Questão (1):

a) $10n^2 + 200n + \frac{500}{n} = O(n^2)$

Uma forma de resolver esses itens é ir manipulando as expressões e transformando-as até obter a expressão que a gente deseja:

$$10n^2 + 200n + \frac{500}{n} \leq 10n^2 + 200n + 500n =$$

$$= 10n^2 + 700n \leq 10n^2 + 700n^2 \leq 710n^2 \quad \forall n \geq 1$$

Logo, para $c = 710$ e $n_0 = 1$.

(Verdadeiro)

b) $\lg(100n^3 + 200n + 300)^2 = O(\lg n)$

$\lg(100n^3 + 200n + 300)^2 = 2 \cdot \lg(100n^3 + 200n + 300) \leq$
$2 \cdot \lg(100n^3 + 200n + 300n) \leq 2 \cdot \lg(100n^3 + 500n) \leq$
$2 \cdot \lg(100n^3 + 500n^3) \leq 2\lg(600n^3) =$
$2\lg 600 + 2\lg n^3 = 2\lg 600 + 6\lg n \leq 20 + 6\lg n$
$\leq \lg n + 6\lg n \leq 7\lg n$
(para $n \geq 10^7$)

Logo, existe $c = 7$ e $n_0 = 10^7$ tais que
$\lg(100n^3 + 200n + 300)^2 \leq c \cdot \lg n \quad \forall n \geq n_0$
(verdadeira)

c) $2n^2 - 20n - 50 = O(2n)$

$$2n^2 - 20n - 50 \leq c \cdot 2n$$

dividindo a inequação acima por n, temos:

$$2n - 20 - \frac{50}{n} \leq 2 \cdot c$$

Falso, para qualquer valor fixo de c haverá n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ torna a inequação falsa.

d) $C(n,k) = \binom{n}{k}$. É verdade que $C(n,2) = O(n^2)$?

Sim. É verdade.

$$C(n,2) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)}}{2\cancel{(n-2)}} = \frac{n^2-n}{2} \leq 2\cdot\left(\frac{n^2-n}{2}\right)$$

$$= n^2 - n \leq n^2 + n^2 \leq 2n^2 \quad \forall n \geq 1.$$

Logo, para $c = 2$ e $n_0 = 1$ temos que

$$C(n,2) \leq 2\cdot n^2 \quad \forall n \geq n_0.$$

$C(n,3) = O(n^3)$?

Sim, é verdade.

$$C(n,3) = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)}}{3\cancel{(n-3)}} = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{3} \leq$$

$$\frac{3(n^3 - 3n^2 + 2n)}{3} \leq n^3 - 3n^2 + 2n^2 \leq n^3 - n^2 \leq$$

$$n^3 + n^3 = 2n^3 \quad \forall n \geq 1.$$

Logo, para $c = 2$ e $n_0 = 1$, temos que

$$C(n,3) \leq c\cdot n^3, \quad \forall n \geq n_0.$$

— // — // —

Questão (2):

Sejam $a(n) = 2n^2 - n + 730$ e $b(n) = 50n + 50$

Queremos determinar o valor de n que torna a desigualdade $a(n) \leq b(n)$ verdadeira.

Logo:

$$a(n) \leq bn$$

$$2n^2 - n + 730 \leq 50n + 50$$

$$2n^2 - 51n + 680 \leq 0$$

Achando as raízes:

$$n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{51 \pm \sqrt{2601 - 5440}}{4} = \frac{51 \pm \sqrt{-2839}}{4}$$

Como a equação acima não tem solução em $\mathbb{R}$, apenas complexo, concluímos que o algoritmo B é sempre melhor que o algoritmo A.

Questão 3

```
bool is_sorted(int A[], int n){
    for(int i=0; i<n-1; i++){
        if(A[i]>A[i+1]) {
            return false;
        }
    }
    return true;
}
```

Para determinar a complexidade, basta calcular quantas vezes o laço for é executado: $(n-1) - 0 + 1 = n$ vezes. Logo, o algoritmo tem complexidade $O(n)$ no pior caso, que é quando o array está ordenado.