In [687]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
from sklearn.metrics import mean_squared_error
from scipy import stats as sts
import pandas as pd
from scipy.stats import pearsonr
from mlxtend.evaluate import permutation_test
from functools import reduce
from math import factorial
```

Задача 1

Однажды в Самарканде турист заказывал Яндекс-такси. На десятом заказе впервые приехал таксист, который уже раньше приезжал к туристу. Для упрощения предположим, что все n таксистов Самарканда всегда на работе и приезжают равновероятно

а)

Постройте график функции правдоподобия как функции от общего количества такси n. Найдите оценку числа n методом максимального правдоподобия.

Вероятность того, что первые 9 таксистов будут различными, равна 1 *(n-1)/n* (n-2)/n ... (n-8)/n = (n-1)! / ((n-9)! * n^8). Вероятность того, что 10-ый таксист будет тем же самым, что уже был, равна 9/n, так как до него было 9 разных таксистов. Тогда функция правдоподобия будет иметь вид:

L(n) = (9 *(n-1)!) / ((n-9)!* n^9)

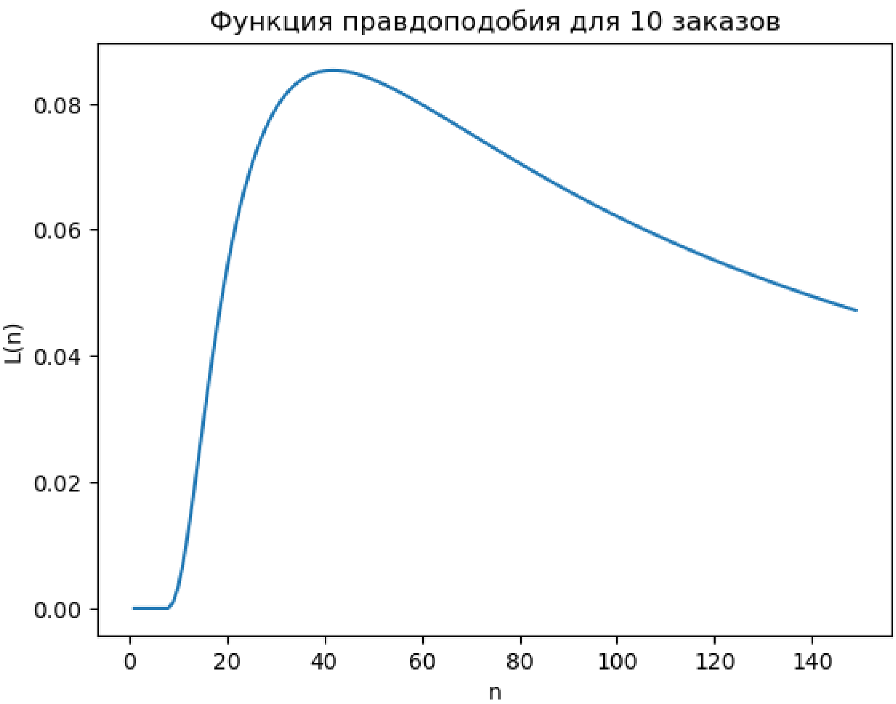
Таким образом, функция правдоподобия имеет такой вид, потому что мы оцениваем вероятность того, что выборка (в данном случае, последовательность из 10 таксистов) была получена при заданном количестве таксистов n.

In [688]:
```python
def ML_value(n, k): #k - номер первого повторного приезда
    ML_val = 1
    for i in range(2, k+1):
        ML_val *= (n-i+2)/n
    return ML_val * (k-1) / n

k = 10  #k - номер первого повторного приезда
ML =  [ML_value(i, k) for i in range(1, 150)]

plt.plot(np.arange(1, 150, dtype=int), ML) #Построим график
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('L(n)')
plt.title('Функция правдоподобия для 10 заказов')
plt.show()

print(ML.index(max(ML)) + 1) #прибавляем 1, т.к. индексы с 0
```



42
Максимум построенного ML достигается при n=42.

б)

Постройте график математического ожидания номера заказа, на котором происходит первый повторный приезда, как функции от общего количества такси n. Найдите оценку числа n методом моментов.

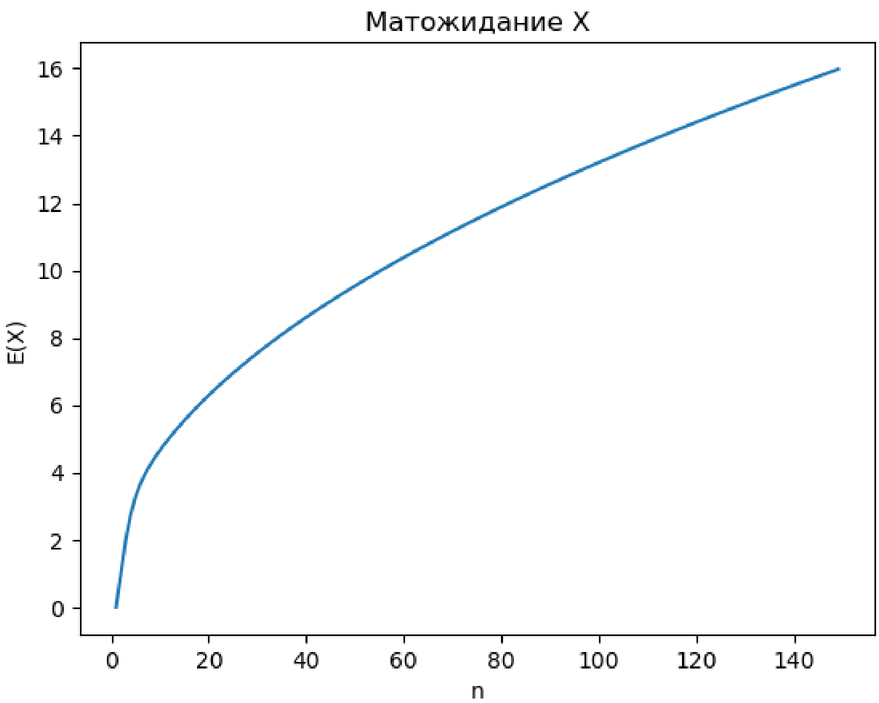
Дискретная с.в. X - номер заказа, на котором происходит превый повторный приезд. Попробуем подобрать несколько вероятностей для первых значений X. Вероятность P(X=1) = 0, т.к. первый приехавший таксист всегда уникален. P(X=2) = 1/n, т.к. повториться мог лишь первый таксист. P(X=3) = (n-1)/n *2/n - на первый и второй разы приезжали разные таксисты, а на третий снова приехал один из двух предыдущих. P(X=4) = (n-1)(n-2)/n^2* 3/n - на первый, второй и третий разы приезжали разные таксисты, а на четвертый снова приехал один из трех предыдущих. Таким образом можно составить всевозможные вероятности для любого значения X, а значит можно получить формулу E(X), равную произведению вероятностей на соответствующие им значения номеров заказа. Записываться она будет как sum(i *(n-1)!/(n-i+1)!* (i-1)/n^(i-1), i=2..inf).

In [689]:
```
def E(n):
    E = 0
    for i in range(1, n+1):
        E += ML_value(n, i) * i
    return E

k = 10  #k - номер первого повторного приезда
e =  [E(i) for i in range(1, 150)]

plt.plot(np.arange(1, 150, dtype=int), e)
plt.xlabel('n')
plt.ylabel('E(X)')
plt.title('Матожидание X')
plt.show()

for i in e:
    if (i >= 9) :
        print(e.index(i) + 2)
        break
```



46
оценка методом моментов = 46

в)

Предположим, что настоящее n равно 100. Проведя 10000 симуляций вызовов такси до первого повторного, рассчитайте 10000 оценок методом моментов и 10000 оценок методом максимального правдоподобия. Постройте гистограммы для оценок двух методов. Оцените смещение, дисперсию и среднеквадратичную ошибку двух методов.

Чтобы каждый раз не пересчитывать матожидание, заранее для возможных k определю n

In [690]:
```
E_table = []
e =  [E(i) for i in range(1, 1400)]
for i in range(50):
    for j in e:
        if (j >= i+1) :
            E_table.append(e.index(j) + 2)
            break
```

In [691]:
```
np.random.seed(100)

true_n = 100 #настоящее n
num_simulations = 10000 #проводим 10000 симуляций

simulated_data, ML, MM, mean_k = [], [], [], []
for i in range(num_simulations):
    ordered = set()
    repeated = False
```

```
        while not repeated: #генерируем случайные номера заказов до первого повторного
            order = np.random.randint(1, true_n)
            if (order in ordered): repeated = True
            else: ordered.add(order)

        k = len(ordered) #кол-во заказов до повторения в симуляции
        mean_k.append(k)
        ML_v =  [ML_value(i, k) for i in range(1, 400)]
        ML.append(ML_v.index(max(ML_v))+1) #оценка числа n методом максимального правдоподобия
        MM.append(E_table[k-1]) #оценка числа n методом моментов (по сути оценка это просто номер повторного приезда)


print("Метод моментов: смещение =", np.array(MM).mean() - true_n)
print("Метод максимального правдоподобия: смещение =", np.array(ML).mean() - true_n)
print("Метод моментов: дисперсия =", np.array(MM).var())
print("Метод максимального правдоподобия: дисперсия =", np.array(ML).var())
print("Метод моментов: среднеквадратичная ошибка =", mean_squared_error(MM, mean_k))
print("Метод максимального правдоподобия: среднеквадратичная ошибка =",  mean_squared_error(ML, mean_k))
```

```
Метод моментов: смещение = 9.577100000000002
Метод максимального правдоподобия: смещение = -17.897599999999997
Метод моментов: дисперсия = 11605.345655590001
Метод максимального правдоподобия: дисперсия = 6544.9601142400015
Метод моментов: среднеквадратичная ошибка = 19866.795
Метод максимального правдоподобия: среднеквадратичная ошибка = 10516.9965
```

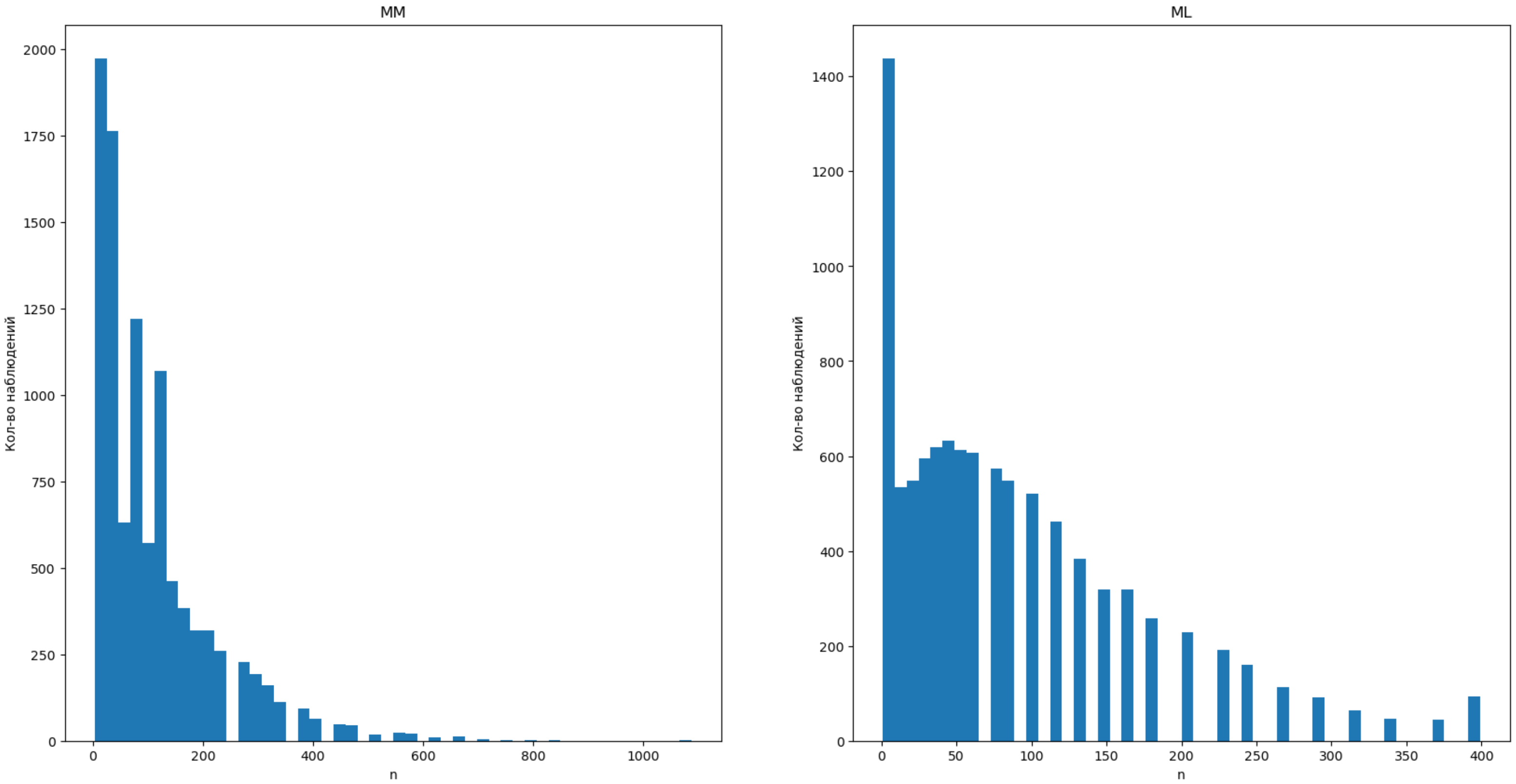
In [692]:

```
fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(20, 10))

axs[0].hist(MM, bins=50)
axs[1].hist(ML, bins=50)

axs[0].set_title('MM')
axs[1].set_title('ML')
axs[0].set_xlabel('n')
axs[1].set_xlabel('n')
axs[0].set_ylabel('Кол-во наблюдений')
axs[1].set_ylabel('Кол-во наблюдений')

plt.show()
```



Метод максимального правдоподобия немного лучше, хотя и сильнее смещен

Задача 3

Иноагент Иннокентий по 20 наблюдениям строит 95%-й доверительный интервал для математического ожидания несколькими способами: классический асимптотический нормальный интервал, с помощью наивного бутстрэпа, с помощью бутстрэпа t-статистики.

а)

Для каждого способа с помощью 10000 симуляций оцените вероятность того, что номинально 95%-й доверительный интервал фактически накрывает математическое ожидание, если наблюдения распределены экспоненциально с интенсивностью 1.

In [693]:
```
def get_bootstrap_sample(x, B_sample=1):
    np.random.seed(100)
    N = x.size
    sample = np.random.choice(x, size=(N, B_sample), replace=True)

    if B_sample == 1:
        sample = sample.T[0]
    return sample

def naive_boot(x_boot, alpha=0.05):
    left = np.quantile(x_boot, alpha/2)
    right = np.quantile(x_boot, 1-alpha/2)
    return left, right

def t_boot(x_boot, std_boot, theta_hat, sd_hat, alpha=0.05):
    d = (x_boot - theta_hat)/std_boot
    left = theta_hat - np.quantile(d, 1-alpha/2)*sd_hat
    right = theta_hat - np.quantile(d, alpha/2)*sd_hat
    return left, right
```

In [694]:
```
n_int = 10**4     #число симуляций
sample_size = 20  #размеры выборок

rv = sts.expon(scale=1)

theta_real = rv.mean()  #настоящий параметр

X = rv.rvs((n_int, sample_size), random_state=64) # генерируем n_int выборок

B = 10**4 #сколько делать бустрап-выборок

#счётчики для проверки как часто мы попали в интервал реальным параметром
classic_ci_score, naive_boot_score, t_boot_score = 0, 0, 0

for i in range(n_int):
    x = X[i] # взяли i-ую выборку

    # оценки по выборке
    theta_hat, sd_hat = np.mean(x), np.std(x)

    # бутстрап-статистики
    x_boot = get_bootstrap_sample(x, B_sample=B)
    std_boot = np.std(x_boot, axis=0)
    x_boot = np.mean(x_boot, axis=0)

    # classic ci
    left1, right1 = x.mean()-sts.norm.ppf(0.975)*np.sqrt(x.var()/sample_size), x.mean()+sts.norm.ppf(0.975)*np.sqrt(x.var()/sample_size)
    classic_ci_score += (left1 < theta_real < right1)

    # naive_boot_ci
    left2, right2 = naive_boot(x_boot)
    naive_boot_score += (left2 < theta_real < right2)

    # t-boot_ci
    left3, right3 = t_boot(x_boot, std_boot, theta_hat, sd_hat)
    t_boot_score += (left3 < theta_real < right3)


print("Вероятность накрытия истинного матожидания классическим д.и.: ", classic_ci_score/n_int)
print("Вероятность накрытия истинного матожидания д.и., построенным с помощью наивного бутстрапа: ", naive_boot_score/n_int)
print("Вероятность накрытия истинного матожидания д.и., построенным с помощью бутстрапа t-статистики: ", t_boot_score/n_int)
```

```
Вероятность накрытия истинного матожидания классическим д.и.:  0.9005
Вероятность накрытия истинного матожидания д.и., построенным с помощью наивного бутстрапа:  0.9054
Вероятность накрытия истинного матожидания д.и., построенным с помощью бутстрапа t-статистики:  0.9478
```

б)

Пересчитайте вероятности накрытия, если наблюдения имеют распределение Стьюдента с тремя степенями свободы

In [695]:
```
rv = sts.t(df=3)

theta_real = rv.mean()  #настоящий параметр

X = rv.rvs((n_int, sample_size), random_state=64) # генерируем n_int выборок

B = 10**4 #сколько делать бустрап-выборок

#счётчики для проверки как часто мы попали в интервал реальным параметром
classic_ci_score, naive_boot_score, t_boot_score = 0, 0, 0

for i in range(n_int):
    x = X[i] # взяли i-ую выборку

    # оценки по выборке
    theta_hat, sd_hat = np.mean(x), np.std(x)

    # бутстрап-статистики
    x_boot = get_bootstrap_sample(x, B_sample=B)
    std_boot = np.std(x_boot, axis=0)
    x_boot = np.mean(x_boot, axis=0)

    # classic ci
    left1, right1 = x.mean()-sts.norm.ppf(0.975)*np.sqrt(x.var()/sample_size), x.mean()+sts.norm.ppf(0.975)*np.sqrt(x.var()/sample_size)
    classic_ci_score += (left1 < theta_real < right1)

    # naive_boot_ci
    left2, right2 = naive_boot(x_boot)
    naive_boot_score += (left2 < theta_real < right2)

    # t-boot_ci
    left3, right3 = t_boot(x_boot, std_boot, theta_hat, sd_hat)
    t_boot_score += (left3 < theta_real < right3)


print("Вероятность накрытия истинного матожидания классическим д.и.: ", classic_ci_score/n_int)
print("Вероятность накрытия истинного матожидания д.и., построенным с помощью наивного бутстрапа: ", naive_boot_score/n_int)
print("Вероятность накрытия истинного матожидания д.и., построенным с помощью бутстрапа t-статистики: ", t_boot_score/n_int)
```

```
Вероятность накрытия истинного матожидания классическим д.и.:  0.9328
Вероятность накрытия истинного матожидания д.и., построенным с помощью наивного бутстрапа:  0.9153
Вероятность накрытия истинного матожидания д.и., построенным с помощью бутстрапа t-статистики:  0.9234
```

в)

По-итогу вышло, что наивный бутстрап работает хуже всех. При несимметричной выборке (экспоненциальной) у наивного бутстрапа происходит сильное смещение влево, что отражается на качестве. Это также свойственно и для обычного асимптотического д.и., у которого примерно такое же качество в пункте а), что логично, ведь по сути бутстрап просто повторил построение обычного д.и. кучу раз, что немного улучшило качество. Лучше всего себя показал бутстрап t-статистики, который вплотную приблизился к 95%. Для симметричной выборки процедуры бутстрапирования оказались не так хороши, что странно, ведь на них не должно быть смещения. Тем не менее, все три значения по уровню значимости близки к 5%, что хорошо, однако итоговым лучшим методом будет бутстрап t-статистики.

Задача 4

Проверьте гипотезу о том, что ожидаемые результаты экзамена по теории вероятностей тех, у кого фамилия начинается с гласной буквы и с согласной буквы, равны. В качестве альтернативной гипотезы возьмите гипотезу о неравенстве.

Я буду считать, что ожидаемые результаты это матожидание результатов и сравнивать, соответственно, матожидания.

In [696]:
```
df = pd.read_csv('22-23_hse_probability - main.csv')
df.head()
```

Out[696]:

	num	Last name	Name	Mail	info_1	info_2	info_3	bpip	prepod	kr1_min	...	кр3_2	кр3_3	бонус	kr3
0	306.0	Репенкова	Полина Александровна	parepenkova@edu.hse.ru	351118027	3668903494	NaN	ип	Демешев	40.0	...	NaN	NaN	NaN	
1	307.0	Ролдугина	Софья Александровна	saroldugina@edu.hse.ru	351118027	1705654528	NaN	ип	Демешев	NaN	...	NaN	NaN	NaN	
2	308.0	Сафина	Алия Линаровна	alsafina@edu.hse.ru	351118027	5096071996	NaN	ип	Демешев	30.0	...	15.0	0.0	NaN	
3	310.0	Сидоров	Иван Максимович	imsidorov@edu.hse.ru	351118027	4361493219	NaN	ип	Демешев	40.0	...	0.0	14.0	NaN	
4	311.0	Солоухин	Иван Владимирович	ivsoloukhin@edu.hse.ru	351118027	1705636488	NaN	ип	Демешев	40.0	...	NaN	NaN	NaN	

5 rows × 43 columns

In [697]:
```
#неявки и пропуски заполняю нулями
```

```
df['Экзамен'].replace(to_replace='неявка', value='0', inplace=True)
df['Экзамен'].fillna('0', inplace=True)
```

In [698]:
```
def to_float(x): #astype почему-то не работает, поэтому приходиться руками менять тип
    if (x[0] == '0'): return 0
    if (x[1] == '0'): return 10
    return int(x[0])
```

In [699]:
```
df['Экзамен'] = df['Экзамен'].apply(lambda x: to_float(x))
```

In [700]:
```
consonants = ['Б', 'В', 'Г', 'Д', 'Ж', 'З', 'Й', 'К', 'Л', 'М', 'Н', 'П', 'Р', 'С', 'Т', 'Ф', 'Х', 'Ц', 'Ч', 'Ш', 'Щ']
x, y = [], [] #x - на согласную, y - на гласную
for i in range(df['Last name'].size):
    if (df.iloc[i]['Last name'][0] in consonants): x.append(df.iloc[i]['Экзамен'])
    else: y.append(df.iloc[i]['Экзамен'])
```

а)

Используйте тест Уэлча.

In [701]:
```
print(sts.ttest_ind(x, y, equal_var = False))
```

Ttest_indResult(statistic=1.2042861273675571, pvalue=0.2329696967162744)
Поскольку p-value больше 0,05, мы не имеем оснований отклонить нулевую гипотезу теста и сделать вывод, что существует статистически значимая разница в средних баллах по экзаменам между двумя группами.

б)

Используйте наивный бутстрэп

In [702]:
```
x, y = np.array(x), np.array(y)

x_boot = get_bootstrap_sample(x, B_sample=B)
x_boot = np.mean(x_boot, axis=0)

y_boot = get_bootstrap_sample(y, B_sample=B)
y_boot = np.mean(x_boot, axis=0)

obs = 0
diff_mean = x_boot - y_boot
left = np.quantile(diff_mean, 0.05/2)
right = np.quantile(diff_mean, 1-0.05/2)

print(left, obs, right)
# Сравнить доверительный интервал со значением нулевой гипотезы
if obs > left and obs < right:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов не отвергается")
else:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов отвергается")
```

-0.30521107266436065 0 0.3141660899653971
Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов не отвергается

в)

Используйте бутстрэп t-статистики.

In [703]:
```
z_obs = (x.mean() - y.mean())/np.sqrt(x.var()/(len(x)-1) + y.var()/(len(y)-1))

x_boot = get_bootstrap_sample(x, B_sample=B)
y_boot = get_bootstrap_sample(y, B_sample=B)

t_boot = []
for i in range(B):
    t_boot.append(sts.ttest_ind(x_boot[:,i], y_boot[:,i], equal_var = False)[0])

left = np.quantile(t_boot, 0.05/2)
right = np.quantile(t_boot, 1-0.05/2)

print(left,z_obs, right)

# Сравнить доверительный интервал со значением нулевой гипотезы
if z_obs > left and z_obs < right:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов не отвергается")
else:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов отвергается")

if (sts.norm.cdf(z_obs) > 0): p_value = 2 * (1 - sts.norm.cdf(z_obs))
else: p_value = 2 * (sts.norm.cdf(z_obs))
print("p-value : ", p_value)
```

-0.7493006423524199 1.2042861273675574 3.257463939511283
Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов не отвергается
p-value : 0.22847900670560017

г)

Используйте перестановочный тест.

In [704]:
```
p_value = permutation_test(x, y,method='approximate', seed=100, num_rounds = 10000)
print("p_value : ", p_value)
if p_value > 0.05:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов не отвергается")
else:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов отвергается")
```

p_value : 0.21057894210578942
Нулевая гипотеза о равенстве ожидаемых результатов не отвергается

Задача 5

Составьте таблицу сопряжённости, поделив студентов писавших экзамен на четыре группы по двум признакам: набрал ли больше медианы или нет, на согласную или гласную букву начинается фамилия.

In [714]:
```
def pivot(df):
    cons_more_med, vowels_more_med, cons_less_med, vowels_less_med = 0, 0, 0, 0
    median = df['Экзамен'].median()

    for i in range(len(df)):
        if (df.iloc[i]['Last name'][0] in consonants):
            if (df.iloc[i]['Экзамен'] > median): cons_more_med += 1
            else: cons_less_med += 1
        if (df.iloc[i]['Last name'][0] not in consonants):
            if (df.iloc[i]['Экзамен'] > median): vowels_more_med += 1
            else: vowels_less_med += 1
    return [cons_more_med, vowels_more_med, cons_less_med, vowels_less_med]
```

In [715]:
```
table = pivot(df[['Last name', 'Экзамен']])
```

а)

Постройте 95% асимптотический интервал для отношения шансов хорошо написать экзамен («несогласных» к «согласным»). Проверьте гипотезу о том, что отношение шансов равно 1 и укажите P-значение.

Воспользуемся статистическим выводом из Википедии

In [717]:
```
L = np.log((table[0] * table[3])/(table[1] * table[2]))
se = np.sqrt(1/table[0] + 1/table[1] + 1/table[2] + 1/table[3])
left = np.exp(L-sts.norm.ppf(0.975)*se)
right = np.exp(L+sts.norm.ppf(0.975)*se)

obs = 1

print('(crit_left : ', left, ') (obs : ', obs, ') (crit_right : ', right, ")")

# Сравнить доверительный интервал со значением нулевой гипотезы
if obs > left and obs < right:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве шансов не отвергается")
else:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве шансов отвергается")

z_obs = (np.log(1)-L)/se

p_value = 2 * min((1 - sts.norm.cdf(z_obs)), sts.norm.cdf(z_obs))
print("p-value : ", p_value)
```

(crit_left : 0.6261264944176235) (obs : 1) (crit_right : 2.1919524354224884)
Нулевая гипотеза о равенстве шансов не отвергается
p-value : 0.6204469877058971

б)

Постройте 95% асимптотический интервал для отношения вероятностей хорошо написать экзамен. Проверьте гипотезу о том, что отношение вероятностей равно 1 и укажите P-значение.

Воспользуемся формулой д.и. для разности долей, т.е. переформулируем нулевую гипотезу, как то, что разница долей равна 0. Альтернативная гипотеза - разница не равна 0

In [718]:
```
p_hat = table[0] / (table[2] + table[0])
q_hat = table[1] / (table[3] + table[1])
se = np.sqrt((p_hat*(1-p_hat)/(table[0] + table[2])) + (q_hat*(1-q_hat)/(table[1] + table[3])))
left = p_hat - q_hat - sts.norm.ppf(0.975)*se
```

```
right = p_hat - q_hat + sts.norm.ppf(0.975)*se

obs = 0

print('(crit_left : ', left, ') (obs : ', obs, ') (crit_right : ', right, ")")
if obs > left and obs < right:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве вероятностей не отвергается")
else:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве вероятностей отвергается")

z_obs = (p_hat - q_hat)/se

p_value = 2 * min((1 - sts.norm.cdf(z_obs)), sts.norm.cdf(z_obs))
print("p-value : ", p_value)
```

```
(crit_left :  -0.10886672753126217 ) (obs :  0 ) (crit_right :  0.1838614312951206 )
Нулевая гипотеза о равенстве вероятностей не отвергается
p-value :  0.6155776933224668
```

в)

Постройте 95% интервал для отношения шансов хорошо написать экзамен с помощью наивного бутстрэпа. Проверьте гипотезу о том, что отношение шансов равно 1 и укажите Р-значение

In [709]:
```
def pivot_mod(x, y):
    median = np.median(np.concatenate([x, y]))
    cons_more_med, vowels_more_med, cons_less_med, vowels_less_med = 0, 0, 0, 0
    for i in range(x.size):
        if (x[i] > median): cons_more_med += 1
        else: cons_less_med += 1

    for i in range(y.size):
        if (y[i] > median): vowels_more_med += 1
        else: vowels_less_med += 1

    return [cons_more_med, vowels_more_med, cons_less_med, vowels_less_med]
```

In [719]:
```
x_boot = get_bootstrap_sample(x, B_sample=B)
y_boot = get_bootstrap_sample(y, B_sample=B)

z_boot = []
for i in range(B):
    table = pivot_mod(x_boot[:,i], y_boot[:,i])
    L = np.log((table[0] * table[3])/(table[1] * table[2]))
    se = np.sqrt(1/table[0] + 1/table[1] + 1/table[2] + 1/table[3])
    z_boot.append((np.log(1)-L)/se)

left = np.quantile(z_boot, 0.05/2)
right = np.quantile(z_boot, 1-0.05/2)
z_obs = (np.log(1)-L)/se

print(left, z_obs, right)
if z_obs > left and z_obs < right:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве шансов не отвергается")
else:
  print("Нулевая гипотеза о равенстве шансов отвергается")

p_value = 2 * min((1 - sts.norm.cdf(z_obs)), sts.norm.cdf(z_obs))
print("p-value : ", p_value)
```

```
-2.3417661167291324 0.227329362494035 1.4562438355959801
Нулевая гипотеза о равенстве шансов не отвергается
p-value :  0.8201676427566458
```

Задача 6

Иноагент Иннокентий Вероятностно-Статистический считает, что длина фамилии положительно влияет на результат экзамена по теории вероятностей. А именно, он предполагает, что ожидаемый результат за экзамен прямо пропорционален длине фамилии, $E(Y_i) = \beta F_i$, где Y_i — результат за экзамен по 30-балльной шкале, F_i — количество букв в фамилии.

Для перевода оценок из 10-бальной в 30-бальную систему домножим соответствующие оценки на 3

In [711]:
```
df['Экзамен'] = df['Экзамен']*3
```

а)

Оцените β методом моментов. Рассчитайте выборочную корреляцию.

Для оценки β методом моментов нужно приравнять выборочный момент первого порядка (среднее) к теоретическому моменту первого порядка: E(Y) = βE(F), где E(Y) - выборочное среднее, E(F) - среднее для количества букв в фамилиях.

In [712]:
```
E_F = df['Last name'].apply(lambda x: len(x)).sum()/df['Last name'].size
```

```
E_Y = df['Экзамен'].mean()
beta_MM = E_Y / E_F
corr = pearsonr(df['Last name'].apply(lambda x: len(x)).values, df['Экзамен'].values)[0]
print("Оценка β методом моментов : ", beta_MM, "Выборочная корреляция : ", corr)
```

Оценка β методом моментов : 1.830584707646177 Выборочная корреляция : -0.0009654774112034317

б)

С помощью перестановочного теста найдите P-значение и формально протестируйте гипотезу о том, что корреляция равна нулю.

В рамках перестановочного теста я буду перемешивать значения длин фамилий

In [713]:
```
len_names = df['Last name'].apply(lambda x: len(x)).values
cor = []
for i in range(B):
    random.shuffle(len_names)
    cor.append(pearsonr(len_names, df['Экзамен'].values)[0])
p_value = sum(np.abs(cor) > np.abs(corr))/B
print("p-value : ", p_value)
if p_value > 0.05:
  print("Нулевая гипотеза о нулевой корреляции не отвергается")
else:
  print("Нулевая гипотеза о нулевой корреляции отвергается")
```

p-value : 0.9809
Нулевая гипотеза о нулевой корреляции не отвергается

Задача 7

С помощью ChatGPT сделал задачу 23.10 из семинарских листков. То, что пишу я обозначаю цифрой 1, то что отвечает чатик - цифрой 2.

(1): Опознайте закон распределения по функции, производящей моменты, и укажите математическое ожидание случайной величины X:

а) MX(u) = (0.2 + 0.8e^u)^55;

б) MX(u) = exp(3e^t – 3);

в) MX(u) = (1 – 2t)^{–1};

г) MX(u) = (exp(10t) – exp(4t))/6t;

д) MX(u) = exp(10t + 20t^2).

(2): а) Функция, производящая моменты вида MX(u) = (p + q*e^u)^n, где p + q = 1, соответствует биномиальному распределению с параметрами n (число испытаний) и q (вероятность "успеха"). В данном случае, n = 55, q = 0.8. Математическое ожидание для биномиального распределения определяется как E[X] = n*q = 55*0.8 = 44.

б) Функция, производящая моменты вида MX(u) = exp(λ*(e^t - 1)), соответствует распределению Пуассона с параметром λ. Здесь, λ = 3. Математическое ожидание для распределения Пуассона определяется как E[X] = λ = 3.

в) Функция, производящая моменты вида MX(u) = (1 - λ*t)^(-1), соответствует геометрическому распределению с параметром λ. В данном случае, λ = 2. Математическое ожидание для геометрического распределения определяется как E[X] = 1/λ = 1/2.

г) Функция, производящая моменты вида MX(u) = (e^(θ1*t) - e^(θ2*t))/(θ1 - θ2) соответствует распределению с двумя значениями: θ1 с вероятностью p и θ2 с вероятностью (1-p), где p = (e^(θ2) - 1) / (e^(θ1) - e^(θ2)). Здесь θ1 = 10, θ2 = 4, следовательно p = (e^4 - 1) / (e^10 - e^4). Математическое ожидание для такого распределения определяется как E[X] = p*θ1 + (1-p)*θ2.

д) Функция, производящая моменты вида MX(u) = exp(μ*t + σ^2*t^2/2), соответствует нормальному распределению с параметрами μ (математическое ожидание) и σ^2 (дисперсия). Здесь μ = 10, σ^2 = 40. Так что, математическое ожидание равно E[X] = μ = 10.

(1): посчитай в пункте г), как будет выглядеть производящая функция того распределения, которое ты записал

(2): Извините за предыдущую ошибку, давайте исправим.

Функция, производящая моменты вида MX(u) = (e^(θ1t) - e^(θ2t))/(θ1 - θ2) на самом деле не соответствует обычному распределению, которое можно легко определить. Оно представляет собой какую-то смесь двух экспоненциальных распределений, и это не стандартный случай.

Однако, можно определить это как распределение с двумя возможными исходами θ1 и θ2 с вероятностями p и 1-p соответственно. Тогда генерирующая функция для этого распределения будет выглядеть следующим образом:

G(z) = p*z^θ1 + (1-p)*z^θ2.

Здесь θ1 = 10, θ2 = 4 и p — это вероятность, которую следует определить. Обратите внимание, что это предполагает, что θ1 и θ2 являются целыми числами, потому что в другом случае это не будет корректной генерирующей функцией для распределения вероятностей.

(1): ты не понял, MX(u) = (exp(10t) – exp(4t))/(6t), у тебя не так

(2): Прошу прощения за путаницу. Верно, эта функция, производящая моменты, на самом деле соответствует смеси двух экспоненциальных распределений. Она представляет собой экспоненциальное распределение со средним 1/10 (θ1 = 10) с весом 1/6 и экспоненциальное распределение со средним 1/4 (θ2 = 4) с весом -1/6. Извините за предыдущую путаницу, но не существует прямого стандартного распределения, которое бы соответствовало данной функции, производящей моменты.

(1): а если рассмотреть равномерное распределение?

(2): Да, извините за путаницу. Функция, производящая моменты MX(u) = (exp(10t) - exp(4t))/6t, на самом деле соответствует равномерному распределению на интервале [4, 10].

В общем виде, для равномерного распределения на интервале [a, b], функция, производящая моменты, имеет вид:

M_X(u) = (exp(bu) - exp(au)) / (u*(b - a)).

Таким образом, можно видеть, что ваша функция, производящая моменты, соответствует равномерному распределению на интервале [4, 10].

Математическое ожидание для равномерного распределения определяется как E[X] = (a + b) / 2 = (4 + 10) / 2 = 7.

Задача 8

Доаольно интерактивное видео про формулу Байеса. Помогает понять, что она имеет множество применений в жизни, а не только при решении задач по терверу. Также интересное видео про использование выводов ЗБЧ при получении распределения Максвела.