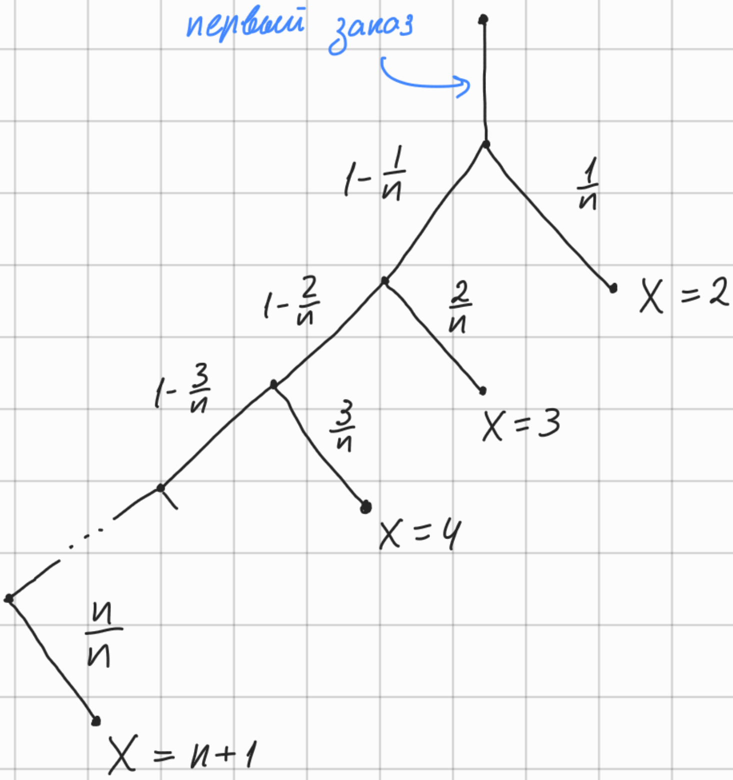
Задача 1

Пусть X – с.в., обозначающая номер заказа, на котором происходит первый повторный приезд $\Rightarrow X \in \{2, \dots, n+1\}$.

а) Заметим, что $n \geq 9$, т.к. иначе уже приезжавший таксист встретился бы раньше.

Построим дерево



Запишем формулу для вероятности

$$P(X=k) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdot\frac{k-1}{n}$$

на k-м заказе повтор случился

повтор не случился на 2-м заказе

повтор не случился на 3-м заказе

повтор не случился на $k-1$ заказе

Тогда $P(X=k) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdot\frac{k-1}{n} = \frac{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-2))}{n^{k-2}}\cdot\frac{k-1}{n} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-(k-1))!} \cdot \frac{k-1}{n^{k-1}}.$$

Также заметим, что мы имеем только одно наблюдение $\Rightarrow L(X,n) = P(X=k|n) \overset{\text{код}}{\Longrightarrow}$

$\overset{\text{код}}{\Longrightarrow} \hat{n}_{ML} = 42.$

б) Найдем мат. ожидание номера заказа, на котором происходит первый повторный приезд.

$$E(X) = \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=2}^{n+1} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-(k-1))!} \cdot \frac{k-1}{n^{k-1}}.$$

Т.к. мы имеем только одно наблюдение, то выборочное среднее равно значению с.в.

Найдем оценку метода моментов: $X = E(X) = \sum_{k=2}^{n+2} k \cdot \frac{(n-1)!}{(n-(k-1))!} \cdot \frac{k-1}{n^{k-1}} \overset{\text{код}}{\Longrightarrow}$

$\overset{\text{код}}{\Longrightarrow} \hat{n}_{MM} = 55.$

в) Пусть $n = 100$. Будем симулировать заказы и, если произошел повторный приезд, то останавливаемся и записываем номер.