制約つき最適化問題

2020/10/15佐藤光

制約つき最適化問題の一般形

$$
\begin{aligned}
&\min \mathrm{f}(\mathbf{x}) \\
&\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, l, \\
&\qquad g_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = l + 1, \ldots m, \\
&\qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

特に断りがなければ
f(x)とg(x)は2回微分可能と考える.

制約つき最適化問題の一般形

$$
\begin{aligned}
&\min \mathrm{f}(\mathbf{x}) \\
&\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, \ldots, l, && \longrightarrow \quad \textbf{不等式制約つき} \\
&\qquad g_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = l + 1, \ldots m, && \longrightarrow \quad \textbf{等式制約つき} \\
&\qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

目次(Index)

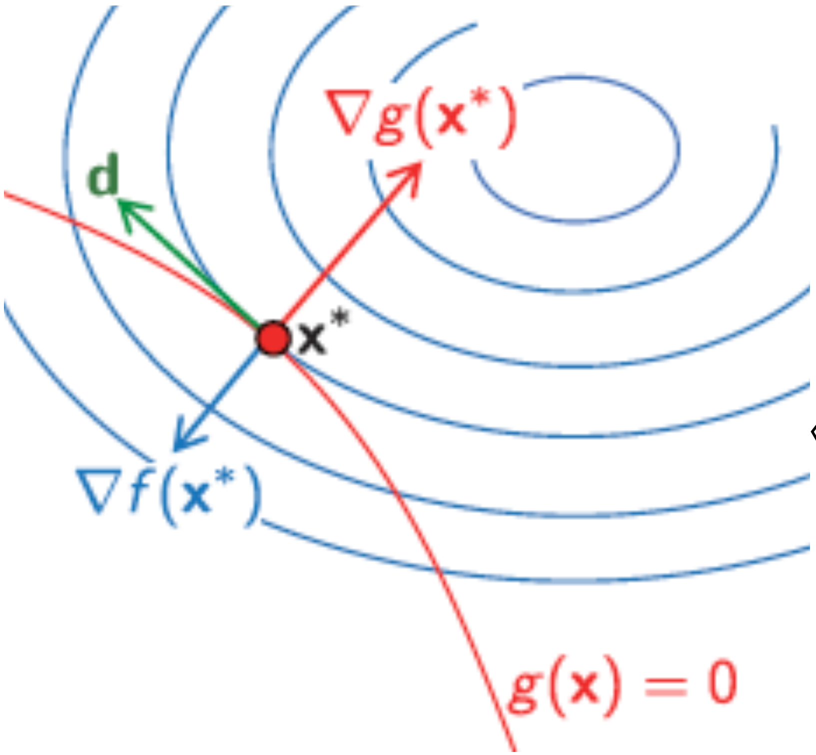
等式制約つき最適化問題

$$\min \mathrm{f}(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \ldots m,$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

等式制約つき最適化問題



一般に点$\boldsymbol{x}^*$が局所最適解であっても$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$が**成立するわけではない.**

等式制約つき最適化問題

最適性の1次の必要条件

最適性の2次の必要条件

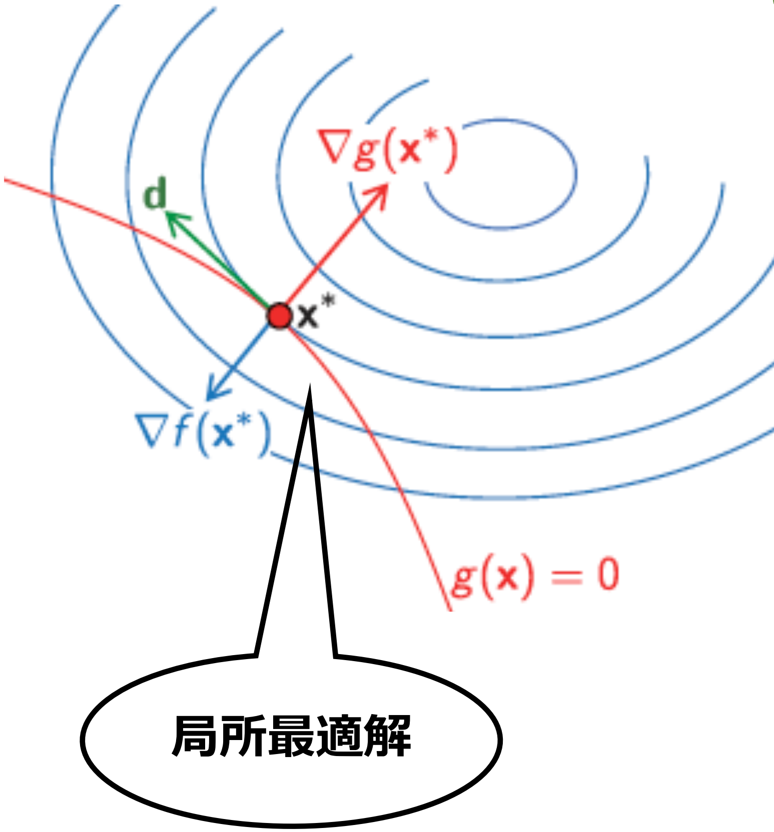
最適性の2次の十分条件

最適性の1次の必要条件

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

を満たすベクトル$\boldsymbol{u}^* \in \mathbb{R}^m$が存在する。
(目的関数fと制約関数$g_i(i = 1, \dots, m)$が微分可能であり、
$\boldsymbol{x}^*$は局所最適解かつ正則)

証明(1次の必要条件)



1本の制約を考えて…

$$\nabla g(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} = 0$$

を満たす方向を$\mathbf{d}$として

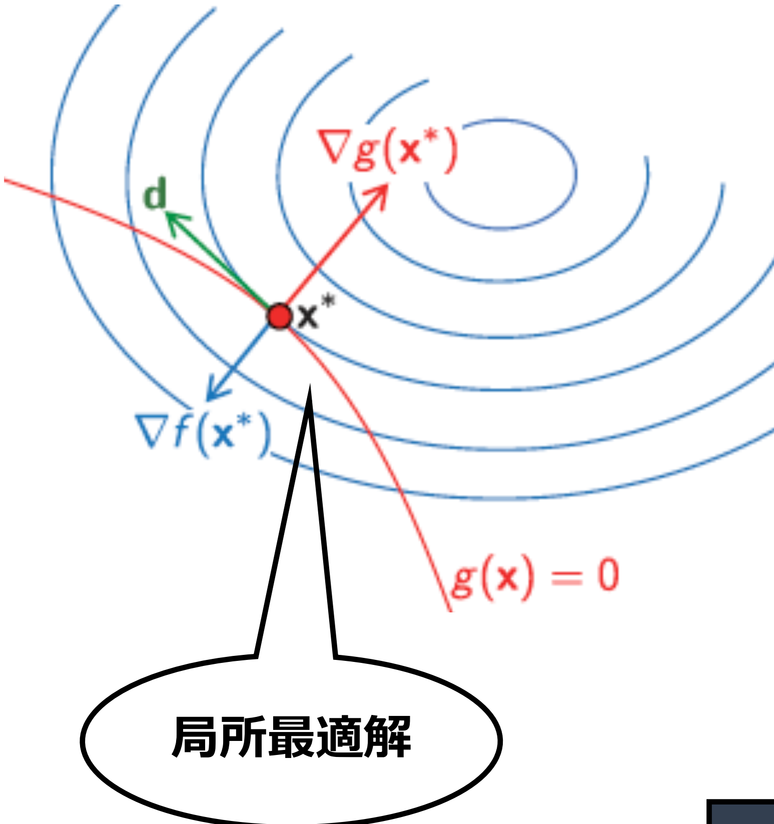
$$g(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{d}) \approx g(\boldsymbol{x}^*) + \nabla g(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d}$$

と近似できる。

$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)$と$\nabla g(\boldsymbol{x}^*)$が平行でなければ

$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} \neq 0$となる。

証明(1次の必要条件)



目的関数fも同様に近似して

$$f(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{d}) \approx f(\boldsymbol{x}^*) + \nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d}$$

となる。

$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} \neq 0$ならば、方向**d**か**-d**でよりも小さくできるので、 $\boldsymbol{x}^*$が局所最適解であることに反する。

$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + u \nabla g(\boldsymbol{x}^*) = 0$
を満たす$u \in \mathbb{R}$が存在する.

証明(1次の必要条件)

拡張すると...

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

を満たすベクトル$\boldsymbol{u}^* \in \mathbb{R}^m$が存在する。
(目的関数fと制約関数$g_i(i = 1, \dots, m)$が微分可能であり、
$\boldsymbol{x}^*$は局所最適解かつ正則)

最適性の2次の必要条件

$$\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}}\left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^*)\right)\boldsymbol{d} \geq 0, \boldsymbol{d} \in V(\boldsymbol{x}^*)$$

ここで

$$V(\boldsymbol{x}^*)=\{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n | \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d}=0, i=1, \dots, m\}$$

とする

証明(最適性の2次の必要条件)

急ですが…

ラグランジュ関数(Lagrangian fuction)

$L(\mathbf{x},\mathbf{u})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m} u_i\, g_i(\boldsymbol{x})$

と定義する.

最適性の1次の必要条件を満たす$x^* \in \mathbb{R}^n, u^* \in \mathbb{R}^m$は
以下の連立方程式の解となる.

$$\nabla_u L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) = g(\boldsymbol{x}^*) = 0,$$
$$\nabla_x L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) = \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

証明(最適性の2次の必要条件)

$$\nabla_{xx}^2 L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^*)$$

この式はラグランジュ関数のヘッセ行列が
半正定値であることに対応する.

ラグランジュ関数を使うことで
制約なし最適化問題の最適性の条件となる

最適性の2次の十分条件

$$d^T\left(\nabla^2 f(x^*)+\sum_{i=1}^{m} u_i^*\nabla^2 g_i(x^*)\right)d \boxed{>} 0, d \in V(x^*)$$

ここで

$$V(x^*)=\{d\in\mathbb{R}^n|\nabla g_i(x^*)^T d=0, i=1,\ldots,m\}$$

とする

定理14
点$\boldsymbol{x}^*$停留点でヘッセ行列が
正定値ならば点$\boldsymbol{x}^*$は局所最適解

等式制約つき最適化問題とラグランジュ関数

$\min f(\mathbf{x})$

s.t. $g_i(\boldsymbol{x}) = 0,$

$i = 1, \ldots m,$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$\longrightarrow$

$\min L(\mathbf{x},\mathbf{u}) =$

$f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \, g_i(\boldsymbol{x}),$

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

具体例(等式制約つき…)

$$\min \mathrm{f}(\mathbf{x}) = -x_1 x_2$$
$$\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0, i = 1, \dots m,$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

⟶ 目的関数f(x)と制約関数g(x)の勾配とヘッセ行列は…

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \nabla^2 f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \nabla^2 g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

具体例(等式制約つき…)

①最適性の1次の必要条件

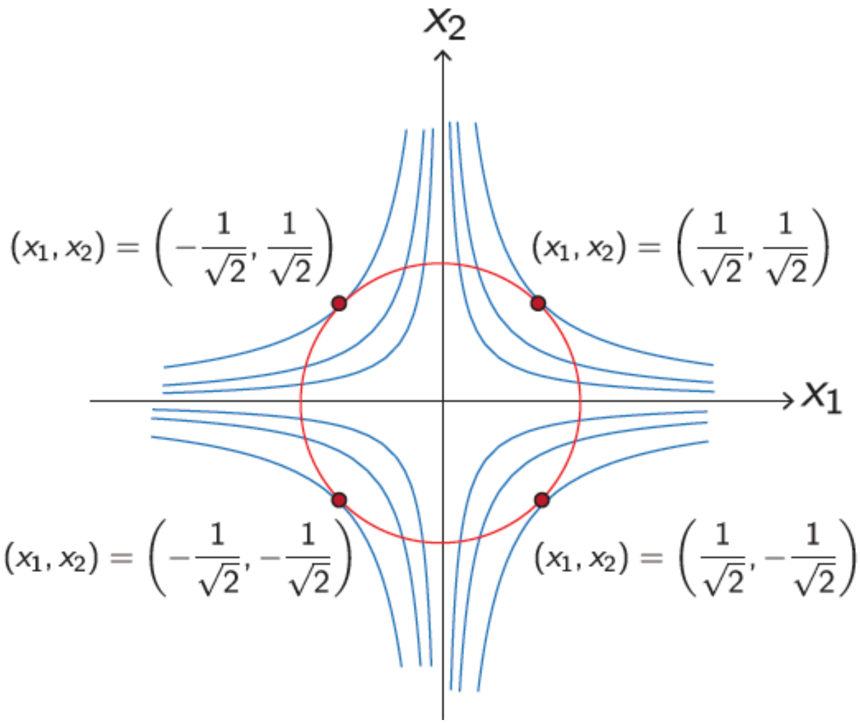
$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} -x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = 0}$$

②制約式

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x_1^*, x_2^*, u^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

具体例(等式制約つき...)

等式制約つき最適化問題の例



$$(x_1^*, x_2^*, u^*) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$$

具体例(等式制約つき…)

最適性の2次の十分条件を確認する

$u^* = \frac{1}{2}$のときのラグランジュ関数

$$\nabla_{xx}^2 L(\boldsymbol{x}^*, u^*) = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) + u^* \nabla^2 g(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\nabla g(x^*)^T d = 0$を満たすベクトル**d**の集合

$$V(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{d} = (t, -t)^T | t \in \mathbb{R}\}$$

$d^T \nabla_{xx}^2 L(\boldsymbol{x}^*, u^*) d = 4t^2 \geq 0$
となるので、**最適性の2次の十分条件を満たす.**

まとめ(等式制約つき最適化問題)

最適性の1次の必要条件

最適性の2次の必要条件

最適性の2次の十分条件

目次(Index)

不等式制約つき最適化問題

$$\min \mathrm{f}(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, \ldots m,$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

$g_i(\boldsymbol{x}) = 0$となる制約条件iを点xにおいて"**有効**"という
その集合を

$$I(\boldsymbol{x}) = \{i | g_i(\boldsymbol{x}) = 0, i = 1, \ldots, m\}$$

とする。

KKT条件(カルーシュ・キューン・タッカー条件)

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

$$u_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, i = 1, \ldots, m,$$

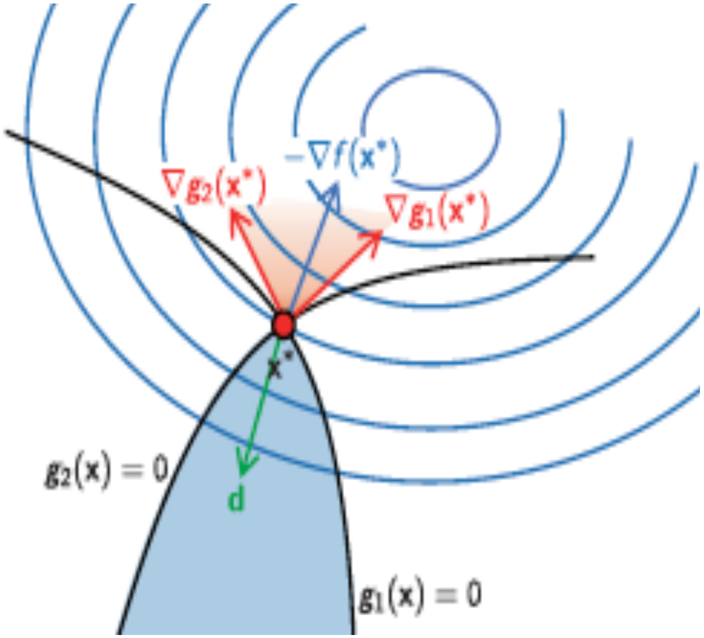
$$u_i^* \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

を満たす$\boldsymbol{u}^* \in \mathbb{R}^m$が存在する.

有効でなければ$u_i^* = 0$

KKT条件が最適性の必要条件となることを保証するためには制約条件に関する仮定が必要である.点xが正則である仮定を1次独立制約想定という.

証明(KKT条件)



$$g_1(\boldsymbol{x}) \leq 0, g_2(\boldsymbol{x}) \leq 0$$

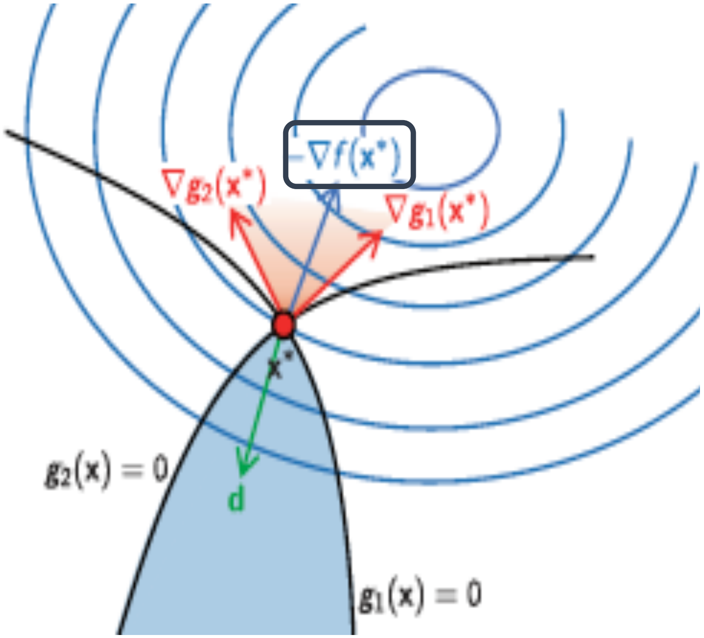
となる最適化問題を考える.

点$\boldsymbol{x}^*$は局所最適解で

$$g_1(\boldsymbol{x}^*) = 0, g_2(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

となる.

証明(KKT条件)



$$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{d} \le 0, \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{d} \le 0$$

を満たす方向を**d**とする.

$$g_i(\boldsymbol{x}^* + \boldsymbol{d}) \approx g_i(\boldsymbol{x}^*) + \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{d}$$

と近似されて、点x^*から方向dに少し進んでも制約条件を満たす.

証明(KKT条件)

領域$-\nabla f(\boldsymbol{x}^*)$は

$$G(\boldsymbol{x}^*) = \{u_1 \nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2 \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*) \mid u_1, u_2 \geq 0\}$$

に含まれる.

最適解でない例

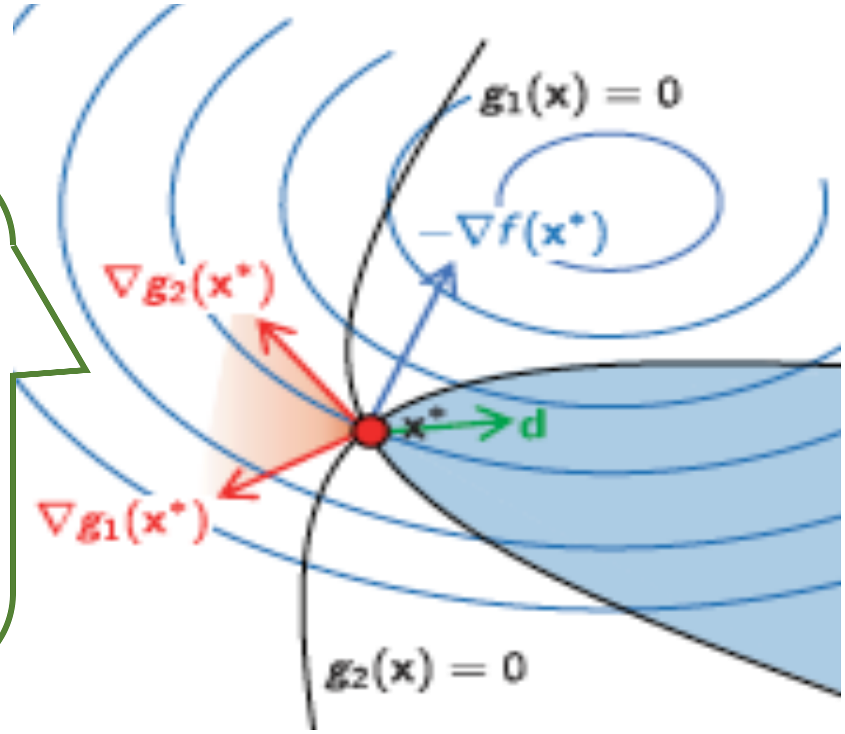
証明

$-\nabla f(\boldsymbol{x}^*)$がG($\boldsymbol{x}^*$)に含まれていないとすると…

$\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} \leq 0, \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} \leq 0$

かつ

$-\nabla f(\boldsymbol{x}^*)\boldsymbol{d} \leq 0$が存在する.



証明(KKT条件)

$$-\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = u_1 \nabla g_1(\boldsymbol{x}^*) + u_2 \nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)$$

を満たすu_1, u_2が存在する.

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0$$

$$u_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0, i = 1, \ldots, m,$$

相補性条件

$$u_i^* \geq 0, i = 1, \ldots, m$$

を満たす$u^* \in \mathbb{R}^m$が存在する.

最適性の2次の必要条件

$$\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}}\left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^*)\right)\boldsymbol{d} \geq 0, \boldsymbol{d} \in V(\boldsymbol{x}^*)$$

ここで

$$V(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n | \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} = 0, i = 1, \dots, m\}$$

とする

最適性の2次の十分条件

$$\boldsymbol{d}^{\boldsymbol{T}}\left(\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla^2 g_i(\boldsymbol{x}^*)\right)\boldsymbol{d} \boxed{>} 0, \boldsymbol{d} \in V(\boldsymbol{x}^*)$$

ここで

$$V(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n | \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{d} = 0, i = 1, \dots, m\}$$

とする

定理14
点$\boldsymbol{x}^*$停留点でヘッセ行列が正定値ならば点$\boldsymbol{x}^*$は局所最適解

凸計画問題の最適性の十分条件

不等式制約つき最適化問題の

目的関数fと制約関数$g_i (i = 1, \ldots, m)$が

微分可能な**凸関数**とする.

実行可能解$\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$とベクトル$\boldsymbol{u}^* \in \mathbb{R}^m$が

KKT条件を満たすなら

$\boldsymbol{x}^*$は大域最適解である.

証明(十分条件)

$\mathbf{x}$を任意の実行可能解として、$f(\boldsymbol{x})$は凸関数であるので

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^*) + \boxed{\nabla f(\boldsymbol{x}^*)^T}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$$

が成立する.

KKT条件から

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^*) \geq \boxed{\left(-\sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)\right)^{\mathsf{T}}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$$

となる.

証明(十分条件)

制約関数$g_i(x = 1, \dots, m)$は凸関数なので

$$g_i(\boldsymbol{x}) \geq g_i(\boldsymbol{x}^*) + \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)$$

が成立する.

$u_i^* \geq 0$から

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^\top(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \leq \sum_{i=1}^{m} u_i^* \big(g_i(\boldsymbol{x}) - g_i(\boldsymbol{x}^*)\big)$$

が成立する.

証明(十分条件)

$$\sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \leq \sum_{i=1}^{m} u_i^* \left(g_i(\boldsymbol{x}) - g_i(\boldsymbol{x}^*) \right)$$

において、$u_i^* g_i = 0$、また点xは$g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0 (i = 1, \ldots, m)$から

$\sum_{i=1}^{m} u_i^* \left(g_i(\boldsymbol{x}) - g_i(\boldsymbol{x}^*) \right)$=$\sum_{i=1}^{m} u_i^* g_i(x) \leq 0$から

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^*) \geq -\sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \geq 0$$

最適性の十分条件

不等式制約つき最適化問題の

目的関数fと制約関数$g_i (i = 1, \ldots, m)$が

微分可能な**凸関数**とする.

実行可能解$\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$とベクトル$\boldsymbol{u}^* \in \mathbb{R}^m$が

KKT条件を満たすなら

$\boldsymbol{x}^*$は**大域最適解**である.

目次(Index)

✓等式制約つき最適化問題

✓不等式制約つき最適化問題

双対問題と双対定理

双対問題と双対定理

$$\min \mathrm{f}(\mathbf{x})$$

$$\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, i = 1, \ldots m,$$

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

議論を簡単にするために、不等式制約つき最適化問題を考える.

双対問題と双対定理

弱双対

定理

鞍点

定理

強双対

定理

双対問題

不等式制約つき最適化問題はラグランジュ関数を用いて

min $L(\mathbf{x},\mathbf{u})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m} u_i\, g_i(\boldsymbol{x})$

s.t. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

となる.($\mathbf{u}$を固定)

$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^m$である.

任意の実行解xとラグランジュ乗数uに対して

$$f(\boldsymbol{x}) \geq L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

が成立する.

→ **このラグランジュ緩和問題を解くと、$f(x^*)$に対する下界が得られる.**

双対問題

ラグランジュ緩和問題の最適値を$\theta(\boldsymbol{u}) = min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$として
次のようにf($\mathbf{x}$)の最大の下界を求める**ラグランジュ双対問題**を定義する.

$$\max \ \theta\left(\boldsymbol{u}\right)$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^m$$

弱双対定理

不等式制約つき問題の実行可能解**x**と双対問題**u**
に対して実行可能解**u**に対して

$$f(\boldsymbol{x}) \geq \theta(\boldsymbol{u})$$

が成立する.

主問題と双対問題の関係性

$$
\begin{tikzcd}
 & f(\mathbf{x}) \arrow[d, equal] & f(\mathbf{x}^*) \arrow[d, equal] & \\
 & \boxed{\max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m_+} L(\mathbf{x},\mathbf{u})} \arrow[r] & \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) & \text{主問題} \\
L(\mathbf{x},\mathbf{u}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \vee| & \text{弱双対定理} \\
 & \boxed{\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} L(\mathbf{x},\mathbf{u})} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m_+} \theta(\mathbf{u}) \arrow[d, equal] & \text{双対問題} \\
 & \theta(\mathbf{u}) & \theta(\mathbf{u}^*) &
\end{tikzcd}
$$

主問題と双対問題の関係性

max L(**x**,**u**)=f(**x**)+$\sum_{i=1}^{m} u_i\, g_i(\boldsymbol{x})$
s.t. **u** $\in \mathbb{R}_+^m$
について考える.(**x**を固定)

→

- $g_i(\boldsymbol{x}) > 0$なる制約が1つでもあれば、u_iを限りなく増加できる.
- $g_i \leq 0$を満たすと、u_i=0が最適解となる.
よって$f(\boldsymbol{x}) = max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^m} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$となる.

$$f(\boldsymbol{x}^*) = min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

主問題と双対問題の関係性

不等式制約つき問題の実行可能解$\mathbf{x}$と双対問題$\mathbf{u}$に対して実行可能解uに対して$f(\boldsymbol{x}) \geq \theta(\boldsymbol{u})$
が成立する.

$$f(\boldsymbol{x}^*) = min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

と弱双対定理より

$$f(\boldsymbol{x}^*) = min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

$$\geq max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m} min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

が得られる.

主問題と双対問題の関係性

$$\begin{tikzcd}
 & f(\mathbf{x}) \arrow[d, equal] & f(\mathbf{x}^*) \arrow[d, equal] & \\
 & \boxed{\max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m_+} L(\mathbf{x},\mathbf{u})} \arrow[r] & \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) & \text{主問題} \\
L(\mathbf{x},\mathbf{u}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \rotatebox[origin=c]{-90}{$\geq$} & \text{弱双対定理} \\
 & \boxed{\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} L(\mathbf{x},\mathbf{u})} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \max_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m_+} \theta(\mathbf{u}) \arrow[d, equal] & \text{双対問題} \\
 & \theta(\mathbf{u}) & \theta(\mathbf{u}^*) &
\end{tikzcd}$$

$f(\boldsymbol{x}^*) - \theta(\boldsymbol{u}^*)$ を**双対ギャップ(duality gap)**といい、一般には$f(\boldsymbol{x}^*) > \theta(\boldsymbol{u}^*)$となる場合が多い.

→ **鞍点定理**を満たすと双対ギャップ=0.

鞍点定理

不等式制約つき問題の実行可能解$\mathbf{x}$と
双対問題の実行可能解$\mathbf{u}$が以下の条件を満たすとき、点$\boldsymbol{x}^*$と点$\boldsymbol{u}^*$は最適解となる.

$$min_{x \in \mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*) \geq L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \geq max_{u \in \mathbb{R}_+^m} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u})$$

証明(鞍点定理)

$$\max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m}\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \geq \overset{\theta(u)\ =}{\boxed{\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}^*)}} \geq L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*)$$

$$\geq \underset{=\ f(x)}{\boxed{\max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m} L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u})}} \geq \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

が成り立つ.

この式と$f(x^*) = min_{x\in\mathbb{R}^n} max_{u\in\mathbb{R}_+^m} L(x,u) \geq max_{u\in\mathbb{R}_+^m} min_{x\in\mathbb{R}^n} L(x,u)$から

$$\max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m}\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{u}^*) = \min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}\max_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}_+^m} L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

が成り立つ.

よって、弱双対定理から$f(\boldsymbol{x}^*) = \theta(\boldsymbol{u}^*)$が成り立ち、点$\boldsymbol{x}^*$と点$\boldsymbol{u}^*$がそれぞれ不等式制約つき問題と双対問題の最適解であることが示せた.

スレイター想定

制約関数$g_i(\boldsymbol{x})(i = 1, \dots, m)$は凸関数であり、
$g_i(\boldsymbol{x}) < 0$となる実行可能解**x**が存在する.

強双対定理

不等式制約つき問題の目的関数fと不等式制約の制約関数$g_i(\boldsymbol{x})(i=1,\dots,m)$は凸関数で、**スレイター制約想定**を満たす.
このとき、最適値$f(\boldsymbol{x}^*)$と双対問題の最適値$\theta(\boldsymbol{u}^*)$に対して

$$f(\boldsymbol{x}^*)=\theta(\boldsymbol{u}^*)$$

を満たす.

まとめ(双対問題と双対定理)

弱双対
定理

鞍点
定理

強双対
定理