実装演習レポート 【応用数学】 第１章 ：線形代数

要点のまとめ

・ スカラーとベクトルの違い。スカラーは普通の数であり、ベクトルは「大きさ」と「向き」を持つ。
・ 行列とはスカラーを表にしたもの、もしくはベクトルを並べたもの。ベクトルの変換に使用する。
行列の積は「行」×「列」で新たな行列の成分を求める。
・ 行列を用いると連立方程式をシンプルに表現でき、行列の変形で連立方程式を解ける。
そのときに出てくるものが「単位行列」と「逆行列」。
単位行列とは、かけても、かけられても相手が変化しない行列。
逆行列とは、逆数のような働きをする行列。掃き出し法で求める、存在しない場合もある。
・ 行列式とは行列を２つの横ベクトルで作られる平行四辺形の「面積」のこと。
逆行列の有無を判別することができる（面積が0のときは逆行列が存在しない）。

・ ある行列Aに対して式 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ が成り立つ場合、$\vec{x}$ とその係数 λ を行列Aに対する
固有ベクトル、固有値という。
・ 固有値分解とは正方形の行列を３つの行列の積に変換すること。
この変換によって行列の累乗の計算が容易になる。
正方行列以外では、特異値分解で固有値分解と似たようなことができる。

実装演習レポート【応用数学】第１章：線形代数

演習問題

応用数学演習問題

第1章 ベクトルと行列の演算I

問1.1.1

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}$$

問1.1.2

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-1\end{pmatrix}$$

問1.1.3

$$7\vec{a}=7\begin{pmatrix}1\\6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\42\\21\end{pmatrix}$$

問1.1.4

$$8(\vec{a}+\vec{b})=8\times\begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\64\\56\end{pmatrix}$$

問1.2.1

$$A+B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\6&8\end{pmatrix}$$

問1.2.2

$$A-3B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&4\\1&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&12\\3&15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-11\\2&-12\end{pmatrix}$$

第2章 ベクトルと行列の演算II

問2.1.1

$$A\vec{v}=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&9&0\\3&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+12\\5+0+0\\3+0+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\5\\9\end{pmatrix}$$

問2.1.2

$$B\vec{v}=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix}$$

問2.1.3

$$BA=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&4\\5&9&0\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&6&10\\25&23&14\end{pmatrix}$$

問2.1.4

$$B^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\\3&5\end{pmatrix}$$

転置行列…行と列を入れ換えてできる行列。

実装演習レポート【応用数学】第１章：線形代数

演習問題

問2.2.1

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

問2.2.2

※掃き出し法

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1行目から2行目の$\frac{1}{4}$倍を引く

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2行目を$\frac{1}{4}$倍する

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

1行目の$\frac{1}{2}$倍を2行目から引く

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

1行目を2倍

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

1行目と2行目を入れ換える

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

問2.2.3

※掃き出し法

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

問2.2.4

$$BAB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+12 & 1+3 \\ 6+4 & 3+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/8 & 3/8 \\ 3/8 & -1/8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -14+12 & 42-4 \\ -10+12 & 30-4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 38 \\ 2 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{8} & \frac{38}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{26}{8} \end{pmatrix}$$

実装演習レポート【応用数学】第１章：線形代数

演習問題

応用数学 演習問題

第7章 確認テスト

問7.1

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\\7\end{pmatrix}$$

問7.2

$$\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda=5$$

実装演習レポート【応用数学】第２章：確率・統計

要点のまとめ

・ 確率は２種類。発生する頻度による頻度確率（客観確率）と信念の度合いによるベイズ確率（主観確率）。

・ 条件付き確率。ある事象X=xが与えられた下で、Y=yとなる確率。

$$P(Y=y|X=x)=\frac{P(Y=y,X=x)}{P(X=x)}$$

・ 独立な事象の同時確率。お互いの発生には因果関係のない事象X=xと事象Y=yが同時に発生する確率。

$$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)$$
$$=P(Y=y,X=x)$$

・ ベイズ則（事後確率を求める為のもの）。事象X=xと事象Y=yに対して、次式が成り立つ。

$$P(X=x|Y=y)P(Y=y)$$
$$=P(Y=y|X=x)P(X=x)$$

実装演習レポート 【応用数学】 第２章 ： 確率･統計

要点のまとめ

- 確率変数とは事象と結び付けられた数値。確率分布とは事象の発生する確率の分布。
- 期待値とはその分布における、確率変数の平均の値 or 「ありえそう」な値。

期待値 E(f) $= \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) f(X = x_k)$

※ 連続する値の場合

期待値 E(f) $= \int P(X = x) f(X = x) dx$

- 分散とはデータの散らばり具合のこと。共分散とは２つのデータ系列の傾向の違いのこと。

分散 var(f) $= \mathrm{E}\left(\left(f_{(X=x)} - \mathrm{E}_{(f)} \right)^2 \right)$
$= \mathrm{E}\left(f_{(X=x)}^2 \right) - \left(\mathrm{E}_{(f)} \right)^2$

共分散 Cov(f,g)$= \mathrm{E}\left(\left(f_{(X=x)} - \mathrm{E}(f) \right) \left(g_{(Y=y)} - \mathrm{E}(g) \right) \right)$
$= \mathrm{E}(fg) - \mathrm{E}(f)\mathrm{E}(g)$

- 分散では２乗しているため単位が異なる。分散の平方根を求めて単位を戻したものを標準偏差という。
- 確率分布については下記４種類がある。

① ベルヌーイ分布 ：コイントスのイメージ
② マルチヌーイ分布 ：サイコロを転がすイメージ
③ 二項分布 ：①の多試行版
④ ガウス分布 ：釣鐘型の連続分布

実装演習レポート 【応用数学】 第２章 ： 確率・統計

演習問題

応用数学 演習問題

第3章 確率変数と確率分布

問3.1 a，d

※試行の結果として起こる事象に整数や実数の数値が結びつけられているときに，その数値を「確率変数」という。

問3.2 試行：1200回

事象	裏が0枚，表が4枚	裏が1枚，表が3枚，	裏が2枚，表が2枚	裏が3枚，表が1枚	裏が4枚 表が0枚
確率変数	4	3	2	1	0
事象が発生した回数	75	300	450	①	75
事象と対応する確率	1/16	②	③	④	⑤

① = 1200 − (75 + 300 + 450 + 75) = 300回

② = 300 ÷ 1200 = $\frac{4}{16}$

③ = 450 ÷ 1200 = $\frac{6}{16}$

④ = 300 ÷ 1200 = $\frac{4}{16}$

⑤ = 75 ÷ 1200 = $\frac{1}{16}$

実装演習レポート 【応用数学】 第２章 ： 確率・統計

演習問題

応用数学演習問題

第5章 条件付き確率

※条件付き確率とは，事象Aが起こった条件の下で事象Bが起こる確率のことであり，これをP(B|A)と表す。

問5.1

1年のうち洗濯物を干していた日数を60日。洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日数を12日。

①洗濯物を干していたという条件下で，雨が降ってきた日の発生する確率。

$$P(\text{雨が降ってきた日}\mid\text{洗濯物を干した日}) = \frac{\text{雨が降ってきた日数}}{\text{洗濯物を干した日数}} = \frac{12\text{日}}{60\text{日}} = \frac{1}{5}$$

②洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日の発生する確率。

$$P(\text{洗濯物を干した日},\text{雨が降ってきた日}) = \frac{\text{洗濯物を干していてかつ雨が降ってきた日数}}{\text{全ての日数}} = \frac{12\text{日}}{365\text{日}} = \frac{12}{365}$$

問5.2.1

$$P(\text{Bである}\mid\text{赤色である}) = \frac{\text{赤い玉の中でBと記されている数}}{\text{赤い玉の数}} = \frac{1}{3}$$

問5.2.2

$$P(\text{白色である}\mid\text{Aである}) = \frac{\text{Aと記されている中で白色の玉の数}}{\text{Aと記されている数}} = \frac{1}{2}$$

実装演習レポート 【応用数学】 第２章 ： 確率・統計

演習問題

応用数学 演習問題
第2章 確認テスト

問2.3

$E(f) = \sum P(x) f(x)$

ア

問2.4

$Var(f) = E\left(\left(f(x) - E(f(x))\right)^2\right)$

$= E(f(x)^2) - E(f(x))^2$

ウ

実装演習レポート【応用数学】第３章：情報理論

要点のまとめ

- 自己情報量とは事象の珍しさを表したもの。確率が小さい程、自己情報量は大きい。

  I(x) = -log(P(x))　※ 対数の底が2のとき、単位はビット(bit)
  対数の底がeのとき、単位は(nat)。

- シャノンエントロピーとは自己情報量の期待値。

  H(x) = -Σ(P(x) log(P(x)))

- カルバック・ライブラーダイバージェンスとは２つの確率分布の差異を計る尺度。

$$D_{\mathrm{KL}}(P\|Q) = \mathbb{E}_{\mathrm{x}\sim P}\left[\log \frac{P(x)}{Q(x)}\right] = \mathbb{E}_{\mathrm{x}\sim P}\left[\log P(x) - \log Q(x)\right]$$

- 交差エントロピーとはKLダイバージェンスの一部分を取り出したもの。

$$H(P,Q) = -\mathbb{E}_{\mathrm{x}\sim P} \log Q(x) = -\sum_{x} P(x) \log Q(x)$$

実装演習レポート 【応用数学】 第３章：情報理論

演習問題

応用数学 演習問題

第4章 情報量

自己情報量 $I = -\log_2(P(x))$ [bit]

問4.1.1

$I = -\log_2(P(x)) = -\log_2(\frac{1}{2}) = 1\mathrm{bit}$

問4.1.2

$I = -\log_2(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}) = 2\mathrm{bit}$

問4.1.3

$I = -\log_2({}_nC_1(\frac{1}{2})^n) = -\log_2(n\times(\frac{1}{2})^n)$

$= (-\log_2 n + n)\mathrm{bit}$

第6章 対数と乗算除算の関係

問6.1

$X = AB$ $\log(X) = \log(A) + \log(B)$ ウ

問6.2

$X = \frac{A}{B}$ $\log(X) = \log(\frac{A}{B}) = \log(A) - \log(B)$ イ

問6.3

$X = x_1 x_2 x_3 x_4$ $\log(X) = \log(x_1x_2x_3x_4) = \sum_{k=1}^{4}\log(x_k)$ ウ

第7章 確認テスト

問7.5

シャノンエントロピー $= -\sum P(x)\log(P(x))$ イ