Statistik

Themengebiet: Zufall und Wahrscheinlichkeit

VE 05: Kombinatorik, Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Wintersemester 2024/2025

Dozent: Prof. Dr. Sören Gröttrup

Vorlage von Prof. Dr. Max Krüger

Fakultät Informatik, Technische Hochschule Ingolstadt (THI)

Lerninhalte VE 05

Thema: Kombinatorik, Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

- Permutationen, Kombinationen und Variationen ohne und mit Wiederholungen
- Zufallsvorgänge und Zufallsexperimente
- Elementarereignisse, Ereignisräume und Ereignisse
- Zusammengesetzte, gemeinsame und disjunkte Ereignisse
- Gegenereignisse, sichere und unmögliche Ereignisse
- Definition von Wahrscheinlichkeiten nach Laplace
- Objektivistische und subjektivistische Interpretation von Wahrscheinlichkeit
- Axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeiten und Wahrscheinlichkeitsmaßen
- Wahrscheinlichkeitsräume

Inhaltsverzeichnis VE 05

VE 05: Kombinatorik, Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Einstieg: Das Ziegenproblem

In der Spielshow ***Let´s make a deal!*** steht hinter einer von drei (rein zufällig ausgewählten) Türen ein Ferrari, hinter den anderen beiden jeweils eine Ziege. Der Kandidat wählt eine der Türen, diese bleibt aber vorerst verschlossen. Der Spielmoderator, der weiß, hinter welcher Tür das Auto steht, öffnet daraufhin eine der beiden anderen Türen und zwar mit der Absicht, dass sich eine Ziege zeigt. Der Kandidat kann nun bei seiner ursprünglichen Wahl bleiben oder die andere verschlossene Tür wählen. Er erhält dann den Preis hinter der von ihm zuletzt gewählten Tür. [10,p.50]

<u>Frage</u>:

Wie würden Sie sich entscheiden: Bei der Wahl bleiben oder wechseln?

Inhaltsverzeichnis VE 05

VE 05: Kombinatorik, Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Fakultät

<u>Definition</u>:

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die **Fakultät** $n!$ definiert als das Produkt der Zahlen von 1 bis n:

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \, ,$$

wobei zusätzlich $0! := 1$ und $1! := 1$ definiert wird.

<u>Beispiele</u>:

2 ! = 2	7 ! = 5040	12 ! = 479001600
3 ! = 6	8 ! = 40320	13 ! = 6227020800
4 ! = 24	9 ! = 362880	14 ! = 87178291200
5 ! = 120	10 ! = 3628800	15 ! = 1307674368000
6 ! = 720	11 ! = 39916800	16 ! = 20922789888000

…

29 ! = 8841761993739701954543616000000

Begriffsklärung: Permutationen, Kombinationen und Variationen

Definition: (gem. [5,pp.449-450])

- Anordnungen heißen **Permutationen**.

- Auswahlen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge heißen **Kombinationen**.

- Auswahlen mit Berücksichtigung der Reihenfolge heißen **Variationen**.

Permutationen ohne Wiederholungen

Satz: (vgl. [5,p.449])

Es gibt $n!$ Permutationen von n verschiedenen Objekten, d.h. $n!$ unterschiedliche Reihenfolgen der n unterscheidbaren Objekte.

Beispiel:

- Die drei Objekte x, y, z lassen sich auf 3 ! (= 6) verschiedene Arten anordnen:

  x,y,z   x,z,y   y,x,z   y,z,x   z,x,y   z,y,x .

- Die Objekte a, b, c, d lassen sich auf 4 ! (= 24) verschiedene Arten anordnen:

a,b,c,d	a,b,d,c	a,c,b,d	a,c,d,b	a,d,b,c	a,d,c,b
b,a,c,d	b,a,d,c	b,c,a,d	b,c,d,a	b,d,a,c	b,d,c,a
c,a,b,d	c,a,d,b	c,b,a,d	c,b,d,a	c,d,a,b	c,d,b,a
d,a,b,c	d,a,c,b	d,b,a,c	d,b,c,a	d,c,a,b	d,c,b,a .

Permutationen mit Wiederholungen

<u>Satz</u>: (vgl. [5,p.449])

Gegeben seien n Objekte, unter denen n_1 gleiche Objekte vom Typ 1, n_2 gleiche Objekte vom Typ 2, . . . und n_k gleiche Objekte vom Typ k sind, dann gibt es

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

verschiedene Permutationen der n Objekte.

<u>Beispiel</u>:

Die fünf Objekte a, a, b, b, b lassen sich auf $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$ (= 10) unterscheidbare Arten anordnen:

a,a,b,b,b   a,b,a,b,b   a,b,b,a,b   a,b,b,b,a   b,b,b,a,a

b,b,a,b,a,   b,b,a,a,b   b,a,b,b,a   b,a,b,a,b   b,a,a,b,b .

Kombinationen ohne Wiederholungen

<u>Satz</u>: (vgl. [5,p.449])

Aus einer Menge mit n unterscheidbaren Objekten kann man

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

verschiedene Kombinationen von k Objekte ohne Wiederholungen auswählen.

Die Zahl $\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient** und wird als „n über k“ gesprochen.

<u>Beispiel</u>:

- Beim Lotto 6 aus 49 gibt es $\binom{49}{6} = 13.983.816$ verschiedene Ausgänge der Ziehung.
- Aus 10 Personen kann man $\binom{10}{2} = 45$ verschiedene Zweier-Gruppen bilden.

Kombinationen mit Wiederholungen

Satz: (vgl. [5,p.450])

Aus einer Menge mit n unterscheidbaren Objekten kann man

$$\binom{n-1+k}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

verschiedene Kombinationen von k Objekte mit Wiederholungen auswählen.

Beispiel: (vgl. [5,p.450])

Es werde dreimal hintereinander irgendein Buch aus 10 Büchern ausgewählt und mit einem gleichen Klebezettel markiert, dann gibt es $\binom{10-1+3}{3} = 220$ verschiedene Ergebnisse.

Variationen ohne Wiederholungen

Satz: (vgl. [5,p.449])

Aus einer Menge mit n unterscheidbaren Objekten kann man

$$\binom{n}{k} \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1)$$

verschiedene Variationen von k Objekte ohne Wiederholungen bilden.

Beispiel:

Aus den Objekten a, b, c ,d können $\binom{4}{3} \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ verschiedene Variationen von 3 Objekten ohne Wiederholung gebildet werden:

a,b,c	a,c,b	b,a,c	b,c,a	c,a,b	c,b,a
a,b,d	a,d,b	b,a,d	b,d,a	d,a,b	d,b,a
a,c,d	a,d,c	c,a,d	c,d,a	d,a,c	d,c,a
b,c,d	b,d,c	c,b,d	c,d,b	d,b,c	d,c,b

Variationen mit Wiederholungen

Satz: (vgl. [5,p.449])
Aus einer Menge mit n unterscheidbaren Objekten kann man n^k verschiedene Variationen von k Objekte mit Wiederholungen bilden.

Beispiel:
Aus den Ziffern a, b, c, d, e, f, g, h kann man $8^{11} = 8589934592$ verschiedene Worte mit genau 11 Buchstaben bilden.

Inhaltsverzeichnis VE 05

VE 05: Kombinatorik, Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Zufallsvorgänge

<u>**Definition**</u>: (vgl. [7,p.213] Unterkapitel 8.1)

- Ein Vorgang heißt **Zufallsvorgang**, wenn er
  1. unter genau festgelegten und beschreibbaren Bedingungen abläuft,
  2. zu mindestens zwei verschiedenen Ergebnissen führen kann und
  3. das konkrete Ergebnis einer Durchführung ungewiss ist und nicht vorhergesagt werden kann.
- Ein Zufallsvorgang heißt **Zufallsexperiment**, wenn er zusätzlich
  4. unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden kann.

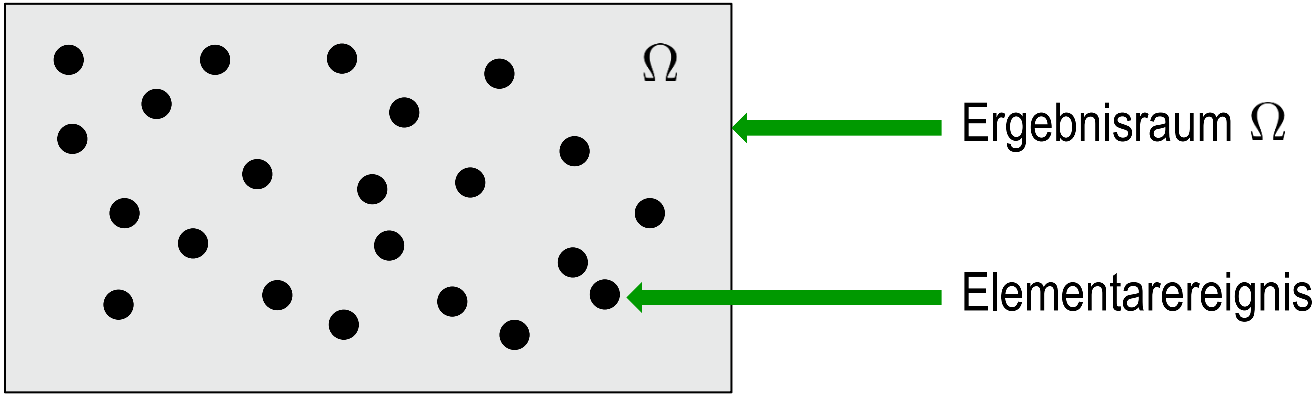
<u>Beispiele</u>:

- Münzwurf Kopf-oder-Zahl
- Ziehung der Lotto-Zahlen
- Würfeln
- Messung der Dauer zwischen dem Zerfall zweier Atomkerne einer radioaktiven Substanz.

Elementarereignisse und Ereignisräume

<u>Definition</u>: (vgl. [7,p.213] Unterkapitel 8.1)
Die einzelnen nicht weiter zerlegbaren und sich gegenseitig ausschließenden Ergebnisse und Ausgänge eines Zufallsvorgangs werden als **Elementarereignisse** bezeichnet.

<u>Definition</u>: (vgl. [7,p.214] Unterkapitel 8.1)
Die Menge Ω aller Elementarereignisse heißt **Ergebnisraum des Zufallsvorgangs** (bzw. **Ereignisraum**, **Ergebnismenge**, **Grundraum** oder **Stichprobenraum**).



Beispiele: Elementarereignisse und Ereignisräume

Beispiele:

Zufallsvorgang	Beispiel für ein Elementarereignis	Ergebnisraum
Münzwurf Kopf-oder-Zahl	Kopf	{Kopf, Zahl}
Ziehung der Lotto-Zahlen	3, 4, 34, 45, 46, 47	Alle 6-elementigen Teilmengen der Zahlenmenge {1,2,…,49}
Würfeln	fünf	{eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs}
Messung der Dauer zwischen dem Zerfall zweier Atomkerne einer radioaktiven Substanz.	Zeitdauer: 2.341 ms	Die Menge aller nicht-negativen Zeitspannen

Gegenbeispiele:

- „Gerade Zahl“ ist kein Elementarereignis beim Würfeln.
- Zwischen 2 ms und 3 ms ist kein Elementarereignis bei der o.a. Zerfallsmessung.

Diskrete und stetige Ergebnisräume

Definition: (vgl. [7,pp.231-232,234] Unterkapitel 8.8)

Der Ergebnisraum Ω eines Zufallsvorgangs heißt …

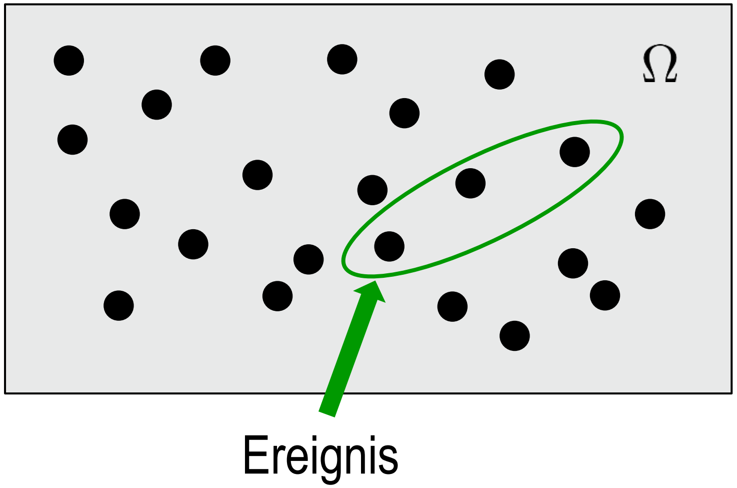
- … **endlich**, falls die Menge Ω endlich ist.
- … **abzählbar unendlich**, falls die Elemente der Menge Ω fortlaufend durchnummeriert werden können.
- … **diskret**, falls der Ergebnisraum Ω endlich oder abzählbar unendlich ist.
- … **stetig**, falls die Menge Ω (mindestens teilweise) stetig ist.

Beispiel:

- Das Zufallsexperiment „einmaliges Würfeln“ hat einen diskreten Ergebnisraum.
- Das Zufallsexperiment „Messung der Dauer zwischen dem Zerfall zweier Atomkerne einer radioaktiven Substanz“ hat einen stetigen Ergebnisraum.

Ereignis

Definition: (vgl. [7,p.215] Unterkapitel 8.1)
Ein (**zufälliges**) **Ereignis** ist eine Teilmenge A des Ergebnisraums Ω des Zufallsvorgangs. Das Ereignis A ist eingetreten, wenn das Ergebnis des Zufallsvorgangs ein Element dieser Teilmenge A ist.



Beispiel: (vgl. [7,p.215] Unterkapitel 8.1)
Beim Zufallsvorgang „2 mal Würfeln" besteht ein beispielhaftes zufälliges Ereignis A = „Augensumme größer als 10" aus den Elementarereignissen (5,6), (6,5), (6,6).

Zusammengesetzte, gemeinsame und disjunkte Ereignisse

Definition: (vgl. [5,p.47])

Seien $A, B \in S$ zwei Ereignisse eine Zufallsvorgangs.

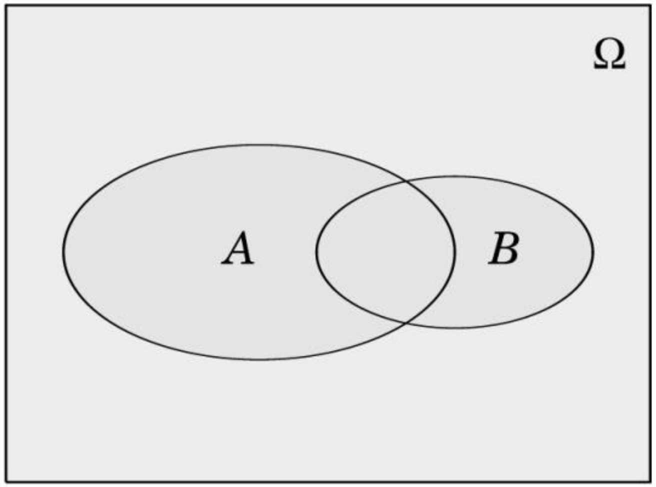
- $A \cup B \in S$ heißt das aus A und B **zusammengesetzte Ereignis**.
- $A \cap B \in S$ heißt das **gemeinsame Ereignis** der Ereignisse A und B.
- A und B heißen **disjunkte Ereignisse**, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Beispiel:

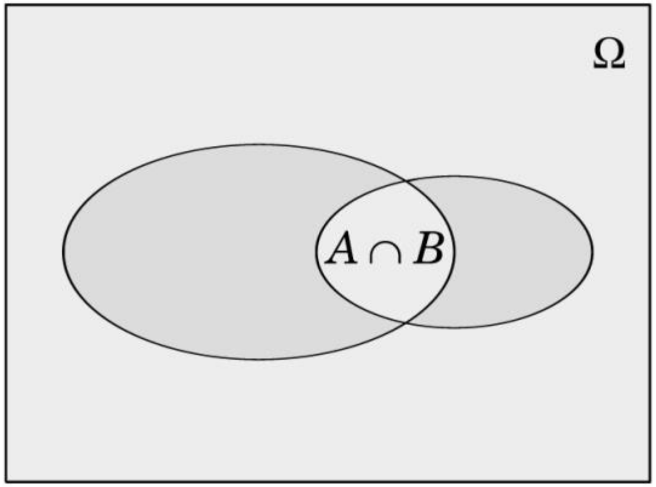
Beim (einmaligen) Würfeln …

- … ist „Ungerade Augenzahl“ (= {1,3,5}) das aus den Elementarereignissen {1}, {3} und {5} zusammengesetzte Ereignis.
- … ist {5} das gemeinsame Ereignis der Ereignisse „ungerade Augenzahl“ und „Augenzahl größer als 4“.
- … sind die Ereignisse „ungerade Augenzahl“ und „gerade Augenzahl“ disjunkt.

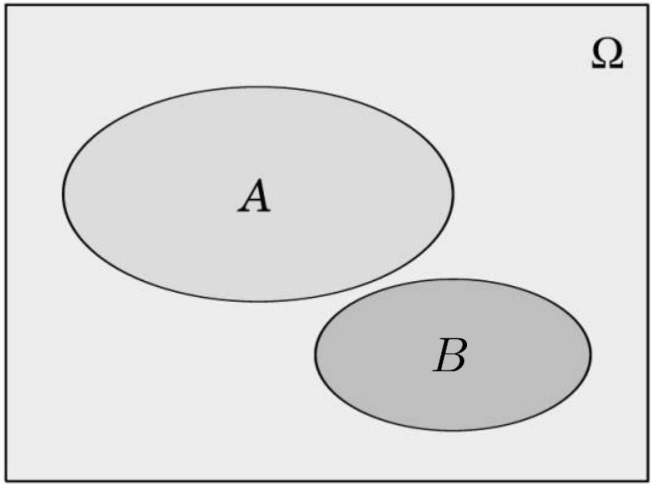
Visualisierung: Zusammengesetzte, gemeinsame und disjunkte Ereignisse



Zusammengesetztes Ereignis $A \cup B$



Gemeinsames Ereignis $A \cap B$



Disjunkte Ereignisse A und B mit $A \cap B = \emptyset$

Bildquelle: [7, p.218 Bild 8.1 (zusammengestellte Ausschnitte)]

Gegenereignisse, sichere und unmögliche Ereignisse

<u>**Definition**</u>: (vgl. [7,pp.216-217] Unterkapitel 8.1-8.2)

Für einen Ergebnisraum Ω mit der Ereignismenge S eines Zufallsvorgangs heißt die Teilmenge

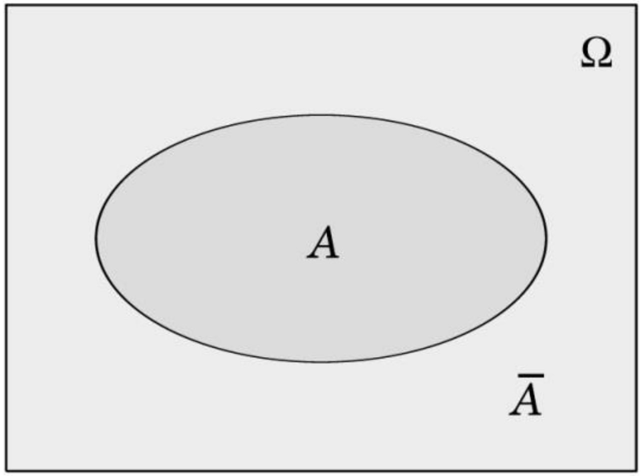
- $\overline{A} := \Omega \setminus A \in S$ das **Gegenereignis** zum Ereignis $A \in S$,
- $\Omega \in S$ das **sichere Ereignis des Zufallsvorgangs** und
- $\emptyset \in S$ das **unmögliche Ereignis des Zufallsvorgangs**.

<u>Beispiel</u>:

Beim (einmaligen) Würfeln ist

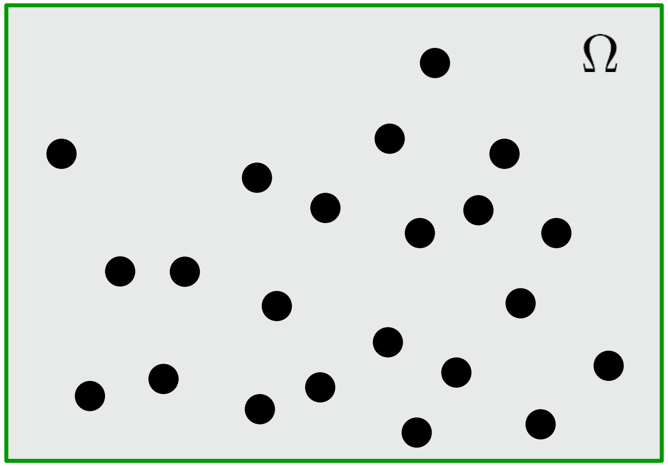
- {1,2,3,4,5,6} das sichere Ereignis,
- { } das unmögliche Ereignis und
- „Ungerade Augenzahl" (= {1,3,5}) das Gegenereignis zum Ereignis „Gerade Augenzahl" (= {2,4,6}).

Visualisierung: Zusammengesetzte, gemeinsame und disjunkte Ereignisse

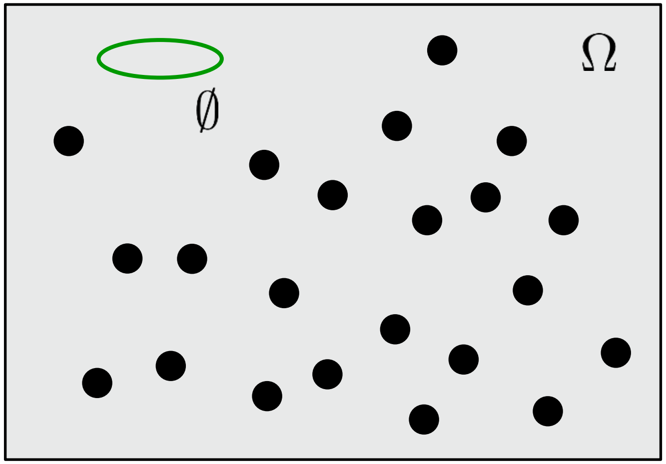


Gegenereignis

$$\overline{A} := \Omega \setminus A$$



Sicheres Ereignis Ω



Unmögliches Ereignis $\emptyset$

Bildquelle: [7,p.218 Bild 8.1 (zusammengestellte Ausschnitte), modifiziert]

Inhaltsverzeichnis VE 05

VE 05: Kombinatorik, Zufallsvorgänge, Ereignisse und Wahrscheinlichkeiten

Definition von Wahrscheinlichkeiten nach Laplace

Definition: (vgl. [4,p.21])

Für Ereignisse $A \in S$ eines Zufallsvorgang mit dem Ergebnisraum Ω seien $|A|$ bzw. $|\Omega|$ die Anzahl der Elementarereignisse in A bzw. Ω. Die **Wahrscheinlichkeit** $P(A)$ **von** A **nach Laplace**[1] ist dann definiert durch:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Bemerkungen:

1. Die Wahrscheinlichkeit nach Laplace ist also definiert als das Verhältnis von den für das Eintreten des Ereignisses günstigen Fälle zu den insgesamt möglichen Fällen.
2. Bei genauerer Betrachtung muss für diese Definition vorausgesetzt werden, dass der Ergebnisraum endlich ist und das Auftreten der Elementarereignisse gleich-wahrscheinlich ist.

[1] Pierre-Simon Marquis de Laplace, 1749-1827

Beispiel: Wahrscheinlichkeiten nach Laplace

<u>Beispiel</u>:

Beim 2-maligen Würfeln sind folgende 6^2 Elementarereignisse möglich:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) und (6,6).

Das Ereignis A = „Gesamtsumme 4“ hat also die Laplacesche Wahrscheinlichkeit

$$P(A) = \frac{|\{(1,3),(2,2),(3,1)\}|}{36} = \frac{1}{12},$$

während das Ereignis B = „Gesamtsumme 2“ die Wahrscheinlichkeit $P(B) = \dfrac{1}{36}$ hat.

Bildquelle: eigenes Foto

Definition: (vgl. [7,pp.227-228] Unterkapitel 8.6)

- Gegeben sei ein Zufallsvorgang mit Ergebnisraum Ω und Ereignismenge S. Jede Funktion $P : S \to \mathbb{R}$ mit $P : A \mapsto P(A)$ für $A \in S$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß auf** S, genau dann wenn folgende drei Axiome erfüllt sind:

  Axiom 1: $P(A) \geq 0$ für alle $A \in S$.

  Axiom 2: $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$.

  Axiom 3: Für alle paarweise disjunkten Ereignisse $A_i \in S$ mit $i \in \mathbb{N}$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

- Die Zahl $P(A) \in \mathbb{R}$ heißt **Wahrscheinlichkeit des Ereignisses** A.

Beispiel: Wahrscheinlichkeit und Wahrscheinlichkeitsmaß

- Für Ereignisse $A \in S$ eines Zufallsvorgang mit dem Ergebnisraum Ω seien $|A|$ bzw. $|\Omega|$ die Anzahl der Elementarereignisse in A bzw. Ω. Die Funktion der Laplaceschen Wahrscheinlichkeit $P(.) = \frac{|.|}{|\Omega|}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf S da Axiom 1, 2 und 3 erfüllt werden.

- Beim 2-maligen Würfeln ist also $P(\{(1,3),(2,2),(3,1)\}) = \frac{1}{12}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Gesamtsumme 4“.

Bildquelle: eigenes Foto

Wahrscheinlichkeitsräume

Definition: (vgl. [7,p.228] Unterkapitel 8.6)

Gegeben sei ein Zufallsvorgang Z mit Ergebnisraum Ω, Ereignismenge S und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $P : S \to \mathbb{R}$ mit $P : A \mapsto P(A)$ für $A \in S$. Das Tripel (Ω, S, P) heißt dann der **Wahrscheinlichkeitsraum des Zufallsvorgangs** Z.

Bemerkung:

Der Wahrscheinlichkeitsraum beschreibt den Zufallsvorgang aus wahrscheinlichkeits-theoretischer Sicht vollständig.

Diskrete und stetige Wahrscheinlichkeitsräume

Definition: (vgl. [7,pp.231-238] Unterkapitel 8.8)

Gegeben sei ein Zufallsvorgang Z mit Ergebnisraum Ω, Ereignismenge S und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $P : S \to \mathbb{R}$ mit $P : A \mapsto P(A)$ für $A \in S$. Der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P) des Zufallsvorgangs Z heißt ...

- … **diskreter Wahrscheinlichkeitsraum**, falls der Ergebnisraum Ω diskret ist.
- … **stetiger Wahrscheinlichkeitsraum**, falls der Ergebnisraum Ω stetig ist.

Bemerkung:

In einem stetigen Wahrscheinlichkeitsraum hat eine Ereignismenge $\{e\} \in S$, die aus nur einem Elementarereignis $e \in \Omega$ besteht, (i.d.R.) die Wahrscheinlichkeit $P\big(\{e\}\big) = 0$