Домашняя работа по Теории вероятности и Математической статистике

Работа выполнена студенткой 2-ого курса группы БЭК-212 Торовой Анной

Задача 1

Однажды в Самарканде турист заказывал Яндекс-такси. На десятом заказе впервые приехал таксист, который уже раньше приезжал к туристу. Для упрощения предположим, что все п таксистов Самарканда всегда на работе и приезжают равновероятно..

```
In []: import numpy as np
    import pandas as pd
    import math
    import matplotlib.pyplot as plt
    from scipy import stats
```

а) Постройте график функции правдоподобия как функции от общего количества такси n. Найдите оценку числа n методом максимального правдоподобия.

Запишем вероятность того, что на 10-ый день приедет таксист, который раннее уже приезжал

$$P=rac{n\cdot (n-1)\cdot (n-2)\cdot\ldots\cdot (n-8)\cdot 9}{n}=rac{n!}{(n-9)!}\cdot rac{9}{n^{10}}$$

Тогда сначала найдем оценку методом максимального правдоподобия

$$L=ln(P)=ln(rac{n\cdot (n-1)\cdot (n-2)\cdot\ldots\cdot (n-8)\cdot 9}{n})=ln(rac{n!}{(n-9)!}\cdot rac{9}{n^{10}})\quad ->$$

```
In []: n_hat_ML=np.argmax(probs)+1
print(f'ML оценка числа таксистов = {n_hat_ML}')
```

Получившаяся оценка числа n методом максимального правдоподобия составляет 42

```
In []: def hood(n):
    P = ((n-1)/n)*((n-2)/n)*((n-3)/n)*((n-4)/n)*((n-5)/n)*((n-6)/n)*((n-7)/n)*(n-7)/n P
    values = np.arange(1, 1001)
    final = np.apply_along_axis(hood, axis=0, arr=n)
    plt.xlabel('n - число таксистов')
    plt.ylabel('Значение функции правдоподобия')
```

```
plt.title('График функции правдоподобия')
plt.plot(final)
plt.grid(True)
plt.show()
```

График функции правдоподобия

б) Постройте график математического ожидания номера заказа, на котором происходит первый повторный приезд, как функции от общего количества такси n. Найдите оценку числа n методом моментов.

```
In [ ]: def prob(n, d):
            p = np.prod((n - np.arange(0, d - 1))/n)
            p *= (d - 1)/n
            return p
        n = np.arange(1, 1001)
        def exp(n):
            k = np.arange(2, n+2)
            p = np.vectorize(prob)(n, k)
            E = np.sum(p * k)
            return E
        E1 = []
        for i in n:
            E = \exp(i)
            E1.append(E)
        plt.figure(figsize = (16, 8), dpi=300)
        plt.plot(n, E1, color='blue')
        plt.xlabel("Количество такси - n")
        plt.ylabel("Математическое ожидание")
        plt.title("График математического ожидания номера заказа")
        plt.grid(True)
        plt.show()
```

Рассчитаем математические ожидания, используя функцию, на входе в которую будет число таксистов, рассматривая только те дни, когда есть вероятность второго таксиста

Математическое ожидание

```
In []: mom = E1.index(min(E1, key=lambda x: abs(x - 10)))+1
print(f'MM оценка для количества таксистов = {mom}')
```

При помощи метода моментов нашли оценку числа n - 55

в) Предположим, что настоящее п равно 100. Проведя 10000 симуляций вызовов такси до первого повторного, рассчитайте 10000 оценок методом моментов и 10000 оценок методом максимального правдоподобия. Постройте гистограммы для оценок двух методов. Оцените смещение, дисперсию и среднеквадратичную ошибку двух методов.

Однажды в Самарканде турист заказывал Яндекс-такси. На десятом заказе он обнаружил, что у таксистов было 6 разных имён. Для упрощения предположим, что все n имён среди таксистов встречаются равновероятно и независимо от поездки к поездке.

а) Постройте график функции правдоподобия как функции от общего количества имён n. Найдите оценку числа n методом максимального правдоподобия.

Задача З

Иноагент Иннокентий по 20 наблюдениям строит 95%-й доверительный интервал для математического ожидания несколькими способами: классический асимптотический нормальный интервал, с помощью наивного бутстрэпа, с помощью бутстрэпа t-статистики.

а) Для каждого способа с помощью 10000 симуляций оцените вероятность того, что номинально 95%-й доверительный интервал фактически накрывает математическое ожидание, если наблюдения распределены экспоненциально с интенсивностью 1.

```
In []: import numpy as np
    from scipy.stats import norm, expon, t
    import scipy.stats as st

n = 10000
    sample = 20
    confidence = 0.95
    alpha = 0.05

d = st.expon.rvs(scale=1, size=(n, sample), random_state=42)
```

Классический асимптотический нормальный интервал

Получаем, что вероятность, что 95-% интервал фактически накрывает математическое ожидание, составляет 0.904 (ответ округлен до тысячных)

Интервал с помощью наивного бутстрэпа

```
In []: c = 0

for i in d:
    # Генерация бутстрэп-выборки
    bootstrap_d = np.random.choice(i.flatten(), size=(size, n), replace=T

# Вычисление среднего значения для бутстрэп-выборок
bootstrap_mean = np.mean(bootstrap_d, axis=1)

# Вычисление 95%-го доверительного интервала на основе бутстрэп-выбор
ci = np.percentile(bootstrap_mean, [2.5, 97.5])

# Проверка, попадает ли математическое ожидание в доверительный интер
if ci[0] <= 1 / h <= ci[1]:
    c += 1

# Вычисление вероятности попадания математического ожидания в доверительн
p = c / d.shape[0]

print(f'Вероятность, что 95%-ый доверительный интервал фактически накрыва
```

Получаем, что вероятность, что 95-% интервал фактически накрывает математическое ожидание, составляет 0.903 (ответ округлен до тысячных)

Интервал с помощью бутстрэпа tстатистики

```
In []: c = 0

# Вычисление среднего значения и стандартного отклонения для всего набора d_mean = np.mean(d)
d_std = np.std(d)

for i in d:
    # Генерация бутстрэп-выборки
    bootstrap_d = np.random.choice(i.flatten(), size=(size, n), replace=T

# Вычисление среднего значения и стандартного отклонения для бутстрэп bootstrap_mean = np.mean(bootstrap_d, axis=1)
    bootstrap_std = np.std(bootstrap_d, axis=1, ddof=1)

# Вычисление t-статистики
t = (bootstrap_mean - d_mean) / (bootstrap_std / np.sqrt(n))
```

Получаем, что вероятность, что 95-% интервал фактически накрывает математическое ожидание, составляет 0.904 (ответ округлен до тысячных)

б) Пересчитайте вероятности накрытия, если наблюдения имеют распределение Стьюдента с тремя степенями свободы

Классический асимптотический доверительный интервал

Получаем, что вероятность, что 95-% интервал фактически накрывает математическое ожидание, составляет 0.938 (ответ округлен до тысячных)

Наивный бутстреп

```
In []: c = 0

for i in d:
    # Генерация бутстрэп-выборки
    bootstrap_d = np.random.choice(i.flatten(), size=(size, n), replace=T

# Вычисление среднего значения для каждой бутстрэп-выборки
bootstrap_mean = np.mean(bootstrap_d, axis=1)

# Вычисление доверительного интервала на основе перцентилей средних з
ci = np.percentile(bootstrap_mean, [2.5, 97.5])
```

Получаем, что вероятность, что 95-% интервал фактически накрывает математическое ожидание, составляет 0.917 (ответ округлен до тысячных)

Бутстреп t-статистики

```
In [ ]: c = 0
        for i in d:
            # Генерация бутстрэп-выборки
            bootstrap_sample = np.random.choice(i.flatten(), size=(size, n), repl
            # Вычисление среднего значения для каждой бутстрэп-выборки
            bootstrap_mean = np.mean(bootstrap_d, axis=1)
            # Вычисление стандартного отклонения для каждой бутстрэп-выборки
            bootstrap_std = np.std(bootstrap_d, axis=1, ddof=1)
            # Вычисление t-статистики для каждой бутстрэп-выборки
            t = (bootstrap_mean - np.mean(d)) / (bootstrap_std / np.sqrt(n))
            # Вычисление доверительного интервала
            ci = np.mean(d) - np.percentile(t_statistic, [97.5, 2.5]) * (np.std(d)
            # Проверка, попадает ли 0 в доверительный интервал
            if ci[0] <= 0 <= ci[1]:
                c += 1
        # Вычисление p-value
        p = c / size
```

Получаем, что вероятность, что 95-% интервал фактически накрывает математическое ожидание, составляет 0.918 (ответ округлен до тысячных)

Для экспоненциального распределения наилучший результат показал бутстреп t-статистики Для распределения Стьюдента с тремя степенями свободы лучший результат показал классический асимптотический способ

Задача 4

. Проверьте гипотезу о том, что ожидаемые результаты экзамена по теории вероятностей тех, у кого фамилия начинается с гласной буквы и с согласной буквы, равны. В качестве альтернативной гипотезы возьмите гипотезу о неравенстве.

```
In [ ]: import pandas as pd
        df = pd.read csv('prob exam data.csv', delimiter=';')
        # Удаление строк с отсутствующими значениями в столбце 'Last name'
        df = df.dropna(subset=['Last name'])
        # Функция для определения, является ли первая буква слова гласной
        def is vowel(w):
            vowel = 'AOYNAEË3N'
            return w[0].upper() in vowel
        # Создание DataFrame для группы с фамилиями, начинающимися на гласные
        vow = df[df['Last name'].apply(is_vowel)].reset_index(drop=True)
        # Coзданиe DataFrame для группы с фамилиями, начинающимися на согласные
        cons = df[~df['Last name'].apply(is_vowel)].reset_index(drop=True)
In [ ]: from scipy.stats import ttest_ind
        # Выполнение непараметрического t-теста для двух групп
        stat, pvalue = ttest_ind(vow['Result'], cons['Result'], equal_var=False)
        # Вывод значения p-value
        print(f'P_value = {pvalue:.3f}')
        # Проверка статистического вывода на основе значения p-value
        if pvalue > alpha:
            print('Статистический вывод: H_0 не отвергается')
        else:
            print('Статистический вывод: H_0 отвергается в пользу H_A')
        P-value 0.4
```

Н0 не отвергается

б) Наивный бутстрэп

```
In []: # Задание seed для воспроизводимости результатов
np.random.seed(42)

# Количество бутстрэп-переменных
n = 100000

# Бутстрэпирование значений для группы "vowel"
vowel_boot = np.random.choice(vowel['Result'], size=(n, len(vow)))

# Бутстрэпирование значений для группы "cons"
cons_boot = np.random.choice(cons['Result'], size=(n, len(cons)))

# Вычисление разности средних между двумя группами
d = np.mean(vow['Result']) - np.mean(cons['Result'])

# Вычисление разности средних для каждого бутстрэп-переменного
d_boot = np.mean(vowel_boot, axis=1) - np.mean(cons_boot, axis=1)
```

```
# Вычисление p-value
pvalue = 2 * min(np.mean(d_boot <= 0), np.mean(d_boot >= 0))

# Вывод результатов
print(f'P_value = {pvalue:.3f}')
if pvalue > alpha:
    print('Статистический вывод: H_0 не отвергается')
else:
    print('Статистический вывод: H_0 отвергается в пользу H_A')
```

P value = 0.401

Н_0 не отвергается

Используйте бутстрэп t-статистики

```
In [ ]: # Вычисление разности средних между двумя группами
        d = np.mean(vow['Result']) - np.mean(cons['Result'])
        # Вычисление разности средних для каждого бутстрэп-переменного
        d_boot = np.mean(vow_boot, axis=1) - np.mean(cons_boot, axis=1)
        # Вычисление стандартной ошибки для каждого бутстрэп-переменного
        boot_vow_var = np.var(vowel_boot, ddof=1, axis=1) / len(vow)
        boot_cons_var = np.var(cons_boot, ddof=1, axis=1) / len(cons)
        boot = np.sqrt(boot_vow_var + boot_cons_var)
        # Вычисление значения статистики H_boot
        h_{boot} = (d_{boot} - d) / boot
        # Вычисление стандартной ошибки для исходных данных
        vow_var = np.var(vow, ddof=1) / len(vow)
        cons_var = np.var(cons, ddof=1) / len(cons)
        boot_s = np.sqrt(vow_var + cons_var)
        # Вычисление значения статистики Н
        h = d / boot_s
        # Вычисление p-value
        pvalue = 2 * min(np.mean(h_boot <= h[0]), np.mean(h_boot >= h[0]))
        # Вывод результатов
        print(f'P_value = {pvalue:.3f}')
        if pvalue > alpha:
            print('Статистический вывод: H_0 не отвергается')
        else:
            print('Статистический вывод: H_0 отвергается в пользу H_A')
```

 $P_{value} = 0.390$

Н_0 не отвергается

Используйте перестановочный тест

```
In []: # Создание столбца 'First letter' на основе столбца 'Last name' с примене
df['First letter'] = df['Last name'].apply(is_vowel)

np.random.seed(42)
```

```
# Формирование данных для каждых 4 элементов
data_per_4 = df[['Result', 'First letter']]
# Рассчет разности средних между группами гласных и согласных
delta = np.mean(vowel['Result']) - np.mean(cons['Result'])
n_{per} = 10000
deltas_per = []
for i in range(n_per):
    # Перемешивание значений столбца 'First letter'
    data_per_4['First letter'] = np.random.permutation(data_per_4['First
    # Рассчет разности средних для каждой перестановки
    delta_per = data_per_4.loc[data_per_4['First letter'] == True, 'Resul
    deltas_per.append(delta_per)
# Вычисление p-value
pvalue = 2 * min(np.mean(np.array(deltas_per) <= delta), np.mean(np.array</pre>
print(f'P_value = {pvalue:.3f}')
if pvalue > alpha:
    print('Статистический вывод: H_0 не отвергается')
else:
    print('Статистический вывод: H_0 отвергается в пользу H_A')
```

Задача 5

Составьте таблицу сопряжённости, поделив студентов писавших экзамен на четыре группы по двум признакам: набрал ли больше медианы или нет, на согласную или гласную букву начинается фамилия.

Постройте 95% асимптотический интервал для отношения шансов хорошо написать экзамен («несогласных» к «согласным»). Проверьте гипотезу о том, что отношение шансов равно 1 и укажите Р-значение.

```
In [ ]: # Вычисление количества студентов с баллами выше и ниже медианного значен
        vow_more = len(vow[stud_['Result'] > score_median[0]]) # Количество студ
        vow_low = len(vow[stud_glas['Result'] < score_median[0]]) # Количество d
        cons_more = len(cons[stud_sogl['Result'] > score_median[0]]) # Количеств
        cons_low = len(cons[stud_sogl['Result'] < score_median[0]]) # Количество
        # Создание таблицы с результатами
        table = pd.DataFrame({'Группа': ['Гласные', 'Согласные'],
                              'Больше медианы': [vow_more, cons_more],
                              'Меньше медианы': [vow_low, cons_low]})
        # Вычисление шансов и отношения шансов
        chance_vow = vow_more/ vow_low # Шансы гласных
        chance_cons = cons_more / cons_low # Шансы согласных
        OR = chance vow / chance cons # Отношение шансов
        # Вычисление стандартной ошибки и границ доверительного интервала
        ci = np.sqrt(1 / vow_more + 1 / gvow_low + 1 / cons_more + 1 / cons_low)
        left_bound = 0R * np.exp(-1.96 * ci) # Левая граница доверительного инте
```

```
right_bound = OR * np.exp(1.96 * ci) # Правая граница доверительного инт left_bound, right_bound # Вывод значений левой и правой границы доверите print(f'Интервал: [{left_bound:.3f}, {right_bound:.3f}]')
# Расчёт p_value
p_value = (1 - sts.norm.cdf(OR)) * 2
print(f'P_value = {pvalue:.3f}')
```

Pvalue = 0.475

Нулевая гипотеза не отвергается

Постройте 95% асимптотический интервал для отношения вероятностей хорошо написать экзамен. Проверьте гипотезу о том, что отношение вероятностей равно 1 и укажите Р-значение.

```
In []: import math
from scipy.stats import norm

# Вычисление отношения шансов (odds ratio)
diff = (cons_more / (cons_more + cons_low)) / (vow_more / (vow_more + v

# Вычисление логарифма отношения шансов
log_diff = math.log(diff)

# Вычисление стандартной ошибки (standard error)
se = math.sqrt((1 / (cons_more + cons_low)) + (1 / (vow_more + vow_low)))

# Вычисление значения z-статистики (z-score)
z = (log_diff - 0) / se

# Вычисление 95%-го доверительного интервала

CI = [пр.exp(np.log(diff) - 1.96 * se), np.exp(log_diff + 1.96 * se)]

# Вычисление p-value
p_value = 2 * (1 - norm.cdf(abs(z)))
```

P value = 0.282

Нулевая гипотеза не отвергается

Постройте 95% интервал для отношения шансов хорошо написать экзамен с помощью наивного бутстрэпа. Проверьте гипотезу о том, что отношение шансов равно 1 и укажите Р-значение.

```
In []: # Заданные переменные
median = df['Result'].median()
n = 1000
R = []

# Проводим бутстреп
for i in range(n):
# Ресэмплирование данных
```

```
resampled data = df.sample(frac=1, replace=True)
    # Вычисление отношения шансов
    group_vowel_resampled = resampled_data[resampled_data['Vowel Start']
   group_consonant_resampled = resampled_data[resampled_data['Consonant S
    group_vowel_higher_resampled = group_vowel_resampled[group_vowel_resa
    group vowel lower resampled = group vowel resampled[group vowel resam
    group_consonant_higher_resampled = group_consonant_resampled[group_cd
    group_consonant_lower_resampled = group_consonant_resampled[group_con
    # Вычисление отношения шансов
    ratio = (group_consonant_higher_resampled / group_consonant_lower_res
    R.append(ratio)
# Вычисление границ доверительного интервала
lower_bound = np.percentile(R, 2.5)
upper_bound = np.percentile(R, 97.5)
# Вычисление наблюдаемого отношения шансов
observed_ratio = ((group_vowel_higher / group_vowel_lower) / (group_consd
# Вычисление p-value
p_value = (np.abs(np.array(R) - 1) >= np.abs(observed_ratio - 1)).mean()
```

P value = 0.631

Нулевая гипотеза не отвергается

Задача 6

Иноагент Иннокентий Вероятностно-Статистический считает, что длина фамилии положительно влияет на результат экзамена по теории вероятностей. А именно, он предполагает, что ожидаемый результат за экзамен прямо пропорционален длине фамилии, E(Yi) = βFi , где Yi — результат за экзамен по 30-балльной шкале, Fi — количество букв в фамилии.

Оцените в методом моментов. Рассчитайте выборочную корреляцию

Вычисление среднего значения Ү

Y = df_students['Score'] Y_mean = df_students['Score'].mean()

Вычисление суммы длин фамилий

len_sum = df_students['Last name'].apply(lambda x: len(x))

Вычисление средней длины фамилий

Вычисление суммы длин фамилий

total_len_sum = sum(len_sum)

Вычисление коэффициента beta

beta = Y_mean * df_students.shape[0] / total_len_sum

Вычисление корреляции

```
corr = sum((len_sum - mean_len) * (Y - Y_mean)) / np.sqrt(sum((len_sum -
mean_len) ** 2))
```

Получившиеся значения:

 $Y_{mean} = 16.2$

beta = 2.06

corr = 0.025

Небольшой комментарий:

$$E(Y_i) = E(Y_{mean}) = Y_{mean} E(Y_i) = rac{1}{n} * eta * summ F_i n$$

С помощью перестановочного теста найдите Р-значение и формально протестируйте гипотезу о том, что корреляция равна нулю.

```
In []: import matplotlib.pyplot as plt

# Создаем список из значений len_sum
n = list(len_sum)

# Создаем пустой список для хранения перестановочных корреляций
A = [0] * 10 ** 6

# Выполняем 10^6 итераций перестановки
for i in range(10 ** 6):
    random.seed(10) # Задаем одинаковое начальное состояние генератора с random.shuffle(n) # Перемешиваем список п
n = np.array(n) # Преобразуем список в массив NumPy
d = sum((n - mean_len) * (Y - Y_mean)) / np.sqrt(sum((n - mean_len) * A[i] = d

# Вычисляем границы доверительного интервала
left = np.quantile(A, alpha/2)
```

```
right = np.quantile(A, 1 - alpha/2)
p_value = len([i for n in A if i > corr]) * 2 / 10 ** 6
```

Задача 7

С помощью chatgpt решите любую задачу из нашего курса теории вероятностей и статистики. Можно брать задачи из прошлых контрольных, лекций, семинаров и даже этого домашнего задания. В качестве ответа приведите полный диалог с chatgpt.

Условие задачи: Величина X равномерна на [3а – 2; 3а + 7]. При каких α и β оценка $a^{\circ} = \alpha + \beta X$ неизвестного параметра а будет несмещённой?

В изначальном запросе было введено условие задачи

Ответ:

Для оценки

$$\hat{a} = \alpha + \beta X$$

, чтобы она была несмещённой, ожидаемое значение оценки должно быть равно истинному значению параметра а. В данном случае, ожидаемое значение оценки \hat{a} равно

$$E[\hat{a}] = E[\alpha + \beta X]$$

.

Используя свойство линейности математического ожидания, мы можем записать:

$$E[\hat{a}] = E[\alpha] + E[\beta X]$$

Так как X имеет равномерное распределение на интервале

$$[3a-2, 3a+7]$$

, то E[X] равно среднему значению этого интервала. Следовательно, E[X] = (3a - 2 + 3a + 7) / 2 = 6a + 5.

Таким образом, чтобы оценка $\hat{\mathbf{a}} = \alpha + \beta \mathbf{X}$ была несмещённой, необходимо, чтобы ожидаемые значения α и $\beta \mathbf{X}$ равнялись нулю: \$\$ E[α] + E[β X] = 0

$$E[\alpha] = 0$$

 $(условиедля \alpha)$

 $E[\beta X] = 0$ (условие для βX)

 $E[\alpha] = \alpha$, \$\$ поэтому $\alpha = 0$.

$$E[\beta X] = \beta * E[X] = 0$$

, следовательно,

$$E[X] = 0$$

или

$$\beta = 0$$
.

Таким образом, чтобы оценка

$$\hat{a} = \alpha + \beta X$$

была несмещённой, параметр α должен быть равен 0, а параметр β может быть любым. \$\$

Далее спросила у него про условия несмещенности

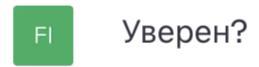
Условие несмещенной оценки состоит в том, что математическое ожидание оценки должно быть равно истинному значению оцениваемого параметра.

Формально, для оценки â параметра а считается несмещенной, если выполняется условие:

$$E[\hat{a}] = a$$

где E[â] обозначает математическое ожидание оценки â, a а представляет истинное значение параметра a.

Таким образом, для того чтобы оценка была несмещенной, математическое ожидание оценки должно совпадать с истинным значением параметра.





Далее GPT еще около 5 минут обрабатывал запрос и так и не выдал ответа

В целом рассуждения чата правильные. Наверное, стоило взять более сложную задачу

Задача 8

Укажите любой источник по теории вероятностей или статистике, который вам оказался полезен в течение года. Это может быть статья, видео, задача, всё что угодно. Объясните, с чем конкретно этот источник помог разобраться. Лучше привести в пример внешний источник, не упомянутый на вики курса, но можно и внутренний.

Очень хочется прикрепить данное всеоблемлещее видео https://www.youtube.com/watch?v=4Z5-dMRCpnQ Лучший друг по всем предметам на нашем факультете

Мне потребовались скорее базовые видео, которые объясняют еще раз в общих чертах и простыми словами термины

стьюдент - https://www.youtube.com/watch?v=1GZVbmOwl2k

p-value (со стороны фкн) - https://www.youtube.com/watch?v=vXHulmmXNCo

Сложно привести все источники, так как обычно смотрю с телефона где-то в транспорте для "внедрения в уши"