SOLUCIONES

1. a) $5i$ b) $9i$ c) $6i$ d) $12i$
2. a) $-i$ b) $24i$
3. a) $-2+3i$ b) $1+i$ c) $-6+2i$ d) i
4. a) $7-3i$ b) $5-5i$ c) $4+3i$ d) 6 e) $6-5i$ f) $-2-5i$ g) $-8+2i$ h) $-2i$
5. a) $5-14i$ b) $7-32i$ c) $17-17i$ d) $15-16i$ e) $7-i$ f) $5+5i$ g) $22-6i$ h) $23+11i$
6. a) 13 b) 26 c) 37 d) 25 e) 2 f) 34 g) 1 h) 4
7. a) $\frac{-4}{13}+\frac{19}{13}i$ b) $\frac{7}{20}-\frac{11}{20}i$ c) $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$ d) $\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$ e) $\frac{9}{13}+\frac{7}{13}i$ f) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ g) $1+i$ h) $2-6i$
8. a) $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ b) $-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$ c) $\frac{4}{17}+\frac{1}{17}i$ d) $\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i$ e) i f) $-\frac{1}{2}i$
9. a) $-i$ b) -1 c) 1 d) i e) $-i$ f) -1 g) i h) 1 i) $-i$ j) -1
10. a) $5+12i$ b) $16-30i$ c) $2i$ d) $3-4i$ e) $2i$ f) $-8i$
11. a) 64 b) 16 c) $2i$ d) $-\frac{1}{4}$
12. Aplicamos directamente la fórmula para resolver la ecuación cuadrática a $x^2-6x+10=0$

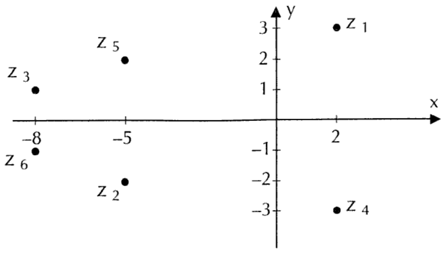
$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{6\pm 2i}{2}=3\pm i$$

También podemos formar la ecuación cuadrática a partir de las soluciones.
13. a) 0 b) 0
14. a) $(8, 1)$ b) $(1, 12)$ c) $(-4, 12)$ d) $(-25, -21)$ e) $\left(\frac{23}{65}, \frac{11}{65}\right)$ f) $\left(\frac{-2}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ g) $\left(\frac{3}{65}, \frac{41}{65}\right)$ h) $\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
15. a) $-3-i$ b) $19-40i$ c) $-264+12i$ d) $-89-114i$ e) $-19+33i$ f) $270+570i$ g) $\frac{213}{1.258}+\frac{84}{629}i$ h) $\frac{99}{485}-\frac{67}{97}i$

16. **a)** $12 + \sqrt{3} - \left(2\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right)$

b) $\frac{10}{11} + \frac{3\sqrt{6}}{11}\, i$

17.



18. **a)** $x = 1,\ y = -1$ **d)** $x = 2,\ y = 3$

b) $x = \frac{5}{6},\ y = \frac{1}{2}$ $x = \frac{3}{4},\ y = 8$

c) $x = 2,\ y = -1$

$x = \frac{1}{3},\ y = -6$

19. $-1 + 2i;\ 1 - 2i$

20. $x = \frac{1}{2}$

21. No existe, porque no cumple la condición pedida.

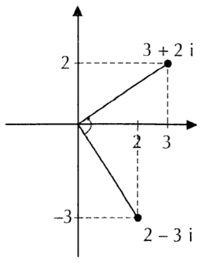
22. $x = -\frac{5}{2}$

23. $x = \pm\ 3 \quad y = \pm\ 5$

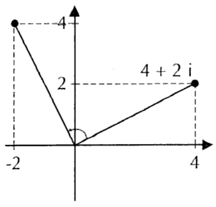
24. **a)** $3 + 2i$ **b)** $-2 + 4i$ **c)** $3 + 5i$

d) $-1 - 2i$ **e)** $2 - 3i$

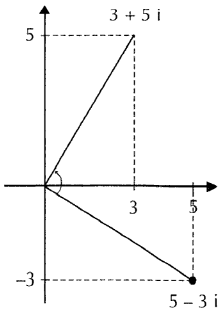
25.a)



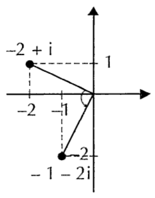
b)



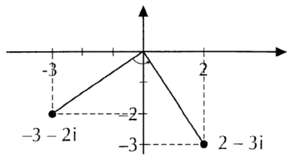
c)



d)



e)



En todos los casos se observa que el giro es de 90º.

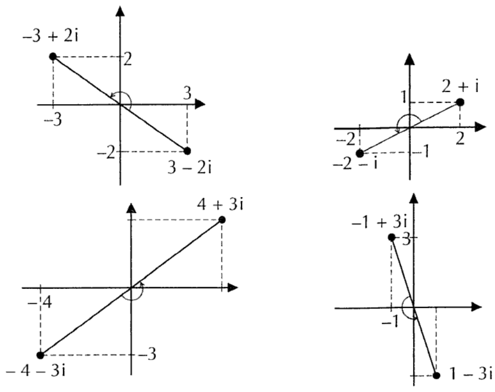
En general $(a + bi)\, i = -\, b + ai$

26. $(a + bi)i = ai + bi^2 = ai - b = -b + ai$

27. **a)** $-3 + 2i$ **c)** $4 + 3i$

b) $-2 - i$ **d)** $1 - 3i$

28.



Se observa un giro de 180º.

29. $a = \frac{-3}{10}$

30. $3 - i,\ -3 + i$

31. $x = 1;\quad y = 0$

32. $-8 - 6i$

33. $-1 - 3i$

34. $-18 + 15i$

35. **a)** $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\, i$

b) $z = -\frac{8}{13} - \frac{1}{13}\, i$

c) $z = \frac{2}{3} + i$

d) $z = -1$

e) $-\frac{9}{5} + \frac{13}{5}\, i$

36. $\frac{7}{625}$

37. **a)** $\pm(2+i)$ **b)** $\pm(5+2i)$

c) $\pm(1+4i)$ **d)** $\pm(3+2i)$

e) $\pm(2+2i)$ **f)** $\pm(1+i)$

38. $z=-1+2i$

39. $w=\frac{1}{10}-\frac{9}{10}i;\quad z=\frac{7}{10}+\frac{1}{2}i$

40. $z=\pm i$

41. $-1-i$

42. 0

43. Sea $z=a+ib$ y sea $w=c+id$ $\text{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right)$

Entonces debemos demostrar:

$$\text{Re}\left(\frac{a+ib}{a+ib+c+id}\right)+\text{Re}\left(\frac{c+id}{a+ib+c+id}\right)=1$$

Calculemos primero el cociente:

$\frac{a+ib}{(a+ib)+(c+id)}$ para determinar $\text{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right)$

$$\frac{a+ib}{(a+ib)+(c+id)}=\frac{a+ib}{(a+c)+i(b+d)}$$

$$=\frac{(a+ib)}{(a+c)+i(b+d)}\cdot\frac{(a+c)-i(b+d)}{(a+c)-i(b+d)}$$

$$=\frac{(a+ib)\cdot(a+c)-i(a+ib)(b+d)}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$=\frac{a^2+ac+iab+ibc-i(ab+ad+ib^2+ibd)}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$=\frac{a^2+ac+b^2+bd+i(bc-ad)}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

Así, $\text{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right)=\frac{a^2+ac+b^2+bd}{(a+c)^2+(b+d)^2}$ *

En la misma forma se obtiene:

$\text{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right)=\frac{ac+c^2+bd+d^2}{(a+c^2)+(b+d)^2}$ **

Sumando ambas expresiones (* y **) se obtiene:

$$\text{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right)+\text{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right)=\frac{a^2+ac+b^2+bd}{(a+c)^2+(b+d)^2}+\frac{ac+c^2+bd+d^2}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$=\frac{a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2}{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$=\frac{(a+c)^2+(c+d)^2}{(a+c)^2+(c+d)^2}$$

$$=1$$

44. Sea $z=a+ib$ y $w=c+id$

$\rightarrow \text{Re}(z)=a;\ \text{Re}(w)=c;\ \text{Im}(z)=b;\ \text{Im}(w)=d$ *

Calculemos el producto $(z\cdot w)$

$(z\cdot w) = (a+ib)(c+id)$

$= ac+iad+ibc+i^2bd$

$= ac-bd+i(ad+bc)$

Determinamos la parte real del producto $(z\cdot w)$

$\text{Re}(z\cdot w)=ac-bd$

Reemplazamos según * y obtenemos:

$\text{Re}(z\cdot w)=\text{Re}(z)\cdot\text{Re}(w)-\text{Im}(z)\cdot\text{Im}(w)$

45. Sea $z=a+ib$ y $w=c+id$

Calculemos el producto y agrupemos parte real e imaginaria:

$(z\cdot w) = ac-bd+i(ad+bc)$

$\text{Im}(z\cdot w) = ad+bc$

Pero tenemos que:

$\text{Re}(z)=a;\ \text{Re}(w)=c;\ \text{Im}(z)=b;\ \text{Im}(w)=d$

Por lo tanto:

$\text{Im}(z\cdot w)=\text{Re}(z)\cdot\text{Im}(w)+\text{Im}(z)\cdot\text{Re}(w)$