Beweis: (2.1.3)

(1) Beweis durch Induktion nach $n > 1$:

1.A. „$n = 2$":

$p = 2$ ist Primteiler von $n = 2$.

I.S. „$n \Rightarrow n+1$":

Nach Induktionsvoraussetzung habe jede Zahl von 2 bis n einen Primteiler. Ist $n+1$ prim so gilt Induktionsschluss. Ist $n+1$ zusammengesetzte Zahl, dann existiert ein Teiler d von $n+1$ mit $1 < d < n+1$, d.h. $2 \leq d \leq n$.

Nach Induktionsvoraussetzung hat d einen Primteiler, der auch $n+1$ teilt. $\square$

(2) Beweis durch Widerspruch

Annahmen: Es gibt endlich viele Primzahlen, $|\mathbb{P}| < \infty$ d.h. $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$

Sei $n := p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$, d.h. es existier $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid n$ (nach (1))

Da $p \mid p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ gilt $p \mid n - p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = 1$, also $p \mid 1$ im Widerspruch zu $p > 1$. $\lightning$ $\square$

Beweis: (2.2.1) 1) Sei $n > 1$ zusammengesetzt, d.h. es gibt $d_1, d_2 \in \mathbb{N}_{>1}$ mit $n = d_1 \cdot d_2$.

Annahme: $d_1, d_2 > \sqrt{n}$, dann folgt $n = d_1 \cdot d_2 > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$, also $n > n$ $\lightning$

Also: $d_1 \leq \sqrt{n}$ oder $d_2 \leq \sqrt{n}$

2) Nach (1) hat n einen Teiler $1 < d \leq \sqrt{n}$.

Dieses d besitzt also einen Primteiler $p \leq d \leq \sqrt{n}$

Aus $p \mid d$ und $d \mid n$ folgt $p \mid n$ also ist p ein Primteiler von n mit $1 < p \leq \sqrt{n}$.