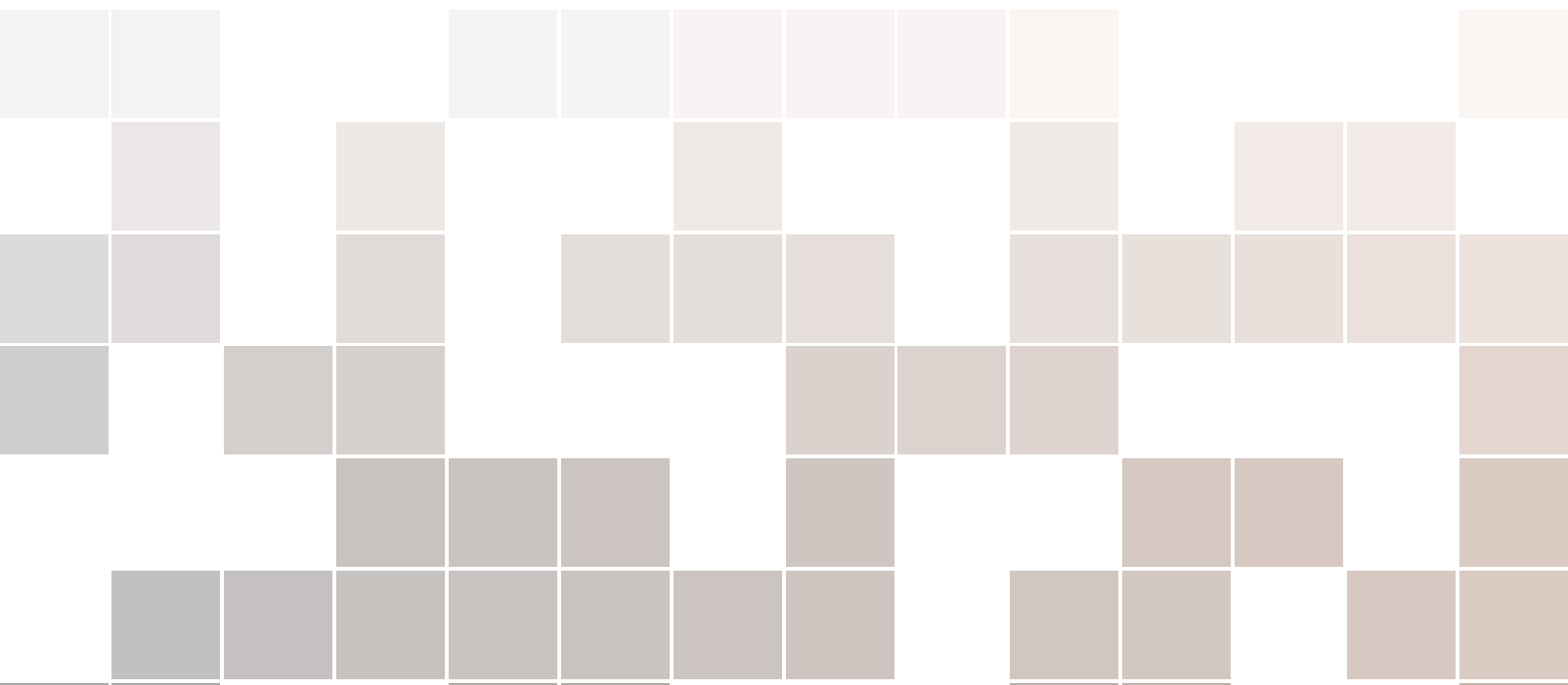


Métodos Numéricos

Facultad de Ingeniería - Universidad Anáhuac

Dr. Héctor Selley



Índice general

Index	5
1 Introducción	5
1.1 Historia de los métodos numéricos	5
1.2 Razones de su aplicación en la Ingeniería	5
1.3 Conceptos básicos	6
1.4 Tipos de errores	6
1.4.1 Error absoluto	6
1.4.2 Error de redondeo y truncamiento	6
1.5 Uso de herramientas computacionales	8
2 Métodos de interpolación	9
2.1 Interpolación simple	9
2.2 Interpolación polinomial de Newton	9
2.3 Interpolación de Punto Fijo	9
2.4 Interpolación de mínimos cuadrados	9
2.5 Interpolación inversa	9
3 Solución de ecuaciones	11
3.1 Método de Newton Raphson	11
3.2 Método de la secante	11

3.3	Método de Aitken	11
3.4	Aplicaciones	11
4	Solución de sistemas de ecuaciones lineales	13
4.1	Métodos iterativos	13
5	Sistemas de ecuaciones no lineales	15
5.1	Solución de ecuaciones	15
5.2	Búsqueda de valores iniciales Tabulación y graficación	15
5.3	Métodos cerrados y sus interpretaciones geométricas (bisección y regla falsa)	15
5.4	Iteración y convergencia de sistemas de ecuaciones	15
5.5	Solución de sistemas de ecuaciones mediante Newton	15
5.6	Método de Bairstow	15
5.7	Aplicaciones	15
6	Diferenciación e integración numérica	17
6.1	Fórmula de diferencia progresiva y regresiva	17
6.2	Fórmula de tres puntos	17
6.3	Fórmula de cinco puntos	17
6.4	Integración numérica: Método del trapecio	17
6.5	Integración numérica: Métodos de Simpson	17
6.6	Integración numérica: Integración de Romberg	17
6.7	Integración numérica: Método de cuadratura gaussiana	17
6.8	Integración múltiple	17
6.9	Aplicaciones	17
7	Solución de ecuaciones diferenciales	19
7.1	Método de Euler y Euler mejorado	19
7.2	Método de Ruge-Kutta	19
7.3	Método de pasos múltiples	19
7.4	Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias	19
7.5	Aplicaciones	19
	Bibliography	21
	Articles	21
	Books	21

1. Introducción

1.1 Historia de los métodos numéricos

1.2 Razones de su aplicación en la Ingeniería

La matemática y la física nos permite describir fenómenos de la naturaleza a través de modelos. El planteamiento de dichos modelos generalmente resulta en un problema matemático.

Por ejemplo, imagine que se desea calcular el área debajo de un puente y supongamos que el área formada por el puente no es una figura simple. Este cálculo podría hacerse a través de una integral, para ello es necesario obtener una función que modele la parte inferior del puente y plantear la integral definida. Ahora al resolver la integral se podría obtener dicha área, y la calidad de la aproximación dependerá de lo preciso que sea el modelo generado para el bajo-puente.

Por ello si se desea mejorar el cálculo habría que mejorar el modelo. Ahora si el modelo resulta una función complicada, ¿qué ocurriría si la integral no se puede resolver analíticamente?. Debe ser claro que el área existe a pesar de que la integral pueda o no resolverse analíticamente.

Para fines prácticos, nos interesa el resultado más no si éste se obtuvo de manera analítica o no. Es en este escenario donde los métodos numéricos resultan muy útiles.

Los métodos numéricos nos permiten obtener una aproximación a la solución de un problema matemático, más no resolverlo.

¿Cuál es la diferencia entre resolver y aproximar a la solución de un problema matemático?. Resolver un problema matemático consiste en encontrar una expresión, un teorema, o una regla para ese problema; es una solución que incluye una generalización para una familia de problemas semejantes. Una aproximación a la solución es un valor numérico para un problema específico de esa familia.

El único precio que se paga por utilizar un método numérico es que las aproximaciones incluyen un error por su mera naturaleza.

1.3 Conceptos básicos

Cifra significativa. El concepto de cifras o dígitos significativos se ha desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico. Las cifras significativas de un número son aquellas que pueden utilizarse de forma confiable. Se trata del número de dígitos que se ofrecen con certeza, más uno estimado. Por ejemplo, el velocímetro y el odómetro de un automóvil mostrado en la figura.

Exactitud e incertidumbre

Precisión y error

1.4 Tipos de errores

Los métodos numéricos permiten encontrar aproximaciones a la solución de diversos problemas matemáticos. Sin embargo, el hecho de utilizar estos métodos introduce errores en la aproximación. A continuación se describen algunos de los errores que ocurren.

1.4.1 Error absoluto

Una aproximación, por definición, es un valor cercano a la solución del problema, la cuál llamaremos absoluta. De esta forma, la diferencia entre la solución absoluta y la aproximación a ella la llamaremos error absoluto. Es decir, si sumamos la aproximación y el error absoluto se obtiene la solución absoluta.

Este error absoluto es inevitable en los métodos numéricos y su estimación es compleja, incluso más que el método numérico que determina la aproximación. Por esta razón es que el cálculo del error absoluto resulta impracticable y se opta por utilizar estrategias en la obtención de la aproximación para minimizar este error.

1.4.2 Error de redondeo y truncamiento

Utilizar una herramienta digital para el cómputo numérico tiene muchas ventajas pero también desventajas. Entre sus ventajas más relevantes se encuentra el hecho de que los sistemas digitales permiten la realización de cálculos aritméticos rápidamente, lo cual es muy conveniente para los métodos iterativos. Una desventaja relevante de los sistemas digitales es el hecho de que cuentan con una capacidad finita de memoria, aún y cuando esta capacidad de memoria se incrementa día a día, sigue siendo finita.

Tomemos un ejemplo específico, sea el número

$$\frac{1}{3} = 0.33333 \dots,$$

este número tiene un número infinito de cifras, un ligero cambio en alguna de esas cifras (por pequeña que sea) implica que el número ya no sea el mismo. Si el número no se escribe en su forma racional, será necesario emplear el número infinito de cifras para realizar un trato *preciso* del número.

Cuando este número se almacena en la memoria de un sistema digital, no podrán almacenarse todas las cifras de este número dado que la memoria es finita. Esto significa que el número será almacenado solamente con una cantidad limitada de cifras significativas, lo que significa que ya no será

Aritmética convencional	Aritmética digital con truncamiento
$\frac{1}{3}$	0.333333
$3 \times \frac{1}{3}$	3×0.333333
1	0.999999

Tabla 1.1: Ejemplo del error de truncamiento

estrictamente el mismo número. Esto se llama **truncamiento**. Por otro lado, cuando se realizan operaciones con números truncados podrían obtenerse resultados imprecisos, esto llama **error de truncamiento**.

Vayamos a un ejemplo. En este ejemplo utilizaremos nuevamente el número $\frac{1}{3}$ y realizaremos operaciones aritméticas con el para mostrar el error de truncamiento. Supongamos que el sistema digital solo es capaz de almacenar 6 cifras significativas.

En la tabla 1.3 se muestra la diferencia entre la aritmética convencional y digital, con el número completo y el número truncado. En el resultado es evidente que formalmente $1 \neq 0.999999$, y aunque se tenga un mayor número de cifras en el número digital siempre serán desiguales los resultados. En un caso práctico se dice que $1 \approx 0.999999$, asumiendo que la diferencia es resultado del error de truncamiento.

El redondeo es similar al de truncamiento, solo que este ocurre cuando se ajusta el resultado de la operación a su inmediato superior o inferior, aquel que se encuentre más cerca. El redondeo es una forma en la que los sistemas digitales pueden compensar el error de truncamiento, en el ejemplo mostrado en la tabla 1.3 lo compensaría apropiadamente, pero en otros casos no. Cuando el redondeo no compensa el truncamiento y en su lugar aleja al número de su valor absoluto, se dice que ocurre un **error de redondeo**.

Veamos un ejemplo en el que ocurre el error de redondeo y afecta al resultado obtenido en la operación. Considere los siguientes números y qu se hará un redondeo de 6 cifras significativas del número.

Número racional	Valor numérico	Valor numérico redondeado
$\frac{2}{7}$	0.2857142857	0.285710
$\frac{5}{7}$	0.7142857143	0.714285

Tabla 1.2: Valor numérico redondeado

Al realizar la suma de los números se obtiene un resultado inesperado e incorrecto debido al error de redondeo.

Por último, cabe mencionar que estos errores pueden combinarse en las operaciones aritméticas digitales, la gravedad de sus efectos dependerán completamente de los números y las operaciones que se hagan con ellos.

1.5 Uso de herramientas computacionales

Aritmética convencional	Aritmética digital con redondeo
$\frac{2}{7}$	0.285710
+	+
$\frac{5}{7}$	0.714285
=	=
1	0.999995

Tabla 1.3: Ejemplo del error de redondeo

2. Métodos de interpolación

- 2.1 Interpolación simple
- 2.2 Interpolación polinomial de Newton
- 2.3 Interpolación de Punto Fijo
- 2.4 Interpolación de mínimos cuadrados
- 2.5 Interpolación inversa

3. Solución de ecuaciones

- 3.1 Método de Newton Raphson
- 3.2 Método de la secante
- 3.3 Método de Aitken
- 3.4 Aplicaciones

4. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

4.1 Métodos iterativos

5. Sistemas de ecuaciones no lineales

- 5.1** Solución de ecuaciones
- 5.2** Búsqueda de valores iniciales Tabulación y graficación
- 5.3** Métodos cerrados y sus interpretaciones geométricas (bisección y regla falsa)
- 5.4** Iteración y convergencia de sistemas de ecuaciones
- 5.5** Solución de sistemas de ecuaciones mediante Newton
- 5.6** Método de Bairstow
- 5.7** Aplicaciones

6. Diferenciación e integración numérica

- 6.1 Fórmula de diferencia progresiva y regresiva
- 6.2 Fórmula de tres puntos
- 6.3 Fórmula de cinco puntos
- 6.4 Integración numérica: Método del trapecio
- 6.5 Integración numérica: Métodos de Simpson
- 6.6 Integración numérica: Integración de Romberg
- 6.7 Integración numérica: Método de cuadratura gaussiana
- 6.8 Integración múltiple
- 6.9 Aplicaciones

7. Solución de ecuaciones diferenciales

- 7.1 Método de Euler y Euler mejorado
- 7.2 Método de Ruge-Kutta
- 7.3 Método de pasos múltiples
- 7.4 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias
- 7.5 Aplicaciones

Bibliography

Articles

Books