Noções de Análise de Algoritmos

Estrutura de Dados — QXD0010

UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Prof. Roberto Cabral
rbcabral@ufc.br

Universidade Federal do Ceará

2º semestre/2022

Objetivo

- Estimar o tempo de execução de um algoritmo de forma analítica.

- Estimar a pior entrada que pode ser dada a um algoritmo (aquela que demorará mais tempo para ser executada).

- Comparar a eficiência de diferentes algoritmos usando a análise assintótica.

Análise de Algoritmos

- A análise de algoritmos é a área que estuda como estimar **teoricamente** os recursos que um algoritmo precisará a fim de resolver um problema computacional.

Análise de Algoritmos

- A análise de algoritmos é a área que estuda como estimar **teoricamente** os recursos que um algoritmo precisará a fim de resolver um problema computacional.

- Ao se analisar um algoritmo, estamos geralmente preocupados com duas medidas:
    - tempo de execução (ou tempo de processamento)
    - espaço de memória utilizado pelo algoritmo

Análise de Algoritmos

- A análise de algoritmos é a área que estuda como estimar **teoricamente** os recursos que um algoritmo precisará a fim de resolver um problema computacional.

- Ao se analisar um algoritmo, estamos geralmente preocupados com duas medidas:
  - tempo de execução (ou tempo de processamento)
  - espaço de memória utilizado pelo algoritmo

- Neste momento, nos interessa apenas estudar o tempo de execução, mas a análise feita aqui se estende também à análise do espaço de memória.

Tempo de processamento

Como comparar dois algoritmos que resolvem um certo problema em termos da sua eficiência?

Tempo de processamento

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Como comparar dois algoritmos que resolvem um certo problema em termos da sua eficiência?

- Medir o tempo (em microssengundos, etc.) gasto por um algoritmo.
    - Em certos contextos, não é uma boa opção. **Por quê?**

Tempo de processamento

Como comparar dois algoritmos que resolvem um certo problema em termos da sua eficiência?

- Medir o tempo (em microssengundos, etc.) gasto por um algoritmo.
    - Em certos contextos, não é uma boa opção. **Por quê?**
    - Depende do compilador
        - Pode preferir algumas construções ou otimizar melhor.

Tempo de processamento

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

> Como comparar dois algoritmos que resolvem um certo problema em termos da sua eficiência?

- Medir o tempo (em microssengundos, etc.) gasto por um algoritmo.
  - Em certos contextos, não é uma boa opção. **Por quê?**
  - Depende do compilador
    - Pode preferir algumas construções ou otimizar melhor.
  - Depende do hardware
    - GPU vs. CPU, desktop vc. smartphone.

Tempo de processamento

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Como comparar dois algoritmos que resolvem um certo problema em termos da sua eficiência?

- Medir o tempo (em microssengundos, etc.) gasto por um algoritmo.
  - Em certos contextos, não é uma boa opção. **Por quê?**
  - Depende do compilador
    - Pode preferir algumas construções ou otimizar melhor.
  - Depende do hardware
    - GPU vs. CPU, desktop vc. smartphone.
  - Depende da linguagem de programação e habilidade do programador

Exemplo: Busca sequencial


```
// Busca x no vetor v. Retorna indice de x se o encontrar;
// ou retorna -1 caso contrario.
int busca(int v[], int n, int x) {
  int i;
  for (i = 0; i < n; i++)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return -1;
}
```

Quantos segundos demora para executar a função acima?

Exemplo: Busca sequencial

```c
// Busca x no vetor v. Retorna indice de x se o encontrar;
// ou retorna -1 caso contrario.
int busca(int v[], int n, int x) {
  int i;
  for (i = 0; i < n; i++)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return -1;
}
```

Quantos segundos demora para executar a função acima?

Depende...

- do computador onde ele for rodado

Exemplo: Busca sequencial

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

```c
// Busca x no vetor v. Retorna indice de x se o encontrar;
// ou retorna -1 caso contrario.
int busca(int v[], int n, int x) {
  int i;
  for (i = 0; i < n; i++)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return -1;
}
```

Quantos segundos demora para executar a função acima?

Depende...

- do computador onde ele for rodado
  - computador rápido vs lento

Exemplo: Busca sequencial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```c
// Busca x no vetor v. Retorna indice de x se o encontrar;
// ou retorna -1 caso contrario.
int busca(int v[], int n, int x) {
  int i;
  for (i = 0; i < n; i++)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return -1;
}
```

Quantos segundos demora para executar a função acima?

Depende...

- do computador onde ele for rodado
  - computador rápido vs lento
- da posição de x no vetor

Exemplo: Busca sequencial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
1 // Busca x no vetor v. Retorna indice de x se o encontrar;
2 // ou retorna -1 caso contrario.
3 int busca(int v[], int n, int x) {
4   int i;
5   for (i = 0; i < n; i++)
6     if (v[i] == x)
7       return i;
8   return -1;
9 }
```

Quantos segundos demora para executar a função acima?

Depende...

- do computador onde ele for rodado
  - computador rápido vs lento
- da posição de x no vetor
  - no melhor caso, a linha 6 é executada 1 vez
  - no pior caso, a linha 6 é executada n vezes

Exemplo: Busca sequencial

```
1 // Busca x no vetor v. Retorna indice de x se o encontrar;
2 // ou retorna -1 caso contrario.
3 int busca(int v[], int n, int x) {
4   int i;
5   for (i = 0; i < n; i++)
6     if (v[i] == x)
7       return i;
8   return -1;
9 }
```

Quantos segundos demora para executar a função acima?

Depende...

- do computador onde ele for rodado
  - computador rápido vs lento
- da posição de x no vetor
  - no melhor caso, a linha 6 é executada 1 vez
  - no pior caso, a linha 6 é executada n vezes
- do valor de n
  - $n = 10$ vs $n = 10.000$

Complexidade computacional

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Complexidade computacional

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Para evitar análises dependente de tempo, considera-se que um algoritmo é subdividido, ao invés de milissegundos, em uma quantidade finita de **passos**.

Complexidade computacional

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Para evitar análises dependente de tempo, considera-se que um algoritmo é subdividido, ao invés de milissegundos, em uma quantidade finita de **passos**.

- Um passo é uma instrução indivisível e de tempo constante, ou seja, independente de condições de entrada e processamento.
    - Exemplo: soma, multiplicação, atribuição, comparação.

Complexidade computacional

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Queremos analisar algoritmos:

- Independentemente do computador onde ele for rodado
- Em função do valor de n (a quantidade de dados)

Para evitar análises dependente de tempo, considera-se que um algoritmo é subdividido, ao invés de milissegundos, em uma quantidade finita de **passos**.

- Um passo é uma instrução indivisível e de tempo constante, ou seja, independente de condições de entrada e processamento.
  - Exemplo: soma, multiplicação, atribuição, comparação.
- A quantidade de passos necessários ao cumprimento de um algoritmo é denominada complexidade do algoritmo.

Medindo a complexidade de algoritmos

Busca sequencial e consumo de tempo

```c
int busca(int v[], int n, int x) {
  int i;
  for (i = 0; i < n; i++)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return -1;
}
```

Busca sequencial e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```c
int busca(int v[], int n, int x) {
  int i;
  for (i = 0; i < n; i++)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return -1;
}
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

Busca sequencial e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)

Busca sequencial e consumo de tempo


```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes

Busca sequencial e consumo de tempo


```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos e comparação)

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada n vezes

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e `return`)

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada $n+1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e `return`)
- Linha 6: tempo c_6 (`return`)

Busca sequencial e consumo de tempo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada $n+1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e `return`)
- Linha 6: tempo c_6 (`return`)

O tempo de execução é menor ou igual a

Busca sequencial e consumo de tempo

```
1 int busca(int v[], int n, int x) {
2   int i;
3   for (i = 0; i < n; i++)
4     if (v[i] == x)
5       return i;
6   return -1;
7 }
```

Consumo de tempo por linha no pior caso:

- Linha 2: tempo c_2 (declaração de variável)
- Linha 3: tempo c_3 (atribuições, acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada $n + 1$ vezes
- Linha 4: tempo c_4 (acessos e comparação)
  - No pior caso, essa linha é executada n vezes
- Linha 5: tempo c_5 (acesso e `return`)
- Linha 6: tempo c_6 (`return`)

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Busca sequencial e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

Busca sequencial e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 = c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n$$

Busca sequencial e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \end{aligned}$$

Busca sequencial e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \leq a \cdot n + b \cdot n \end{aligned}$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \leq a \cdot n + b \cdot n = d \cdot n \end{aligned}$$

Busca sequencial e consumo de tempo

O tempo de execução é menor ou igual a

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6$$

Cada c_i não depende de n, depende apenas do computador

- Leva um tempo constante

Sejam $a := c_2 + c_3 + c_5 + c_6$, $b := c_3 + c_4$ e $d := a + b$

Se $n \geq 1$, temos que o tempo de execução é menor ou igual a

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 &= c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + (c_3 + c_4) \cdot n \\ &= a + b \cdot n \leq a \cdot n + b \cdot n = d \cdot n \end{aligned}$$

Isto é, o crescimento do tempo é linear em n

Busca sequencial e consumo de tempo

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n + 1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

Busca sequencial e consumo de tempo

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

Busca sequencial e consumo de tempo

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

Busca sequencial e consumo de tempo

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

O tempo do algoritmo é da ordem de n

Busca sequencial e consumo de tempo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Como vimos, existe uma constante d tal que, para $n \geq 1$,

$$c_2 + c_3 \cdot (n+1) + c_4 \cdot n + c_5 + c_6 \leq dn$$

d não interessa tanto, depende apenas do computador...

- Estamos preocupados em estimar

O tempo do algoritmo é da ordem de n

- A ordem de crescimento do tempo é igual a de $f(n) = n$

Soma de matrizes

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n que devem ser somadas.

Soma de matrizes

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n que devem ser somadas.

```
void soma_matrizes (int **A, int **B, int **C, int n){
  for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int j = 0; j < n; j++)
      C[i][j] = A[i][j] + B[i][j];
}
```

Soma de matrizes

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n que devem ser somadas.

```
void soma_matrizes (int **A, int **B, int **C, int n){
  for (int i = 0; i < n; i++)
    for (int j = 0; j < n; j++)
      C[i][j] = A[i][j] + B[i][j];
}
```

- Qual o tempo de execução desse algoritmo?

Soma de matrizes

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n que devem ser somadas.

```
1 void soma_matrizes (int **A, int **B, int **C, int n){
2   for (int i = 0; i < n; i++)
3     for (int j = 0; j < n; j++)
4       C[i][j] = A[i][j] + B[i][j];
5 }
```

- Qual o tempo de execução desse algoritmo?

- A operação que predomina no algoritmo é a soma (realizada na linha 4).

Soma de matrizes

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n que devem ser somadas.

```
1 void soma_matrizes (int **A, int **B, int **C, int n){
2   for (int i = 0; i < n; i++)
3     for (int j = 0; j < n; j++)
4       C[i][j] = A[i][j] + B[i][j];
5 }
```

- Qual o tempo de execução desse algoritmo?
- A operação que predomina no algoritmo é a soma (realizada na linha 4).
- Logo, expressamos a complexidade como sendo o total de vezes que a soma acontece.

Soma de matrizes

Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n que devem ser somadas.

```
1 void soma_matrizes (int **A, int **B, int **C, int n){
2   for (int i = 0; i < n; i++)
3     for (int j = 0; j < n; j++)
4       C[i][j] = A[i][j] + B[i][j];
5 }
```

- Qual o tempo de execução desse algoritmo?
- A operação que predomina no algoritmo é a soma (realizada na linha 4).
- Logo, expressamos a complexidade como sendo o total de vezes que a soma acontece.
- Associando-se os laços, contabilizam-se um total de $n \cdot n = n^2$ iterações. Logo, a complexidade é dada por $f(n) = n^2$.

Complexidade de melhor caso e pior caso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Diferentemente do algoritmo para soma de matrizes, na maior parte dos algoritmos conhecidos a função de complexidade $f(n)$ não é geral, ou seja, pode mudar conforme características da entrada.

Complexidade de melhor caso e pior caso

- Diferentemente do algoritmo para soma de matrizes, na maior parte dos algoritmos conhecidos a função de complexidade $f(n)$ não é geral, ou seja, pode mudar conforme características da entrada.

- Exemplo: busca sequencial.

```c
int busca(int v[], int n, int x) {
  int i;
  for (i = 0; i < n; i++)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return -1;
}
```

Complexidade de melhor caso e pior caso

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- Diferentemente do algoritmo para soma de matrizes, na maior parte dos algoritmos conhecidos a função de complexidade $f(n)$ não é geral, ou seja, pode mudar conforme características da entrada.

- Exemplo: busca sequencial.

```c
int busca(int v[], int n, int x) {
  int i;
  for (i = 0; i < n; i++)
    if (v[i] == x)
      return i;
  return -1;
}
```

- Nestes casos, a análise de complexidade consiste em avaliar o algoritmo em situações extremas.

Complexidade de melhor caso e pior caso

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Na análise da complexidade, definimos três casos de entrada para um algoritmo, como forma de mensurar o custo do algoritmo de resolver determinado problema diante de diferentes entradas.

- **Melhor caso:** o menor tempo de execução (analítico) considerando qualquer entrada de tamanho n.

Complexidade de melhor caso e pior caso

Na análise da complexidade, definimos três casos de entrada para um algoritmo, como forma de mensurar o custo do algoritmo de resolver determinado problema diante de diferentes entradas.

- **Melhor caso:** o menor tempo de execução (analítico) considerando qualquer entrada de tamanho n.
- **Pior caso:** o maior tempo de execução (analítico) considerando qualquer entrada de tamanho n.

Complexidade de melhor caso e pior caso

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Na análise da complexidade, definimos três casos de entrada para um algoritmo, como forma de mensurar o custo do algoritmo de resolver determinado problema diante de diferentes entradas.

- **Melhor caso:** o menor tempo de execução (analítico) considerando qualquer entrada de tamanho n.
- **Pior caso:** o maior tempo de execução (analítico) considerando qualquer entrada de tamanho n.
- **Caso médio:** é a média dos tempos de execução (analítico) considerando qualquer entrada de tamanho n.

Pior caso, caso médio e melhor caso

Em geral, queremos analisar o pior caso do algoritmo.

- A análise do melhor caso pode ser interesse, mas é rara.
- A análise do caso médio é mais difícil
  - É uma análise probabilística
  - Precisamos fazer suposições sobre os dados de entrada

Máximo e Mínimo elementos de um vetor

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```c
void max_min(int v[], int n, int *max, int *min) {
    *max = *min = v[0];
    for (int k = 1; k < n; k++)
        if (v[k] < v[*min])
            *min = v[k];
        else if (v[k] > v[*max])
            *max = v[k];
}
```

Máximo e Mínimo elementos de um vetor

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```c
void max_min(int v[], int n, int *max, int *min) {
    *max = *min = v[0];
    for (int k = 1; k < n; k++)
        if (v[k] < v[*min])
            *min = v[k];
        else if (v[k] > v[*max])
            *max = v[k];
}
```

- Qual a complexidade de melhor caso desse algoritmo?

Máximo e Mínimo elementos de um vetor

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

```
1 void max_min(int v[], int n, int *max, int *min) {
2     *max = *min = v[0];
3     for (int k = 1; k < n; k++)
4         if (v[k] < v[*min])
5             *min = v[k];
6         else if (v[k] > v[*max])
7             *max = v[k];
8 }
```

- Qual a complexidade de melhor caso desse algoritmo?
- No melhor caso, todos os testes da linha 4 obtêm êxito, impedindo a execução dos testes da linha 6; fazendo assim um total de $n - 1$ testes. Logo, $f(n) = n - 1$ no melhor caso.

Máximo e Mínimo elementos de um vetor


```
1 void max_min(int v[], int n, int *max, int *min) {
2     *max = *min = v[0];
3     for (int k = 1; k < n; k++)
4         if (v[k] < v[*min])
5             *min = v[k];
6         else if (v[k] > v[*max])
7             *max = v[k];
8 }
```

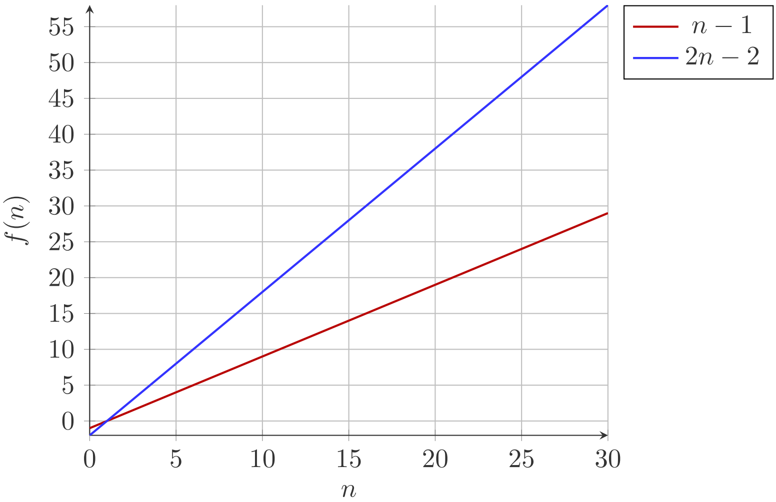
- Qual a complexidade de melhor caso desse algoritmo?
- No melhor caso, todos os testes da linha 4 obtêm êxito, impedindo a execução dos testes da linha 6; fazendo assim um total de $n - 1$ testes. Logo, $f(n) = n - 1$ no melhor caso.
- Qual a complexidade de pior caso desse algoritmo?

Máximo e Mínimo elementos de um vetor


```
1 void max_min(int v[], int n, int *max, int *min) {
2     *max = *min = v[0];
3     for (int k = 1; k < n; k++)
4         if (v[k] < v[*min])
5             *min = v[k];
6         else if (v[k] > v[*max])
7             *max = v[k];
8 }
```

- Qual a complexidade de melhor caso desse algoritmo?
- No melhor caso, todos os testes da linha 4 obtêm êxito, impedindo a execução dos testes da linha 6; fazendo assim um total de $n-1$ testes. Logo, $f(n) = n - 1$ no melhor caso.
- Qual a complexidade de pior caso desse algoritmo?
- No pior caso, todos os testes da linha 4 devem falhar, fazendo com que todos os testes da linha 6 ocorram. Logo, $f(n) = 2(n-1)$ no pior caso.

Comparando as funções $n-1$ e $2(n-1)$



Ordem de crescimento assintótico

Comportamento assintótico

- Motivação: Determinar a complexidade de tempo exata de um algoritmo é muito difícil e frequentemente não faz muito sentido.

Comportamento assintótico

- Motivação: Determinar a complexidade de tempo exata de um algoritmo é muito difícil e frequentemente não faz muito sentido.

- Para valores suficientemente pequenos de n, qualquer algoritmo custa pouco para ser executado, mesmo os ineficientes.
  - Escolha de um algoritmo não é um problema crítico.

Comportamento assintótico

- Motivação: Determinar a complexidade de tempo exata de um algoritmo é muito difícil e frequentemente não faz muito sentido.

- Para valores suficientemente pequenos de n, qualquer algoritmo custa pouco para ser executado, mesmo os ineficientes.
  - Escolha de um algoritmo não é um problema crítico.

- Logo, analisamos algoritmos para grandes valores de n.
  - Estudamos o comportamento assintótico das funções de complexidade de um programa (comportamento para grandes valores de n).

Comparando funções

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

f pode ser o tempo de execução do algoritmo e g uma função mais simples

- $f(n) = 3n^2 + 10 \lg n$ e $g(n) = n^2$

Comparando funções

Queremos comparar duas funções f e g

- Queremos entender a velocidade de crescimento de f
- Queremos dizer que f cresce mais lentamente ou igual a g

f pode ser o tempo de execução do algoritmo e g uma função mais simples

- $f(n) = 3n^2 + 10 \lg n$ e $g(n) = n^2$

f e g podem ser os tempos de execução de dois algoritmos

- $f(n) = dn$ e $g(n) = c + c \lg n$

Primeira Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \geq 0$

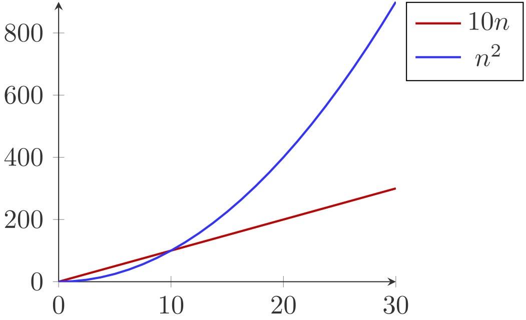
Exemplo: $10n < n^2$ para todo n

Primeira Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \geq 0$

Exemplo: $10n < n^2$ para todo n

Problema: $10n > n^2$ para $n < 10$



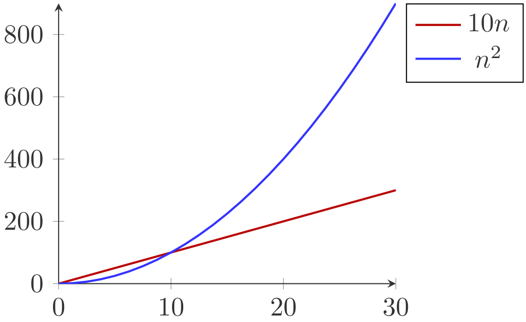
Primeira Ideia

UNIVERSIDADE
FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \geq 0$

Exemplo: $10n < n^2$ para todo n

Problema: $10n > n^2$ para $n < 10$



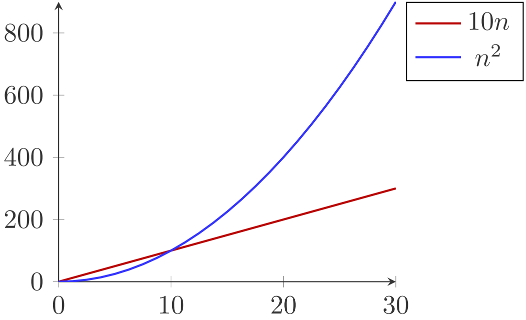
Solução: Ao invés de comparar todo n, comparar apenas n suficientemente grande

Primeira Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para todo $n \geq 0$

Exemplo: $10n < n^2$ para todo n

Problema: $10n > n^2$ para $n < 10$



Solução: Ao invés de comparar todo n, comparar apenas n suficientemente grande

- Para todo $n \geq n_0$ para algum n_0

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo
- Constantes dependem da máquina onde executamos

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

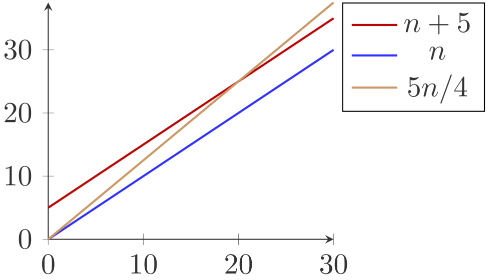
- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo
- Constantes dependem da máquina onde executamos
- Vamos ignorar constantes e termos menos importantes

Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo
- Constantes dependem da máquina onde executamos
- Vamos ignorar constantes e termos menos importantes

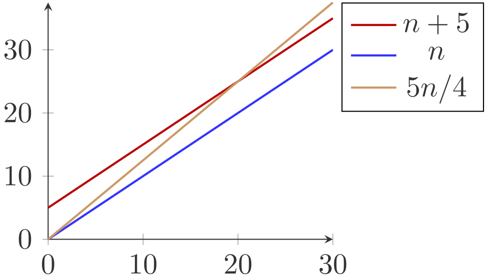


Segunda Ideia

Comparar funções verificando se $f(n) \leq g(n)$ para $n \geq n_0$

Problema: $n + 5 > n$ para todo n

- Mas a velocidade de crescimento das funções é o mesmo
- Constantes dependem da máquina onde executamos
- Vamos ignorar constantes e termos menos importantes



Solução: Ao invés de comparar f com g, comparar com $c \cdot g$, onde c é uma constante

Notação Assintótica

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- Denomina-se notação assintótica a forma matemática de representação simplificada de uma função $f(n)$ levando em conta as componentes de f que crescem mais rapidamente quando o valor de n *tende ao infinito*.

Notação Assintótica

- Denomina-se notação assintótica a forma matemática de representação simplificada de uma função $f(n)$ levando em conta as componentes de f que crescem mais rapidamente quando o valor de n *tende ao infinito*.

- Veremos a seguinte notação assintótica:
    - Notação O

Notação O

Notação Assintótica – Notação O

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Dada uma função $f(n)$, dizemos que $g(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$ se

- existem constantes positivas c e n_0, tais que

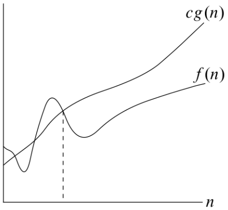
$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Notação Assintótica – Notação O

Dada uma função $f(n)$, dizemos que $g(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$ se

- existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$



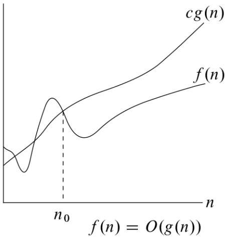
$f(n) = O(g(n))$

Notação Assintótica – Notação O

Dada uma função $f(n)$, dizemos que $g(n)$ é um **limite superior** para $f(n)$ se

- existem constantes positivas c e n_0, tais que

$$0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n), \qquad \text{para todo } n \geq n_0.$$



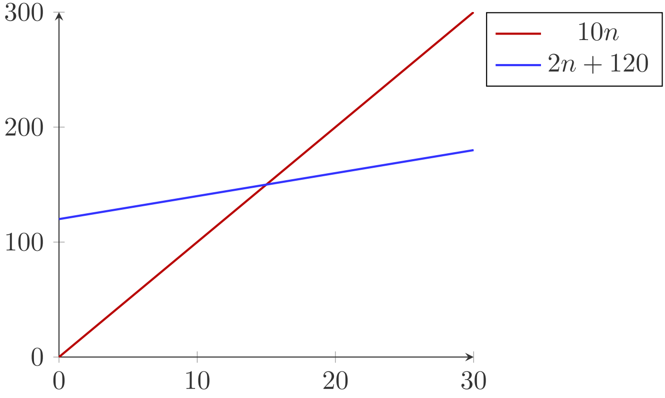
Escrevemos $f(n) = O(g(n))$ quando $g(n)$ é limite superior de $f(n)$.

Exemplo: $2n + 120 = O(n)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exemplo: $2n + 120 = O(n)$

Basta escolher, por exemplo, $c = 10$ e $n_0 = 15$

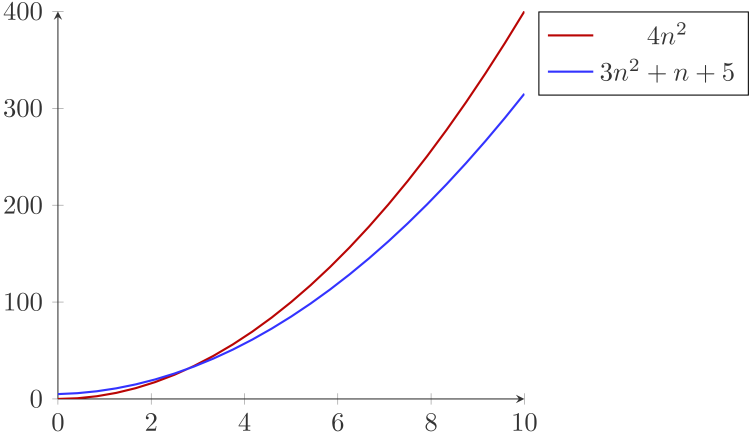


Exemplo: $3n^2 + n + 5 = O(n^2)$

Exemplo: $3n^2 + n + 5 = O(n^2)$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Basta escolher, por exemplo, $c = 4$ e $n_0 = 4$



Outros exemplos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

$$1 = O(1)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$
$$1.000.000 = O(1)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

$$5n + 2 = O(n)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

$$5n + 2 = O(n)$$

$$5n^2 + 5n + 2 = O(n^2)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

$$5n + 2 = O(n)$$

$$5n^2 + 5n + 2 = O(n^2)$$

$$\log_2 n = O(\log_{10} n)$$

Outros exemplos

$$1 = O(1)$$

$$1.000.000 = O(1)$$

$$5n + 2 = O(n)$$

$$5n^2 + 5n + 2 = O(n^2)$$

$$\log_2 n = O(\log_{10} n)$$

$$\log_{10} n = O(\log_2 n)$$

Nomenclatura e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $O(1)$: tempo constante

Nomenclatura e consumo de tempo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n

Nomenclatura e consumo de tempo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`

Nomenclatura e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)

Nomenclatura e consumo de tempo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor

- $O(\lg n)$: logarítmico

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor

- $O(\lg n)$: logarítmico
  - $\lg$ indica $\log_2$

Nomenclatura e consumo de tempo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor

- $O(\lg n)$: logarítmico
  - $\lg$ indica $\log_2$
  - quando n dobra, o tempo aumenta em uma constante

Nomenclatura e consumo de tempo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor

- $O(\lg n)$: logarítmico
  - $\lg$ indica $\log_2$
  - quando n dobra, o tempo aumenta em uma constante
  - Ex: Busca binária

Nomenclatura e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $O(1)$: tempo constante
  - não depende de n
  - Ex: atribuição e leitura de uma variável
  - Ex: operações aritméticas: `+`, `-`, `*`, `/`
  - Ex: comparações (`<`, `<=`, `==`, `>=`, `>`, `!=`)
  - Ex: operadores booleanos (`&&`, `&`, `||`, `|`, `!`)
  - Ex: acesso a uma posição de um vetor
- $O(\lg n)$: logarítmico
  - $\lg$ indica $\log_2$
  - quando n dobra, o tempo aumenta em uma constante
  - Ex: Busca binária
  - Outros exemplos durante o curso

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor

Nomenclatura e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:

Nomenclatura e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos

- $O(n^2)$: quadrático

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
  - quando n dobra, o tempo quadriplica

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
  - quando n dobra, o tempo quadriplica
  - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos

- $O(n^2)$: quadrático
  - quando n dobra, o tempo quadriplica
  - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort

- $O(n^3)$: cúbico

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores
- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos
- $O(n^2)$: quadrático
  - quando n dobra, o tempo quadriplica
  - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort
- $O(n^3)$: cúbico
  - quando n dobra, o tempo octuplica

Nomenclatura e consumo de tempo

- $O(n)$: linear
  - quando n dobra, o tempo dobra
  - Ex: Busca linear
  - Ex: Encontrar o máximo/mínimo de um vetor
  - Ex: Produto interno de dois vetores

- $O(n \lg n)$:
  - quando n dobra, o tempo um pouco mais que dobra
  - Ex: algoritmos de ordenação que veremos

- $O(n^2)$: quadrático
  - quando n dobra, o tempo quadriplica
  - Ex: BubbleSort, SelectionSort e InsertionSort

- $O(n^3)$: cúbico
  - quando n dobra, o tempo octuplica
  - Ex: multiplicação de matrizes $n \times n$

Nomenclatura e consumo de tempo

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial

Nomenclatura e consumo de tempo

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
    - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.

Nomenclatura e consumo de tempo

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
  - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.
  - Não são úteis do ponto de vista prático.

Nomenclatura e consumo de tempo

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
  - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.
  - Não são úteis do ponto de vista prático.
    - Quando n é 20, $O(2^n)$ é um milhão.

Nomenclatura e consumo de tempo

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
  - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.
  - Não são úteis do ponto de vista prático.
    - Quando n é 20, $O(2^n)$ é um milhão.
- $f(n) = O(n!)$: complexidade exponencial

Nomenclatura e consumo de tempo

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
  - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.
  - Não são úteis do ponto de vista prático.
    - Quando n é 20, $O(2^n)$ é um milhão.

- $f(n) = O(n!)$: complexidade exponencial
  - Pior que $O(c^n)$

Nomenclatura e consumo de tempo

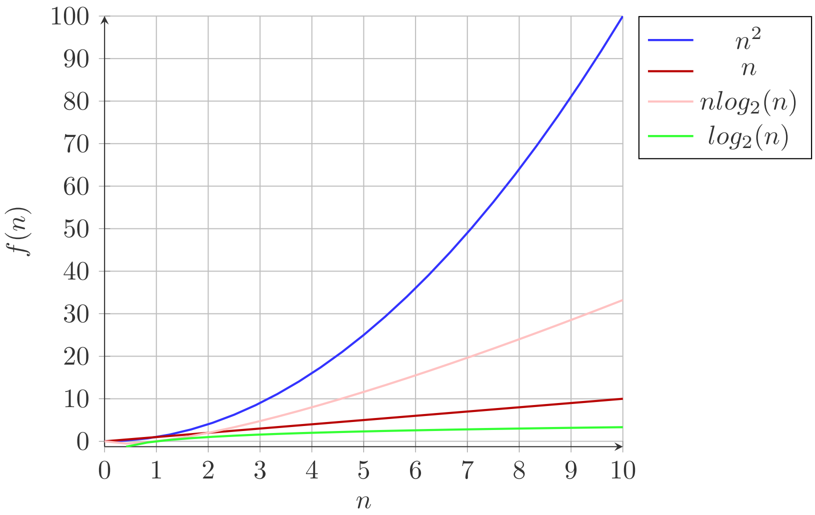
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
  - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.
  - Não são úteis do ponto de vista prático.
    - Quando n é 20, $O(2^n)$ é um milhão.
- $f(n) = O(n!)$: complexidade exponencial
  - Pior que $O(c^n)$
  - Não são úteis do pronto de vista prático.

Nomenclatura e consumo de tempo

- $f(n) = O(c^n)$: complexidade exponencial
  - Típico de algoritmos que fazem busca exaustiva (força bruta) para resolver um problema.
  - Não são úteis do ponto de vista prático.
    - Quando n é 20, $O(2^n)$ é um milhão.
- $f(n) = O(n!)$: complexidade exponencial
  - Pior que $O(c^n)$
  - Não são úteis do pronto de vista prático.
  - Quando n é 20, $O(n!)$ é maior que 2 quintilhões.

Comparando quatro funções



Comparação de funções de complexidade

Tamanho n	Função de custo $\lg_2 n$	n	$n \lg_2 n$	n^2	n^3	2^n
10	3	10	30	100	1000	1000
100	6	100	664	10^4	10^6	10^{30}
1000	9	1000	9965	10^6	10^9	10^{300}
10^4	13	10^4	10^5	10^8	10^{12}	10^{3000}
10^5	16	10^5	10^6	10^{10}	10^{15}	10^{30000}
10^6	19	10^6	10^7	10^{12}	10^{18}	10^{300000}

1 semana $\approx 1,21 \cdot 10^6$ segundos
1 ano $\approx 3 \cdot 10^7$ segundos
1 século $\approx 3 \cdot 10^9$ segundos
1 milênio $\approx 3 \cdot 10^{10}$ segundos

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é menor ou igual a um múltiplo de n^3

Um cuidado

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é menor ou igual a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2$...

- $2n^2 = O(n^3)$, mas...
- $2n^2 = O(n^2)$

Um cuidado

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

O que significa dizer que o tempo de um algoritmo é $O(n^3)$?

- Para instâncias grandes ($n \geq n_0$)
- O tempo é menor ou igual a um múltiplo de n^3

Pode ser que o tempo do algoritmo seja $2n^2$...

- $2n^2 = O(n^3)$, mas...
- $2n^2 = O(n^2)$

Ou seja, podemos ter feito uma análise "folgada"

- achamos que o algoritmo é muito pior do que é realmente

Notação O – Uma propriedade

Sejam $f(n)$ e $g(n)$ duas funções.

Se $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} \neq \infty$, então $f(n) = O(g(n))$.

Conclusão

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

- A análise de algoritmos é útil para definir o algoritmo mais eficiente em determinados problemas.
- O objetivo final não é apenas fazer códigos que funcionem, mas que sejam também eficientes.

> "Um bom algoritmo, mesmo rodando em uma máquina lenta, sempre acaba derrotando (para instâncias grandes do problema) um algoritmo pior rodando em uma máquina rápida. Sempre."
>
> — S. S. Skiena, The Algorithm Design Manual

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Para cada uma das afirmações abaixo, justifique formalmente (usando definições, manipulações algébricas e implicações) se for verdade ou dê um contraexemplo se for falso.

(a) $3n = O(n)$

(b) $2n^2 - n = O(n^2)$

(c) $\log 8n = O(\log 2n)$

(d) $2^{n+1} = O(2^n)$

(e) $2^n = O(2^{n/2})$

(f) $n^2 - 200n - 300 = O(n)$

(g) Se $f(n) = 17$, então $f(n) = O(1)$

(h) Se $f(n) = 3n^2 - n + 4$, então $f(n) = O(n^2)$

Exercício

Determine a complexidade de pior caso da função a seguir:

Algoritmo 3 Função F

```
Função F(int L[ ], int n)
    s ← 0
    para i ← 0 até n − 2 faça
        para j ← i + 1 até n − 1 faça
            if L[i] > L[j] then
                s ← s + 1
            fim if
        fim para
    fim para
    retorne s
fim Função
```

Exercícios Resolvidos

Exercício

Exercício: Proponha um **limite superior** para a função $f(n) = 3n^2 + 18$ juntamente com constantes c e n_0 válidas.

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exercício: Proponha um **limite superior** para a função $f(n) = 3n^2 + 18$ juntamente com constantes c e n_0 válidas.

Solução: Como limite superior, propomos a função $g(n) = n^2$ e como constantes válidas citamos $c = 4$ e $n_0 = 5$.

Exercício

Exercício: Proponha um **limite superior** para a função $f(n) = 3n^2 + 18$ juntamente com constantes c e n_0 válidas.

Solução: Como limite superior, propomos a função $g(n) = n^2$ e como constantes válidas citamos $c = 4$ e $n_0 = 5$.

Vamos verificar essas constantes:

Exercício

Exercício: Proponha um **limite superior** para a função $f(n) = 3n^2 + 18$ juntamente com constantes c e n_0 válidas.

Solução: Como limite superior, propomos a função $g(n) = n^2$ e como constantes válidas citamos $c = 4$ e $n_0 = 5$.

Vamos verificar essas constantes:

$$
\begin{aligned}
c \cdot g(n) &\geq f(n) \\
4n^2 &\geq 3n^2 + 18 \\
n^2 &\geq 18 \Rightarrow \{n \leq -\sqrt{18} \ \cup \ n \geq \sqrt{18}\}
\end{aligned}
$$

Exercício

Exercício: Proponha um **limite superior** para a função $f(n) = 3n^2 + 18$ juntamente com constantes c e n_0 válidas.

Solução: Como limite superior, propomos a função $g(n) = n^2$ e como constantes válidas citamos $c = 4$ e $n_0 = 5$.

Vamos verificar essas constantes:

$$\begin{aligned} c \cdot g(n) &\geq f(n) \\ 4n^2 &\geq 3n^2 + 18 \\ n^2 &\geq 18 \Rightarrow \{n \leq -\sqrt{18} \; \cup \; n \geq \sqrt{18}\} \end{aligned}$$

Como $c = 4$ e $n = 5 > 4.25 \approx \sqrt{18}$, então $3n^2 + 18 = O(n^2)$.

Exercício

O limite inferior do slide anterior pode ser melhorado. A análise $n^2 - 3n = \Omega(n)$ é "folgada".
De fato, dá para provar que $n^2 - 3n = \Omega(n \lg n)$

$$
\begin{aligned}
n^2 - 3n &\geq n^2 - 3n \lg n \quad \text{pois } 3n \lg n \geq 3n \text{ para } n \geq 2 \\
&\geq 4n \lg n - 3n \lg n \quad \text{pois } n \geq 4 \lg n \text{ para } n \geq 16 \\
&= n \lg n
\end{aligned}
$$

Logo, fazendo $c = 1$ e $n_0 = 16$, temos que $n^2 - 3n \geq c \cdot n \lg n$ para todo $n \geq n_0$.

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exercício: Suponha $f(n) = 2n^2 + 30n + 400$ e $g(n) = n^2$. Mostre que $f = O(g)$.

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exercício: Suponha $f(n) = 2n^2 + 30n + 400$ e $g(n) = n^2$. Mostre que $f = O(g)$.

Solução: Para todo n positivo, temos:

$$\begin{aligned} f(n) &= 2n^2 + 30n + 400 \\ &\leq 2n^2 + 30n^2 + 400n^2 \\ &= 432n^2 \\ &= 432g(n). \end{aligned}$$

Resumindo, $f(n) \leq 432g(n)$ para todo $n \leq 1$. Além disso, note que $f(n)$ e $g(n)$ são assintoticamente não-negativas. Portanto, $f(n) = O(g(n))$.

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exercício: Suponha $f(n) = \lceil n/2 \rceil + 10$ e $g(n) = n$. Mostre que $f(n) = O(g(n))$.

Exercício

Exercício: Suponha $f(n) = \lceil n/2 \rceil + 10$ e $g(n) = n$. Mostre que $f(n) = O(g(n))$.

Solução: De fato, temos que:

$$\begin{aligned} f(n) &= \lceil n/2 \rceil + 10 \\ &\leq n/2 + 1 + 10 \\ &= n/2 + 11 \\ &\leq 20n \text{ para todo } n \geq 1. \end{aligned}$$

Portanto, $f(n) = O(g(n))$.

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exercício: Suponha $f(n) = 5n \lg n + 8 \lg^2 n - 11$ e $g(n) = n \lg n$.
Mostre que $f(n) = O(g(n))$.

Exercício

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Exercício: Suponha $f(n) = 5n \lg n + 8 \lg^2 n - 11$ e $g(n) = n \lg n$. Mostre que $f(n) = O(g(n))$.

Solução: Desta vez, vamos usar limites:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{5n \lg n + 8 \lg^2 n - 11}{n \lg n} \\
&= \lim_{n\to\infty} 5 + 8\frac{\lg n}{n} - 11\frac{1}{n \lg n} \\
&= 5 + 8(0) - 11(0) \\
&= 5.
\end{aligned}
$$

Logo, como o limte existe, então $f(n) = O(g(n))$.

Exercício

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Exercício: Suponha $f(n) = 5n \lg n + 8 \lg^2 n - 11$ e $g(n) = n \lg n$. Mostre que $f(n) = O(g(n))$, sem usar limites.

Exercício

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Exercício: Suponha $f(n) = 5n \lg n + 8 \lg^2 n - 11$ e $g(n) = n \lg n$. Mostre que $f(n) = O(g(n))$, sem usar limites.

Solução:

$$\begin{aligned} 5n \lg n + 8 \lg^2 n - 11 &\leq 5n \lg n + 8 \lg^2 n \\ &\leq 5n \lg n + 8n \lg n \text{ pois } \lg n < n \quad \forall n \geq 1 \\ &= 13n \lg n \end{aligned}$$

Logo, concluímos que $5n \lg n + 8 \lg^2 n - 11 \leq 13n \lg n$ para todo $n \geq 1$. Portanto, fazendo $n_0 = 1$ e $c = 13$, temos que $0 \leq f(n) \leq 13g(n)$ para todo $n \geq n_0$. Assim, $f(n) = O(g(n))$.

Exercícios

1. É verdade que $\log_2 n = O(\log_3 n)$? É verdade que $\log_3 n = O(\log_2 n)$?

Exercícios

1. É verdade que $\log_2 n = O(\log_3 n)$? É verdade que $\log_3 n = O(\log_2 n)$?

2. Mostre que $15n = O(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq O(n)$

Exercícios

1. É verdade que $\log_2 n = O(\log_3 n)$? É verdade que $\log_3 n = O(\log_2 n)$?

2. Mostre que $15n = O(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq O(n)$
   - Essa análise é folgada, já que $15n = O(n)$

Exercícios

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

1. É verdade que $\log_2 n = O(\log_3 n)$? É verdade que $\log_3 n = O(\log_2 n)$?

2. Mostre que $15n = O(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq O(n)$
   - Essa análise é folgada, já que $15n = O(n)$

3. Mostre que $42n = O(n^2)$ mas que $n^2 \neq O(42n)$

Exercícios

1. É verdade que $\log_2 n = O(\log_3 n)$? É verdade que $\log_3 n = O(\log_2 n)$?

2. Mostre que $15n = O(n \lg n)$ mas que $n \lg n \neq O(n)$
    - Essa análise é folgada, já que $15n = O(n)$

3. Mostre que $42n = O(n^2)$ mas que $n^2 \neq O(42n)$
    - Essa análise é folgada, já que $42n = O(n)$

FIM