Лидинов Арслан, БЭК183

Задача 7

$X = (X_1 \dots X_{n_x})$

$Y = (Y_1 \dots Y_{n_y})$ - независ. случ. выборки $\sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ (μ_y, σ_y^2)

$\sigma_x^2 = \sigma_y^2$

$\alpha = 0{,}05$

$\begin{cases} H_0: \mu_x = \mu_y \Rightarrow \mu_0 = 0 \\ H_1: \mu_x < \mu_y \text{ (левосторонняя)} \end{cases}$

$x_1 = 1{,}53$
$x_2 = 2{,}83$
$x_3 = 1{,}25$
$x_4 = 1{,}86$
$x_5 = 1{,}31$ $n_x = 5$

$y_1 = -0{,}8$
$y_2 = 0{,}06$
$y_3 = 0{,}84$
$y_4 = 4{,}07$
$y_5 = 3{,}26$ $n_y = 5$

Решение:

$\bar{x} = 1{,}25$

$\bar{y} = 1{,}43$

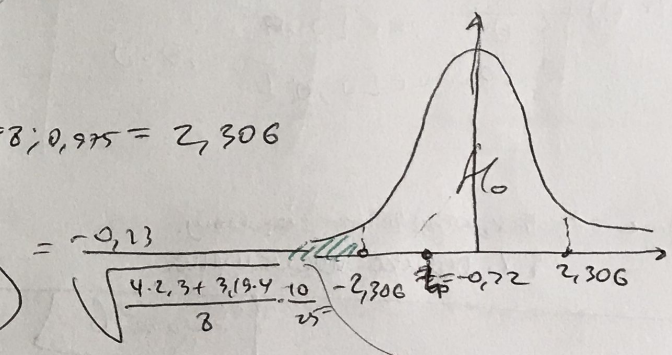
$\sigma_x^2 = \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 0{,}0196 + 0{,}6241 + 1{,}5625 + 0{,}093 + 0{,}0009 = 2{,}3$

$\sigma_y^2 = \frac{(y_i - \bar{y})^2}{n-1} = 0{,}1156 + 0{,}5041 + 0{,}1024 + 1{,}677 + 0{,}7921 = 3{,}19$

$z_p = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} = \frac{1{,}25 - 1{,}43 - 0}{\sqrt{\frac{2{,}3}{5} + \frac{3{,}19}{5}}} = \frac{-0{,}23}{1{,}047} = -0{,}22$

$t_{n_x+n_y-2;\alpha/2} = t_{5+5-2} = t_{8;0{,}975} = 2{,}306$

$t_p = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{(n_x-1)\hat{\sigma}_x^2 + (n_y-1)\hat{\sigma}_y^2}{n_x+n_y-2}\left(\frac{n_x+n_y}{n_x n_y}\right)}} = \frac{-0{,}23}{\sqrt{\frac{4 \cdot 2{,}3 + 3{,}19 \cdot 4}{8} \cdot \frac{10}{25}}} = \frac{-0{,}23}{\sqrt{2{,}745 \cdot 0{,}4}} = -0{,}22$



Ответ: $t_p \in K_0 \Rightarrow H_0$ не отвергается

Задача 2

$\theta > 0$

$X = (X_1 \dots X_n)$ - с. выборка

$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{6x(\theta - x)}{\theta^3}, & x \in [0;\theta] \\ 0, & x \notin [0;\theta] \end{cases}$

Решение

$E(x) = \int_0^\theta \frac{6x^2}{\theta^2} - \frac{x^3}{\theta^3} d\theta = \frac{6x^3}{3\theta^2} - \frac{x^3}{3\theta^3}\Big|_0^\theta =$

$= 2\theta - \frac{1}{3} = 2\theta - \frac{1}{3}$

$E(x^2) = \int_0^\theta \frac{6x^3}{\theta^2} - \frac{x^3}{\theta^3} = \frac{6x^4}{4\theta^2} - \frac{x^4}{4\theta^3}\Big|_0^\theta = \frac{6}{4}\theta^2 - \frac{1}{4}\theta$ (1)

$Var = E(x^2) - E^2(x) = \frac{6}{4}\theta^2 - \frac{1}{4}\theta - (2\theta - \frac{1}{3})^2$

$$Var = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Задача 3

$$f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

$\theta \in (-1; +\infty)$

Решение

$$L = \prod_{i=1}^{n} (\theta+1) x^\theta$$

$$\ln L = \sum(\ln(\theta+1) + \theta \ln x) = n\ln(\theta+1) + \theta \sum \ln x$$

FOC: $$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum \ln x = 0.$$

$$(\theta+1)(-\sum \ln x) = n$$

$$\hat{\theta}_{ммп} = \frac{n}{-\sum \ln x} - 1$$

Задача 4

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{4x^3}{\theta^4}, & x \in [0;\theta] \\ 0, & x \notin [0;\theta] \end{cases}, \quad \theta > 0$$

Решение

а) $\hat{\theta} = \bar{x}$ несмещ.-?

$$E(x) = \int_0^\theta \frac{4x^4}{\theta^4}dx = \frac{4}{\theta^4}\frac{x^5}{5}\Big|_0^\theta = \frac{4}{5}\theta$$

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{\sum x_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot n \cdot E(x) = \frac{4}{5}\theta$$

(явл несмещ)

в) $c = 1$, т.к. оценка несмещена

Задача 6

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{4x^3}{\theta^4}, & x \in [0,\theta] \\ 0, & else \end{cases}, \quad \theta > 0.$$

Решение:

$E(x) = 1$ (следует из N4)

$$E(\hat{\theta}_n) = E\left(\frac{5n+3}{4n-2} X_n\right) = \frac{5n+3}{4n-2}.$$

явл несмещ

• Асимпт. несмещ проверим

$$b = E(\hat{\theta}_n) - \theta = \frac{5n+3}{4n-2} - 1 = \frac{5n+3-4n+2}{4n-2} = \frac{n+5}{4n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} b = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{4n-2} = \left(\frac{n/n + 5/n}{4n/n - 2/n}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{явл ас несмещ.}$$

⇓

не явл. состоятельной

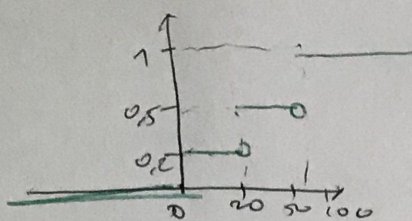
Задача 1

20 „1" $p = 0{,}2$

30 „2" $p = 0{,}5$

50 „3" $p = 1$

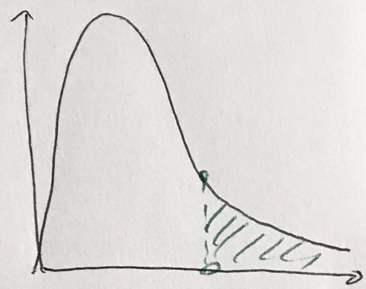
$n = 100$



Задача 9

	синяя	черная	фиолет.	Σ
„5"	100	40	50	190
„4"	65	60	50	175
Σ	165	100	100	365

$\alpha = 0{,}05$



$$\gamma = \sum \left(\frac{(\nu_i - np_i(\hat{\theta}))^2}{np_i(\hat{\theta})} \right)$$

H_0: цвет ручки не влияет на оценку

H_1: цвет ручки влияет на оценку

$\hat{P}_{синяя\,5} = \frac{100}{365} = 0{,}27$

$\hat{P}_{синяя\,4} = \frac{65}{365} = 0{,}18$

$\hat{P}_{черн\,5} = \frac{40}{365} = 0{,}11$

$\hat{P}_{черн\,4} = 0{,}16$

$\hat{P}_{фиол\,5} = 0{,}14$

$\hat{P}_{фиол\,4} = 0{,}14$

вместо p_i подставим произв-е вероятностей строки и столбца

немного не так

не успел