Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$ (z.z. es gibt $n \in \mathbb{N}$ sodass $n+1, \dots, n+k \notin \mathbb{P}$)

Wir wählen $n := 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1) + 1$, dann gilt:

$n+1 = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1) + 2$ also $2 \mid n+1$

$n+2 = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \cdot (k+1) + 3$ also $3 \mid n+2$

$\vdots$

$n+k = 2 \cdot 3 \cdot \dots (k-1) \cdot k \cdot (k+1) + (k+1)$ also $k+1 \mid n+k$

Es folgt die Behauptung, da $n+1, \dots, n+k$ offensichtlich jeweils keine Primzahlen sind. $\square$

Beweis: (1) Sei $a^n - 1 \in \mathbb{P}$

$$a^n - 1 = (a-1) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$
$$= \underline{a^n} + a^{n-1} + \dots + a^2 + a$$
$$- a^{n-1} - \dots - a^2 - a^1 \underline{-1}$$

Wenn $a^n - 1$ Primzahl sein soll, dann muss $(a-1) < 2$ sein, denn sonst wäre $(a-1)$ ein Teiler von $a^n - 1$ wäre.

$\Rightarrow a - 1 = 1$ so: $a = 2$ $\square$

(2) Sei $a^n - 1 \in \mathbb{P}$. Annahme: $n = r \cdot s$ mit $r, s \in \mathbb{N}$, $r, s \neq 1$ $r, s \neq n$

Es gilt $(2^r - 1) \cdot (2^{r(s-1)} + 2^{r(s-2)} + \dots + 2^{2r} + 2^r + 1) =$ → komplett aus der Luft gegriffen

$= (2^r - 1) \cdot (2^{rs-r} + 2^{rs-2r} + \dots + 2^{2r} + 2^r + 1) =$

$= 2^r \cdot (2^{rs-r} + 2^{rs-2r} + \dots + 2^{2r} + 2^r + 1) - (2^{rs-r} + 2^{rs-2r} + \dots + 2^{2r} + 2^r + 1)$

$= 2^{rs} + (2^{rs-r} + 2^{rs-2r} + \dots + 2^{2r} + 2^r) - (2^{rs-r} + 2^{rs-2r} + \dots + 2^{2r} + 2^r) - 1$

$= 2^{rs} - 1 = 2^n - 1$, d.h. $\underbrace{2^r - 1}_{\geq 3} \mid 2^n - 1$ $\lightning$ im Widerspruch zu $a^n - 1 \in \mathbb{P}$. $\square$