Beweis: $a \equiv_m b \Leftrightarrow (a \bmod m) = (b \bmod m)$

„$\Leftarrow$": Sei $a \bmod m = b \bmod m$ mit $a = q_1 \cdot m + r_1$, $b = q_2 \cdot m + r_2$ mit $r_1 = r_2$ und $r_1, r_2 < |m|$

es folgt: $a - b = (q_1 - q_2) \cdot m + \underbrace{(r_1 - r_2)}_{=0}$

d.h. $a - b = (q_1 - q_2) \cdot m$ also $m \mid a - b \Leftrightarrow a \equiv_m b$

„$\Rightarrow$": Sei $a \equiv_m b$ und $a = q_1 \cdot m + r_1$, $b = q_2 \cdot m + r_2$ mit $0 \leq r_1, r_2 < |m|$

$$a - b = (q_1 - q_2) \cdot m + r_1 - r_2$$

$\Rightarrow m \mid a - b$ und $m \mid (q_1 - q_2) \cdot m$, also gilt $\underline{m \mid r_1 - r_2}$

Außerdem: $-m < r_1 - r_2 < m$, $\underline{|r_1 - r_2| < m}$, also mit $m \mid r_1 - r_2$ folgt:

$$r_1 - r_2 = q_3 \cdot m + 0 \quad (q_3 = 0)$$

$$r_1 - r_2 = 0$$

$\Rightarrow r_1 = r_2$