APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

1. SERIES DE FOURIER

Nuestro objetivo es determinar cuando una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede ser representada en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Como veremos más adelante, este tipo de expresión aparece naturalmente en algunas ecuaciones, tales como la ecuación del calor y de la onda.

1.1. Funciones Periódicas.

Definición 1.1.1. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada periódica de período T si $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Observación. Note que si T es un período, entonces nT ,
$n \in \mathbb{Z}$, también lo es.

Definición 1.1.2. *El menor período de una función es llamado período fundamental.*

Ejemplo 1.1.

$$\begin{array}{rrcl} (i) & f(x) & = & \operatorname{sen} x, \quad T = 2\pi. \\ (ii) & f(x) & = & x - [x], \quad T = 1. \\ (iii) & f(x) & = & \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{L}, \quad T = \dfrac{2L}{n}. \end{array}$$

Verifiquemos (iii). Supongamos T es el periodo, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi(x+T)}{L}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi T}{L}\right) \end{aligned}$$

Ya que $\sin x$ es una función 2π-periodica se tiene que el menor T verificando la identidad anterior se logra cuando $\frac{n\pi T}{L} = 2\pi$ y luego $T = \frac{2L}{n}$.

1.2. Coeficientes de Fourier. Supongamos de una manera informal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right). \tag{1}$$

Se observa que el período de f es $2L$. Integrando entre $[-L, L]$ se obtiene que

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \right),$$

y así

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Para encontrar los otros coeficientes de Fourier, usaremos las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\, dx &= 0, \quad n, m \geq 1. \\
\int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx &= \begin{cases} L, & n = m \geq 1. \\ 0, & n \neq m, \;\; n, m \geq 1. \end{cases} \\
\int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\, dx &= \begin{cases} L, & n = m \geq 1. \\ 0, & n \neq m, \;\; n, m \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Multiplicando (1) por $\cos \frac{m\pi x}{L}$, $m \geq 1$ e integrando se obtiene

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx = a_m L,$$

y análogamente

$$\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L}\, dx = b_m L.$$

Así

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx\,, \;\; n \geq 0, \tag{3}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx\,, \;\; n \geq 1. \tag{4}$$

Note que $\frac{a_0}{2}$ en la expresión (1) se justifica para verificar la fórmula (3).

Ahora podemos definir los coeficientes de Fourier:

Definición 1.2.1. *Suponga que $f(x)$ es absolutamente integrable en cada intervalo finito. Los coeficientes de Fourier son definidos por las expresiones anteriores* (3) *y* (4) *.*

Dada una función absolutamente integrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $2\,L$-periódica, motivados por el razonamiento anterior, nos interesa saber si la serie de Fourier

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \Big)$$

converge a la función f. Para este propósito necesitamos de los siguientes conceptos.

Definición 1.2.2. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es llamada seccionalmente continua si en cada intervalo acotado tiene un número finito de discontinuidades (todas de primera especie, es decir, límites laterales existen).*

Ejemplo 1.2.

1. $f(x) = sig\, x$ es seccionalmente continua.
2. $f(x) = x - [x]$ es seccionalmente continua.
3. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 2\pi & \text{periódica.} \end{cases}$ es seccionalmente continua.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, no es seccionalmente continua.
5. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 1, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} \leq x < \frac{1}{n}, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$ no es seccionalmente continua.

Definición 1.2.3. *Una función es seccionalmente diferenciable si es seccionalmente continua y su derivada f' también es seccionalmente continua.*

Ejemplo 1.3. La función 2−periódica definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, si $|x| \leq 1$, es seccionalmente continua y no es seccionalmente diferenciable.

El siguiente teorema se refiere a la convergencia puntual de la serie de Fourier (1).

Teorema 1.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente diferenciable de periódo $2L$. Entonces la serie de Fourier de f converge en cada punto para*

$$\frac{1}{2}\left[f(x_+) + f(x_-) \right].$$

Ejemplo 1.4. (a) Calcular la serie de Fourier de la función $2\,\pi-$periódica definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \ x \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0\,. \end{cases}$$

(b) Use la parte (a) para obtener una expresión en serie para π.

Solución.

(a) Por Teorema 1.1 tenemos que

$$\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)) \;=\; \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \operatorname{sen}(2k-1)x.$$

(b) Ya que $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ se obtiene

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \quad \text{(Serie de Leibniz).}$$

Definición 1.2.4. *Una función f es par si $f(-x) = f(x)$ para todo x. Una función f es impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo x.*

Proposición 1.1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par que es absolutamente integrable en cualquier intervalo acotado, entonces*

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \;\; y \;\; b_n = 0.$$

Proposición 1.2. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función impar y absolutamente integrable en cualquier intervalo acotado, entonces*

$$a_n = 0, \;\; y \;\; b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Observación. Cuando f es par, es posible obtener una serie de Fourier en términos de cosenos y cuando f es impar obtenemos una serie en términos de senos.

Ejemplo 1.5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de periódo $2L$ y definida por $f(x) = x, \;\; -L \leq x < L$.
Como f es impar

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^{n\pi} u \operatorname{sen} u \, du \\ &= \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

y ya que f es seccionalmente diferenciable, por Teorema 1.1, se tiene que

$$\frac{1}{2}(f(x_+)+f(x_-)) \;=\; \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Ejemplo 1.6. Defina $f(x)=-|x|+L,\;\; |x|\le L.$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)\,dx = L,\\ a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L (L-X)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx\\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]. \end{aligned}$$

Ya que f es seccionalmente diferenciable y continua, Teorema 1.1, se tiene que

$$f(x) \;=\; \frac{L}{2}+\frac{4L}{\pi^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{L}.$$

Observación. Dada una función $f:[0,L]\to\mathbb{R}$, podemos establecer varios desarrollos de Fourier para f de acuerdo a como la extendamos.

Ejemplo 1.7.

$$(i)\quad f(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & x\in[0,L],\\ f(-x), & x\in[-L,0],\\ 2L & \text{periódica.}\end{cases}\qquad \text{en términos de cosenos}$$

$$(ii)\quad f(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & x\in[0,L],\\ -f(-x), & x\in[-L,0],\\ 2L & \text{periódica.}\end{cases}\qquad \text{en términos de senos}$$

$$(iii)\quad f(x) \;=\; \begin{cases} f(x), & x\in[0,L],\\ 0, & x\in[-L,0],\\ 2L & \text{periódica.}\end{cases}$$

Podemos considerar por ejemplo un período mayor.

Ejemplo 1.8. Dada $f(x)=x, \quad x\in[0,\pi]$, escriba f como una serie de senos.

Extendemos f de la siguiente manera:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,\pi],\\ x, & x\in[-\pi,0],\\ 2\pi & \text{periódica.}\end{cases}$$

Así

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1},$$

y luego por Teorema 1.1 se tiene que

$$\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\operatorname{sen} nx$$

y por lo tanto,

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nx, \quad 0 \le x < \pi.$$

Nota. En $x = \pi$ no vale la igualdad anterior.

1.3. Integración de Series de Fourier.

Teorema 1.2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica de período $2L$ y seccionalmente continua, y sea*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right).$$

su serie de Fourier. Entonces

(i) *Se tiene que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_a^b \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + b_n\int_a^b \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\right).$$

(ii) *La función*

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\,dt$$

es $2L$-periódica continua, F' es seccionalmente continua y es representada por la serie de Fourier

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\,dt = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right),$$

y

$$\frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)\,dx.$$

En términos prácticos el Teorema anterior toma la forma

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \Big(f(t) - \frac{a_0}{2}\Big)\, dt \\ &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)\, dx + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(-\frac{b_n}{n}\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\Big). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.9. Considerando la función $2L$-periódica

$$f(x) = x, \ \ -L \le x < L.$$

Del Teorema 1.1 se obtiene que

$$\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-)) \ = \ \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

De acuerdo a la fórmula anterior, se tiene que para $x \in [-L, L]$

$$F(x) = \frac{x^2}{2}, \quad \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)\, dx = \frac{L^2}{6},$$

luego,

$$\frac{x^2}{2} = \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L} \ \ , \quad -L \le x \le L.$$

Aplicando un par de veces más el teorema anterior se llega a la conclusión que:

$$\frac{x^4}{24} - \frac{L^2x^2}{12} = -\frac{7L^4}{360} + \frac{2L^4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos\frac{n\pi x}{L} \ \ , \quad -L \le x \le L.$$

y tomando $x = \pi$, se obtiene la fórmula

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

1.4. Acotamiento de los coeficientes de Fourier.

Proposición 1.3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2L$-periódica*

(i) *Suponga que f es absolutamente integrable en $[-L, L]$, entonces*

$$|a_n|, |b_n| \le M_0(f, L).$$

(ii) *Suponga que f es derivable y que f' sea absolutamente integrable en $[-L, L]$, entonces*

$$|a_n|, |b_n| \le \frac{M_1(f, L)}{n}.$$

(iii) *Supongamos que f' es continua y f'' absolutamente integrable en $[-L,L]$, entonces*

$$|a_n|, |b_n| \leq \frac{M_2(f,L)}{n^2}.$$

etc...

1.5. Identidad de Parseval.

Teorema 1.3. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $2L$-periódica, $|f|^2$ integrable en $[-L,L]$, entonces*

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}|f(x)|^2\,dx.$$

Demostración. Más adelante. □

Aplicaciones 1.1. 1. Use el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = x^3 - L^2x$, $T = 2L$ para obtener la identidad

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ C^1, $f(0) = f(L) = 0$ y sea

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty.$$

3. (i) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^\alpha}\ , \quad \text{converge para } \alpha > 0.$$

(ii) Observar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^\alpha}\ ,$$

no es serie de Fourier de una función de L^2 si $2\alpha < 1$.

1.6. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 1.1. Si f y g son periódicas de periodo T, muestre que $f+g$ y fg también son periódicas de periódo T.

Ejercicio 1.2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función periódica de periodo T, integrable en todo intervalo, Muestre que

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx,$$

donde a es un número real fijado.

Ejercicio 1.3. Sea $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función periódica de periódo T. Muestre que la función

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

es periódica (de periodo T) si y sólo si,

$$\int_0^T f(t)\,dt = 0.$$

Ejercicio 1.4. Muestre que si $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función par diferenciable entonces f' es impar. Muestre también que si $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es impar y diferenciable, entonces f' es par.

Ejercicio 1.5. Escriba la serie de Fourier de la función $2\pi-$ peródica definida por

$$f(x) = 2x, \quad -\pi \le x < \pi.$$

Ejercicio 1.6. Use la serie de Fourier de la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos\alpha x\,, -\pi < x \le \pi, \\ 2\pi\text{-periódica.} \end{cases}$$

para mostrar que

$$\cot\ \alpha\pi = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2}\right).$$

Ejercicio 1.7. Calcule la serie de Fourier de la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & \operatorname{sen} x \ge 0, \\ 0\,, & \operatorname{sen} x < 0. \end{cases}$$

Ejercicio 1.8. Calcule la serie de Fourier de la función $2\pi-$periódica definida por

$$f(x) = e^x\,,\ \text{ si } \ -\pi \le x < \pi.$$

Ejercicio 1.9. Encuentre el desarrollo de Fourier de la función

$$f(x) = sgn(x), \ \ -\pi < x < \pi.$$

Aplicando este desarrollo determine el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Ejercicio 1.10. Considere la función $2\pi-$periódica

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } 0 \le x < \pi, \\ 0 \text{ si } -\pi \le x < 0, \end{array} \right.$$

y la identidad de Parseval para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ejercicio 1.11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente continua. Escriba $\int_0^L xf(x)dx$ en términos de

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx.$$

Ejercicio 1.12. Diga si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

puede ser una serie de fourier de una función de clase C^1.

Ejercicio 1.13. Calcule la serie de fourier de la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \cos x \, , & \cos x > 0, \\ 0 \, , & \cos x < 0. \end{array} \right.$$

Ejercicio 1.14. Considere la función

$$f(x) = \operatorname{sen} 3\pi x, \ \ 0 < x < 1,$$

Encuentre un desarrollo de Fourier para la función f en términos de senos y otro en términos de cosenos.

Ejercicio 1.15. Considere una función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ y k un número natural. Suponga que $f, f', f'', ..., f^{(k-1)}$ son continuas y que $f^{(k)}$ es absolutamente integrable.
Muestre que

$$\left| \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right| \le \frac{C}{n^k}, \ \ n = 1, 2, 3, ...$$

donde C es una constante positiva.

Ejercicio 1.16. Sea f una función continua en $[0,1]$ y defina

$$\beta_n = \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} n\pi x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n}$ es convergente.

Ejercicio 1.17. Sea f una función seccionalmente continua y 2π-periódica . Muestre que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} \frac{(2n+1)t}{2} dt = 0.$$

2. ECUACIÓN DEL CALOR

Sea $R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < L \text{ y } t > 0\}$. El problema de conducción de calor en una barra consiste en determinar una función $u : R \to \mathbb{R}$ que verifique la siguiente ecuación llamada **Ecuación del Calor**

$$u_t = K u_{xx} \ , \quad \text{en } R. \tag{1}$$

y que satisfaga la condición

$$u(x,0) = f(x) \ , \quad 0 \leq x \leq L. \tag{2}$$

donde $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ es una función dada y $K > 0$ una constante.

También debe verificar condiciones de frontera. Por ejemplo,

$$u(0,t) = u(L,t) = 0. \tag{3}$$

El problema (1)-(3) es llamado problema de valor inicial y de frontera o problema mixto 1-dimensional.

2.1. Método de Fourier.

Este método consiste inicialmente en usar separación de variables. Para esto, buscamos soluciones de la forma

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

Procediendo informalmente, buscaremos un candidato a solución y luego probaremos rigurosamente que es solución. En efecto, supongamos que $u(x,t)$ verifica (1), entonces

$$F(x)G'(t) = KF''(x)G(t),$$

o bien, si $F(x) \neq 0$ y $G(t) \neq 0$, tenemos

$$\frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma$$

para cierto σ que no depende de x ni de t.

Estudiemos la ecuación

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0, \ \ 0 < x < L. \tag{4}$$

Ya que $u(0,t) = u(L,t) = 0$, entonces F debe satisfacer

$$F(0) = F(L) = 0. \tag{5}$$

Sabemos de las EDO's que de acuerdo a los valores de σ las soluciones de $(4) - (5)$ pueden ser expresadas como sigue:

(i) Si $\sigma > 0$, la solución es de la forma
$$F(x) = c_1 e^{x\sqrt{\sigma}} + c_2 e^{-x\sqrt{\sigma}}.$$
Imponiendo las condiciones de borde $F(0) = F(L) = 0$ se obtiene que $c_1 = c_2 = 0$.

(ii) Si $\sigma = 0$ la solución es de la forma
$$F(x) = c_1 x + c_2.$$
Al imponer las condiciones de borde, tenemos que $F(x) \equiv 0$.

(iii) Si $\sigma < 0$, denotemos $\sigma = -\lambda^2$, así la solución general de
$$F''(x) - \sigma F(x) = 0,$$
tiene la forma
$$F(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \operatorname{sen} \lambda x.$$
Imponiendo $F(0) = 0$ tenemos $c_1 = 0$ e imponiendo $F(L) = 0$ y ya que nuestro interés es determinar soluciones no-triviales, se obtiene $L\lambda = \pm n\pi,\ n \in \mathbb{N}$. Así las soluciones de $(4) - (5)$ tienen la forma
$$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$
La solución general de la ecuación diferencial
$$\frac{1}{K}\frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma$$
es
$$G(t) = ce^{\sigma K t}$$
o sea,
$$G_n(t) = ce^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt}.$$

Así, para cada $n = 1, 2, 3, ...$ tenemos una función
$$u_n(x,t) = e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Kt} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$
que satisface las condiciones de frontera (no la condición inicial necesariamente) y la ecuación del Calor.

Imponiendo la condición inicial, nos queda
$$u_n(x,0) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x).$$
O sea, si $f(x)$ fuera de la forma
$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$
para algún n, el problema estaría resuelto.

Ejemplo 2.1. La solución del problema

$$\begin{aligned}
&u_t = K u_{xx}, \ \text{ en } R,\\
&u(x,0) = 5\operatorname{sen}\tfrac{3\pi x}{L}, \ \text{ para } 0 \le x \le L,\\
&u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \ t > 0\,,
\end{aligned}$$

tiene como solución

$$u(x,t) = 5\, e^{-\frac{9\pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L}.$$

Nota que si la condición de frontera fuera

$$f(x) = 4\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + 3\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{L}\,,$$

entonces, la solución debería ser

$$u(x,t) = 4\, e^{-\frac{4\pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{2\pi x}{L} + 3\, e^{-\frac{25\pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{5\pi x}{L}\,.$$

Por otro lado, observa que si $u_1, ..., u_n$ son soluciones que verifican (1) y (3), entonces

$$\sum_{n=1}^{N} c_n u_n, \ \text{ también verifican (1) y (3).}$$

Este principio es llamado **El Principio de Superposición de Soluciones**. Luego si la condición inicial es de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

entonces, la solución será de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Esto hace surgir de forma natural la siguiente pregunta.
¿ Si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

será la solución de la Ecuación del Calor dada por

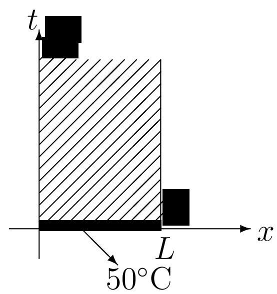
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \ \ ?$$

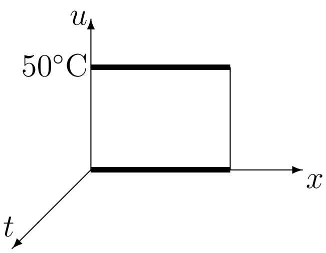
Esta es la motivación para el estudio de las Series de Fourier.

Basicamente lo anterior quiere decir que si $f(x)$ posee un desarrollo de Fourier en términos de senos, entonces tendremos un candidato a solución.

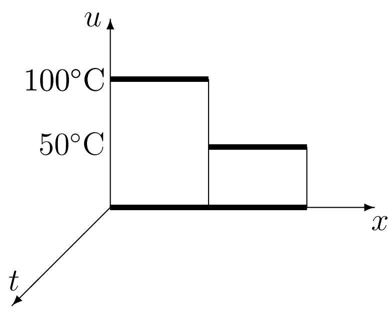
Definición 2.1.1 (**I**)**.** *Una función* $u : \bar{R} \to \mathbb{R}$ *es una solución del PVIF (O sea* (1)-(3)*) si* u *es continua en* $\bar{R}$*, con derivadas parciales definidas en* R *y verificando* (1)-(3)*.*

Esta es una definición natural, pero exige que la función f sea continua con $f(0) = f(L) = 0$.
¿Y si no fuera así?, por ejemplo, si $f(x) = 50^\circ$ C $x \in [0, L]$,





o si pegáramos dos barras con temperaturas diferentes (50°C y 100°C).



Definición 2.1.2 (**II**)**.** *Sea*

$$\hat{R} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ \ 0 \le x \le L,\ \ t > 0\}.$$

Una función $u : \hat{R} \to \mathbb{R}$ *es una solución del problema PVIF, si*

$$u_t = K u_{xx},\ \ 0 < x < L,\ \ t > 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ \ t > 0\ \ y,$$
$$\lim_{t\to 0} \int_0^L u(x,t)\varphi(x)\,dx = \int_0^L f(x)\varphi(x)\,dx,\ \ \forall\ \varphi : [0,L] \to \mathbb{R}\,,$$

tal que φ *es seccionalmente continua.*

¿Cual es la razón de establecer una definición de este tipo?.

Esta es una definición de solución débil que permite tomar condiciones iniciales no necesariamente continuas. Es claro que si u es solución de acuerdo a la definición (I) también lo es de acuerdo a la definición (II).

Teorema 2.1. *Si f es de cuadrado integrable en $[0, L]$, entonces la expresión*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

define una función en $\hat{R}$ que es solución del PVIF en el sentido (II).

Demostración. Las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

$$\text{y} \ \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

convergen uniformemente en cualquier subrectángulo del tipo

$$\bar{R}_{1,2} = \{(x,t): \ 0 \le x_1 \le x \le x_2 \le L, \ 0 < t_1 \le t \le t_2 \le +\infty\}.$$

En efecto es suficiente usar el criterio M de Weierstrass.

- La convergencia uniforme en subrectángulos del tipo $\bar{R}_{1,2}$ de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

  implica la continuidad de la función anterior en $\hat{R}$.
- Usaremos el siguiente resultado conocido:

  Sea $\Sigma u_n(x,t)$ una serie de funciones continuamente diferenciables (de clase C^1) en un rectángulo del tipo

$$\bar{R}_{1,2} = \{(x,t). \ x_1 \le x \le x_2, \ t_1 \le t \le t_2\}$$

  tal que converja puntualmente para una función $u(x,t)$. Además suponga que $\Sigma \frac{\partial}{\partial x} u_n$ converja uniformemente a una función $v(x,t)$. Entonces $\frac{\partial}{\partial x} u$ existe y vale $\frac{\partial}{\partial x} u = v$.

Usando este hecho se tiene que

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{K\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \\ u_{xx} &= -\frac{\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

Así u es solución de la ecuación $u_t = Ku_{xx}$ en $\hat{R}$.

Ahora, sea φ seccionalmente continua y sean b_n los coeficientes de Fourier de φ extendida como función impar de periódo $2L$. Por la identidad de Parseval la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n b_n$ converge y luego

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\varphi(x)\,dx$$

Por otro lado,

$$\int_0^L u(x,t)\varphi(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^L c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,\varphi(x)\,dx$$

para $t > 0$ (se usa convergencia uniforme de la serie para t fijo).

Luego

$$\int_0^L u(x,t)\varphi(x)\,dx = \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} c_n b_n.$$

Notar que

$$\left| e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} c_n b_n \right| \leq |c_n||b_n| \leq \frac{1}{2}\left(c_n^2 + b_n^2\right).$$

Así, por criterio M de Weiestrass la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} c_n b_n$$

converge a una función continua en $[0, +\infty]$. Esto implica que

$$\lim_{t\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} c_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n.$$

Observación. El hecho que las series

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^j c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

converjan uniformemente en el subrectángulo $\bar{R}_{1,2}$, implica que aún siendo discontinua la función $f(x)$, la solución es C^∞ para $t > 0$ y $0 \le x \le L$. $\square$

Teorema 2.2. *Sea $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ una función continua con*

$$f(0) = f(L) = 0$$

y tal que f' exista en $[0, L]$ y sea de cuadrado integrable. Entonces

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \tag{6}$$

define una función continua en $\bar{R}$, que es solución de PVIF en sentido (I).

Demostración. En virtud del Teorema anterior. Es suficiente probar que (6) define una función continua si $t \ge 0$.

En efecto, tenemos

$$\left| c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right| \le |c_n|$$

luego, si $\Sigma |c_n|$ converge, por el criterio M de Weierstrass el teorema esta demostrado. En efecto,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Así

$$c_n = \frac{L}{n\pi} d_n$$

donde d_n son los coeficientes de Fourier de f'. Pero Σd_n^2 converge por Parseval ($f' \in L^2$). Así, ya que

$$|c_n| \le \frac{1}{2} \frac{L^2}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2} d_n^2\,,$$

la serie $\Sigma |c_n|$ converge. $\square$

2.2. Condiciones de Frontera no homogéneas. El problema consiste en determinar una función $u(x,t)$, verificando

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx} \;\text{ en }\; R,\\ &u(0,t) = h_0(t), \quad u(L,t) = h_1(t), \;\; t > 0,\\ &u(x,0) = f(x), \;\; 0 < x < L \end{aligned} \tag{7}$$

donde $h_0(t), h_1(t)$ y f son funciones dadas.

Para resolver este problema recurrimos a lo más natural, esto es, reducirlo al caso homogéneo.
En efecto, sea

$$w = u - v, \;\; v(0,t) = h_0(t), \;\; v(L,t) = h_1(t),$$

sustituyendo en (7), se obtiene que

$$\begin{aligned}
&(w+v)_t = K(w+v)_{xx} \text{ en } R,\\
&w(0,t) = w(L,t) = 0, \;\; t > 0,\\
&w(x,0) = f(x) - v(x,0), \;\; 0 < x < L,
\end{aligned}$$

lo que es equivalente a

$$\begin{aligned}
&w_t = Kw_{xx} + Kv_{xx} - v_t \text{ en } R,\\
&w(0,t) = w(L,t) = 0, \;\; t > 0,\\
&w(x,0) = f(x) - v(x,0), \;\; 0 < x < L.
\end{aligned} \tag{8}$$

O sea, si existe v tal que

$$\begin{aligned}
&Kv_{xx} - v_t = 0,\\
&v(0,t) = h_0(t),\\
&v(L,t) = h_1(t)\,,
\end{aligned}$$

hemos resuelto (8) y la solución es dada por

$$u = w + v.$$

Ejemplo 2.2. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_t = Ku_{xx} \text{ en } R,\\
&u(0,t) = \alpha, \quad u(L,t) = \beta, \;\; t > 0,\\
&u(x,0) = f(x), \;\; 0 < x < L,
\end{aligned}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f(x)$ es una función dada.

Solución. Tomemos

$$v(x,t) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L} x\,,$$

la cual verifica

$$\begin{aligned}
&Kv_{xx} = v_t,\\
&v(0,t) = \alpha,\\
&v(L,t) = \beta.
\end{aligned}$$

Así debemos resolver la ecuación

$$\begin{aligned}
&w_t = Kw_{xx},\\
&w(0,t) = w(L,t) = 0, \;\; t > 0,\\
&w(x,0) = f(x) - \left(\alpha + \tfrac{\beta-\alpha}{L} x\right),
\end{aligned}$$

Como ya sabemos que la solución de la ecuación anterior es dada por

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

donde las constantes c_n corresponden a los coeficientes de Fourier de la función

$$f(x) - \left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{L}x\right),$$

se concluye que la solución de la ecuación es

$$u(x,t) = \alpha + \frac{(\beta-\alpha)}{L}x + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

2.3. Ecuación del Calor no homogénea. Estudiaremos el siguiente problema con condiciones de frontera homogénea

$$\begin{array}{l} u_t = K u_{xx} + g(x,t) \text{ en } R, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \ \ 0 < x < L. \end{array} \tag{9}$$

Para este propósito usaremos el método de Variación de Parámetros. En el caso $g \equiv 0$ sabemos que la solución es dada por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 K t}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Entonces buscaremos soluciónes de (9), de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Reemplazando en la ecuación se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n'(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = -\frac{K\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t) n^2 \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} + g(x,t).$$

Supongamos que $g(x,t)$ se represente de la siguiente manera (serie de Fourier de senos),

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

La unicidad de los coeficientes de Fourier genera la siguiente ecuación

$$c_n{}'(t) = -\frac{K\pi^2 n^2}{L^2} c_n(t) + g_n(t), \ \ t > 0,$$

con condición inicial

$$c_n(0) = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Resolviendo la EDO anterior, obtenemos

$$c_n(t) = c_n(0)e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}} + e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}}\int_0^t g_n(s)e^{\frac{n^2\pi^2Ks}{L^2}}\,ds.$$

La demostración rigurosa de que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}, \tag{10}$$

corresponde a la solución de la ecuación (9) será realizado en el Teorema siguiente pero en una situación particular.

Teorema 2.3. *Sea $f(x)$, $g(x)$ funciones continuas con derivadas seccionalmente continuas en $[0,L]$, tal que*

$$f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0.$$

Entonces, el PVIF

$$\begin{array}{l} u_t = Ku_{xx} + g(x) \ \ en\ \ R, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \ \ 0 < x < L \end{array} \tag{11}$$

tiene una solución $u(x,t)$ dada por la expresión (10), con coeficientes dados por

$$c_n(t) = \frac{L^2 g_n}{n^2\pi^2K} + e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L}}\left[f_n - \frac{g_nL^2}{n^2\pi^2K}\right],$$

donde

$$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx,$$

$$g_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Demostración. Recordemos que

$$c_n(t) = c_n(0)e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}} + e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}}\int_0^t g_n(s)e^{\frac{n^2\pi^2Ks}{L^2}}\,ds.$$

En nuestro caso $c_n(0) = f_n$ y $g_n(s) = g_n$ (constante en s).

Así

$$\begin{aligned} c_n(t) &= f_n e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}} + e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}} g_n \frac{L^2}{n^2\pi^2K}\left(e^{\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}} - 1\right) \\ &= f_n e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}} + \frac{L^2}{n^2\pi^2K} g_n - \frac{L^2}{n^2\pi^2K} e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}} g_n \\ &= \frac{L^2}{n^2\pi^2K} g_n + e^{-\frac{n^2\pi^2Kt}{L^2}}\left(f_n - \frac{L^2}{n^2\pi^2K} g_n\right) \end{aligned}$$

Debemos justificar que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

es solución. Notemos que la serie es dominada por

$$c_1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + c_2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-c_3 n^2 t},$$

así $u(x,t)$ es continua en $\hat{R}$. Para mostrar que $u(x,t)$ verifica

$$u_t = u_{xx} + g(x),$$

el único punto delicado es mostrar que (lo cual es consecuencia de $\sum |g_n| < \infty$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = g(x), \quad \text{uniformemente en compactos.}$$

Finalmente la continuidad de $u(x,t)$ en $\bar{R}$ es consecuencia de que por las hipótesis sobre la f tenemos

$$\sum |f_n| < \infty.$$

Para mostrar esta convergencia, hacemos

$$f_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \frac{L}{n\pi} d_n$$

donde d_n son los coeficientes de Fourier de f' que es de cuadrado integrable. Así

$$|f_n| \leq \frac{c_1}{n^2} + c_2 d_n^2.$$

$\square$

2.4. Temperatura de Equilibrio. Supongamos que la ecuación

$$\begin{aligned}&u_t = Ku_{xx} + g(x) \text{ en } R,\\&u(0,t) = h_0(t), \ u(L,t) = h_1(t), \ t > 0,\\&u(x,0) = f(x), \ 0 < x < L,\end{aligned}$$

tiene una solución $U(x)$ tal que

$$\lim_{t\to+\infty} [u(x,t) - U(x)] = 0,$$

entonces $U(x)$ es llamada temperatura de equilibrio y

$$v(x,t) = u(x,t) - U(x),$$

es llamada parte transiente de la solución.

Ejemplo 2.3. Considera la ecuación

$$\begin{aligned}&u_t = Ku_{xx} \text{ en } R,\\&u(0,t) = \alpha, \ u(L,t) = \beta, \ t > 0,\\&u(x,0) = f(x), \ 0 < x < L.\end{aligned} \tag{12}$$

Procediendo intuitivamante, vamos a determinar una solución U (temperatura de equilibrio) de la ecuación anterior que no depende de t, esto es

$$\begin{aligned}&KU_{xx} = 0, \ 0 \le x \le L,\\&U(0,t) = \alpha, \ U(L,t) = \beta, \ t > 0,\end{aligned}$$

cuya solución es dada por

$$U(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L} x,$$

correspondiendo a la solución de equilibrio de (12). En efecto, sabemos que la solución de (12) es

$$u(x,t) = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{L} x + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Luego,

$$\lim_{t\to+\infty} [u(x,t) - U(x)] = \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = 0,$$

lo que prueba que $U(x)$ es solución de equilibrio.

Ejemplo 2.4. La temperatura de equilibrio de

$$\begin{aligned}&u_t = Ku_{xx} + g(x) \text{ en } R,\\&u(0,t) = \alpha, \ u(L,t) = \beta, \ t > 0,\\&u(x,0) = f(x), \ 0 < x < L,\end{aligned}$$

es dada por la solución del problema

$$\begin{aligned}&KU''(x) + g(x) = 0, \;\; 0 \leq x \leq L,\\ &U(0) = \alpha, \;\; U(L) = \beta, \;\; t > 0.\end{aligned}$$

En efecto, la función $v(x,t) = u(x,t) - U(x)$ es solución del problema

$$\begin{aligned}&v_t = Kv_{xx} \;\text{ en }\; R,\\ &v(0,t) = v(L,t) = 0, \;\; t > 0,\\ &v(x,0) = f(x) - U(x), \;\; 0 < x < L.\end{aligned}$$

es decir,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 Kt}{L^2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

donde c_n son los coeficientes de Fourier de $f(x) - U(x)$. Por lo tanto,

$$\lim_{t\to+\infty} [u(x,t) - U(x)] = \lim_{t\to+\infty} v(x,t) = 0,$$

ya que

$$|v(x,t)| \leq e^{-\frac{\pi^2 Kt}{L^2}} \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \leq ce^{-\frac{\pi^2 Kt}{L^2}} \longrightarrow 0.$$

cuando $t \to +\infty$.

Nota: $\Sigma|c_n|$ converge pués $f(x) - U(x)$ es continua con derivada seccionalmente continua.

2.5. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 2.1. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}&u_t = Ku_{xx}, \;\; , \quad 0 < x < L, \;\; t > 0,\\ &u(0,t) = 0, \;\; u(L,t) = 0, \;\text{ para }\; t > 0,\\ &u(x,0) = 6 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{L}.\end{aligned}$$

Ejercicio 2.2. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}&u_t = 4u_{xx}, \;\; , \quad 0 < x < 1, \;\; t > 0,\\ &u(0,t) = 0, \;\; u(1,t) = 0, \;\text{ para }\; t > 0,\\ &u(x,0) = x^2(1-x), \;\text{ para }\; x \in [0,1].\end{aligned}$$

Ejercicio 2.3. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}&u_t = Ku_{xx}, \quad 0 < x < L, \;\; t > 0,\\ &u_x(0,t) = 0, \;\; u_x(L,t) = 0, \;\text{ para }\; t > 0,\\ &u(x,0) = 6 + 4\cos \frac{3\pi x}{L}.\end{aligned}$$

Ejercicio 2.4. Considere la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \;\; x \in (0, \pi) \;\; ; t > 0 \\ &u(0, t) = 0 \;\text{ y }\; u(\pi, t) = 0, \\ &u(x, 0) = \operatorname{sen}^3 x. \end{aligned}$$

Determine la solución $u(x, t)$. (Ayuda: $\sin^3 x = \frac{3}{4} \operatorname{sen} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3x$). Resuelva también esta ecuaión en el caso en que $u(x, 0) = \operatorname{sen}^3 x$ es reemplazada por $u(x, 0) = \cos^3 x$.

Ejercicio 2.5. Transforme el problema , haciendo que las condiciones de frontera sean homogéneas

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx}, \quad 0 < x < L, \;\; t > 0, \\ &u(0, t) = A e^{-at}, \;\; u(L, t) = B, \;\text{ para }\; t > 0, \\ &u(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.6. Transforme el problema en otro, en que las condiciones de frontera sean homogéneas

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx}, \quad 0 < x < L, \;\; t > 0, \\ &u(0, t) = h_0(t) \;\text{ para }\; t > 0, \\ &u_x(L, t) + \alpha u(L, t) = h_1(t), \;\text{ para } t > 0, \\ &u(x, 0) = f(x), \;\text{ para } 0 < x < L. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.7. Considere el problema

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx} + \gamma, \quad 0 < x < L, \;\; t > 0, \\ &u(0, t) = \alpha \text{ y } \; u(L, t) = \beta, \quad t > 0, \\ &u(x, 0) = 0 \quad 0 < x < L. \end{aligned}$$

donde α, β y γ son constantes, calcule la solución de equilibrio.

Ejercicio 2.8. Considere la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx} + 1, \;\; x \in (0, 1), \;\; t > 0, \\ &u(0, t) = 0, \;\text{ y }\; u(1, t) = \lambda, \;\; t > 0, \\ &u(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

donde K, λ son constantes. Calcule la solución de equilibrio $U(x)$ y determine la solución $u(x, t)$ de la ecuación.

Ejercicio 2.9. Considere el problema

$$\begin{aligned} &u_t = K u_{xx} + g(t), \quad 0 < x < L, \;\; t > 0, \\ &u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ &u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

a) Muestre que la función $v = u - G(t)$ cumpla con los PVIF (problema valor inicial frontera), donde $G(t)$ es la primitiva de $g(t)$ con $G(0) = 0$.

b)Encuentre la solución en el caso en que $g(t) = \cos wt$ y $f(x) = 0$.

Ejercicio 2.10. Considere la ecuación

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + (1-x)x, \ \ x \in (0,1), \ \ t > 0, \\
&u(0,t) = \alpha, \ \text{ y } \ u(1,t) = 0, \ \ t > 0, \\
&u(x,0) = 0, \ \ x \in [0,1].
\end{aligned}
$$

donde α es un parámetro real. Determine su solución $u(x,t)$.

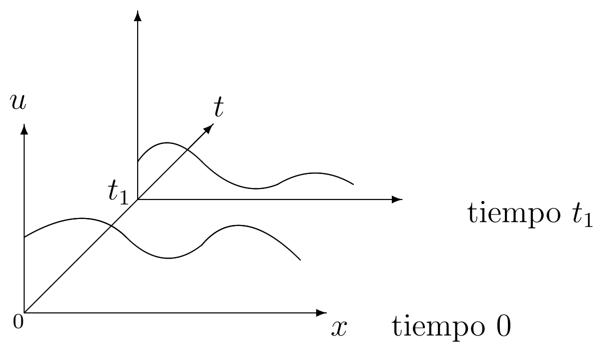
Ejercicio 2.11. Analice la siguiente ecuación del calor

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + u_{yy}, \ \ (x,y) \in \Omega \ ; t > 0 \\
&u(x,y,0) = f(x,y), \ \ (x,y) \in \Omega \\
&u(x,y,t) = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega.
\end{aligned}
$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^2$.Para iniciar su estudio, puede suponer que Ω es un rectángulo.

3. ECUACIÓN DE LA ONDA

Nos inspiraremos en la cuerda vibrante para introducir la ecuación de la onda. El fenómeno ocurre en el plano (x, u) y supone que la cuerda vibre en torno a la posición de reposo a lo largo del eje x.



Se asume que las partículas de la cuerda se mueven solo en la dirección del eje u, por esta razón, que usa la terminología de "vibración transversal".

También se supone que la cuerda no ofrece resistencia a ser doblada, por lo que es llamada flexible.

Para deducir la ecuación diferencial parcial asociada se utiliza la Ley de Newton:

"La derivada con relación al tiempo de la cantidad de movimiento del cuerpo es igual a la suma de las fuerzas aplicadas".

De esta forma se llega a la siguiente ecuación

$$\rho(x)u_{tt} = \tau(t)u_{xx} + h_1(x, t, u), \tag{13}$$

o bién

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x, t, u) \tag{14}$$

donde

$$c(x, t)^2 = \frac{\tau(t)}{\rho(x)} \quad \text{y} \quad h(x, t, u) = \frac{h_1(x, t, u)}{\rho(x)}\,.$$

Note que $\rho(x)$ corresponde a la densidad de la cuerda, $\tau(t)$ a la fuerza de tensión, y $h_1(x,t,u)$ indica las otras fuerzas actuando, tales como, la fuerza de gravedad, medio ambiente, etc.

1. ***Vibraciones Libres***.

   Suponiendo que las únicas fuerzas que actúan sean las de tensión, la ecuación (14) toma la forma
   $$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$
   Se puede suponer c constante cuando la cuerda sea homogénea ($\rho(x) = cte$) y que las vibraciones tengan amplitud muy pequeña ($\tau(t) = cte$).

2. ***Vibraciones Forzadas***.

   Suponga que la cuerda esté sujeta a una fuerza exterior. En este caso es de la forma
   $$u_{tt} = c^2 u_{xx} + h(x,t).$$

3. ***Vibraciones Amortiguadas***.

   Suponga que la cuerda esté inmersa en un fluido (aire, por ejemplo) el cual opone una resistencia al movimiento. En este caso, hay una fuerza externa dependiendo de la velocidad que se supone de la forma
   $$h(x,t) = -b\,u_t(x,t), \;\; b > 0.$$
   Así, la ecuación toma la forma
   $$u_{tt} = c^2 u_{xx} - b\,u_t,$$
   donde "$b > 0$" explica la resistencia al movimiento.

4. ***Vibraciones sobre la acción de una fuerza restauradora***.

   Suponga que exista un dispositivo que produzca una fuerza tendiente a traer la cuerda a la posición $u \equiv 0$ y que esa fuerza sea dada por
   $$h(x,t) = -au(x,t).$$

Así la ecuación queda de la forma

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - au.$$

El fenómeno fisíco aún no se encuentra descrito completamente. Falta decir algo sobre la extensión de la cuerda, sobre el tipo de articulación de las extremidades y finalmente sobre lo que provocó el movimiento.

- ***Cuerda finita con extremidades fijas***: Supongamos que la cuerda tenga longitud L y que en la posición de reposo ocupa el pedazo

  $$\{(x,0): \ x \in [0,L]\}.$$

  Así, la hipótesis de extremidades fijas implica que

  $$u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \ t \geq 0,$$

  que son llamadas condiciones de frontera.

  Desde el punto de vista matemático para que el problema esté bien planteado, debemos imponer los datos

  $$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \ \ 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) &= g(x), \ \ 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

  que son llamadas condiciones iniciales.

  Así el problema de cuerda vibrante finita con extremidades fijas consiste en determinar una función

  $$u(x,t), \ \ (x,t) \in [0,L] \times \mathbb{R}_0^+,$$

  que verifique

  $$\begin{array}{l} u_{tt} = K u_{xx} + h(x,t,u) \ \text{ en } \ R, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = g(x), \ \ 0 \leq x \leq L. \end{array}$$

  Esta ecuación puede modelar, por ejemplo, las vibraciones

  (a) de las cuerdas de un arpa $(f(x) \neq 0, \ g(x) = 0)$, o bien,

  (b) de las cuerdas de un piano $(f(x) = 0, \ g(x) \neq 0)$.

- ***Cuerda finita con extremidades libres***.

  La ecuación es
$$\begin{array}{l} u_{tt} = K u_{xx} + h(x,t,u) \ \text{ en } \ R, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \ \ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = g(x), \ \ 0 \leq x \leq L.. \end{array}$$

- ***Otras condiciones de frontera***.

  Por ejemplo
$$u(0,t) = a(t), \ \ u(L,t) = b(t), \ \ t \geq 0,$$
  (movimiento transversal de acuerdo a las leyes conocidas).

$$u_x(0,t) + h\, u(0,t) = 0, \ \ t \geq 0,$$
  (Conexión elástica en $x = 0$).

3.1. Separación de variables. Usaremos nuevamente el método de separación de variables para abordar el problema de la cuerda vibrante con extremidades fijas. Consideremos la ecuación

$$\begin{array}{l} u_{tt} = c^2\, u_{xx} \ \text{ en } \ R, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \text{ para } \ t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq L, \\ u_t(x,0) = g(x), \ \ 0 \leq x \leq L. \end{array} \tag{15}$$

donde c es una constante y
$$R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 0 < x < L \ \text{ y } \ t > 0\}.$$

Siguiendo el mismo procedimiento como en la ecuación del Calor llegamos al siguiente candidato a solución.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi c\, t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi c\, t}{L} \tag{16}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{17}$$

y

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{18}$$

Teorema 3.1. *Sean f, $g : [0, L] \to \mathbb{R}$ tales que f, f', f'', g, g' sean continuas, f''' y g'' son seccionalmente continuas. Además suponga que $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$.*
Entonces,

(i) *los coeficientes a_n y b_n están bien definidos,*

(ii)
$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad , \\
g(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad y
\end{aligned}
$$

(iii) *la expresión (16) define una función continua en $\bar{R}$, de clase C^2 en R que satisface la ecuación de Onda.*

Demostración. (i) Ya que f y g son continuas en $[0, L]$, las integrales en (17) y (18) convergen.

(ii) Como f y g son de clase C^1 en $[0, L]$ y $f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0$, entonces extendemos f y g continuamente en la recta de modo que sean impares y periódicas de período $2L$.

(iii) Para probar que (16) es una función continua en $\bar{R}$ utilizamos el Teorema de Fourier, debemos mostrar la convergencia uniforme de la serie en (16).

Observemos que la serie en (16) esta acotada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) \,. \tag{19}$$

De la hipótesis $f(0) = f(L) = f''(0) = f''(L) = g(0) = g(L) = 0$, obtenemos que

$$a_n = -\frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L f'''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \, dx \,, \tag{20}$$

y

$$\frac{n\pi c}{L} b_n = -\frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^L g''(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \, dx \,. \tag{21}$$

Así

$$|a_n| \leq \frac{k}{n^3} \quad \text{y} \quad |b_n| \leq \frac{k'}{n^3} \,,$$

donde k y k' constantes. Sea

$$u_n(t,x) = a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi c\, t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi c\, t}{L}$$

Note que existe una constante γ_0 tal que

$$|\frac{\partial}{\partial t}\, u_n(t,x)|\, , |\frac{\partial}{\partial x}\, u_n(t,x)| \leq \gamma_0\, (n|a_n| + n|b_n|)\, .$$

Así por el criterio M de Weirstrass se tiene que u es continua en $\bar{R}$ y de clase C^1 en R. Esto nos permite derivar término término en (16). Ahora observe que existe un γ_1 , tal que

$$|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u_n(t,x)|\, , |\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u_n(t,x)| \leq \gamma_1\, (n^2|a_n| + n^2|b_n|)\, .$$

Pero la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2|a_n| + n^2|b_n|). \tag{22}$$

En efecto, de (20) y (21), obtenemos

$$|a_n| \leq \frac{k''}{n^3}|c_n|\, , \quad |b_n| \leq \frac{k'''}{n^3}|d_n|\, ,$$

donde c_n y d_n son los coeficientes de Fourier de f''' y g'' y donde k'' y k''' son constantes. Luego usando $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ tenemos que

$$n^2|a_n| \leq \frac{k''}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n|^2\right)\, , \;\; n^2|b_n| \leq \frac{k'''}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |d_n|^2\right),$$

entonces usando el criterio de comparación y Parseval, la afirmación es demostrada. Por lo tanto u es de clase C^2 en R y verifica la ecuación de la Onda (15) .

□

Ejemplo 3.1. Considere la siguiente ecuación, donde A,B,C y D son constantes.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad 0 < x < L, \;\; t > 0, \\ &u(0,t) = A + Bt, \;\; u(L,t) = C + Dt, \;\; t > 0, \\ &u(x,0) = f(x), \;\; u_t(x,0) = g(x), \;\; 0 < x < L. \end{aligned}$$

Usaremos la idea de homogenizar los datos de frontera. En efecto, tomemos una función $v(x,t)$ que satisfaga las mismas condiciones de frontera que $u(x,t)$, es decir,

$$v(0,t) = A + Bt, \;\; v(L,t) = C + Dt, \;\; t > 0,$$

entonces, la función v es dada por

$$v(x,t) = A + Bt + (C + Dt - (A + Bt))\frac{x}{L}.$$

Definamos la función

$$w(x,t) = u(x,t) - v(x,t).$$

Así el problema se reduce a resolver la ecuación

$$\begin{cases} w_{tt} = c^2 w_{xx} \quad 0 < x < L, \; t > 0, \\ w(0,t) = 0, \; w(L,t) = 0, \; t > 0, \\ w(x,0) = f(x) - A - (C - A)\frac{x}{L}, \; 0 < x < L, \\ w_t(x,0) = g(x) - B - (D - B)\frac{x}{L}, \; 0 < x < L. \end{cases}$$

Suponiendo que

$$\hat{f}(x) = f(x) - A - (C - A)\frac{x}{L} \text{ y } \hat{g}(x) = g(x) - B - (D - B)\frac{x}{L}$$

pueden ser expresadas en series de fourier, entonces nuestro candidato a solución es

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{cn\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{cn\pi t}{L}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \hat{f}(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx,$$

$$b_n = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L \hat{g}(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Así $u(x,t)$ es dado por

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)\,.$$

3.2. Energía de la cuerda vibrante. Sea $u : R \to \mathbb{R}$, tal que $u \in C^1(\bar{R}) \cap C^2(R)$ y que verifique la ecuación de la onda

$$\rho(x)u_{tt} = \tau u_{xx} + h_1(x,t,u),$$

con τ independiente de t. Multiplicando la igualdad anterior por u_t e integrando entre 0 y L nos queda

$$\int_0^L \rho(x)u_{tt}u_t\, dx = \int_0^L \tau u_{xx}u_t\, dx + \int_0^L h_1(x,t,u)u_t\, dx.$$

Observando que

$$\frac{1}{2}(u_t^2)_t = u_{tt}u_t$$

e integrando por partes se obtiene que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L \rho(x)u_t^2\,dx = \tau u_x u_t\Big|_0^L - \int_0^L \tau u_x u_{tx}\,dx + \int_0^L h_1(x,t,u)u_t\,dx,$$

y así

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \tau u_x^2\,dx\right) = \tag{23}$$

$$= \tau u_x u_t\Big|_0^L + \int_0^L h_1(x,t,u)u_t\,dx.$$

La ecuación (23) es llamada relación de la energía. La expresión

$$K(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)u_t^2\,dx$$

es la energía Cinética de la cuerda y

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \tau u_x^2\,dx$$

es la energía Potencial. Por lo tanto,

$$E(t) = K(t) + V(t)$$

es la energía total de la cuerda.

Observación. Notemos que si no hay fuerzas externas ($h_1 \equiv 0$) y el problema es con extremidades fijas o libres, esto es

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \text{ ó}$$
$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0.$$

Se tiene que hay conservación de la energía

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \tau u_x^2\,dx\right) = 0\,,$$

es decir,

$$E(t) = cte.$$

Teorema 3.2 (Unicidad)**.** *La solución de la siguiente ecuación de la Onda si existe es única.*

$$\rho(x)u_{tt} = \tau u_{xx} + k_1(t,x), \text{ en } R \tag{24}$$

$$u(0,t) = h_1(t),\ u(L,t) = h_2(t),\ t > 0 \tag{25}$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 < x < L \tag{26}$$

Demostración. Por una solución nosotros entendemos una función

$$u : R \to \mathbb{R}, \ \ u \in C(\bar{R}) \cap C^2(R),$$

satisfaciendo (24), (25) y (26).

Supongamos que el problema anterior tiene dos soluciones u_1, u_2. Entonces $u = u_1 - u_2$ verifica

$$\begin{aligned}
&\rho(x)u_{tt} = \tau u_{xx} \ \text{ en } \ R, \\
&u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \ t > 0, \\
&u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ \ 0 < x < L.
\end{aligned}$$

luego, usando conservación de la energía se tiene que

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \rho(x)u_t^2\,dx + \frac{1}{2}\int_0^L \tau u_x^2\,dx = E(0) = 0\,.$$

Como $\rho(x) > 0$ y $\tau > 0$, tenemos

$$u_t = 0, \ \ u_x = 0, \ \ (x,t) \in R\,.$$

Así $u(x,t) = cte = 0$, pues $u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \ t > 0$. □

3.3. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 3.1. Determine el candidato a solución de

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2\, u_{xx} \ \text{ en } \ R, \\
&u(0,t) = u(L,t) = 0, \ \text{ para } \ t \geq 0, \\
&u(x,0) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq L, \\
&u_t(x,0) = g(x), \ \ 0 \leq x \leq L.
\end{aligned}$$

donde c es una constante y

$$R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 0 < x < L \ \text{ y } \ t > 0\}.$$

Ejercicio 3.2. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx}, \ \ x \in [0,1] \ \ ; t > 0, \\
&u(x,0) = f(x), \\
&u_t(x,0) = 0 \ \text{ y } \ u(0,t) = u(1,t) = 0,
\end{aligned}$$

donde $f(x)$ es definida por $f(x) = x$, si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ y $f(x) = 1 - x$, si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Ejercicio 3.3. Resuelva la ecuación.

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx} + Ae^{-x}, \ \ \ 0 < x < L, \ \ \ t > 0, \\
&u(0,t) = B, \ \ u(L,t) = M, \ \ \ t > 0, \\
&u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \ \ \ 0 < x < L.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.4. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = \operatorname{sen} x, \;\; x \in (0,\pi), \;\; t \in (0,+\infty), \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.5. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned} &u_{tt} - c^2 u_{xx} = x, \;\; x \in (0,\pi), \;\; t > 0, \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.6. Usando separación de variables resuelva la ecuación

$$\begin{aligned} &u_{tt} - u_{xx} = 0, \;\; 0 < x < 1, \;\; t > 0, \\ &u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \;\; u(0,t) = 0 \text{ y } u(1,t) = \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Ejercicio 3.7. Sea $u \in C^1(\overline{R}) \cap C^2(R)$ donde $R = (0,1) \times (0,+\infty)$. Suponga que $u(x,t)$ verifica la siguiente ecuación de la onda.

$$u_{tt} = K^2 u_{xx} + h(x,t,u)$$

donde $K > 0$ y h es una función constante.

a) Determine la energía total de la cuerda.
b) Muestre que si se imponen condiciones homogéneas de frontera y no actúan fuerzas externas el sistema, entonces hay conservación de la energía.

4. MÉTODO D'ALEMBERT

Sea $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ solución de la ecuación de la Onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \tag{27}$$

Note que esta es una de las pocas ecuaciones donde es posible encontrar explícitamente la solución. En efecto, consideremos un nuevo sistema de coordenadas,

$$\xi = x + ct,$$
$$\eta = x - ct.$$

Usando la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

De este modo la ecuación de la Onda

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

se transforma en

$$-4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

como $c \neq 0$, se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Integrando obtenemos

$$u(\xi, \eta) = P(\xi) + Q(\eta),$$

para ciertas funciones P y Q. Luego volviendo a las variables x, y, se obtiene

$$u(x,t) = P(x + ct) + Q(x - ct). \tag{28}$$

Suponiendo que P y Q son C^2, se tiene que la expresión (28) es solución de (27) y es llamada "solución general" de la ecuación de la Onda (*D'Alembert encontró esta fórmula en 1747*).

Imponiendo las siguientes condiciones de borde

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= g(x), \end{aligned}$$

obtenemos que

$$P(x) + Q(x) = f(x), \tag{29}$$
$$c\,(P'(x) - Q'(x)) = g(x). \tag{30}$$

Derivando (29) se obtiene

$$P'(x) + Q'(x) = f'(x), \tag{31}$$

y así multiplicando (31) por c y sumando a (30) se obtiene que

$$P'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x).$$

Así

$$P(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + C.$$

A partir de (29) nos queda

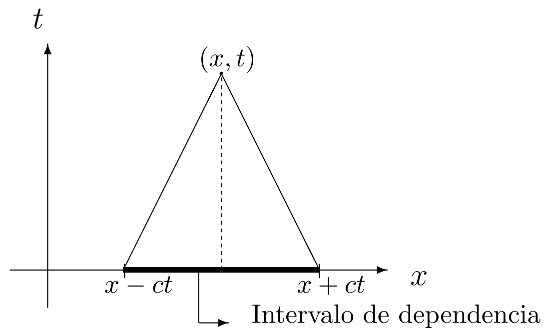
$$Q(x) = f(x) - P(x) = \frac{1}{2}\int_0^x g(s)\,ds - C.$$

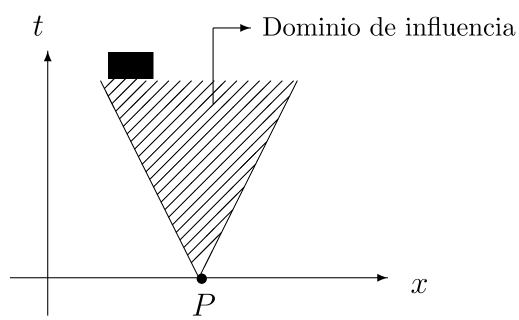
Luego

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= P(x+ct) + Q(x-ct) \\
&= \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)\,ds + C \\
&\quad + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)\,ds - C \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.
\end{aligned}$$

Entonces la solución de la ecuación es

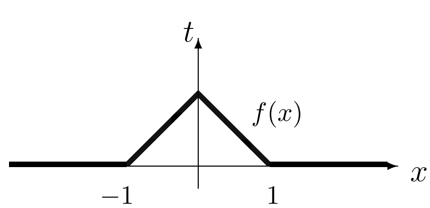
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds. \tag{32}$$



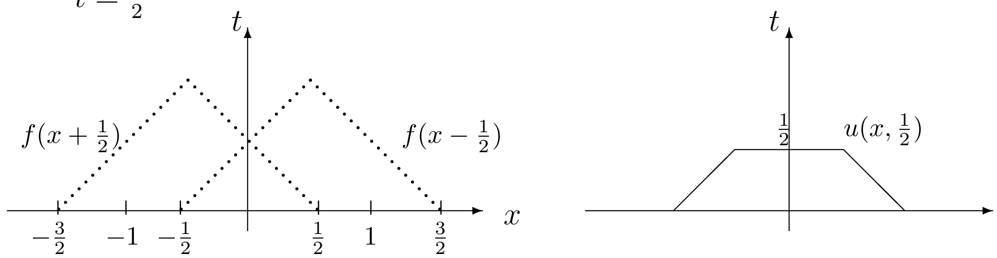


Ejemplo 4.1. Suponga $g(x) \equiv 0$ y $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|\,, & 0 \leq |x| \leq 1\,, \\ 0\,, & |x| \geq 1. \end{cases}$
y c=1. Entonces,

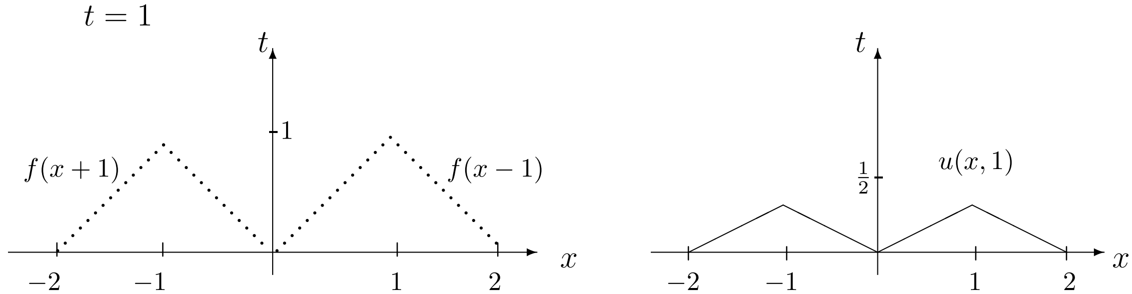
$t = 0$



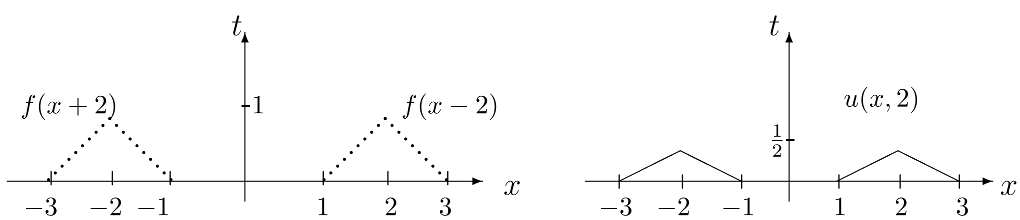
$t = \frac{1}{2}$



$t = 1$



$t = 2$



Ahora desarrollaremos la solución de la siguiente eacuación de D'Alembert en algunos casos particulares:

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0, \\
&u(x,0) = f(x)\,, \;\; x \in \mathbb{R} \\
&u_t(x,0) = g(x)\,, \;\; x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Caso 1. Suponga que las condiciones iniciales son de la forma

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = f(x)\,, \;\; x \in \mathbb{R}\,, \\
&u_t(x,0) = 0\,, \;\; x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

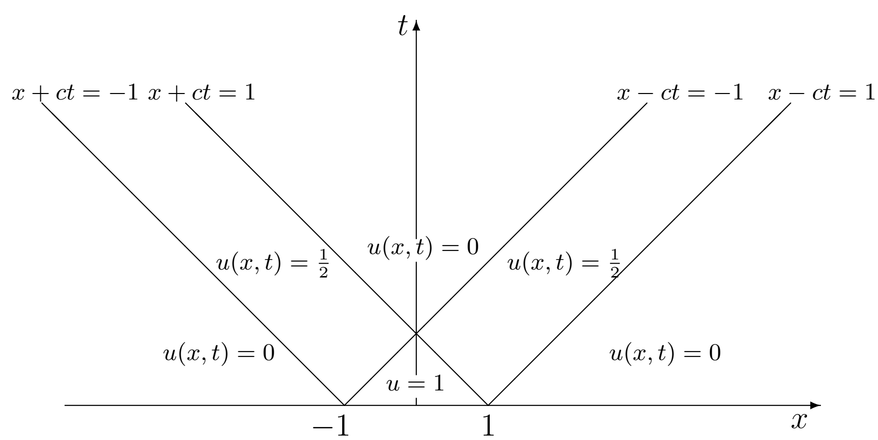
Entonces, la solución de D'Alembert es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x-ct) + f(x+ct)\right).$$

Ejemplo 4.2. Suponga que

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & -1 < x < 1, \\ 0\,, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Entonces la solución es



Caso 2. Suponga que las condiciones iniciales son

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = 0\,, \;\; x \in \mathbb{R}\,, \\
&u_t(x,0) = g(x)\,, \;\; x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

En este caso la solución es dada por

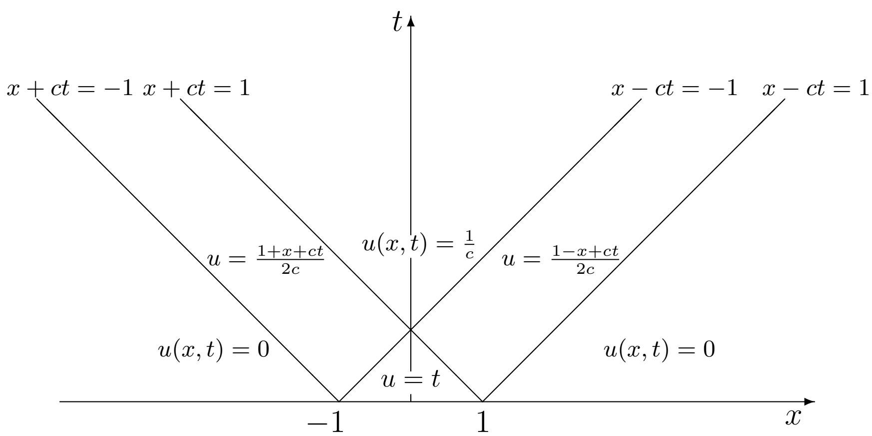
$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(u)\,du.$$

O sea, la solución en este caso depende de los valores que tiene la velocidad inicial en el intervalo $[x-ct, x+ct]$.

Ejemplo 4.3. La solución del problema

$$\begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx}\,, \;\; x \in \mathbb{R}\,, \;\; t > 0\,, \\ u(x,0) = 0\,, \;\; x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 1\,, & -1 < x < 1, \\ 0\,, & |x| \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

es descrita por el siguiente gráfico



Soluciones en el semi–espacio

Procediendo de manera similar a lo anterior obtenemos que la solución de la ecuación de la Onda

$$\begin{array}{l} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \;\; x > 0, \;\; t > 0, \\ u(0,t) = h(t), \;\; t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \;\; u_t(x,0) = g(x). \end{array}$$

es dada por

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x\,-\,ct}^{x\,+\,ct} g(s)ds, & si \;\; x \geq ct, \\[2ex] \frac{1}{2}\left(f(ct+x) - f(ct-x)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct\,-\,x}^{ct\,+\,x} g(s)\,ds + h\left(\frac{ct-x}{c}\right), & si \;\; x < ct. \end{cases}$$

4.1. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 4.1. Considere el problema de Cauchy

$$u_{tt} = 9\,u_{xx}, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0,$$

$$u(x,0)=\begin{cases} 1 & x\in[1,2] \\ 0 & x\notin[1,2] \end{cases}$$

$$u_t(x,0)=0.$$

Determine los puntos del semiplano $t>0$, donde $u(x,t)=0$. Calcule el valor de u en los puntos $(\frac{3}{2},\frac{1}{10})$ y $(5,\frac{7}{6})$.

Ejercicio 4.2. Considere la ecuación

$$\begin{aligned} &u_{tt}=u_{xx}, \;\; x\in\mathbb{R}, \quad t>0, \\ &u(x,0)=0, \;\; x\in\mathbb{R}, \\ &u_t(x,0)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & -\pi\le x\le\pi \\ 0 & x\notin[-\pi,\pi] \end{cases} \end{aligned}$$

Determine los puntos del semiplano $t>0$ donde $u(x,t)=0$.

Ejercicio 4.3. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned} &u_{tt}=u_{xx}, \;\; x>0, \;\; t>0, \\ &u(0,t)=0, \;\; t>0, \\ &u(x,0)=xe^{-x^2}, \;\; 0<x<\infty, \\ &u_t(x,0)=0. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.4. Determinar la solución de la ecuación de ondas en un intervalo semi-infinito

$$u_{tt}=c^2u_{xx}, \;\; 0<x<\infty, \;\; t>0,$$

con frontera $u_x(0,t)=0$, y condiciones iniciales

$$u(x,0)=\begin{cases} 0, & 0<x<2, \\ 1, & 2<x<3, \\ 0, & x>3, \end{cases} \quad u_t(x,0)=0.$$

Ejercicio 4.5. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned} &u_{tt}=u_{xx}, \;\; x\in\mathbb{R}, \;\; t>0, \\ &u(x,0)=0, \;\; x\in\mathbb{R}, \\ &u_t(x,0)=-xe^{-x^2}, \;\; x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.6. Considere el problema de vibración de una cuerda

$$\begin{aligned} &u_{tt}=4u_{xx}, \;\; x\in\mathbb{R}, \;\; t>0, \\ &u(x,0)=\operatorname{sen} 2x, \;\; x\in\mathbb{R}, \\ &u_t(x,0)=\cos 2x, \;\; x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Calcule $u(x,0)$ y $u_t(0,t)$.

Ejercicio 4.7. Determine una solución débil para la ecuación

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx}, \;\; x \in \mathbb{R}, \, t > 0,\\
&u(x,0) = 0,\\
&u_t(x,0) = \chi_{[-1,1]}(x).
\end{aligned}
$$

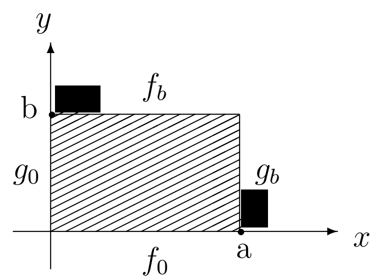
Ejercicio 4.8. Resolver la ecuación

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = t, \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R},\\
&u(x,0) = x \;\text{ y }\; u_t(x,0) = 1.
\end{aligned}
$$

5. ECUACIÓN DE LAPLACE

5.1. Ecuación de Laplace en un rectángulo. Consideremos el problema

$$\begin{aligned}
&\triangle u = 0, \ \text{ en } \ (0,a)\times(0,b),\\
&u(x,0) = f_0(x), \ \ u(x,b) = f_b(x),\\
&u(0,y) = g_0(y), \ \ u(a,y) = g_a(y).
\end{aligned}$$



Es suficiente resolver los problemas donde tres de las cuatro condiciones de borde es cero. En efecto, resolvamos por ejemplo,

$$\begin{aligned}
&\triangle u = 0, \ \text{ en } \ (0,a)\times(0,b),\\
&u(x,0) = f_0(x),\\
&u(x,b) = u(0,y) = u(a,y) = 0.
\end{aligned}$$

Buscaremos soluciones del tipo

$$u(x,y) = F(x)G(y).$$

Reemplazando en la ecuación, se obtiene

$$-\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G''(y)}{G(y)} = \lambda.$$

La ecuación $-F''(x) = \lambda F(x)$ tiene la siguiente familia de soluciones

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad F_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}, \ \ n = 1, 2, ...$$

Para estos valores de λ la ecuación $G''(y) = \lambda G(y)$ tiene la siguiente solución

$$G_n(y) = \operatorname{senh}\frac{n\pi(b-y)}{a}.$$

Así el candidato a solución es dado por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi(b-y)}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}.$$

Imponiendo la condición de borde se obtiene

$$f_0(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}.$$

Así

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx\,.$$

De forma análoga se resuelven los otros tres casos.

Ejemplo 5.1. Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi,\ \ 0 < y < \pi, \\ &u(0,y) = u(\pi,y) = u(x,\pi) = 0, \\ &u(x,0) = \sin^2 x. \end{aligned}$$

Usando la fórmula anterior se obtiene que

$$u(x,y) = \Sigma_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx \operatorname{senh}(n(\pi - y)),$$

donde

$$c_n \operatorname{senh} \pi n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} nx dx,$$

o sea,

$$c_n = \frac{8}{\pi \operatorname{senh}(\pi(2n-1))} \frac{1}{(2n-1)((2n-1)^2-4)}.$$

5.2. Ecuación de Laplace en un disco. Sea $u : D_R \mapsto \mathbb{R}$ una función de clase C^2 donde D_R es el disco de centro 0 y radio R. Entonces, haciendo el cambio de variables

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\operatorname{sen}\theta, \\ v(r,\theta) &= u(x,y)\,, \end{aligned}$$

se obtiene

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}.$$

Resolvamos el siguiente problema de Dirichlet en el disco D_R

$$\begin{aligned} &\Delta v = 0, \ \ r < R, \\ &v(R,\theta) = f(\theta), \ \ \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Determinaremos soluciones de la forma (separación de variables)

$$v(r,\theta) = X(r)Y(\theta)\,.$$

Sustituyendo en la ecuación nos queda

$$\frac{r^2X''(r)+rX'(r)}{X(r)}=-\frac{Y''(\theta)}{Y(\theta)}=\lambda.$$

La solución debe ser $2\pi-$periódica, por lo que es natural imponer las condiciones

$$\begin{aligned} Y(0)&=Y(2\pi),\\ Y'(0)&=Y'(2\pi). \end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{aligned} -Y''(\theta)&=\lambda Y(\theta),\\ Y(0)&=Y(2\pi),\\ Y'(0)&=Y'(2\pi), \end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} &\lambda_n=n^2,\ \ n=0,1,2,...\\ &Y_0(\theta)=1,\\ &Y_n(\theta)=\cos n\theta\ \text{ y }\ Y_n(\theta)=\operatorname{sen} n\theta\,, \end{aligned}$$

luego la segunda ecuación para cada n

$$r^2X''(r)+rX'(r)-\lambda X(r)=0,\ \ \lambda=n^2,$$

tiene como solución

$$\begin{aligned} X_0(r)&=c_1+c_2\ln r,\\ X_n(r)&=c_1'\,r^n+c_2'\,r^{-n}. \end{aligned}$$

Notar que es natural imponer que $c_2=c_2'=0$, si no la solución no es derivable en 0. (desde el punto de vista físico la solución debe estar acotada). Así es natural (método de superposición) determinar soluciones de la forma

$$v(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}r^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta\right). \tag{33}$$

Imponiendo la condición de borde $v(r,\theta)=f(\theta)$, llegamos a la expresión

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}R^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\operatorname{sen} n\theta\right)\ ,$$

y así

$$\begin{aligned} a_n&=\tfrac{1}{\pi R^n}\textstyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta,\ \ n=0,1,2,...\\ b_n&=\tfrac{1}{\pi R^n}\textstyle\int_0^{2\pi}f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\,d\theta,\ \ n=1,2,... \end{aligned} \tag{34}$$

Notar que

$$\begin{aligned}
v(r,\theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\phi)\cos n\phi \, d\phi \, \cos n\theta \\
&+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(\phi)\operatorname{sen} n\phi \, d\phi \, \operatorname{sen} n\theta \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} (\cos n\phi \cos n\theta + \operatorname{sen} n\phi \operatorname{sen} n\theta)\, f(\phi)\, d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\phi)\, d\phi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{\pi R^n} \int_0^{2\pi} \cos n(\theta-\phi) f(\phi)\, d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta-\phi) \right) f(\phi)\, d\phi.
\end{aligned}$$

Pero vale la identidad

$$R^2 - r^2 = \left(R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta\right) \left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{R^n} \cos n(\theta-\phi) \right).$$

Así llegamos a la **fórmula de Poisson**:

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi) + r^2} f(\phi)\, d\phi. \tag{35}$$

Teorema 5.1. *Sea $f(\theta)$ una función continua definida en $[0, 2\pi]$ verificando $f(0) = f(2\pi)$. Entonces la expresión (33) con a_n, b_n dados por (34) es una función armónica en el disco D_R y*

$$v(r,\theta) \longrightarrow f(\theta_0), \ \ \textit{cuando}\ \ (r,\theta) \longrightarrow (R, \theta_0).$$

Notemos que si $r = 0$, de (35) tenemos

$$v(0,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi)\, d\phi.$$

(si $\triangle v = 0$, el valor de u en el centro del disco es el valor medio de u sobre la frontera).

Problema de Neumann en el disco.

Consideremos el problema,

$$\Delta v = 0 \text{ en } r < R,$$
$$v_r(R,\theta) = f(\theta), \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

El candidato a solución es

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta\right),$$

y su derivada con respecto a r es dada por

$$v_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} n r^{n-1} \left(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta\right),$$

luego,

$$f(\theta) = v_r(R,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} n R^{n-1} \left(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta\right).$$

Así los coeficientes son dados por

$$a_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \;\; n = 1, 2, 3, ...$$
$$b_n = \frac{1}{n\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

Notar que una condición necesaria para que el problema tenga solución es(integrando)

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = 0.$$

Ejemplo 5.2. Encontremos la solución de la ecuación

$$\Delta v = 0 \text{ en } r < 1,$$
$$v_r(1,\theta) = \operatorname{sen}^3\theta, \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Notemos que

$$\operatorname{sen}^3\theta = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3\theta\,.$$

Note que no es necesario calcular la serie. Tenemos que $v_r(1,\theta) = \operatorname{sen}^3\theta$, es equivalente con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta\right) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3\theta,$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \ \ \forall n, \\ b_n &= 0, \ \ n \neq 1, 3, \\ b_1 &= \frac{3}{4}, \ \ b_3 = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Así, la solución es dada por

$$v(r,\theta) = \frac{3}{4} r \operatorname{sen} \theta - \frac{1}{12} r^3 \operatorname{sen} 3\theta.$$

Note que la solución no es única pues si v es solución $v + cte$ también lo es.

Ejemplo 5.3 (**Neumann: Condiciones de borde mixtas**)**.** Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} &\Delta v = 0\,, \quad 0 < r < 1, \ \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ &v_r(1,\theta) = f(\theta), \\ &v_\theta(r,0) = v(r, \frac{\pi}{2}) = 0. \end{aligned}$$

Con el método de separación de variables, buscaremos soluciones de la forma

$$v(r,\theta) = X(r)Y(\theta)$$

donde X, Y se obtienen a través de de las ecuaciones

$$\begin{aligned} &Y''(\theta) + \lambda Y(\theta) = 0, \\ &Y'(0) = Y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &r^2 X''(r) + r X'(r) - \lambda X(r) = 0, \\ &X(r) \ \text{ definida en } \ r = 0. \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} &\lambda_n = (2n-1)^2, \\ &Y_n(\theta) = \cos(2n-1)\theta, \ \ n = 1, 2, 3, ... \\ &X_n(r) = c r^{2n-1}, \end{aligned}$$

luego, nuestro candidato a la solución es de la forma

$$v(r,\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n r^{2n-1} \cos(2n-1)\theta.$$

Imponiendo la condición de borde llegamos a

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1) c_n \cos(2n-1)\theta.$$

Así

$$c_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta) \cos(2n-1)\theta \, d\theta, \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

Ejemplo 5.4 (Problema de Dirichlet no hómogeneo en el disco). Resolvamos la ecuación

$$\begin{aligned} &\Delta v = 4\,, \;\; r < 1, \;\; \theta \in [0, 2\pi], \\ &v(1, \theta) = \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Sabemos que la solución para un problema homogéneo del tipo

$$\begin{aligned} &\Delta v = 0\,, \;\; r < 1, \;\; \theta \in [0, 2\pi] \\ &v(1, \theta) = f(\theta)\,, \end{aligned}$$

es dado por

$$v(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta \right)$$

donde

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi R^n} \textstyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \;\; n = 0, 1, 2, ... \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi R^n} \textstyle\int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \;\; n = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Así es natural buscar soluciones del tipo

$$v(r, \theta) = A_0(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n(r) \cos n\theta + B_n(r) \operatorname{sen} n\theta \right). \tag{36}$$

Así $\Delta v = 4$ es equivalente con

$$A_0''(r) + \frac{1}{r} A_0'(r) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[A_n''(r) + \frac{1}{r} A_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} A_n(r) \right] \cos n\theta$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} \left[B_n''(r) + \frac{1}{r} B_n'(r) - \frac{n^2}{r^2} B_n(r) \right] \operatorname{sen} n\theta = 4\,.$$

Así se producen las siguientes ecuaciones ordinarias

$$A_0''(r) + \tfrac{1}{r}A_0'(r) = 4,$$

$$A_n''(r) + \tfrac{1}{r}A_n'(r) - \tfrac{n^2}{r^2}A_n(r) = 0, \tag{37}$$

$$B_n''(r) + \tfrac{1}{r}B_n'(r) - \tfrac{n^2}{r^2}B_n(r) = 0.$$

La condición de borde $v(1,\theta) = \cos 2\theta$ implica de acuerdo a (36) que

$$\begin{array}{l} A_0(1) = 0\,, \;\; A_2(1) = 1, \\ A_n(1) = 0\,, \;\; \forall\, n \neq 2, \\ B_n(1) = 0\,, \;\; \forall\, n \geq 1. \end{array} \tag{38}$$

Resolviendo las ecuaciones (37) con las condiciones iniciales (38) se obtiene

$$\begin{array}{l} A_0(r) = c_1 + c_2 \ln r + r^2\,, \\ A_2(r) = c_1'\, r^2 + c_2\, r^{-2}\,. \end{array}$$

Como las soluciones deben ser acotadas, tenemos

$$\begin{array}{l} A_0(r) = c_1 + r^2\,, \\ A_2(r) = c_1'\, r^2\,. \end{array}$$

Imponiendo (38) obtenemos

$$\begin{array}{l} A_0(r) = -1 + r^2\,, \\ A_2(r) = r^2\,. \end{array}$$

Así la solución es dada por:

$$v(r,\theta) = r^2(1 + \cos 2\theta) - 1.$$

Método 2: Homogeneizando la ecuación. Sea $w = r^2$, entonces

$$\begin{array}{l} \Delta(v - w) = 0\,, \;\; r < 1, \;\; \theta \in [0, 2\pi], \\ (v - w)(1,\theta) = \cos 2\theta. \end{array}$$

Sea $V = v - w$, entonces resolvemos

$$\begin{array}{l} \Delta V = 0\,, \;\; r < 1, \;\; \theta \in [0, 2\pi], \\ V(1,\theta) = \cos 2\theta - 1, \end{array}$$

la solución es de la forma (usando (33))

$$V(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \left(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta\right),$$

con

$$\frac{a_0}{2} = -1, \;\; a_2 = 1,$$

y todos los demás igual a cero.

Así
$$V(r,\theta) = -1 + r^2\cos 2\theta,$$
por lo tanto
$$v - w = -1 + r^2\cos 2\theta,$$
es decir
$$v(r,\theta) = r^2(1+\cos 2\theta) - 1.$$

Generalización del método 2: Consideremos la ecuación

(39)
$$\begin{aligned} &\Delta v = h(r)\,, \quad r < R, \\ &v(R,\theta) = f(\theta)\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Recuerde que el Laplaciano en coordenadas polares es dado por
$$\Delta v = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}.$$
Así, si encontramos una función $B(r)$ tal que
$$B''(r) + \frac{1}{r}B'(r) = h(r),$$
y un w tal que
$$\begin{aligned} &\Delta w = 0\,, \quad r < R, \\ &w(R,\theta) = f(\theta) - B(r)\,, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$
Entonces,
$$v(r,\theta) = w(r,\theta) + B(r),$$
es solución de (39).

5.3. Problema de Dirichlet en un anillo. Consideremos el problema
$$\begin{aligned} &\Delta v = 0 \quad R_1 < r < R_2, \\ &v(R_1,\theta) = g_1(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi\,, \\ &v(R_2,\theta) = g_2(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi. \end{aligned}$$
Usando separación de variables y condiciones de periodicidad, como en el disco, las soluciones son del tipo
$$r^n \operatorname{sen} n\theta\,, \quad \frac{1}{r^n}\operatorname{sen} n\theta\,, \quad r^n\cos n\theta\,, \quad \frac{1}{r^n}\cos n\theta\,, \quad \ln r\,, \quad 1.$$
No se descartan como antes las que tienen una singularidad en cero, porque cero no pertenece al anillo $\{(x,y)\ :\ \ R_1 < |(x,y)| < R_2\}$. Así el candidato a solución toma la forma

(40)
$$v(r,\theta) = a_0 + b_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n + b_n r^{-n})\cos n\theta + (c_n r^n + d_n r^{-n})\operatorname{sen} n\theta.$$

Imponiendo las condiciones de borde y empleando la unicidad de los coeficientes de Fourier obtenemos

$$\begin{aligned} a_0 + b_0 \ln R_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(s)\,ds\,, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_2(s)\,ds\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(s)\cos ns\,ds\,, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_2(s)\cos ns\,ds\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(s)\,\mathrm{sen}\, ns\,ds\,, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_2(s)\,\mathrm{sen}\, ns\,ds\,. \end{aligned}$$

Es decir, para determinar la solución debemos resolver todos estos sistemas de variables a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n.

Ejemplo 5.5. Determinemos la solución de la ecuación

$$\begin{array}{l} \Delta v = 0\,,\ \ 1 < r < 2, \\ v(1,\theta) = 0\,,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi \\ v(2,\theta) = \mathrm{sen}\,\theta\,,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{array}$$

La solución es de la forma (40), entonces:

Si $r = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} a_0 &= 0\,, \\ a_n + b_n &= 0\,, \\ c_n + d_n &= 0\,. \end{aligned}$$

Si $r = 2$, tenemos

$$\begin{array}{l} a_0 + b_0 \ln 2 = 0\,, \\ 2^n a_n + 2^{-n} b_n = 0\,, \\ 2c_1 + 2^{-1} d_1 = 1\,, \\ 2^n c_n + 2^{-n} d_n = 0\,,\ \ n \neq 1\,. \end{array}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned}
&a_0 = b_0 = 0\,,\\
&a_n = b_n = 0\,,\\
&c_n = d_n = 0\,,\ \ n \neq 1\\
&c_1 = \frac{2}{3}\,,\ \ d_1 = -\frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución de la ecuación es dada por

$$v(r,\theta) = \left(\frac{2}{3}r - \frac{2}{3}r^{-1}\right)\operatorname{sen}\theta.$$

Ejemplo 5.6. Resolvamos la ecuación

$$\begin{aligned}
&\Delta v = 0\,,\ \ 1 < r < 2,\\
&v(1,\theta) = \alpha\,,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\\
&v(2,\theta) = \beta\,,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi
\end{aligned}$$

donde α y β son constantes. El problema se reduce a resolver

$$\begin{aligned}
&a_0 + b_0 \ln 1 = \alpha\,,\\
&a_0 + b_0 \ln 2 = \beta\,,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
&a_0 = \alpha\,,\\
&b_0 = \frac{\beta - \alpha}{\ln 2}\,.
\end{aligned}$$

Así la solución es

$$v(r,\theta) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{\ln 2}\ln r.$$

Ejemplo 5.7. Resolvamos la ecuación

$$\begin{aligned}
&\Delta v = 0\,,\ \ 1 < r < 2,\\
&v(1,\theta) = \operatorname{sen}\theta\,,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\\
&v(2,\theta) = \operatorname{sen}\theta\,,\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones de borde y la unicidad de los coeficientes de Fourier, llegamos a

$$\begin{aligned}
&c_1 + d_1 = 1\,,\\
&2c_1 + 2^{-1}d_1 = 1\,,
\end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$c_1 = \frac{1}{3}\,,\quad d_1 = \frac{2}{3}\,.$$

Entonces la solución toma la forma

$$v(r,\theta) = \left(\frac{1}{3}r + \frac{2}{3}r^{-1}\right) \operatorname{sen}\theta.$$

5.4. Ecuación de Laplace en un dominio exterior. Una discusión similar a la anterior nos permite mostrar que el siguiente problema exterior

$$\begin{array}{l} \Delta v = 0\,, \quad r > 1\,, \\ v(1,\theta) = g(\theta)\,, \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{array}$$

tiene como solución

$$v(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\,, \tag{41}$$

y naturalmente se tiene que

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta\,, \\ a_n & = & \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\,d\theta\,, \\ b_n & = & \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\operatorname{sen} n\theta\,d\theta\,. \end{array}$$

Ejemplo 5.8. Resolvamos la ecuación

$$\begin{array}{l} \Delta v = 0\,, \quad r > 1\,, \\ v(1,\theta) = 1 + \operatorname{sen}\theta + \cos 3\theta\,. \ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\,. \end{array}$$

Usando (41) obtenemos

$$1 + \operatorname{sen}\theta + \cos 3\theta = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta,$$

de donde se obtiene que

$$a_0 = 1\,, \ \ b_1 = 1\,, \ \ a_3 = 1,$$

y todos los demás términos son cero. Entonces, la solución viene dada por

$$v(r,\theta) = 1 + \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{r^3}\cos 3\theta.$$

5.5. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 5.1. Resuelva

$$\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=0, \quad 0<x<\pi,\ \ 0<y<\pi,\\
&u(x,0)=x^2, \quad u(x,\pi)=0,\\
&u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.2. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_{tt}+u_{xx}=-1,\ \ (x,t)\in(0,1)\times(0,1),\\
&u(0,t)=0 \text{ y } u(1,t)=0, \text{ para } 0\le t\le 1,\\
&u(x,0)=0 \text{ y } u(x,1)=x \text{ para } 0\le x\le 1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.3. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=y\cos x,\ \ (x,y)\in(0,\pi)\times(0,1),\\
&u_x(0,y)=0 \text{ y } u_x(\pi,y)=0, \text{ para } ,0\le y\le 1\\
&u_y(x,0)=0 \text{ y } u_y(x,1)=0 \text{ para } 0\le x\le \pi.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.4. Resolver el problema en un semicírculo

$$\begin{aligned}
&\Delta u=0, \text{ para } r<1, \quad 0<\theta<\pi,\\
&u(r,0)=u(r,\pi)=0,\\
&u(1,\theta)=\theta(\pi-\theta).
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.5. Determine la solución de la ecuación

$$\begin{aligned}
&\Delta u=0,\ \ 1<r<2,\\
&u(1,\theta)=0,\ \ u(2,\theta)=\sin\theta,\ \ 0\le\theta\le 2\pi.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.6. Determine la solución de

$$\begin{aligned}
&\Delta u=0, \text{ para } r<1 \text{ y } \theta\in(0,\frac{\pi}{2}),\\
&u_r(1,\theta)=f(\theta) \text{ y } u_\theta(r,0)=u(r,\frac{\pi}{2})=0.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.7. Resolver la ecuación

$$\begin{aligned}
&\Delta u=\cos\theta,\ \ 1<r<2,\\
&u_r(1,\theta)=0 \text{ y } u_r(2,\theta)=\cos 2\theta.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.8. Resolver el problema en el dominio exterior

$$\begin{aligned}
&\Delta u=0, \text{ si } r>R,\\
&u(R,\theta)=\cos^3\theta \text{ si } 0\le\theta\le 2\pi.\\
&u \text{ acotada cuando } r\to\infty.
\end{aligned}$$

Ejercicio 5.9. Inspirado en el problema de Dirichlet obtenga un método para resolver el problema de Neumann en un dominio exterior. Aplique este método para resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0,\ 1 < r, \\ &u_r(1,\theta) = \sin\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.10. Determinar si la ecuación tiene solución

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0,\ \ r < 1, \\ &u_r(1,\theta) = f(\theta),\ \ 0 < \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

para $f(\theta) = \cos^2 x \quad \text{y} \quad f(\theta) = \sin^3 x$

Ejercicio 5.11. Suponga que existe una solución $B(r)$, tal que,

$$B''(r) + \frac{1}{r}B'(r) = r\log(r) \ \text{ y } \ B(1) = 1.$$

Determine la solución de

$$\begin{aligned} &\Delta u = r\log(r),\ \ r < 1, \\ &u(1,\theta) = \cos 2\theta,\ \ 0 < \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.12. Estudie la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0,\ \ r < 1, \\ &u_r(1,\theta) = \operatorname{sen}^4\theta,\ \ 0 < \theta < 2\pi. \end{aligned}$$

6. TRANSFORMADA DE FOURIER

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ absolutamente integrable, se define la transformada de Fourier de f por

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx.$$

Vale el siguiente resultado de inversión.

Teorema 6.1. *Sea $f\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y absolutamente integrable. Entonces*

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(w)e^{iwx}\,dw.$$

Notaciones.

$$\mathcal{F}(f)=\hat{f}\,,\quad \mathcal{F}^{-1}(\hat{f})=f\,.$$

Las siguientes son algunas propiedades de la transformada de Fourier:

1. $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son lineales en su dominio de definición.
2. Si $f,\,f',\,f''\in C(\mathbb{R})$ y son absolutamente integrables. Entonces
$$\mathcal{F}(f')=iw\mathcal{F}(f)\,,\quad \mathcal{F}(f'')=-w^2\mathcal{F}(f)\,.$$
3. Se tiene que
$$f*g=g*f \text{ y } \mathcal{F}(f*g)=\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)\,.$$
Recuerde que la convolución está dada por
$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s)\,ds.$$

Ejemplo 6.1. (i)

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}\,,$$
$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-aw^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}\,.$$

(ii) Si $h(x)=\begin{cases}1\,, & x\in[a,b],\\ 0\,, & \text{en otro caso}\,,\end{cases}$
entonces,

$$\mathcal{F}(h)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{iwa}-e^{iwb}}{iw}\right).$$

Aplicación I. (Ecuación del calor en una barra infinita)
Consideremos la ecuación

$$u_t = u_{xx}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,,$$
$$u(x,0) = f(x)\,, \quad u \text{ acotada.}$$

Supongamos que u, f son suficientemente regulares para usar la transformada de Fourier en la ecuación. Así, aplicando la transformada en la variable x se obtiene

$$\mathcal{F}(u_t) = -w^2\mathcal{F}(u)\,,$$
$$\mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f)\,.$$

Lo que nos lleva a la siguiente EDO

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u) = -w^2\mathcal{F}(u)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(u)(t) = ce^{-w^2\,t}$$
$$\Rightarrow \mathcal{F}(u)(t) = \hat{f}(w)\,e^{-w^2\,t}\,.$$

Aplicando la propiedad de convolución, tenemos

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\,ds\,,$$

o sea,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)f(s)\,ds\,,$$

donde

$$G(x,s,t) = \frac{e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi t}},$$

la cual es llamada solución fundamental.

Teorema 6.2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente continua y acotada. Entonces*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,s,t)f(s)\,ds$$

es una función C^∞ para $t > 0$, verifica

$$u_t = u_{xx}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0.$$

Además se verifica la condición inicial en el siguiente sentido:

$$\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right).$$

En el caso que f sea continua el limite anterior es igual a $f(x)$.

Demostración. de Figueiredo pag. 217-218. □

Notar que la funcón f no satisface necesariamente las propiedades para tener transformada. Esto es curioso, debido a que para encontrar el candidato a solución se usó el hecho que las f tenía.

Ejemplo 6.2. Consideremos la ecuación

$$\begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \; x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x)\,, \; u \text{ acotada.} \end{array}$$

Supongamos que

$$f(x) = \begin{cases} 0 : & x < 0, \\ 1 : & x > 0. \end{cases}$$

(i) Muestre que la solución es dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right),$$

donde

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-v^2}\, dv\,, \; \text{(función de error)}$$

(ii) Muestre además que para x fijo

$$u(x,t) \longrightarrow \frac{1}{2}\,, \; t \mapsto +\infty.$$

Sabemos que la solución esta dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}}\, ds\,.$$

Haciendo

$$v = \frac{s-x}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dv = \frac{ds}{2\sqrt{t}},$$

tenemos,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-v^2}\, dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} e^{-v^2}\, dv + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2}\, dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-v^2}\, dv + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2}\, dv \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right). \end{aligned}$$

Naturalmente

$$\lim_{s \to 0} \Phi(s) = 0\,,$$

luego se tiene que

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{1}{2}\,,\ \text{ para } x \text{ fijo.}$$

Aplicación II.(Ecuación parcial de primer orden)
Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} u_t - u_x &= g(x)\,,\\ u(x,0) &= f(x)\,. \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Fourier (suponiendo que existen) llegamos a

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u) - iw\mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(g)\,,\\ &\mathcal{F}(u(x,0)) = \mathcal{F}(f)\,. \end{aligned}$$

La solución de la EDO es dada por

$$\mathcal{F}(u)(w,t) = ce^{iwt} - \frac{\mathcal{F}(g)(w,t)}{iw}\,.$$

De la condición inicial se deduce que

$$\hat{u}(w) = \hat{f}(w)e^{iwt} + \hat{g}(w)\left[\frac{e^{iwt}-1}{iw}\right]\,,$$

luego,

$$u(x,t) = f(x+t) - (g*h)(x),$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} 1: & x \in [0,t],\\ 0: & \text{en el resto.} \end{cases}$$

6.1. Transformadas de Fourier seno y coseno. Para problemas de evolución en regiones semi-infinitas son convenientes las siguientes transformadas:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s(f)(w) &= \hat{f}_s(w) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,wx\,dx.\\ \mathcal{F}_c(f)(w) &= \hat{f}_c(w) = \int_0^{+\infty} f(x)\cos wx\,dx. \end{aligned}$$

El siguiente es un resultado de inversión.

Teorema 6.3. *Sea* $f \in C^1([0,+\infty))$ *y*

$$\int_0^{+\infty} |f| < +\infty.$$

Entonces,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}_s(w)\,\mathrm{sen}\, wx\, dw\,,\ \ \forall\, x > 0.$$
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \hat{f}_c(w)\cos wx\, dw\,,\ \ \forall\, x > 0.$$

Teorema 6.4. *Sean f, f', $f'' \in C(0,+\infty)$ y absolutamente integrables, Entonces*

$$\mathcal{F}_s(f'') = -w^2\mathcal{F}_s(f) + f(0)w.$$
$$\mathcal{F}_c(f) = -w^2\mathcal{F}_c(f) - f'(0).$$

Nota.

La transformada $\mathcal{F}_s$ conviene usarla cuando nos dan el dato de frontera $u(0,t)$.
La transformada $\mathcal{F}_c$ conviene usarla cuando nos dan el dato de frontera $u_x(0,t)$.

Ejemplo 6.3. Las siguientes son transformadas que aparecen en la ecuación del calor en $[0,+\infty)$

(a) $\mathcal{F}_s^{-1}\left(we^{-aw^2}\right) = \frac{x}{(2a)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

(b) $\mathcal{F}_c^{-1}\left(e^{-aw^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$.

Aplicación.(Ecuación del calor en $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$)
Considere la siguiente ecuación del calor en una barra semi-infinita

$$u_t = u_{xx}\,,\ \ x > 0\,,\ \ t > 0,$$
$$u(x,0) = 0\,,\ \ u(0,t) = g(t),$$
$$u \text{ acotada.}$$

Denotemos $\hat{u}(w,t)$ la transformada seno de $u(x,t)$ con respecto a x. Tenemos que $\hat{u}$ satisface

$$\hat{u}_t + w^2\hat{u} = g(t)w\,,\ \ (f(0) = u(0,t))\,,$$
$$\hat{u}(w,0) = 0\,.$$

Resolviendo la EDO se obtiene que

$$\hat{u}(w,t) = e^{-w^2t}\int_0^t g(s)we^{w^2s}\,ds\,,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^{+\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-w^2t}\int_0^t g(s)we^{w^2s}\operatorname{sen} wx\,ds\right)dw\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^t g(s)we^{w^2(s-t)}\operatorname{sen} wx\,ds\right)dw\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^t g(s)\left(\int_0^{+\infty} we^{w^2(s-t)}\operatorname{sen} wx\,dw\right)ds\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^t g(s)\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\mathcal{F}_s\left(we^{w^2(s-t)}\right)ds\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^t g(s)\frac{x}{(2(t-s))^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\,ds.
\end{aligned}$$

Así, la solución esta dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t g(s)\frac{x}{(t-s)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{x^2}{4(t-s)}}\,ds.$$

Aplicación.(Onda Semi-infinita)
Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_{tt}-u_{xx}=0\,,\ \ x\geq 0\,,\ \ t>0,\\
&u(x,0)=u_t(x,0)=0,\\
&u(0,t)=t^2.
\end{aligned}\tag{42}$$

Apliquemos nuevamente la transformada seno, obteniendo:

$$\hat{u}_{tt}+w^2\hat{u}=t^2w,$$

lo cual implica

$$\hat{u}(w,t)=\alpha(w)\cos wt+\beta(w)\operatorname{sen} wt+\frac{t^2}{w}-\frac{2}{w^3}.$$

Con los datos iniciales, tenemos

$$\hat{u}(w,0)=\hat{u}_t(w,0)=0\,,$$

luego,

$$\hat{u}(w,t)=\frac{t^2}{w}+\frac{2}{w^3}(\cos wt-1).$$

Así, la solución es

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^2}{w}+\frac{2}{w^3}(\cos wt-1)\right)\operatorname{sen} wx\,dw\,.$$

Llegamos hasta aquí, por complejidad de la integral.
Tarea: Ver solución por método de D'Alembert el cual está formulado para ecuaciones de este tipo.

6.2. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 6.1. Hallar $I(a,x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-aw^2} coswx\ dw$ probando que $\dfrac{dI}{dx} = -\dfrac{x}{2a} I$ e $I(a,0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$; usar lo anterior para calcular $\mathcal{F}_c^{-1}(e^{-aw^2})$, $\mathcal{F}_s^{-1}(we^{-aw^2})$ y $\mathcal{F}_c(e^{-ax^2})$.

Ejercicio 6.2. Resolver

i) $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2}. \end{cases}$

ii) $\begin{cases} u_t - u_{xx} + u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = e^{\frac{-x^2}{2}}. \end{cases}$

Ejercicio 6.3. Resolver $\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0, x \in \mathbb{R} \ \text{ y } t \geq 0, \\ u(x,0) = f(x), \ \ u_t(x,0) = 0. \end{cases}$

Si $f(x) = \chi_{[0,1]} \sin \pi x$, dibujar $u(x,3)$.

Ejercicio 6.4. Resolver: $\begin{cases} t^2 u_t - u_x = g(x), \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \\ u(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Ejercicio 6.5. Considere la ecuación $u_t + \cos t \ u_x = u$,

i) Hallar la solución con $u(x,0) = f(x)$.

ii) Si $f(x) = \begin{cases} \cos^2 x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \\ 0 \text{ en el resto }. \end{cases}$ describir $u(x,t)$ para $t \geq 0$,

Ejercicio 6.6. Considere la ecuación

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \ x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ &u(x,0) = \chi_{(0,+\infty)}(x) \\ &u \text{ acotada.} \end{aligned}$$

Usando transformada de Fourier muestre que la solución $u(x,t)$ de la ecuación verifica:

i) $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \Phi\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right)$ donde $\Phi(s) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^s e^{-v^2} dv$.

ii) Muestre que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t) = \dfrac{1}{2}, \forall \ x$.

Ejercicio 6.7. Considere la ecuación parcial de primer orden

$$\begin{aligned} &u_t + u_x = g(x), \ x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

Suponga que f y g son lo suficientemente regulares. Usando transformada de Fourier muestre que una solución $u(x,t)$ tiene la forma

$$u(x,t) = f(x-t) + \sqrt{2\pi}(g * h)(x),$$

donde $h(x) = \chi_{[0,t]}(x)$.

Ejercicio 6.8. Considere la ecuación

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \;\; t > 0, \;\; x \in \mathbb{R}, \\ &u(x,0) = xe^{-|x|}. \end{aligned}$$

Muestre que la solución verifica

$$\Big|u(x,t)\Big| \leq \frac{K}{t^{\frac{1}{2}}}, \;\text{ para cada }\; t > 0 \;\text{ y }\; x \in \mathbb{R},$$

donde K es una constante.

Ejercicio 6.9. Resuelva usando transformada Seno o Coseno la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \;\; t > 0, \;\; x > 0 \\ &u_x(0,t) = 0 \\ &u(x,0) = H(1-x)\,, \end{aligned}$$

donde H es la función de Heaviside.

7. APLICACIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN EDP

La transformada de Laplace es definida por

$$\pounds[f] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt\,,$$

para $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, siempre que la integral exista.

Las siguientes son condiciones suficientes para que la transformada de Laplace esté bien definida

(i) f seccionalmente continua.

(ii) Existe un $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{at}\,, \;\; \forall\, t \geq T.$$

En este caso la transformada de Laplace existe para cada $s > a$.

Ejemplo 7.1. 1. Si $f(t) = 1\,,\;\; 0 < t < +\infty \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$.

2. $f(t) = e^{2t}\,,\ \ 0 < t < +\infty \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-2}\,,\ \ s > 2.$

3. $f(t) = \operatorname{sen} wt\,,\ \ 0 < t < +\infty \Rightarrow F(s) = \frac{w}{s^2+w^2}$, en este caso, $M = 1$, $a = 0$.

Proposición 7.1. *Supongamos $u(x,t)$ una función de clase C^2. Denotemos $\pounds[u(x,t)] = U(x,s)$. Valen las siguientes propiedades:*

(a) $\pounds[u_t] = sU(x,s) - u(x,0)$.

(b) $\pounds[u_{tt}] = s^2U(x,s) - su(x,0) - u_t(x,0)$.

(c) $\pounds[u_x] = \frac{\partial}{\partial x}U(x,s)$.

(d) $\pounds[u_{xx}] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)$.

Note que las dos primeras corresponden a propiedades conocidas de la Transformada de Laplace, mientras que para verificar las dos últimas es necesario utilizar la propiedad básica

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^b f(x,y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy,$$

bajo el hipótesis que $\frac{\partial f}{\partial x}$ exista y sea continua.

Convolución.: Se define la convolución entre dos funciones f y g por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

ó

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(t)\,d\tau.$$

Nota que el producto de convolución conmuta. Además, en una forma análoga a las transformadas de Fourier, vale la propiedad de convolución

$$\pounds(f * g) = \pounds(f)\pounds(g)\,,$$

y la transformada inversa es dada por

$$\pounds^{-1}(F) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}\,ds\,.$$

En la práctica resulta muy útil usar la fórmula de transformada de una convolución como sigue

$$\pounds^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(t).$$

Ejemplo 7.2.

$$\pounds^{-1}\left(\frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1}\right) = 1 * \operatorname{sen} t = 1 - \cos t.$$

Aplicación. Resolvamos la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}\,, \ \ 0 < x < +\infty\,, \ \ 0 < t < +\infty, \\
&u_x(0,t) - u(0,t) = 0, \ \ 0 < t < +\infty\,, \\
&u(x,0) = u_0\,, \ \ 0 < x < +\infty\,.
\end{aligned}$$

Aplicando transformada de Laplace la ecuación se transforma en

$$\begin{aligned}
&sU(x,s) - u(x,0) = \tfrac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,s)\,, \ \ 0 < x < +\infty\,, \\
&\tfrac{\partial}{\partial x}U(0,s) = U(0,s)\,.
\end{aligned}$$

La solución de esta ecuación es dada por

$$U(x,s) = c_1 e^{x\sqrt{s}} + c_2 e^{-x\sqrt{s}} + \frac{u_0}{s}.$$

Ya que la solución debe estar acotada, se tiene que $c_1 = 0$.

Imponiendo la relación de las condiciones de borde obtenemos c_2. Así

$$U(x,s) = -u_0\left(\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s(\sqrt{s}+1)}\right) + \frac{u_0}{s}\,,$$

luego, para determinar $u(x,t)$, debemos calcular

$$u(x,t) = \pounds^{-1}\left(U(x,s)\right).$$

Por lo tanto, llegamos a la solución

$$u(x,t) = u_0 + u_0\left[\xi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - \xi\left(\sqrt{t} + \frac{x}{2\sqrt{t}}\right)e^{x+t}\right].$$

donde,

$$\xi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-v}\,dv.$$

Ejemplo 7.3.

$$\begin{aligned}
&u_t = \alpha^2 u_{xx}\,, \ \ 0 < x < +\infty\,, 0 < t < +\infty\,, \\
&u(x,0) = \operatorname{sen} x\,.
\end{aligned}$$

(de tarea ¿faltan datos?)

7.1. Principio de Duhamel. El objetivo es resolver la ecuación

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx}\,, & 0 < x < 1\,,\ \ 0 < t < +\infty\,, \\ u(0,t) = 0\,, & 0 < t < +\infty\,, \\ u(1,t) = f(t)\,, & 0 < t < +\infty\,, \\ u(x,0) = 0\,, & 0 \le x \le 1\,. \end{array} \tag{43}$$

Para resolver esta ecuación consideremos la siguiente ecuación auxiliar

$$\begin{array}{l} w_t = w_{xx},\ \ 0 < x < 1,\ \ 0 < t < +\infty, \\ w(0,t) = 0,\ \ 0 < t < +\infty, \\ w(1,t) = 1,\ \ 0 < t < +\infty, \\ w(x,0) = 0,\ \ 0 \le x \le 1. \end{array} \tag{44}$$

Aplicando la transformada de Laplace en (44) transformamos la ecuación en

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x,s) - sW(x,s) = 0\,, \\ W(0,s) = 0\,,\ \ W(1,s) = \frac{1}{s}\,. \end{array}$$

Resolviendo la EDO, nos queda

$$W(x,s) = \frac{1}{s}\left[\frac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\operatorname{senh}\sqrt{s}}\right].$$

Notemos que al resolver la ecuación (44) via series de Fourier, tiene como solución:

$$w(x,t) = x + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-(n\pi)^2 t}\operatorname{sen} n\pi x.$$

Ahora volvamos al problema (43). Aplicando la transformada de Laplace, nos queda

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x,s) - sU(x,s) = 0\,, \\ U(0,s) = 0\,,\ \ U(1,s) = F(s)\,. \end{array}$$

Así

$$U(x,s) = F(s)\left[\frac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\operatorname{senh}\sqrt{s}}\right],$$

pero

$$U(x,s) = F(s)s\left[\frac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s\operatorname{senh}\sqrt{s}}\right] = F(s)sW(x,s).$$

Usando la relación $\pounds(w_t) = sW - w(x,0)$, se obtiene

$$U(x,s) = F(s)\pounds(w_t).$$

Aplicando la transformada inversa nos queda:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(t) * w_t(x,t) \\ &= \int_0^t f(\tau) w_\tau(x, t-\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Integrando esta última expresión, la solución esta dada por:

$$u(x,t) = \int_0^t w(x, t-\tau) f'(\tau)\, d\tau + f(0) w(x,t).$$

7.2. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 7.1. Determine la siguiente fórmula

$$\pounds[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - .... - f^{(n-1)}(0),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 7.2. Estudiar la ecuación

$$\begin{aligned} &u_t = k u_{xx},\ \ 0 < x < \infty,\ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = 0,\ \ 0 < x < \infty, \\ &u(0,t) = f(t),\ \ 0 < t < \infty. \end{aligned}$$

¿Qué hipótesis debe imponer sobre la función f?

Ejercicio 7.3. Resolver el problema

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx},\ \ 0 < x < \infty,\ \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(0,t) = \sin t,\ \ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = 0,\ \ \ 0 \le x < \infty. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.4. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx},\ \ 0 < x < \infty,\ \ 0 < t < \infty, \\ &u_x(0,t) - u(0,t) = 0,\ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = c,\ \ 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.5. Obtenga la solución de la ecuación en terminos de la función f.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx},\ \ 0 < x < \infty,\ \ 0 < t < \infty, \\ &u_x(0,t) = f(t),\ \ 0 < t < \infty, \\ &u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 0,\ \ 0 < x < \infty. \end{aligned}$$

Ejercicio 7.6. Resolver el problema

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = c^2 u_{xx}, \ \ -\infty < x < \infty, \ 0 < t < \infty,\\
&u(x,0) = \sin x, \ -\infty < x < \infty,\\
&u_t(0,t) = 0, \ \ 0 < t < \infty.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.7. Considere la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_t - u_{xx} = 0, \ \ x \in (0,1), \ \ t \in (0,+\infty),\\
&u(x,0) = 0, \ \ \text{y} \ \ u(0,t) = 0, \ \ u(1,t) = f(t),
\end{aligned}$$

Encuentre una expresión para la transformada de Laplace de la solución $u(x,t)$ en términos de la transformada de Laplace de $f(t)$.

Ejercicio 7.8. Resuelva el problema

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, \ \ 0 < x < \infty, \ \ 0 < t < \infty),\\
&u(0,t) = t + e^t \operatorname{sen} t, \ \ 0 < t < \infty,\\
&u(x,0) = 0, \ \ 0 \leq x < \infty.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.9. Usando el principio de Duhamel's, encuentre la solución de la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_t = \alpha u_{xx}, \ \ 0 < x < 1, \ \ 0 < t < \infty,\\
&u(0,t) = 0, \ \ 0 < t < \infty,\\
&u(1,t) = \sin t, \ \ 0 < t < \infty,\\
&u(x,0) = 0, \ \ \ 0 \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

Ejercicio 7.10. Usando la teoría de Transformadas de Laplace resuelva la ecuación

$$\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0, \ \ 0 < x < 1, \ \ 0 < t < \infty,\\
&u(0,t) = 0, \ \ 0 < t < \infty,\\
&u(1,t) = e^{-t} \operatorname{sen} t, \ \ 0 < t < \infty,\\
&u(x,0) = 0, \ \ 0 \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

8. ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Antes de entrar en materia consideremos la función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaciendo
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \quad c \neq 0.$$
Sea $\Gamma(t) = (t, \tau(t))$ una curva, tal que
$$u(t, \tau(t)) = cte \quad \text{(curva de nivel)}.$$
Derivando tenemos que
$$\nabla u(\Gamma(t))\,\Gamma'(t) = 0\,,$$
es decir
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\tau'(t) &= 0 \\ -c\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\tau'(t) &= 0. \end{aligned}$$
Así $\tau'(t) = c$. Integrando obtenemos
$$\tau(t) - \tau(0) = ct,$$
o sea,
$$\tau(t) = \tau(0) + ct.$$
De la construcción de u, notamos que ella es constante a lo largo de las curvas
$$(t, \eta + ct)\,, \ \ \forall\, \eta \in \mathbb{R}.$$
O sea,
$$u(t, \eta + ct) = u(0, \eta)\,, \ \ \forall\, \eta \in \mathbb{R}\,.$$
Sea $x = \eta + ct$, entonces
$$u(x, t) = u(0, x - ct)\,, \ \ \forall\, x, t\,.$$
Consecuentemente, si agregamos la condición inicial
$$u(0, x) = f(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
la solución será dada por
$$u(x, t) = f(x - ct)\,.$$
Consideremos ahora una situación general, es decir considere la siguiente ecuación

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y - c(x, y, u) = 0. \tag{45}$$

Sea u solución de (45). Sabemos que el vector $(u_x, u_y, -1)$ es perpendicular a la superficie
$$z = u(x, y).$$

Además tenemos que en cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ se verifica

$$\langle (a,b,c),(u_x,u_y,-1)\rangle = 0$$

O sea,

$$(a,b,c)\perp(u_x,u_y,-1)\,,\quad \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Luego si $(x(t),y(t),z(t))$ es una curva pasando por (x_0,y_0,z_0), entonces buscaremos una curva que verifique que

$$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)\quad \text{sea paralela a}\quad (a,b,c).$$

Así

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(x,y,z),\\ \frac{dy}{dt} &= b(x,y,z),\\ \frac{dz}{dt} &= c(x,y,z).\end{aligned}$$

Las soluciónes de esta ecuación son llamadas curvas características.

Teorema 8.1. *Sea $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ en la superficie definida por*

$$z=u(x,y),$$

entonces la curva característica que pasa por P_0 también está contenida en la superficie.

Demostración. Sea $(x(t),y(t),z(t))$ la curva característica que pasa por $(x_0,y_0,z_0)\in S$. Demostraremos que

$$z(t)=u(x(t),y(t))\,.$$

Sea

$$U(t)=z(t)-u(x(t),y(t))\,,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} &= z'(t)-\frac{\partial u}{\partial x}\,x'(t)-\frac{\partial u}{\partial y}\,y'(t)\\ &= c(x,y,z)-\frac{\partial u}{\partial x}\,a(x,y,z)-\frac{\partial u}{\partial y}\,b(x,y,z)\\ &= c(x,y,U+u)-\frac{\partial u}{\partial x}\,a(x,y,U+u)-\frac{\partial u}{\partial y}\,b(x,y,U+u).\end{aligned}$$

Como $U(0)=0$, y como $U\equiv 0$ es solución de la ecuación en U, se tiene por teorema de unicidad en EDO que

$$U\equiv 0\,,$$

O sea, para cada t se tiene que

$$z(t) = u(x(t), y(t)),$$

que era la que queríamos probar. $\square$

Ejemplo 8.1. Considera la ecuación

$$cu_x + u_y = 0, \quad x = s, \ y = 0, \ z = h(s).$$

Sus curvas características son

$$\frac{dX}{dt} = c, \ \frac{dY}{dt} = 1, \ \frac{dZ}{dt} = 0.$$

O sea,

$$\begin{aligned} X(t,s) &= ct + s = x, \\ Y(x,s) &= t = y, \\ Z(t,s) &= h(s). \end{aligned}$$

Luego, la solución es

$$z = h(s) = h(x - cy).$$

Ejemplo 8.2. Considera la ecuación

$$xu_x + yu_y = \alpha u, \ \alpha \text{ constante},$$

donde su curva inicial es dada por

$$x = s, \ y = 1, \ z = h(s).$$

Sus curvas características son

$$\frac{dX}{dt} = x, \ \frac{dY}{dt} = y, \ \frac{dZ}{dt} = \alpha z.$$

Luego

$$\begin{aligned} X(t,s) &= se^t = x, \\ Y(x,s) &= e^t = y, \\ Z(t,s) &= h(s)e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Entonces la solución es dada por

$$z = h\left(\frac{x}{y}\right) y^\alpha.$$

Teorema 8.2 (Euler)**.** *u es homogénea de grado α si y solo si*

$$xu_x + yu_y = \alpha u.$$

Consecuencia. Las homogéneas de grado α tienen la forma

$$z = h\left(\frac{x}{y}\right) y^\alpha.$$

Ejemplo 8.3. Sea la ecuación

$$uu_x + u_y = 0\,,$$

con condición inicial

$$x = s\,,\ \ y = 0\,,\ \ z = h(s)\,.$$

Las curvas características están dadas por

$$\frac{dX}{dt} = z = h(s)\,,\ \ \frac{dY}{dt} = 1\,,\ \ \frac{dZ}{dt} = 0\,.$$

Así

$$\begin{aligned} &X(t,s) = th(s) + s = x\,,\\ &Y(x,s) = t = y\,,\\ &Z(t,s) = h(s) = z. \end{aligned}$$

Por lo tanto la solución corresponde a

$$z = h(s) = h(x - tz).$$

8.1. Ejercicios Propuestos.

Ejercicio 8.1. Resolver la ecuación

$$\begin{aligned} &u_x + u_y = 0,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ y > 0,\\ &u(x,0) = \cos x,\ \ \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.2. Resuelva la ecuación

$$\begin{aligned} &u_x + u_y + 2u = 0,\ \ x \in \mathbb{R},\ \ \ y > 0,\\ &u(x,0) = \operatorname{sen} x,\ \ \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.3. Encuentre la solución

$$\begin{aligned} &xu_x + u_y + yu = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0,\\ &u(x,0) = F(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.4. Resolver

$$\begin{aligned} &u_x + 2u_y + 2u = 0,\ x, y \in \mathbb{R},\\ &u(x,y) = F(x,y),\ \ \text{en la curva}\ \ y = x. \end{aligned}$$

Ejercicio 8.5. Resolver

$$\begin{aligned} &u_y + uu_x = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0,\\ &u(x,0) = F(x),\, x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

estudie el caso en que $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ x & x \geq 0. \end{cases}$

Ejercicio 8.6. Encuentre la solución de la ecuación

$$u_y + f(u)u_x = 0, \; x \in \mathbb{R}, \;\; y > 0,$$
$$u(x, 0) = \phi(x).$$

Ejercicio 8.7. Resolver la siguiente ecuación

$$2xu_y - u_x = 4xy,$$

donde la curva inicial es dada por

$$x = 0, \;\; y = s, \;\; \text{y} \;\; z = s.$$

9. ECUACIÓN DE LAPLACE EN UN DOMINIO ESFÉRICO

9.1. Introducción. Como motivación, consideremos un problema de eletrostática, que consta en determinar el potencial eléctrico dada la distribución del potencial sobre el conductor esférico. El problema se traduce en resolver la Ecuación de Laplace en el interior de una esfera cuando el potencial u está especificado sobre el borde de ésta. Es decir, se debe resolver:

$$\begin{aligned} \Delta u = 0 \qquad & , 0 \leq r \leq R \, , -\pi \leq \theta \leq \pi \, , 0 \leq \phi \leq \pi \\ u(R, \theta, \phi) = g(\theta, \phi) \qquad & , -\pi \leq \theta \leq \pi \, , 0 \leq \phi \leq \pi \end{aligned}$$

Así, se resolverá el problema en el caso que:

- $g(\theta, \phi) = c \qquad c = cte$
- $g(\theta, \phi) = f(\phi)$
- Caso general

En el primer caso, se observará que el problema se reduce a resolver una ecuación diferencial ordinaria. Para el segundo caso, necesitamos de los polinomios de Legendre para dar una solución en serie. Y finalmente en el último caso se trata de resolver el problema general y para ello se necesita conocer sobre la Ecuación de Euler y Ecuación y Polinomios de Legendre, de manera que la solución para el problema queda expresado en función de éstas últimas respectivamente.

9.2. Laplaciano en Coordenadas esféricas y problema en la esfera. El Laplaciano en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas es:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Utilizando coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\phi \cos\theta \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\phi \end{aligned}$$

se obtiene la forma esférica de la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = (r^2 u_r)_r + \frac{1}{\sin\phi}[\sin\phi \, u_\phi]_\phi + \frac{1}{\sin^2\phi} u_{\theta\theta} = 0 \tag{46}$$

Además si pedimos que la función u satisfaga la siguiente condición de borde:

$$u(R, \theta, \phi) = g(\theta, \phi) \qquad -\pi \leq \theta \leq \pi \, , 0 \leq \phi \leq \pi \tag{47}$$

De esta manera, de (1) y de (2) llegamos al problema de la ecuación de Laplace en un dominio esférico. Ahora, para los distintos problemas desarrollaremos algunas herramientas necesarias en la solución de cada uno de éstos.

9.3. Ecuación de Euler. Consideremos la siguiente EDO:

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{R} \tag{48}$$

Mediante la sustitución $x = e^(t)$ la ecuación se transforma en una EDO de coeficientes constantes. En efecto, sea $\hat{y}(t) = y(e^t)$, entonces:

$$x = e^t \Rightarrow \frac{d}{dt} = e^t$$

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = \frac{dy}{dt}\, e^t$$

$$\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}e^2t + \frac{dy}{dx}e^t$$

De manera que al reemplazar en la EDO se obtiene:

$$a\frac{d^2\hat{y}}{dt^2} + (b-a)\frac{d\hat{y}}{dt} + c\hat{y} = 0 \tag{49}$$

tal como se quería.

9.4. Ecuación y polinomios de Legendre. Consideremos la siguiente ecuación:

$$(1-x^2)y''(x) - 2x\, y'(x) + \alpha(\alpha+1)y(x) = 0 \tag{50}$$

La ecuación anterior es denominada **Ecuación Diferencial de Legendre**. Ésta también puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + n(n+1)y = 0 \tag{51}$$

y la solución de esta ecuación es de la forma $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ donde

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\ldots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\ldots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)\ldots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

Estas soluciones son linealmente independientes, e.e

$$y(x) = a_1\, y_1(x) + a_2\, y_2(x)$$

Observación

1.- Si $\alpha = 2m$ con m un número natural, entonces $y_1(x)$ es un polinomio de grado $2m$

$$y_1(x) = 1+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n \frac{(\alpha+2n-1)(\alpha+2n-3)\dots(\alpha+1)\alpha(\alpha-2)\dots(\alpha-2n+2)}{(2n)!}x^{2n}$$

y $y_2(x)$ es una serie infinita de potencias.

2.- Si $\alpha = 2m+1$ con m un número natural, entonces $y_2(x)$ es un polinomio de grado $2m+1$

$$y_2(x) = x+\sum_{n=1}^{m}(-1)^n \frac{(\alpha+2n)(\alpha+2n-2)\dots(\alpha+2)(\alpha-1)(\alpha-3)\dots(\alpha-2n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

y $y_1(x)$ es una serie infinita de potencias. Y de este resultado, sale la siguiente fórmula, la cual es la solución de la Ecuación de Legendre.

9.5. Fórmula de Rodrigues. Esta fórmula es la solución de la ecuación (1).

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

que una vez desarrollada se llega a

$$\mathcal{P}_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n}x^{n-2k}$$

9.6. Algunas propiedades. Como primera propiedad importante, tenemos que los polinomios de
Legendre son ortogonales.

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathcal{P}_n(x)\mathcal{P}_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Luego, tenemos estas otras, como

$$\mathcal{P}_k(-x) = (-1)^k\mathcal{P}_k(x)$$
$$\mathcal{P}_k(1) = 0$$
$$\mathcal{P}'_k(1) = \frac{k(k+1)}{2}$$

Y luego, algunas relaciones de recurrencia

$$(n+1)\mathcal{P}_{n+1}(x) - x(2n+1)\mathcal{P}_n(x) + n\mathcal{P}_{n-1}(x) = 0$$
$$x\mathcal{P}'_n(x) - \mathcal{P}'_{n-1}(x) = n\mathcal{P}_n(x)$$
$$\mathcal{P}'_{n+1}(x) - \mathcal{P}'_{n-1}(x) = (2n+1)\mathcal{P}_n(x)$$
$$\mathcal{P}'_{n+1}(x) - x\mathcal{P}'_n(x) = (n+1)\mathcal{P}_n(x)$$

9.7. Algunos Polinomios de Legendre.

n	$\mathcal{P}_n(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

9.8. Problema en que $g(\theta,\phi)=c$ al interior de una esfera. Sea u que no depende de θ y ϕ y g es constante, para toda θ y ϕ. Así, la ecuación de Laplace nos queda:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \ (r^2\, u_r)_r \ = \ 0 \\ u(R_1,\theta,\phi) = & \ c \end{aligned}$$

la cuál es una EDO,cuya solución es:

$$u(r) = \ \frac{a}{r} \ + \ b$$

Pero como queremos que la solución esté acotada, imponemos $a=0$. Así aplicando la condición de borde obtenemos la constante b. **Observación:** El término $\frac{c}{r}$ son los únicos potenciales que dependen sólo de la distancia radial hasta el origen. El potencial $\frac{1}{r}$ es muy importante en física y se le denomina **Potencial Newtoniano**.

Ejemplo 1 Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \ 0 \qquad 0 \le r \le 1 \\ u(1,\theta,\phi) = & \ 3 \end{aligned}$$

Vemos claramente que la solución debe ser $u(r,\theta,\phi)=3$.

9.9. Problema en que $g(\theta,\phi)=c$ entre dos esferas. Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \Delta u = & \ 0 \qquad 0 < R_1 \le r \le R_2 \\ u(R_1,\theta,\phi) = & \ A \\ u(R_2,\theta,\phi) = & \ B \end{aligned}$$

Sabemos que la solución de la EDO está dada por:

$$u(r) = \ \frac{a}{r} \ + \ b$$

Imponiendo las condiciones de borde, encontramos los valores de a y b:

$$a = (A-B)\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$$

$$b = \frac{R_2B - R_1A}{R_2-R_1}$$

y por lo tanto,se tiene que:

$$u(r,\theta,\phi) = (A-B)\frac{R_1R_2}{r(R_2-R_1)} + \frac{R_2B-R_1A}{R_2-R_1}$$

9.10. Problema en que $g(\theta,\phi) = f(\phi)$. Al considerar $g(\theta,\phi) = f(\phi)$ y que la ecuación u solo depende de r y ϕ, el problema toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta u = (r^2 u_r)_r + \frac{1}{\sin\phi}[\sin\phi\, u_\phi]_\phi &= 0 \qquad & 0 \leq r \leq 1 \\ u(1,\theta,\phi) = g(\phi) & & 0 \leq \phi \leq \pi \end{aligned}$$

Buscamos un candidato de solución por medio del método de separación de variables, tenemos:

$$u(r,\phi) = R(r)\,\Phi(\phi)$$

De manera que al reemplazar en la ecuación, tenemos:

$$\begin{aligned} &[r^2\,(R(r)\,\Phi(\phi))_r]_r + \frac{1}{\sin\phi}[\sin\phi\,(R(r)\,\Phi(\phi))_\phi]_\phi = 0 \\ &[r^2\,(R'(r)\,\Phi(\phi))]_r + \frac{1}{\sin\phi}[\sin\phi\,(R(r)\,\Phi'(\phi))]_\phi = 0 \\ &\Phi(\phi)[r^2\,(R'(r))]_r + \frac{R(r)}{\sin\phi}[\sin\phi\,(\Phi'(\phi))]_\phi = 0 \\ &\Phi(\phi)[2\,r\,R'(r) + r^2\,R''(r)] + \frac{R(r)}{\sin\phi}[\cos\phi\,\Phi'(\phi) + \sin\phi(\Phi''(\phi))] = 0 \\ &\Phi(\phi)[2\,r\,R'(r) + r^2\,R''(r)] = \frac{R(r)}{-\sin\phi}[\cos\phi\,\Phi'(\phi) + \sin\phi(\Phi''(\phi))] \\ &\frac{2\,r\,R'(r) + r^2\,R''(r)}{R(r)} = \frac{\cos\phi\,\Phi'(\phi) + \sin\phi(\Phi''(\phi))}{-\sin\phi\,\Phi(\phi)} \end{aligned}$$

Igualamos el resultado a una constante λ que no depende de las variables del problema:

$$\frac{2\,r\,R'(r) + r^2\,R''(r)}{R(r)} = \frac{\cos\phi\,\Phi'(\phi) + \sin\phi(\Phi''(\phi))}{-\sin\phi\,\Phi(\phi)} = \lambda$$

de manera que se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} r^2\,R'' + 2rR' - \lambda\,R &= 0 \\ [\sin\phi\,\Phi']' + \lambda\,\sin\phi\,\Phi &= 0 \end{aligned}$$

Tomemos $\lambda = n(n+1)$, para hacer aparecer la Ecuación de Legendre.

$$\begin{aligned} r^2\,R'' + 2rR' - n(n+1)R &= 0 \qquad \text{Ecuación de Euler} \\ [\sin\phi\,\Phi']' + n(n+1)\sin\phi\,\Phi &= 0 \qquad \text{Ecuación de Legendre} \end{aligned}$$

Resolviendo la Ecuación de Euler. La ecuación característica asociada es:

$$P^2 \,+\, (2-1)\, P \,+\, [-\, n(n+1)] \,=\, 0$$
$$P^2 \,+\, P \,+\, [-\, n(n+1)] \,=\, 0$$

De manera que,

$$P = \frac{-1 \,\pm \sqrt{1 \,+\, 4\, n\, (n+1)}}{2}$$
$$P = \frac{-1 \,\pm \sqrt{4\, n^2 \,+\, 4\, n + 1}}{2}$$
$$P = \frac{-1 \,\pm \sqrt{(2n+1)^2}}{2}$$
$$P = \frac{-1 \,\pm (2n+1)}{2}$$

Así, las soluciones de la ecuación carasterística son $P_1 \,=\, n$ y $P_2 \,=\, -(n+1)$. Luego la solución de la ecuación es:

$$R(r) \,=\, a\, r^n \,+\, b\, r^{-(n+1)}$$

Por otro lado, para obtener la solución de la Ecuación de Legendre, utilizamos la siguiente sustitución:

$$x \,=\, \cos\phi \Rightarrow dx \,=\, -\sin\phi d\phi$$
$$x \,=\, \cos\phi \Rightarrow\, x^2 \,=\, \cos^2\phi \,=\, 1 - \sin^2\phi \Rightarrow\, \sin^2\phi \,=\, 1 - x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\phi} &= \frac{dx}{dx}\left(\frac{d\Phi}{d\phi}\right) \\ &= \frac{dx}{d\phi}\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = -\sin\phi\, \frac{d\Phi}{dx} \\ &= -\sqrt{1-x^2}\, \frac{d\Phi}{dx} \end{aligned}$$

Y,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi}\left(\frac{d\Phi}{d\phi}\right) &= \frac{d}{d\phi}\left(-\sqrt{1-x^2}\, \frac{d\Phi}{dx}\right) \\ &= -\frac{dx}{d\phi}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\, \frac{d\Phi}{dx}\right) \\ &= \sqrt{1-x^2}\, \left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right) \frac{d\Phi}{dx} + \sqrt{1-x^2}\, \frac{d^2\Phi}{dx^2}\right] \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$[\sin\phi\,\Phi']' + n(n+1)\sin\phi\,\Phi \;=\; \sin\phi\,\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \cos\phi\,\frac{d\Phi}{d\phi} + n\,(n+1)\,\sin\phi\,\Phi$$

Al reemplazar obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\sin\phi\,\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} \;+\; \cos\phi\,\frac{d\Phi}{d\phi} \;+\; n\,(n+1)\,\sin\phi\,\Phi \;=\; 0\\
&= \sqrt{1-x^2}\left(-x\frac{d\Phi}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right) + x\left(-\sqrt{1-x^2}\frac{d\Phi}{dx}\right) + n(n+1)\sqrt{1-x^2}\Phi = 0\\
&= \sqrt{1-x^2}\left[-x\frac{d\Phi}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} - x\frac{d\Phi}{dx} + n(n+1)\Phi\right] = 0\\
&= -x\frac{d\Phi}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} - x\frac{d\Phi}{dx} + n(n+1)\Phi = 0\\
&= (1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} - 2x\frac{d\Phi}{dx} + n(n+1)\Phi = 0 \qquad\qquad -1 \le x \le 1
\end{aligned}$$

Llegando asi a la Ecuación de Legendre cuya variable independiente es $\Phi(x)$). La solución de la ecuación esta dada por la Fórmula de Rodrigues.

$$\mathcal{P}_n(x) = \;\frac{1}{2^n\,n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

Luego, tenemos

$$\begin{aligned}
R(r) &= \;a\,r^n \;+\; b\,r^{-(n+1)}\\
\Phi(\phi) &= \;c\,\mathcal{P}_n(\cos\phi)
\end{aligned}$$

Como queremos que en $r = 0$ las soluciones sean acotadas, tenemos que $b = 0$. Así, obtenemos:

$$\begin{aligned}
R(r) &= \;a\,r^n\\
\Phi(\phi) &= \;c\,\mathcal{P}_n(\cos\phi)
\end{aligned}$$

Por principio de superpocisión de soluciones, nos obtenemos:

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,r^n\,\mathcal{P}_n(\cos\phi)$$

Aplicando la condición de Frontera $u(1,\phi) = g(\phi)$ obtenemos:

$$u(1,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,\mathcal{P}_n(\cos\phi) = g(\phi)$$

Así,

$$a_n\,\mathcal{P}_n(\cos\phi) = g(\phi) \qquad\qquad \forall\; n = 0,1,2,\ldots$$

Desarrollando,

$$a_n\,\mathcal{P}_n(\cos\phi) = g(\phi)$$
$$a_n\,\mathcal{P}_n(\cos\phi)\mathcal{P}_m(\cos\phi)\sin\phi = g(\phi)\mathcal{P}_m(\cos\phi)\sin\phi$$
$$a_n\int_0^\pi \mathcal{P}_n(\cos\phi)\mathcal{P}_m(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi = \int_0^\pi g(\phi)\mathcal{P}_m(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi$$

Trabajemos ahora con la primera parte de la igualdad, haciendo el cambio $x = \cos\phi$:

$$\begin{aligned}
&a_n\int_0^\pi \mathcal{P}_n(\cos\phi)\mathcal{P}_m(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi\\
&= a_n\int_1^{-1} \mathcal{P}_n(x)\mathcal{P}_m(x)(-\sqrt{1-x^2})\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&= -a_n\int_1^{-1} \mathcal{P}_n(x)\mathcal{P}_m(x)\,dx\\
&= a_n\int_{-1}^{1} \mathcal{P}_n(x)\mathcal{P}_m(x)\,dx
\end{aligned}$$

Si $m = n$, entonces,

$$\int_0^\pi g(\phi)\mathcal{P}_n(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi = \frac{2a_n}{2n+1}$$

Finalmente, la solución de la ecuación es

$$u(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,r^n\,\mathcal{P}_n(\cos\phi)$$

donde

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^\pi g(\phi)\mathcal{P}_m(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi$$

9.11. Problema general. En esta sección se estudiará:

$$\Delta u = 0 \qquad 0 \leq r \leq R\,, -\pi \leq \theta \leq \pi\,, 0 \leq \phi \leq \pi$$
$$u(R, \theta, \phi) = g(\theta, \phi), -\pi \leq \theta \leq \pi\,, 0 \leq \phi \leq \pi$$

Buscamos soluciones del tipo: $u(r, \phi, \theta) = F(r)G(\phi, \theta)$. Reemplazando en el problema:

$$G(\phi,\theta)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2F'(r)) + \frac{F(r)}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}G(\phi,\theta)) + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}G(\phi,\theta) = 0$$

Ordenando e igualando a una constante σ, tenemos:

$$\frac{1}{F(r)}\frac{d}{dr}(r^2F'(r)) = \frac{-1}{G(\phi,\theta)}(\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}G(\phi,\theta)) + \frac{1}{(\sin\phi)^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}G(\phi,\theta)) = \sigma$$

De manera que se obtienen 2 ecuaciones diferenciales:

$$r^2R'' + 2rR' - \sigma R = 0 \quad \text{Ecuación de Euler}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi}(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}G(\phi,\theta)) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}G(\phi,\theta) + \sigma\sin\phi G(\phi,\theta) = 0$$

Al igual que en el caso anterior, tomando $\sigma = n(n+1)$ la solución de la primera ecuación es:

$$R(r) = a\,r^n + b\,r^{-(n+1)}$$

Para la segunda ecuación, buscamos soluciones de la forma $G(\phi,\theta) = X(\phi)Y(\theta)$. Reemplazando en la ecuación y haciendo el cambio de variables $\mu = \cos\phi$ tenemos:

$$\frac{d}{d\mu}((1-\mu^2)\frac{dX}{d\mu}) + (n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2})X = 0$$
$$\frac{d^2Y}{d\phi^2} + m^2Y = 0$$

cuyas soluciones son:

$$X = C_n\mathcal{P}_n^m(\mu) + D_n\mathcal{Q}_n^m(\mu)$$
$$Y = E_m\cos m\phi F_m\sin m\phi, \qquad m \neq 0$$
$$Y = E_0 + F_0, \qquad m = 0$$