daje nekvalitetan mesh na rubu. Istraživajući bolje pristupe generiranju mesha otkrio sam

razne knjige koje se bave ovom problematikom, stoga smatram da je za sada bitno napraviti implementaciju koja se može naknadno lako nadograditi. Iako jednostavan pristup ovom problemu funkcionira mislim da je bitno naglasiti gdje ova implementacija ima mjesta za napredak.



(a) Primjer 2D mesha pravokutnika

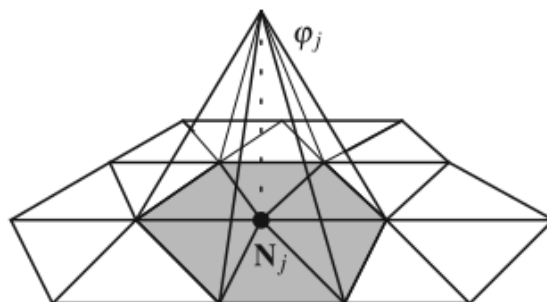


(b) Složeni 3D mesh jabuke

Slika 2.2. Primjeri mesheva

2.1.1. Bazne funkcije

Nakon uspješno generiranog mesha je potrebno definirati bazne funkcije. Bazne funkcije ćemo definirati tako da na svakom elementu definiramo polinom prvog stupnja koji iznosi 1 iznad jednog vrha, a 0 iznad ostalih 2.3. Ovo ćemo napraviti za svaki čvor.



Slika 2.3. bazna funkcija za neki čvor j

Kada budemo radili račun kao što su numerička integracija i slično nad elementima bit će od velike koristi transformirati koordinate tako da element koji trenutno računamo postane oblika pravokutnog trokuta s vrhovima u $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$. Neka su $(X_0, Y_0), (X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$

vrhovi elementa kojeg želimo preslikati. Supstitucija $(x, y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y})$ je dana s:

$$x = (X_1 - X_0)\hat{x} + (X_2 - X_0)\hat{y} + X_0 \quad (2.2)$$

$$y = (Y_1 - Y_0)\hat{x} + (Y_2 - Y_0)\hat{y} + Y_0 \quad (2.3)$$

2.2. Slaba formulacija problema

Radi daljne analize potrebno je navesti jedan bitan teorem.

Teorem 1 (Pravilo za divergenciju produkta) *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omeđen otvoreni skup s komadno glatkom granicom $\Gamma = \partial\Omega$, te neka su $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ i $\mathbf{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ dovoljne regularnosti odnosno $\partial\Omega$ je Lipschitz neprekinuta, a $u, v \in H^1(\Omega)$. Tada vrijedi:*

$$\int_{\Gamma} u \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma = \int_{\Omega} u \nabla \cdot \mathbf{V} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{V} d\Omega.$$

Napomena: $H^1(\Omega)$ označava Soboljev prostor.

Vratimo se sada na 2.1 Cilj nam je dobiti njezinu takozvanu slabu formulaciju. Prvo ćemo reformulirati PDJ. Primijetimo da vrijedi:

$$\nabla \cdot (A \nabla u) = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Gdje:

$$A = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Također vrijedi:

$$\nabla u \cdot a = D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y}$$

Gdje:

$$a = \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$$

Time dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$\nabla \cdot (A \nabla u) + \nabla u \cdot a + Fu = f(x, y) \quad (2.4)$$

Do slabe formulacije dolazimo tako da obje strane 2.4 pomnožimo s baznom funkcijom φ_i , integriramo po Ω i onda primijenimo 1 imamo:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (A \nabla u) \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot a \varphi_i d\Omega + F \int_{\Omega} u \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_i d\Omega \quad (2.5)$$

Primjenom teorema 1 dobije se:

$$\int_{\partial\Omega} (A \nabla u) \varphi_i d\Gamma - \int_{\Omega} (A \nabla u) \cdot \nabla \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot a \varphi_i d\Omega + F \int_{\Omega} u \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_i d\Omega \quad (2.6)$$

S obzirom da su funkcije φ_i po definiciji na rubu jednake 0, jednadžba 2.6 se svede na:

$$- \int_{\Omega} (A \nabla u) \cdot \nabla \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot a \varphi_i d\Omega + F \int_{\Omega} u \varphi_i d\Omega = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_i d\Omega \quad (2.7)$$

Primijetimo kako u ovakvom obliku funkcija $f(x, y)$ na sebi ima puno lakše uvjete (Sjetimo se 2.)

Sada interpolacijom:

$$u = \sum_{j=0}^N \alpha_j \varphi_j$$

dobivamo sustav:

$$Ax = b \quad (2.8)$$

Gdje:

$$(A)_{i,j} = \int_{\Omega} (A \nabla \varphi_j) \cdot \nabla \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \varphi_j \cdot a) \varphi_i d\Omega + F \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega$$

$$b_i = \int_{\Omega} f(x, y) \varphi_i d\Omega$$

Naime ovaj postupak vrijedi samo s Dirichletovim rubnim uvjetima. Neka su čvorovi mesha na rubu indeksirani od $N + 1$ do N_b . Kada bi se rješenje na rubu ponašalo kao

$R(x, y)$ gdje $R(x, y) = \sum_{j=N+1}^{N_b} g_j \varphi_j$, onda bi morali napraviti sljedeću supstituciju:

$$u = \overset{\circ}{u} + R$$

Sustav 2.8 postaje:

$$Ax = b - r$$

gdje je:

$$r_i = - \int_{\Omega} (A \nabla R) \nabla \varphi_i \, d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla R \cdot a) \varphi_i \, d\Omega + F \int_{\Omega} R \varphi_i \, d\Omega$$

Time smo problem rješavanja PDJ sveli na problem rješavanja linearnog sustava.

2.3. Postojanje rješenja

Iako se možda na prvi pogled čini da smo gotovi, potrebno je vidjeti da rješenje uopće postoji, stoga uvodim Lax-Milgramov teorem.

Teorem 2 *Neka je V Hilbertov prostor i neka je $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilinearna forma koja zadovoljava:*

- **Kontinuitet:** *postoji konstanta $C > 0$ takva da*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{za sve } u, v \in V.$$

- **Koercivnost (eliptičnost):** *postoji konstanta $\alpha > 0$ takva da*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \text{za sve } v \in V.$$

Tada za svaki linearni funkcional $f \in V'$ postoji jedinstveno $u \in V$ takvo da:

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{za sve } v \in V.$$

Lako se vidi da se naš sustav 2.8 može svesti na problem s linearnim funkcionalima iz 2. Iz toga se lako zaključuje da postojanje rješenja možemo garantirati samo za ispravan mesh (to garantira implementacija) i za eliptičke PDJ što se lako provjeri programski.

2.4. Implementacijski detalji

2.4.1. CSR oblik matrice

2.4.2. Rješavanje sustava

2.4.3. Reprezentacija mesha u računalu

3. Rezultati i rasprava

4. Zaključak

Literatura

Sažetak

Galjorkinova metoda konačnih elemenata

Hrvoje Radoš

Unesite sažetak na hrvatskom.

Ključne riječi: prva ključna riječ; druga ključna riječ; treća ključna riječ

Abstract

Galjerkin finite element method

Hrvoje Radoš

Enter the abstract in English.

Keywords: the first keyword; the second keyword; the third keyword

Privitak A: The Code