23.1.14

DGL II Ordnung

Grundlagen:

Eine DGL vom Typ

$$y'' + py' + qy = s(x) \qquad p, q \in \mathbb{R}$$

heißt: Lineare DGL II ord. mit konst. Koeff.

$s(x)$ … Störfu; DGL homogen wenn $s(x) = 0$
inhomogen sonst

Lösung: folgt demselben Muster wie DGL I ord.

① y_H ③ $y = y_H + y_P$ ⑤ y mit $C_1 C_2$ ⑦ Graph: ↳ y ↳ s(x) ↳ NB

② y_P ④ NB $\rightarrow C_1, C_2$ ⑥ Probe

⑧ Interpretation !

LÖSUNG von HOM. DGL II Ord.

Alle hom. Linearen DGL II Ord mit konst. Koeff. lassen sich mit dem Exponentialansatz

$$y_a = C \cdot e^{\lambda x}$$

lösen.

Bsp: $y'' + 4y' + 3y = 0$ $\qquad y_a = C \cdot e^{\lambda x}$

$y(0) = 3, \; y'(0) = 0$

Der Ansatz wird 2mal differenziert und in die DGL eingesetzt.

Ziel ist die Bestimmung eines konkreten Werts von λ !!

wird ausgelassen → aus DGL char. Glg. ablesen!!

$$y_a = C \cdot e^{\lambda x}$$

$$y' = C \cdot \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = C \cdot \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$C \cdot \lambda^2 e^{\lambda x} + 4 C \cdot \lambda e^{\lambda x} + 3 \cdot C \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$C \cdot e^{\lambda x} \cdot [\lambda^2 + 4\lambda + 3] = 0$$

Produktnullsatz !!

Ansatz $\emptyset$

1. Fall $C = 0$ → damit Expoansatz sinnvoll ist muss $C \neq 0$ sein, sonst ist y (darf nicht sein)
2. Fall $e^{\lambda x} = 0$ → Expofu hat keine Nullstelle!! kann nicht existieren
3. Fall $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$

↳ charakteristische Glg

Die Verwendung des Lösansatzes (und des Produktnullsatzes) führt zur charakterist. Glg., dh. einer quadr. Glg in Var. λ
⇝ ist lösbar

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3} = -2 \pm 1 \quad \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ \lambda_1 = -3 \end{cases}$$

Hat die Char. Glg 2 unterschl. reelle Lösungen erhält man 2 Lösungen der homogenen DGL (durch Einsetzen des Werts von λ in den Exponansatz)

$\lambda_{1,2}$

$\Rightarrow y_1 = C_1 \cdot e^{-3x}$

$\Rightarrow y_2 = C_2 \cdot e^{-1x}$

Hat man 2 Lösungen y_1, y_2 einer DGL gefunden dann ist auch deren Summe

$y_1 + y_2$ Lösung der DGL

Beweisen!

① $y_H = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}$

~~②~~ ~~③~~ ④ NB

$y_H' = C_1 \cdot -3 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot -1 \cdot e^{-x}$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) &= -3C_1 - C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad C_1 = -\frac{3}{2} \quad C_2 = \frac{9}{2}$$

Die Verwendung der NBen (oft ist ein diff d. Lösung von y_H notwendig) führt zu einem Gl. sys von 2 in den var C_1, C_2

$\cancel{C_1 = 3 - C_2}$

$\cancel{-3(3-C_2) + C_2 = 0}$

$\cancel{-6 + 3C_2 - C_2 = 0 \quad | +6}$

$\cancel{C_2 = 3 \quad | : 2}$

⑤ $y = -\frac{3}{2} \cdot e^{-3x} + \frac{9}{2} e^{-x}$

$y' = -\frac{3}{2} \cdot -3 \cdot e^{-3x} - \frac{9}{2} e^{-x}$

$y'' = \frac{9}{2} \cdot -3 \cdot e^{-3x} + \frac{9}{2} e^{-x}$

$-\frac{27}{2} \cdot e^{-3x} + \frac{9}{2} e^{-x} + 4\left(\frac{9}{2} \cdot e^{-3x} - \frac{9}{2} e^{-x}\right) +$

$3\left(-\frac{3}{2} \cdot e^{-3x} + \frac{9}{2} \cdot e^{-x}\right) = 0$

$-\frac{27}{2} \cdot e^{-3x} + \cancel{\frac{9}{2} e^{-x}} + 4 \cdot \frac{9}{2} e^{-3x} - \cancel{4 \frac{9}{2} e^{-x}} +$

$3 \cdot -\frac{3}{2} e^{-3x} + \cancel{3 \cdot \frac{9}{2} e^{-x}} = 0$

$-\frac{27}{2} \cdot e^{-3x} + \frac{36}{2} \cdot e^{-3x} - \frac{9}{2} \cdot e^{-3x} = 0$

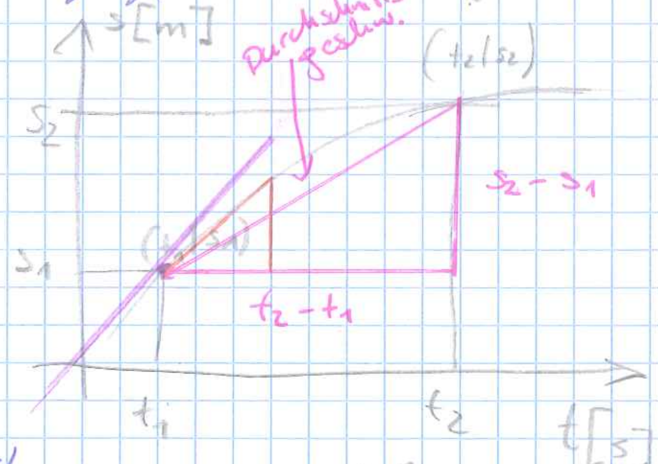
$\underline{0 = 0}$

✱

2. NA $F = m \cdot a$ 6.3.14

Kraft = masse × Beschleunigung

Zeit-Weg Diagr.



Sekante werden immer ähnlicher der Tangente

⇝ Übergang zur Ableitung

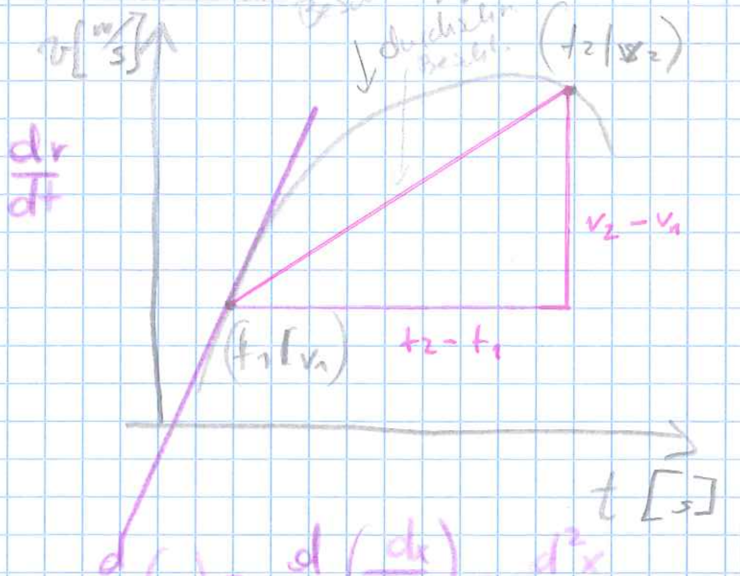
= Geschw. an einem Ort

$v = \frac{dx}{dt}$ v. Differenzenquotient (Sekante) zum Differenzialquotient (Tangente)

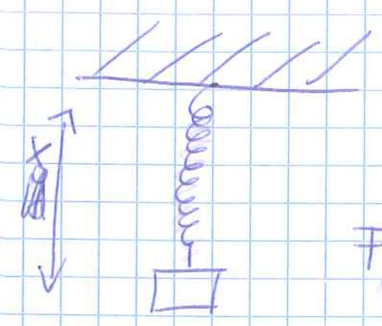
$F = m \cdot a$

$\Rightarrow F = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$

$a = \frac{dv}{dt}$



$a = \frac{d}{dt}(v) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$



SCHWINGUNGEN

F_F : proportional z. Austenkung v. d. Größe her $\underset{(-1)}{X}$
aber andere Richtung (nach unten ausziehen Kraft nach oben u.u.)
Einfluss der Feder $\quad c$

$$F_F = -c \cdot X$$

F_R : Reibungskraft z.B. Luft~~reibung~~widerstand
entgegen der Bewegung (-1)
proportional v $\quad v$
Einfluss Medium $\quad b$

$$\left.\right\} F_R = -b \cdot v$$

$$F = F_R + F_F$$

$$F = F$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -cx - bv$$

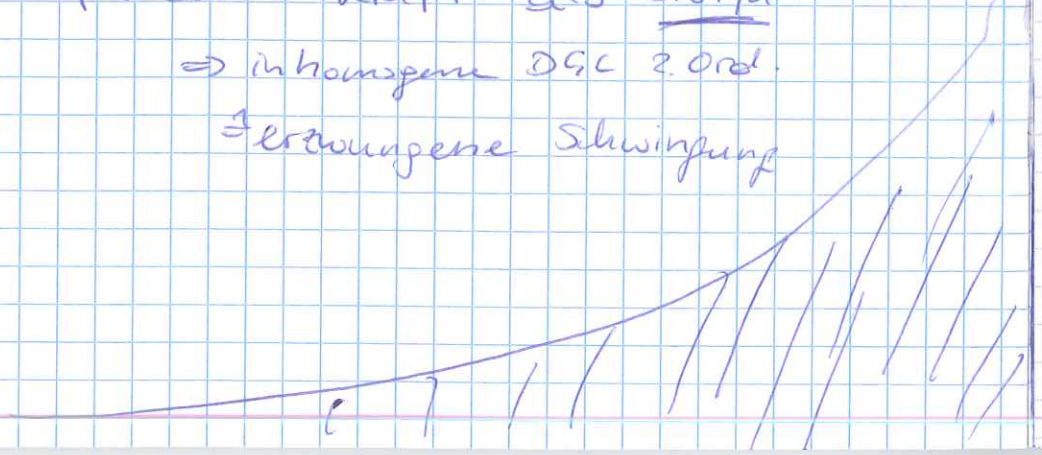
SCHWINGUNGS-GLEICHUNG

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0$$

HARMONISCHER OSZILLATOR

≙ homogene DGL 2. Ordnung
≙ freie Schwingung

von aussen Kraft auswirken
periodische Kraft als Störfu
⇒ inhomogene DGL 2. Ord.
≙ erzwungene Schwingung



20.2.19

DGL II Ordnung

INHOMOGENE DGL

Die Lösung ~~...~~ inhomogener DGL 2. Ordnung folgt genau dem Schema zur Lösung inhomogener DGL 1. Ordnung:

1. y_H (ode2())
2. y_P : Lösung nach Lösungsansatz
3. $y = y_P + y_H$
4. C_1, C_2 bestimmen über NB_1, NB_2
5. y (C_1, C_2 einsetzen)
6. Probe
7. Grafik + Interpretation

⟶ ad 2 LÖSUNG NACH ANSATZ

Störfunktion $S(x)$	Lösungsansatz y_a
$S(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} \dots + A_1 x + A_0$	$y_a = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$
$S(x) = A \sin \omega x$ $S(x) = B \cos \omega x$ $S(x) = A \sin \omega x + B \cos \omega x$	$y_a = x [a \sin \omega x + b \cos \omega x]$ wenn $j\omega$ Lösung der char. Gl. $y_a = a \sin \omega x + b \cos \omega x$ sonst
$S(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_a = x^2 a \cdot e^{bx}$ wenn b Doppellösung $y_a = x \cdot a \cdot e^{bx}$ wenn b Lösung $y_a = a \cdot e^{bx}$ sonst

Ist die Störfunktion eine Summe der hier angeführten Störfunktionen, dann ist als Ansatz eine Summe der entsprechenden Lösungsansätze zu verwenden.

Ist also die Störfkt. eine trigonometrische Fkt und/oder eine Expo fkt, muss zunächst die charakteristische Glg gelöst werden und anhand der Lösung der korrekte Lösungsansatz bestimmt werden gefunden

---

Bsp: $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 2\sin t + 2\cos t$ $\quad y(0)=1$, $\dot{y}(0)=2$

Punkt => Zeitabhängige Fkt!!

Nicht vom Ort x abhängig sondern Zeit t.

$y'' = 2\sin t + 2\cos t - 2\dot{y} - y$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

$y_0{}' = 2$

Nyström ($f, x_0, y_0, y_0{}', h, nmax$)

2 Listen → 3 Werte Trippel

neuer Block → ersten 2 Werte Reihe

HÜ: Theorie fertig schreiben

Bsp aus SÜ

Nyström umsetzen & anwenden

6.3.14

Bsp: Federpendel $\quad m=1$, $b=0{,}5$, $c=4$

$F_a = 1 \cdot \sin \omega_a t$ $\quad y(0) = -0{,}5$, $\dot{y}(0) = -1$

$$1 \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + 0{,}5\,\frac{dy}{dt} + 4 \cdot y = \sin \omega_a t \quad \begin{cases} \omega_a = 1 \\ \omega_a = 2 \\ \omega_a = 4 \end{cases}$$

H27: Lösung am PC, ode2 !! mit 3 Werten

Interpretation wie S22!, Analyse d. Ergebnisses

↳ mit 3x ω_a

- Theor. Hintergr. Schwingungen (Pf..)
- Bsp: analy. Erg.

20.3.13

Pf06 - 2

GlII Ord.

↳ analytisch

↳ Nyström

Schwingungen

2. NA Newton, Ort Zeit, Faktoren, Summanden - Reibung...

Analysiere d. Erg: Stat. inst.

Zshang Lösung, Störfkt

Gekoppelte DGL (H28)

20.3.14

Folgen und Reihen

WIEDERHOLUNG

Folgen	Menge
Glied	Element
$\langle\ \rangle$	$\{\ \}$
Reihenfolge wesentlich	Reihenfolge irrelevant
Zählstart bei 1	

ARITHMET. FOLGE

$\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$

$+d \quad +d$

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\cdot d\right]$

GEOMETR. FOLGE

$\langle b_1, b_2, b_3, \dots \rangle$

$*q \quad *q$

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$s_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q-1} \qquad q \neq 1$

$s_n = b_1 \cdot n \qquad q = 1$

EIGENSCHAFTEN von Folgen

→ Monotonie
- monoton steigend: $a_n \leq a_{n+1}$
- monoton fallend: $a_n \geq a_{n+1}$

→ Beschränktheit
- untere Schranke b $\qquad b \leq a_n$
- obere Schranke B $\qquad B \geq a_n$

(INFIMUM, SUPREMUM)

Bsp: $\left\langle \frac{2n-1}{n+1} \right\rangle$

(a) Monotonie

(b) $b = \frac{1}{2}$; $B = \frac{3}{2}$;

$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, \dots \right\rangle$

(b) $b = \frac{1}{2}$? $\quad b \leq a_1$ ✓

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

gilt fürs erste Glied, && monoton steigend nachgewiesen

$\Rightarrow b = \frac{1}{2}$ ist richtig!

$B = \frac{3}{2}$ in allg. Bed. einsetzen

$\frac{3}{2} \geq \frac{2n-1}{n+1}$

$3n + 3 \geq 4n - 2$

$5 \geq n$

gilt bis zum 5. Element!

n kann ~~ist~~ aber auch 6, 7, 8 ... sein

$\Rightarrow$ gilt nicht für alle Elemente!

$\rightsquigarrow B = \frac{3}{2}$ ist KEINE obere Schranke.

(a) monoton fallend: ? X

$\frac{1}{2}$ nicht ≥ 1

$\Rightarrow$ Folge kann nicht mon. fallend sein.

monoton steigend: ? ✓

$\boxed{a_n \leq a_{n+1}}$

einsetzen

gilt?

$\frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+1}$

gilt?

$\frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2n+1}{n+2}$

gilt?

$2n^2 - n + 4n - 2 \leq 2n^2 + n + 2n + 1$

gilt?

$3n - 2 \leq 3n + 1$

$n \leq n + 3$

das gilt! f. alle natürliche Zahlen

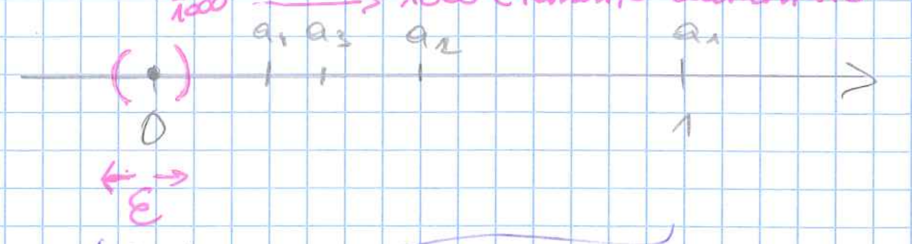
27.3.14

Eine monotone, beschränkte Folge ist konvergent

GRENZWERT

$$\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle = \left\langle \overset{a_1}{1}, \overset{a_2}{\frac{1}{2}}, \overset{a_3}{\frac{1}{3}}, \overset{a_4}{\frac{1}{4}}, \dots \right\rangle$$

$\frac{1}{1000}$ → 1000 Elemente außerhalb



fast alle innerhalb; außer die endlichen — endlich viele außerhalb ε

$$\lim_{n\to\infty} \langle a_n \rangle = \alpha$$

$$|\alpha - a_n| \leq \varepsilon$$

für alle außer endlich viele n

Grenzwertsätze

$$\lim \langle a_n \pm b_n \rangle = \lim a_n \pm \lim b_n$$
$$\lim \langle a_n \cdot b_n \rangle = \lim a_n \cdot \lim b_n$$
$$\lim \langle a_n / b_n \rangle = \lim a_n / \lim b_n$$

Bsp: $\left\langle \frac{n^2+1}{3n^3+2n^2+4} \right\rangle$

Division v. Zähler & Nenner durch höchste vorkommende Potenz von n

$$\lim \frac{n^2+1}{3n^3+2n^2+4} = \lim \frac{\frac{n^2}{n^3} + \frac{1}{n^3}}{\frac{3n^3}{n^3} + \frac{2n^2}{n^3} + \frac{4}{n^3}} = \frac{\overset{\to 0}{\lim \frac{1}{n}} + \overset{\to 0}{\lim \frac{1}{n}} \cdot \overset{\to 0}{\lim \frac{1}{n}} \cdot \overset{\to 0}{\lim \frac{1}{n}}}{\underset{\to 3}{\lim 3} + \underset{\to 2}{\lim 2} \cdot \underset{\to 0}{\lim \frac{1}{n}} + \underset{\to 4}{\lim 4} \cdot \underset{\to 0}{\lim \frac{1}{n}} \cdot \underset{\to 0}{\lim \frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{0+0}{3+0+0} = \underline{\underline{0}}$$

Reihen

$\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ Folge

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ Reihe

Summe von endlichen Reihen

$$\begin{cases} \text{Reihe aus AF: } s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \\ \text{Reihe aus GF: } \begin{cases} s_n = n \cdot b_1 & q = 1 \\ s_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} & q \neq 1 \end{cases} \end{cases}$$

Summe von unendlichen Reihen

Zur Berechnung der Summe einer UNENDLICHEN Reihe bildet man die FOLGE der PARTIALSUMMEN. Hat diese Folge der Partialsummen einen Grenzwert, dann bezeichnet man diesen als Summe der unendlichen Reihe.

Bsp: $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, \dots \rangle$

$s_1 = b_1$

$s_2 = b_1 + b_2$

$s_3 = b_1 + b_2 + b_3$

$\vdots$

Grenzwert — v. Summe d. Partialsummen

$$\underline{\underline{S}} = \lim_{n\to\infty} \langle s_1, s_2, s_3, \dots \rangle$$

Summe d. unendlichen Reihe

GF: $S = \lim_{n\to\infty} s_n$

$$\begin{cases} q = 1 \Rightarrow \lim \langle n \cdot b_1 \rangle = \lim n \cdot \underset{\to b_1}{\lim b_1} & \text{∄ kein Grenzwert!} \\ q \neq 1 \quad \lim \left\langle b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \right\rangle = \underset{\to b_1}{\lim b_1} \frac{\overset{\to ?}{\lim q^n} - \overset{\to 1}{\lim 1}}{\underset{\to q}{\lim q} - \underset{\to 1}{\lim 1}} = \end{cases}$$

$$\begin{cases} |q| > 1 \quad b_1 \frac{\overset{∄}{\lim q^n} - \lim 1}{\lim q - \lim 1} & ∄ \\ |q| < 1 \quad b_1 \cdot \frac{\overset{\to 0}{\lim q^n} - \lim 1}{\lim q - \lim 1} = b_1 \frac{(-1)}{q-1} = b_1 \frac{1}{1-q} \end{cases}$$

Bsp: $3{,}141414 = 3{,}\dot{1}\dot{4}$

$= 3 + \underbrace{0{,}14 + 0{,}0014 + 0{,}000014}_{} + \dots$

$\langle 0{,}14;\ 0{,}0014;\ 0{,}000014;\ \dots \rangle$

GF: $b_1 = 0{,}14$

$q = \frac{1}{100}$

$S = b_1 \frac{1}{1-q} = \frac{14}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{14}{100} \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} =$

$\frac{14}{100} \cdot \frac{100}{99} = \underline{\underline{\frac{14}{99}}}$

$3{,}\dot{1}\dot{4} = 3 + \frac{14}{99} = \frac{297+14}{99} = \underline{\underline{\frac{311}{99}}}$

Wirtschaftsmathematische Anwendungen

ABSCHREIBUNGEN $\begin{cases} \text{lineare Abschreibung} \\ \text{geometrisch-degressive Abschreibung} \end{cases}$

- Lineare Abschreibung

Bsp: 65000 € Maschine

Benutzungsdauer beträgt 5 Jahre

danach ist der Schrottwert 5000 €

⟶ Bei der linearen Abschreibung reduziert sich der Restwert jedes Jahr um denselben Betrag.

$\langle 65000,\ 53000,\ 41000,\ 29000,\ 17000,\ 5000 \rangle$

→

Jahr	Wert zu Jahresbeginn	Abschreibung	Wert zu Ende des Jahr
1	65000	12000	53000
2	53000	12000	41000
3	41000	12000	29000
4	29000	12000	17000
5	17000	12000	5000

- GEOMETRISCHE Abschreibung

⟶ Bei der geom. degressiven Abschreibung werden in jedem Jahr gleich bleibend $i = p\%$ vom jeweiligen Wert ~~A~~ abgeschrieben.

Jahr	Restwert	Abschreibung	Restwert zu Jahresende
1	R_0	$A_1 = i \cdot R_0$	$R_0 - i \cdot R_0 = R_0 \cdot (1-i)$
2	$R_1 = R_0(1-i)$	$A_2 = i \cdot R_1$	$R_1 - i \cdot R_1 = R_1(1-i) = R_0 \cdot (1-i)^2$
3	$R_2 = R_0(1-i)^2$	$A_3 = i \cdot R_2$	$R_0 \cdot (1-i)^3$
n	$R_{n-1} = R_0(1-i)^{n-1}$	$A_n = i \cdot R_{n-1}$	$R_0 \cdot (1-i)^n$

Bsp: Eine Maschine wird um 65000 € angeschafft. Nach 5 Jahre Restwert von ~~1~~5000 €. Berechne die Abschreibung (i)

$R_n = R_0(1-i)^n$

$R_0 = 65000$ $\quad (1-i)^n = \frac{R_n}{R_0}$

$R_n = 5000$

$n = 5$ $\quad 1-i = \sqrt[n]{\frac{R_n}{R_0}} \rightarrow i$

HÜ: Tabelle!
Maxima Grafik
bsp. Reihenfolge

$i = 0{,}4013$

↳ $p = 40{,}13\,\%$

Mathe
3.4.2014

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} \xrightarrow{\text{AUFZINSEN}} K_n = K_0 \cdot q^n$$

ABZINSEN

ÄQUIVALENZPRINZIP

Geldwerte / KAPITALIEN können nur miteinander verglichen werden, wenn sie auf den gleichen Zeitpunkt bezogen werden

RENTENZAHLUNGEN

Eine Rente ist eine Folge von Zahlungen in gleicher Höhe und in gl. Zeitabschnitten.
2 Typen:

- Vorschüssige Rente (Versicherung)

  Hier erfolgt die einzelne Rentenzahlung am Anfang des zugehörigen Zeitabschnitts

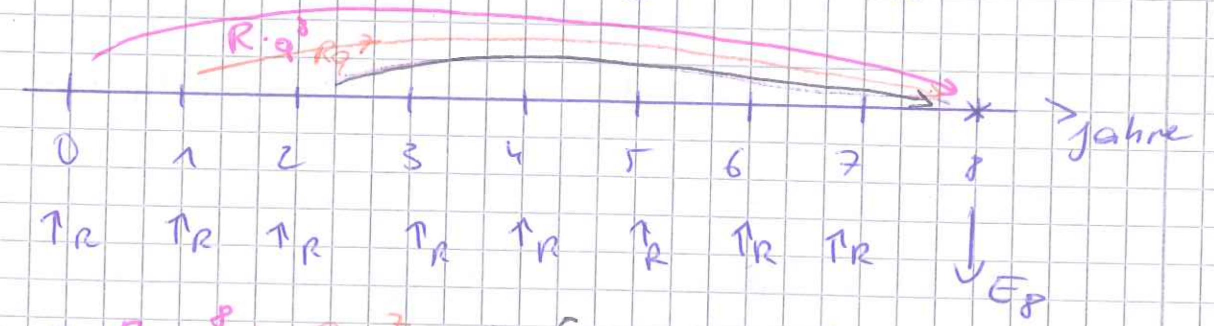
- Nachschüssige Rente

  Eine Rentenzahlung heißt nachschüssig wenn sie am Ende d. zugehörigen Zeitabschnitts erfolgt

Zu jedem Jahresbeginn wird ein Betrag von
$R = 1000$ €
auf ein Konto eingezahlt & zu einem
Zinssatz von $i = 5\,\%$ verzinst.
Zu Berechnen ist $\Rightarrow q = 1{,}05$

a) Wert dieser Rente am Ende des 8. Jahres ($\hat{=}$ Endwert)

b) BARWERT dieser Rente



(a) $E_8 = R\cdot q^8 + Rq^7 + R\cdot q^6 + \dots + Rq$

$Rq\,(\underbrace{1 + q + q^2 + \dots q^7}_{\text{Summe einer geom. Folge}})$

Faktor $= q$

Summe der Reihe aus GF

$s_8 = 1 \cdot \dfrac{q^8 - 1}{q - 1}$

$q = 1 + i$

$E_8 = R \cdot q \cdot \dfrac{q^8 - 1}{q - 1}$

Vorschüssige Rente $E_n = Rq\,\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

(b) BARWERT → ist der Wert den man sofort Einzahlen muss damit man am Ende denselben Betrag erlangt

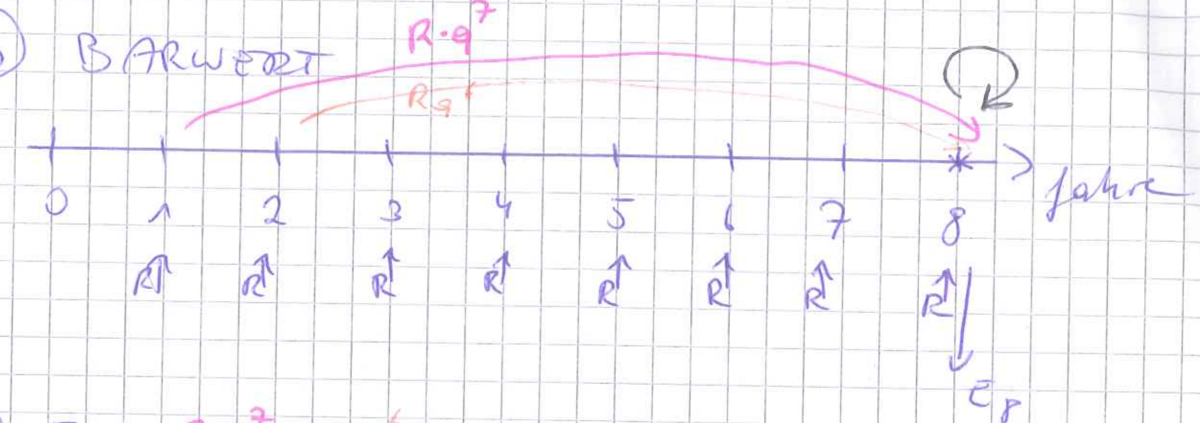
$B_n = \dfrac{E_n}{q^n}$

Mathe
3.4.14

Zu jedem Jahresende Betrag von 1000 € eingezahlt. Zinssatz = 5%

(a) ENDWERT nach 8 Jahr

(b) BARWERT



(a) $E_8 = Rq^7 + Rq^6 + \dots + \quad + R$

$= R\,(\underbrace{1 + q + \dots + q^7}_{s_8 \,=\, 1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1}})$

$E_8 = R \cdot \dfrac{q^8 - 1}{q - 1}$

Nachschüssige Rente:

$E_n = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

$q = 1 + i$

(b) BARWERT

$B_n = \dfrac{E_n}{q^n}$

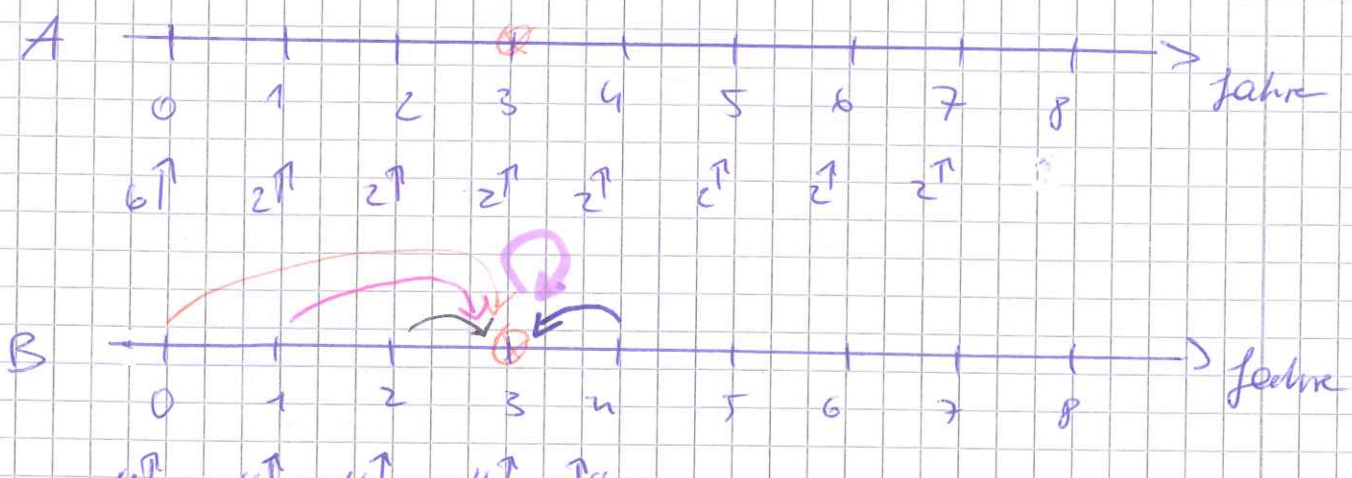
Für eine Firmenübernahme erhält der Eigentümer folgende Angebote

Angebot (a) 6 Mio sofort, 7x je 2 Mio in Jahresabständen beginnend 1 Jahr nach Übernahme

Angebot (b) 5 Jahre lang je 4 Mio mit sofortigem Beginn

Kalkulationszinssatz $i = 8\%$

Welches Angebot ist günstiger f. den Eigentümer?



muss abgezinst werden

$$B: 4 \cdot 1{,}08^3 + 4 \cdot 1{,}08^2 + 4 \cdot 1{,}08^1 + 4 + \frac{4}{1{,}08}$$

$$A: 6 \cdot 1{,}08^3 + 2 \cdot 1{,}08^2 + 2 \cdot 1{,}08 + 2 + \frac{2}{1{,}08} + \frac{2}{1{,}08^2} + \frac{2}{1{,}08^3} + \frac{2}{1{,}08^4}$$

Hausübung → Das fertig rechnen + alles dokumentieren & Das gleiche nochmal in Jahr 4 (Apol) berechnen

Mathe 3.4.14

Bsp. KREDIT RÜCKZAHLUNG

jmd nimmt einen Kredit v. $K_0 = 10\,000$ & $i = 10\%$

F. Rückzahlung:

3000 nach 1 Jahr

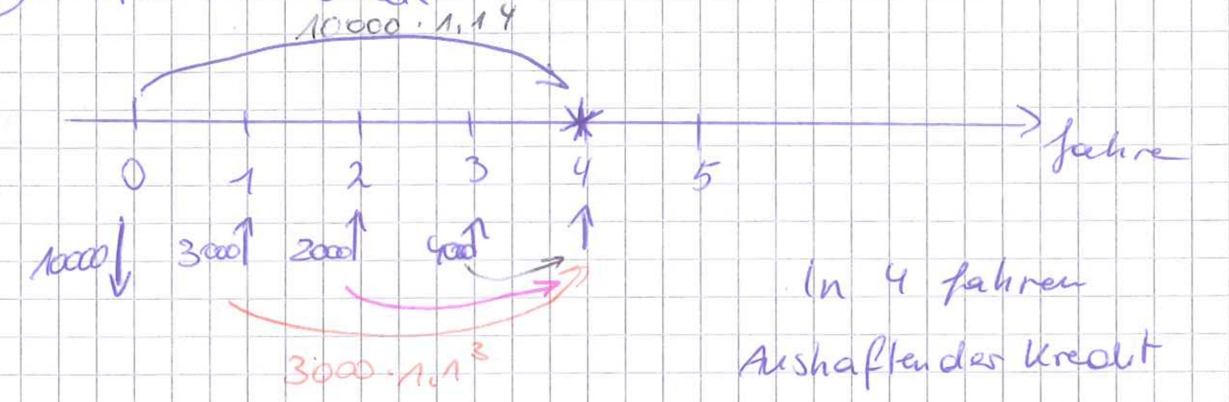
2000 nach 2. Jahr

4000 nach 3. Jahr

Restzahlung nach 4. Jahr

(a) Wie groß ist die Restzahlung

(b) Erstelle einen TILGUNGSPLAN



In 4 Jahren Aushaftender Kredit

$10\,000 \cdot 1{,}1^4 = \boxed{14\,641}$

Rückzahlung

1 $3000 \cdot 1{,}1^3 = 3\,993$

2 $2000 \cdot 1{,}1^2 = 2\,420$

3 $4000 \cdot 1{,}1^1 = 4\,400$

4 3828

TILGUNGSPLAN

~~Jahr~~ ~~Schuld z. Jahresbeginn~~ ~~Zinsen~~

ANNUITÄT = ZINSEN + TILGUNG

Jahr	Schuld z. Jahresbeginn	Zinsen	Annuität	Tilgung	Schuld z. Jahresende
1	10 000	1000	3000	2000	8000
2	8 000	800	2000	1200	6800
3	6800	680	4000	3320	3480
4	3480	348	3828	3480	∅

Standard

- jährliche & gleich bleibende Ratenzahlungen
  = Annuitäten

- Rückzahlung erfolgt nachschüssig!

→ Nachschüssigen Rentenvorgang, dessen Endwert gleich dem Endwert der Schuld ist

K_0 ... Endwert $\quad K_0 \cdot q^n$

Nachschüssige Rente $A \quad A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

$$K_0 \cdot q^n = A \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$\boxed{A = K_0 \cdot q^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}}$$

Aus Bsp vorher

$K_0 = 10\,000$
$q = 1{,}1$
$n = 4$

$\rightarrow A = 3154{,}71$

Jahr	S.z. Jahresbeginn	Zinsen	Annu.	Tilg.	S.z. Jahresende
1	10 000	1000	3154,71	2154,71	7845,29

HÜ: Block input K_0, q, n
output: Jahr, Sz. Jahresbeginn, Zins, Ann, Tilg, Jahrende als Liste

Bsp in HÜ! Zsf. d. SÜ

10.4.14

UNENDLICHE REIHEN mit KONSTANTEN GLIEDERN

(Zahlenreihen)

Konvergenzsatz für unendliche geometr. Reihen

Ist $|q| < 1$, dann gilt: $\sum_{i=0}^{\infty} a \cdot q^i = a + a q + a q^2 + \dots$

$$= \frac{a}{1-q}$$

Ist $|q| \geq 1$, dann divergiert die Summe (unendliche Summe)

Def: Eine unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = c_1 + c_2 + \dots$

heißt konvergent, wenn die Folge der Teilsummen/Partialsummen konvergiert.

Andernfalls heißt sie divergent

Entscheidung: KONVERGENZKRITERIEN

- notwendige — " —
- hinreichende — " —

Notwendige Konvergenzkriterien:

Eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ kann nur dann konvergent sein, wenn die einzelnen Reihenglieder c_i eine Nullfolge bilden

$$\lim_{i \to \infty} c_i = 0$$

Hinreichendes Konvergenzkriterium:

QUOTIENTENKRITERIUM

Gegeben sei unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$;

Sei $g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$

Man bildet eine Folge von ~~zwei~~ einem Quotiente aufeinander folgenden Gliedern und sucht davon den Grenzwert des Absolutbetrags

$g < 1$ Reihe ist konvergent

$g = 1$ keine Aussage

$g > 1$ Reihe ist divergent

BSP: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$

Def.: "n-Faktorielle", "n-Fakultät"

Ist diese Reihe konvergent oder divergent?

$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$

$0! \equiv 1$

$g = \lim \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ ~~konvergent~~

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots$

$\left\langle \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| \right\rangle = \left\langle \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| \right\rangle$

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$

konvergent

$g = 0$ also ist Reihe konvergent!

10.4.14

POTENZREIHEN

Def.: Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots$

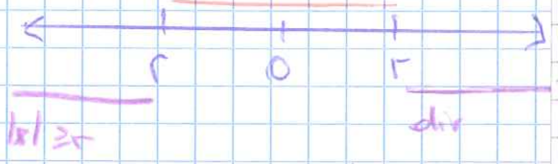
heißt POTENZREIHE

Die Zahlen a_n heißen KOEFFIZIENTEN der Potenzreihe

Konvergenz von Potenzreihen

Jede Potenzreihe konvergiert:

$|x| < r$ konvergent



$|x| \geq r$ div

- entweder nur für $x = 0$
- oder für alle $x \in \mathbb{R}$
- oder $r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ — Reihe konvergiert für $|x| < r$; Reihe divergiert für $|x| \geq r$

Handhabung von Potenzreihen

Mit konvergenten Potenzreihen können die gleichen elementaren Rechenoperationen (Addition, Multipl., ...) durchgeführt werden, wie mit endlichen Summen

Zu diesen elementaren Rechenoperationen zählt jedenfalls differenzieren und integrieren (Summen werden Gliedweise ——)

Verwendung von Potenzreihen

- Berechnung von Funktionswerten (z.B. sin, cos, tan, ln, e^x)
- Aufstellung von Näherungsformeln
- Integration nach einer Potenzreihenentwicklung

Potenzreihenentwicklung

$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}$

$x^0 + x^0 x + x^0 x^2 \ldots = \frac{1}{1-x}$

Bekannt: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Oder: Die Funktion $f(x) = \frac{1}{1-x}$ wurde als Potenzreihe entwickelt

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Auch andere Funktionen $f(x)$ sollen als Potenzreihe entwickelt werden. Dazu ist es notwendig die Koeffizienten der Potenzreihen zu ermitteln

$\hookrightarrow (a_i)$

Angenommen wir kennen die Potenzreihenentwicklung einer Funktion dh. man weiß

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots \qquad f(0) = a_0 \qquad a_0 = f(0) = \frac{f(0)}{0!}$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots \qquad f'(0) = a_1 \qquad a_1 = f'(0) = \frac{f'(0)}{1!}$

$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + 3\cdot 4\cdot a_4 x^2 + \ldots \qquad f''(0) = 2a_2 \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!}$

$f'''(x) = 2\cdot 3 a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4 x + \ldots \qquad f'''(0) = 2\cdot 3 a_3 \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{2\cdot 3} = \frac{f'''(0)}{3!}$

$f^{IV}(x) = 2\cdot 3\cdot 4\, a_4 + \ldots \qquad f^{IV}(0) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot a_4 \qquad a_4 = \frac{f^{IV}(0)}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{f^{IV}(0)}{4!}$

$$\boxed{\Rightarrow f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots}$$

TAYLORREIHE

24.4.14 Mathe

2.SA aus AM am 8. Mai

Stunde

$\hookrightarrow$ 22.5. → Nach SA wenn

5.6. → Prüfung!

(12.6)

Inhalt 2. SA

Formel
25–50% händisch

DGL 2. Ordnung

Schwingungen

Gekoppelte DGL

Folgen u. Reihe!

Wirtsch. Mathem.

Taylorreihe

Pf 12 keine Fkt.reihen. 30.4

"Potenzreihe sind Gliedweise differenzierbar und integrierbar"

$\sin x \overset{TR}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$ diff

$1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} \pm \ldots$

$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots$ cos x

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{(2i-1)}}{(2i-1)!} \cdot (-1)^{(2i+1)}$$

TR mit Summanden i = 10

50

100

"

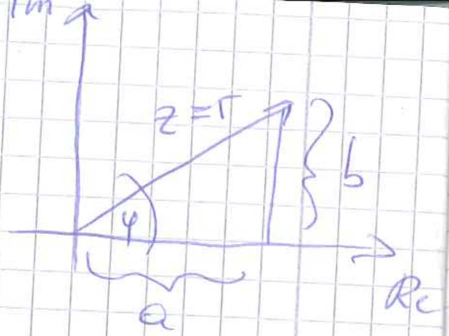
Pote

Beke

$z = a + jb$

Realteil — Imaginärteil (ohne j!)

$b = r \cdot \sin\varphi$, $a = r \cdot \cos\varphi$



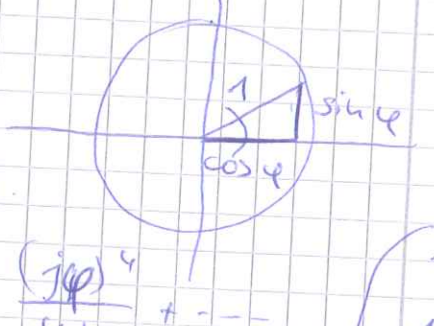
$z = r\,(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$

$z = (r; \varphi)$

$z = r\,(\cos\varphi + j \sin\varphi) = r \cdot e^{j\varphi}$

$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \sin\varphi$

Eulersche Identität



$$e^{x} \overset{TR}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{j\varphi} \overset{TR}{=} 1 + j\varphi + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \dots$$

$$1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - \frac{j\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!}$$

j, $j^2 = -1$, $j^3 = -j$, $j^4 = 1$, j^5

$$e^{j\varphi} = \underbrace{1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \dots}_{\cos\varphi} + j\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots\right)}_{\sin\varphi}$$

$\cos\varphi + j \sin\varphi$

$f(x) =$
$f'(x) =$
$f''(x) =$
$f'''(x)$
$f^{IV}(x)$

Integration durch Potenzreihenentwicklung

Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

In WR oft gebraucht: $G(u) = 0{,}5 + \int_0^u g(x)\,dx$

Integral ist analytisch nicht lösbar! Zur Berechnung der Fläche verwendet man daher numerische Int.verfahren (PfO3) oder Integration durch Potenzreihenentw.

the
4.2014

Das bedeutet, dass der Integrant als Taylorreihe entwickelt wird und die Taylorreihe dann Gliedweise integriert wird.

$$e^{x} \overset{TR}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Integrand: $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2! \cdot 4} - \frac{x^6}{3! \cdot 8} + \dots$$

$$G(u) = 0{,}5 + \int_0^u g(x)\,dx =$$

$$= 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2! \cdot 4} - \frac{x^6}{3! \cdot 8} + \dots\right] dx$$

Summe der Integrale kann man berechnen: $\int 1 \pm \int \frac{x^2}{2} \pm \int \frac{x^4}{2! \cdot 4} \pm \dots$ lässt sich integrieren!

$$G(u) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^u 1\,dx - \int_0^u \frac{x^2}{2}dx + \int_0^u \frac{x^4}{2! \cdot 4}dx - \int_0^u \frac{x^6}{3! \cdot 8}dx + \dots\right]$$

$$G(u) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[x \Big|_0^u - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^u + \frac{1}{2! \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^u - \dots \right]$$

$$G(u) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[u - \frac{u^3}{2 \cdot 3} + \frac{u^5}{2! \cdot 4 \cdot 5} + \dots \right]$$

Bsp: $f(x) = e^{-x} \cdot \sin 3x$

Potenzreihe entw. bis 4. Ordnung
$\hookrightarrow x^4$!

$f(x) = \underbrace{e^{-x}}\,\underbrace{\sin 3x}$

$f'(x) =$ BLUB

$e^x \overset{TR}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$x \to -x$

$e^{-x} \overset{TR}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \ldots$ nicht unbedingt

$\sin x \overset{TR}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \ldots$

$x \to 3x$

$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + \ldots$ 5. Ordnung

$f(x) = e^{-x} \cdot \sin 3x$

$\left(1 - x + \frac{x^2}{2!}\right) \cdot \left(3x - \frac{27x^3}{3!}\right)$

Bsp: Potenzreihenentw. für $\sin x$

$f(x) = \sin x \quad\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \quad\quad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \quad\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \quad\quad f'''(0) = -1$

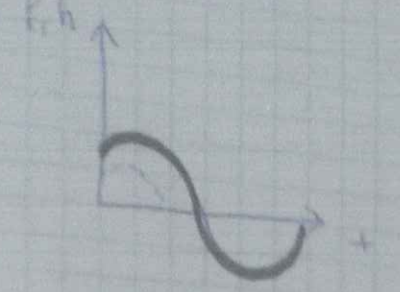
$f^{IV}(x) \quad\quad f^{IV}(0)$

$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 \pm \ldots$

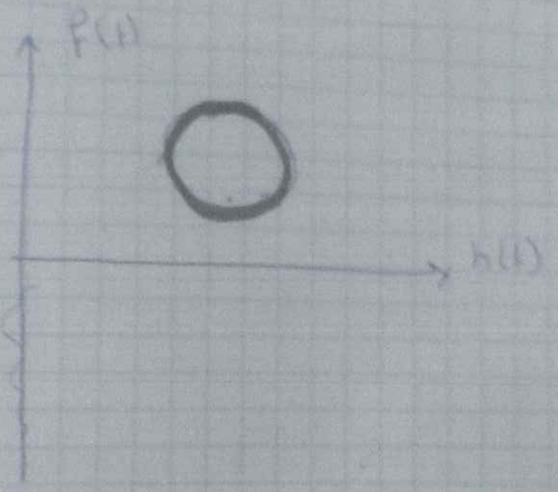
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots$

H32: Taylorreihenentw. für $\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$
Handschrift 23. 4. H925

Resultatliste 1 Variante
→ [[0, h(0)], [t1, h(t1)] ...]
→ [[0, f(0)], [t1, f(t1)] ...]



Resultatliste 2 Variante
→ [h(0), f(0)], [h(t1), f(t1)] ...



Anfangsbedingungen:

h(0) = 7   a = 1.0   c = [illegible]

f(0) = 5   b = 0.25   d = [illegible]

<u>HÜ 2</u>: berechnen + Erklärung + Auswertung + [illegible]

13.03.14

Gekoppelte Differentialgleichung

Räuber - Beute - Gleichung
(Volterra - Lotka)

Ökosystem
Füchse (Räuber) **f(t)**
Hasen (Beute) **h(t)**

Erfolgsfaktor

Veränderung der Funktion mit der Zeit

f(t)
h(t)

$\dot{h}(t) = a \cdot h(t) - h(t) \cdot f(t) \cdot b$

$\dot{f}(t) = c \cdot f(t) \cdot h(t) - d \cdot f(t)$

Zahl Füchse

wann steigt Anzahl wenn Füchse/Hasen mehr sind

mehr/weniger Futter

wann sterben mehr/weniger

→ 2 Differentialgleichungen

Runge Kutta - nummerisch

Anfang zur Zeit Null → Anzahl Füchse/Hasen

(h(0), f(0), 0, 0.1)

Population   Zeit   Zeitschritt

$\dot{h}(t)$ in Runge Kutta umsetzen
→ (h(t1), t1)

$\dot{f}(t)$ in Runge Kutta umsetzen
→ (f(t1), t1)

(h(t1), f(t1), t1, ~~f(t1)~~ h)

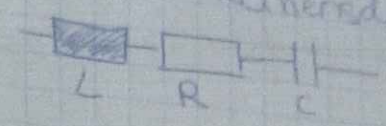
[[h(0), f(0), 0, 0.1], [h(t1), f(t1), t1, 0.1], [h(t2), f(t2), t2, 0.1] ...

→ Resultatliste

Feder-Masse System

Konstante m
Konstante b
Konstante c
Eigenfrequ. $\sqrt{\frac{c}{m}}$

Elektr. Reihenschwingkreis



L - Spule
R - Wiederstand
C - Condensator

DGL der freien Schwingung

$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{c}{m}y = 0$

Elektr. Reihenschwingkreis

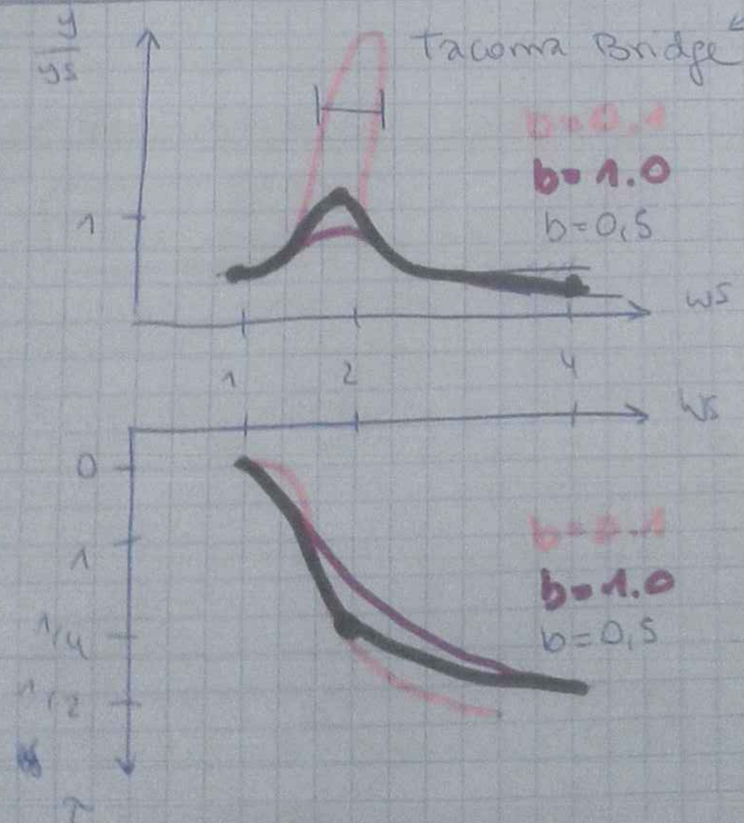
Mech. Feder-Masse Syst.

m	L
b	R
c	$1/C$
$\sqrt{\frac{c}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$
$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{c}{m}y = 0$	$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \emptyset$
oder	$\ddot{u} + \frac{R}{L}\dot{u} + \frac{1}{LC} u = \emptyset$

Hü 1 Zusammenfassung von S28

y(t) vs s(t)	Frequenz	Amplitude $\frac{y}{y_s}$	Phasenverschiebung
$w = 1$	$= ws$ = Frequ. d. Stöf.	0.3	$\sim \emptyset$
$w = 2$	$= ws$	1	$\rightarrow 1/4$
$w = 4$	$= ws$	0.1	$\rightarrow 1/2$

- Amplitude: höchste Stelle der Lösung
- Frequenz: Störfunktion - ändert sie sich?
- Phasenverschiebung: ~~wenn was~~ Wenn Störfunktion den Null-Durchgang hat → wie viel hat Lösung ($1/2$, $1/4$, ...)



b - Koeff. d. Reibung

Jedes Schwingende Objekt verhält sich so.