7 Sea $2x + (3y - 6)\,i + 3$ un número complejo.

Determinemos los valores de x e y para que la expresión dada sea:

a) un número imaginario puro

b) un número real

c) cero

d) igual a $2 - 5i$

Solución:

$2x + (3y - 6)\,i + 3 = (2x + 3) + (3y - 6)\,i$

a) Para que sea imaginario puro, su parte real debe ser cero:
$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3}{2}$

b) Para que sea un número real, su parte imaginaria debe ser cero:
$3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$

c) Para que sea cero, la parte real y la parte imaginaria deben ser ambas cero:
$x = -\frac{3}{2} \wedge y = 2$

d) Para que sea igual a $2 - 5i$
$2x + 3 = 2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

$3y - 6 = -5 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

EJERCICIOS

1. Encuentre las raíces de los siguientes números complejos:

a) $\sqrt{-25}$

b) $\sqrt{-81}$

c) $\sqrt{-36}$

d) $\sqrt{-144}$

2. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{-25} + \sqrt{-4} - 2\sqrt{-16} =$

b) $3\sqrt{-49} - 2\sqrt{-25} + \sqrt{-169} =$

3. Escriba los inversos aditivos de los siguientes números complejos:

a) $2 - 3i$

b) $-1 - i$

c) $6 - 2i$

d) $-i$

4. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(2 + 3i) + (5 - 6i)$

b) $(3 - i) + (2 - 4i)$

c) $(5 + 4i) + (-1 - i)$

d) $(6 + i) - i$

e) $(8 - 4i) - (2 + i)$

f) $(3 - i) - (5 + 4i)$

g) $-2 - (6 - 2i)$

h) $(1 - i) - (1 + i)$

5. Efectúe los siguientes productos:

a) $(2 - 3i)(4 - i)$

b) $(5 + 2i)(-1 - 6i)$

c) $(3 - 5i)(4 + i)$

d) $(-3 - 2i)(-1 + 6i)$

e) $(-2 + i)(-3 - i)$

f) $(1 + 2i)(3 - i)$

g) $(4 - 2i)(5 + i)$

h) $(3 + 2i)(7 - i)$

6. Efectúe los siguientes productos:

a) $(3 - 2i)(3 + 2i)$

b) $(1 - 5i)(1 + 5i)$

c) $(-6 + i)(-6 - i)$

d) $(4 - 3i)(4 + 3i)$

e) $(-1 - i)(-1 + i)$

f) $(-5 - 3i)(-5 + 3i)$

g) $i \cdot (-i)$

h) $2i \cdot (-2i)$

7. Calcule las siguientes divisiones:

a) $(2 + 5i) : (3 - 2i)$ **e)** $(4 + 2i) : (5 - i)$

b) $(1 - 4i) : (6 - 2i)$ **f)** $(2 + i) : (2 - i)$

c) $(3 - 2i) : (1 + i)$ **g)** $(1 - i) : (-i)$

d) $(1 - i) : (2 - 4i)$ **h)** $(6 + 2i) : i$

8. Calcule los inversos multiplicativos de los siguientes números complejos:

a) $1 - 2i$ **d)** $3 + i$

b) $-1 + 2i$ **e)** $-i$

c) $4 - i$ **f)** $2i$

9. Calcule las siguientes potencias de i:

a) i^{-1} **d)** i^{125} **g)** i^{-3} **j)** i^{-6}

b) i^2 **e)** $i^{1.003}$ **h)** i^{-4}

c) i^{16} **f)** i^{-2} **i)** i^{-5}

10. Calcule el cuadrado de los siguientes números complejos:

a) $3 + 2i$ **b)** $5 - 3i$ **c)** $1 + i$

d) $-2 + i$ **e)** $-1 - i$ **f)** $2 - 2i$

11. Calcule:

a) $(1 - i^2)^6$ **b)** $(i^{22} + i^{30})^4$

c) $(i^5 + i^{-12})^2$ **d)** $(i^{-3} - i^{-5})^{-2}$

12. Verifique que los complejos $3 - i$ y $3 + i$ son solución de la ecuación $x^2 - 6x + 10 = 0$

13. Calcule:

a) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} =$

b) $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^6} + \frac{1}{i^7} + \frac{1}{i^8} =$

14. Si $z_1 = (2, 3)$, $z_2 = (1, -2)$, $z_3 = (-5, 0)$ y $z_4 = (0, 4)$, encuentre:

a) $z_1 + z_2 - z_3$ **e)** $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

b) $2z_1 - 3z_2$ **f)** $\frac{1}{z_3}(z_1 + z_4)$

c) $z_4(z_1 + z_2)$ **g)** $\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2}$

d) $(z_1 - z_2)(z_3 + z_4)$ **h)** $\frac{1}{z_4}(z_2 - z_3 + z_1)$

15. Si $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 6 + i$, $z_3 = 4 - 9i$ y $z_4 = 5i$, encuentre:

a) $z_1 - z_2 + z_4$ **e)** $(1 - z_1)(1 + z_2)$

b) $2 - z_1 + 5z_3$ **f)** $2z_1(z_1 - z_2 z_3)$

c) $4z_3(z_1 - z_2)$ **g)** $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{2z_2}$

d) $2z_1 z_2 - 3z_3 z_4$ **h)** $\frac{z_1 z_2}{z_3 z_4}$

16. Efectúe las siguientes operaciones:

a) $(2\sqrt{2} - \sqrt{3}i)(3\sqrt{2} - i)$

b) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}\,i}{\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\,i}$

17. Considerando que al complejo $x + yi$ corresponde el par ordenado (x, y) grafique los siguientes números complejos en el plano cartesiano:

a) $z_1 = 2 + 3i$ **b)** $z_2 = -5 - 2i$

c) $z_3 = -8 + i$ **d)** $z_4 = 2 - 3i$

e) $z_5 = -5 + 2i$ **f)** $z_6 = -8 - i$

Compare z_1 con z_4, z_2 con z_5 y z_3 con z_6

18. Determine los números reales x e y que satisfagan la siguiente igualdad:

a) $2x - 3i + y = xi - 2i + 2yi + 1$

b) $(2x - i) + (y - i) = (2 - 3i) - (x + 2yi)$

c) $(x + i)(y - 3i) = 1 - 7i$

d) $(2x - i)(-y + 2i) = -10 + 11i$

19. Encuentre un número complejo cuyo cuadrado sea $-3 - 4i$

20. Determine x para que el cociente $\frac{2x - i}{1 + i}$ sea imaginario puro.

21. Encuentre x para que $\frac{1}{2x - i}$ sea un número real.

22. Determine x para que el producto de $(1 - 2i)(x - 5i)$ sea un número real.

23. Determine x e y tales que: $(x + yi)^2 = -16 - 30i$

24. Calcule los productos siguientes:

a) $(2-3i)\,i$ **d)** $(-2+i)\,i$

b) $(4+2i)\,i$ **e)** $(-3-2i)\,i$

c) $(5-3i)\,i$

25. Grafique el primer factor y el producto del ejercicio anterior. Una el origen con el número complejo y observe cuánto gira cada uno.

26. Pruebe que

$(a+bi)\,i = -b+ai\ \forall\ a, b \in \mathbb{R}$

27. Calcule los siguientes productos:

a) $(3-2i)\,i^2$ **b)** $(2+i)\,i^2$

c) $(-4-3i)\,i^2$ **d)** $(-1+3i)\,i^2$

28. Grafique el primer factor y el producto en los ejercicios del problema anterior. Una los puntos con el origen de coordenadas y observe cuánto gira cada uno.

29. Encuentre a para que el producto $(2a-3i)(5+i)$ sea un imaginario puro.

30. Determine un número complejo cuyo cuadrado sea $8-6i$.

31. Determine los números reales x e y que satisfagan la siguiente condición:

$(2+xi) : (1-2i) = y+i$

32. Calcule el valor de:

z^2-2z+1 si $z=2-3i$

33. Calcule el valor de:

z^2-5z+4 si $z=1+i$

34. Calcule el valor de:

$2z^2-z-3$ si $z=-1-3i$

35. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $(1-z)(1+i) = 2-i$

b) $z(1-2i)+3 = 1-2z+i$

c) $\dfrac{1-z}{1+z} = \dfrac{2-i}{1+4i}$

d) $\dfrac{z}{i} + \dfrac{1-z}{2i} = 0$

e) $\dfrac{2z}{1+i} - \dfrac{z}{1-i} = 3+4i$

36. Si $z=4-3i$, encuentre la parte real de $\dfrac{1}{z^2}$

37. Calcule la raíz cuadrada de:

a) $3+4i$ **d)** $5+12i$

b) $21+20i$ **e)** $8i$

c) $-15+8i$ **f)** $2i$

Sugerencia: plantee un sistema de ecuaciones.

38. Determine z en la ecuación:

$$\frac{z}{3+4i} - \frac{1-z}{5i} = \frac{5}{3-4i}$$

39. Resuelva el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2wi + (1-i)\,z &= 3 \\ (1-i)\,w + 4z &= 2+i \end{aligned}\right|$$

40. Encuentre $z \in \mathbb{C}$ tal que $z + \dfrac{1}{z} = 0$

41. Calcule el valor de:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \ldots.. + \frac{1}{i^{50}}$$

42. Calcule el valor de:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \ldots.. + \frac{1}{i^{100}}$$

43. Demuestre que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) = 1$$

44. Demuestre que

$\mathrm{Re}\,(z \bullet w) = \mathrm{Re}\,(z) \bullet \mathrm{Re}\,(w) - \mathrm{Im}\,(z) \bullet \mathrm{Im}\,(w)$

45. Demuestre que

$\mathrm{Im}\,(z \bullet w) = \mathrm{Re}\,(z) \bullet \mathrm{Im}\,(w) + \mathrm{Im}\,(z) \bullet \mathrm{Re}\,(w)$