$$F(y) = \int_0^\infty f(x) K(xy) dx$$

积分变换的一般观点

作者：夏添

时间：April 22, 2022

版本：0.1

本书的目的在于讨论一般的积分变换的定义，逆变换，性质及其应用，而不仅仅是把目光局限于几种常见的积分变换上，所以侧重点会和数学物理方法课程有所不同。本书出现的内容仅服务于后续章节对于一般积分变换的讨论，并不服务于读者的考试，作业等事务。

目录

第 1 章 傅里叶变换

1.1 傅里叶级数的定义及其性质

关于傅里叶级数的知识，相信读者已经在各种书籍中了解了比较多，所以这里不加赘述，不过为了查阅方便，仍然会给出傅里叶级数的相关性质

考虑定义在区间 $[0,l]$ 的函数 $f(x)$，我们希望将其展开为三角级数

定义 1.1 (三角型傅里叶级数)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上可积，则其可以展为三角型傅里叶级数

$$\hat{f}(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi nx}{l} \tag{1.1}$$

其中各个系数的计算方式为

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{2\pi nx}{l}dx$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2\pi nx}{l}dx$$

♣

欧拉公式让我们想到还可以使用虚宗量指数函数来代替三角函数

定义 1.2 (指数型傅里叶级数)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上可积，则其可以展为指数型傅里叶级数

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{2\pi nix}{l}\right) \tag{1.2}$$

其中系数的计算方式为

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\exp\left(-\frac{2\pi nix}{l}\right)dx$$

♣

上面傅里叶级数的记号之所以用 $\hat{f}(x)$ 而不用 $f(x)$，是因为 $f(x) = \hat{f}(x)$ 并不总是相等

而为了考察其收敛性，可以给出两个收敛性的概念，均方收敛与逐点收敛

定理 1.1 (均方收敛)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上可积，其展得的傅里叶级数为

$$\hat{f}(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nx}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2\pi nx}{l}$$

那么有

$$\int_0^l|f(x)-\hat{f}(x)|^2dx=0 \tag{1.3}$$

上面均方收敛的概念虽然不能让我们确定傅里叶级数每点处都收敛至原来的函数 $f(x)$，但是至少可以告诉我们，傅里叶级数几乎处处收敛至原来的函数 $f(x)$

而对于每点处的收敛情况，则要介绍傅里叶级数的逐点收敛

定理 1.2 (逐点收敛)

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有左右极限，分别记为 $f(x_0-)$ 和 $f(x_0+)$，同时存在 $\alpha>0$ 使得如下积分存在：

$$\int_0^{\alpha}|\frac{f(x_0+x)-f(x_0+)}{x}|dx,\int_0^{\alpha}|\frac{f(x_0-x)-f(x_0-)}{x}|dx$$

记其展得的傅里叶级数为 $\hat{f}(x)$，那么有

$$\hat{f}(x_0)=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$$

傅里叶级数在一定条件下可以逐项微分或积分

定理 1.3 (逐项积分和微分)

函数 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上可积，展得傅里叶级数为 $\hat{f}(x)$ 那么

$$\int_a^b fdx=\int_a^b\hat{f}dx$$

若函数 $f(x)$ 满足一阶连续可微，则函数 $f'(x)$ 展得的傅里叶级数可以通过对 $\hat{f}(x)$ 逐项求导得到

傅里叶级数具有重要的 Parseval 恒等式

定理 1.4 (Parseval 恒等式)

函数 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上展得傅里叶级数为

$$\hat{f}(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2\pi nx}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{2\pi nx}{l}$$

那么

$$\frac{1}{l}\int_0^l f^2dx={a_0}^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}{b_n}^2$$

假如使用指数型傅里叶级数

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{2\pi nix}{l}\right)$$

那么该恒等式变为

$$\frac{1}{l}\int_0^l |f|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} {a_n}^2$$

1.2 傅里叶变换的定义及其性质

可以在一定程度上这样理解：将周期为无穷大的函数展开为傅里叶级数，傅里叶变换则为该级数的系数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{l}\left(\int_0^l f(t)\exp\left(-\frac{2\pi nit}{l}\right)dt\right)\exp\left(\frac{2\pi nix}{l}\right)$$

并且此时，由于 $l \to \infty$，以上求和也可以看作积分，即

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\omega t}dt\right) e^{2\pi i\omega x}d\omega$$

这一积分称作傅里叶积分，将其拆为两部分，得到如下定义

定义 1.3 (傅里叶变换)

函数 $f(x)$ 的傅里叶变换定义为

$$F(\omega) = \mathscr{F}f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-2\pi i\omega t}dt$$

其逆变换为

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega$$

傅里叶变换也具有类似于傅里叶级数的诸多性质，例如逐项微积分，以及 Parseval 恒等式

定理 1.5 (Parseval 恒等式)

记 $F(\omega) = \mathscr{F}f(\omega), G(\omega) = \mathscr{F}g(\omega)$ 那么

1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, G(-\omega)\, d\omega$$

2.
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, G(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, g(\omega)\, d\omega$$

证明 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(t)\, dt$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(t)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{2\pi i\omega t}d\omega\right) g(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\omega t} g(t)\,dt\right) d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,G(-\omega)\,d\omega
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,G(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i\omega t} g(\omega)\,d\omega\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-2\pi i\omega t}dt\right) g(\omega)\,d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,g(\omega)\,d\omega
\end{aligned}
$$

定理 1.6 (傅里叶变换的卷积) 函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 的傅里叶变换分别为 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-2\pi i\omega t}dt$ 和 $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-2\pi i\omega t}dt$，若函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 乘积的傅里叶变换存在，则该傅里叶变换由以下卷积给出

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(t)\,e^{-2\pi i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,G(\omega-u)\,du
$$

♡

证明

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(t)\,e^{-2\pi i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,e^{2\pi i u t}du\right) g(t)\,e^{-2\pi i\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,e^{-2\pi i(\omega-u)t}dt\right) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\,G(\omega-u)\,du
\end{aligned}
$$

定理 1.7 (傅里叶变换的多维卷积) 记 $f_k(x)$ 的傅里叶变换为 $F_k(\omega)$，其中 $k=1,2...n$，$g(x)$ 的傅里叶变换为 $G(\omega)$，设这些函数乘积的傅里叶变换存在，则该傅里叶变换由以下卷积给出

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\ldots f_n(x)\,g(x)\,e^{-2\pi i\omega x}dx
$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau_1) F_2(\tau_2) \ldots F_n(\tau_n) G\left(\omega - \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right) d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau_1) F_2(\tau_2) \ldots F_n(\tau_n) G\left(\omega - \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right) d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\tau_1) F_2(\tau_2) \ldots F_n(\tau_n) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi i\omega x + \sum_{k=1}^{n} 2\pi i x\tau_k} dx d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-2\pi i\omega x} \prod_{k=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F_k(\tau_k) e^{2\pi i x\tau_k} d\tau_k \right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \ldots f_n(x) g(x) e^{-2\pi i\omega x} dx$$

第 2 章 由傅里叶变换导出的积分变换

2.1 拉普拉斯变换

拉普拉斯的形状与傅里叶变换非常相似，并且拉普拉斯变换和逆变换也可以从傅里叶变换导出，但为了方便后续章节，这里还会讨论第二个导出拉普拉斯逆变换的方法

定义 2.1 (拉普拉斯变换)

规定函数 $f(x)$ 满足在负半轴和原点取值为 0

$f(x)$ 的拉普拉斯变换由以下积分定义

$$F(p)=\mathscr{L}f(p)=\int_0^{\infty}f(x)\,e^{-px}dx$$

为了保证收敛性，$\mathrm{Re}p>0$

其逆变换为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(p)\,e^{px}dp$$

♣

证明 1.

设 $p=s+2\pi it$，再由 $f(x)$ 满足在负半轴和原点取值为 0 得到

$$\begin{aligned}F(p)&=\int_0^{\infty}f(x)\,e^{-px}dx=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-px}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-sx}e^{-2\pi itx}dx\end{aligned}$$

由此可以看出，拉普拉斯变换可以看作函数乘以指数函数后的傅里叶变换，正因为指数函数的存在，许多没有傅里叶变换的函数却拥有拉普拉斯变换，所以拉普拉斯变换对比傅里叶变换对要多得多

既然其是特殊的傅里叶变换，自然可以用傅里叶逆变换得到

$$f(x)\,e^{-sx}=\int_{-\infty}^{\infty}F(p)\,e^{2\pi itx}dt$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}F(p)\,e^{(s+2\pi it)x}d(2\pi it)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-\infty i}^{s+\infty i}F(p)\,e^{px}dp$$

2.

这里给出另一种导出拉普拉斯逆变换的方法

设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

$$F(p)=\int_0^{\infty}f(x)\,e^{-px}dx=\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)e^{-px}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} x^n e^{-px} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(n+1)}{p^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s-\infty i}^{s+\infty i} F(p) e^{px} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-\infty i}^{s+\infty i} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \Gamma(n+1)}{p^{n+1}} \right) e^{px} dp$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(n+1) \frac{1}{2\pi i} \int_{s-\infty i}^{s+\infty i} \frac{e^{px}}{p^{n+1}} dp$$

其中的积分表达式是 Γ 函数的围道积分表述

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(n+1) \frac{x^n}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$$

从上面的推导过程，我们可以看出，逆变换积分限中的 σ 取值范围和使拉普拉斯变换存在的 p 的范围相同，在那个范围内，σ 可以随意取值

类似地，还可以从傅里叶变换的其他性质来推导得到拉普拉斯变换的其他性质，例如卷积

定理 2.1 (拉普拉斯变换的卷积)

函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 的拉普拉斯变换分别为 $F(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx$ 和 $G(p) = \int_0^{\infty} g(x) e^{-px} dx$，设乘积的拉普拉斯变换存在，其值由以下卷积给出

$$\int_0^{\infty} f(x) g(x) e^{-px} dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s) F(p-s) ds$$

♡

证明

$$\mathscr{L}[fg] = \int_0^{\infty} f(x) g(x) e^{-px} dx$$

$$= \int_0^{\infty} f(x) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s) e^{sx} ds \right) e^{-px} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s) \int_0^{\infty} f(x) e^{-(p-s)x} dx ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s) F(p-s) ds$$

2.2 梅林变换

与拉普拉斯变换类似，梅林变换也可以由傅里叶变换导出

定义 2.2 (梅林变换)

梅林变换及其逆变换定义为

$$F(\mu) = \mathscr{M}f(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} f(x)\,dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\mu)\,x^{-\mu} d\mu$$

♣

证明 记 $x = e^{-t}$，$\mu = \sigma + 2\pi i\omega$

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \int_0^\infty x^{\mu-1} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu t} f(x)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-\sigma t} f(x)\,e^{-2\pi i\omega t} dt \end{aligned}$$

$$e^{-\sigma t} f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\mu)\,e^{2\pi i\omega t} d\omega$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty F(\mu)\,e^{(\sigma+2\pi i\omega)t} d2\pi i\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(\mu)\,x^{-\mu} d\mu \end{aligned}$$

仿照前面的拉普拉斯变换，还可以得到梅林变换的卷积公式

定理 2.2 (梅林变换的卷积)

函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 的梅林变换分别为 $F(\mu) = \int_0^\infty f(x)\,x^{\mu-1}dx$ 和 $G(\mu) = \int_0^\infty g(x)\,x^{\mu-1}dx$，设乘积的梅林变换存在，其值由以下卷积给出

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,x^{\mu-1}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)\,G(\mu-s)\,ds$$

♡

第 3 章 对称乘积型积分变换

3.1 对称乘积型积分变换的定义以及性质

积分变换拥有一般的形式

$$F(y)=\int_0^\infty f(x)\,T(x,y)\,dx$$

但当核函数 $T(x,y)$ 满足 $T(x,y)=K(xy)$ 时我们称其为对称乘积型积分变换

定义 3.1 (对称乘积型积分变换)

设核函数为 $K(xy)$，积分变换定义为

$$F(y)=\int_0^\infty f(x)\,K(xy)\,dx$$

♣

这一类积分变换的应用非常广泛，例如傅里叶正弦变换，傅里叶余弦变换，拉普拉斯变换，汉克尔变换，Y 变换，K 变换都属于这种积分变换（要注意的是，这里所说的 K 变换并非 Kontorovich-Lebedev 变换）

这一类积分变换拥有不依赖于其逆变换的交叉型 Parseval 公式

定理 3.1 (交叉型 Parseval 公式)

记两积分变换分别为 $F(y)=\int_0^\infty f(x)\,K(xy)\,dx$ 和 $G(y)=\int_0^\infty g(x)\,K(xy)\,dx$ 则有以下 Parseval 公式

$$\int_0^\infty f(x)\,G(x)\,dx=\int_0^\infty F(y)\,g(y)\,dy$$

♡

证明

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)\,G(x)\,dx&=\int_0^\infty f(x)\left(\int_0^\infty g(y)\,K(xy)\,dy\right)dx\\&=\int_0^\infty g(y)\left(\int_0^\infty f(x)\,K(xy)\,dx\right)dy\\&=\int_0^\infty F(y)\,g(y)\,dy\end{aligned}$$

3.2 对称乘积型积分变换的逆变换构造

本节，我们将把对称乘积型积分变换分为两类，再分别构造两类的逆变换。
首先，回忆前面章节的内容，我们可以发现，对称乘积型积分变换的积分核有两种，一种像

傅里叶正弦变换那样，依赖变换核的震荡性使整个积分收敛，还有一种像拉普拉斯变换那样，通过变换核的快速减小来使整个积分收敛。而这两种积分变换的逆变换积分限是不同的，前一种是在实轴上的积分，后一种路径却是平行于虚轴。我们暂且先怀疑，若考虑的一般的变换核 $K(xy)$ 有指数级减小的趋势，则其积分路径类似于拉普拉斯变换（我们称其为指数型变换），否则积分路径类似于傅里叶正弦变换（我们称其为震荡型变换）。

定理 3.2 (震荡型变换的逆变换构造)

设函数经过震荡型变换得到 $F(y)=\int_0^\infty f(x)K(xy)\,dx$，则其逆变换由下式给出

$$f(x)=\int_0^\infty F(y)K^{-1}(xy)\,dy$$

其中

$$K^{-1}(xy)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{\mathscr{M}K(1-\mu)}(xy)^{-\mu}\,d\mu$$

♡

证明 有如下四个记号

$$\mathscr{M}K(\mu)=\int_0^\infty y^{\mu-1}K(y)\,dy,\mathscr{M}K^{-1}(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}K^{-1}(x)\,dx$$

$$\mathscr{M}f(\mu)=\int_0^\infty x^{\mu-1}f(x)\,dx,\mathscr{M}F(\mu)=\int_0^\infty y^{\mu-1}F(y)\,dy$$

将其中变换后 $F(y)$ 的梅林变换算出

$$\begin{aligned}\mathscr{M}F(\mu)&=\int_0^\infty y^{\mu-1}F(y)\,dy=\int_0^\infty y^{\mu-1}\left(\int_0^\infty f(x)K(xy)\,dx\right)dy\\&=\int_0^\infty f(x)\left(\int_0^\infty y^{\mu-1}K(xy)\,dy\right)dx=\int_0^\infty f(x)x^{-\mu}\mathscr{M}K(\mu)\,dx\\&=\mathscr{M}K(\mu)\,\mathscr{M}f(1-\mu)\end{aligned}$$

利用梅林变换的卷积

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty F(y)K^{-1}(xy)\,dy\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathscr{M}F(1-\mu)\,x^{-\mu}\mathscr{M}K^{-1}(\mu)\,d\mu\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\mathscr{M}K(1-\mu)\,\mathscr{M}f(\mu)\,x^{-\mu}\mathscr{M}K^{-1}(\mu)\,d\mu\end{aligned}$$

可以看出，当满足以下条件时，上式为收敛到 $f(x)$ 的逆梅林变换

$$\mathscr{M}K^{-1}(\mu)=\frac{1}{\mathscr{M}K(1-\mu)}\Longrightarrow K^{-1}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{\mathscr{M}K(1-\mu)}x^{-\mu}d\mu$$

定理 3.3 (指数型变换的逆变换构造)

设函数经过指数型变换得到 $F(y)=\int_0^\infty f(x)K(xy)\,dx$，则其逆变换由下式给出

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(y)K^{-1}(xy)\,dy$$

其中

$$K(n+1)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{K^{-1}(y)}{y^{n+1}}dy=1$$

证明 设 $f(x)$ 可以展开为级数 $f(x)=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n$，记

$$\mathscr{M}K(\mu)=\int_0^\infty y^{\mu-1}K(y)\,dy$$

$$F(y)=\int_0^\infty f(x)K(xy)\,dx$$

$$=\int_0^\infty\left(\sum_{n=0}^\infty a_nx^n\right)K(xy)\,dx=\sum_{n=0}^\infty\frac{a_n}{y^{n+1}}\mathscr{M}K(n+1)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(y)K^{-1}(xy)\,dy$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(\sum_{n=0}^\infty\frac{a_n}{y^{n+1}}\mathscr{M}K(n+1)\right)K^{-1}(xy)\,dy$$

$$=\sum_{n=0}^\infty a_n\mathscr{M}K(n+1)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{K^{-1}(xy)}{y^{n+1}}dy$$

$$=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n\mathscr{M}K(n+1)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{K^{-1}(y)}{y^{n+1}}dy$$

故当逆变换核满足

$$\mathscr{M}K(n+1)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{K^{-1}(y)}{y^{n+1}}dy=1$$

有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(y)K^{-1}(xy)\,dy=\sum_{n=0}^\infty a_nx^n=f(x)$$

第 4 章 对称乘积型积分变换实例

4.1 汉克尔变换

我们考虑变换核 $K(x) = x^{\frac{1}{2}} J_\nu(x)$ 记

$$F(y) = \int_0^\infty f(x)(xy)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy)\,dx$$

那么其逆变换应有形式

$$f(x) = \int_0^\infty F(y) K^{-1}(xy)\,dx$$

我们下面利用上一章的公式求逆变换核 $K^{-1}(xy)$

$$\mathscr{M}K(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} x^{\frac{1}{2}} J_\nu(x)\,dx = \frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+\frac{3}{4}\right)}$$

$$\begin{aligned}
K^{-1}(xy) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{\mathscr{M}K(1-\mu)}(xy)^{-\mu}\,d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}+\frac{1}{4}\right)}{2^{\frac{1}{2}-\mu}\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{-\mu+\nu}{2}\right)}(xy)^{-\mu}\,d\mu \\
&= (xy)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy)
\end{aligned}$$

$$f(x) = \int_0^\infty F(y)(xy)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy)\,dx$$

这个汉克尔变换本质上和另一类是相同的

$$F(y) = \int_0^\infty x f(x) J_\nu(xy)\,dx$$

$$f(x) = \int_0^\infty y F(y) J_\nu(xy)\,dx$$

4.2 Y 变换

我们考虑变换核 $K(x) = x^{\frac{1}{2}} Y_\nu(x)$ 记

$$F(y) = \int_0^\infty f(x)(xy)^{\frac{1}{2}} Y_\nu(xy)\,dx$$

那么其逆变换应有形式

$$f(x) = \int_0^\infty F(y) K^{-1}(xy)\,dx$$

同样的，我们利用上一章的公式求逆变换核 $K^{-1}(xy)$

$$\mathscr{M}K(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1} x^{\frac{1}{2}} Y_\nu(x)\,dx$$

$$= -\frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}}{\pi}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\pi\left(\frac{\mu-\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$K^{-1}(xy) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{\mathscr{M}K(1-\mu)}(xy)^{-\mu}\,d\mu$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}\pi}{\Gamma\left(\frac{-\mu+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(-\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)\cos\pi\left(-\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{3}{4}\right)}(xy)^{-\mu}\,d\mu$$

$$= (xy)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{H}_\nu(xy)$$

$$f(x) = \int_0^\infty F(y)(xy)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{H}_\nu(xy)\,dx$$

4.3 K 变换

前两节，我们介绍了震荡型积分变换，这一节，我们介绍指数型积分变换考虑变换核 $K(x) = x^{\frac{1}{2}}K_\nu(x)$，其中 ν 为整数记

$$F(y) = \int_0^\infty f(x)(xy)^{\frac{1}{2}}K_\nu(xy)\,dx$$

那么其逆变换应有形式

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(y)K^{-1}(xy)\,dy$$

$$\mathscr{M}K(\mu) = \int_0^\infty x^{\mu-1}x^{\frac{1}{2}}K_\nu(x)\,dx = 2^{\mu-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}x^{\frac{1}{2}}I_\nu(x)\,x^{-\mu}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^\nu}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}e^{xt}dt\right)x^{-\mu}dx$$

$$= \frac{1}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{xt}}{x^{\mu-\nu-\frac{1}{2}}}dx\right)dt$$

$$= \frac{1}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\frac{t^{\mu-\nu-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\mu-\nu-\frac{1}{2}\right)}dt$$

$$= \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1+e^{\pi i\left(\mu-\nu-\frac{3}{2}\right)}}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)}{2^\nu\sqrt{\pi}\Gamma\left(\mu-\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1-\sin\pi(\mu-\nu)}{2}\right)$$

$$\mathscr{M}K(\mu)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}x^{\frac{1}{2}}I_\nu(x)\,x^{-\mu}dx$$

$$= \frac{2^{\mu-\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}-\frac{1}{4}\right)}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\mu-\nu-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1-\sin\pi\left(\mu-\nu\right)}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\sin\pi\left(\mu-\nu\right)}{2}\right)$$

将 ν 为整数和 $\mu = n+1$ 代入，

$$\mathscr{M}K\left(\mu\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left(2x^{\frac{1}{2}}I_{\nu}\left(x\right)\right)x^{-\mu}dx = 1$$

最后得到逆变换为

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F\left(y\right)\left(xy\right)^{\frac{1}{2}}I_{\nu}\left(xy\right)dy$$