Фоменко Андрей Алексеевич, БЭК 213

In [224…

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import scipy.stats as sts
import copy
```

1) Однажды в Самарканде турист заказывал Яндекс-такси. На десятом заказе впервые приехал таксист, который уже раньше приезжал к туристу. Для упрощения предположим, что все n таксистов Самарканда всегда на работе и приезжают равновероятно.

а) [5] Постройте график функции правдоподобия как функции от общего количества такси n. Найдите оценку числа n методом максимального правдоподобия.

б) [5] Постройте график математического ожидания номера заказа, на котором происходит первый повторный приезда, как функции от общего количества такси n. Найдите оценку числа n методом моментов.

в) [15] Предположим, что настоящее n равно 100. Проведя 10000 симуляций вызовов такси до первого повторного, рассчитайте 10000 оценок методом моментов и 10000 оценок методом максимального правдоподобия. Постройте гистограммы для оценок двух методов. Оцените смещение, дисперсию и среднеквадратичную ошибку двух методов.

а)

X - с.в. номер шага, на котором мы встретили повторку

P(X=2) = 1/n

P(X=3) = (n-1)/n * 2/n - так как неповторимые таксисты могут приехать в произвольном порядке домножим на бин. коэф.

P(X=4) = (n-1)/n *(n-2)/n* 3/n

Тогда: P(X=k) = (n-1)/n *(n-2)/n* ... *(n-k+1)/n* k/n

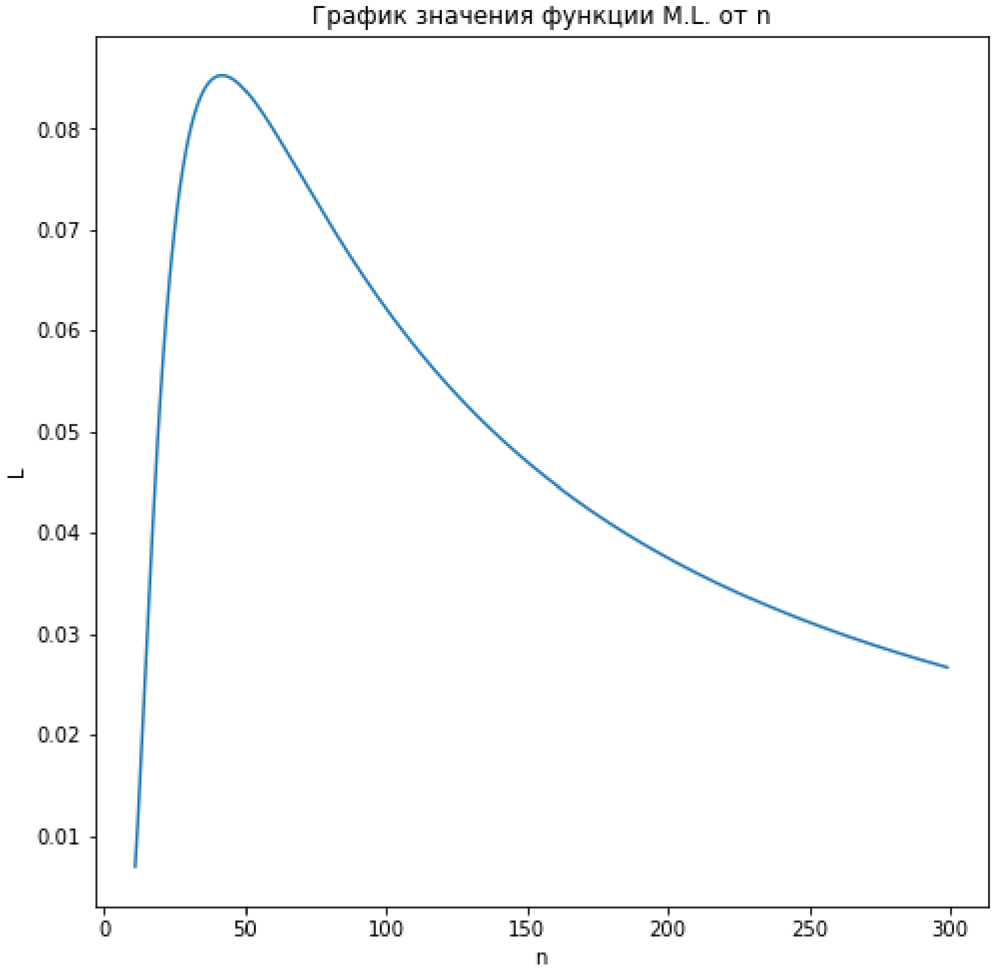
Пусть: (n-1)/n*(n-2)/n*...*(n-k-1)/n = N

In [2]:

```
# Напишем функцию для поиска вероятности, где n - всего оригинальных водителей, а k - н
def N(n, k):
    res =  (np.ones(k)*n - np.arange(1, k+1))/n
    return np.prod(res)

def P(n, k):
    if k == 2:
        return 1/n
    else:
        ans = N(n, k-2) * (k-1)/n
        return ans
```

In [3]:

```
n_vec = np.arange(11, 300)
k = 10
n_obs =1
L_list = []
for n in n_vec:
    L_list.append(P(n, k)) # к у нас фиксировано, потому что одно наблюдение L(n, k

plt.figure(figsize = (8,8))
plt.plot(n_vec, L_list)
plt.title('График значения функции M.L. от n')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('L')
plt.show()
```



Чтоб найти оценку n надо максимизировать функцию L по n. Производную брать не хочется, тем более, по графику видно что максимум где-то возле 50, решим перебором

In [4]:

```
# максимизируем функцию, спускаясь по координам n
ans = []
for n in range(30, 80):
    L = P(n, 10)
    el = [n, L]
    ans.append(el)
ans = sorted(ans, key = lambda x : x[1],reverse=True)
ans[0]
```

Out[4]:

```
[42, 0.0852593728562763]
```

Значит, ML оценка для n при к = 10 это 42

б)

In [5]:

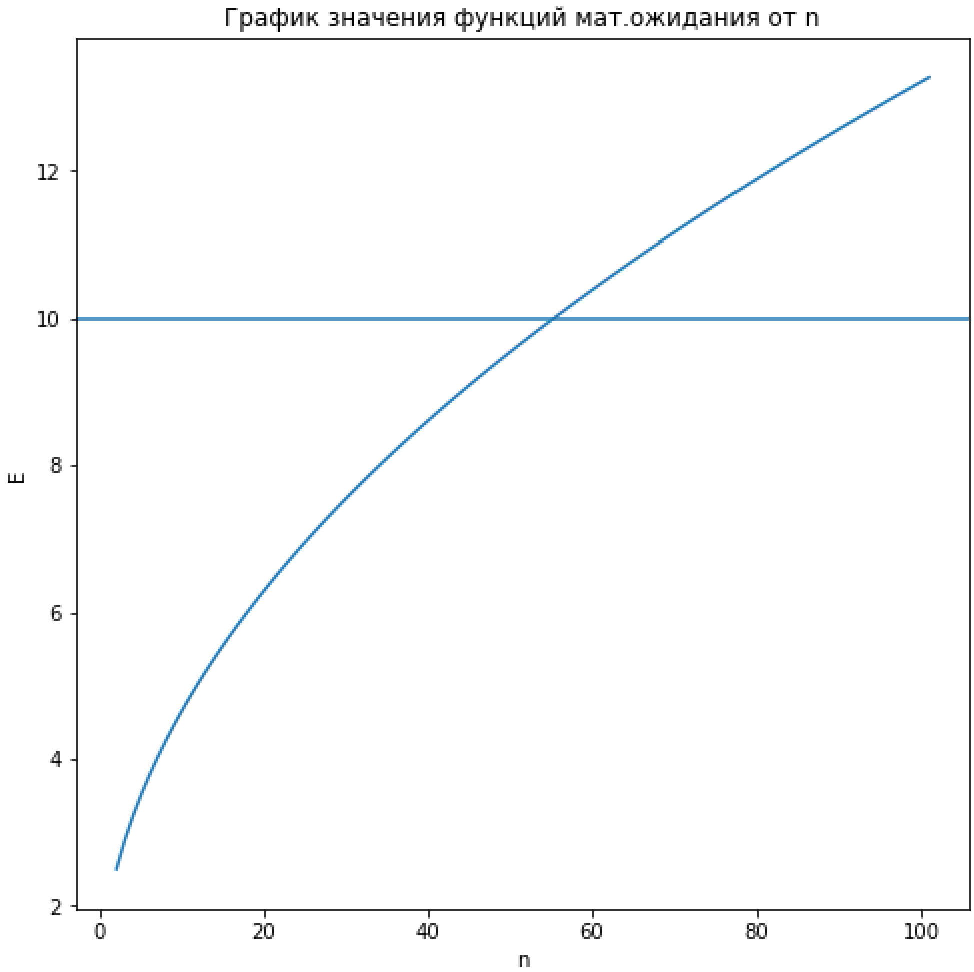
```
# запишем матожидание как функцию от n
def E(n):
    vec_k = np.arange(2, n+2) # пусть к меньше или равно n
    P_v = np.vectorize(P)
    Vec_p = P_v(n, vec_k)
    return vec_k@Vec_p
```

In [10]:

```
n_all = np.arange(2, 102)
E_list = []
otv = []
for n in n_all:
    E_list.append(E(n))
    f = [E(n), n]
    otv.append(f)
plt.figure(figsize = (8,8))
plt.plot(n_all, E_list);
plt.axhline(y= 10);
plt.title('График значения функций мат.ожидания от n')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('E')
```

Out[10]:

```
Text(0, 0.5, 'E')
```



Как видно ближе всего к 10 оказалась n = 55

в)

In [11]:

```
# генерим наблюдения
np.random.seed(3)
n = 100
taxis = np.arange(1, n+1)
otv = []
for i in range(1, 10001):
    one = np.random.choice(taxis)
    biv = []
    while np.isin(one, biv) == False:
        biv.append(one)
        one = np.random.choice(taxis)

    k = len(biv)+1
    otv.append(k)
```

In [12]:

```
# напишем функцию которая будет максимизировать нашу функцию правдоподобия сдвигая коорд
def L_max(k):
    n = k-1
    L_f1 = P(n, k)
    L_f2 = P(n, k)
    while L_f1 <= L_f2:
        L_f1 = P(n, k)
        n += 1
        L_f2 = P(n, k)
    return n-1
```

In [13]:

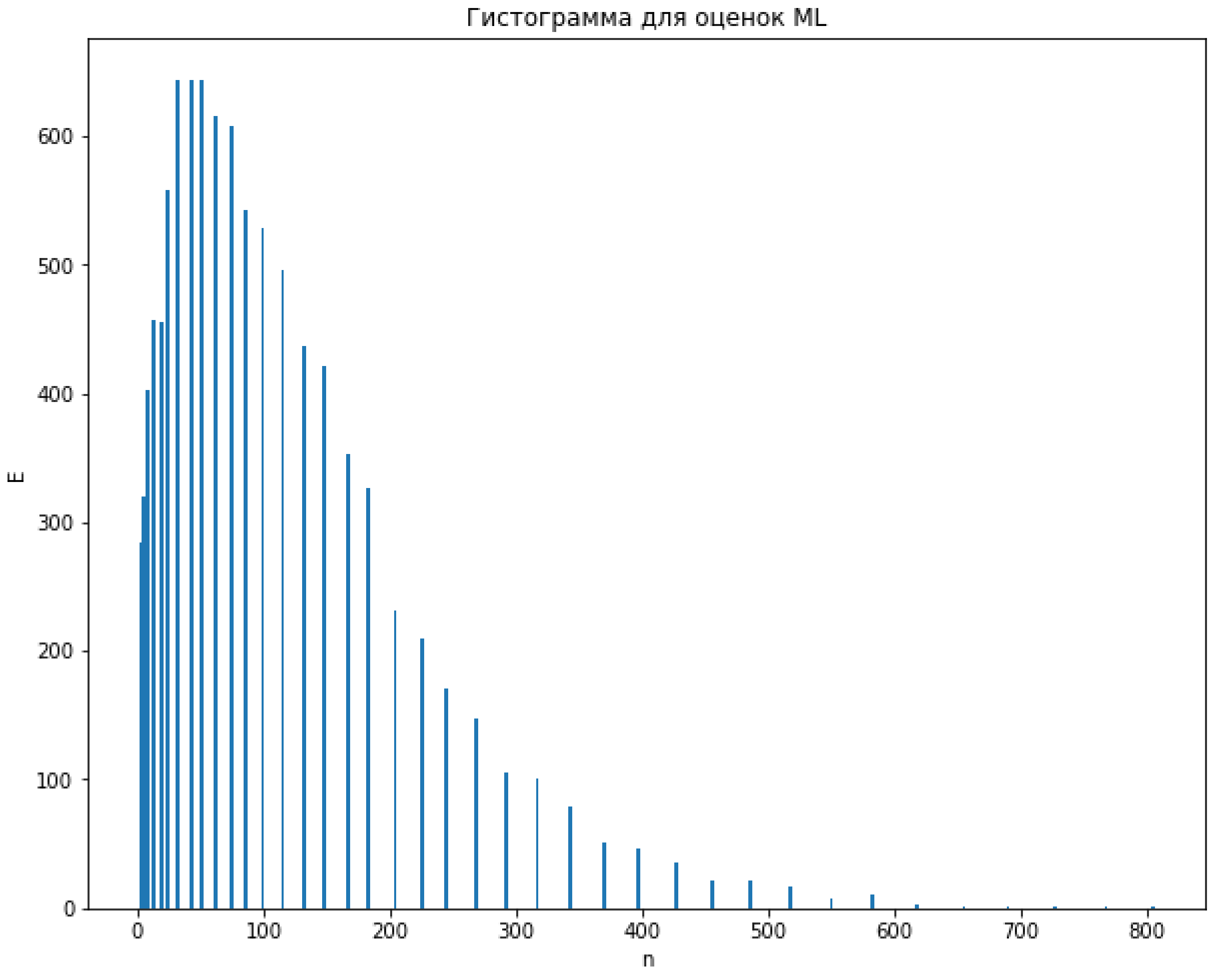
```
# применяем максимизатор к нашим сгенерированным данным
L_v = np.vectorize(L_max)
all_L = L_v(otv)
```

In [17]:

```
plt.figure(figsize = (10,8))
plt.hist(all_L, bins = 300);
plt.title('Гистограмма для оценок ML')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('E')
```

Out[17]:

```
Text(0, 0.5, 'E')
```

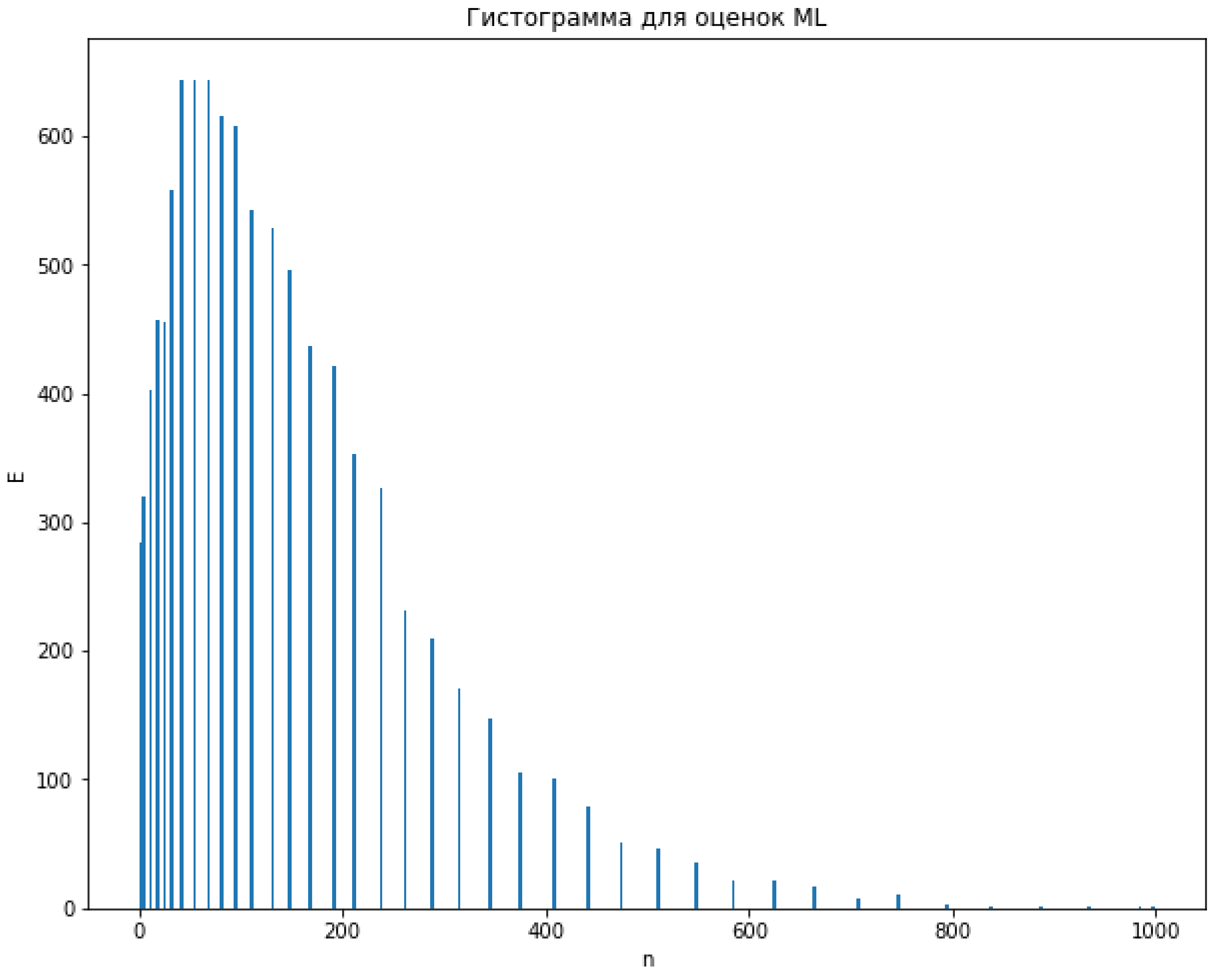


In [18]:

```
# делаем гистограмму для метода моментов
otv =np.array(otv)
nn = np.arange(1, 1001)
E_vect = np.vectorize(E)
E_res = E_vect(nn)
E_res2 = E_res[:, np.newaxis]
DN_res2 = otv[np.newaxis, :]
E_result = np.absolute(E_res2 - DN_res2)
all_M = np.argmin(E_result, axis = 0)

plt.figure(figsize = (10,8))
plt.hist(all_M, bins = 300);
plt.title('Гистограмма для оценок ML')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('E')
```

Out[18]:

```
Text(0, 0.5, 'E')
```



Найдем смещение, дисперсию и среднеквадратичную ошибку

In [15]:
```
s_L = abs(100 - np.mean(all_L))
s_M = abs(100 - np.mean(all_M))
var_L = np.var(all_L)
var_M = np.var(all_M)
sig_L = np.std(all_L)
sig_M = np.std(all_M)
```

In [16]:
```
result = pd.DataFrame({'Оценка': ('ML', 'MM'),'Смещение': (s_L, s_M), 'Дисперсия
result.set_index('Оценка')
```

Out[16]:

Оценка	Смещение	Дисперсия	Среднеквадратичная_ошибка
ML	4.6729	8556.735906	92.502626
MM	23.3565	14170.663208	119.040595

Вывод: как видно по табличке, ML оценка во всем оказалась лучше MM оценки, оно и не удивительно, ведь функция вероятности хорошая и отлично максимизируется

2) Однажды в Самарканде турист заказывал Яндекс-такси. На десятом заказе он обнаружил, что у таксистов было 6 разных имён. Для упрощения предположим, что все n имён среди таксистов встречаются равновероятно и независимо от поездки к поездке.

а) [5] Постройте график функции правдоподобия как функции от общего количества имён n. Найдите оценку числа n методом максимального правдоподобия.

б) [5] Постройте график математического ожидания числа разных имён у 10 таксистов, как функции от общего количества имён n. Найдите оценку числа n методом моментов.

в) [15] Предположим, что настоящее n равно 20. Проведя 10000 симуляций десяти вызовов такси, рассчитайте 10000 оценок методом моментов и 10000 оценок методом максимально- го правдоподобия. Постройте гистограммы для оценок двух методов. Оцените смещение, дисперсию и среднеквадратичную ошибку двух методов.

Update 2023-06-07: если по выборке в симуляциях оценка метода моментов или метода максимального правдоподобия стремится к бесконечности, то можно ограничить её свер- ху большим числом, например, 100.

а)

Пусть X - кол-во уникальных имен в выборке из 10 приеховших таксистов, n - кол-во всех имен, а N - кол-во вызовов. Предположим, что n>1 и X = {1, 2...N},

Тогда функцию вероятности можно представить как:

$$P(X=k) = (n-1)/n*(n-2)/n*...*(n-k+1)/n*T$$

где T - сумма произведений всех комбинаций по N-k чисел от 1 до к

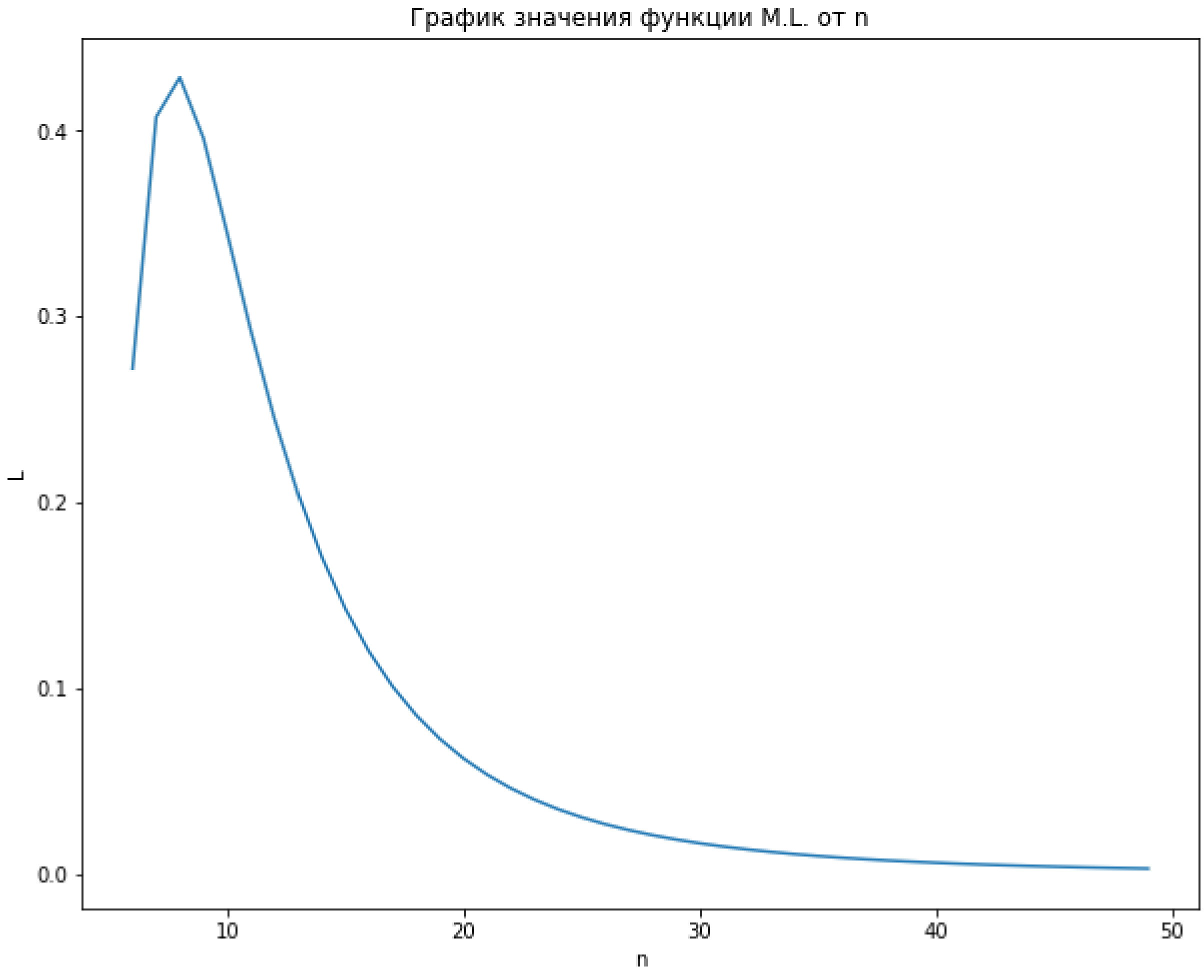
In [38]:

```
# Напишем функцию для вероятности
from itertools import combinations_with_replacement as cwm
def T(k, n, N): # функция для произведений перестановок
    comb = cwm(np.arange(1, k+1), N - k)
    cnt = 0
    for i in comb:
        mult = 1
        for j in range(N - k):
            mult *= i[j]
        cnt += mult
    return cnt

def P_2(k, n, N):
    p=1
    for i in range(1, k):
        p*= ((n-i)/n)
    p *= (T(k, n, N)/(n**(N - k)))
    return p
```

In [131…

```
# Нарисуем график ML
n_vec = np.arange(6, 50)
k = 6
L_list = []
for n in n_vec:
    L_list.append(P_2(k, n, 10)) # к у нас фиксировано, потому что одно наблюдение
plt.figure(figsize = (10,8))
plt.plot(n_vec, L_list)
plt.title('График значения функции M.L. от n')
plt.xlabel('n')
```

```
plt.ylabel('L')
plt.show()
```



In [40]:
```
# максимизируем функцию правдоподобия
ans = []
for n in range(6, 50):
    L = P_2(k, n, 10)
    el = [n, L]
    ans.append(el)
ans = sorted(ans, key = lambda x : x[1],reverse=True)
ans[0]
```

Out[40]:
```
[8, 0.428587496280670 17]
```

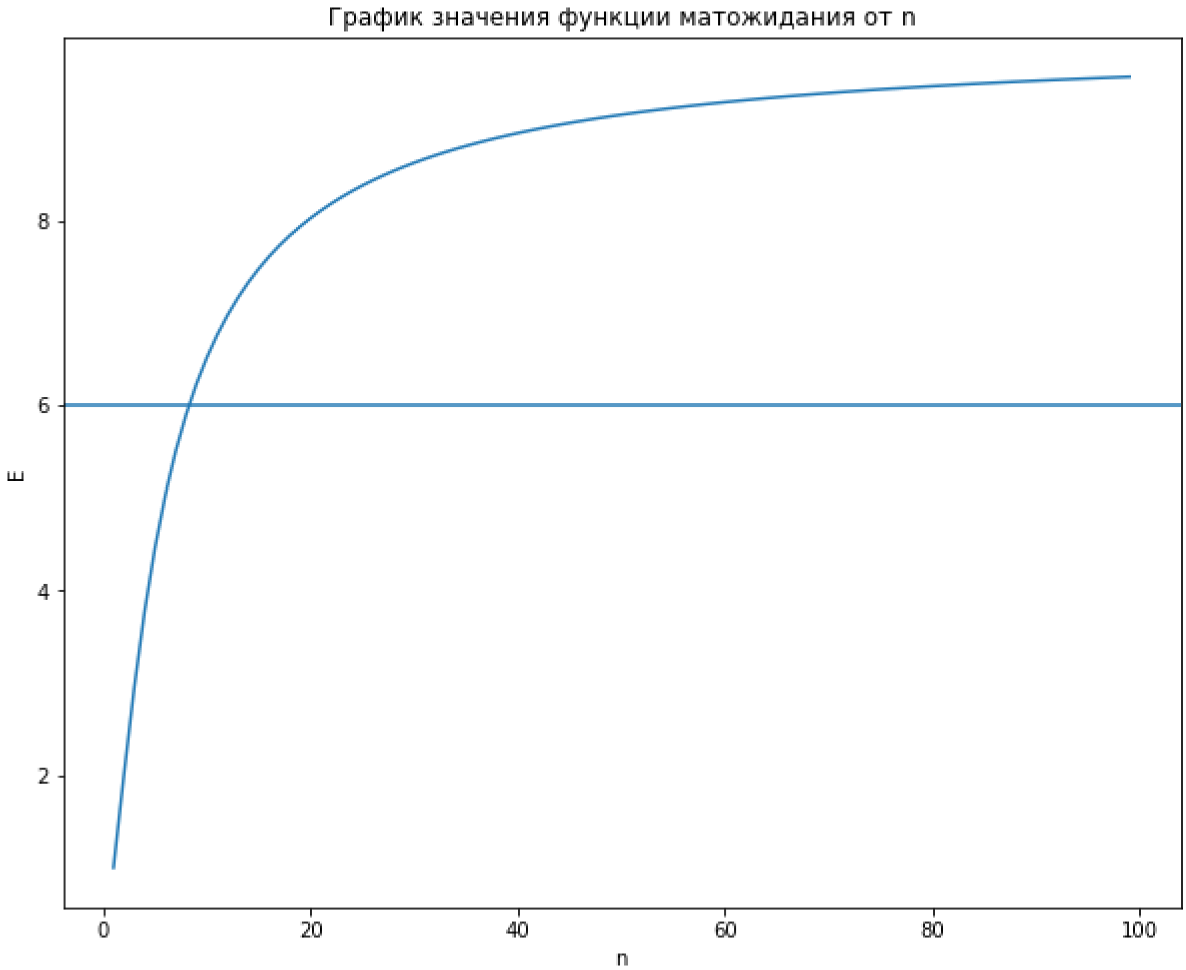
Значит, ML оценка это 8

б)

In [44]:
```
# функция для поиска матожидания
def E_2(n, N):
    vec_k = np.arange(1, N+1)
    P_v = np.vectorize(P_2)
    Vec_p = P_v(vec_k, n, N)
    return vec_k@Vec_p
```

In [48]:
```
# рисуем график матожидания
n_all = np.arange(1, 100)
E_list = []
otv = []
```

```
for n in n_all:
    E_list.append(E_2(n, 10))
    f = [E_2(n, 10), n]
    otv.append(f)

plt.figure(figsize = (10,8))
plt.plot(n_all, E_list);

plt.title('График значения функции матожидания от n')
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('E')
plt.axhline(y= 6);
plt.show()
```



In [251…

```
n_all[abs(np.array(E_list) - 6) == min(abs(np.array(E_list) - 6))]
```

Out[251…

```
array([8])
```

Значит оценка методом моментов тоже 8

в)

In [51]:

```
# проводим эксперименты
np.random.seed(3)
n = 20
names = np.arange(1, n+1)
otv = []
for i in range(1, 10001):
    one = np.random.choice(names)
```

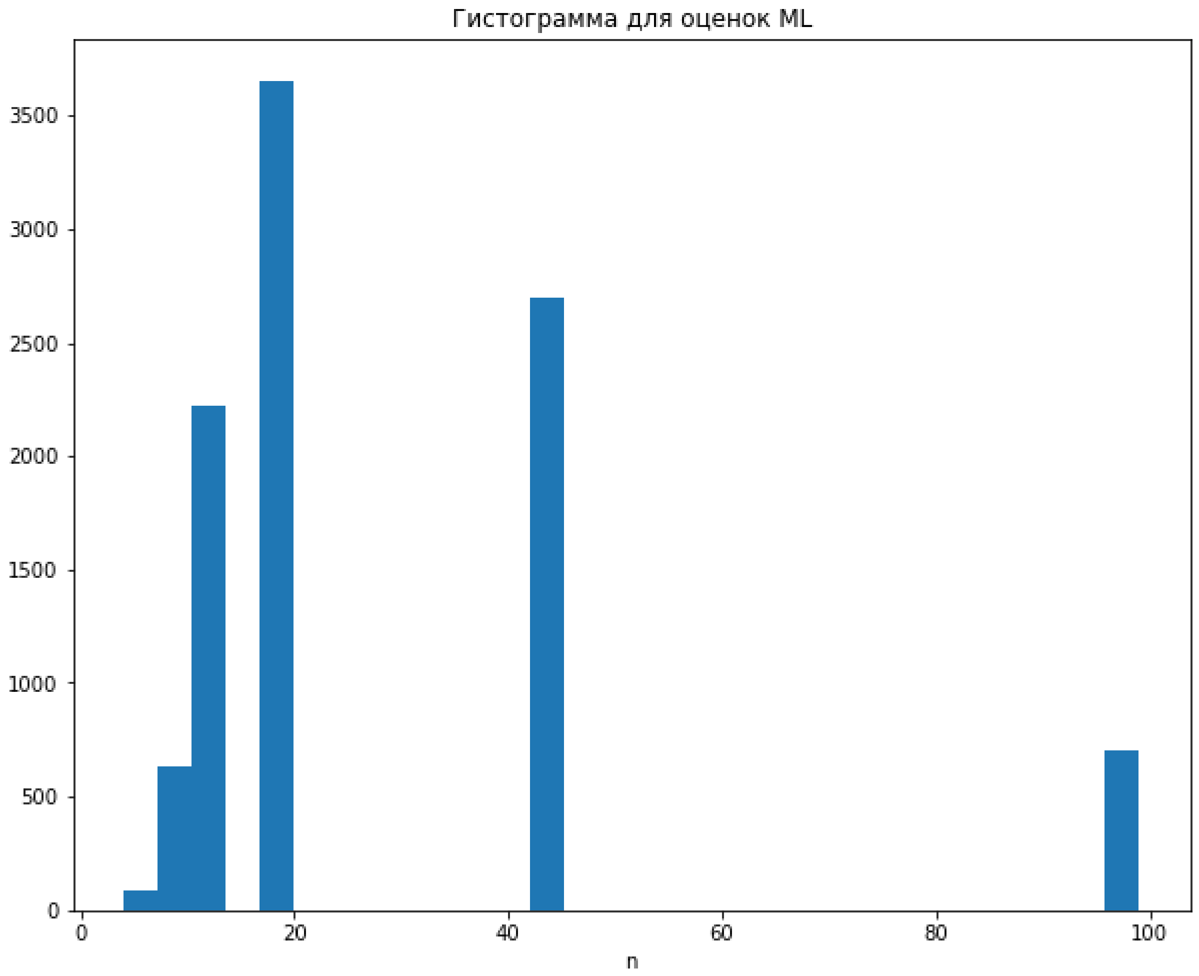
```
    biv = []
    M = 10
    for i in range(M):
        biv.append(one)
        one = np.random.choice(names)
    un = len(set(biv))
    otv.append(un)
```

In [52]:

```
# функция для поиска максимума, ставим границу в 100, так как при к=10 у нас нет экстр
def L_max2(k):
    n = 1
    L_f1 = P_2(k, n, 10)
    L_f2 = P_2(k, n, 10)
    while L_f1 <= L_f2 and n <100:
        L_f1 = P_2(k, n, 10)
        n += 1
        L_f2 = P_2(k, n, 10)
    return n-1
```

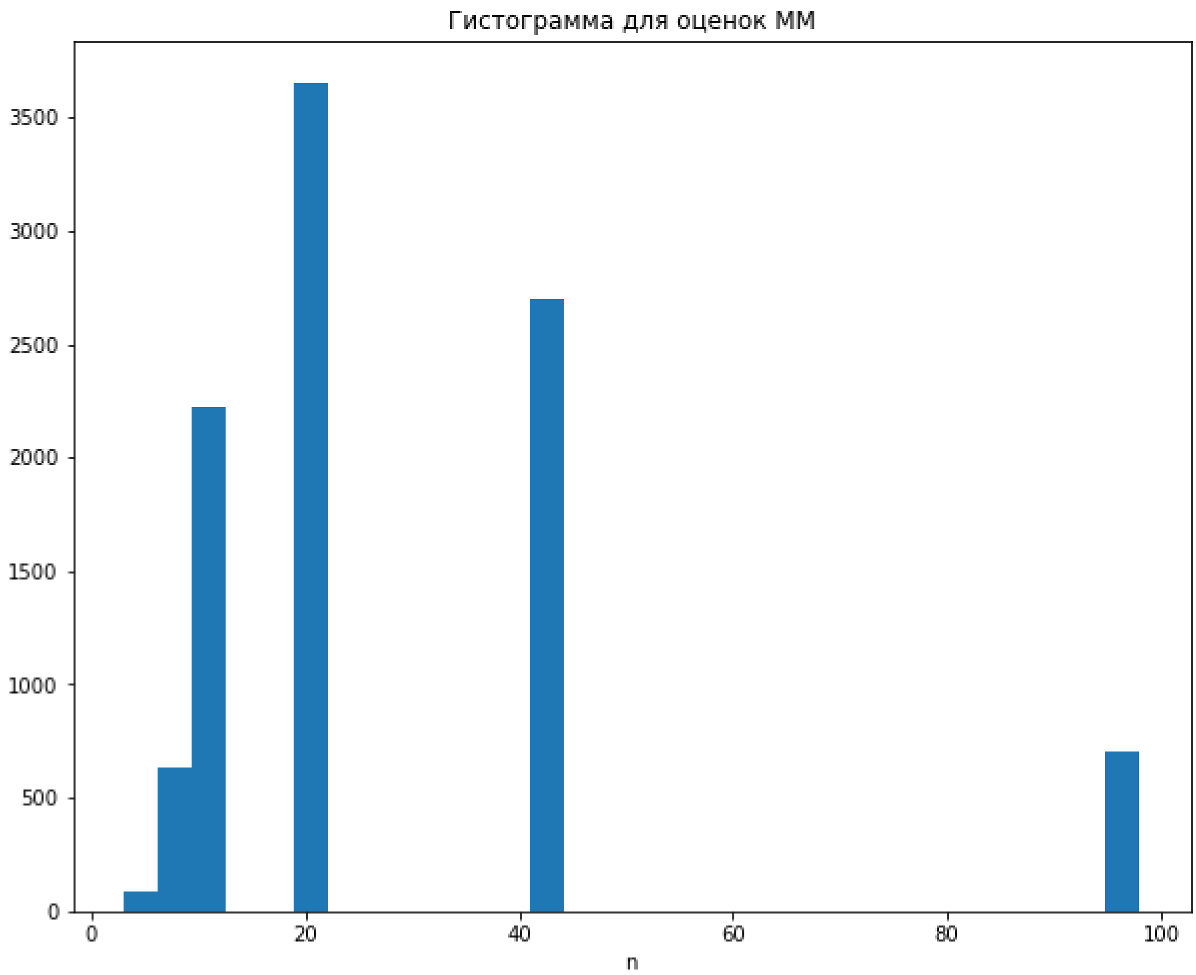
In [55]:

```
# строим гистограмму для ML оценки
L_v = np.vectorize(L_max2)
all_L = L_v(otv)

plt.figure(figsize = (10,8))
plt.hist(all_L, bins = 30);
plt.title('Гистограмма для оценок ML')
plt.xlabel('n')
plt.show()
```



In [56]:

```
# делаем гистограмму для ММ оценки
otv =np.array(otv)
nn = np.arange(1, 100)
E_vect = np.vectorize(E_2)
E_res = E_vect(nn, 10)
E_res2 = E_res[:, np.newaxis]
DN_res2 = otv[np.newaxis, :]
E_result = np.absolute(E_res2 - DN_res2)
all_M = np.argmin(E_result, axis = 0)

plt.figure(figsize = (10,8))
plt.hist(all_M, bins = 30);
plt.title('Гистограмма для оценок ММ')
plt.xlabel('n')
plt.show()
```



In [57]:

```
s_L = abs(20 - np.mean(all_L))
s_M = abs(20 - np.mean(all_M))
var_L = np.var(all_L)
var_M = np.var(all_M)
sig_L = np.std(all_L)
sig_M = np.std(all_M)
```

In [58]:

```
result = pd.DataFrame({'Оценка': ('ML', 'MM'),'Смещение': (s_L, s_M), 'Дисперсия
result.set_index('Оценка')
```

Out[58]:

Оценка	Смещение	Дисперсия	Среднеквадратичная_ошибка
ML	8.4312	522.102067	22.849553
MM	7.8048	515.062297	22.694984

Вывод: в этот раз ML оценка оказалась даже немного хуже MM оценки, возможно это из-за того что мы уперлись в нерегулярный случай, когда область определения нашей функции зависит от параметра

3.Иноагент Иннокентий по 20 наблюдениям строит 95%-й доверительный интервал для математического ожидания несколькими способами: классический асимптотический нормальный интервал, с помощью наивного бутстрэпа, с помощью бутстрэпа t-статистики.

а) [15]Для каждого способа с помощью 10000 симуляций оцените вероятность того,что номинально 95%-й доверительный интервал фактически накрывает математическое ожидание, если наблюдения распределены экспоненциально с интенсивностью 1.

б) [5]Пересчитайте вероятности накрытия, если наблюдения имеют распределение Стьюдента с тремя степенями свободы.

в) [5] Какой способ оказался лучше?

а)

In [59]:

```
# генерим выборку
np.random.seed(323)
exp_all = np.random.exponential(1, size=(10**4, 20))
```

In [60]:

```
# пишем ручками z-тест
import scipy.stats as sps
def z_test(obs, h0_mu, alpha, n):
    dist = sps.norm(loc=0, scale=1)
    mu = np.mean(obs)
    std = np.std(obs)/np.sqrt(n)
    q_r = dist.ppf(1 - alpha/2)
    q_l = dist.ppf(alpha/2)
    left_bord = mu + q_l*std
    right_bord = mu + q_r*std
    ci = np.logical_and(left_bord <= h0_mu, right_bord >= h0_mu)
    return ci
```

In [63]:

```
h0 =1
alpha = 0.05
n = 20
otv = np.apply_along_axis(z_test, 1, exp_all, h0, alpha, n)
z_test_exp_res = np.mean(otv)
z_test_exp_res
```

Out[63]:

```
0.9005
```

Как видно, мы накрываем реальное матожидание примерно в 90% случаев

In [64]:
```
# напишем наивный бутстрэп, который будет возвращать принадлежность истинного значения
def naive_boot(obs, h0_mu, alpha, n):
    pr = alpha*100
    indices = np.random.choice(np.arange(n), size=(10**4, n))
    means = np.mean(obs[indices], axis=1)
    q_l = np.percentile(means, pr/2)
    q_r = np.percentile(means, 100- pr/2)
    ci = np.mean(np.logical_and(q_l <= h0_mu, q_r >= h0_mu))
    return ci
```

In [65]:
```
h0 =1
alpha = 0.05
n = 20
otv = np.apply_along_axis(naive_boot, 1, exp_all, h0, alpha, n)
naive_boot_exp_res = np.mean(otv)
naive_boot_exp_res
```

Out[65]:
```
0.9035
```

Получается, что мы опять накрываем реальное значение примерно с вероятностью 0.9

In [160…
```
# теперь напишем t-бутстрап
def t_stat_boot(obs, h0_mu, alpha, n):
    pr = alpha*100
    indices = np.random.choice(np.arange(n), size=(10**4, n))
    means = np.mean(obs[indices], axis=1)
    mean_obs = np.mean(obs)
    se = (np.std(obs[indices], axis=1, ddof = 1))/np.sqrt(n)
    t_stat = (means - mean_obs)/se
    q_l = np.percentile(t_stat, pr/2)
    q_r = np.percentile(t_stat, 100- pr/2)
    l_bord = mean_obs - q_r*(np.std(obs, ddof = 1))/np.sqrt(n)
    r_bord = mean_obs - q_l*(np.std(obs, ddof = 1))/np.sqrt(n)
    ci = np.mean(np.logical_and(l_bord <= h0_mu, r_bord >= h0_mu))
    return ci
```

In [161…
```
h0 =1
alpha = 0.05
n = 20
otv = np.apply_along_axis(t_stat_boot, 1, exp_all, h0, alpha, n)
t_boot_exp_res = np.mean(otv)
t_boot_exp_res
```

Out[161…
```
0.9462
```

В этот раз вероятность накрытия уже побольше, целых 0.946

б)

In [68]:
```
# возьмем теперь выборку из t-распределения
np.random.seed(323)
t_all = np.random.standard_t(3, size=(10**4,20))
```

In [69]:
```
# применяем z-тест
h0 = 0
alpha = 0.05
n = 20
otv = np.apply_along_axis(z_test, 1, t_all, h0, alpha, n)
z_test_t_res = np.mean(otv)
z_test_t_res
```
Out[69]:
```
0.939
```

В этот раз z-тест справился лучше, выдал 0.939 вероятность накрытия

In [70]:
```
# применяем наивный бут
h0 = 0
alpha = 0.05
n = 20
otv = np.apply_along_axis(naive_boot, 1, t_all, h0, alpha, n)
naive_boot_t_res = np.mean(otv)
naive_boot_t_res
```
Out[70]:
```
0.9224
```

Что-то ему поплохело и он выдал всего 0.9224

In [71]:
```
# используем t-бутстрап
h0 = 0
alpha = 0.05
n = 20
otv = np.apply_along_axis(t_stat_boot, 1, t_all, h0, alpha, n)
t_boot_t_res = np.mean(otv)
t_boot_t_res
```
Out[71]:
```
0.9289
```

И он тоже справился хуже z-теста, показав всего 0.9289

в)

In [72]:
```
# подготовим табличку с итоговыми результатами
result = pd.DataFrame({'Распределение': ('Exp(1)', 't(3)'),
                       'Z-test': (z_test_exp_res, z_test_t_res),
                       'naive_boot': (naive_boot_exp_res, naive_boot_t_res),
                       't-boot': (t_boot_exp_res, t_boot_t_res)})
result.set_index('Распределение')
```
Out[72]:

	Z-test	naive_boot	t-boot
Распределение			
Exp(1)	0.9005	0.9035	0.9458
t(3)	0.9390	0.9224	0.9289

Вывод: как видно из таблички, Z-test обгоняет бутстрэпы для t-распределения, скорее всего это связано с тем, что оно гораздо лучше апроксимируется нормальным распределением при небольшом n, однако для Exp(1) распределения бутстрэп т-статистики оказался лучшим

4) Проверьте гипотезу о том, что ожидаемые результаты экзамена по теории вероятностей тех, у кого фамилия начинается с гласной буквы и с согласной буквы, равны. В качестве альтернатив- ной гипотезы возьмите гипотезу о неравенстве.

а) [5] Используйте тест Уэлча.

б) [5] Используйте наивный бутстрэп.

в) [5] Используйте бутстрэп t-статистики.

г) [5] Используйте перестановочный тест.

а)

In [73]:
```
# Читаем данные
df = pd.read_excel('exam.xlsx')
```

In [74]:
```
# Проверяем пропуски
df.isnull().sum().sum()
```

Out[74]: 0

In [75]:
```
df
```

Out[75]:

	last name	score
0	Бабурина	10
1	Багаутдинов	16
2	Бартенева	27
3	Батмунх	16
4	Бгажноков	22
...	...	...
327	Ян	15
328	Янковская	8
329	Янышен	13
330	Яхьяева	13
331	Эшмеев	16

332 rows × 2 columns

In [76]:
```
# Проводим разбиение выборки по буквам
import re
glas, sogl = r'^[АЕЁИОУЫЭЮЯ]', r'^[БВГДЖЗЙКЛМНПРСТФХЦЧШЩ]'
df_g, df_s = df[df['last name'].str.contains(glas, flags = re.ASCII)], df[df[
```

In [77]:
```
# Используем готовый тест из сайпая
from scipy.stats import ttest_ind
welch = ttest_ind(df_g['score'], df_s['score'], equal_var=False, alternative=
welch
```

Out[77]:
```
Ttest_indResult(statistic=-0.8519661870595602, pvalue=0.3974027153843839)
```

In [78]:
```
# Пишем тест Уэлча ручками
from scipy.stats import t
def welch_test(obs_x, obs_y, alpha):
    mean_diff_obs = np.mean(obs_x)- np.mean(obs_y)
    x_mean, y_mean = np.mean(obs_x), np.mean(obs_y)
    n_x, n_y = len(obs_x), len(obs_y)
    se_x, se_y = np.var(obs_x)/n_x, np.var(obs_y)/n_y
    t_obs =  (x_mean - y_mean)/np.sqrt(se_x + se_y)

    d = (se_x + se_y)**2 /( (np.var(obs_x)**2 / (n_x**2*(n_x-1))) + (np.var(o

    l_bord = x_mean - y_mean+t.ppf(alpha/2, d, loc=0, scale=1)*np.sqrt(se_x +
    u_bord = x_mean - y_mean+t.ppf(1-alpha/2, d, loc=0, scale=1)*np.sqrt(se_x

    ci = np.logical_and(l_bord <= 0, u_bord >= 0)

    p_value = 2* (min(t.cdf(t_obs, d), 1 - t.cdf(t_obs, d)))

    return ci, p_value
```

In [79]:
```
welch = welch_test(df_g['score'], df_s['score'], 0.05)
welch
```

Out[79]:
```
(True, 0.39309642135827627)
```

Судя и по пакетному тесту, и по рукописному тесту, гипотеза не отвергается для alpha = 0.05. Тест выдал p-value 0.3974027153843839, что очень много

б)

In [214…
```
# пишем новый наивный бутстрап
np.random.seed(321)
def naive_boot_2(obs_x, obs_y, alpha):
    mean_diff_obs = np.mean(obs_x) - np.mean(obs_y)
    pr = alpha*100
    n_x, n_y = len(obs_x), len(obs_y)
    indices_x,  indices_y = np.random.choice(np.arange(n_x), size=(10**4, n_x
    means_x, means_y = np.mean(obs_x[indices_x], axis=1), np.mean(obs_y[indic

    ras = means_x - means_y - mean_diff_obs
    q_l, q_r = np.percentile(ras, pr/2), np.percentile(ras, 100- pr/2)
    ci = np.mean(np.logical_and(q_l <= 0, q_r >= 0))
    p_value = 2*(np.min([np.mean((mean_diff_obs < ras)), 1- np.mean(mean_diff
    return ci, p_value
```

In [215…
```
naive_boot_2(np.array(df_g['score']), np.array(df_s['score']), 0.05)
```

Out[215…
```
(1.0, 0.3832)
```

Как видно, все хорошо, и гипотеза не отвергается, а p-value 0.3832 получается

в)

In [222…

```
# пишем бутстрап t-статичтики, который вернет нам индикатор принадлежности к доверите
np.random.seed(326)
def t_stat_boot_2(obs_x, obs_y, alpha):
    pr = alpha*100

    mean_obs = obs_x.mean() - obs_y.mean()
    se_obs = np.sqrt((obs_x.var(ddof=1)/len(obs_x)) + (obs_y.var(ddof=1)/len(
    stat_obs = (mean_obs - 0)/se_obs

    n_x, n_y = len(obs_x), len(obs_y)

    indices_x,  indices_y = np.random.choice(np.arange(n_x), size=(10**4, n_x
    means_x, means_y = np.mean(obs_x[indices_x], axis=1), np.mean(obs_y[indic
    mboot_mean = means_x - means_y- mean_obs
    se_boot = np.sqrt((np.var(means_x, ddof=1)) /(n_x) + np.var(means_y, ddof
    boots_all = (mboot_mean - mean_obs) / se_boot

    q_l, q_r = np.percentile(boots_all, pr/2), np.percentile(boots_all, 100- 
    l_bord, r_bord= mean_obs - q_r*se_obs, mean_obs - q_l*se_obs

    ci = np.mean(np.logical_and(l_bord <= 0, r_bord >= 0))
    p_value = 2* min((1 - (boots_all < stat_obs)).sum()/len(boots_all), (boot
    return ci, p_value
```

In [223…

```
t_stat_boot_2(np.array(df_g['score']), np.array(df_s['score']), 0.05)
```

Out[223…

```
(1.0, 0.338)
```

Гипотеза не отвергается и все хорошо

г)

In [112…

```
# воспользуемся готовой реализацией перестановочного теста
from mlxtend.evaluate import permutation_test
p_value = permutation_test(df_g['score'], df_s['score'],
                           method='approximate',
                           num_rounds=10000,
                           seed=322)
print(p_value)
```

```
0.37606239376062395
```

Опять же, гипотеза не отвергается

Вывод: все тесты показали, что нулевая гипотеза об одинаковой успеваимости двух групп учеников не отвергается

5. Составьте таблицу сопряжённости, поделив студентов писавших экзамен на четыре группы по двум признакам: набрал ли больше медианы или нет, на согласную или гласную букву начинается фамилия.

а) [5]Постройте 95% асимптотический интервал для отношения шансов хорошо написать экзамен («несогласных» к «согласным»). Проверьте гипотезу о том, что отношение шансов равно 1 и укажите Р-значение.

б) [5] Постройте 95% асимптотический интервал для отношения вероятностей хорошо напи- сать экзамен. Проверьте гипотезу о том, что отношение вероятностей равно 1 и укажите Р-значение.

в) [5] Постройте 95% интервал для отношения шансов хорошо написать экзамен с помощью наивного бутстрэпа. Проверьте гипотезу о том, что отношение шансов равно 1 и укажите Р-значение.

а)

In [113…

```
# разделяем все на группы
med = np.median(df['score'])
sogl_and_med, sogl_and_nemed = df_s.iloc[np.where(df_s['score'] >= med)], df_
glas_and_med, glas_and_nemed = df_g.iloc[np.where(df_g['score'] >= med)], df_
```

In [114…

```
# делаем таблицу сопряженности
table = pd.DataFrame({'Медиана': ('>=17.5', '<=17.5', 'Сумма по г/с'),
                      'Гласные': (len(glas_and_med), len(glas_and_nemed), len
                      'Согласные': (len(sogl_and_med), len(sogl_and_nemed), le
                      'Сумма по med': (len(glas_and_med)+len(sogl_and_med), l
table = table.set_index('Медиана')
table
```

Out[114…

Медиана	Гласные	Согласные	Сумма по med
>=17.5	21	145	166
<=17.5	28	138	166
Сумма по г/с	49	283	332

In [116…

```
# строим асимптотический доверительный интервал для шансов
ds = sts.norm(loc = 0, scale = 1)
alpha = 0.05
odds_ras = np.log(table['Гласные'][0]/table['Гласные'][1]) - np.log(table['Согла
se = np.sqrt(1/table['Согласные'][0]+1/table['Согласные'][1]+1/table['Гласные'][0
obs= (odds_ras)/se
dist = sps.norm(loc=0, scale=1)
ci = np.exp([odds_ras - dist.ppf(1-alpha/2)*se, odds_ras + dist.ppf(1-alpha/
p_value = 2*min([ds.cdf(obs), 1-ds.cdf(obs)])
```

In [117…

```
print(p_value, ci)
```

```
0.280180274566451 [0.3870946  1.31621728]
```

Мы получили доверительный интервал: [0.3870946, 1.31621728], и p_value: 0.280180274566451, а значит, H0 не отвергается

б)

In [122…

```
# делаем то же самое но теперь для вероятности
ver_ras = np.log(table['Гласные'][0]/table['Гласные'][2]) - np.log(table['Согласн
ver_se = np.sqrt(1/table['Согласные'][0]-1/table['Согласные'][2]+1/table['Гласные'
obs= (ver_ras)/ver_se
dist = sps.norm(loc=0, scale=1)
ci = np.exp([ver_ras - dist.ppf(1-alpha/2)*ver_se, ver_ras +  dist.ppf(1-alph
p_value =  2*min([ds.cdf(obs), 1-ds.cdf(obs)])
```

In [123…

```
print(p_value, ci)
```

```
0.3070947928050546 [0.59375296 1.1783587 ]
```

В этот раз p-value =0.3070947928050546, а доверительный интервал: [0.59375296, 1.1783587], но H0 по прежнему не отвергается

в)

In [125…

```
# а теперь напишем наивный бутстрап для шансов, а то как-то маловато бутстрапов
def boot_ci(df_g, df_s, table, n, alpha):
    all_obs, odds, alpha = np.concatenate([df_g['score'], df_s['score']]), []
    median = np.median(all_obs)
    med, nemed = table['Гласные'][0]/table['Гласные'][2], table['Согласные'][0]/t
    obs_odd = ((nemed)/(1-nemed))/((med)/(1-med))
    for i in range(n):
        rand_per_g, rand_per_s = np.random.choice(df_g['score'], size=len(df_
        glas_med, glas_nemed = sum(rand_per_g >= median), sum(rand_per_g < me
        sog_med, sog_nemed = sum(rand_per_s >= median), sum(rand_per_s < medi
        new_vec = np.array([[glas_med, glas_nemed], [sog_med, sog_nemed]])
        new_med, new_nemed = new_vec[0][0]/(new_vec[0][0] + new_vec[0][1]), n
        res = (new_nemed/(1-new_nemed))/(new_med/(1-new_med))
        odds.append(res)
    ql, qr = np.percentile(odds, alpha/2), np.percentile(odds, 100-alpha/2)
    p_value = 2*min(1 - sum((np.array(odds) < obs_odd))/len(odds), sum((np.ar
    ci = [ql, qr]
    return ci, p_value
```

In [126…

```
boot_ci(df_g, df_s, table, 10**4, 0.05)
```

Out[126…

```
([0.7660714285714287, 2.664233576642336], 0.9862)
```

В этот раз доверительный интервал: [0.7645865043125318, 2.664320044918584], p-value = 0.9822, опять же нулевая гипотеза не отвергается

Вывод: опять все тесты показали, что отношение шансов и вероятностей примерно равно 1

6. Иноагент Иннокентий Вероятностно-Статистический считает, что длина фамилии положительно влияет на результат экзамена по теории вероятностей. А именно, он предполагает, что ожидаемый результат за экзамен прямо пропорционален длине фамилии, $E(Y_i) = \beta F_i$, где Y_i — результат за экзамен по 30-балльной шкале, F_i — количество букв в фамилии.

а) [10] Оцените β методом моментов. Рассчитайте выборочную корреляцию.

б) [5] С помощью перестановочного теста найдите P -значение и формально протестируйте гипотезу о том, что корреляция равна нулю.

а)

In [127…

```
# добавим в нашу табличку новый признак - длинна имени
df['len'] = df['last name'].apply(len)
```

In [128…

```
# найдем оценку beta с помощью метода моментов, используя выборочное среднее и операцию
m1, m2 = df['score'].mean(), df['len'].mean()
beta = m1/m2
beta
```

Out[128…

```
2.0613026819923372
```

In [129…

```
# считаем выборочну корреляцию
np.corrcoef(df['score'], df['len'])[0,1]
```

Out[129…

```
0.0253280526691477
```

У нас получилось: beta = 2.06, корреляция = 0.025, что почти ноль

In [46]:

```
# функция для последнего перестановочного теста
def permut_test(df, n, alpha):
    alpha = alpha*100
    corrs = []
    for i in range(n):
        perm = np.random.choice(df['score'], size=len(df['score']), replace=F
        corr_perm = np.corrcoef(perm, df['len'])[0][1]
        corrs.append(corr_perm)
    q_l, q_r = np.percentile(corrs, alpha/2), np.percentile(corrs, 100 - alph
    p_value = min(1 - (np.array(corrs) < 0).sum()/len(corrs), (np.array(corrs
    return p_value
```

In [48]:

```
permut_test(df, 10**4, 0.05)
```

Out[48]:

```
0.9916
```

Как видно, p_value = 0.9916, а значит, H0 не будет отвергаться, выборочная корреляция действительно около нулевая

7. [10]Спомощью chatgpt решите любую задачу из нашего курса теории вероятностей и статистики. Можно брать задачи из прошлых контрольных, лекций, семинаров и даже этого домашнего задания. В качестве ответа приведите полный диалог с chatgpt.

Попросил чат решить задачку 1.9 из наших листочков:

Саша и Маша подкидывают монетку до тех пор, пока не выпадет последовательность РОО или ООР. Если игра закончится выпадением РОО, то выигрывает Саша, если ООР, то — Маша. Случайная величина X — общее количество подбрасываний, Y — количество выпавших решек.

У кого какие шансы выиграть?

https://chat.openai.com/share/41b6596c-576b-4d75-85a1-3a002d39de21

Это было не легко, но мне удалось довести этот венец развития технологий до правильного ответа

8. [5] Укажите любой источник по теории вероятностей или статистике, который вам оказался полезен в течение года. Это может быть статья, видео, задача, всё что угодно. Объясните, с чем конкретно этот источник помог разобраться. Лучше привести в пример внешний источник, не упомянутый на вики курса, но можно и внутренний.

Мне очень понравился курс ФПМИ по Основам вероятностей и теории меры, из-за большего уклона в теорию меры, помогало разобраться в некоторых теоретических аспектах https://www.youtube.com/watch?v=wDQ1IR2pf2I&list=PL4_hYwCyhAva7M5xo-yjQF-gzrvBnDamF

Так же очень понравилась книга Кельберт, Сухов: Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том I. Основные понятия теории вероятностей, там есть много интересных задачь с развернутым ответом, а так же справка по теории