La circunferencia

Secciones cónicas como lugares geométricos

Hans Sigrist

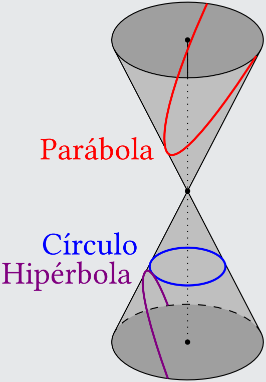
Liceo Mixto Los Andes

hsigrist@liceomixto.cl

Agenda

Secciones cónicas

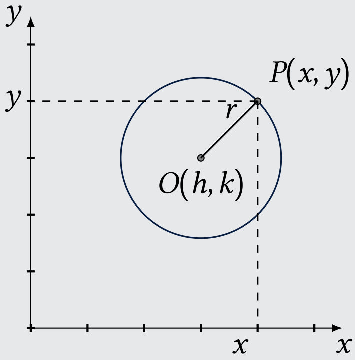
Definición



Considere L una recta en una posición fija en el espacio y A un punto tal que $A \in L$. Si se trazan infintas rectas L_1 que pasan por A y forman un cierto ángulo α con L, se genera un **doble cono de revolución**.

La circunferencia

Definición



La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos $P(x,y)$ del plano que se encuentran a una distancia determinada r de un punto dado $O(h,k)$ de dicho plano.

$$\mathscr{C}(O,r) = \{P \in \mathscr{P} \,/\, OP = r\}$$

Ecuación principal de la circunferencia

Definición

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

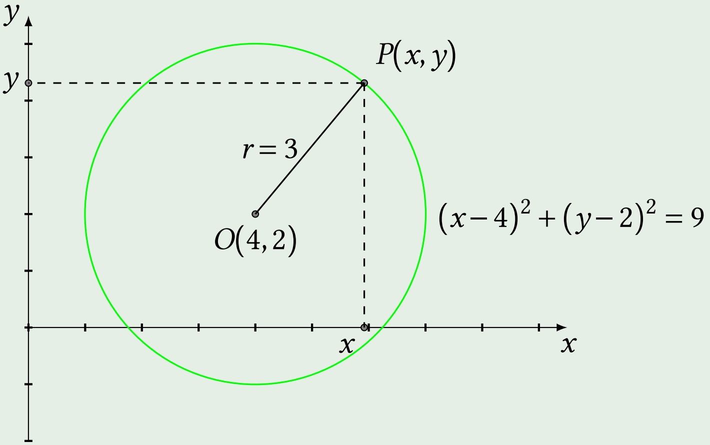
Esta expresión corresponde a la ecuación principal de la circunferencia, con h y k las coordenadas del centro y r el radio.

Ejemplo

Determinar la ecuación principal de la circunferencia cuyo centro es $(4, 2)$ y su radio es 3.

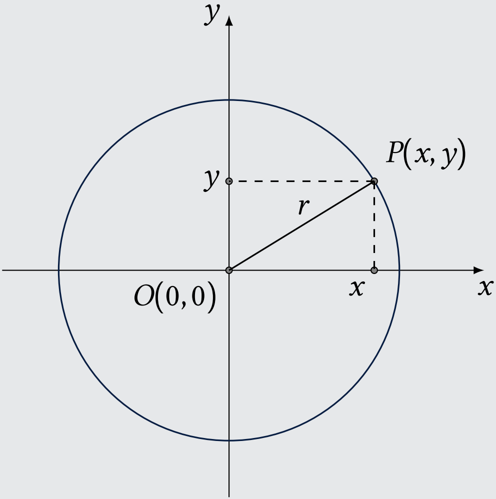
Ejemplo

Determinar la ecuación principal de la circunferencia cuyo centro es $(4,2)$ y su radio es 3.



La circunferencia centrada en el origen

Caso $h = k = 0$: ecuación canónica de la circunferencia



$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación general de la circunferencia

Definición

A partir de la ecuación principal de la circunferencia:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

podemos obtener la denominada **ecuación general de la circunferencia**:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Ejemplo

Determine los coeficientes D, E y F de la ecuación general de la circunferencia con centro en $(2,5)$ y radio $r=6$.

$$\begin{aligned} h=2, k=5, r=6 &\Rightarrow (x-2)^2+(y-5)^2=6 \\ &\Rightarrow x^2+y^2-4x-10y-7=0 \\ &\Rightarrow D=-4, E=-10 \wedge F=-7. \end{aligned}$$

Problema

Determine la ecuación de la circunferencia si uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos $A(-5,7)$ y $B(7,-3)$.

Problema

Determine la ecuación de la circunferencia si uno de sus diámetros es el segmento que une los puntos $A(-5,7)$ y $B(7,-3)$.

$$
\begin{aligned}
(h,k) &= \left(\frac{-5+7}{2}, \frac{7-3}{2}\right)\\
&= (1,2)\\
\Rightarrow r &= \sqrt{(7-1)^2+(-3-2)^2}\\
&= \sqrt{36+25}\\
&= \sqrt{61}\\
\Rightarrow &(x-1)^2+(y-2)^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2\\
\Rightarrow &x^2+y^2-2x-4y-56=0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Parametrización de una circunferencia

Depende de tres parámetros

De acuerdo a lo visto anteriormente, la ecuación de una circunferencia se puede escribir en su forma principal:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

o bien, en su forma general

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

En ambos casos, la ecuación depende de tres parámetros:

$$h,k,r \qquad \vee \qquad D,E,F$$

Problema

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,0)$, $B(3,-2)$ y $C(1,-4)$

Problema

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1,0)$, $B(3,-2)$ y $C(1,-4)$

$$\begin{cases} 1+0+D\cdot 1+E\cdot 0+F=0 \\ 9+4+D\cdot 3+E\cdot(-2)+F=0 \\ 1+16+D\cdot 1+E\cdot(-4)+F=0 \end{cases} \begin{cases} 1+D+F=0 \\ 13+3D-2E+F=0 \\ 17+D-4E+F=0 \end{cases} \begin{cases} D=-2 \\ E=4 \\ F=1 \end{cases}$$

$$\therefore x^2+y^2-2x+4y+1=0 \qquad \square$$

Problema

Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-2,5)$, $B(3,2)$ y $C(0,0)$

Apéndice

¡Carpe diem!

Una copia del presente trabajo, se encuentra en el enlace La circunferencia.