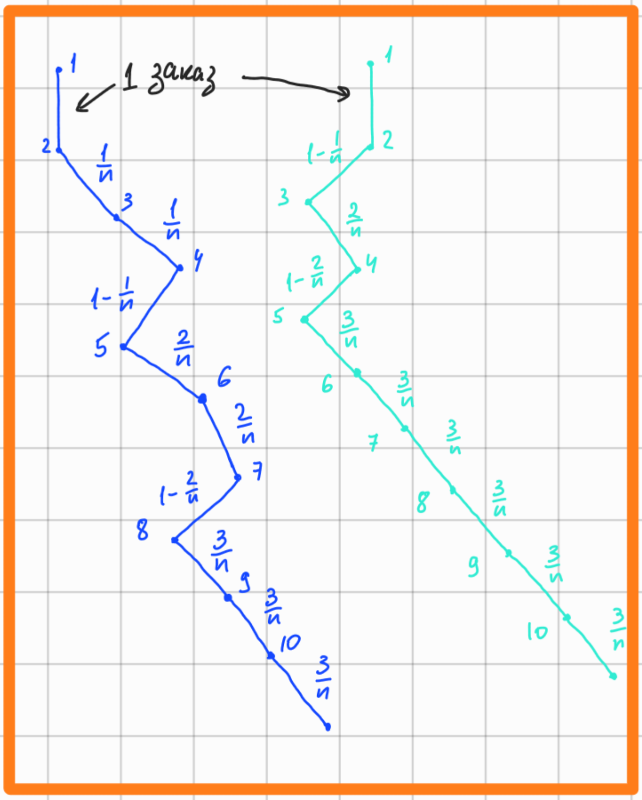
Задача 2

Пусть X – с.в., показывающая количество различных имен таксистов при 10 вызовах $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \in \{1, \dots, 10\}$.

а) Для начала построим пример. Пусть $X = 3$. Посмотрим на возможные деревья.



Вероятность первого случая равна

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^7}\cdot(1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3)$$

Вероятность второго случая равна

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^7}\cdot(2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3)$$

Таким образом, заключим, что появление нового имени в списке, соответствующее переходу влево в дереве, приводит к тому, что вероятность увидеть уже встречавшееся имя растет: $\frac{t}{n} \mapsto \frac{t+1}{n}$.

Мы рассматриваем случай 10 заказов $\Rightarrow$ для появления нового имени всего 9 мест $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $X = 3$ C_9^2 способов поместить в дереве две ветки влево.

Получается, на появление уже встречавшихся имен остается 7 ветвей, причем числители могут быть:

- $(1,1,1,1,1,1,1)$ – если все новые имена пришли подряд в конце.
- $(1,1,1,1,1,1,2)$ – если новое имя пришло на 8 и на 10 заказе
- $(1,1,1,1,1,2,2)$ – если новое имя пришло на 7 и на 10 заказе

. . .

- $(1,3,3,3,3,3,3)$ – если новые имена пришли на 3 и 4 заказе

. . .

- $(3,3,3,3,3,3,3)$ – если все новые имена пришли подряд в начале

То есть множителями могут быть быть упорядоченные по неубыванию семерки цифр от 1 до 3.

Аналогично для произвольного случая $X=k$ это будет упорядоченные по неубыванию последовательности $10-k$ чисел.

Тогда $P(X=k) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n^{9-(k-1)}}\cdot C$,

где C – сумма всех возможных произведений последовательностей.

Заметим, что мы имеем только одно наблюдение $\Rightarrow L(X,n) = P(X=k|n) \overset{\text{код}}{\Rightarrow}$

$\overset{\text{код}}{\Rightarrow}$ при $k=6$ $\hat{n}_{ML}=8$

б) $E(X|n) = \sum_{k=1}^{10} k\cdot P(X=k|n)$ $\Rightarrow$ т.к. имеем только одно наблюдение, то $\hat{n}_{MM}$

будет находиться из равенства (приближения) $\bar{X} = X = E(X|n) \overset{\text{код}}{\Rightarrow} \hat{n}_{MM}=8$.