# Линейная алгебра, Коллоквиум I

Бобень Вячеслав, Чугунов Арсений, Кириченко Дмитрий
@darkkeks, @lotossoks, @dimidrosh, GitHub
Благодарность выражается Левину Александру (@azerty1234567890)
и Милько Андрею (@andrew_milko) за видеозаписи лекций.

2019 — 2020

"К коллоку можете даже не готовиться".

— Роман Сергеевич Авдеев

## Содержание

# 1 Определения и формулировки

**1. Сумма двух матриц, произведение матрицы на скаляр**

Для любых $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$

- *Сложение* $A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$
- *Умножение на скаляр* $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda A := (\lambda a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$

**2. Транспонированная матрица**

$$A \in \mathrm{Mat}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T \in \mathrm{Mat}_{n\times m} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ — \textit{транспонированная матрица}.}$$

**3. Произведение двух матриц**

1) Частный случай: умножение строки на столбец той же длинны

$$\underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{1\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n$$

2) Общий случай:
$A$ - матрица размера $m \times \underline{n}$
$B$ - матрица размера $\underline{n} \times p$
$AB := C \in \mathrm{Mat}_{m\times p}$, где

$$C_{ij} = A_{(i)} B^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Количество столбцов матрицы $A$ равно количеству строк матрицы $B$ — условие согласованности матриц.

**4. Диагональная матрица, умножение на диагональную матрицу слева и справа**

**Определение.** Матрица $A \in M_n$ называется *диагональной* если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$)

**Лемма.** $A = diag(a_1, \dots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n\times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$
2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m\times n} \implies BA = \begin{pmatrix} a_1 B^{(1)} & a_2 B^{(2)} & \dots & a_n B^{(n)} \end{pmatrix}$

**5. Единичная матрица, её свойства**

**Определение.** Матрица $E = E_n = diag(1, 1, \dots, 1)$ называется *единичной матрицей* порядка $n$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Свойства**:

1. $EA = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{n\times p}$
2. $AE = A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{p\times n}$
3. $AE = EA = A \quad \forall A \in M_n$

**6. След квадратной матрицы и его поведение при сложении матриц, умножении матрицы на скаляр и транспонировании**

**Определение.** *Следом* матрицы $A \in M_n$ называется число $trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

**Свойства**:

1. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$
2. $\mathrm{tr}\,\lambda A = \lambda\,\mathrm{tr}\,A$
3. $\mathrm{tr}\,A^T = \mathrm{tr}\,A$

**7. След произведения двух матриц**

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}, B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}$

**8. Совместные и несовместные системы линейных уравнений**

**Определение.** СЛУ называется

– *совместной*, если у нее есть хотя бы одно решение,

– *несовместной*, если решений нет.

**9. Эквивалентные системы линейных уравнений**

**Определение.** Две системы уравнений от одних и тех же неизвестных называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые множества решений.

**10. Расширенная матрица системы линейных уравнений**

Для СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

её *расширенной матрицей* называется матрица

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

**11. Элементарные преобразования строк матрицы**

| тип | СЛУ | расширенная матрица |
|---|---|---|
| 1. | К $i$-му уравнению прибавить $j$-ое, умноженное на $\lambda \in \mathbb{R}$ $(i \neq j)$ | $Э_1(i,j,\lambda)$ |
| 2. | Переставить $i$-е и $j$-е уравнения $(i \neq j)$ | $Э_2(i,j)$ |
| 3. | Умножить $i$-ое уравнение на $\lambda \neq 0$ | $Э_3(i,\lambda)$ |

1. $Э_1(i,j,\lambda)$: к $i$-ой строке прибавить $j$-ую, умноженную на $\lambda$ (покомпонентно),
   $a_{ik} \mapsto a_{ik} + \lambda a_{jk}\ \forall k = 1,\dots,n$,
   $b_i \mapsto b_i + \lambda b_j$.
2. $Э_2(i,j)$: переставить i-ую и j-ую строки.
3. $Э_3(i,\lambda)$: умножить i-ю строку на $\lambda$ (покомпонентно).

$Э_1, Э_2, Э_3$ называются *элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы.*

**12. Ступенчатый вид матрицы**

**Определение.** Строка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется *нулевой*, если $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ и *ненулевой* иначе $(\exists i : a_i \neq 0)$.

**Определение.** *Ведущим элементом* ненулевой строки называется первый её ненулевой элемент.

**Определение.** Матрица $M \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ называется *ступенчатой*, или имеет ступенчатый вид, если:

1. Номера ведущих элементов её ненулевых строк строго возрастают.
2. Все нулевые строки стоят в конце.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \diamond & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \diamond & * & * & * & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \diamond & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \diamond & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \diamond \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\diamond \neq 0$, $*$ – что угодно.

## 13. Улучшенный ступенчатый вид матрицы

**Определение.** M имеет *улучшенный ступенчатый вид*, если:

1. M имеет обычный ступенчатый вид.
2. Все ведущие элементы равны 1.
3. В одном столбце с любым ведущим элементом стоят только нули.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 14. Теорема о виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований строк

**Теорема.**

*1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*
*2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.*

**Следствие.** Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

## 15. Общее решение совместной системы линейных уравнений

**Определение.** *Общим решением исходной СЛУ* называется выражение главных неизвестных через свободные.

## 16. Сколько может быть решений у системы линейных уравнений с действительными коэффициентами?

**Определение.** Всякая СЛУ с действительными коэффициентами:

- либо не имеет решений (несовместна)
- либо имеет ровно одно решение
- либо имеет бесконечно много решений

## 17. Однородная система линейных уравнений. Что можно сказать про её множество решений?

**Определение.** СЛУ называется однородной (ОСЛУ), если все её правые части равны 0. Расширенная матрица: $(A \mid 0)$

**Очевидный факт.** Всякая ОСЛУ имеет нулевое решение $(x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0)$.

**Следствие.** Всякая ОСЛУ либо имеет ровно 1 решение (нулевое), либо бесконечно много решений.

## 18. Свойство однородной системы линейных уравнений, у которой число неизвестных больше числа уравнений

**Следствие.** Всякая ОСЛУ, у которой число неизвестных больше числа уравнений, имеет ненулевое решение (бесконечно много ненулевых решений).

## 19. Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы

**Утверждение.** *Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ,*

*$x_0$ – частное решение $Ax = b$,*

*$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$,*

*$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.*

*Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$*

## 20. Обратная матрица

**Определение.** Матрица $B \in M_n$ называется *обратной*, к $A$, если $AB = BA = E$.

Обозначение: $B = A^{-1}$.

## 21. Перестановки множества $\{1, 2, \ldots, n\}$

**Определение.** *Перестановкой (подстановкой)* на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется всякое биективное (взаимно однозначное) отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя.

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$S_n$ – множество всех перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Запись:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \text{ либо } \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \\ \sigma(i_1) & \sigma(i_2) & \sigma(i_3) & \ldots & \sigma(i_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь, $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

## 22. Инверсия в перестановке. Знак перестановки. Чётные и нечётные перестановки

Пусть $\sigma \in S_n$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$

**Определение.** Пара $\{i, j\}$ (неупорядоченная) образует *инверсию* в $\sigma$, если числа $i - j$ и $\sigma(i) - \sigma(j)$ имеют разный знак (то есть либо $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$, либо $i > j$ и $\sigma(i) < \sigma(j)$).

**Определение.** *Знак* перестановки $\sigma$ – это число $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{<\text{число инверсий в } \sigma>}$.

**Определение.** Перестановка $\sigma$ называется *четной*, если $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ (четное количество инверсий), и *нечетной* если $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ (нечетное количество инверсий).

## 23. Произведение двух перестановок

**Определение.** *Произведением* (или *композицией*) двух перестановок $\sigma, \rho \in S_n$ называется такая перестановка $\sigma\rho \in S_n$, что $(\sigma\rho)(x) := \sigma(\rho(x)) \quad \forall x \in \{1, \ldots, n\}$.

## 24. Тождественная перестановка и её свойства. Обратная перестановка и её свойства

**Определение.** Перестановка $id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной* перестановкой.

**Свойства:**

$\forall \sigma \in S_n \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = \sigma$.

$\mathrm{sgn}(id) = 1$.

**Определение.** $\sigma \in S_n$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \implies$ подстановка $\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$ называется *обратной* к $\sigma$ перестановкой.

**Свойства:** $\sigma \cdot \sigma^{-1} = id = \sigma^{-1} \cdot \sigma$

**25. Теорема о знаке произведения двух перестановок**

**Теорема.** $\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho.$

**26. Транспозиция. Знак транспозиции**

Пусть $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Рассмотрим перестановку $\tau_{ij} \in S_n$, такую что

$\tau_{ij}(i) = j.$

$\tau_{ij}(j) = i.$

$\tau_{ij}(k) = k \ \forall k \neq i, j.$

**Определение.** Перестановки вида $\tau_{ij}$ называются *транспозициями.*

**Замечание.** $\tau$ – траспозиция $\implies \tau^2 = id, \tau^{-1} = \tau.$

**Лемма.** $\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1.$

**27. Общая формула для определителя квадратной матрицы произвольного порядка**

**Определение.** Определителем матрицы $A \in M_n$ называется число

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}.$$

($\sum_{\sigma \in S_n}$ – сумма по всем перестановкам)

**28. Определители 2-го и 3-го порядка**

- $n = 2$
  $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $n = 3$
  $S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}$
  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$

**29. Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух**

Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$

Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)}).$

**30. Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)**

Если в $A$ поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

**31. Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр**

Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на скаляр, то $\det A$ не изменится.

**32. Верхнетреугольные и нижнетреугольные матрицы**

**Определение.** Матрица называется *верхнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$, *нижнетреугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i < j$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – верхнетреугольная}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ – нижнетреугольная}$$

**33. Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы**

Если $A$ верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

**34. Определитель диагональной матрицы. Определитель единичной матрицы**

Так как матрица диагональна, она верхнетреугольна. Тогда, её определитель равен произведению элементов на диагонали:

$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

Значит, определитель единичной матрицы – 1.

$\det E = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$.

**35. Матрица с углом нулей и её определитель**

**Предложение.**

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right),\ P \in M_k,\ R \in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

**36. Определитель произведения двух матриц**

**Теорема.** $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B$.

**37. Дополнительный минор к элементу квадратной матрицы**

**Определение.** *Дополнительным минором* к элементу $a_{ij}$ называется определитель $(n-1) \times (n-1)$ матрицы, получающейся из $A$ вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-го столбца.

Обозначение: $\overline{M}_{ij}$.

**38. Алгебраическое дополнение к элементу квадратной матрицы**

**Определение.** *Алгебраическим дополнением* к элементу $a_{ij}$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j}\overline{M}_{ij}$.

**39. Формула разложения определителя по строке (столбцу)**

**Теорема.** *При любом фиксированном* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по i-й строке.}}$$

*Аналогично, для любого фиксированного* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по j-у столбцу.}}$$

## 40. Лемма о фальшивом разложении определителя

**Лемма.**

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \dots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$,
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \dots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$.

## 41. Невырожденная матрица

**Определение.** Матрица $A \in M_n$ называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *вырожденной* иначе (то есть $\det A = 0$).

## 42. Присоединённая матрица

**Определение.** *Присоединенной* к А матрицей называется матрица $\widehat{A} = (A_{ij})^T$.

## 43. Критерий обратимости квадратной матрицы

**Теорема.** *$A$ обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ $A$ невырождена ($\det A \neq 0$).*

## 44. Явная формула для обратной матрицы

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}$

## 45. Критерий обратимости произведения двух матриц. Матрица, обратная к произведению двух матриц

**Следствие.** $A, B \in M_n \implies AB$ обратима $\iff$ обе $A$, $B$ обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

## 46. Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

**Теорема.** *Если* $\det A \neq 0$, *то СЛУ* $(\star)$ *имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

## 47. Что такое поле?

**Определение.** *Полем* называется множество $F$, на котором заданы две операции "сложение" ($(a, b) \to a + b$) и "умножение" ($(a, b) \to a \cdot b$), причем $\forall a, b, c \in F$ выполнены следующие условия:

1. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения)
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0 \in F : 0 + a = a + 0 = a$ (нулевой элемент)
4. $\exists (-a) \in F : a + (-a) = (-a) + a = 0$ (противоположный элемент)
   $\uparrow$ абелева группа $\uparrow$
5. $a(b + c) = ab + ac$ (дистрибутивность)
6. $ab = ba$ (коммутативность умножения)
7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения)
8. $\exists 1 \in F \setminus \{0\} : 1a = a1 = a$ (единица)
9. Если $a \neq 0$, $\exists a^{-1} \in F : aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ (обратный элемент)

## 48. Алгебраическая форма комплексного числа. Сложение, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме

**Определение.** Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$ называется его *алгебраической формой.* Число $i$ называется *мнимой единицей.*

$a =: Re(z)$ – *действительная* часть числа $z$.

$b =: Im(z)$ – *мнимая* часть числа $z$.

**Сложение** $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

**Умножение** $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

**Деление** $\dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$

## 49. Комплексное сопряжение и его свойства: сопряжение суммы и произведения двух комплексных чисел

**Определение.** Число $\overline{z} := a - bi$ называется *комплексно сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Операция $z \to \overline{z}$ называется *комплексным сопряжением.*

**Свойства комплексного сопряжения**

- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

## 50. Геометрическая модель комплексных чисел, интерпретация в ней сложения и сопряжения

Числу $z = a + bi$ соответствует точка (или вектор) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами $(a, b)$. Сумме $z + w$ соответствует сумма соответствующих векторов. Сопряжение $z \to \overline{z}$ – это отражение $z$ относительно действительной оси.

## 51. Модуль комплексного числа и его свойства: неотрицательность, неравенство треугольника, модуль произведения двух комплексных чисел

**Определение.** Число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем числа* $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

**Свойства**

1. $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ (неравенство треугольника).
3. $z\overline{z} = |z|^2$.
4. $|zw| = |z||w|$.

## 52. Аргумент комплексного числа

**Определение.** *Аргументом числа* $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется число $\varphi \in \mathbb{R}$, такое что

$$\cos\varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\sin\varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В геометрических терминах, $\varphi$ есть угол между осью $Ox$ и соответствующим вектором.

## 53. Тригонометрическая форма комплексного числа. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме

**Определение.** Представление числа $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его *тригонометрической формой.*

**Предложение.** Пусть $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

**Следствие.** В условиях предложения, предположим, что $z_2 \neq 0$.

Тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

**54. Формула Муавра**

Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ – формула Муавра.}$$

**55. Извлечение корней из комплексных чисел**

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

**Определение.** *Корнем степени* $n$ (или *корнем* $n$*-й степени)* из числа $z$ называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

**Замечание.** Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

**56. Основная теорема алгебры комплексных чисел**

**Теорема.** *Всякий многочлен степени* $\geqslant 1$ *с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

**57. Теорема Безу и её следствие**

Частный случай деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком: $g(x) = x - c$, $\deg g(x) = 1$:

$f(x) = q(x)(x - c) + r(x)$, где либо $r(x) = 0$, либо $\deg r(x) < g(x) = 1$

Значит, $r(x) \equiv r = const \in F$.

**Теорема.** $r = f(c)$.

**Следствие.** Элемент $c \in F$ является корнем многочлена $f(x) \in F[x]$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x - c)$.

**58. Кратность корня многочлена**

**Определение.** *Кратностью* корня $c \in F$ многочлена $f(x)$ называется наибольшее целое $k$ такое что, $f(x)$ делится на $(x - c)^k$.

**59. Векторное пространство**

Фиксируем поле $F$ (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

**Определение.** Множество $V$ называется *векторным (линейным) пространством* над полем $F$, если на $V$ заданы две операции

- "сложение": $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- "умножение на скаляр": $F \times V$, $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V : x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \overrightarrow{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

**60. Подпространство векторного пространства**

Пусть $V$ – векторное пространство над $F$.

**Определение.** Подмножество $U \subseteq V$ называется *подпространством* (в $V$), если

1. $\overrightarrow{0} \in U$.
2. $x, y \in U \implies x + y \in U$.
3. $x \in U, \alpha \in F \implies \alpha x \in U$.

**61. Линейная комбинация конечного набора векторов векторного пространства**

Пусть $V$ – векторное пространство над $F$ и $v_1, \ldots, v_k \in V$ – набор векторов.

**Определение.** *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_k$ называется всякое выражение вида $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, где $\alpha_i \in F$.

**62. Линейная оболочка подмножества векторного пространства**

Пусть $S \subseteq V$ – подмножество векторного пространства.

**Определение.** *Линейной оболочкой* множества $S$ называются множество всех векторов из $V$, представимых в виде линейной комбинации какого-то конечного набора векторов из $S$.

Обозначение: $\langle S \rangle$.

**63. Две общих конструкции подпространств в пространстве $F^n$**

- Пусть $U \subseteq F^n$ – множество векторов, тогда $\langle U \rangle$ – подпространство в $F^n$.
- Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в $F^n$.

Любое подпространство в $F^n$ можно задать любым из этих способов.

**64. Линейная зависимость конечного набора векторов**

**65. Линейная независимость конечного набора векторов**

**Определение.**

1. Векторы $v_1, \ldots, v_n \in V$ называются *линейно зависимыми* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная $\overrightarrow{0}$ (то есть $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$, такие что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$) и *линейно независимыми* иначе (то есть из условия $\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n = \overrightarrow{0}$ следует $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$).
2. Множество $S \subseteq V$ (возможно бесконечное, возможно с повторяющимися элементами) называется *линейно зависимым* если существует конечное линейно зависимое подмножество, и *линейно независимым* если любое конечное подмножество линейно независимо.

**66. Критерий линейной зависимости конечного набора векторов**

**Предложение.** Пусть $v_1, \ldots, v_n \in V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0} (\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.
2. $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

**Следствие.** Векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

**67. Основная лемма о линейной зависимости**

**Лемма.** Пусть есть две системы векторов $v_1, \ldots, v_m$ и $w_1, \ldots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

Тогда векторы $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы.

*Пример.* Любые $n + 1$ векторов в $F^n$ линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

**68. Базис векторного пространства**

**Определение.** Подмножество $S \subseteq V$ называется *базисом* пространства $V$, если

1. $S$ линейно независимо,
2. $\langle S \rangle = V$.

*Пример.* $e_1, \ldots, e_n$ – это базис в $F^n$. Он называется *стандартным базисом* в $F^n$.

**69. Конечномерные и бесконечномерные векторные пространства**

**Определение.** Векторное пространство $V$ называется *конечномерным*, если в нем есть конечный базис, и *бесконечномерным* иначе.

**70. Размерность конечномерного векторного пространства**

**Определение.** *Размерностью* конечномерного векторного пространства называется число элементов в (любом) его базисе.

Обозначение: $\dim V$.

*Пример.*

1. $\dim F^n = n$,
2. $V = \{\overrightarrow{0}\} \implies \dim V = 0$ так как базисом $V$ будет $\varnothing$.

**71. Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов**

**Утверждение.** *Пусть* $\dim V < \infty$, $e_1, \ldots, e_n \in \langle V \rangle$.
$e_1, \ldots, e_n$ *— базис* $V$ *тогда и только тогда, когда,* $\forall v \in V$ *единственным образом представим в виде*

$$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

**72. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений**

$$Ax = 0 \text{ – ОСЛУ.} \tag{$\star$}$$

$A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in F^n.$

$S \subseteq F^n$ – множество решений.

Знаем, что $S$ – подпространство в $F^n$.

**Определение.** *Фундаментальной системой решений* (ФСР) для ОСЛУ ($\star$) называется всякий базис пространства её решений.

**Замечание.** У одной ОСЛУ может быть много разных ФСР.

**73. Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе**

**Лемма.** Пусть $v, v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, тогда либо $v, v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

**74. Утверждение о размерности подпространства конечномерного векторного пространства**

Пусть $V$ – конечномерное векторное пространство.

**Предложение.** Если $U \subseteq V$ – подпространство $V$, тогда $U$ тоже конечномерно, причем $\dim U \leqslant \dim V$.

Кроме того, $\dim U = \dim V \iff U = V$.

# 2 Вопросы на доказательство

## 2.1 Операции над матрицами

**1. Дистрибутивность произведения матриц по отношению к сложению**

$\underbrace{A(B+C)}_{x} = \underbrace{AB + AC}_{y}$ — левая дистрибутивность.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} x_{ij} = A_{(i)}(B+C)^{(j)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} \\ &= A_{(i)}B^{(j)} + A_{(i)}C^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$ ■

Правая дистрибутивность доказывается аналогично.

**2. Ассоциативность произведения матриц**

$(AB)C = A(BC)$

*Доказательство.* $\underbrace{(AB)}_{u} C = x,\ A \underbrace{(BC)}_{v} = y.$

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} u_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{l=1}^{p} a_{il} b_{lk} \right) c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} (a_{il} b_{lk} c_{kj}) \\ &= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} (a_{il} b_{lk} c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il} \sum_{k=1}^{n} (b_{lk} c_{kj}) = \sum_{l=1}^{p} a_{il} v_{lj} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

**3. Некоммутативность произведения матриц**

Умножение матриц не коммутативно.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**4. Транспонирование произведения двух матриц**

$\underbrace{(AB)^T}_{x} = \underbrace{B^T A^T}_{y}$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} x_{ij} = [AB]_{ji} = A_{(j)} B^{(i)} &= \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \cdot b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{ki} \cdot a_{jk} = B^T_{(i)} (A^T)^{(j)} = y_{ij}. \end{aligned}$$

■

**5. Умножение на диагональную матрицу слева и справа**

**Лемма.** $A = diag(a_1, \ldots, a_n) \in M_n \implies$

1. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{n \times p} \implies AB = \begin{pmatrix} a_1 B_{(1)} \\ a_2 B_{(2)} \\ \vdots \\ a_n B_{(n)} \end{pmatrix}$
2. $\forall B \in \mathrm{Mat}_{m \times n} \implies BA = (a_1 B^{(1)}\ a_2 B^{(2)}\ \ldots\ a_n B^{(n)})$

*Доказательство.*

1. $[AB]_{ij} = (0\ \ldots\ 0\ a_i\ 0\ \ldots\ 0) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_i b_{ij}$
2. $[BA]_{ij} = \begin{pmatrix} b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ a_j \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = b_{ij} a_j$

■

**6. След произведения двух матриц**

$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$\forall A \in \mathrm{Mat}_{m \times n},\ B \in \mathrm{Mat}_{n \times m}$

*Доказательство.* $AB = x \in M_m$, $BA = y \in M_n$

$$\operatorname{tr} x = \sum_{i=1}^{m} x_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{ji}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(b_{ji}a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = \operatorname{tr} y.$$ ■

## 2.2 Системы линейных уравнений

**1. Эквивалентность систем линейных уравнений, получаемых друг из друга путём элементарных преобразований строк расширенной матрицы**

**Лемма.** Элементарные преобразования СЛУ не меняют множество решений

*Доказательство.* Пусть мы получили СЛУ($\star\star$) из СЛУ($\star$) путем применения элементарных преобразований.

1. Всякое решение системы ($\star$) является решением ($\star\star$).
2. ($\star$) получается из ($\star\star$) путем элементарных преобразований.

| $(\star) \to (\star\star)$ | $(\star\star) \to (\star)$ |
|---|---|
| $Э_1(i, j, \lambda)$ | $Э_1(i, j, -\lambda)$ |
| $Э_2(i, j)$ | $Э_2(i, j)$ |
| $Э_3(i, \lambda)$ | $Э_3(i, \frac{1}{\lambda})$ |

Следовательно, всякое решение ($\star\star$) является решением ($\star$) $\implies$ множества решений совпадают. ■

**2. Теорема о приведении матрицы к ступенчатому и улучшенному ступенчатому виду при помощи элементарных преобразований строк**

**Теорема.**

*1) Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к ступенчатому виду.*
*2) Всякую ступенчатую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к улучшенному ступенчатому виду.*

**Следствие.** Всякую матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к **улучшенному** ступенчатому виду.

*Доказательство.*

1. Алгоритм. Если M - нулевая, то конец. Иначе:

Шаг 1: Ищем первый ненулевой столбец, пусть $j$ — его номер.
Шаг 2: Переставляем строки, если нужно, добиваемся того, что $a_{1j} \neq 0$
Шаг 3: Зануляем элементы в этом столбце используя первую строку – $Э_1(2, 1, -\frac{a_{2j}}{a_{1j}}), \dots, Э_1(m, 1, -\frac{a_{mj}}{a_{1j}})$.
В результате $a_{ij} = 0$ при $i = 2, 3, \dots m$.

Дальше повторяем все шаги для подматрицы $M'$ (без первой строки и столбцов $1, \dots, j$).

2. Алгоритм. Пусть $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ – ведущие элементы ступенчатой матрицы.

Шаг 1: Выполняем $Э_3(1, \frac{1}{a_{1j_1}}), \dots, Э_3(r, \frac{1}{a_{rj_r}})$, в результате все ведущие элементы равны 1.
Шаг 2: Выполняем $Э_1(r-1, r, -a_{r-1,\, j_r}), Э_1(r-2, r, -a_{r-2,\, j_r}), \dots, Э_1(1, r, -a_{1,\, j_r})$. В результате все элементы над $a_{rj_r}$ равны 0.
Аналогично обнуляем элементы над всеми остальными ведущими.

Итог: матрица имеет улучшенный ступенчатый вид. ■

**3. Реализация элементарных преобразований строк матрицы при помощи умножения на подходящую матрицу**

Всякое элементарное преобразование строк матрицы реализуется умножением как умножение слева на подходящую "элементарную матрицу".

- $Э_1(i, j, \lambda)$: $A \mapsto U_1(i, j, \lambda)A$, где

$$U_1(i,j,\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{0} & \phantom{\dots} & \phantom{0} & j & \phantom{0} \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, на $i$-м $j$-м месте стоит $\lambda$, остальные элементы нули)

- $Э_2(i,j)$: $A \mapsto U_2(i,j)A$, где

$$U_2(i,j) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & j & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме $i$-го и $j$-го столбца (на $i$-м $j$-м и $j$-м $i$-м местах стоит 1, остальные нули)

- $Э_3(i,\lambda)$: $A \mapsto U_3(i,\lambda)A$, где

$$U_3(i,\lambda) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & i & & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(на диагонали стоят единицы, кроме i-го столбца, там $\lambda$, остальные элементы нули)

Элементарные преобразования столбцов — умножение на соответствующую матрицу справа.

**4. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений**

Дана СЛУ с расширенной матрицей $(A \mid b)$.

Прямой ход метода Гаусса.

Выполняя элементарные преобразования строк в $(A|b)$, приведем $A$ к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & \dots & 0 & a_{ij_1} & * & \dots & \dots & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{2j_2} & * & \dots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

**Случай 1** $\exists i \geqslant r+1 : b_i \neq 0$ (в $A$ есть нулевая строка с $b_i \neq 0$)

Тогда в новой СЛУ $i$-е уравнение $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i$, т.е. $0 = b_i \implies$ СЛУ несовместна.

**Случай 2** либо $r = m$, либо $b_i = 0 \quad \forall i \geqslant r+1$

Выполняя элементарные преобразования строк приводим матрицу к улучшенному ступенчатому виду – обратный ход метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & b_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_r}$ называются *главными*, а остальные *свободными*, где $j_i$ – индексы столбцов с ведущими элементами.

**Подслучай 2.1** $r = n$, т.е. все неизвестные – главные

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ \quad \vdots \\ x_r = b_r \end{cases} \qquad \text{— единственное решение.}$$

**Подслучай 2.2** $r < n$, т.е. есть хотя бы одна свободная неизвестная.

Перенесем в каждом уравнении все члены со свободными неизвестными в правую часть, получаем выражения всех главных неизвестных через свободные, эти выражения называется *общим решением исходной СЛУ.*

**5. Связь между множеством решений совместной системы линейных уравнений и множеством решений соответствующей ей однородной системы**

**Утверждение.** *Пусть $Ax = b$ – совместная СЛУ.*

*$x_0$ – частное решение $Ax = b$,*

*$S \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений ОСЛУ $Ax = 0$,*

*$L \subset \mathbb{R}^n$ – множество решений $Ax = b$.*

*Тогда, $L = x_0 + S$, где $x_0 + S = \{x_0 + v \mid v \in S\}$*

*Доказательство.*

1. Пусть $u \in L$ ($u$ – решение $Ax = b$), положим $v = u - x_0$.
   Тогда, $Av = A(u - x_0) = Au - Ax_0 = b - b = 0 \implies v \in S \implies L \subseteq x_0 + S$.
2. Пусть $v \in S$ ($v$ – решение $Ax = 0$), положим $u = x_0 + v$.
   Тогда, $Au = A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b \implies u \in L \implies x_0 + S \subseteq L$.

Значит, $x_0 + S = L$. ■

**6. Общий метод решения матричных уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$**

Два типа матричных уравнений:

1. $AX = B$
   $A$ и $B$ известны, $X$ – неизвестная матрица.
2. $XA = C$
   $A$ и $C$ известны, $X$ – неизвестная матрица.

Из второго типа получается первый транспонированием матриц: $XA = C \iff A^T X^T = B^T$, то есть достаточно уметь решать только уравнения первого типа.

$\underset{n\times m}{A}\underset{m\times p}{X} = \underset{n\times p}{B}$ – это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} AX^{(1)} = B^{(1)} \\ AX^{(2)} = B^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ AX^{(p)} = B^{(p)} \end{cases}$$

Этот набор СЛУ надо решать одновременно методом Гаусса.

Записываем матрицу $(A \mid B)$ и элементарными преобразованиями строк с ней приводим $A$ к улучшенному ступенчатому виду.

Получаем $(A' \mid B')$, где $A'$ имеет улучшенный ступенчатый вид.

Остается выписать общее решение для каждой СЛУ

$$\begin{cases} A'x^{(1)} = B'^{(1)} \\ A'x^{(2)} = B'^{(2)} \\ \qquad\vdots \\ A'x^{(p)} = B'^{(p)} \end{cases}$$

**7. Вычисление обратной матрицы при помощи элементарных преобразований**

Факты:

1. Если $\exists A^{-1}$, то она определена однозначно.

   *Доказательство.* Пусть $B, B'$ – две матрицы, обратные к $A$. Тогда $B = B(AB') = (BA)B' = B'$. ■
2. Если $AB = E$ для некоторой $B \in M_n$, то $BA = E$ автоматически и тогда $B = A^{-1}$.

   *Доказательство.*
   $$AB = E \implies \det A \det B = 1 \implies \det A \neq 0 \implies \exists A^{-1}.$$
   $$BA = EBA = (A^{-1}A)BA = A^{-1}(AB)A = A^{-1}A = E.$$ ■

**Следствие.** $A^{-1}$ является решение матричного уравнения $AX = E$ (если решение существует).

## 2.3 Перестановки

1. **Ассоциативность произведения перестановок**

   **Утверждение.** *Умножение подстановок ассоциативно, то есть* $\sigma(\tau\pi) = (\sigma\tau)\pi \ \forall \sigma, \tau, \pi \in S_n$.

   *Доказательство.* $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ имеем
   $[\sigma(\tau\pi)](i) = \sigma((\tau\pi)(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$
   $[(\sigma\tau)\pi](i) = (\sigma\tau)(\pi(i)) = \sigma(\tau(\pi(i)))$ ∎

2. **Некоммутативность произведения перестановок**
   $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   $\sigma\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
   $\rho\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. **Теорема о знаке произведения двух перестановок**

   **Теорема.** $\sigma, \rho \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma\rho) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$.

   *Доказательство.* Для каждой пары $i < j$ введем следующие числа:

$$\alpha(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\beta(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{\rho(i), \rho(j)\} \text{ образует инверсию в } \sigma \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\gamma(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{i, j\} \text{ образует инверсию в } \sigma\rho \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

   “число инверсий в $\rho$” $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha(i, j)$
   “число инверсий в $\sigma\rho$” $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \gamma(i, j)$
   “число инверсий в $\sigma$” $= \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \beta(i, j)$ – Почему?

   Когда $\{i, j\}$ пробегает все неупорядоченные пары в $\{1, 2, \dots, n\}$, пара $\{\rho(i), \rho(j)\}$ тоже пробегает все неупорядоченные пары в $\{1, 2, \dots, n\}$.

   Зависимость $\gamma(i,j)$ от $\alpha(i,j)$ и $\beta(i,j)$:

| $\alpha(i,j)$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $\beta(i,j)$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\gamma(i,j)$ | 0 | 1 | 1 | 0 |

   Вывод: $\alpha(i, j) + \beta(i, j) \equiv \gamma(i,j) \pmod 2$.

   Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma\rho) = (-1)^{\sum \gamma(i,j)} = (-1)^{\sum \beta(i,j) + \sum \alpha(i,j)} = (-1)^{\sum \alpha(i,j)} \cdot (-1)^{\sum \beta(i,j)} = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\rho$. ∎

4. **Знак обратной перестановки**

   **Следствие.** $\sigma \in S_n \implies \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

   *Доказательство.* $\sigma\sigma^{-1} = id \implies \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) \implies \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = 1 \implies \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\sigma^{-1}$. ∎

5. **Знак транспозиции**

**Лемма.** $\tau \in S_n$ – транспозиция $\implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

*Доказательство.* Пусть $\tau = \tau_{ij}$, можем считать, что $i < j$.

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Посчитаем инверсии:

$\{i, j\}$

$\{i, k\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$

$\{k, j\}$ при $i+1 \leqslant k \leqslant j-1$, всего $= j-i-1$

Значит, всего инверсий $2(j-i-1)+1 \equiv 1 \pmod 2 \implies \operatorname{sgn}(\tau) = -1$. ■

## 2.4 Определители

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}. \tag{$\star$}$$

1. **Определитель транспонированной матрицы**

   $\det A = \det A^T$.

   *Доказательство.* Пусть $B = A^T$, тогда $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned} \det A^T = \det B &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)^{-1}} a_{2\sigma(2)^{-1}} \dots a_{n\sigma(n)^{-1}} \quad // \text{ замена } \sigma^{-1} = \rho \ // \\ &= \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \dots a_{n\rho(n)} = \det A. \end{aligned}$$

   ■

2. **Поведение определителя при умножении строки (столбца) на скаляр**

   Если в $A$ все элементы одной строки или одного столбца домножить на одно и то же число $\lambda$, то $\det A$ тоже умножается на $\lambda$.

$$\begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \lambda * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} * & * & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & \dots & * \end{vmatrix}$$

   *Доказательство.* В связи со свойством T можно доказать только для строк.

   $A_{(i)} \to \lambda A_{(i)} \implies a_{ij} \to \lambda a_{ij} \ \forall j \implies$ в ($\star$) каждое слагаемое умножается на $\lambda \implies \det A$ умножается на $\lambda$. ■

3. **Поведение определителя при разложении строки (столбца) в сумму двух**

   Если $A_{(i)} = A^1_{(i)} + A^2_{(i)}$, то $\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^1_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ A^2_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$.

   Пример:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

   Аналогично, если $A^{(j)} = A^{(j)}_1 + A^{(j)}_2$, то $\det A = \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_1 \cdots A^{(n)}) + \det(A^{(1)} \cdots A^{(j)}_2 \cdots A^{(n)})$.

*Доказательство.* В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A^1_{(i)} = (a'_{i1}a'_{i2}\cdots a'_{in})$, $A^2_{(i)} = (a''_{i1}a''_{i2}\dots a''_{in}) \implies a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$.

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)})\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a'_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a''_{i\sigma(i)}\dots a_{n\sigma(n)} \\
&= \det A_1 + \det A_2.
\end{aligned}$$

■

**4. Определитель матрицы с двумя одинаковыми строками (столбцами)**

Если в A есть две одинаковые строки (столбца), то $\det A = 0$.

*Доказательство.* В связи со свойством T можно доказать только для строк.

При перестановке двух одинаковых строк (столбцов):

– A не изменится $\implies \det A$ не изменится

– по свойству 3: $\det A$ меняет знак

Значит, $\det A = -\det A \implies \det A = 0$. ■

**5. Поведение определителя при прибавлении к строке (столбцу) другой, умноженной на скаляр**

Если к строке (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженный на скаляр, то $\det A$ не изменится.

*Доказательство.* В связи со свойством T можно доказать только для строк.

$$A \to A' = \begin{pmatrix} \dots \\ A_{(i)} + \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(i)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ \lambda A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda \begin{vmatrix} \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \\ A_{(j)} \\ \dots \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

■

**6. Поведение определителя при перестановке двух строк (столбцов)**

Если в $A$ поменять местами две строки или два столбца, то $\det A$ поменяет знак.

*Доказательство.* В связи со свойством T можно доказать только для строк.

Пусть $A = (a_{ij}) \in M_n$, $B = (b_{ij}) \in M_n$ – матрица, полученная из A перестановкой $p$-ой и $q$-ой строк.

Так же, $\tau = \tau_{pq}$.

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } i \neq p, q \\ a_{qj}, & \text{если } i = p \\ a_{pj}, & \text{если } i = q \end{cases}$$

$$b_{ij} = a_{\tau(i)j} \implies b_{i\sigma(i)} = a_{\tau(i)\sigma(i)} = a_{\tau(i),(\sigma\tau\tau)(i)}$$

$$
\begin{aligned}
\det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}\cdot b_{2\sigma(2)}\dots b_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\tau(1),\sigma(1)}\cdot a_{\tau(2),\sigma(2)}\dots a_{\tau(n),\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{\tau(1),(\sigma\tau\tau)(1)}\cdot a_{\tau(2),(\sigma\tau\tau)(2)}\dots a_{\tau(n),(\sigma\tau\tau)(n)}\\
&\quad \text{// уберем } \tau(i)\text{, переупорядочив элементы в произведении //}\\
&= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)}\cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)}\dots a_{n,(\sigma\tau)(n)}\\
&= -\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau)\cdot a_{1,(\sigma\tau)(1)}\cdot a_{2,(\sigma\tau)(2)}\dots a_{n,(\sigma\tau)(n)}\\
&\quad \text{// замена } \rho=\sigma\tau \text{ //}\\
&= -\sum_{\rho\in S_n} \operatorname{sgn}(\rho)\cdot a_{1,\rho(1)}\cdot a_{2,\rho(2)}\dots a_{n,\rho(n)}\\
&= -\det A.
\end{aligned}
$$
■

**7. Определитель верхнетреугольной (нижнетреугольной) матрицы**

Если $A$ верхнетреугольная или нижнетреугольная, то $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

*Доказательство.* В связи со свойством Т можно доказать только для строк.

Выделим в ($\star$) слагаемые, которые могут быть отличны от нуля.

$$
\begin{gathered}
a_{1,\sigma(1)}\dots a_{n-1,\sigma(n-1)}a_{n,\sigma(n)} \neq 0\\
\implies a_{n\sigma(n)} \neq 0 \implies \sigma(n) = n.\\
\implies a_{n-1,\sigma(n-1)} \neq 0 \implies \sigma(n-1) \in \{n-1, n\},
\end{gathered}
$$

но $n$ уже занято, значит $\sigma(n-1) = n-1$, и так далее.

Рассуждая аналогично, получаем $\sigma(k) = k\ \forall k \implies \sigma = id$ – это единственное слагаемое в ($\star$), которое может быть не равно 0.

$$\operatorname{sgn}(id) = +1 \implies \det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$
■

**8. Определитель с углом нулей**

**Предложение.**

$$A = \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \text{ или } A = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline Q & R \end{array}\right),\ P\in M_k,\ R\in M_{n-k} \implies \det A = \det P \det R.$$

Матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

НЕ матрица с углом нулей:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right)$$

*Доказательство.* В силу свойства Т достаточно доказать для строк.

1. Элементарными преобразованиями строк в $A$, приведем $(P \mid Q)$ к виду $(P' \mid Q')$, в котором $P'$ имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det P$ умножаются на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$.
2. Элементарными преобразованиями строк в $A$, приведем $(0 \mid R)$ к виду $(0 \mid R')$, в котором $R'$ имеет ступенчатый вид. При этом $\det A$ и $\det R$ умножаются на один и тот же скаляр $\beta \neq 0$.

$\begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная $\implies \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R'$.

$$\alpha\beta \det A = \det \begin{pmatrix} P' & Q' \\ 0 & R' \end{pmatrix} = \det P' \det R' = (\alpha \det P)(\beta \det R) = \alpha\beta \det P \det R. \qquad \blacksquare$$

**9. Определитель произведения двух матриц**

**Теорема.** $A, B \in M_n \implies \det(AB) = \det A \det B.$

*Доказательство.* Выполним с матрицей $A$ одно элементарное преобразование строк, получим матрицу $A'$.

$$A \rightsquigarrow A' = UA.$$

Такое же преобразование строк с $AB$.

$$AB \rightsquigarrow U(AB) = (UA)B = A'B.$$

Таким образом, сначала выполнив элементарное преобразование и домножив на матрицу $B$, либо домножив на $B$ и затем применив элементарное преобразование, получим тот же результат.

Тогда, цепочка элементарных преобразований строк:

$$A \rightsquigarrow C \text{ – улучшенный ступенчатый вид.}$$

Так же цепочка для $AB$:

$$AB \rightsquigarrow CB.$$

При этом, $\det A$ и $\det AB$ умножились на один и тот же скаляр $\alpha \neq 0$

$$\det C = \alpha \det A.$$

$$\det CB = \alpha \det AB.$$

**Случай 1** Последняя строка состоит из нулей:

$$\begin{aligned} &C_{(n)} = (0 \dots 0) \\ &\implies [CB]_{(n)} = C_{(n)}B = (0 \dots 0) \\ &\implies \det CB = 0 = 0 \cdot \det B = \det C \det B. \end{aligned}$$

**Случай 2** Последняя строка ненулевая:

$$C_{(n)} \implies C = E,$$

так как матрица $C$ имеет улучшенный ступенчатый вид.

Значит,

$$\det CB = \det B = 1 \cdot \det B = \det C \cdot \det B.$$

Из этих двух случаем следует, что $\det CB = \det C \det B$.

Сокращая $\alpha$ получаем,

$$\det CB = \det C \det B \implies \det AB = \det A \det B. \qquad \blacksquare$$

**10. Разложение определителя по строке (столбцу)**

**Лемма.** Пусть $a_{ik} = 0$ при всех $k \neq j$. Тогда $\det A = a_{ij} \cdot A_{ij}$.

*Доказательство.*

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} P & U & Q \\ \hline 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline R & V & S \end{array}\right).$$

Переставляя соседние строки $i - 1$ раз, вытолкнем $i$-ю строку наверх.

$$A' = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 \dots 0 & a_{ij} & 0 \dots 0 \\ \hline P & U & Q \\ \hline R & V & S \end{array}\right)$$

Переставляя соседние столбцы $j-1$ раз, переместим $j$-й столбец на первое место.

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c|c} a_{ij} & 0\ldots0 & 0\ldots0 \\ \hline U & P & Q \\ \hline V & R & S \end{array}\right)$$

$\det A'' = a_{ij} \det \left(\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right) = a_{ij}\overline{M}_{ij}$.

$\implies detA = (-1)^{i-1+j-1} \det A'' = (-1)^{i+j} a_{ij}\overline{M}_{ij} = a_{ij}A_{ij}$. ■

**Теорема.** *При любом фиксированном* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по i-й строке.}}$$

*Аналогично, для любого фиксированного* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \text{ – \textit{разложение по j-у столбцу.}}$$

*Доказательство.* В силу свойства T достаточно доказать для строк.

$$A_{(i)} = (a_{i1}, 0, \ldots, 0) + (0, a_{i2}, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, \ldots, 0, a_{in}).$$

Требуемое следует из свойства определителей (разложение строки в сумму двух) и леммы. ■

## 11. Лемма о фальшивом разложении определителя

**Лемма.**

1. При любых $i, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : i \neq k \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$.
2. При любых $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\} : j \neq k \implies \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = 0$

*Доказательство.* В силу свойства T достаточно доказать для строк.

Пусть $B \in M_n$ – матрица, полученная из $A$ заменой $k$-й строки на $i$-ю.

$$B = \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \ldots \\ A_{(i)} \\ \ldots \\ A_{(i)} \\ \ldots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

В $B$ есть две одинаковые строки $\implies \det B = 0$.

Разлагая $\det B$ по $k$-й строке, получаем

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}.$$ ■

## 12. Единственность обратной матрицы

Пусть дана $A \in M_n$.

**Определение.** Матрица $B \in M_n$ называется *обратной* к $A$, если $AB = BA = E$.

Обозначение: $A^{-1}$.

**Лемма.** Если $\exists A^{-1}$, то она единственна.

*Доказательство.* Пусть $B, C \in M_n$ такие, что $AB = BA = E$ и $AC = CA = E$. Тогда,

$$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C \implies B = C.$$ ■

## 13. Определитель обратной матрицы

**Лемма.** Если $\exists A^{-1}$, то $\det A \neq 0$.

*Доказательство.* $AA^{-1} = E \implies \det(AA^{-1}) = \det E \implies \det A \det(A^{-1}) = 1.$ ■

## 14. Критерий обратимости квадратной матрицы и явная формула для обратной матрицы

**Теорема.** *$A$ обратима (то есть $\exists A^{-1}$) $\iff$ $A$ невырождена ($\det A \neq 0$), при этом $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}$.*

*Доказательство.* Утверждение в одну сторону следует из предыдущего пункта.

Пусть $\det A \neq 0$. Покажем, что $\frac{1}{detA}\widehat{A} = A^{-1}$. Для этого достаточно доказать, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = \det A \cdot E$.
Для $X = A\widehat{A}$ имеем

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}[\widehat{A}]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$

Для $Y = \widehat{A}A$ имеем

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\widehat{A}]_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}a_{kj} = \begin{cases} detA, & \text{при } i = j \\ 0, & \text{при } i \neq j \end{cases}.$$ ■

## 15. Матрица, обратная к произведению двух матриц

**Следствие.** $A, B \in M_n \implies AB$ обратима $\iff$ обе $A$, $B$ обратимы. При этом $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

*Доказательство.* Эквивалентность ( $\iff$ ) следует из условия $\det AB = \det A \det B$.

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E.$$ ■

## 16. Формулы Крамера

Пусть есть СЛУ $Ax = b(\star)$, $A \in M_n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Также, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $A_i = (A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, b, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)})$.

**Теорема.** *Если $\det A \neq 0$, то СЛУ $(\star)$ имеет единственное решение и его можно найти по формулам:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}.$$

*Доказательство.* $\det A \neq 0 \implies \exists A^{-1} \implies (\star) \iff x = A^{-1}b$ – единственное решение.

$$b = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \dots + x_nA^{(n)}.$$

$$\begin{aligned} \det A_i &= \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, x_1A^{(1)} + \dots + x_nA^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\ &= x_1 \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(1)}, A^{(i+1)}, \dots A^{(n)}\right) \\ &\quad + x_2 \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(2)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + x_n \det\left(A^{(1)}, \dots, A^{(i-1)}, A^{(n)}, A^{(i+1)}, \dots, A^{(n)}\right) \\ &= x_i \det A \quad \text{// Все слагаемые кроме i-го равны 0.} \end{aligned}$$ ■

## 2.5 Комплексные числа

**1. Построение поля комплексных чисел**

Цель — построить поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Неформально, $\mathbb{C}$ – это наименьшее поле со следующими свойставми:

1. $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.
2. Многочлен $x^2 + 1$ имеет корень, то есть $\exists i : i^2 = -1$.

**Формальная конструкция поля $\mathbb{C}$**

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

- $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$
- $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$

Неформально, каждой такой паре $(a, b)$ соответствует комплексное число $a + bi$:

- $(a, b) \iff a + bi$
- $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$
- $(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2 \underbrace{i^2}_{=-1} = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

**Проверка аксиом**

1, 2. Очевидны.

3. $0 = (0, 0)$.
4. $-(a, b) = (-a, -b)$.
5. Дистрибутивность

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i)((a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)) &= (a_1 + b_1i)((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i) \\ &= (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3)) + (a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3))i \\ &= a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 + (a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3)i \\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i) + ((a_1a_3 + b_1b_3) + (b_1a_3 + a_1b_3)i) \\ &= (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(a_3 + b_3i)\end{aligned}$$

6. Коммутативность умножения – из явного вида формулы.

$$(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

7. Ассоциативность умножения

$$\begin{aligned}(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) &= (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)(a_3, b_3) \\ &= (a_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3, a_1a_2b_3 - b_1b_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) \\ &= (a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3).\end{aligned}$$

8. $1 = (1, 0)$.
9. $(a, b) \neq 0 \implies a^2 + b^2 \neq 0$. Тогда, $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$.
   $(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ba}{a^2+b^2}\right) = (1, 0)$.

Итак, $\mathbb{C}$ – поле.

**Проверка свойств**

1. $a \in \mathbb{R} \leftrightarrow (a,0) \in \mathbb{C}$.
   $a+b \leftrightarrow (a,0)+(b,0)=(a+b,0)$.
   $ab \leftrightarrow (a,0)(b,0)=(ab,0)$
   Значит, $\mathbb{R}$ отождествляется в $\mathbb{C}$.
2. $i=(0,1) \implies i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

## 2. Свойства комплексного сопряжения (для суммы и произведения)

- $\overline{\overline{z}}=z$.
- $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.
- $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.

*Доказательство.*

- $\overline{\overline{z}}=\overline{\overline{a+bi}}=\overline{a-bi}=a+bi=z$.
- $\overline{z+w}=\overline{(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)}=\overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i=(a_1-b_1i)+(a_2-b_2i)=\overline{z}+\overline{w}$.
- $\overline{z}\cdot\overline{w}=(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i=\overline{zw}$. ■

## 3. Свойства модуля комплексного числа: неотрицательность, неравенство треугольника (алгебраическое доказательство), модуль произведения двух комплексных чисел

**Определение.** Число $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем числа* $z=a+bi\in\mathbb{C}$ (то есть длина соответствующего вектора).

**Свойства**

1. $|z|\geqslant 0$, причем $|z|=0 \iff z=0$.
2. $|z+w|\leqslant|z|+|w|$ (неравенство треугольника).
   Пусть $z=a+bi$, $w=c+di$.

$$\begin{aligned}
|z+w| &\leqslant |z|+|w| \\
\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2} &\leqslant \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \\
(a+c)^2+(b+d)^2 &\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac+bd &\leqslant \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
ac+bd &\leqslant \sqrt{(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2} \\
(ac)^2+(bd)^2+2acbd &\leqslant (ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2 \\
2acbd &\leqslant (ad)^2+(bc)^2 \\
0 &\leqslant (ad)^2+(bc)^2-2abcd \\
0 &\leqslant (ad-bc)^2
\end{aligned}$$

3. $z\overline{z}=|z|^2$.
   $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2=|z|^2$
4. $|zw|=|z||w|$
   $|zw|^2=(zw)\cdot(\overline{zw})=z\cdot w\cdot\overline{z}\cdot\overline{w}=|z|^2|w|^2$

## 4. Умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра

**Предложение.** Пусть $z_1=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1z_2=|z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= |z_1||z_2|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2) \\
&= |z_1||z_2|((\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\
&= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).
\end{aligned}$$ ■

**Следствие.** В условиях предложения, предположим, что $z_2\neq 0$.
Тогда $\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$.

**Возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической форме, формула Муавра**

**Следствие.** Пусть $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) \text{ – формула Муавра.}$$

5. **Извлечение корней из комплексных чисел**

Пусть $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

**Определение.** *Корнем степени* $n$ (или *корнем $n$-й степени)* из числа $z$ называется всякое число $w \in \mathbb{C}$, что $w^n = z$.

Положим $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \mid w^n = z\}$.

Опишем множество $\sqrt[n]{z}$.
$w = \sqrt[n]{z} \implies w^n = z \implies |w|^n = |z|$.
Если $z = 0$, то $|z| = 0 \implies |w| = 0 \implies w = 0 \implies \sqrt[n]{0} = \{0\}$.

Далее считаем, что $z \neq 0$.
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$
$z = w^n = |w|^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi))$
Отсюда,

$$z = w^n \iff \begin{cases} |z| = |w|^n \\ n\psi = \varphi + 2\pi k, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \text{ для некоторого } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

С точностью до $2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, получается ровно $n$ различных значений для $\psi$, при $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
В результате $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, где $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$

**Замечание.** Числа $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ лежат в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат.

## 2.6 Векторные пространства

1. **Понятие векторного пространства, шесть простейших следствий из аксиом**

Фиксируем поле $F$ (можно считать, что $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

**Определение.** Множество $V$ называется *векторным (линейным) пространством* над полем $F$, если на $V$ заданы две операции

- "сложение": $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$.
- "умножение на скаляр": $F \times V \to V$, $(\alpha \in F, x \in V) \mapsto \alpha x$.

а также, $\forall x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in F$ выполнены следующие условия (называются *аксиомами векторного пространства*):

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. $\exists \overrightarrow{0} \in V : x + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} + x = x$ (нулевой элемент).
4. $\exists -x : -x + x = x + (-x) = \overrightarrow{0}$ (противоположный элемент).
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
8. $1 \cdot x = x$.

**Простейшие следствия из аксиом**

$\forall \alpha \in F, x \in V$.

1. Элемент $\overrightarrow{0}$ единственный.
Если $\overrightarrow{0}'$ – другой такой ноль, то $\overrightarrow{0}' = \overrightarrow{0}' + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

2. Элемент $-x$ единственный.
   Если $(-x)'$ – другой такой противоположный элемент, то
$$(-x)' = (-x)' + \overrightarrow{0} = (-x)' + (x + (-x)) = ((-x)' + x) + (-x) = \overrightarrow{0} + (-x) = -x.$$
3. $\alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
   Рассмотрим равенство $\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$. Домножив на $\alpha$ получаем $\alpha(\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}) = \alpha\overrightarrow{0}$.
   Раскроем скобки, $\alpha\overrightarrow{0} + \alpha\overrightarrow{0} = \alpha\overrightarrow{0}$.
   Прибавим к обоим частям обратный элемент к $\alpha\overrightarrow{0}$, получим $\alpha\overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.
4. $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.
   Рассмотрим равенство $x + (-x) = \overrightarrow{0}$.
$$x + (-x) = \overrightarrow{0} \implies ax + a(-x) = 0 \implies a(-x) = -(ax).$$
5. $0 \cdot x = \overrightarrow{0}$.
   Доказывается так же, как пункт 3, но с 0 вместо $\overrightarrow{0}$.
6. $(-1) \cdot x = -x$.
   Рассмотрим равенство $1 + (-1) = 0$. Домножив на $x$ получаем $(1 + (-1))x = 0x$.
   Раскроем скобки и воспользуемся пунктом 5 — $1x + (-1)x = 0$ или $x + (-1)x = 0$.
   Прибавим к обоим частям $-x$, получим $0 + (-1)x = -x$ или $(-1)x = -x$.

## 2. Утверждение о том, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством в соответствующем векторном пространстве

**Предложение.** Множество решений любой ОСЛУ $Ax = 0$ ($A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(F)$, $x \in F^n$) является подпространством в $F^n$.

*Доказательство.* Пусть $S$ – множество решений ОСЛУ Ax = 0.

1. $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in S$.
2. $x, y \in S \implies Ax = \overrightarrow{0}$ и $Ay = \overrightarrow{0} \implies A(x + y) = Ax + Ay = \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies x + y \in S$.
3. $x \in S, \alpha \in F \implies Ax = \overrightarrow{0} \implies A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \implies \alpha x \in S$. ■

## 3. Утверждение о том, что линейная оболочка произвольного подмножества векторного пространства является подпространством

Пусть $V$ – векторное пространство, $S \subseteq V$.

**Предложение.** $\langle S\rangle$ является подпространством в $V$.

*Доказательство.*

1. Два случая:
   $S = \varnothing \implies \langle\varnothing\rangle = \{\overrightarrow{0}\} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S\rangle$.
   $S \neq \varnothing \implies \exists V \in S \implies \underbrace{0V}_{\in\langle S\rangle} = \overrightarrow{0} \implies \overrightarrow{0} \in \langle S\rangle$.
2. Пусть $v, w \in \langle S\rangle$:
   $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$,
   $w = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n$, где $v_i, w_i \in S$, $\alpha_i, \beta_i \in F$.
   Тогда, $v + w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n \in \langle S\rangle$.
   (если $v_i = w_j$, то $\alpha_i v_i + \beta_j w_j = (\alpha_i + \beta_j)w_j$)
3. $v \in \langle S\rangle$, $\alpha \in F \implies v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$
   $\implies \alpha v = (\alpha\alpha_1)v_1 + \cdots + (\alpha\alpha_m)v_m \in \langle S\rangle$. ■

## 4. Критерий линейной зависимости конечной системы векторов

**Предложение.** Пусть $v_1, \ldots, v_n \in V$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, такой что $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overrightarrow{0} (\star)$ и $\alpha_i \neq 0$.
2. $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

*Доказательство.*

(1) $\implies$ (2) $\alpha_i \neq 0$ в $(\star)$ $\implies v_i = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \dfrac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1} - \dfrac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} v_{i+1} - \cdots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_i} v_n \in \langle v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

(2) $\implies$ (1) $v_i = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n \implies$

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{i-1} v_{i-1} + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} v_i + \beta_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \beta_n v_n = \overrightarrow{0}.$$

(нетривиальная линейная комбинация с $i$-м скаляром $\neq 0$). ■

**Следствие.** Векторы $v_1, \ldots, v_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$, такое что $v_i \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$.

## 5. Основная лемма о линейной зависимости

**Лемма.** Пусть есть две системы векторов $v_1, \ldots, v_m$ и $w_1, \ldots, w_n$, причем $m < n$ и $w_i \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \quad \forall i = 1, \ldots, n$. Тогда векторы $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы.

*Доказательство.*

$$w_1 = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots + a_{m1} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

$$\ldots$$

$$w_n = a_{1n} v_1 + a_{2n} v_2 + \cdots + a_{mn} v_m = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$\implies (w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_m) A, \qquad (\star)$$

где $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F)$.

Так как $m < n$, то ОСЛУ $Ax = \overrightarrow{0}$ имеет ненулевое решение $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} \in F^n$.

Тогда умножим $(\star)$ справа на $z$:

$$(w_1, \ldots, w_n) \cdot z = (v_1, \ldots, v_m) \cdot \underbrace{A \cdot z}_{= \overrightarrow{0}} = (v_1, \ldots, v_m) \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

$$\implies (w_1, \ldots, w_n) \begin{pmatrix} z_1 \\ \ldots \\ z_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{0} \implies z_1 w_1 + \ldots z_n w_n = \overrightarrow{0}.$$

Это нетривиальная линейная комбинация, так как $z \neq 0$.

Следовательно, $w_1, \ldots, w_n$ линейно зависимы. ■

*Пример.* Любые $n+1$ векторов в $F^n$ линейно зависимы, так как $F^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$.

## 6. Независимость числа векторов в базисе конечномерного векторного пространства от выбора базиса

**Предложение.** $V$ – конечномерное векторное пространство. Тогда, все базисы в $V$ содержат одно и то же количество элементов.

*Доказательство.* $V$ конечномерно, тогда существует конечный базис $e_1, \dots, e_n$.

Пусть $S \subseteq V$ – другой базис. Так как $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$, то $\forall v \in S \implies v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Тогда любые $n+1$ векторов в $S$ линейно зависимы по основной лемме о линейной зависимости. Но $S$ линейно независимо, значит $|S| \leqslant n$.

Пусть $S = \{e'_1, \dots, e'_m\}$, где $m \leqslant n$. Тогда $\forall i = 1, \dots, n \quad e_i \in \langle e'_1, \dots, e'_m \rangle$, по основной лемме о линейной зависимости получаем $n \leqslant m$.

То есть $m = n$. ■

**7. Характеризация базисов конечномерного векторного пространства в терминах единственности линейного выражения векторов**

**Утверждение.** *Пусть* $\dim V < \infty$, $e_1, \dots, e_n \in \langle V \rangle$.

$e_1, \dots, e_n$ *— базис* $V$ *тогда и только тогда, когда,* $\forall v \in V$ *единственным образом представим в виде*

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad x_i \in F.$$

*Доказательство.*

$\implies$ Пусть есть два представления $v = x_1 e_1 + \dots x_n e_n = x'_1 e_1 + \dots + x'_n e_n$.
Тогда, $(x_1 - x'_1)e_1 + \dots + (x_n - x'_n)e_n = \overrightarrow{0}$.
Так как $e_1, \dots, e_n$ линейно независимы, то $(x_1 - x'_1) = \dots = (x_n - x'_n) = 0$.
Значит, $x_i = x'_i \quad \forall i$.

$\impliedby$ $\forall v \in V$ имеем $v \in \langle e_1, \dots, e_n \rangle$.
Значит, $\langle e_1, \dots, e_n \rangle = V$.
Для $v = \overrightarrow{0}$ существует единственное представление $\overrightarrow{0} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$.
Но мы знаем, что $\overrightarrow{0} = 0e_1 + \dots + 0e_n$.
Следовательно $\alpha_1 = \dots \alpha_n = 0$, то есть $e_1, \dots, e_n$ линейно независимо.

Итог: $e_1, \dots, e_n$ – базис $V$. ■

**8. Метод построения фундаментальной системы решений для однородной системы линейных уравнений**

Приведем матрицу к улучшенному ступенчатому виду элементарными преобразовиями строк.

$$(A|\overrightarrow{0}) \rightsquigarrow (B|\overrightarrow{0}) \quad \leftarrow \text{ улучшенный ступенчатый вид.}$$

Пусть $r$ – число ненулевых строк в $B$.

Тогда будет $r$ главных неизвестных и $n - r$ свободных.

Выполнив перенумерацию будем считать что,

$$\begin{aligned} x_1, \dots, x_r &\text{ – главные неизвестные,} \\ x_{r+1}, \dots, x_n &\text{ – свободные.} \end{aligned}$$

Тогда, общее решение для $(\star)$ имеет вид

$$\begin{aligned} &x_1 = c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \dots + c_{1,n-r}x_n \\ &x_2 = c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \dots + c_{2,n-r}x_n \\ &\dots \\ &x_r = c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \dots + c_{r,n-r}x_n. \end{aligned}$$

Предъявим некоторую систему решений

$$u_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \dots \\ c_{r1} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \dots \\ c_{r2} \\ 0 \\ \underline{1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ u_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1,n-r} \\ c_{2,n-r} \\ \dots \\ c_{r,n-r} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \underline{1} \end{pmatrix}.$$

$u_1, \dots, u_{n-r} \in S$

**Предложение.** $u_1, \ldots, u_{n-r}$ – это ФСР для ОСЛУ ($\star$).

*Доказательство.*

1. Линейная независимость.
   Пусть $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-r} u_{n-r} = \overrightarrow{0}$.
   При любом $k \in \{1, \ldots, n-r\}$, $(r+k)$-я координата левой части равна $\alpha_k$, значит $\alpha_k = 0$.
   Следовательно $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-r} = 0$.
2. $\langle u_1, \ldots, u_{n-r} \rangle = S$.
   **"$\subseteq$"** Верно, так как $u_1, \ldots, u_{n-r} \in S$.
   **"$\supseteq$"** Пусть $u \in S$, тогда
$$u = \begin{pmatrix} * \\ \cdots \\ * \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} \text{ для некоторых } \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in F.$$
   Положим $v := u - \alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha_{n-r} u_{n-r}$.
   Тогда, $v \in S$, но
$$v = \begin{pmatrix} * \\ \cdots \\ * \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Тогда формулы для общего решения дают $v = \overrightarrow{0}$.
   Поэтому $u = \alpha_i u_1 + \cdots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$.

   Значит $\langle u_1, \ldots, u_{n-r} \rangle = S$. ■

*Пример.*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Общее решение:
$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

Тогда ФСР:
$$u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 9. Существование подмножества конечной системы векторов, являющегося базисом её линейной оболочки

Пусть $V$ – векторное пространство над F.

Наблюдение: если $v, v_1, \ldots, v_m \in V$ и $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, тогда $\langle v, v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$

**Предложение.** Из всякой конечной системы векторов $S \subseteq V$ можно выбрать подсистему, которая является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

*Доказательство.* Пусть $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$.

Индукция по $m$.

**База** $m = 1$: $S = \{v_1\}$.
Если $v_1 = \overrightarrow{0}$, то $\langle S \rangle = \{\overrightarrow{0}\}$, значит в качестве базиса берем $\varnothing$.
Если $v_1 \neq 0$, то $S$ линейно независимо.
Следовательно $S$ – базис в $\langle S \rangle$.

**Шаг** Пусть доказано для $< m$, докажем для $m$.

Если $v_1, \dots, v_m$ линейно независимо, то $v_1, \dots, v_m$ – это уже базис в $\langle S \rangle$.

Иначе, $\exists i : v_i \in \langle S \setminus \{v_i\} \rangle$.

Положим $S' := S \setminus \{v_i\}$.

Тогда, $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Так как $|S'| = m - 1 < m$, то по предположению индукции в $S'$ можно выбрать базис для $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$. ■

**10. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса конечномерного векторного пространства**

**Предложение.** Пусть $\dim V < \infty$, тогда всякую линейно независимую систему векторов в $V$ можно дополнить до базиса всего пространства $V$.

*Доказательство.* Пусть $v_1, \dots, v_m$ – данная линейно независимая система.

Так как $\dim V < \infty$, в $V$ есть конечный базис $e_1, \dots, e_n$.

Рассмотрим систему векторов $v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n$.

Пройдемся по этим векторам слева направо и выбросим те, которые линейно выражаются через предыдущие (не выброшенные).

При этом:

1) линейная оболочка системы сохраняется и равна $\langle v_1, \dots, v_m, e_1, \dots, e_n \rangle = V$;
2) $v_1, \dots, v_m$ останутся в системе, так как они линейно независимы;
3) в новой системе никакой вектор линейно не выражается через предыдущие.

Пусть новая система - это $S' = \{v_1, \dots, v_m, e_{i_1}, \dots, e_{i_t}\}$.

Докажем, что $S'$ – базис в $V$.

По свойству 1) имеем, что $\langle S' \rangle = V$.

Осталось доказать, что $S'$ линейно независимо.

Пусть $\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_n v_n + \beta_1 e_{i_1} + \dots + \beta_t e_{i_t} = \overrightarrow{0}$.

Предположим, что эта линейная комбинация нетривиальна.

Так как $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, то $\exists k : \beta_{i_k} \neq 0$.

Выберем $k$ максимальным с этим свойством.

Тогда, $e_{i_k}$ линейно выражается через предыдущие — противоречие. ■

**11. Лемма о добавлении вектора к конечной линейно независимой системе**

**Лемма.** Пусть $v, v_1, \dots, v_m \in V$ и $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, тогда либо $v, v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, либо $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

*Доказательство.* Пусть $v, v_1, \dots, v_m$ линейно зависимы, тогда $\exists (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m) \neq (0, \dots, 0)$, такой что

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \overrightarrow{0}.$$

Но, так как $v_1, \dots, v_m$ линейно независимы, то $\alpha \neq 0$. Значит, $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ по предложению. ■

**12. Утверждение о размерности подпространства конечномерного векторного пространства**

Пусть $V$ – конечномерное векторное пространство.

**Предложение.** Если $U \subseteq V$ – подпространство $V$, тогда $U$ тоже конечномерно, причем $\dim U \leqslant \dim V$.

Кроме того, $\dim U = \dim V \iff U = V$.

*Доказательство.* Пусть $n = \dim V$.

Построим в $U$ конечный базис.

Если $U = \{\overrightarrow{0}\}$, то в качестве базиса берем $\varnothing$.

Далее считаем, что $U \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

Выберем $v_1 \in U \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Если $\langle v_1 \rangle = U$, то конец. Иначе, выберем $v_2 \in U \setminus \langle v_1 \rangle$.

Если $\langle v_1, v_2 \rangle = U$, то конец.

Иначе, выберем $v_3 \in U \setminus \langle v_1, v_2 \rangle$, и так далее.

Получаем систему векторов $v_1, v_2, \dots$. Она линейно независима по лемме.

По основной лемме о линейной зависимости процесс закончится не позднее шага $n$, значит $U$ конечномерно и $\dim U \leqslant \dim V$.

Если $\dim U = n$, то $v_1, \dots, v_n$ – базис $U$. По следствию, если $v_1, \dots, v_n$ – базис $U$, то $U = V$. ■