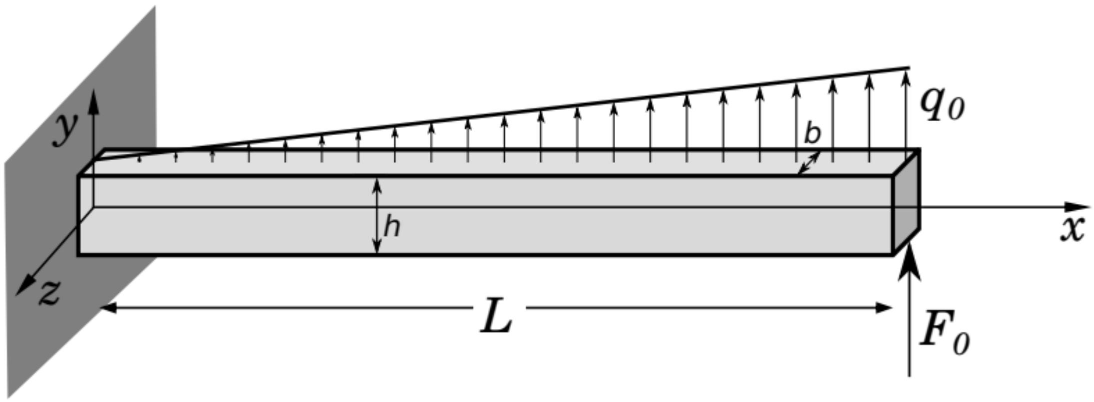
Implémentation la méthode des éléments finies pour une poutre en flexion en utilisant des éléments d'Hermite à deux nœuds.

$$Avec\ E = 200GPa\ ; Igz = 29\ .10^{-6}\ m^4\ ; L = 1\ m\ ; F_0 = 60\ kN\ ; q_0 = 2.4\ kN/m$$



Pour assurer la généralitée et la facilitée de changement des paramètres on va déclarer trois fonctions pour retourner n valeurs du paramètre désiré.

```
function E = Ee(x1,x2,n) %retourner n valeur de E sur entre x1 et x2
  h=x2-x1;
  x=x1:h/n:x2;
  for i=1:n+1
    E(i)=200e9; %expression de E
  end
endfunction

function Igz = Igze(x1,x2,n) %retourner n valeur de Igz sur entre x1 et x2
  h=x2 - x1;
  x=x1:h/n:x2;
  for i=1:n+1
    Igz(i)=29e-6; %expression de Igz
  end
endfunction

function q = qe(x1,x2,n) %retourner n valeur de q sur entre x1 et x2
  h=x2-x1;
  x=x1:h/n:x2;
  for i=1:n+1
    q(i)=2400*x(i); %expression de q
  end
endfunction
```

Matrice de rigidité élémentaire

```
function Ke = Kele(x1,x2)
  he= x2 - x1; %longeur de l'element
  n=1000; %nombre de valeurs des fonctions (precision)
  x=0:he/n:he; % x bar
  %calculer les dérivées secondes les fonctions de forme d'Hermite P3
  for i=1:n+1
    psi_sec(1,i)=-6/(he*he)+12*x(i)/(he*he*he);
    psi_sec(2,i)=-4/he+6*x(i)/(he*he);
    psi_sec(3,i)=6/(he*he)-12*x(i)/(he*he*he);
    psi_sec(4,i)=-2/he+6*x(i)/(he*he);
  end
  E=Ee(x1,x2,n); %obtenir les valeurs de E
  Igz=Igze(x1,x2,n); %obtenir les valeurs de E
  %calculer les élements de la matrice Ke
  for i=1:4
    for j=i:4
      Ke(i,j)=trapz(x, E.*Igz.*psi_sec(i,:).*psi_sec(j,:));
      %utiliser le faite que Ke est symetrique pour reduire le nbr d'itérations
      Ke(j,i)=Ke(i,j);
    end
  end
endfunction
```

Les dérivées secondes des fonctions de formes d'Hermite P3 sont stockées dans une matrice de 4 lignes et n colonnes.

$$\psi_1^{e\prime\prime}(\bar{x}) = -\frac{6}{h_e^2} + \frac{12\bar{x}}{h_e^3} \; ; \; \psi_2^{e\prime\prime}(\bar{x}) = -\frac{4}{h_e} + \frac{6\bar{x}}{h_e^2}$$

$$\psi_3^{e\prime\prime}(\bar{x}) = \frac{6}{h_e^2} - \frac{12\bar{x}}{h_e^3} \; ; \; \psi_4^{e\prime\prime}(\bar{x}) = -\frac{2}{h_e} + \frac{6\bar{x}}{h_e^2}$$

$$K_{ij}^e = \int_0^{h_e} E(\bar{x}) Igz(\bar{x})\, \psi_i^{e\prime\prime}(\bar{x}) \psi_j^{e\prime\prime}(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$f_i^e = \int_0^{h_e} q(\bar{x})\, \psi_i^e(\bar{x}) d\bar{x}$$

Vecteur force élémentaire

```
function Fe = Fele(x1,x2)
  he= x2 - x1; %longeur de l'element
  n=1000; %nombre de valeurs des fonctions (precision)
  x=0:he/n:he; % x bar
  %calculer les dérivées secondes les fonctions de forme d'Hermite P3
  for i=1:n+1
    psi(1,i)=1-3*x(i).*x(i)./(he*he)+2*x(i).*x(i).*x(i)./(he*he*he);
    psi(2,i)=x(i)-2*x(i).*x(i)./he+x(i).*x(i).*x(i)./(he*he);
    psi(3,i)=3*x(i).*x(i)./(he*he)-2*x(i).*x(i).*x(i)./(he*he*he);
    psi(4,i)=-x(i).*x(i)./he+x(i).*x(i).*x(i)./(he*he);
  end
  q=qe(x1,x2,n); %obtenir les valeurs de q
  %calculer les élements du vecteur Fe
  for i=1:4
    Fe(i,1)=trapz(x,q.*psi(i,:));
  end
endfunction
```

Assemblage de la matrice de rigidité et du vecteur force

```
function K = assK(maill) %Assemblage de la matrice de rigidité
  nh=length(maill)-1; %nbt d'elements
  K=zeros(2*nh+2,2*nh+2);
  for i=1:nh
    K(2*i-1:2*i+2,2*i-1:2*i+2)=K(2*i-1:2*i+2,2*i-1:2*i+2)+Kele(maill(i),maill(i+1));
  end
endfunction

function F = assF(maill) %Assemblage du vecteur force
  nh=length(maill)-1; %nbt d'elements
  F=zeros(2*nh+2,1);
  for i=1:nh
    F(2*i-1:2*i+2,1)=F(2*i-1:2*i+2,1)+Fele(maill(i),maill(i+1));
  end
endfunction
```

maill est un vecteur qui contient les abscisses de chaque nœud du maillage.

Application des conditions aux limites

La poutre est encastrée en 0 donc elle ne peut ni se déplacer ni se tourner donc

$$v(0) = 0 \; et \; v'(0) = 0 \;\rightarrow U_1 = U_2 = 0 \;\rightarrow \{U\} = \{0,0,U_3,\ldots,U_{2n_h+2}\}^T$$

Pour les efforts, la poutre est soumise à une force F0 à son extrémité mais elle n'est pas soumise à un moment donc $T_y(L) = F_0 \; et \; M_{fz}(L) = 0$

$$\rightarrow Q_3^{n_h} = F_0 \; et \; Q_4^{n_h} = 0$$

En plus on a l’équilibre des efforts et des moments dans les nœuds intérieurs :

$$Q_3^e + Q_1^{e+1} = \ Efforts\ extérieurs\ suivant\ y\ au\ noeud\ e\ +\ 1 = 0$$

$$Q_4^e + Q_2^{e+1} = Moments\ extérieurs\ autour\ de\ z\ au\ noeud\ e\ +\ 1 = 0$$

$$finalement\ \{Q\} = \{Q_1^1, Q_2^1, 0{,}0, \dots ,0{,}0, F_0, 0\}^T$$

Résolution du système KU=F+Q

```
%---Résolution----%
n=10; %nbr d'elements finis
L=1; %longeur de la poutre
f0= 60000; %force appliquée à l'extremité de la poutre
%preparation des vecteur U et Q et application des condition au limites
U=zeros(2*n+2,1);
Q=zeros(2*n+2,1);
Q(2*n+1,1)=f0;

mail=2; %selectionner le maillage
if mail==1
  m=0:1/n:L; % maillage 1
else
  j=1:n+1;
  m= L/2 * (1 - cos(pi*(j-1)/n)); % maillage 2
endif
%préparation de la matrice de rigidité et du vecteur force
K=assK(m);
F=assF(m);
%resolution du systeme [K]*U=F+Q
U(3:2*n+2,1)=K(3:2*n+2,3:2*n+2)\(F(3:2*n+2,1)+Q(3:2*n+2,1));
Q(1:2)=K(1:2,1:4)*U(1:4)-F(1:2);
```

Post-traitement

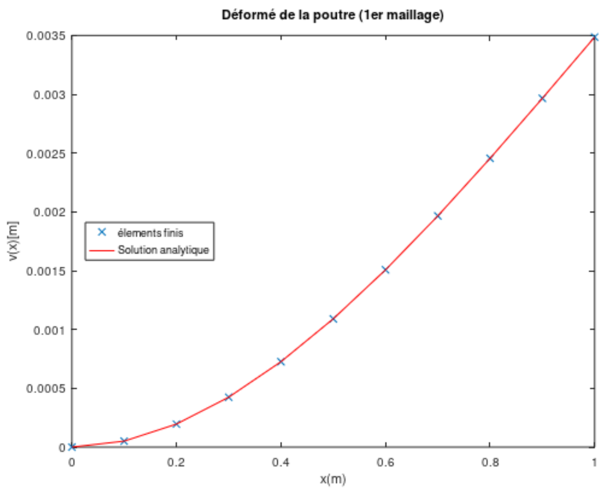
Déformée de la poutre

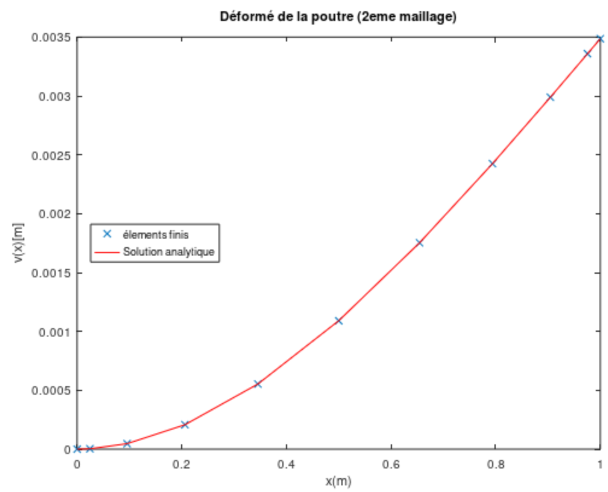
L’équation de la déformé obtenue théoriquement s’écrit :

$$v(x) = \frac{F_0 x^2}{6EI_{gz}}(3L - x) + \frac{q_0 L^4}{120EI_{gz}}\left(20\frac{x^2}{L^2} - 10\frac{x^3}{L^3} + \frac{x^5}{L^5}\right)$$

Les valeurs de v sont les éléments d’indice impaire du vecteur {U}

```
for i=1:n+1
  Vef(i)=U(2*i-1);
end
for i=1:n+1
  Van(i)=f0*m(i)^2 * (3*L-m(i)) /(6*200e9*29e-6) + 2400* L^4 * (20*m(i)^
end
plot(m,Vef,'x',m,Van,'r')
title ("Déformé de la poutre");
xlabel("x(m)");ylabel("v(x)[mm]");
legend ("élements finis", "Solution analytique","location","west");
```





Les variables secondaires

En utilisant la forme locale de l'équilibre sur un élément donné par

$$\{Q^e\} = [K^e]\{U\} - \{f^e\}$$

On va construire un vecteur Qe qui contient tous les valeurs des Q

$$\{Q_e\} = \left\{Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1, Q_1^2, \dots, Q_1^{n_h}, Q_2^{n_h}, Q_3^{n_h}, Q_4^{n_h}\right\}^T$$

$$Q_1^1 = \{Q\}(1), Q_2^1 = \{Q\}(2)$$

$$pour\ i = 2, \dots, nh \quad \{Q_e\}(4i-3{:}\,4i) = \left[K^i\right]\{U\}(2i-1{:}\,2i+2) - \{f^i\}$$

$$Q_3^1 = -Q_1^2, Q_4^1 = -Q_2^2$$

```
Qe=zeros(4*n,1);
Qe(1:2)=Q(1:2);
for i=2:n
  Qe(4*i-3:4*i) = Kele(m(i),m(i+1))*U(2*i-1:2*i+2) - Fele(m(i),m(i+1));
end
Qe(3)=-Qe(5);Qe(4)=-Qe(6);
```

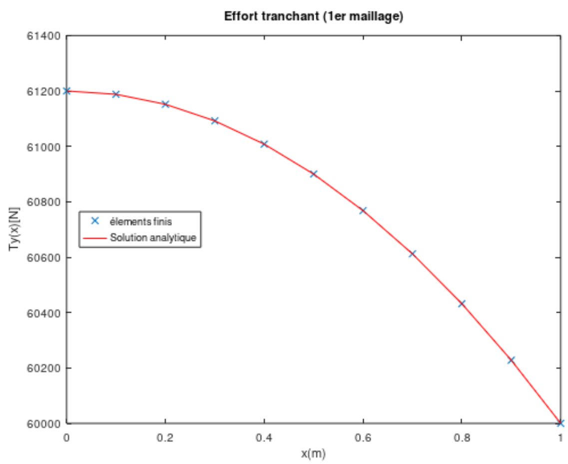
Les valeurs d’indice impaire sont les efforts et les paires sont les moments. On commence à regrouper les $T_y\ et\ M_{fz}\ avec\ T_y(0) = -Q_1\ et\ M_{fz}(0) = -Q_2$

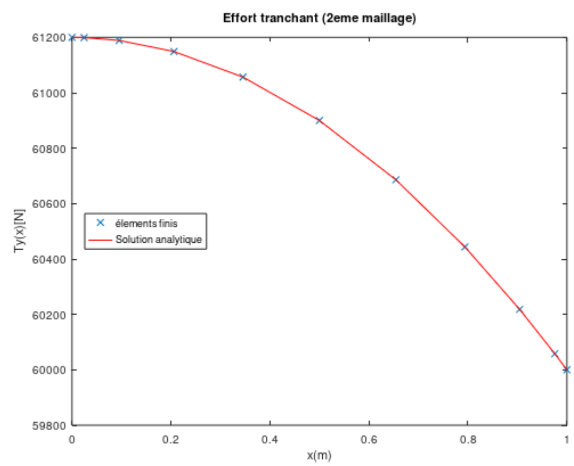
$T_y(h_e) = Q_3\ et\ M_{fz}(h_e) = Q_4$. Les équations des efforts et des moments obtenus théoriquement s’écrivent :

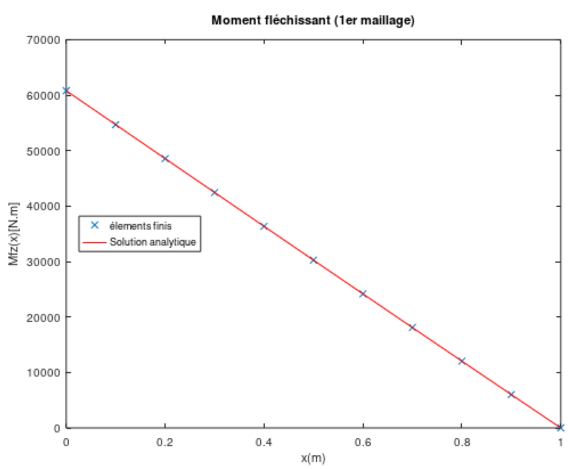
$$T_y(x) = F_0 + \frac{q_0 L}{2}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right); M_{fz}(x) = F_0(L-x) + \frac{q_0 L^2}{6}\left(2 - \frac{3x}{L} + \frac{x^3}{L^3}\right)$$

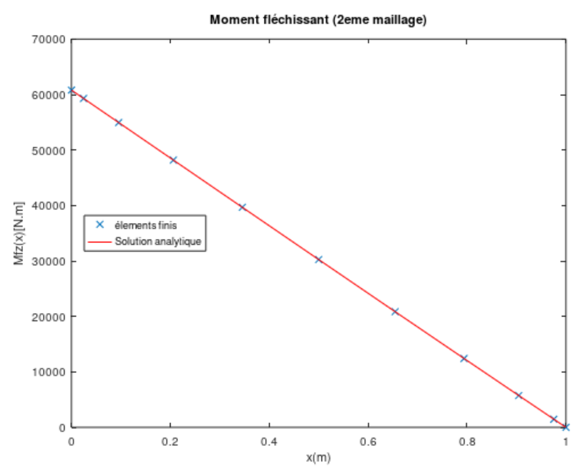
```
Tef(1)=-Qe(1);
for i=2:n+1
  Tef(i)=Qe(4*i-5);
end
for i=1:n+1
  Tan(i)=f0+2400*(1-m(i)^2/L^2)/2;
end

Mef(1)=-Qe(2);
for i=2:n+1
  Mef(i)=Qe(4*i-4);
end
for i=1:n+1
  Man(i)=f0*(L-m(i))+2400*L^2*(2-3*m(i)/L+m(i)^3/L^3)/6;
end
```









On remarque que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis sont conformes à la solution analytique.