



The Day After Tomorrow

in terms of Thermodynamics

3조

김가람 김경현 김동환 김해민

Index

Introduction

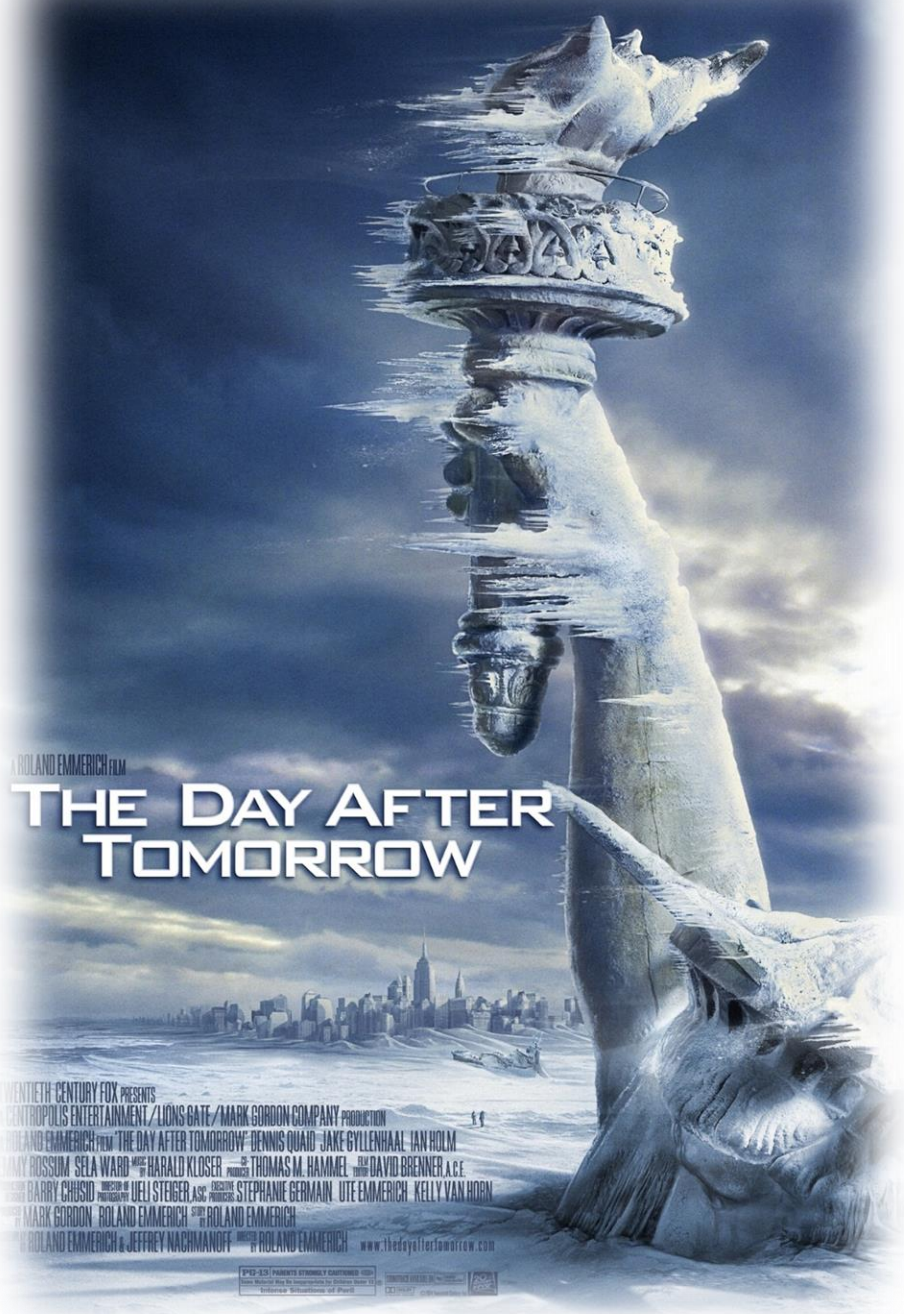
Problem 1

Problem 2

Conclusion

Reference

FROM THE DIRECTOR OF INDEPENDENCE DAY



The Day After Tomorrow



Problem 1

도서관 문에 서리가 생기는 장면





T_{out}



$T_{library}$



$$T_{library} = 5^{\circ}\text{C} (278\text{K}), \quad w = 4.3\text{g} / \text{kg}, \quad p = 1000\text{mb}$$

$$w = \epsilon \frac{e_l}{p - e_l}, \quad e_l = 6.896\text{mb}$$

$$e_{sw} = 6.11 \exp\left(19.83 - \frac{5417}{T}\right), \quad e_{sw,278\text{K}} = 8.62\text{mb}$$

$$r = \frac{6.896}{8.62} = 0.8$$

$$T_l - T_{dew} = -1.845 \times 10^{-4} T_l T_{dew} \ln r, \quad T_{dew} = 274.9\text{K}$$



철문을 통해 빠져나간 열

$$\frac{Q}{t} = \frac{kA(T_{out} - T_l)}{L}$$

문의 두께 = $5cm(0.05m)$

문의 면적 = $2m \times 3m (6m^2)$

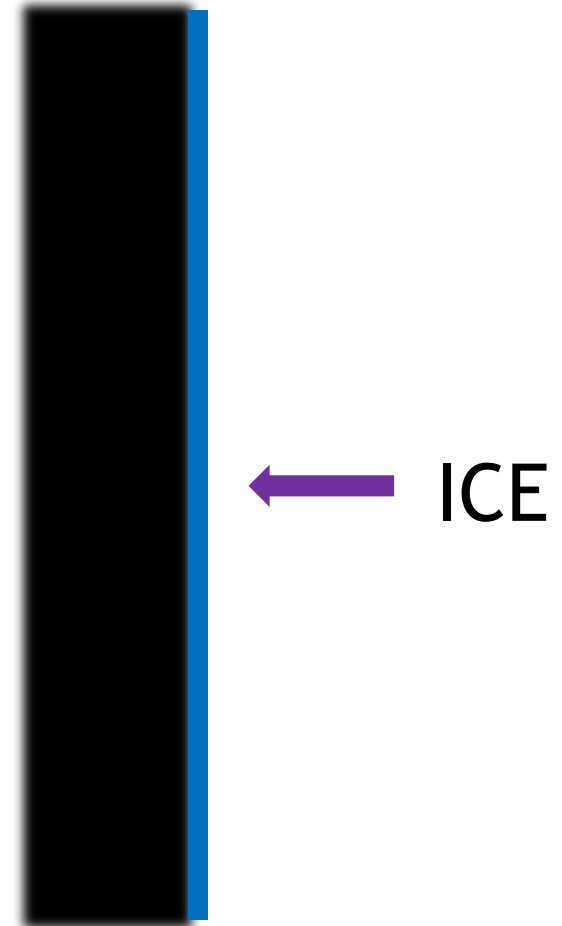
철의 열전도도(k) = $0.067kJ/m \cdot K \cdot s$



철문에 생긴 얼음 층의 두께를 0.1mm라고 가정

$$m_i = \rho_i A d \quad (\rho_i = 920 \text{ kg/m}^3)$$

$$m_i = 0.522 \text{ kg}$$



수증기가 빼앗긴 열

$$\begin{aligned} & c_g \times (T_l - T_{dew}) \times m_i \\ & + \\ & l_v \times m_i \\ & + \\ & c_w \times (T_{dew} - 273k) \\ & + \\ & l_f \times m_i \end{aligned}$$

$$c_g = 1.996 \text{kJ/kg} \cdot K, c_w = 4.187 \text{kJ/kg} \cdot K$$

$$l_v = 2.501 \times 10^3 \text{kJ/kg}, l_f = 333 \text{kJ/kg}$$



수증기가 빼앗긴 열 \leq 철문을 통해 빠져나간 열

$$-1572kJ \geq \frac{kA(T_{out}-T_l)}{L} \times t$$

($t=3$ 초라고 가정)

$$T_{out} \leq 212.8K (-60.2^{\circ}C)$$



대류권 계면에서

태풍의 눈을 통해 내려온 공기의 온도 = 212.8K?



SKEW T, log p DIAGRAM에서 대류권 계면 높이 (11.2km)에서의 표준 대기의 온도와 압력을 구하면

$$p_t = 225mb$$
$$T_t = 216.95K$$

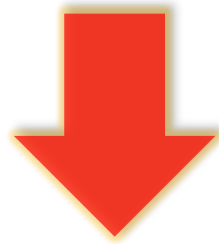
$$w = 0 \text{이므로 } T_t = T_{virt}$$

태풍의 눈 내에서는 $w = 0$ 이라 가정

미대륙에서 최근 강력했던 태풍 카트리나의 중심 기압 = $902mb$



Tropopause



Adiabatic Process

Surface



Conclusion

$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ 를 이용하여 태풍의 눈을 통해

지표로 내려왔을 때의 온도를 구하면

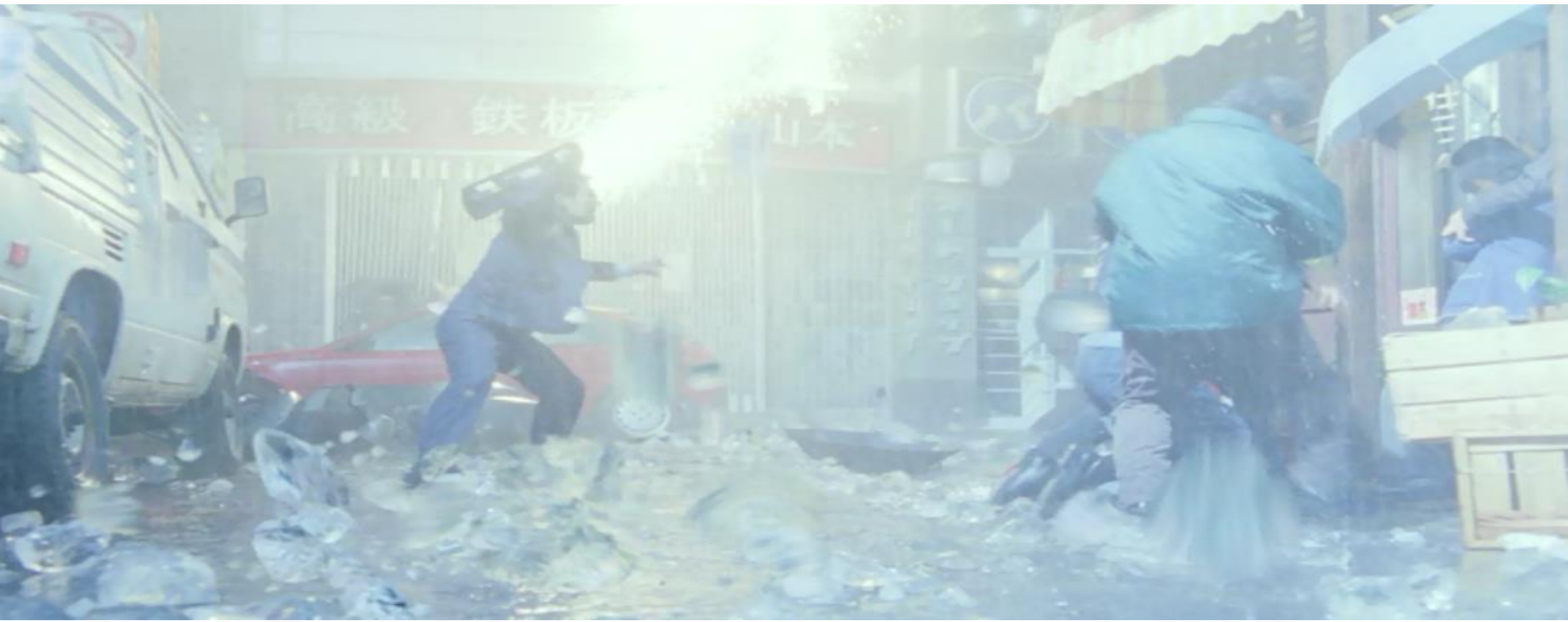
$T_s = 322K(49^\circ\text{C})$ 로 -60.2°C 와 큰 차이를 보인다



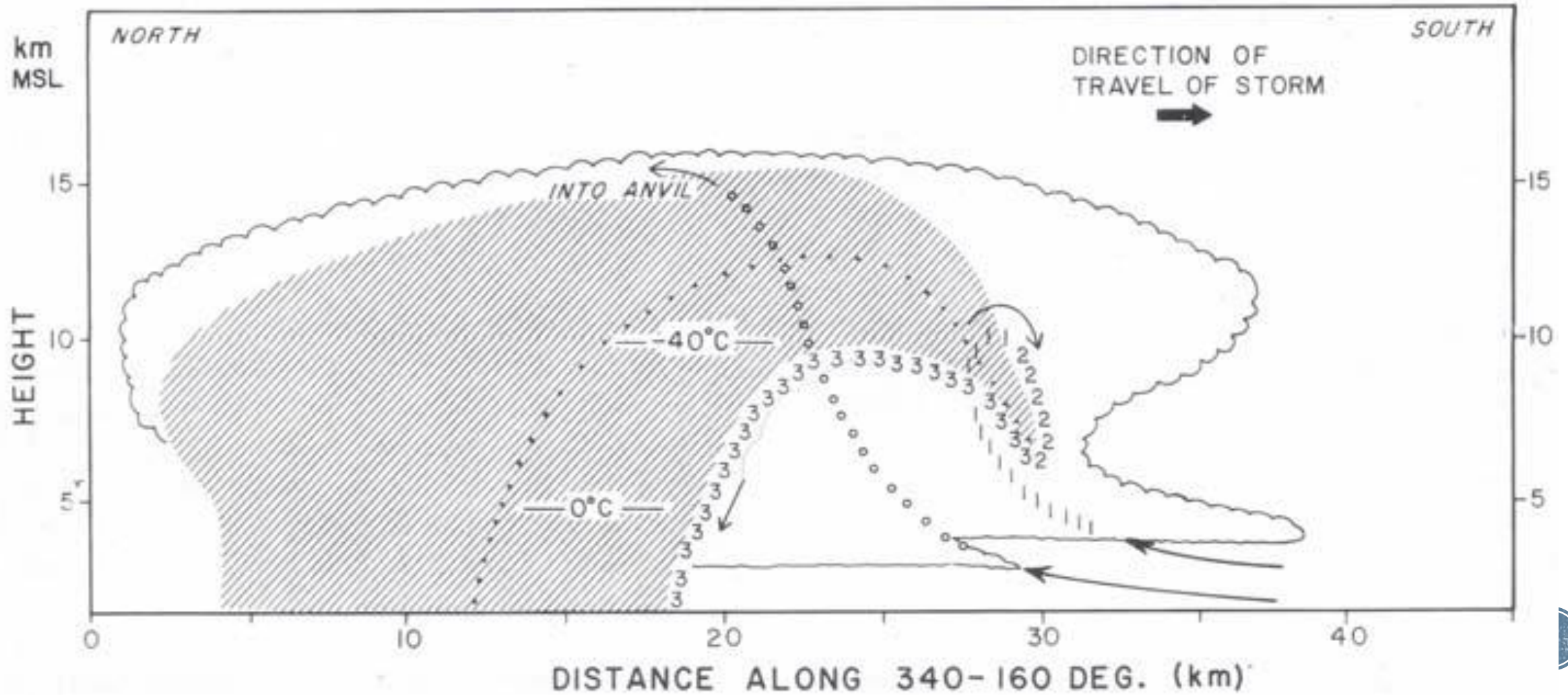
Problem 2

도쿄에 우박이 떨어지는 장면



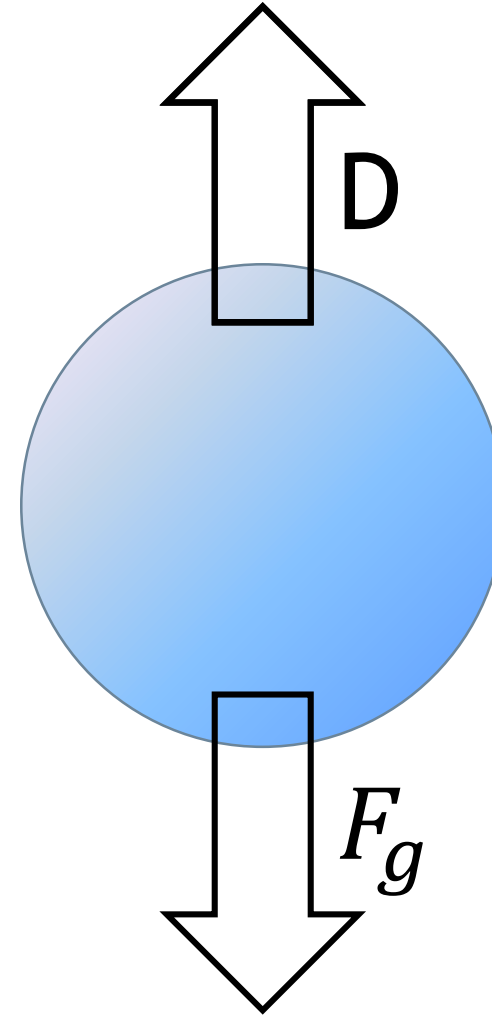


우박의 생성과정



우박의 종단속도

- $F_g = D$
 - $D = \frac{1}{2} C \rho A v^2$
 - $F_g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g$
- $v_t = \sqrt{\frac{2F_g}{C \rho_{air} A}} = \sqrt{\frac{8R \rho_{hail} g}{3C \rho_{air}}}$



대기의 불안정정도

- $\Gamma'_{virt} - \Gamma_{virt} < 0$ 일때

$$\ddot{z} - \lambda^2 z = 0$$

$$z(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{g}{T_{virt,0}} (\Gamma_{virt} - \Gamma'_{virt})} > 0 \quad (1)$$

$Be^{-\lambda t}$ 는 작아서 무시하면 $z(t) = Ae^{\lambda t}$ 이고 양변을 미분하면

$$\lambda = \frac{v}{z} \text{이다.}$$

- (1)식에 대입하면 $\Gamma_{virt} = \left(\frac{v}{z}\right)^2 \cdot \frac{T_{virt,0}}{g} + \Gamma'_{virt}$



영화 속에서의 기온 감률

- $v \geq v_t$
- 영화 속 우박이 구형태이고 10cm일 때 종단속도

$$v_t = \sqrt{\frac{8R\rho_{hail}g}{3C\rho_{air}}} = 84.56\text{m/s}$$

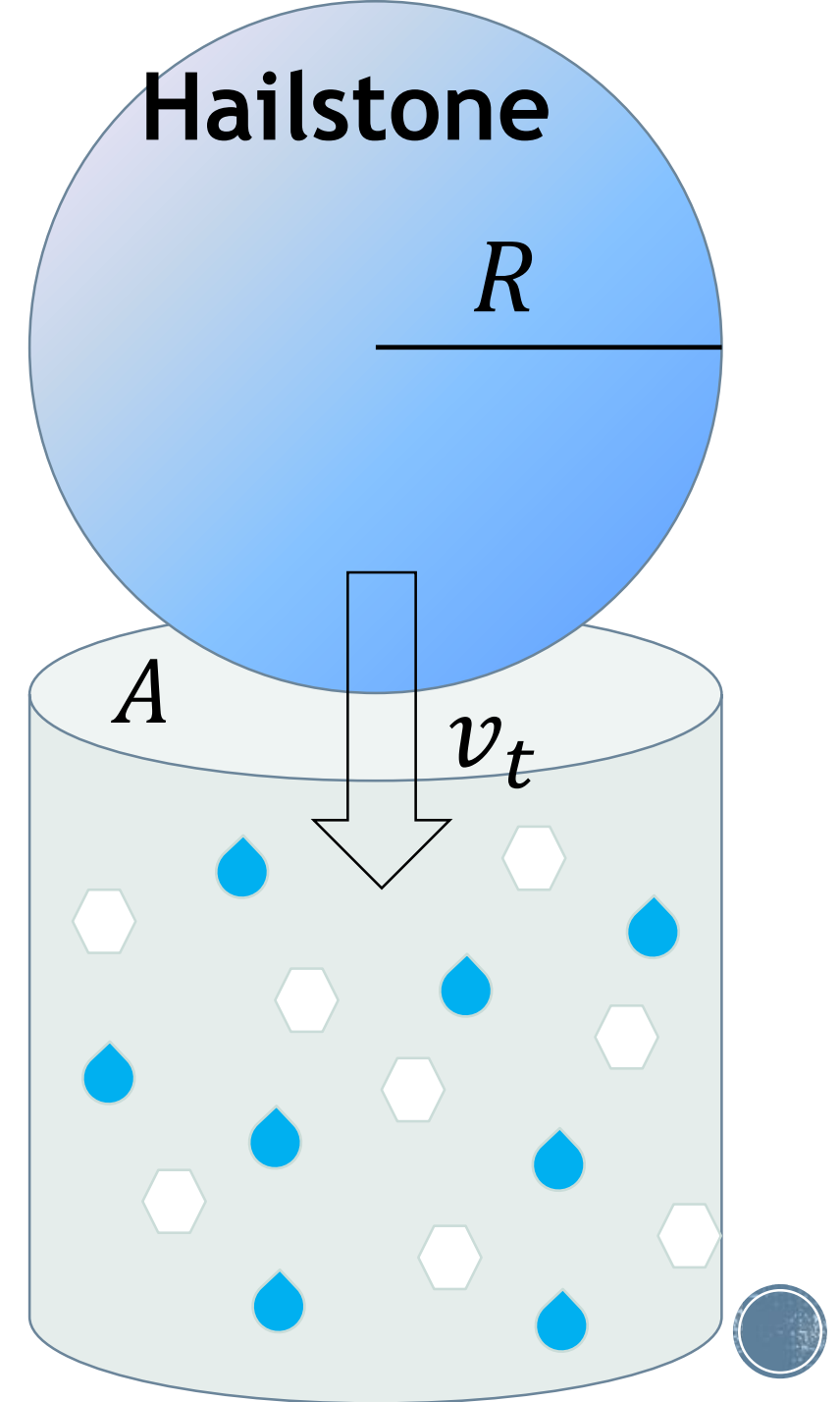
- 우박 생성고도 5km, $T_{virt,0} = 0^\circ\text{C}$ 라고 가정
- $\Gamma_{virt} = \left(\frac{v}{z}\right)^2 \cdot \frac{T_{virt,0}}{g} + \Gamma'_{virt} = 17.8^\circ\text{C/km}$ (매우 크다)



우박의 성장시간

가정

- 1) 우박의 형태는 원형이다.
- 2) 구름 속의 물방울과 얼음의 양은 일정하고 서로 같다.
- 3) 구름 속 수증기는 우박으로 응결되지 않는다. 즉, 우박은 구름 속 물방울과 빙정들에 의해서만 성장한다.



우박의 성장시간

$$I. \frac{dM}{dt} = X_l E_l A v_t + X_s E_s A v_t$$

- $v_t = kR$ (우박의 크기가 작을때)

- $A = \pi R^2$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = (X_l E_l + X_s E_s) \pi k R^3$$

$$II. M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{hail}$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = 4\pi \rho_{hail} R^2 \frac{dR}{dt}$$



우박의 성장시간

$$I = II$$

$$\Rightarrow 4\pi\rho_{hail}R^2\frac{dR}{dt}=(X_lE_l+X_sE_s)\pi kR^3$$

$$\Rightarrow \frac{dR}{dt}=\frac{(X_lE_l+X_sE_s)kR}{4\rho_{hail}}$$

$$\Rightarrow \int_{R_0}^R \frac{dR}{R}=\int_0^t \frac{(X_lE_l+X_sE_s)k}{4\rho_{hail}}dt$$

$$\therefore R=R_0\exp\left(\frac{(X_lE_l+X_sE_s)k}{4\rho_{hail}}t\right)$$

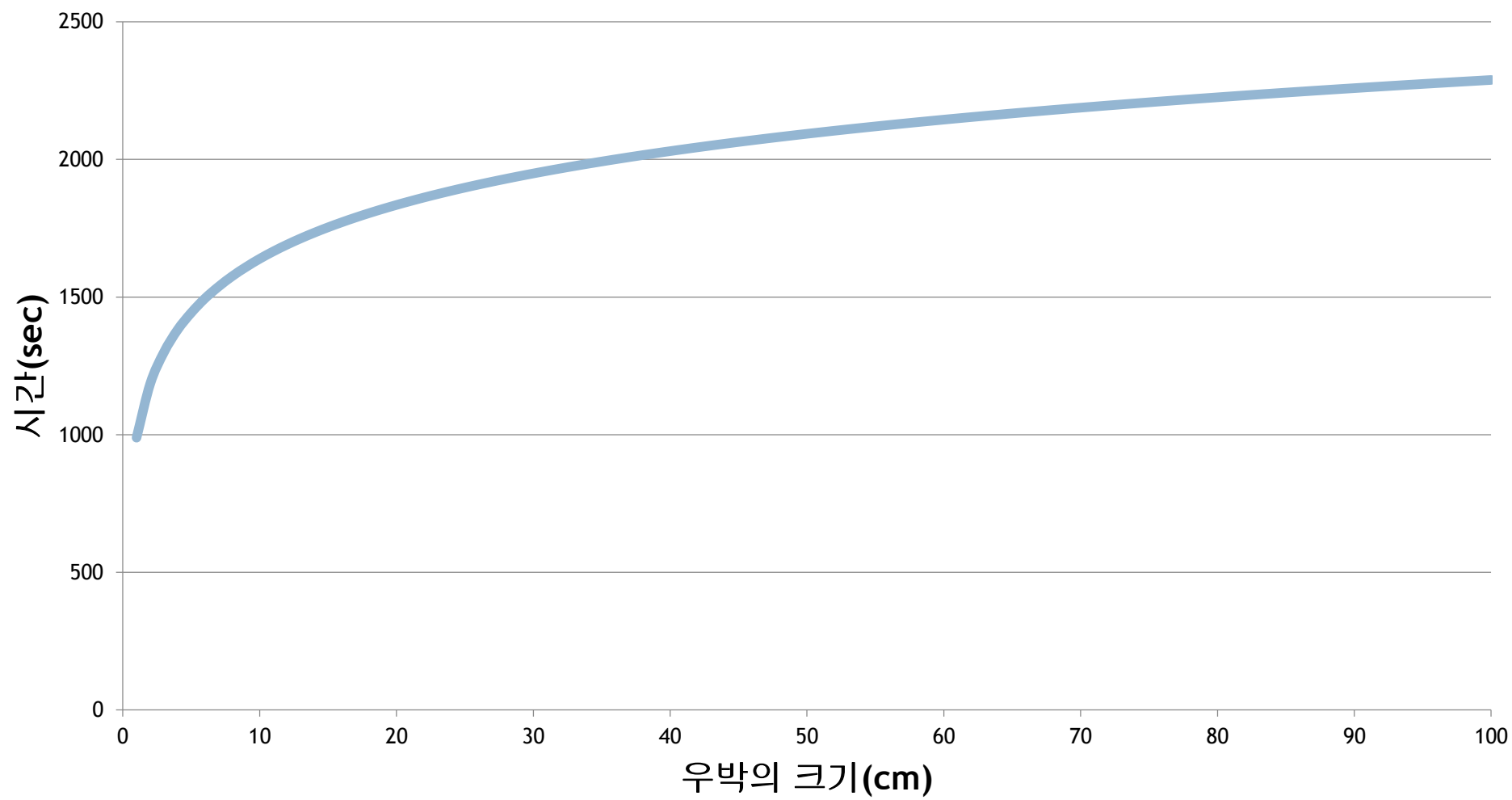


우박의 성장시간

- $R = R_0 \exp \left(\frac{(X_l E_l + X_s E_s) k}{4 \rho_{hail}} \right)$
- 우박이 생성되는 적란운의 경우
 - $R_0 = 300 \mu m$
 - $X_l = X_s = 1.3 g/m^3$
 - $E_l = 1, E_s = 0.25$
 - $k = 8 \times 10^3 s^{-1}$
 - $\rho_{hail} = 917 kg/m^3$



우박의 성장시간



영화 속 우박의 성장시간

영화 속 우박의 크기가 $R=10\text{cm}$ 라고 하면

생성되는데 걸리는 시간은

(27분 30초) 1639초가 걸린다.



Real condition

- 우박이 성장하는 동안 대기의 불안정도가 유지되어 상승속도가 유지 되어야 한다.
- 영화 속에서는 뇌우 경보가 내렸다고 나온다고 하였으므로 supercell이 형성되었을 경우 불가능한 것은 아니다.
- 실제 2010년 3월 6일에 호주 멜버른에서 supercell storm이 발생되어 10cm의 우박이 떨어졌다.
- 우리나라에서도 1975년 5월 30일에 부산 동래에서 지름 40cm의 우박이 관측됨



Conclusion

- 영화 속에 나오는 우박의 경우 $17.8^{\circ}\text{C}/\text{km}$ 의 기온감률과 약 27~28분 정도의 성장시간이 필요하므로 거대한 우박이 형성되기 어렵다.
- 하지만 Supercell이 형성될 경우 영화처럼 지름이 10cm가 넘는 우박이 떨어질 수도 있으며, 실제 이러한 우박은 형성되었던 경우가 있다.



Reference

- 金聖三·孫亨珍, 巨大雨雹의 記錄과 1975년 東來 巨大雨雹, 한국기상학회 vol. 13, no.1, 1977.
- Anastasios A. Tsonis, 『An Introduction to Atmospheric Thermodynamics』, Cambridge University Press, 2007.
- Halliday, David, 『Fundamentals of Physics, Extended, 9/e』, Wiley, 2010
- Gregory J. Barnhart, 「Predicting Hail Size Using Model Vertical Velocities」, Master's Thesis, Naval Postgraduate School Monterey, 2008.
- <http://en.wikipedia.org/wiki/Supercell>
- http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient
- http://en.Wikipedia.org/wiki/Hurricane_Katrina
- <http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=1146339&cid=40942&categoryId=32269>

