1) Es sei $a|b$ und $b|c$, dann folgt die Existenz von $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot x_1 = b$ und $b \cdot x_2 = c$. Wir ersetzen b in der zweiten Gleichung:

$(a \cdot x_1) \cdot x_2 = c \Rightarrow a \cdot \underbrace{(x_1 \cdot x_2)}_{=: x_3 \in \mathbb{Z}} = c$, d.h. $a|c$. //

2) Es sei $a|b$ und $a|c$, d.h. $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}: a \cdot x_1 = b$ und $a \cdot x_2 = c$

$\Rightarrow a \cdot x_1 + a \cdot x_2 = b + c$

$\Rightarrow a \cdot \underbrace{(x_1 + x_2)}_{:= x_3 \in \mathbb{Z}} = b + c$

$\Rightarrow a \cdot x_3 = b + c$ also $a \,|\, b + c$ //

4) Es sei $a \cdot b = a \cdot c$ und $a \neq 0$. Es folgt $a \cdot b - a \cdot c = 0$ und $a \cdot (b - c) = 0$. Da $a \neq 0$ folgt $b - c = 0$ bzw. $b = c$. //