<u>Beweis:</u> 1.4.5

1) Ist offensichtlich, da ggT unter Def. von 1.4.3 nicht von der Reihenfolge abhängt.

2) Da a und $-a$ die selben Teiler haben gilt die Aussage offensichtlich.

3) Sei $d := ggT(a,b)$, dann folgt $d \mid a-b$. $(d|a ; d|b \Rightarrow d|a ; d|-b \Rightarrow d \mid a-b)$
d ist also ein gemeinsamer Teiler von b und $a-b$.
Sei $c \in \mathbb{N}$ ein weiterer Teiler von $b, a-b$ dann folgt $c \mid a-b+b = a$, d.h.
$c|a$ und $c|b$.
Nach Definition von d als <u>größter</u> gemeinsamer Teiler von a und b folgt $c \leq d$ ist.
Also $d = ggt(a-b, b) = ggT(a,b)$

4) Sei $d := ggt(a,b)$ und $c := ggT\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) \geq 1$, $(*)$
(zu zeigen: $c = 1$)
Es folgt $c \mid \frac{a}{d}$ und $c \mid \frac{b}{d}$, also $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{Z}: c \cdot x_1 = \frac{a}{b}$ und $c \cdot x_2 = \frac{b}{d}$.
Es folgt $(c \cdot d) \cdot x_1 = a$ und $(c \cdot d) \cdot x_2 = a$
$\Rightarrow c \cdot d$ ist gemeinsamer Teiler von a und b
$\Rightarrow c \cdot d \leq ggt(a,b) \Rightarrow c \cdot d \leq d \quad |:d \quad (d, c \geq 1)$
$\Rightarrow c \leq 1$ also $c = 1$, da $c \geq 1$ nach $(*)$

5) Für $a, b \geq 0$
$ggT(a,b) = ggt(a-b, b) = ggt(a-2b, b) = \cdots = ggT(\underbrace{a-q\cdot b}_{=r}, b)$