

### Задача 3

a)  $X_1, \dots, X_{20} - i.i.d., X_i \sim \text{Exp}(1)$ .

#### 1 способ

Заметим, что  $\bar{X} \overset{\text{ac.}}{\sim} \mathcal{N}\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2 n}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{1}{\lambda^2 n}}} \overset{\text{ac.}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{D.и.}: P\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{S}{n}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S}{n}} \leq \frac{1}{\lambda} \leq \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{S}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Сгенерируем 10000 различных выборок, для каждой построим Д.и. и проверим, покрывает ли мат. ожидание или нет  $\Rightarrow$  оценка вероятности накрытия равна

$$\frac{\text{кол-во раз, когда накрыл}}{10000} \approx 0.9043$$

#### 2 способ

Сгенерируем 10000 бутстрэп-выборок на основе какой-либо исходной. Затем по каждой из них посчитаем среднее  $\Rightarrow$  получим список  $\{\hat{\mu}_1^*, \dots, \hat{\mu}_{10000}^*\}$ , по гистограмме которого получим границы Д.и., отбросив по 2.5% значений слева и справа.

Повторим данную процедуру 10.000 и построим 10000 Д.и., затем действуем аналогично 1-му способу  $\approx$  оценка вероятности накрытия равна 0.9787

#### 3 способ

Как и во 2-м способе сгенерируем 10000 бутстрэп-выборок на основе базовой.

Пусть  $\bar{X}$  - среднее базовой выборки. Тогда рассмотрим  $t = \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{se(\bar{X})}$  и

$t^* = \frac{\bar{X}^* - \bar{X}}{se(\bar{X}^*)}$ . Предположим, что распределение  $\bar{X}^*$  похоже на распределение  $\bar{X}$ .

Тогда после получения списка  $\{t_1^*, \dots, t_{1000}^*\}$  по его гистограмме определим границы Д.И., отбросив по 2.5% с каждой стороны. Затем рассмотрим

$$q_c \leq \frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{se(\bar{X})} \leq q_r \Rightarrow \bar{X} - q_r \cdot se(\bar{X}) \leq \frac{1}{\lambda} \leq \bar{X} - q_c \cdot se(\bar{X}).$$

Повторим процедуру 10.000 раз и построим 10000 Д.И. Далее действуем аналогично предыдущим пунктам  $\Rightarrow$  оценка вероятности накрытия равна 0.9992.

д) Аналогично п. а.

1 способ: 0.9442

2 способ: 0.9986

3 способ: 0.9977.

в) в п. а лучше всех себя показал бутстрэп  $t$ -статистики, а в п. д - наивный бутстрэп.