



Apostila de Cálculo Zero

Este material visa auxiliar os estudos em Matemática promovendo a revisão de seu conteúdo básico, de forma a facilitar o aprendizado nas disciplinas de cálculo e também melhorar o aproveitamento nas disciplinas que envolvam o raciocínio lógico.



Prezado(a) Aluno(a),

Faça uma leitura atenciosa do conteúdo e das situações problemas propostas para compreensão e interpretação.

Participe das discussões das idéias matemáticas em sala e busque manter presença regular às aulas para que seu raciocínio e compreensão do conteúdo seja contínuo.

Leia a situação problema, formule hipóteses e estime resultados. Elabore estratégia para resolve-los e siga os passos:

- Anote os dados mais importantes;
- verifique o que se deseja descobrir no problema;
- faça um esquema ou desenho que o auxilie a visualizar e interpretar a situação;
- anote o raciocínio que você usou na resolução;
- registre os cálculos;
- analise a solução obtida, verificando se ela é coerente com os dados do problema;
- anote a resposta completa.

Através da leitura do problema, utilizando os passos acima, você irá identificar qual conteúdo, método, propriedade e/ou fórmula que será(ão) necessário(s) para a solução da situação proposta.

Tente identificar como se dá sua aprendizagem: gosto de estudar sozinho ou em grupo; sua aprendizagem depende de você e de sua dedicação.

Busque resolver os exercícios propostos antes de pedir ajuda. Não copie uma resolução sem compreendê-la, esclareça a dúvida e depois refaça o exercício para verificar se realmente aprendeu.

As respostas dos exercícios servem como uma forma de conferir seu raciocínio. Se não estiver conseguindo resolver um exercício, uma situação problema, procure esclarecimento antes de desistir.

Enfim, participe das aulas de forma efetiva e com atenção. Sempre que necessário recorra às anotações, ao livro e/ou apostila e esclareça suas dúvidas com o(a) professor(a).

Organize um horário de estudos para criar o hábito de estudar todos os dias. Lembre-se: a dúvida só aparece quando nos exercitamos através da resolução de exercícios diferentes.

Para seu sucesso realize as tarefas com organização clareza e pontualidade.

Sucesso! É o que desejamos.

Instituto de Engenharias e Tecnologias

Conteúdo

1.	CONJUNTOS	5
1.1	Notação de conjuntos.....	5
1.2	Tipos de conjuntos	5
1.3	Operações com conjuntos.....	6
2.	CONJUNTOS NUMÉRICOS	7
2.1.	$N \rightarrow$ Naturais	8
2.2	$Z \rightarrow$ Inteiros	8
2.3	Expressões numéricas	9
3.	POTÊNCIAS.....	9
3.1	Números Primos e Compostos	11
3.2	Decomposição de um número em um produto de fatores primos	12
3.3	Mínimo múltiplo comum (m.m.c.)	12
3.4	Máximo Divisor Comum (m.d.c.)	12
3.5	$Q \rightarrow$ Racionais:	12
4	OPERAÇÕES ENTRE FRAÇÕES	13
4.1	Redução de frações ao mesmo denominador	13
5	NÚMEROS DECIMAIS.....	13
5.1	Operações com números decimais.....	14
6	PORCENTAGEM	15
7	$I \rightarrow$ IRRACIONAIS.....	15
8	$R \rightarrow$ REAIS.....	15
9	RADICais.....	17
10	PRODUTOS NOTÁVEIS	18
11	OPERAÇÕES ALGÉBRICAS.....	20
11.1	Expressões algébricas	20
11.2	Operações com expressões algébricas	20
12	EQUAÇÕES DO 1º GRAU	20
13	EQUAÇÕES DO 2º GRAU	21
14	INEQUAÇÕES.....	25
15	INEQUAÇÃO DO 2º GRAU.....	27
16	FUNÇÕES	29
16.1	Tipos de funções	30
17	FUNÇÃO DO 1º GRAU OU FUNÇÃO AFIM.....	37
17.1	Zero da função de 1º grau.....	38
17.2	Crescimento e decrescimento.....	39
18	FUNÇÃO DO 2º GRAU	41
19	FUNÇÃO MODULAR	45
19.1	Módulo (ou valor absoluto) de um número:	45
19.2	Equações modulares.....	45
19.3	Inequações modulares	46
19.4	Módulo e raiz quadrada.....	47
19.5	Função modular.....	47

20	FUNÇÃO EXPONENCIAL.....	49
21	FUNÇÃO LOGARÍTMICA	52
21.1	Equação logarítmica.....	53
21.2	Inequação logarítmica	53
22	TRIGONOMETRIA	54
22.1	Funções trigonométricas básicas	55
22.2	Unidades de Medidas de arcos:.....	56
22.3	Arcos de uma volta.....	56
22.4	Mudança de unidades	56
22.5	Círculo Trigonométrico	57
22.6	Arcos com mais de uma volta	57
22.7	Arcos Côngruos.....	58
22.8	Seno e cosseno.....	58
	BIBLIOGRAFIA.....	66



1. CONJUNTOS

As seguintes convenções serão utilizadas nas teorias dos conjuntos:

- Os conjuntos serão indicados por letras maiúsculas do alfabeto. Exemplo: A, B, C, ...
- Os elementos serão indicados por letras minúsculas do alfabeto. Exemplo: a, b, c, ...
- Pertinência: quando se quer relacionar elementos que pertencem a um conjunto, utiliza-se o símbolo \in , que é lido como “é elemento de” ou “pertence a”. O símbolo \in é a negação do símbolo de pertinência, portanto é lido como “não é elemento de” ou “não pertence a”.

1.1 Notação de conjuntos

Representamos de três modos distintos os elementos de um conjunto.

- Representação Tabular:** Essa notação consiste em citar os elementos do conjunto separados por vírgulas e entre chaves.

Exemplos:

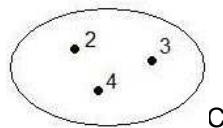
- $A=\{a,e,i,o,u\}$
- $B=\{1,3,5,\dots\}$
- $C=\{0,2,4,6,\dots\}$
- $D=\{\text{verde, amarelo, azul, branco}\}$

- Representação descrevendo a propriedade que é comum a todos os elementos que pertencem a esse conjunto.**

Exemplos:

- $A=\{x / x \text{ é consoante}\}$
- $B=\{x / x \text{ é negativo e par}\}$
- $C=\{x / x \text{ é país da Ásia}\}$
- $D=\{x / x \text{ é cor da bandeira do Flamengo}\}$

- Representação Gráfica**



1.2 Tipos de conjuntos

- Conjunto Unitário:** Aquele que possui um único elemento.

Exemplos:

$$A=\{5\}$$

$B=\{x/x \text{ é capital de Minas Gerais}\}$

$$C=\{x / 3+x=5\}$$

- Conjunto Vazio:** É aquele que não possui elementos. Pode ser representado por $\{\}$ ou \emptyset .

Lembre-se: $\{\emptyset\}$ não representa conjunto vazio.

- Conjunto Universo:** É aquele conjunto que contém todos os elementos possíveis em um dado universo de discurso.

Exemplos:

$$U=\{a, b, c, \dots, z\}$$

$$U=\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$U=\{x/x \text{ é um número}\}$$

- Conjuntos Disjuntos:** São os conjuntos que não possuem nenhum elemento em comum.

Exemplos:

$$A=\{3,4\} \text{ e } B=\{5,6\}$$

$$E=\{5,6\} \text{ e } F=\{56\}$$

5) Conjunto Finito e Conjunto Infinito

- Conjunto Finito** é aquele que possui um número finito de elementos.

Exemplos:

$$A=\{1, 5, 9\}$$

$$B=\{x/x \text{ é rio do Brasil}\}$$

- Conjunto Infinito** é aquele que possui uma infinidade de elementos.

Exemplos:

$$A=\{0, 1, 2, 3\}$$

$$B=\{x/x \text{ é ímpar e negativo}\}$$

6) Subconjunto

Subconjunto é o conjunto A que está contido no conjunto B, ou seja, todo elemento de A também pertence ao conjunto B.

Exemplos:

$$A=\{1, 3\} \text{ é subconjunto de } B=\{1, 2, 3, 4\}$$

$$D=\{x/x \text{ é capital brasileira}\} \text{ é subconjunto de } F=\{x/x \text{ é cidade do Brasil}\}$$



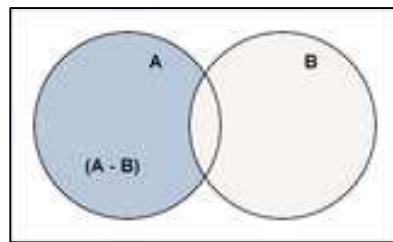
7) Simbologia:

\subset → está contido em

$\not\subset$ → não está contido em

\supset → contém

$\not\supset$ → não contém



Observações:

- 1) Em geral, $A - B \neq B - A$.
- 2) Se $B \subset A$, então $A - B = C_A^B$ (Lê-se: Complementar de B em relação a A).
- 3) $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cap A = A$
 $A \cap B = B \cap A$
- 4) $A \cup \emptyset = \emptyset$
 $A \cup A = A$
 $A \cup B = B \cup A$
- 5) O número de elementos da união de dois conjuntos é igual a diferença entre a soma do número de elementos de cada um desses conjuntos, e o número de elementos da interseção:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Onde:

$n(A \cup B)$ = número de elementos de $A \cup B$

$n(A)$ = número de elementos de A

$n(B)$ = número de elementos de B

$n(A \cap B)$ = número de elementos de $A \cap B$.

Exemplos:

- 1) Conjunto os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{3, 5, 7, 9\}$, determine.
 - a) $A \cap B$
 - b) $A \cup B$
 - c) $A - B$
 - d) $B - A$

Solução:

- a) $A \cap B = \{3, 5\}$
- b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
- c) $A - B = \{1, 2, 4\}$
- d) $B - A = \{7, 9\}$

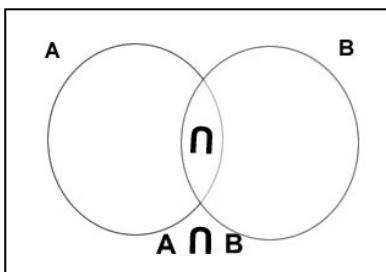
- 2) Numa pesquisa realizada, verificou-se que, das pessoas consultadas 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais A e B e 110 não liam nenhum dos jornais. Quantas pessoas foram consultadas?
 - a) 250

Obs.: Todo e qualquer conjunto é sempre subconjunto do conjunto universo (dentro de um dado universo de discurso). Além disso, o conjunto vazio por definição sempre é subconjunto de qualquer conjunto.

1.3 Operações com conjuntos

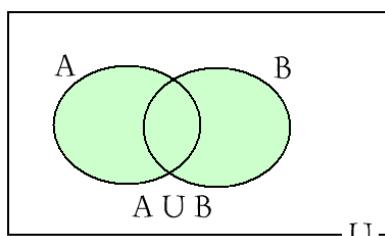
1) Interseção

Na interseção entre dois (ou mais) conjuntos tomamos os elementos comuns aos conjuntos dados. Simbolicamente: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ e } x \in B\}$.



2) União

Na união entre dois (ou mais) conjuntos reunimos os elementos dos conjuntos dados em um único conjunto. Simbolicamente: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$.



3) Diferença

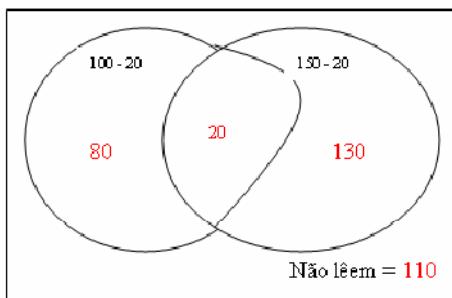
Na diferença entre dois conjuntos tomamos os elementos pertencentes ao primeiro conjunto e não pertencente ao segundo. Simbolicamente: $A - B = \{x/x \in A \text{ e } x \notin B\}$.



- b) 230
- c) 340
- d) 380

Solução:

A solução deste problema só pode ser realizada com a utilização de diagramas uma vez que existem pessoas que GOSTAM DE DUAS COISAS AO MESMO TEMPO. Toda vez que o problema trouxer tal informação iremos utilizar deste recurso de diagrama.



- 3) Sabendo que os símbolos U e I significam união e interseção, respectivamente e dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, $C = \{e, f, g, h\}$ analise os itens abaixo e assinale o CORRETO:
- a) $(A \cap B) \cup C = \{a, b, c, d, e\}$
 - b) $(A \cup B) \cap C = \{b, d\}$
 - c) $(B \cap C) \cup A = \{a, b, c, d, e, f\}$
 - d) $A \cup (B \cup C) = \{\}$

Solução:

Neste tipo de questão teremos que resolver todas as letras para perceber qual destas é a correta.

Tomemos a afirmação da **letra a** - $(A \cap B) \cup C$ este conjunto é formado a partir dos elementos que são comuns aos conjuntos A e B em união a todos os elementos do conjunto C tendo como resposta o conjunto $\{c, d, e, f, g, h\}$ por isto esta letra está errada.

Vamos observar a afirmação da **letra b** - $(A \cup B) \cap C$ I B este item deseja unir os elementos do conjunto A e C e a partir desta união separar os elementos comuns com o conjunto B tendo como resposta o conjunto $\{c, d, e, f\}$ novamente nos deparamos com uma afirmação errada.

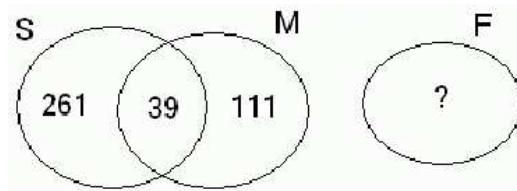
Resolvendo a operação da **letra c** $(B \cap C) \cup A$ temos que os elementos que são comuns aos conjuntos B e C unidos ao conjunto A resultam nos elementos $\{a, b, c, d, e, f\}$ por isto este item está certo. Só para concluirmos o **item d** está errado porque não tem sentido unir três conjuntos A, B e C e dizer que estes conjuntos representam uma operação vazia, ou seja, é como se afirmássemos que não existem elementos nos conjuntos A, B e C o que é um absurdo.

Inscreram-se num concurso público 700 candidatos para 3 cargos - um de nível superior, um de nível médio e um de nível fundamental. É permitido aos candidatos efetuarem uma inscrição para nível superior e uma para nível médio. Os candidatos ao nível fundamental

somente podem efetuar uma inscrição. Sabe-se que 13% dos candidatos de nível superior efetuaram 2 inscrições. Dos candidatos de nível médio, 111 candidatos efetuaram uma só inscrição, correspondendo a 74% dos candidatos desse nível. Qual é então o número de candidatos ao nível fundamental?

Solução: Sejam: M o número de candidatos de nível médio; S \cap M o número de candidatos aos níveis superior e médio; S o número de candidatos ao nível superior; F número de candidatos ao nível fundamental. Da **Matemática Financeira** sabemos que: 74% = 74/100 = 0,74 e 13% = 13/100 = 0,13.

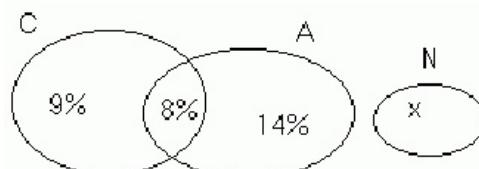
Então, 0,74M = 111, segue que, M = 111 / 0,74 = 150 e S \cap M = 150 - 111 = 39. Assim, 0,13S = 39, implicando em S = 39 / 0,13 = 300. Observe o diagrama de Venn-Euler com a quantidade de elementos.



Temos: 150 - 39 = 261. Logo, 261 + 39 + 111 + F = 700. Conseqüentemente, F = 700 - 411 = 289.

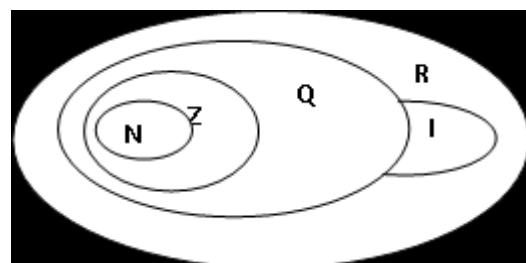
(PUC) Um levantamento sócio-econômico entre os habitantes de uma cidade revelou que, exatamente: 17% têm casa própria; 22% têm automóvel; 8% têm casa própria e automóvel. Qual o percentual dos que não têm casa própria nem automóvel?

Solução: Com base nos dados, fazemos um diagrama de Venn-Euler, colocando a quantidade de elementos dos conjuntos, começando sempre pelo número de elementos da interseção.



Como a soma das parcelas percentuais resulta em 100%, então 9% + 8% + 14% + x = 100 %. Daí, vem que 31% + x = 100%. Logo, o percentual dos que não têm casa própria nem automóvel é x = 100% - 31% = 69%.

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS





2.1. $\mathbb{N} \rightarrow \text{Naturais}$

O conjunto dos números naturais é indicado por \mathbb{N} e representado pelos números positivos inclusive o zero, que representem uma contagem inteira.

Não há números naturais negativos.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ (é um conjunto infinito)
 $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ (exclui o zero, e é subconjunto de \mathbb{N})

1) Operações em \mathbb{N}

a) Adição

Na adição os números são chamados de parcelas, sendo a operação aditiva, e o resultado é a soma.

Sendo $a, b \in \mathbb{N}$ e $a \geq b$, a diferença $D = a - b \in \mathbb{N}$, onde a, b são parcelas e o S é a soma.

b) Subtração

Na subtração os números são chamados de subtraendo, sendo a operação a subtração, e o resultado é o minuendo.

Sendo $a, b \in \mathbb{N}$ e $a \geq b$, a diferença $D = a - b \in \mathbb{N}$, onde a é o minuendo, b é o subtraendo e D é a diferença.

c) Multiplicação

Na multiplicação os números são chamados de fatores, sendo a operação multiplicativa e o resultado é o produto.

Sendo $a, b \in \mathbb{N}$, o produto $P = ab \in \mathbb{N}$, onde a e b são fatores e P é o produto.

d) Divisão

Na divisão, os números são chamados de dividendo (a parte que está sendo dividida) e divisor (a quantia de vezes que esta parte está sendo dividida), a operação é a divisão, e o resultado é o quociente.

Sendo $a, b \in \mathbb{N}$ e $b \neq 0$, a divisão aproximada de a por b , consiste em encontrar dois números $q, r \in \mathbb{N}$, tais que $a = bq + r$.

Exemplo:

Existe na divisão, o que se pode chamar de resto. Isto é, quando uma divisão não é exata irá sempre sobrar um determinado valor, veja no exemplo a seguir:

$$\begin{array}{r} 843 / 5 = 168 \\ 34 \\ 43 \\ 3 \rightarrow \text{resto } (r) \end{array}$$

Observações:

- 1) O resto é sempre menor que o divisor ($r < b$);
- 2) O maior resto possível é uma unidade menor que o divisor, ou seja, $(b - 1)$;

3) Se o resto é zero, dizemos que a divisão é exata. Nesse caso, temos que $a = bq$ e dizemos que a é múltiplo de b ou que b é divisor de a .

Exemplo:

Numa divisão de números naturais, o divisor é 17 e o resto é o quadrado do quociente. Qual o valor da soma de todos os possíveis valores do quociente?

Solução:

Temos que

$$\begin{array}{r} a \\ q^2 \\ \hline q \end{array} \quad \boxed{17}$$

Como $q^2 < 17$, temos que os possíveis valores naturais de q são $1, 2, 3, 4$. Dessa forma a sua soma é $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

Observações: Casos particulares da multiplicação e divisão

Multiplicação

Entenda-se \mathbb{N} como Número qualquer

$$\mathbb{N} * 1 = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} * 0 = 0$$

Divisão

$$\mathbb{N} / 1 = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} / \mathbb{N} = 1$$

$$0 / \mathbb{N} = 0 (\mathbb{N} \neq 0)$$

$$\mathbb{N} / 0 = \text{Não existe!!!!}$$

2.2 $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Inteiros}$

O conjunto dos números inteiros relativos é a reunião dos números negativos, o zero e os números positivos. Ou, o conjunto dos números naturais e seus opostos – negativos.

Não há números inteiros em fração ou decimal.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Observação: O número zero não é positivo nem negativo.

Subconjuntos:

Conjuntos dos inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N}$

Conjuntos dos inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$

Conjuntos dos inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

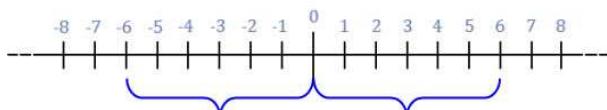
Conjuntos dos inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Conjuntos dos inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4, \dots\}$



a) Valor absoluto ou Módulo Números opositos ou simétricos

Na reta numerada, os números opositos estão a uma mesma distância do zero.



Exemplos:

O oposto de 1 é -1.

O oposto de 6 é -6.

b) Valor absoluto ou Módulo

Representa a distância de um número até o zero (ou origem). Sendo assim, o módulo, por representar distância, é sempre positivo e representado por $| |$. Indica, também, o valor absoluto que esse número possui.

Exemplos:

$$|-9| = 9$$

$$|-2| = 2$$

$$|0| = 0$$

$$|7| = 7$$

c) Operações com números inteiros:

A) Soma e subtração algébrica

Sinais iguais: Somam-se os valores absolutos e dá-se o sinal comum.

Sinais diferentes: Subtraem-se os valores absolutos e dá-se o sinal do maior.

Exemplos:

$$a) 2 + 4 = 6$$

$$b) -2 - 4 = -6$$

$$c) 5 - 3 = 2$$

$$d) -5 + 3 = -2$$

$$e) 2 + 3 - 1 - 2 = 5 - 3 = 2$$

$$f) -1 - 3 + 2 - 4 + 21 - 5 - 32 = 23 - 45 = -22$$

$$g) (-15) + (-6) = -15 - 6 = -21$$

Na adição de dois números inteiros com sinais contrários, subtrai-se o de menor valor absoluto do de maior valor absoluto e conserva-se o sinal do de maior valor absoluto.

B) Multiplicação e divisão algébrica

Sinais iguais → resposta positiva

Sinais diferentes → resposta negativa

Multiplicação	Divisão
$(+) * (+) = (+)$	$(+) : (+) = (+)$
$(-) * (-) = (+)$	$(-) : (-) = (+)$
$(+) * (-) = (-)$	$(+) : (-) = (-)$

Exemplos:

$$a) 12 * 3 = 36$$

$$d) -2 * 3 = -6$$

$$g) \frac{(-20)}{(-5)} = 4$$

$$b) (-12) * (-3) = 36$$

$$e) \frac{4}{2} = 2$$

$$h) \frac{(-20)}{5} = -4$$

2.3 Expressões numéricas

Para resolver expressões numéricas realizamos primeiro as operações de multiplicação e divisão, na ordem em que estas estiverem indicadas, e depois adições e subtrações.

Em expressões que aparecem sinais de reunião: (): parênteses, []: colchetes e { }: chaves, efetuam-se as operações eliminando-se, na ordem: parênteses, colchetes e chaves, isto é, dos sinais interiores para os exteriores.

Quando à frente do sinal da reunião eliminado estiver o sinal negativo, trocam-se todos os sinais dos termos internos.

Exemplos:

$$a) 2 + [2 - (3+2) -1] = 2 + [2 - (5) -1] = 2 + [2 - 5 -1] = 2 + [2 - 6] = 2 + [-4] = 2 - 4 = -2$$

$$b) 2 + \{3 - [1 + (2 - 5 + 4)] + 8\} = 2 + \{3 - [1 + (-3 + 4)] + 8\} = 2 + \{3 - [1 + (1)] + 8\} = 2 + \{3 - [2] + 8\} = 2 + \{3 - 2 + 8\} = 2 + \{9\} = 11$$

$$c) \{2 - [3 * 4 : 2 - 2 (3 - 1)]\} + 1 = \{2 - [12 : 2 - 2 (2)]\} + 1 = \{2 - [12 : 2 - 2 (2)]\} + 1 = \{2 - [6 - 4]\} + 1 = \{2 - [2]\} + 1 = \{2 - 2\} + 1 = \{0\} + 1 = 1$$

3. POTÊNCIAS

Definição: Potência de grau n de um número A é o produto de n fatores iguais a A .

$$A^n = A * A * A * \dots * A \text{ (n vezes)}$$

A é a base da potência e n é o expoente da potência, que determina seu grau.

$$\text{Assim: } 2^3 = 2 * 2 * 2 = 8 \therefore 2^3 = 8$$

$$(-1)^3 = (-1) * (-1) * (-1) = 1 \therefore (-1)^3 = -1$$

Casos Particulares:

$$a) \text{A potência de expoente 1 (1º grau) é igual à base: } A^1 = A \quad 2^1 = 2$$

$$b) \text{Toda potência de 1 é igual a 1: } 1^2 = 1 \quad 1^3 = 1$$

$$c) \text{Toda potência de 0 é igual a 0: } 0^2 = 0 \quad 0^3 = 0$$

$$d) \text{Toda potência de expoente par é positiva:}$$



$$\begin{array}{l} (-2)^4 = 16 \\ \quad 9 \qquad \quad 3^2 = 9 \end{array}$$

$$(-3)^2 =$$

$$\begin{array}{l} b) \quad 2^{3^4} = 2^{(3^4)} = 2^{81} \\ c) \end{array}$$

Esse exemplo nos leva a concluir que, em geral, $a^{n^m} \neq (a^n)^m$.

- e) Toda potência de expoente ímpar tem o sinal da base:

$$\begin{array}{ll} 3^3 = 27 & (-3)^3 = -27 \\ 2^5 = 32 & (-2)^5 = -32 \end{array}$$

Propriedades:

a) Produto de potências de mesma base

Mantém-se a base comum e soma-se os expoentes.

Realmente: $2^3 * 2^4 = \underbrace{2 * 2 * 2}_{3 \text{ vezes}} * \underbrace{2 * 2}_{2 \text{ vezes}} = 2^{3+4} = 2^7$

Exemplo:

$$5^2 * 5^7 = 5^9 = 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 = 1\ 953\ 125$$

b) Divisão de potências de mesma base

Mantém-se a base comum e diminuem-se os expoentes.

Realmente: $\frac{5^6}{5^4} = \frac{\overbrace{5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5}^{6 \text{ vezes}}}{\overbrace{5 * 5 * 5 * 5}^{4 \text{ vezes}}} = 5^{6-4} = 5^2$

$$\text{Exemplo: } 3^7 : 3^3 = 3^4 = 3 * 3 * 3 * 3 = 81$$

c) Potência de potência de mesmo grau (semelhantes)

Multiplicam-se as bases e conserva-se o expoente comum.

$$\text{Realmente: } 2^2 * 7^2 = 2 * 2 * 7 * 7 = (2 * 7)^2$$

$$\text{Exemplo: } 3^3 * 5^3 = 3 * 3 * 3 * 5 * 5 * 5 = (3 * 5)^3 = 15^3 = 3\ 375$$

d) Divisão de potências de mesmo grau (semelhantes)

Dividem-se as bases e conserva-se o expoente comum.

$$\text{Realmente: } \frac{2^2}{7^2} = \frac{2 * 2}{7 * 7} = \frac{2}{7} * \frac{2}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)^2$$

$$\text{Exemplo: } 8^3 : 2^3 = 4^3 = 64$$

e) Potenciação de potência

Eleva-se a base ao produto dos expoentes.

$$\text{Realmente: } (2^3)^4 = 2^{3*4} = 2^{12}$$

$$\text{Exemplo: } (3^5)^2 = 3^{10} = 59\ 049$$

Observação:

$$a^{n^m} = a^{(n^m)}$$

Exemplo:

$$a) \quad (2^3)^4 = 2^{3*4} = 2^{12}$$

Realmente: $\begin{cases} a^4 : a^4 = a^{4-4} = a^0 \\ a^4 : a^4 = 1 \end{cases} \quad a^0 = 1$

$$\text{Exemplo: } (-5)^0 = 1$$

Observação:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0.$$

Logo $a^0 = 1$, para $a \neq 0$.

g) Exponente negativo

Qualquer número diferente de zero, elevado a expoente negativo é igual a uma fração cujo numerador é a unidade e cujo denominador é a mesma base da potência elevada ao mesmo expoente com o sinal positivo.

Realmente: $\begin{cases} \frac{2^3}{2^7} = \frac{2^3}{2^3 * 2^4} = \frac{1}{2^4} \\ \frac{2^3}{2^7} = 2^{3-7} = 2^{-4} \end{cases}$

$$\text{Exemplo: } 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 * 5} = \frac{1}{25}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

para todo $a \neq 0$

Observação:

Potências de 10

Efetuam-se as potências de 10 escrevendo à direita da unidade tantos zeros quantas forem as unidades do expoente.

Exemplos:

$$a) \quad 10^2 = 100$$

$$b) \quad 10^7 = 10\ 000\ 000$$

$$c) \quad 200 = 2 * 100 = 2 * 10^2$$

$$d) \quad 4000 = 4 * 10^3$$

$$e) \quad 300\ 000 = 3 * 10^5$$

$$f) \quad 3 * 10^8 = 300\ 000\ 000$$

h) Sinal da Base

Observe os seguintes exemplos

- 1) $(3)^2 = 9$: Se a base for positiva o resultado é sempre positivo
- 2) $(-3)^2 = 9$: Se a base for negativa e o expoente par, o resultado será positivo.



- 3) $(-3)^3 = 27$: Se a base for negativa e o expoente ímpar, o resultado será negativo.

3.1 Números Primos e Compostos

Números Primos: São aqueles números divisíveis somente por eles mesmos e por 1. Ou seja, admite apenas dois divisores.

Exemplos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, outros.

Observação:

O número 1, por definição, não é primo.

O número 2 é o único número primo par.

Número Composto: É todo número que não é primo, ou em outras palavras, possui mais de dois divisores.

Exemplos: 12, 15, 28, 36, 60, 420, outros

1) Critérios de divisibilidade

Divisibilidade por 2:

Um número é divisível por 2 quando termina em 0, 2, 4, 6 ou 8, isto é, quando é par.

Exemplo: 314 é divisível por 2 (termina em 4)

Divisibilidade por 3:

Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos é um número divisível por 3.

Exemplo: 627 é divisível por 3, porque a soma $6+2+7 = 15$, e 15 é divisível por 3.

Divisibilidade por 4:

Um número é divisível por 4 quando termina em dois zeros ou quando o número formado pelos dois últimos algarismos da direita for divisível por 4.

Exemplos:

1.600 é divisível por 4 (termina em dois zeros).

564 é divisível por 4 (64 é divisível por 4).

Divisibilidade por 5:

Um número é divisível por 2 quando termina em 0, ou 5.

Exemplos:

1.230 é divisível por 5 (termina em 0).

4.935 é divisível por 5 (termina em 5).

Divisibilidade por 6:

Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3, ao mesmo tempo.

Exemplo: 912 é divisível por 6, porque é divisível por 2 e por 3.

Divisibilidade por 8:

Um número é divisível por 8 quando termina em três zeros ou quando o número formado pelos três últimos algarismos da direita for divisível por 8.

Exemplos:

2.000 é divisível por 8 (termina em três zeros)
1.672 é divisível por 8

Divisibilidade por 9:

Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos forma um número divisível por 9.

Exemplo: 648 é divisível por 9, porque a soma $6+4+8 = 18$ é divisível por 9.

Divisibilidade por 10:

Um número é divisível por 10, quando termina em zero.

Exemplo: 1.320 é divisível por 10 (termina em 0).

Divisibilidade por 11:

Um número é divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par é divisível por 11.

O algarismo das unidades de 1^a ordem, o das dezenas de 2^a ordem, o das centenas de 3^a ordem, e assim sucessivamente.

Exemplos:

1) 87549

Si (soma das ordens ímpares) = $9 + 5 + 8 = 22$

Sp (soma das ordens pares) = $4 + 7 = 11$

Si – Sp = $22 - 11$

Como 11 é divisível por 11, então o número 87549 é divisível por 11

2) 439087

Si (soma das ordens ímpares) = $7 + 0 + 3 = 10$

Sp (soma das ordens pares) = $8 + 9 + 4 = 21$

Si – Sp = $10 - 21$

Como a subtração não pode ser realizada, acrescenta-se o menor múltiplo de 11 (diferente de zero) ao minuendo, para que a subtração possa ser realizada: $10 + 11 = 21$. Então temos a subtração $21 - 21 = 0$.

Como zero é divisível por 11, o número 439087 é divisível por 11.

Divisibilidade por 12:

Um número é divisível por 12 quando é divisível por 3 e 4.

Exemplo: 720 é divisível por 12, porque é divisível por 3 (soma = 9) e por 4 (dois últimos algarismos, 20)

Divisibilidade por 15:

Um número é divisível por 15 quando é divisível por 3 e 5.

Exemplo: 105 é divisível por 15, porque é divisível por 3 (soma = 6) e por 5 (termina em 5)

Divisibilidade por 25:

Um número é divisível por 25 quando os dois algarismos finais forem 00, 25, 50 ou 75.

Exemplos: 200, 525, 850 e 975 são divisíveis por 25.



3.2 Decomposição de um número em um produto de fatores primos

A decomposição de um número em um produto de fatores primos é feita por meio do dispositivo prático que será mostrado nos exemplos a seguir.

Exemplos:

$$\begin{array}{r|l}
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & / 30
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & / 21
 \end{array}
 \quad
 21 = 3 * 7$$

$$30 = 2 * 3 * 5$$

3.3 Mínimo múltiplo comum (m.m.c.)

O mínimo múltiplo comum a vários números é o menor número divisível por todos eles.

Exemplo:

- a) Calcular o m.m.c. entre 12, 16 e 45

$$\begin{array}{r|l}
 12, 16, 45 & 2 \\
 6, 8, 45 & 2 \\
 3, 4, 45 & 2 \\
 3, 2, 45 & 2 \\
 3, 1, 45 & 3 \\
 1, 1, 15 & 3 \\
 1, 1, 5 & 5 \\
 1, 1, 1 & / 720
 \end{array}
 \quad
 \text{O m.m.c. entre } 12, 16 \text{ e } 45 \text{ é } 720$$

01) Confirme os resultados abaixo.

- a) m.m.c. (4, 3) = 12
b) m.m.c. (3, 5, 8) = 120
c) m.m.c. (8, 4) = 8
d) m.m.c. (60, 15, 20, 12) = 60

02) Determinar o m.m.c de 120 e 80

$$\begin{array}{r|l}
 120, 80 & 2 \\
 60, 40 & 2 \\
 30, 20 & 2 \\
 15, 10 & 2 \\
 15, 5 & 3 \\
 5, 5 & 3 \\
 1, 1 & / 2^4 * 3 * 5 = 240
 \end{array}
 \quad
 \text{O m.m.c. entre } 120, 80 \text{ é } 240$$

$$\begin{aligned}
 12 &= 2^2 * 3 \\
 18 &= 2 * 3^2 \\
 36 &= 2^2 * 3^2
 \end{aligned}$$

Agora tomemos os fatores comuns com os menores expoentes apresentados acima:
m.d.c.(12, 18, 36) = $2 * 3 = 6$.

Quando o m.d.c. entre dois números é igual a 1, dizemos que eles são relativamente primos.

Exemplo: 5 e 9 são relativamente primos, pois $5 = 5 \cdot 1$ e $9 = 3^2 \cdot 1$, sendo 1 o único fator comum a estes números.

Confirme os resultados abaixo:

- b) m.m.c. (9, 6) = 3
c) m.m.c. (36, 45) = 9
d) m.m.c. (12, 64) = 4
e) m.m.c. (20, 35, 45) = 5

3.5 Q → Racionais:

Chama-se número racional todo número que pode ser escrito em forma de fração. São todos os números na forma decimal exata, periódica ou na forma de fração. Ou também, o conjunto formado pelos números inteiros e pelos números fracionários.

$$Q = \{ \dots, -\frac{17}{6}, -\frac{5}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \dots \}$$

Exemplos:

Números fracionários positivos: $\{\frac{5}{3}, \frac{1}{5}, \frac{7}{2}\}$

Números fracionários negativos: $\{-\frac{5}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{2}\}$

Números decimais na forma exata: $\{1,2 ; 3,654 ; 0,00005 ; 105,27272\}$;

Números decimais na forma periódica:

$$2,333333\dots = 2,\bar{3}$$

$$3,02222\dots = 3,0\bar{2}$$

$$10,23232323\dots = 10,\overline{23}$$

As raízes exatas:

$$\{\sqrt{9} = 3 = \frac{3}{1}\}$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 = \frac{-2}{1}$$

3.4 Máximo Divisor Comum (m.d.c.)

O m.d.c. a vários números é o maior número que os divide.

Exemplo: Encontrar o m.d.c. entre 12, 18 e 36.

Fatorando cada um dos números em fatores primos, temos:



4 OPERAÇÕES ENTRE FRAÇÕES

4.1 Redução de frações ao mesmo denominador

1) Adição e Subtração

Caso A) Mesmo denominador: Conserva-se o denominador e efetua-se a operação com os numeradores.

Exemplo:

$$\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{1}{9} - \frac{5}{9} = -\frac{4}{9}$$

Caso B) Denominadores diferentes: Reduz-se ao mesmo denominador e efetua-se a operação com os numeradores.

Exemplo:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\text{MMC}(3,2)=6$$

$$\frac{1}{4} - \frac{7}{3} = \frac{3-28}{12} = -\frac{25}{12}$$

$$\text{MMC}(4,3)=12$$

2) Multiplicação

Multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad b \neq 0 \text{ e } d \neq 0.$$

Exemplos:

$$\frac{8}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8.4}{3.3} = \frac{32}{9}.$$

$$\frac{-4}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{-4.6}{2.5} = -\frac{24}{10}$$

3) Divisão

Multiplica-se a primeira fração pelo inverso da segunda.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, d \neq 0 \text{ e } c \neq 0.$$

Exemplos:

$$a) \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} * \frac{3}{1} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$b) \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{2}{3}\right) * \frac{2}{1} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$$

$$c) \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$d) \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{3}} = \frac{5}{1} * \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

$$e) \frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{4}} = \frac{8}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{40 \div 4}{12 \div 4} = \frac{10}{3}$$

Observação: Podemos representar o inverso de uma fração através da potência com expoente -1:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

5 NÚMEROS DECIMais

Observe o resultado da divisão de 125 por 4:

$$\begin{array}{r} 125 \\ 05 \\ \hline 31,25 \\ 10 \\ 20 \\ 0 \end{array}$$

O número 31,25 é um exemplo de número decimal. Nos números decimais a vírgula separa a parte inteira da parte decimal:

31 – parte inteira

,25 – parte decimal

E, para transformar uma fração em um número decimal, basta efetuar a divisão entre numerador e denominador.

Transformação de um número decimal em fração decimal:

- 1) O numerador é o número decimal sem a vírgula
- 2) O denominador é o número 1 acompanhado de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte decimal.

$$5,36 = \frac{536}{100}$$

$$0,65 = \frac{65}{100}$$

$$0,047 = \frac{47}{1000}$$



5.1 Operações com números decimais

1) Adição

Na adição os números são chamados de parcelas, sendo a operação aditiva, e o resultado é a soma.

Exemplos:

$$4,32 + 2,3 + 1,429 = 8,049$$

$$\begin{array}{r} 4,32 \\ 2,3 \\ + 1,429 \\ \hline 8,049 \end{array}$$

Observe que as parcelas são dispostas de modo que se tenha vírgula sobre vírgula

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} &= \frac{15+40+12}{60} = \frac{67}{60} \cong 1,1166 & \text{ou} & \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \\ \frac{2,25+6+1,8}{9} &= \frac{10,05}{9} \cong 1,1166 \end{aligned}$$

2) Subtração

Na subtração os números são chamados de subtraendo, sendo a operação a subtração, e o resultado é o minuendo.

Exemplos: As regras para a subtração são as mesmas da adição, portanto podemos utilizar os mesmos exemplos apenas alterando a operação. Numa subtração do tipo 4-7 temos que o minuendo é menor que o subtraendo; sendo assim a diferença será negativa e igual a -3.

3) Multiplicação

Na multiplicação os números são chamados de fatores, sendo a operação multiplicativa, e o resultado é o produto.

Pode-se representar a multiplicação por: *, x ou .

Exemplo:

$$7,32 * 12,5 = 91,500$$

$$\begin{array}{r} 7,32 \\ \times 12,5 \\ \hline 3660 \\ 1464 \\ + 732 \\ \hline 91,500 \end{array}$$

Na multiplicação conta-se operando da esquerda para a direita. Quando a multiplicação envolver números decimais (como no exemplo ao lado), soma-se a quantidade de casas após a vírgula.

Na multiplicação de frações multiplica-se divisor com divisor, dividendo com dividendo (ou simplesmente, o de cima pelo de cima e o de baixo pelo de baixo).

$$\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * 8 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \cong 2,6$$

4) Divisão

Na divisão, os números são chamados de dividendo (a parte que está sendo dividida) e divisor (a quantia de

vezes que esta parte está sendo dividida), a operação é a divisão, e o resultado é o quociente.

Exemplo:

Existe na divisão, o que se pode chamar de resto. Isto é, quando uma divisão não é exata irá sempre sobrar um determinado valor, veja no exemplo a seguir:

$$843 / 5 = 168$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 43 \\ 3 \rightarrow \text{resto (r)} \end{array}$$

Se o resto for igual a zero a divisão é chamada exata.

5) Potência de números decimais

Todo número decimal equivalente a um produto do qual um fator é o número escrito como inteiro, e outro é uma potência de dez com expoente negativo, com tantas unidades no expoente quantas são as ordens decimais.

$$\text{Realmente: } 0,0025 = \frac{25}{10\,000} = \frac{25}{10^4} = 25 * 10^{-4}$$

Exemplos:

- a) $0,001 = 10^{-3}$
- b) $0,002 = 2 * 10^{-3}$
- c) $0,00008 = 8 * 10^{-5}$
- d) $1,255 = 1255 * 10^{-3}$
- e) $2 * 10^{-3} = 0,002$

6) Divisão por potências de 10:

Para dividir um número decimal qualquer por uma potência de 10, basta deslocar a vírgula para a esquerda um número de casas decimais equivalente ao expoente da potência.

Exemplos:

$$\begin{aligned} 379,4 \div 10^3 &= 0,3794 \\ 4251 \div 10^2 &= 42,51 \end{aligned}$$

Um número qualquer pode ser expresso como o produto de um número compreendido entre 1 e 10, por uma potência de 10 adequada.

- 1) Conta-se o número de casas decimais que a vírgula deve ser deslocada para a esquerda; este número nos fornece o expoente positivo da potência de base 10.

Exemplo:

$$43.300.000 = 4,33 \times 10^7$$

De zero até entre 4 e 3, contamos sete casas.

- 2) Conta-se o número de casas decimais que a vírgula deve ser deslocada para a direita; este número nos fornece o expoente negativo da potência de base 10.



Exemplo:

$$0,000008 = 8,0 \times 10^{-6}$$

Da vírgula até depois de oito, contamos 6 casas.

6 PORCENTAGEM

A porcentagem é toda fração com denominador igual a 100. Dessa forma, o número $\frac{x}{100}$ pode ser escrito como $x\%$, onde o símbolo % indica a divisão por 100.

Observe ainda que todo número decimal pode ser escrito como uma fração centesimal.

Exemplos:

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25$$

$$125\% = \frac{125}{100} = 1,25$$

$$0,25\% = \frac{0,25}{100} = 0,0025$$

Exercícios:

- 01) Determine o valor das seguintes expressões:
 a) 5% de 400
 b) 12% de 1500
 c) 0,3% de 88000

Solução:

$$\text{a)} 5\% \text{ de } 400 = \frac{5}{100} \cdot 400 = 20$$

$$\text{b)} 12\% \text{ de } 1500 = \frac{12}{100} \cdot 1500 = 180$$

$$\text{c)} 0,3\% \text{ de } 88000 = 0,003 \cdot 88000 = 264$$

7 I → IRRACIONAIS

Um número será irracional quando não se pode traduzir por uma fração do tipo a/b inteiros. Dito de outra maneira : Um número real diz-se irracional quando não pode exprimir-se por uma dízima finita ou periódica. Ou então, são todas as decimais não exatas e não periódicas.

$$I = \{\dots, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \sqrt{3}, \pi, \frac{\pi}{6}, \dots\}$$

- 1) $\sqrt{2}$ é um número irracional por que não pode ser expresso como uma fração cujos termos sejam números inteiros. Entretanto, podemos aproximar $\sqrt{2}$ com o número de casas decimais que desejarmos. Exemplificando, $\sqrt{2} \approx 1,4142$, com a aproximação de um décimo de milésimo. Essas aproximações se tornam números racionais
- 2) π também é irracional (π é $3,1415926535\dots$)

Expressões irracionais:

Uma expressão irracional é um polinômio que contém um ou mais números irracionais.

Exemplos:

$$\sqrt{5} + 3,2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[5]{12} - 3$$

$$\sqrt[5]{\sqrt{12} - 31}$$

8 R → REAIS

É a união dos conjuntos numéricos citados acima. Portanto, todo número, seja N, Z, Q ou I é um número R (real).

Observação:

$$\text{Racionais} \cup \text{Irracionais} = \text{Reais}$$

$$N \subset Z \subset Q \subset R \text{ e irracionais} \subset R$$

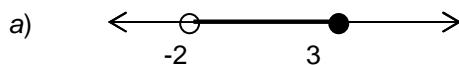
Intervalos

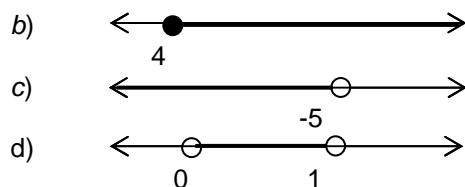
Os intervalos são subconjuntos de números reais, representados na reta numérica, geometricamente, ou representados algebraicamente, podendo ser abertos ou fechados.

Intervalos Finitos	Representação Gráfica	Notação de Conjuntos	Notação de intervalo
Intervalo aberto		$\{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	$]a, b[$
Intervalo fechado		$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$
Intervalo semi-aberto à direita		$\{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	$[a, b[$
Intervalo semi-aberto à esquerda		$\{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	$]a, b]$
Intervalos Infinitos	Representação Gráfica	Notação de Conjuntos	Notação de intervalo
Intervalo fechado indo para o infinito positivo		$\{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$	$[a, \infty[$
Intervalo fechado indo para o infinito negativo		$\{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$	$]-\infty, a]$
Intervalo aberto indo para o infinito positivo		$\{x \in \mathbb{R} / x > a\}$	$]a, \infty[$
Intervalo aberto indo para o infinito negativo		$\{x \in \mathbb{R} / x < a\}$	$]-\infty, a[$

Exercícios:

- 1) Escreva na forma de intervalo cada representação geométrica dada abaixo.





2) Dados os conjuntos abaixo, expresse-os na forma de intervalo e na forma geométrica:

- a) $\{x \in \mathbb{R} / 6 \leq x \leq 10\}$
- b) $\{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 5\}$
- c) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$
- d) $\{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$

3) Dados os intervalos abaixo, expresse-os na forma geométrica:

- a) $[\frac{1}{2}, +\infty)$
- b) $(0, 7]$
- c) $(-\infty, 3)$
- d) $[-6, +\infty)$

Operações com intervalos: União, Intersecção e diferença

Como intervalos são conjuntos é natural que as operações mencionadas possam ser realizadas. E, trata-se de um procedimento muito comum na resolução de alguns problemas.

E a maneira mais fácil e intuitiva de realizar essas operações é através da representação gráfica dos intervalos envolvidos.

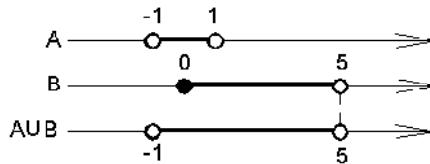
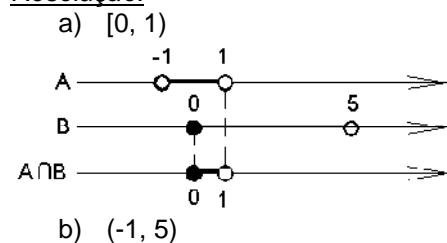
Para encontrarmos um intervalo primeiramente, marcamos todos os pontos que são extremos ou origens dos intervalos em uma mesma reta. Em seguida, abaixo dessa reta, traçamos os intervalos que representam graficamente os conjuntos dados. E, por fim, é só utilizar a definição de união, intersecção e diferença para determinar os trechos. Vamos à um exemplo prático de como efetuar tais operações.

Exemplos:

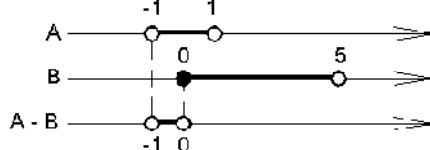
Dados $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 1\}$ e $B = [0, 5]$, determine:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cup B$
- c) $A - B$
- d) $B - A$

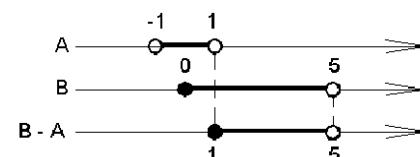
Resolução:



c) $(-1, 0)$



d) $[1, 5)$



Exercícios

1) Determine $A \cap B$, quando:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 4\}$
- b) $A = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x < 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 3\}$
- c) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$

2) Determine $A \cup B$, quando:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 5\}$
- b) $A = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x \leq 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 3\}$
- c) $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$

3) Dados $A = [2, 7]$, $B = [-1, 5]$ e $E = [3, 9]$, calcule:

- a) $A - B$
- b) $B - A$
- c) $A - E$
- d) $E - B$

4) Sejam os conjuntos $A = [-1, 6]$; $B = [-4, 2]$; $E = [-2, 4]$, calcule:

- a) $(B \cup E) - A$
- b) $E - (A \cap B)$

5) Considere os intervalos: $A = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq 6\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x \leq 3\}$ e $D = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 5\}$, determine:

- a) $A \cap B$
- b) $A \cup B$
- c) $C \cap D$
- d) $C \cup D$

6) Verifique se $A \subset B$ ou $A \supset B$ nos seguintes casos:

- a) $A = \{5, 7, 11\}$ e $B = \{\text{números primos}\}$

- b) $A = \{x \in \mathbb{N} / x+2 < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x < 4\}$

- c) $A = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 11x + 18 = 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\}$



7) Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} / 2 < x < 7\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} / x < -1\}$ e $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < 5\}$, determine:

- a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $C \cap D$ d) $C \cup D$

8) Resolva a equação $5x^2 - 12x + 4 = 0$, sendo:

- a) $U = \mathbb{Z}$ b) $U = \mathbb{Q}$ c) $U = \mathbb{R}$

9) Considere os conjuntos:

\mathbb{N} , dos números naturais;
 \mathbb{Q} , dos números racionais;
 \mathbb{Q}_+ , dos números racionais não-negativos;
 \mathbb{R} , dos números reais.

O que não expressa:

- a) a quantidade de habitantes de uma cidade é um elemento de \mathbb{Q}_+ , mas não de \mathbb{N} .
b) a medida da altura de uma pessoa é um elemento de \mathbb{N} .
c) a velocidade média de um veículo é um elemento de \mathbb{Q} , mas não que \mathbb{Q}_+ .
d) o valor pago, em reais, por um sorvete é um elemento de \mathbb{Q}_+ .
e) a medida do lado de um triângulo é um elemento de \mathbb{Q} .

10) Se ao dobro de um número real somarmos 5, multiplicarmos esse resultado por 3, subtrairmos 15 e dividirmos pelo próprio número, podemos afirmar que o resultado obtido:

- a) pode ser fracionário.
b) pode ser negativo.
c) é sempre 2.
d) é sempre 6.
e) depende do número considerado.

Gabarito

- 1) a) $\{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 1\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$
2) a) $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x < 5\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$
3) a) $[5, 7]$ b) $[-1, 2]$ c) $[2, 3]$ d) $]5, 9[$
4) a) $] -4, -1[$ b) $] -2, -1[$ c) $]2, 4[$
5) a) $] -2, 4]$ b) $[-2, 6]$ c) $[2, 3]$
d) $]1, 5[$
6) a) $A \subset B$ b) $A \subset B$ c) $A \subset B$

- 7) a) $]2, 5[$ b) $]1, 7[$
c) $] -2, -1[$ d) \mathbb{R}

- 8) a) $S = \{2\}$ b) $S = \{2, \frac{2}{5}\}$ c) $S = \{2, \frac{2}{5}\}$

- 9) d

- 10) d

9 RADICAIS

Definição: Denomina-se raiz de índice n (ou raiz n -ésima) de A , ao número ou expressão que, elevado à potência n reproduz A .

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

Observações:

Representa-se a raiz pelo símbolo $\sqrt[n]{ }$
As raízes em que o radicando seja negativo e o índice par não são reais.

Exemplos:

- a) $\sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 4 = 2^2$
b) $\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow -8 = (-2)^3$
c) $\sqrt{-25} = \text{NÃO EXISTE EM R}$

Propriedades

É possível retirar um fator do radical, bastante que se divida o expoente do radicando pelo índice do radical.

Exemplos:

- a) $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$
b) $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$
c) $\sqrt[4]{3^8 \cdot 5^4 \cdot 2} = 3^2 \cdot 5\sqrt[4]{2}$
d) $\sqrt[4]{3^8} = 3^{8:4} = 3^2$

Reciprocamente, para introduzir um fator no radical, multiplica-se o expoente do fator pelo índice do radical. Assim:

$$3\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 2}$$

1) Adição e subtração de radicais semelhantes

Radicais de mesmo índice e mesmo radicando são semelhantes. Na adição e subtração de radicais semelhantes, operam-se os coeficientes e conserva-se o radical.

Exemplos:

- a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 10\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$
b) $3\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} = 9\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$



2) Multiplicação e divisão de radicais de mesmo índice

Multiplicam-se (dividem-se) os radicandos e dá-se ao produto (quociente) o índice comum.

Exemplos:

$$a) \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$$

$$b) \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$$

$$c) \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{30}$$

$$d) \frac{\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\frac{15}{2}}$$

3) Potenciação de radicais

Eleva-se o radicando à potência indicada e conserva-se o índice.

Exemplos:

$$a) (\sqrt[4]{3})^3 = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$$

$$b) (\sqrt[5]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[5]{(2^2 \cdot 3)^2} = \sqrt[5]{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt[5]{16 \cdot 9} = \sqrt[5]{144}$$

4) Radiciação de radicais

Multiplicam-se os índices e conserva-se o radicando.

Exemplos:

$$a) \sqrt[2]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[2 \cdot 3]{3} = \sqrt[6]{3}$$

$$b) \sqrt[3]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[3 \cdot 4]{3} = \sqrt[12]{3}$$

5) Expoente fracionário

Uma potência com expoente fracionário pode ser convertida numa raiz, cujo radicando é a base, o índice é o denominador do expoente, sendo o numerador o expoente do radicando.

Exemplos:

$$a) a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$b) 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$c) 2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$d) \sqrt[4]{6^3} = 6^{\frac{3}{4}}$$

$$e) \sqrt{5} = 5^{1/2}$$

6) Racionalização de denominadores

1º Caso: O denominador é um radical do 2º grau. Neste caso multiplica-se pelo próprio radical o numerador e o denominador da fração.

Exemplos:

$$a) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$c) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d) \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{5\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{12}}{5 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{12}}{30} = \frac{\sqrt{12}}{15}$$

2º Caso: O denominador é uma soma ou diferença de dois termos em que um deles, ou ambos, são radicais do 2º grau. Neste caso multiplica-se o numerador e o denominador pela expressão conjugada do denominador.

OBS: A expressão conjugada de $a + b$ é $a - b$.

Na racionalização aparecerá no denominador um produto do tipo: $(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$

Assim:

$$(5 + 3) * (5 - 3) = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

Exemplos:

$$a) \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{1 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$$

$$b) \frac{5}{2 - \sqrt{3}} = \frac{5}{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})} = \frac{5 \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{5 \cdot (2 + \sqrt{3})}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{10 + 5\sqrt{3}}{4 - 3} = \frac{10 + 5\sqrt{3}}{1} = 10 + 5\sqrt{3}$$

10 PRODUTOS NOTÁVEIS

Há certos produtos de polinômios, que, por sua importância, devem ser conhecidos desde logo. Vejamos alguns deles:

1) Quadrado da soma de dois termos (Ou diferença):

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo.

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Exemplos:

$$a) (a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot 3 \cdot a + 3^2 = a^2 + 6a + 9$$

$$b) (5x - b)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot b + b^2 = 25x^2 - 10xb + b^2$$

2) Produto da soma de dois termos por sua diferença:

O produto da soma de dois termos por sua diferença é igual ao quadrado do primeiro menos o quadrado do segundo.

$$(x - a)(x + a) = x^2 - a^2$$

Exemplos:

$$a) (\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = ((\sqrt{2})^2 - x^2) = 2 - x^2$$

$$b) (a + b)(a - b) = (a)^2 - (b)^2$$



3) Cubo da Soma (ou diferença)

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Exemplos:

a) $(a + 2)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot 2 + 3a \cdot 2^2 + 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

b) $(\sqrt[3]{2} - 1)^3 = (\sqrt[3]{2})^3 - 3(\sqrt[3]{2})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt[3]{2} \cdot 1^2 - 1^3 = 2 - 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} - 1 = 1 - 3\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}$

4) Fatoração

Fatorar um polinômio é escrevê-lo sob a forma de um produto de fatores de grau menor. Para fatorar um polinômio, destacaremos alguns casos:

5) Fator comum em evidência

Fator comum dos termos de um polinômio é o monômio cujo coeficiente numérico é o máximo divisor comum dos coeficientes dos termos do polinômio e cuja parte literal é formada pelas letras comuns com os menores expoentes.

Apresentando um fator comum, o polinômio pode ser escrito como o produto de dois fatores: o 1º é o fator comum e o 2º é obtido dividindo-se o polinômio original pelo fator comum.

Exemplos:

a) $ac + bc = c(a + b)$

b) $ax + 2x = x(a + 2)$

c) $a^3b^2 + a^2b^3 = a^2b^2(a - b)$

6) Agrupamento

Consiste em aplicar duas vezes o caso do fator comum em alguns polinômios especiais.

Como por exemplo:

$$ax + ay + bx + by$$

Os dois primeiros termos possuem em comum o fator **a**, os dois últimos termos possuem em comum o fator **b**.

Colocando esses termos em evidência:

$$a.(x+y) + b.(x+y)$$

Este novo polinômio possui o termo $(x+y)$ em comum.

Assim colocando-o em evidência:

$$(x+y).(a+b)$$

Ou seja: $ax + ay + bx + by = (x+y).(a+b)$

Exemplos:

a) $x^2 - 3x + ax - 3a = x(x - 3) + a(x - 3) = (x - 3)(x + a)$

b) $2b^2 + ab^2 + 2c^3 + ac^3 = b^2(2 + a) + c^3(2 + a) = (2 + a)(b^2 + c^3)$

7) Fatoração por diferença de quadrados:

Consiste em transformar as expressões em produtos da soma pela diferença, simplesmente extraindo a raiz quadrada de cada quadrado.

Assim: $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Exemplos:

a) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

b) $16a^2 - 1 = (4a + 1)(4a - 1)$

c) $1 - 16x^4 = (1 - 4x^2)(1 + 4x^2)$

8) Fatoração do trinômio quadrado perfeito:

O trinômio que se obtém quando se eleva um binômio ao quadrado chama-se trinômio quadrado perfeito.

Por exemplo, os trinômios $(a^2 + 2ab + b^2)$ e $(a^2 - 2ab + b^2)$ são quadrados perfeitos porque são obtidos quando se eleva $(a+b)$ e $(a-b)$ ao quadrado, respectivamente.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Assim:

$$4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$\begin{array}{r} \sqrt{4x^2} \quad \sqrt{9y^2} \\ 2x \quad 3y \\ \hline \end{array}$$

$2.2x.3y = 12xy$ » note que é igual ao segundo termo de $4x^2 - 12xy + 9y^2$

Portanto trata-se de um trinômio quadrado perfeito.

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$$
 » forma fatorada

Logo: $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$ » forma fatorada

Exemplos:

a) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2$

b) $25a^4 - 100b^2 = 25(a^4 - 4b^2) = 25(a^2 + 2b)(a^2 - 2b)$

9) Outros casos de fatoração:

1) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$



$$2) x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$3) x^2 + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 2xy = (x + y)^2 - 2xy = (x + y - \sqrt{2xy})(x + y + \sqrt{2xy})$$

11 OPERAÇÕES ALGÉBRICAS

11.1 Expressões algébricas

São indicações de operações envolvendo letras ou letras e números.

Exemplos:

- a) $5ax - 4b$
- b) $ax^2 + bx + c$
- c) $7a^2b$

OBS: No exemplo 3, onde não aparece indicação de soma ou de diferença, temos um monômio em que 7 é o coeficiente numérico e a^2b é a parte literal.

11.2 Operações com expressões algébricas

1) Soma algébrica

Somente é possível somar ou subtrair termos semelhantes (monômios que possuem a mesma parte literal). Para somar ou subtrair termos semelhantes (reduzir termos semelhantes)

repete-se a parte literal e opera-se com os coeficientes.

Exemplo:

$$3x^2y - 4xy^2 + 7xy^2 + 5x^2y = 8x^2y + 3xy^2$$

2) Multiplicação

Multiplica-se cada termo do primeiro fator por todos os termos do segundo fator e reproduzem-se os termos semelhantes.

Exemplo:

$$(3a^2y) * (2ay) = 6a^3y^2$$

3) Divisão

1º Caso: Divisão de monômios: Divide-se o coeficiente numérico do dividendo pelo 1º coeficiente do divisor, e a parte literal do dividendo pela do divisor, observando-se as regras para divisão de potências de mesma base.

2º Caso: Divisão de polinômio por monômio: Divide-se cada termo do dividendo pelo monômio divisor.

Exemplo:

$$(42a^3bx^4) : (7ax^2) = 6a^2bx^2$$

12 EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. A palavra equação tem o prefixo equa, que em latim quer dizer "igual".

Exemplos:

- a) $2x + 8 = 0$
- b) $5x - 4 = 6x + 8$
- c) $3a - b - c = 0$

Chama-se equação de 1º grau de incógnita x , toda equação que, após simplificada, se reduz à forma $ax + b = 0$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$

A solução, também chamada raiz, de uma equação de 1º grau é única e dada por:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

1) Conjunto verdade e conjunto universo de uma equação

Considere o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e a equação $x + 2 = 5$.

Observe que o número 3 do conjunto A , que é denominado **conjunto universo**, é solução da equação, logo, o conjunto $\{3\}$ é o **conjunto verdade** dessa equação.

Daí concluímos que:

Conjunto universo: é o conjunto de todos os valores que a variável pode assumir. Indica-se por **U**.

Conjunto verdade: é o conjunto dos valores de **U**, que tornam verdadeira a equação. Indica-se por **V**.

Observações:

O conjunto verdade é subconjunto do conjunto universo.

Não sendo citado o conjunto universo, devemos considerar $V \subset U$ como conjunto universo o conjunto dos números racionais: **U = Q**

O conjunto verdade é também conhecido por **conjunto solução** e pode ser indicado por **S**.

2) Raizes da equação

Os elementos do conjunto verdade de uma equação são chamados de raízes da equação.

Para verificar se um número é raiz de uma equação, devemos obedecer à seguinte sequência:

- Substituir a incógnita por esse número.
- Determinar o valor de cada membro da equação.
- Verificar a igualdade, sendo uma sentença verdadeira, o número considerado é raiz da equação.



Exemplo:

Resolva a equação $2x - 5 = 1$ sendo $U = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Para $x = -1$, substituindo na equação dada, temos como resultado $-7=1$ – (F)

Para $x = 0$, substituindo na equação dada, temos como resultado $-5=1$ – (F)

Para $x = 1$, substituindo na equação dada, temos como resultado $-3=1$ – (F)

Para $x = 2$, substituindo na equação dada, temos como resultado $-1=1$ – (F)

Resposta: A equação $2x - 5 = 1$ não possui raiz em U , logo $V = \emptyset$.

3) Resolução da equação

Resolver uma equação significa determinar o seu conjunto verdade, dentro do conjunto universo considerado.

Exemplos:

1) Sendo $U = Q$, resolva a equação $-\frac{3x}{4} = \frac{5}{6}$

Solução:

$$MMC(4,6) = 12$$

$$-\frac{9x}{12} = \frac{10}{12}$$

$$-9x = 10 \rightarrow \text{Devemos multiplicar por } -1$$

$$9x = -10$$

$$x = -\frac{10}{9}$$

Resposta: Como $x = -\frac{10}{9} \in Q$, então $V = \left\{-\frac{10}{9}\right\}$.

2) Sendo $U = Q$, resolva a equação $2(x - 2) - 3(1 - x) = 2(x - 4)$.

Solução:

$$2(x - 2) - 3(1 - x) = 2(x - 4)$$

$$2x - 4 - 3 + 3x = 2x - 8$$

$$2x + 3x - 4 - 3 = 2x - 8$$

$$2x + 3x - 2x = -8 + 4 + 3$$

$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

Resposta: Como $x = -\frac{1}{3} \in Q$, então $V = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

3) Sendo $U = Q$, considere a seguinte equação e resolva: $2(6x - 4) = 3(4x - 1)$.

Solução:

$$2(6x - 4) = 3(4x - 1)$$

$$2.6x - 2.4 = 3.4x - 3.1$$

$$12x - 8 = 12x - 3$$

$$12x - 12x = -3 + 8$$

$$0x = 5$$

Uma equação do tipo $ax + b = 0$ é impossível quando $a = 0$ e $b \neq 0$.

Resposta:

Como nenhum número multiplicado por zero é igual a 5, dizemos que a equação é impossível e, portanto, não tem solução. Logo, $V = \emptyset$.

- 1) Sendo $U = Q$, considere a seguinte equação e resolva: $10 - 3x - 8 = 2 - 3x$.

Solução:

$$10 - 3x - 8 = 2 - 3x$$

$$-3x + 3x = 2 + 8 - 10$$

$$0x = 0$$

Como todo número multiplicado por zero é igual a zero, dizemos que a equação possui infinitas soluções. Equações desse tipo, em que qualquer valor atribuído à variável torna a equação verdadeira, são denominadas identidades.

Resposta: A equação $10 - 3x - 8 = 2 - 3x$ é uma equação identidade, logo possui infinitas soluções.

13 EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Equação do 2º grau na incógnita x , é toda igualdade do tipo:

onde a, b, c são números reais e a é não nulo ($a \neq 0$).

A equação é chamada de 2º grau ou quadrática devido à incógnita x apresentar o maior expoente igual a 2.

Se tivermos $b \neq 0$ e $c \neq 0$ teremos uma equação completa.

Exemplos:

$x^2 - 9x + 20 = 0$, $-2x^2 + 10x - 16 = 0$, e outras equações de segundo grau em que possamos identificar os coeficientes a, b e c .

Se tivermos $b = 0$ ou $c = 0$ teremos uma equação incompleta.

Exemplos:

$$x^2 - 36 = 0 \rightarrow b=0$$

$$-2x^2 - 10x = 0 \rightarrow c=0$$

$$4x^2 = 0 \rightarrow (b=c=0)$$



1) Resolvendo Equações de 2º Grau – Raízes

Resolver uma equação do 2º grau significa determinar suas raízes.

Raiz é o número real que, ao substituir a incógnita de uma equação, transforma-a numa sentença verdadeira. O conjunto formado pelas raízes de uma equação denomina-se conjunto verdade ou conjunto solução.

2) Resolução de equações incompletas:

Quando a equação de 2º grau for incompleta sua resolução é bastante simples. Encontraremos o seu conjunto verdade, logo, suas raízes.

Utilizamos na resolução de uma equação incompleta as técnicas da fatoração e duas importantes propriedades dos números reais:

1ª propriedade: Se $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ e $xy = 0$, então, $x = 0$ ou $y = 0$.

2ª propriedade: Se $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ e $x^2 = y$, então, $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

1º caso: Equações do tipo $ax^2 = 0$

$b = 0$ e $c = 0$; temos então:

Exemplo:

$$3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow S = \{0\}$$

2º caso: Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$

$c = 0$ e $b \neq 0$; temos então:

Exemplo:

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 3x - 12 = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{0; 4\}$$

3º caso: Equações do tipo $ax^2 + c = 0$

$b = 0$ e $c \neq 0$; temos então:

Exemplo:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow x' = 2 \text{ e } x'' = -2 \Rightarrow S = \{-2; 2\}$$

3) Resolução de equações completas:

A resolução da equação completa de 2º grau é obtida através de uma fórmula que foi demonstrada por Bhaskara, matemático hindu nascido em 1114, por meio dela sabemos que o valor da incógnita satisfaz a igualdade:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O número $b^2 - 4ac$ chama-se **discriminante** da equação e é representado pela letra grega (delta). Teremos então: $\Delta = b^2 - 4ac$

As raízes reais, x' e x'' , serão encontradas por: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Observação: A fórmula de Bháskara só se aplica quanto $\Delta \geq 0$; quando $\Delta < 0$, a equação não tem soluções que pertençam ao conjunto dos números reais.

Exemplos:

- 1) Calcule as raízes, se existirem, da seguinte equação do 2º grau: $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Solução:

Temos que: $a = 1$ $b = 4$ $c = -5$

Calculando o valor do discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)$$

$$\Delta = 16 + 20$$

$$\Delta = 36$$

Substituindo na Fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

$$x' = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x'' = \frac{-4 - 6}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -5$$

Resposta: O conjunto solução é $S = \{-5, 1\}$.

Observação:

Lembramos que nem sempre o valor do discriminante será um número quadrado perfeito.

Discriminante Δ

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$\Delta > 0$ a equação possui duas raízes reais e diferentes

$\Delta = 0$ a equação possui duas raízes reais e iguais

$\Delta < 0$ a equação não possui raízes reais. Ela possui duas raízes imaginárias, ou seja, pertencentes ao conjunto dos números complexos.



Observação: Nunca teremos $a = 0$, pois se houver, não existirá a equação de segundo grau visto que o x^2 seria anulado.

Exemplos:

- 1) Para quais valores de k a equação $x^2 - 2x + k - 2 = 0$ admite raízes reais e desiguais?

Solução:

Para que a equação admita raízes reais e desiguais, devemos ter $\Delta > 0$.

Temos: $a = 1$, $b = -2$ e $c = k - 2$

Usando a fórmula de Bháskara $\Delta = b^2 - 4ac$, pela definição teremos:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4.1.(k-2) > 0 \Rightarrow 4 - 4k + 8 \\ &> 0 \Rightarrow -4k + 12 > 0 \\ -4k + 12 > 0 \Rightarrow -4k + 12 > 0 * (-1) \Rightarrow 4k - 12 \\ &< 0 \Rightarrow 4k < 12 \Rightarrow k < \frac{12}{4} \Rightarrow k < 3 \end{aligned}$$

Resposta: Concluímos que para que a equação admita raízes reais e desiguais os valores de $k < 3$, ou seja, os valores devem ser menores que três.

- 2) Determine o valor de p , para que a equação $x^2 - (p-1)x + p - 2 = 0$ possua raízes reais e iguais.

Solução:

Para que a equação admita raízes reais e iguais, devemos ter $\Delta = 0$.

Temos: $a = 1$, $b = p - 1$ e $c = p - 2$

Usando a fórmula de Bháskara $\Delta = b^2 - 4ac$, pela definição teremos:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (p-1)^2 - 4.1.(p-2) = 0 \\ \Rightarrow p^2 - 6p + 9 = 0 \end{aligned}$$

Como $p^2 - 6p + 9 = 0$ é um trinômio quadrado perfeito, temos:

$$(p-3)^2 = 0 \Rightarrow p = 3$$

Resposta: Logo, o valor de $p = 3$.

- 3) Para quais valores de m a equação $3x^2 + 6x + m = 0$ não admite nenhuma raiz real?

Solução:

Para que a equação não admite nenhuma raiz real, devemos ter $\Delta < 0$.

Temos: $a = 3$, $b = 6$ e $c = m$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (6)^2 - 4.3.m < 0 \Rightarrow 36 - 12m < 0 \\ \Rightarrow 36 - 12m < 0 * (-1) \\ -36 + 12m > 0 \Rightarrow 12m > 36 \Rightarrow m > \frac{36}{12} \Rightarrow m > 3 \end{aligned}$$

Resposta: Logo, os valores de m devem ser maiores que 3.

4) Soma e produto de raízes de uma equação de 2º grau:

Nos casos em que equação possui raízes reais algumas relações são observadas. Veja:

Soma das raízes: $(x_1 + x_2) = -\frac{b}{a}$

Produto das raízes: $(x_1 \cdot x_2) = -\frac{c}{a}$

Exemplos:

- 1) Determine o valor de k para que o produto das raízes da equação $x^2 + 8x - 27k = 0$ seja igual à -9.

Solução:

Através da equação, podemos constatar que $a = 1$, $b = 8$ e $c = -27k$. Para que o produto das raízes seja igual à -9, deve-se ter:

$$\begin{aligned} \text{Produto das raízes: } (x_1 \cdot x_2) = -\frac{c}{a} \Rightarrow -\frac{-27k}{a} = -9 \Rightarrow \\ -\frac{(-27k)}{1} = -9 \Rightarrow 27k = -9 \Rightarrow k = \frac{-9}{27} \\ \Rightarrow k = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Resposta: $\Rightarrow k$ deve ser igual a $-\frac{1}{3}$.

- 2) Qual equação do 2º grau possui -1 e -11 como raízes e coeficiente a = 1?

Solução:

Como a equação procurada é do 2º grau e apresenta coeficiente $a = 1$, ela pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Onde S é a soma das raízes e P o produto.

As raízes da equação foram fornecidas pelo problema.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} S &= -1 + (-11) = -12 \\ &= (-1)(-11) = 11 \end{aligned}$$

Dessa forma, a equação procurada é:

$$\begin{aligned} x^2 - (-12)x + 11 &= 0 \\ x^2 + 12x + 11 &= 0 \end{aligned}$$



Resposta: A equação que possui -1 e -11 como raízes e coeficiente a = 1 é $x^2 + 12x + 11 = 0$.

5) Sistemas de equações

Para a resolução de problemas que apresenta duas incógnitas desconhecidas, utilizamos um sistema de equações.

Vejamos agora os métodos para a resolução de sistema de equações:

a) Método da adição:

Basta eliminar uma das variáveis, através de termos opostos, recaindo numa equação do 1º grau com uma variável.

Exemplos:

$$1) \begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Solução:

Notamos que as duas equações possuem termos opostos (y e $-y$), com isso basta somar as duas equações:

$$\begin{array}{r} x + y = 12 \\ x - y = 4 \\ \hline 2x = 16 \end{array} \rightarrow x = 8$$

A seguir, basta substituir o valor encontrado para x em uma das equações.

$$\begin{array}{l} 8+y=12 \text{ ou } 8-y=4 \\ y=12-8 \text{ ou } -y=4-8 \\ y=4 \text{ ou } y=4 \end{array}$$

Resposta: O par ordenado $(x,y)=(8,4)$ é a solução do sistema.

$$2) \begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$$

Solução:

Note que as equações não possuem coeficientes opostos, logo se somarmos membro a membro, não eliminaremos nenhuma variável.

Para a resolução deste sistema, devemos escolher uma variável para ser eliminada.

Para isso, multiplicamos a equação I (a primeira) por -2:

$$\begin{array}{r} -4x - 6y = -6 \quad | \\ 4x + 6y = 12 \quad || \\ 0x + 0y = 6 \quad III \end{array}$$

Observe que a equação III não possui solução, logo a solução do sistema será vazio.

Resposta: $S = \{ \}$

b) Método da substituição:

Consiste em eliminarmos uma das variáveis isolando seu valor numa das equações do sistema, para em seguida substituí-la na outra.

Exemplos:

$$\begin{array}{l} 1) \quad x+y=12 \dots I \\ \quad \quad \quad x-y=4 \dots II \end{array}$$

Escolhemos uma das variáveis na primeira equação, para determinarmos o seu valor:

$$x+y=12 \Rightarrow x=12-y$$

Substituímos na outra equação - II:

$$\begin{array}{l} (12-y) - y = 4 \\ 12-2y = 4 \\ -2y = -8 \\ y=4 \end{array}$$

Substituindo o valor encontrado em uma das equações:

$$x+4=12 \Rightarrow x=12-4 \Rightarrow x=8$$

Resposta: Logo a solução do sistema é $S = \{(8,4)\}$.

$$\begin{array}{l} 2) \quad 3x + 4y = 46 \dots I \\ \quad \quad \quad 2x - y = 16 \dots II \end{array}$$

Escolhemos a variável y da equação II:

$$y=-16+2x \dots II$$

Substituindo na equação I :

$$\begin{array}{l} 3x + 4(-16 + 2x) = 46 \\ 3x - 64 + 8x = 46 \\ 11x = 46 + 64 = 110 \\ x = 10 \end{array}$$

Substituindo o valor de x encontrado em II:

$$y=-16+2.10=4$$

Resposta: Logo a solução do sistema é $S = \{(10,4)\}$

c) Método da comparação:

Consiste em compararmos as duas equações do sistema, após termos isolado a mesma variável (x ou y) nas duas equações.

Exemplo:

$$\begin{array}{l} x+2y=2 \Rightarrow x=2-2y \\ x+3 = 3-y \end{array}$$

Comparando as duas equações:

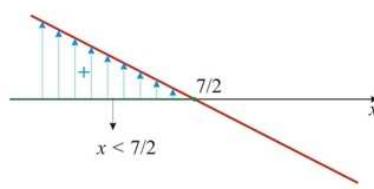
$$\begin{array}{l} 2-2y=3-y \\ -2y+y=3-2 \\ -y=1 \\ y=-1 \end{array}$$



Substituindo o valor de y encontrado:

$$x = 2 - 2 \cdot (-1) \Rightarrow x = 2 + 2 = 4$$

Resposta: Portanto $S = \{(4, -1)\}$



$$\text{Resposta: } S = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{7}{2}\}$$

14 INEQUAÇÕES

1) Símbolos de desigualdades

São símbolos que permitem uma comparação entre duas grandezas.

Exemplos: $>$, $<$, \geq , \leq .

2) Inequação do 1º grau

Inequações do 1º grau são desigualdades condicionadas em que a incógnita é de 1º grau. Elas podem apresentar-se nas seguintes formas:

$$\begin{cases} ax + b > 0 \\ ax + b < 0 \\ ax + b \geq 0 \\ ax + b \leq 0 \end{cases}$$

Lembrando que todas possuem $a \neq 0$

A solução de uma dessas inequações do 1º grau, exposta acima, é dada da seguinte maneira:

1. Iguala-se a expressão $ax + b$ a zero;
2. Localiza-se a raiz no eixo x ;
3. Estuda-se o sinal conforme o caso.

$$ax + b > 0 \Rightarrow ax = -b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } a \text{ for positivo } (a > 0, \text{ a solução será: } x > -\frac{b}{a}) \\ \text{se } a \text{ for negativo } (a < 0, \text{ a solução será: } x < -\frac{b}{a}) \end{cases}$$

E o conjunto solução será dado por:

$$\begin{cases} \text{para } a > 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x > -\frac{b}{a}\} \\ \text{para } a < 0 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} / x < -\frac{b}{a}\} \end{cases}$$

Exemplos:

- 1) Resolva as inequações:

a) $-2x + 7 > 0$

Solução:

$$-2x + 7 = 0$$

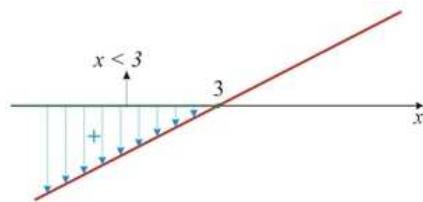
$$x = 7/2$$

b) $2x - 6 < 0$

Solução:

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$



$$\text{Resposta: } S = \{x \in \mathbb{R} / x < 3\}$$

c) $2 - 4x \geq x + 17$

Solução:

$$2 - 4x - x \geq x - x + 17$$

$$2 - 5x \geq 17$$

$$-5x \geq 17 - 2$$

$$-5x \geq 15$$

$$5x \leq -15$$

$$\boxed{x \leq -3}$$

$$\text{Resposta: } S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3\}$$

d) $3(x + 4) < 4(2 - x)$

Solução:

$$3x + 12 < 8 - 4x$$

$$3x - 3x + 12 < 8 - 4x - 3x$$

$$12 < 8 - 7x$$

$$12 - 8 < -7x$$

$$4 < -7x$$

$$-x > 7/4$$

$$\boxed{x > -7/4}$$

$$\text{Resposta: } S = \{x \in \mathbb{R} / x > -\frac{7}{4}\}$$

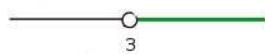
- 2) Encontrar o conjunto solução do sistema de inequações:



$$\begin{cases} 2x - 1 \geq 5 \\ -x - 3 < 0 \end{cases}$$

Chamaremos de inequação A e de inequação B:

Inequação A: $2x - 1 > 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$

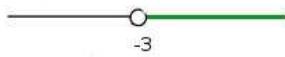


Observe que o conjunto solução que satisfaz a A é definido por $\{x \in \mathbb{R} / x > 3\}$

Inequação b: $-x - 3 < 0 \Rightarrow -x < 3$

Observe que multiplicaremos ambos os termos da inequação por um número negativo, sendo assim inverteremos o sinal da desigualdade, assim o resultado será:

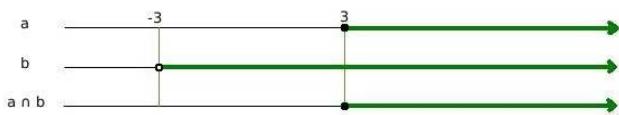
$$x > -3$$



O conjunto solução que satisfaz b é $\{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$.

Solução do Sistema:

A solução do sistema é obtida fazendo a intersecção (\cap) das soluções individuais, ou seja, das soluções da inequação A e B:



Analizando o intersecção dos resultados de cada inequação do intervalo real temos que a solução da desigualdade é $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3\}$

3) Inequação Produto

Algumas inequações apresentam, no 1º membro, produto de funções que para obter a solução dessas inequações é preciso fazer o estudo do sinal de todas

as funções, a solução seria a intersecção do estudo dos sinais das funções que pertencem à inequação.

Exemplos:

1) Ache o conjunto solução da equação produto $(-3x + 6)(5x - 7) < 0$:

Solução:

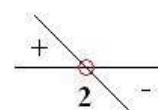
Primeiro o estudo do sinal de cada função:

I) $-3x + 6 = 0$

$$-3x = -6$$

$$-x = -6 : (-3)$$

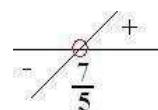
$$x = 2$$



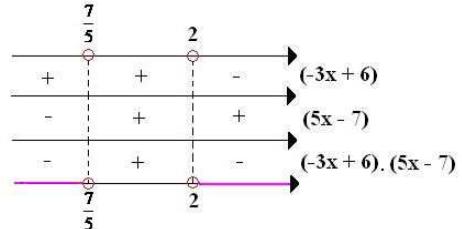
II) $5x - 7 = 0$

$$5x = 7$$

$$x = \frac{7}{5}$$



Fazendo o jogo de sinal com o estudo de sinal em cada coluna formada por uma função:

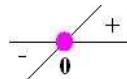


Como a inequação quer valores que sejam menores que 0, escrevemos que o conjunto solução da inequação será $S = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{7}{5} \text{ ou } x > 2\}$.

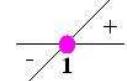
Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / x < \frac{7}{5} \text{ ou } x > 2\}$

2) Ache o conjunto solução da equação produto $x \cdot (x - 1) \cdot (-x + 2) \leq 0$:

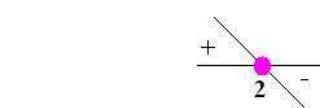
I) $x = 0$



II) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$



III) $-x + 2 = 0 \rightarrow -x = -2 \rightarrow x = 2$



Fazendo o estudo de sinal em cada coluna:

0	1	2	x
-	+	+	(x+1)
-	-	+	(-x+2)
+	+	+	x (x+1) (-x+2)
+	-	+	

Como a inequação quer valores que sejam menores ou iguais a 0 escrevemos que o conjunto solução da inequação

$x \cdot (x-1) (-x+2) \leq 0$, será $S = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$.

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$.

4) Inequação Quociente

Inequações do tipo $\frac{x+3}{2-x} \geq 0$ ou $\frac{2x-5}{x-2} \geq 2$ são exemplos de inequações quociente, pois representam a divisão entre polinômios de 1º grau.

Na inequação-quociente, tem-se uma desigualdade de funções fracionárias, ou ainda, de duas funções na qual uma está dividindo a outra. Diante disso, deveremos nos atentar ao domínio da função que se encontra no denominador, pois não existe divisão por zero. Com isso, a função que estiver no denominador da inequação deverá ser diferente de zero.

O método de resolução se assemelha muito à resolução de uma inequação-produto, de modo que devemos analisar o sinal das funções e realizar a intersecção do sinal dessas funções.

Exemplo:

$$1) \text{ Resolva a inequação } \frac{x+5}{x-2} \geq 0.$$

Solução:

Como o denominador deve ser diferente de zero, podemos afirmar que o valor de x não poderá ser igual a 2.

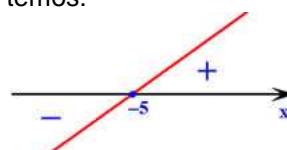
Como: $x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$
Vamos estudar os sinais das funções.

Função $f(x)=x+5$

• Zero da função: $x=-5$

Sinal do coeficiente a: a=1, valor maior que zero, portanto é uma função crescente.

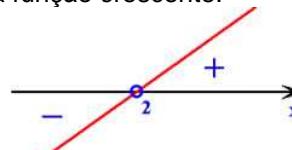
Sendo assim, analisando os sinais dessa função, temos:



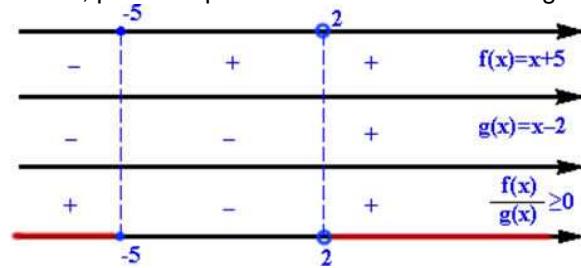
Função: $g(x)=x-2$

• Zero da função: $x=2$

Sinal do coeficiente a: a=1, valor maior que zero, portanto é uma função crescente.



Agora devemos realizar a intersecção dos intervalos das duas funções, lembrando que o ponto 2 é um valor aberto, pois não pertence ao domínio da desigualdade.



Veja que ao fazer a intersecção das funções deve ser feito também o jogo de sinal, assim como na equação produto. Sendo assim, podemos esboçar o conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -5 \text{ ou } x > 2\}$.

Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -5 \text{ ou } x > 2\}$

15 INEQUAÇÃO DO 2º GRAU

As inequações do 2º grau são resolvidas utilizando o teorema de Bháskara. O resultado deve ser comparado ao sinal da inequação, com o objetivo de formular o conjunto solução.

Exemplos:

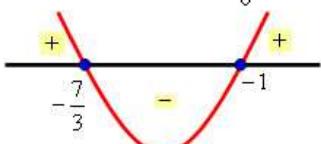
- 1) Resolver a inequação $3x^2 + 10x + 7 < 0$.

Solução:



$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= 10^2 - 4 * 3 * 7 \\ \Delta &= 100 - 84 \\ \Delta &= 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{2 * 3} \\ x &= \frac{-10 \pm 4}{6} \\ x' &= \frac{-10 + 4}{6} = -\frac{6}{6} = -1 \\ x'' &= \frac{-10 - 4}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$



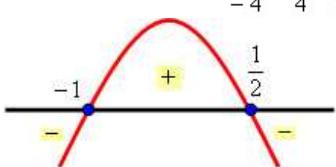
Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / -7/3 < x < -1\}$

- 2) Determine a solução da inequação $-2x^2 - x + 1 \leq 0$.

Solução:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= (-1)^2 - 4 * (-2) * 1 \\ \Delta &= 1 + 8 \\ \Delta &= 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 * (-2)} \\ x &= \frac{1 \pm 3}{-4} \\ x' &= \frac{1+3}{-4} = -\frac{4}{4} = -1 \\ x'' &= \frac{1-3}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

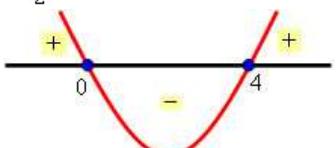


Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1/2\}$

- 3) Determine a solução da inequação $x^2 - 4x \geq 0$.

Solução:

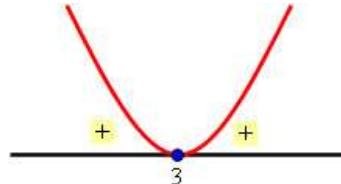
$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2 * 1} \\ x &= \frac{4 \pm 4}{2} \\ x' &= \frac{4+4}{2} = 4 \\ x'' &= \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$



$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4\}$

- 4) Calcule a solução da inequação $x^2 - 6x + 9 > 0$.

$$\begin{aligned}&\underline{\text{Solução:}} \\ \Delta &= (-6)^2 - 4 * 1 * 9 \\ \Delta &= 36 - 36 \\ \Delta &= 0 \\ x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 * 1} \\ x &= \frac{6}{2} \\ x &= 3\end{aligned}$$



Resposta: $S = \{x \in \mathbb{R} / x < 3 \text{ e } x > 3\}$

1) Inequações simultâneas

Exemplo: $-8 < x^2 - 2x - 8 < 0$

Solução:

1º passo) Separar as inequações, obedecendo o intervalo dado.

Temos: I) $x^2 - 2x - 8 > -8$ e II) $x^2 - 2x - 8 < 0$

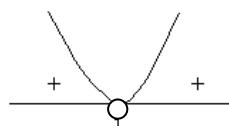
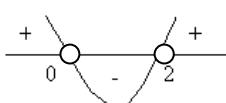
2º passo) Determinar as raízes ou zeros de cada uma das funções obtidas pela separação.

I) $x^2 - 2x > 0$
 $x' = 0$
 $x'' = 2$

II) $x^2 - 2x - 8 < 0$
 $x' = x'' = 1$

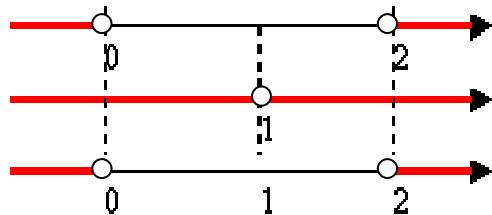
3º passo) Determinadas as raízes, fazer o estudo do sinal para cada função.

- I) $x < 0 \text{ ou } x > 2$
 II) $x \neq 1$



4º passo) Calcular a solução S, que é dada pela interseção dos intervalos das soluções de I e II.

Obs: o quadro de resposta será preenchido pelo intervalo achado.



Resposta: $\{x \in \mathbb{R} | x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

2) Inequação produto e inequação quociente

Exemplo:

$$1) (x^2 - 9x - 10)(x^2 - 4x + 4) > 0$$

Solução:

1º passo) Trabalhar $f(x)$ e $g(x)$ separadamente:

$$x^2 - 9x - 10 = 0 \quad (\text{I})$$

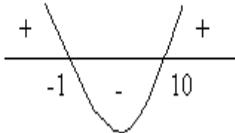
$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (\text{II})$$

2º passo) Determinar as raízes das funções:

$$(\text{I}) \text{ Raízes: } x' = -1, x'' = 10$$

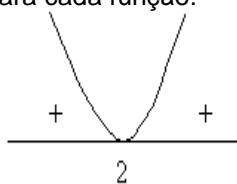
$$(\text{II}) \text{ Raízes: } x' = x'' = 2$$

3º passo) Fazer o estudo do sinal para cada função:



$$\text{I)} \quad x < -1 \text{ ou } x > 10$$

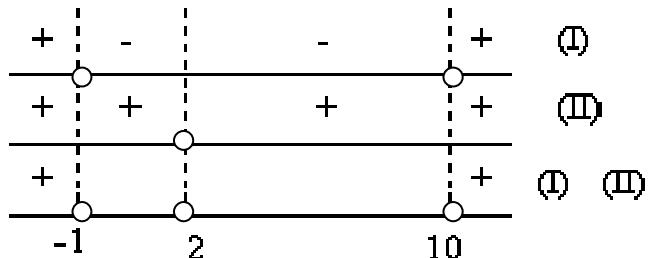
$$\text{II)} \quad x' = x'' = 2$$



4º passo) Calcular a solução, que é dada pelo sinal de desigualdade da função de origem, isto é
 ≥ intervalo positivo e bolinha fechada
 > intervalo positivo e bolinha aberta
 ≤ intervalo negativo e bolinha fechada
 < intervalo negativo e bolinha aberta

Observação:

- 1) No quadro de respostas (ou soluções), se os intervalos forem em: $f(x)$ positivo e $g(x)$ positivo o $h(x)$ será $+$, assim temos: $+ \text{ e } + = +$; $+ \text{ e } - = -$; $- \text{ e } + = -$; $- \text{ e } - = +$
- 2) Na inequação quociente observar a CE (condição de existência) do denominador, que influenciará o resultado nos intervalos, no que diz respeito a intervalo fechado ou aberto.

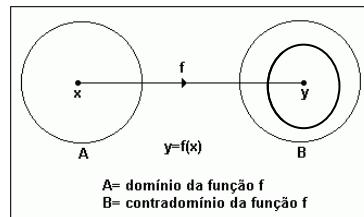


Assim, as únicas regiões positivas (maiores que zero) são em $x < -1$ e $x > 10$

Resposta: $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ ou } x > 10\}$

16 FUNÇÕES

Dados os conjuntos A e B, uma função $f: A \rightarrow B$ é uma lei que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y = f(x) \in B$.



Domínio (D): Conjunto A (conjunto de partida)

Contradomínio (CD): Conjunto B (conjunto de chegada)

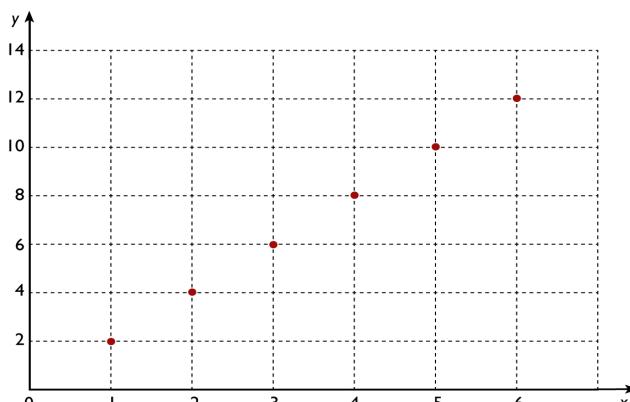
Imagem (Im): Conjunto formado pelos elementos que possuem correspondentes x no domínio.

Gráfico de uma função $f: A \rightarrow B$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$f(x) = \{(x, y) \in A \times B / f(x) = 2x\}$$



1) Paridade das Funções

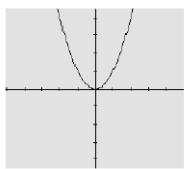
Seja A um conjunto tal que $x \in A \Rightarrow -x \in A$ e a função $f: A \rightarrow B$.



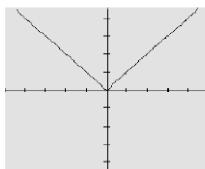
f é par $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A \rightarrow$ o gráfico é simétrico em relação ao eixo Oy, pois $(x,y) \in f \Leftrightarrow (-x,y) \in f$.

São funções pares $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$, e outras.

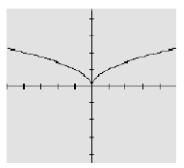
Simetria em relação ao eixo vertical:



O gráfico de $f(x) = x^2$



O gráfico de $f(x) = |x|$

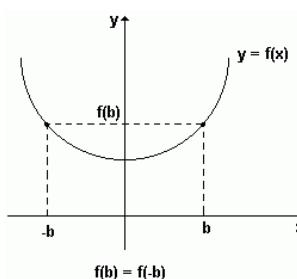


O gráfico de $f(x) = \sqrt{|x|}$

Exemplo:

$y = x^4 + 1$ é uma função par, pois $f(x) = f(-x)$, para todo x .

Por exemplo, $f(2) = 2^4 + 1 = 17$ e $f(-2) = (-2)^4 + 1 = 17$
O gráfico abaixo é de uma função par.



$f(b) = f(-b)$

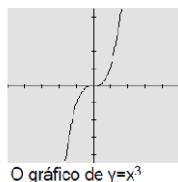
f é ímpar $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A \rightarrow$ o gráfico é simétrico em relação à origem, pois $(x,y) \in f \Leftrightarrow (-x,-y) \in f$.

São funções ímpares $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$, e outras.

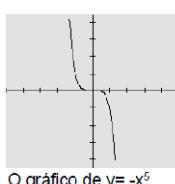
Por exemplo, temos:



O gráfico de $y = \frac{1}{x}$



O gráfico de $y = x^3$



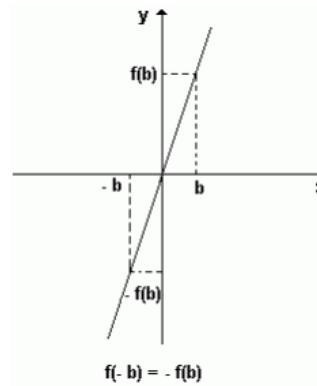
O gráfico de $y = -x^5$

Exemplo:

$y = x^3$ é uma função ímpar pois para todo x , teremos $f(-x) = -f(x)$.

Por exemplo, $f(-2) = (-2)^3 = -8$ e $-f(2) = - (2^3) = -8$.

O gráfico abaixo é de uma função ímpar:



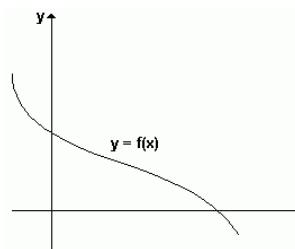
Observação:

Se uma função não é par nem ímpar, dizemos que ela não possui paridade.

A função $f(x) = x^2 + x - 1$ não é par nem ímpar.

Exemplo:

O gráfico abaixo, representa uma função que não possui paridade, pois a curva não é simétrica em relação ao eixo dos x e, não é simétrica em relação à origem.

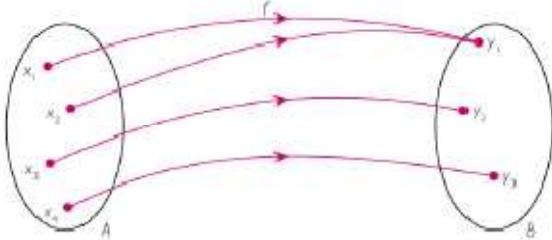


16.1 Tipos de funções

Sejam a função $f: A \rightarrow B$

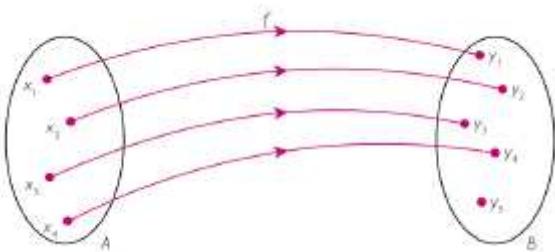
1) Função Sobrejetora

f é sobrejetora quando todo elemento de B está associado por f a pelo menos um elemento de A , ou seja, quando a imagem é igual ao contradomínio. No diagrama, todo elemento recebe seta. No gráfico, retas horizontais traçadas no contradomínio interceptam o gráfico em pelo menos um ponto. $n(A) \geq n(B)$, se A e B forem finitos.



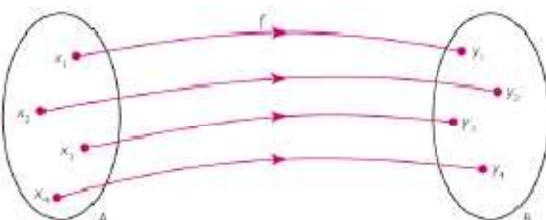
2) Função Injetora

f é injetora quando elementos distintos de A estão associados a elementos distintos de B . No diagrama, não há elemento em B que receba mais de uma seta. No gráfico, retas horizontais cruzam seu gráfico em no máximo um ponto. $n(A) \leq n(B)$, se A e B forem finitos.



3) Função Bijetora

f é bijetora se, e somente se, for sobrejetora e injetora. Todo elemento de B está associado por f a um único elemento de A . No diagrama, todo elemento de B recebe uma seta. No gráfico, retas horizontais traçadas pelo contradomínio cruzam o gráfico em exatamente um ponto. $n(A) = n(B)$, se A e B forem finitos.



Exemplos:

1 - Considere três funções f , g e h , tais que:

A função f atribui a cada pessoa do mundo, a sua idade.

A função g atribui a cada país, a sua capital

A função h atribui a cada número natural, o seu dobro.

Podemos afirmar que, das funções dadas, são injetoras:

- a) f , g e h
- b) f e h
- c) g e h
- d) apenas h

e) nenhuma delas

Solução:

Sabemos que numa função injetora, elementos distintos do domínio, possuem imagens distintas, ou seja:

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Logo, podemos concluir que:

f não é injetora, pois duas pessoas distintas podem ter a mesma idade.

g é injetora, pois não existem dois países distintos com a mesma capital.

h é injetora, pois dois números naturais distintos possuem os seusdobros também distintos.

Concluímos que a alternativa correta é a de letra C.

2 - Seja f uma função definida em \mathbb{R} - conjunto dos números reais - tal que $f(x - 5) = 4x$. Nestas condições, pede-se determinar $f(x + 5)$.

Solução:

Vamos fazer uma mudança de variável em $f(x - 5) = 4x$, da seguinte forma: $x - 5 = u \rightarrow x = u + 5$

Substituindo agora $(x - 5)$ pela nova variável u e x por $(u + 5)$, vem:

$$f(u) = 4(u + 5) \rightarrow f(u) = 4u + 20$$

Ora, se $f(u) = 4u + 20$, teremos:

$$f(x + 5) = 4(x+5) + 20 \rightarrow f(x+5) = 4x + 40$$

3 - (UEFS 2005-1) Sabendo-se que a função real $f(x) = ax + b$ é tal que $f(2x^2 + 1) = -2x^2 + 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que b/a é igual a:

- a) 2
- b) 3/2
- c) 1/2
- d) -1/3
- e) -3

Solução:

Ora, se $f(x) = ax + b$, então $f(2x^2 + 1) = a(2x^2 + 1) + b$

Como $f(2x^2 + 1) = -2x^2 + 2$, vem, igualando: $a(2x^2 + 1) + b = -2x^2 + 2$

Efetuando o produto indicado no primeiro membro, fica: $2ax^2 + a + b = -2x^2 + 2$

Então, poderemos escrever: $2a = -2 \rightarrow a = -2/2 = -1$
E, também, $a + b = 2$; como $a = -1$, vem substituindo: $(-1) + b = 2 \rightarrow b = 2 + 1 = 3$

Logo, o valor procurado a/b será $a/b = -1/3$, o que nos leva tranquilamente à alternativa D.

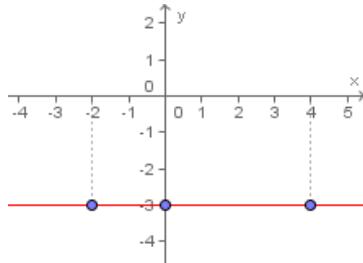


4) Função Constante

Toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na forma $f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$ é denominada função constante.

Em uma função constante qualquer que seja o elemento do domínio eles sempre terão a mesma imagem, ao variarmos x encontramos sempre o mesmo valor k .

Para exemplificar vamos observar a função constante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3$ representada graficamente no plano cartesiano:



Neste exemplo a constante k possui o valor -3 .

Observe os pontos $(-2, -3)$, $(0, -3)$ e $(4, -3)$ que destacamos no gráfico da função.

Em cada um destes pontos distintos temos uma abscissa diferente, no entanto todos os três possuem a mesma ordenada.

Isto vale para qualquer ponto do gráfico desta função, pois qualquer que seja o valor de x , o valor de y sempre será igual a -3 , já que y não depende de x , pois y não faz parte da lei de formação da função, que é meramente a constante -3 .

Assim como este gráfico é, o gráfico de qualquer função constante definida de \mathbb{R} em \mathbb{R} sempre será uma reta paralela ao eixo x , que passa pelo ponto $(0, k)$, que neste nosso exemplo é o ponto $(0, -3)$.

Exemplos:

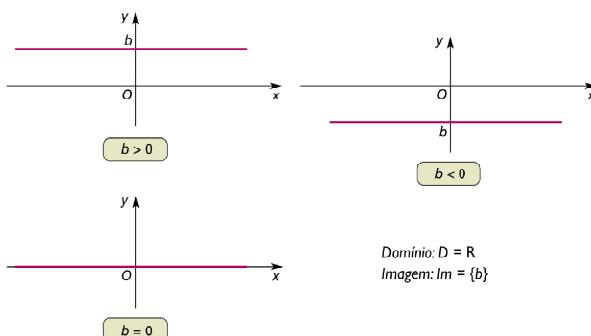


Diagrama de flechas da função constante

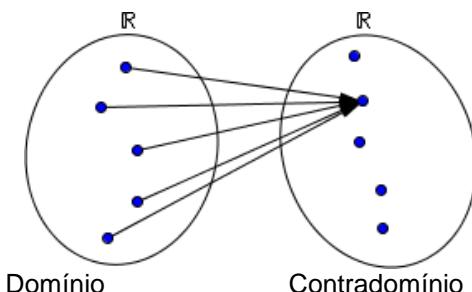


Imagen: Constante, ou seja, sempre a mesma.

Todas as flechas lançadas do conjunto de partida acertam o mesmo elemento do conjunto de chegada.

5) Domínio da função

Quando a função é dada em forma de equação, o domínio será a sua condição de existência. Através de alguns exemplos demonstraremos como determinar o domínio de uma função, isto é, descobrir quais os números que a função não pode assumir para que a sua condição de existência não seja afetada.

1º Caso: Não existe denominador igual a zero, assim todo conteúdo no denominador terá que ser diferente de zero.

Exemplo:

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Nesse caso o denominador não pode ser nulo, pois não existe divisão por zero na Matemática.

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$ ou $\mathbb{R} - \{1\}$.

2º Caso: Não existe raiz quadrada de um número negativo, assim todo conteúdo dentro do radical terá que ser maior ou igual a zero.

Exemplo:

$$f(x) = \sqrt{4x - 6}$$

Nos números reais, o radicando de uma raiz de índice não pode ser negativo.

$$4x - 6 \geq 0$$

$$4x \geq 6$$

$$x \geq 6/4$$

$$x \geq 3/2$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 3/2\}$

3º Caso:

Exemplo:

$$f(x) = \sqrt[3]{3x - 9}$$



O radicando de uma raiz de índice ímpar pode ser um número negativo, nulo ou positivo, isto é, $3x - 9$ pode assumir qualquer valor real.

Portanto, $D(f) = \mathbb{R}$.

4º Caso: Não existe denominador igual a zero, nem raiz quadrada de número negativo, assim todo conteúdo no denominador que estiverem também dentro de um radical terá que ser apenas maior que zero.

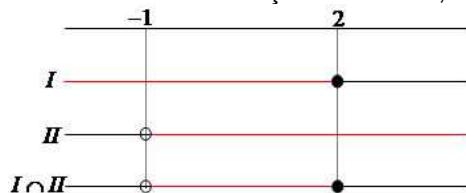
Exemplo:

$$f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+1}}$$

Nesse caso temos restrições tanto no numerador quanto no denominador. As restrições podem ser calculadas da seguinte maneira:

- I) $2 - x \geq 0 \rightarrow -x \geq -2 \rightarrow x \leq 2$
- II) $x + 1 > 0 \rightarrow x > -1$

Executando a intersecção entre I e II, obtemos:



Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 2\}$ ou $]-1, 2]$.

Exercícios Resolvidos:

1) Encontre o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = 3\sqrt{x-1}$

Solução:

Como nenhum domínio foi explicitado, o **domínio de f** é o conjunto de todos os valores que podem ser atribuídos à variável independente x .

Observe que a expressão $\sqrt{x-1}$ é definida (como um número real) para todo x tal que $x-1$ seja não-negativo.

Resolvendo a desigualdade $x-1 \geq 0$ em x , obtemos $x \geq 1$. Assim, o domínio da função é

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \text{ ou } [1, +\infty[$$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-4}}$

Solução:

Como nenhum domínio foi explicitado, o **domínio de f** é o conjunto de todos os valores que podem ser atribuídos à variável independente x .

Como a raiz quadrada nos reais só é definida para valores não negativos, a função dada **está definida** para todos os valores de x tais que $\frac{x+1}{x^2-4} \geq 0$.

Observe que o denominador da fração tem que ser diferente de zero, ou seja, $x \neq \pm 2$.

Resolvendo a desigualdade, $\frac{x+1}{x^2-4} \geq 0$ obtemos:
 $x > 2$ ou $-2 < x \leq -1$.

Assim, vemos que a função **é definida** para $x > 2$ e para $-2 < x \leq -1$.

Portanto, o domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 2 \text{ ou } -2 < x \leq -1\}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

Solução:

Como a raiz quadrada nos reais só é definida para valores não negativos e a divisão por zero não é permitida, a função dada **está definida** para todos os valores de x tais que $x \geq 0$ e $x-1 \neq 0$.

Observe que, como a raiz cúbica está definida para qualquer número real, não é necessário nenhuma restrição para $x-1$, além do fato de ter que ser diferente de zero por estar no denominador.

Resolvendo para x , a equação $x-1 \neq 0$, obtemos $x \neq 1$.

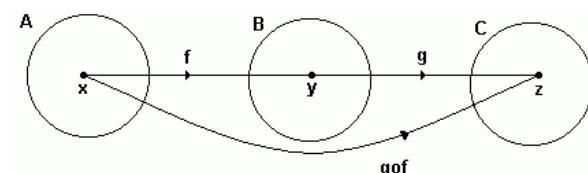
Assim, vemos que a função **é definida** para $x \geq 0$ e $x \neq 1$.

Portanto, o domínio da função é $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

6) Função Composta

Dados os conjuntos A , B e C e as funções $f: A \rightarrow B$ definida por $y = f(x)$ e $g: B \rightarrow C$ definida por $z = g(y)$, chama-se função composta de g com f a função $h = (gof): A \rightarrow C$, definida por:

$$Z = (gof)(x) = g(f(x))$$





Exemplos:

- 1 - Sendo f e g duas funções tais que: $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Podemos afirmar que a igualdade $gof(x) = fog(x)$ ocorrerá se e somente se:
 a) $b(1 - c) = d(1 - a)$
 b) $a(1 - b) = d(1 - c)$
 c) $ab = cd$
 d) $ad = bc$
 e) $a = bc$

SOLUÇÃO:

Teremos:

$$fog(x) = f[g(x)] = f(cx + d) = a(cx + d) + b \rightarrow fog(x) = acx + ad + b$$

$$gof(x) = g[f(x)] = g(ax + b) = c(ax + b) + d \rightarrow gof(x) = cax + cb + d$$

Como o problema exige que $gof = fog$, fica:

$$acx + ad + b = cax + cb + d$$

Simplificando, vem: $ad + b = cb + d$

$ad - d = cb - b \rightarrow d(a - 1) = b(c - 1)$, que é equivalente a $d(a - 1) = b(c - 1)$, o que nos leva a concluir que a alternativa correta é a letra A.

- 2 - Sendo f e g duas funções tais que $fog(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2 - x$ então $f(x)$ é:

- a) $2 - 2x$
- b) $3 - 3x$
- c) $2x - 5$
- d) $5 - 2x$
- e) uma função par.

SOLUÇÃO:

Sendo $fog(x) = 2x + 1$, temos: $f[g(x)] = 2x + 1$

Substituindo $g(x)$ pelo seu valor, fica: $f(2 - x) = 2x + 1$

Fazendo uma mudança de variável, podemos escrever $2 - x = u$, sendo u a nova variável.
 Portanto, $x = 2 - u$.

Substituindo, fica:

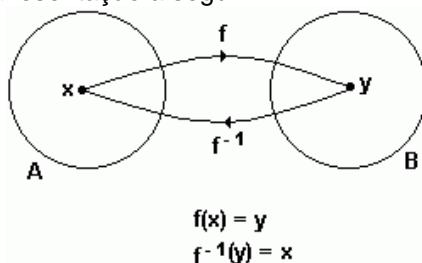
$$f(u) = 2(2 - u) + 1 \setminus f(u) = 5 - 2u$$

Portanto, $f(x) = 5 - 2x$, o que nos leva à alternativa D.

Função Inversa

Dada uma função $f: A \rightarrow B$, se f é bijetora, então define-se a função inversa f^{-1} como sendo a função de B em A , tal que $f^{-1}(y) = x$.

Veja a representação a seguir:



É óbvio então que:

- a) para obter a função inversa, basta permutar as variáveis x e y .
- b) o domínio de f^{-1} é igual ao conjunto imagem de f .
- c) o conjunto imagem de f^{-1} é igual ao domínio de f .
- d) os gráficos de f e de f^{-1} são curvas simétricas em relação à reta $y = x$, ou seja, à bissetriz do primeiro quadrante.

Exemplos:

- 1 Determine a INVERSA da função definida por $y = 2x + 3$.

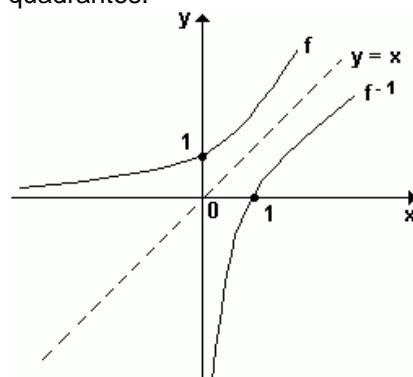
SOLUÇÃO:

Permutando as variáveis x e y , fica: $x = 2y + 3$

Explicitando y em função de x , vem: $2y = x - 3 \setminus y = (x - 3) / 2$, que define a função inversa da função dada.

O gráfico abaixo representa uma função e a sua inversa.

Observe que as curvas representativas de f e de f^{-1} são simétricas em relação à reta $y = x$, bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes.



- 2 A função $f: R \rightarrow R$, definida por $f(x) = x^2$:

- a) é inversível e sua inversa é $f^{-1}(x) = Ox$
- b) é inversível e sua inversa é $f^{-1}(x) = -Ox$
- c) não é inversível
- d) é injetora
- e) é bijetora

SOLUÇÃO:

Já sabemos que somente as funções bijetoras são inversíveis, ou seja, admitem função inversa. Ora, a função $f(x) = x^2$, definida em R - conjunto dos números reais - não é injetora, pois elementos distintos possuem a mesma imagem. Por exemplo, $f(3) = f(-3) = 9$. Somente por este motivo, a função não é bijetora e, em consequência, não é inversível.

Observe também que a função dada não é sobrejetora, pois o conjunto imagem da função $f(x) = x^2$ é o conjunto R^+ dos números reais não negativos, o qual não coincide com o contradomínio dado que é igual a R .



A alternativa correta é a letra C.

Exercícios

1) Se $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^4$, mostre que $fog(x) = gof(x)$.

2. (METODISTA) Sabendo que $f(g(x)) = 3x - 7$ e $f(x) = x/3 - 2$, então :

- a) $g(x) = 9x - 15$ b) $g(x) = 9x + 15$ c) $g(x) = 15x - 9$
 d) $g(x) = 15x + 9$ e) $g(x) = 9x - 5$

3. (METODISTA) O domínio da função real $f(g(x))$, sabendo-se que $f(x) = x^{1/2}$ e $g(x) = (x^2 + x)(x + 2)^{-1}$ é:

- a) $D = \{x \in \mathbb{R} / x^{1/2} \neq -2\}$ b) $D = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \text{ e } x \neq -2\}$
 c) $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0\}$
 e) $D = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x < -1 \text{ ou } x \geq 0\}$

4. (CESGRANRIO) Para cada inteiro $x > 0$, $f(x)$ é o número de divisores de x e $g(x)$ é o resto da divisão de x por 5. Então $g(f(45))$ é:

- a) 4 b) 3 c) 2 d) 1
 e) 0

5. (FGV) Considere as funções $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$. Então as raízes da equação $f(g(x)) = 0$ são:

- a) inteiros b) negativas c) racionais
 d) inversas e) opostas

6. (ITA) Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x - 1$ duas funções reais.

Definimos a função composta de f e g como sendo $gof(x) = g(f(x))$. Então $gof(y - 1)$ é igual a:

- a) $y^2 - 2y + 1$ b) $(y - 1)^2 + 1$ c) $y^2 + 2y - 2$ d) $y^2 - 2y + 3$ e) $y^2 - 1$

7. (UEL) A função de \mathbb{R} em \mathbb{R} é definida por $f(x) = mx + p$. Se $f(2) = -5$ e $f(-3) = -10$, então $f(f(18))$ é igual:

- a) -2 b) -1 c) 1 d) 4
 e) 5

8. (FCG) As funções f e g , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , são definidas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 3x + m$. Se $f(g(x)) = g(f(x))$, então $f(m)$ é um número:

- a) primo b) negativo c) cubo perfeito d) menor que 18
 e) múltiplo de 12

9. (MACK) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $y = f(x)$.

Sabendo-se que $f(0) = 3$, $f(1) = 2$ e $f(3) = 0$, o valor de x tal que $f(f(x+2)) = 3$ é:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
 e) 4

10. (PUC-SP) Se $f(x) = 3x - 4$ e $f(g(x)) = x + 4$, então $g(1)$ vale:

- a) -2 b) 0 c) 1 d) 3
 e) 5

11. (MACK) Se $f(g(x)) = 2x^2 - 4x + 4$ e $f(x - 2) = x + 2$, então o valor de $g(2)$ é:

- a) -2 b) 2 c) 0 d) 3
 e) 5

12. (ANGLO) Sendo $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 2$, então o conjunto solução da equação $f(g(x)) = 0$ é:

- a) $\{1, 3\}$ b) $\{-1, -3\}$ c) $\{1, -3\}$ d) $\{-1, 3\}$
 e) $\{\}$

13. (ANGLO) Sendo f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} , tais que $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^2$, o valor de $f(g(f(1)))$ é:

- a) 10 b) 11 c) 12 d) 13
 e) 14

14. (MACK) Os gráficos das funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = k^x$, $1 \neq k > 0$, se interceptam num ponto de abscissa 3. Então o valor de $f(g(k))$ é:

- a) 3 b) 9 c) 12 d) 15
 e) 18

15. (MACK) Dadas as funções reais definidas por $f(x) = 4x + 1$ e $g(x) = 3x$, então o valor de k tal que $g(f(k)) = 4$ é:

- a) $1/4$ b) $4/5$ c) 2 d) 3
 e) $7/6$

16. (MACK) Se $f(x) = mx + n$ e $f(f(x)) = 4x + 9$, a soma dos possíveis valores de n é:

- a) 6 b) -12 c) -6 d) -18
 e) 12

17 (MACK-02) Se $x > 1$ e $f(x) = x / (x - 1)$, então $f(f(x + 1))$ é igual a:

- a) $x + 1$ b) $1 / (x - 1)$ c) $x - 1$ d) $x / (x - 1)$
 e) $(x + 1) / (x - 1)$

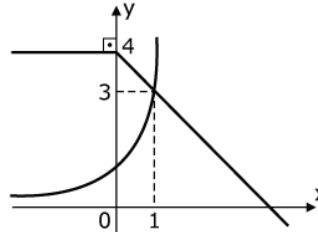
18. (PUC) Se f e g são funções definidas por $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 + mx + n$, com $m \neq 0$ e $n \neq 0$, então a soma das raízes de fog é

- a) m b) $-m$ c) n d) $-n$
 e) $m.n$

19. (UFV) Se f e g são funções reais tais que $f(x) = 2x - 2$ e $g(x) = x + 2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então $g(f(2))$ é igual a:

- a) 4 b) 1 c) 0 d) 2
 e) 3

20. (MACK) Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções f e g , sendo $f(x) = a^x$. O valor de $g(g(-1)) + f(g(3))$ é:





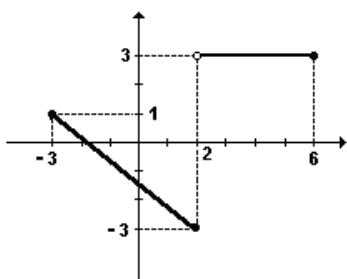
- a) 1 b) 2 c) 3 d) 3/2 e) 5/2

21. (UFV) Sejam as funções reais f e g tais que $f(x) = 2x + 1$ e $(f \circ g)(x) = 2x^3 - 4x + 1$.

Determine os valores de x para os quais $g(x) > 0$.

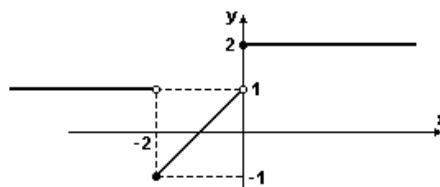
22. (PUCPR) Seja $y = f(x)$ uma função definida no intervalo $[-3; 6]$ conforme indicado no gráfico.

Deste modo, o valor de $f(f(2))$ é:



- a) 3 b) 0 c) -3 d) -1/2 e) 1

23. (UEL) Com respeito à função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cujo gráfico está representado abaixo, é correto afirmar:



- a) $(f \circ f)(-2) = 1$ b) $(f \circ f)(-1) = 2$ c) $(f \circ f)(-2) = -1$
 d) $(f \circ f)(-1) = 0$ e) $f(-2) = 1$

24. (UERJ) Admita os seguintes dados sobre as condições ambientais de uma comunidade, com uma população p , em milhares de habitantes:

- C , a taxa média diária de monóxido de carbono no ar, em partes por milhão, corresponde a $C(p) = 0,5p + 1$;
- em um determinado tempo t , em anos, p será igual a $p(t) = 10 + 0,1t^2$.

Em relação à taxa C :

- a) expresse-a como uma função do tempo;
 b) calcule em quantos anos essa taxa será de 13,2 partes por milhão.

25. (UFMG) Duas funções, f e g , são tais que $f(x) = 3x - 1$ e $f[g(x)] = 2 - 6x$. Nessas condições, o valor de $g(-1)$ é:

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

26. (PUC-SP) Sejam f e g funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 1 - x^2$. Relativamente ao gráfico da função dada por $g(f(x))$, é correto afirmar que:

- a) tangencia o eixo das abscissas.
 b) não intercepta o eixo das abscissas.
 c) contém o ponto $(-2; 0)$.
 d) tem concavidade voltada para cima.
 e) intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0; -1)$.

27. (UEL) Se f e g são funções de \mathbb{R} em \mathbb{R} tais que $f(x) = 2x - 1$ e $f(g(x)) = x^2 - 1$, então $g(x)$ é igual a:

- a) $2x^2 + 1$ b) $(x/2) - 1$ c) $x^2/2$
 d) $x + 1$ e) $x + (1/2)$

28. (MACK) As funções reais f e g são tais que $f(g(x)) = x^2 - 6x + 8$ e $f(x - 3) = x + 5$. Se $g(k)$ é o menor possível, então k vale:

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
 e) 4

29. (UFMG) Para função $f(x) = 5x + 3$ e um número b , tem-se $f(f(b)) = -2$.

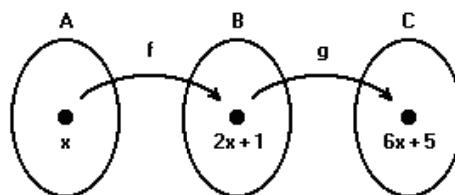
O valor de b é:

- a) -1 b) -4/5 c) -17/25
 d) -1/5

30. (UFMG) Para um número real fixo α , a função $f(x) = \alpha x - 2$ é tal que $f(f(1)) = -3$. O valor de α é:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

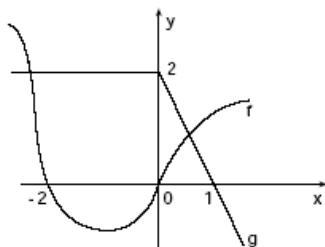
31. (MACK) No esquema, f e g são funções, respectivamente, de A em B e de B em C .



Então:

- a) $g(x) = 6x + 5$ b) $f(x) = 6x + 5$ c) $g(x) = 3x + 2$
 d) $f(x) = 8x + 6$ e) $g(x) = (x - 1)/2$

32. (MACK) Na figura, temos os esboços dos gráficos das funções f e g .



A soma $f(g(1)) + g(f(-1))$ é igual a:
 a) -1 b) 2 c) 0 d) 3
 e) 1

Resposta:

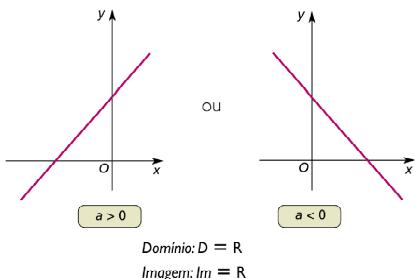
- 2) A 3) C 4) D 5) E 6) A 7) D 8) D 9) B 10) D 11) C 12)
 B 13) B 14) D 15) E 16) C 17) A 18) B 19) E 20) C 21)
 21/2 22) E 23) B 24) a) C(p(t)) = 6 + 0,05 t² b) 12 anos
 25) A 26) C 27) C 28) D 29) B 30) A 31) C 32) B

17 FUNÇÃO DO 1º GRAU OU FUNÇÃO AFIM

Função de 1º grau, $f: R \rightarrow R$, tal que $f(x) = ax + b$, em que a e $b \neq 0$.

- a: coeficiente angular**
b: coeficiente linear

Gráfico: reta que cruza o eixo y no valor de b e o eixo x no valor de $-\frac{b}{a}$.



*Domínio: D = R
 Imagem: Im = R*

Exemplos:

- 1) $f(x) = 2x + 1$ ($a = 2$, $b = 1$)
 2) $f(x) = -x + 4$ ($a = -1$, $b = 4$)
 3) $f(x) = 1/3x + 5$ ($a = 1/3$, $b = 5$)
 4) $f(x) = 4x$ ($a = 4$, $b = 0$)

Valor de uma função afim

Na função afim $f(x) = 5x + 1$, podemos determinar:
 $f(1) = 5 \cdot 1 + 1 = 5 + 1 = 6$. Logo, $f(1) = 6$.
 $f(-3) = 5(-3) + 1 = -15 + 1 = -14$. Logo, $f(-3) = -14$.

Casos particulares importantes da função afim

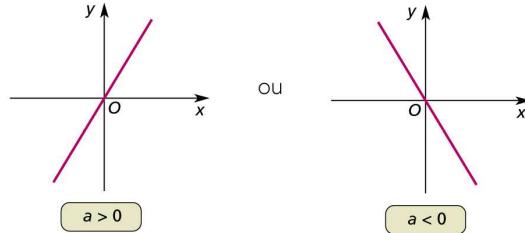
1ª) Função linear

$f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = ax$ para todo $x \in R$.
 Nesse caso, $b = 0$.

Exemplos:

- $f(x) = -2x$ ($a = -2$, $b = 0$)
 $f(x) = 1/5x$ ($a = 1/5$, $b = 0$)
 $f(x) = \sqrt{3}x$ ($a = \sqrt{3}$, $b = 0$)

Gráfico: reta que passa pela origem $(0,0)$



*Domínio: D = R
 Imagem: Im = R*

2ª) Função constante

$f: IR \rightarrow IR$ definida por $f(x) = b$ para todo $x \in IR$. Nesse caso, $a = 0$.

Exemplos:

- $f(x) = 3$
 $f(x) = -2$
 $f(x) = 2$
 $f(x) = 3/4$

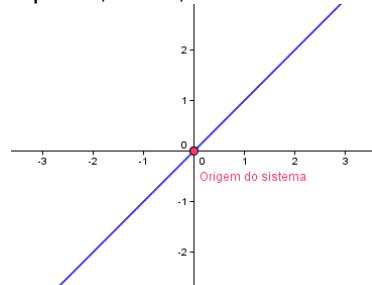
Observação: Foi dedicado um tópico somente para a função constante.

3ª) Função identidade

$f: IR \rightarrow IR$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in IR$. Nesse caso, $a = 1$ e $b = 0$. É um caso particular da função afim e suas principais características são:

**Domínio: D = R
 Imagem: Im = R**

O gráfico da função identidade é a bissetriz dos quadrantes ímpares, isto é, 1º e 3º.



4ª) Translação

$f: IR \rightarrow IR$ definida por $f(x) = x + b$ para todo $x \in IR$. Nesse caso, $a = 1$ e $b \neq 0$.

Exemplos:

- $f(x) = x + 2$



$$\begin{aligned}f(x) &= x - 3 \\f(x) &= x + 1/2 \\f(x) &= x - 3/5\end{aligned}$$

Exercícios

1) Classifique as funções abaixo em afim, linear, identidade, constante e translação

a. $f(x) = 5x + 2$ b. $f(x) = -x + 3$ c. $f(x) = 7$

d. $f(x) = x$ e. $f(x) = 3x$

f. $f(x) = x + 5$ g. $f(x) = -3$ h. $f(x) = 1/7x$
i. $f(x) = x/2 + 1/3$

j. $f(x) = 2 - 3x$

2) Dada a função $f(x) = -2x + 3$, determine:

a. $f(1)$ b. $f(0)$ c. $f(-\frac{1}{3})$ d. $f(-\frac{1}{2})$

3) Dada a função afim $f(x) = 1 - \frac{5}{2}x$ calcule.

a. $f(0)$ b. $f(-1)$

4) Determine o que se pede.

a. Sabendo que $f(x+1) = 2x$, calcule $f(4)$.

b. Dada a função $f(5x - 1) = x - \frac{1}{5}$, calcule $f(0)$.

5) Sendo $f(x) = 3x - 4$ e $g(x) = 2x + 1$, determine os valores reais de x para que se tenha $f(x) < g(x)$.

6) Dada a função afim $f(x) = 2x + 3$, determine os valores reais de x para que:

a. $f(x) = 1$
b. $f(x) = 0$
c. $f(x) = \frac{1}{3}$
d. $f(x) = 0,75$

7) Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R\$ 8,00 mais um custo variável de R\$ 0,50 por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas:

- a. Escreva a lei da função que fornece o custo total de x peças;
b. Calcule o custo de 100 peças;
c. Escreva a taxa de crescimento da função.

8) Uma pessoa tinha no banco um saldo positivo de R\$ 560,00. Após um saque no caixa eletrônico que fornece apenas notas de R\$ 50,00, expresse a lei da função que fornece o novo saldo, que é dado em função do número x de notas retiradas.

9) Determine o valor da função afim $f(x) = -3x + 4$ para:

a. $x = 1$ b. $x = \frac{1}{3}$ c. $x = 0$ d. $x = -1,5$
e. $x = k + 1$ f. $x = a + b$

10) Escreva a função afim $f(x) = ax + b$, sabendo que:

a. $f(-1) = 7$ e $f(2) = 1$
b. $f(2) = -2$ e $f(1) = 1$

11) Dada a função $f(x) = ax + b$ e sabendo que $f(3) = 5$ e $f(-2) = -5$, calcule $f(\frac{1}{2})$.

12) Dada a função $f(x) = ax + 2$, determine o valor de a para que se tenha $f(4) = 22$.

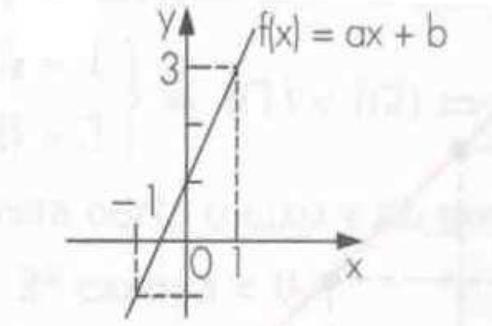
13) Construa, num sistema ortogonal, o gráfico das seguintes funções, dizendo em cada caso se a função é crescente ou decrescente:

a. $f(x) = x + 2$
b. $f(x) = -x + 2$
c. $f(x) = 1 + 2x$

14) Faça o gráfico das funções $f(x) = x$, $g(x) = x + 1$ e $h(x) = x - 2$.

15) Construa o gráfico das funções $f(x) = x$ e $g(x) = -x$ no mesmo plano cartesiano.

16) Escreva a função $f(x) = ax + b$ cujo gráfico, num sistema cartesiano ortogonal, é dado por:



17.1 Zero da função de 1º grau

Zero da função é o valor de x para o qual a função é igual a zero.

$$y = f(x) = 0$$

Observações

Para a função afim, o zero da função é dado por $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$.

No caso da função linear, o zero da função é $x = 0$. A função constante não possui zero da função (a reta não cruza o eixo x).

Exemplos:

1. Obtenção do zero da função $f(x) = 2x - 5$.

Para encontrarmos o zero (raiz), devemos fazer a função igual a zero:



$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}.$$

Logo, a raiz da função, ou zero, é igual a $\frac{5}{2}$.

2. Cálculo da raiz da função $g(x) = 3x + 6$:

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

Logo, a raiz da função é igual a -2.

3. Cálculo da abscissa do ponto em que o gráfico de $h(x) = -2x + 10$ corta o eixo das abscissas:

O ponto em que o gráfico corta o eixo dos x é aquele em que $h(x) = 0$, então:

$$h(x) = 0 \Rightarrow -2x + 10 = 0 \Rightarrow x = 5$$

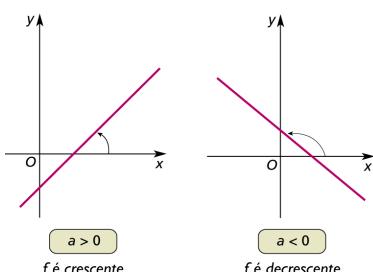
Logo, o valor de x para que a função toque o eixo das abscissas é igual a 5..

17.2 Crescimento e decrescimento

As funções afim ($f(x) = ax + b$) e a linear ($f(x) = ax$) podem ser crescentes ou decrescentes.

Se $a > 0$: a função é crescente

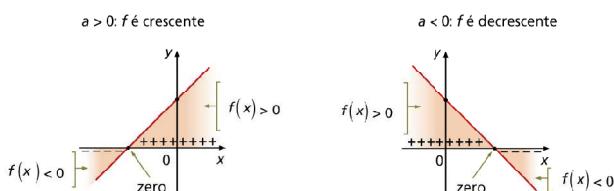
Se $a < 0$: a função é decrescente



Estudo do sinal

Seja $f(x) = ax + b$, estudar o sinal de uma função qualquer é determinar os **valores de x para os quais y é positivo, os de x para os quais y é zero e os valores de x para os quais y é negativo**.

Consideremos uma função afim $y = f(x) = ax + b$, vamos estudar seu sinal.



Note que para $x = -b/a$, $f(x) = 0$ (zero da função).

Para $x > -b/a$, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a. Para $x < -b/a$, $f(x)$ tem o sinal contrário ao de a.

Exemplos:

1) Determine o intervalo das seguintes funções para que $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ e $f(x) < 0$.

a) $y = f(x) = x + 1$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

Logo, $f(x)$ será maior que 0 quando $x > -1$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Logo, $f(x)$ será igual a 0 quando $x = -1$

$$x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

Logo, $f(x)$ será menor que 0 quando $x < -1$

b) $y = f(x) = -x + 1$

$$-x + 1 > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$$

Logo, $f(x)$ será maior que 0 quando $x < 1$

$$-x + 1 = 0 \Rightarrow -x = 1 \Rightarrow x = 1$$

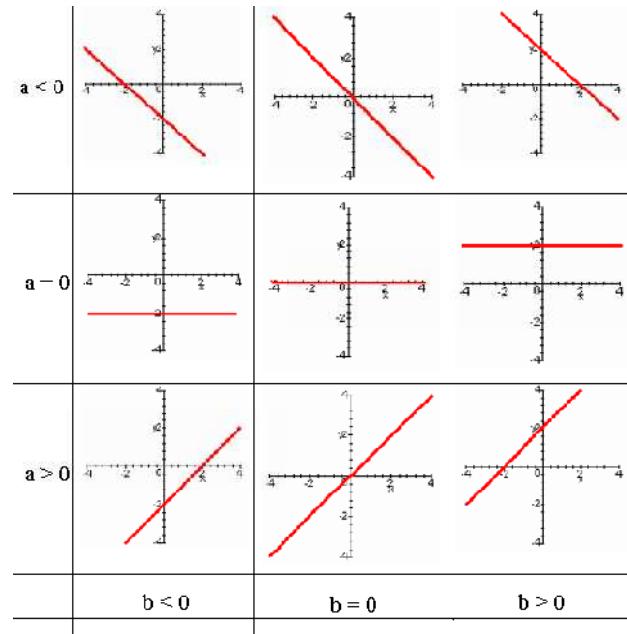
Logo, $f(x)$ será igual a 0 quando $x = 1$

$$-x + 1 < 0 \Rightarrow -x < -1 \Rightarrow x > 1$$

Logo, $f(x)$ será menor que 0 quando $x > 1$

(*ao multiplicar por -1, inverte-se o sinal da desigualdade)

Resumo:



Exercícios

1) Obtenha a lei das funções de 1º grau que passam pelos pares de pontos abaixo:

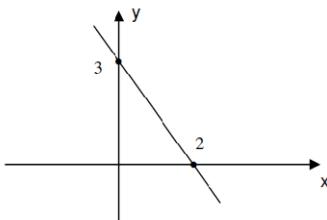
a) (-1, 2) e (2, -1)

b) (-1, 0) e (3, 2)

c) (3, 2) e (-1, 0)



2) Determine a equação da reta cujo gráfico está representado abaixo:



3) Determine a lei da função do 1º grau cujo gráfico passa pelo ponto (2, 3) e cujo coeficiente linear vale 5.

4) Dada a função $y = 3x - 2$, encontre os valores de x em que a ordenada y é o seu dobro..

5) Dada a função $y = -2x + 1$, encontre os interceptos.

6) Dada a função $y = 2/3x + 10$. Encontre os interceptos.

7) Determine a equação da reta que passa por (1,5) e tem coeficiente angular igual a 20.

8) Seja a reta dada por $y = -3x + b$. Determine o valor de b para que a reta corte o eixo as ordenadas no ponto (0,5).

9) Dadas as funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x \uparrow 4$, encontre os valores de x para os quais $g(x) = f(x)$.

10) Para cada um das retas abaixo, faça a análise de sinal:

a) $y = 8x - 2$ b) $y = -0,3x + 9$
 c) $\frac{y-3}{x-1} = 5$

11) Resolva as inequações:

a) $3x - 4 \leq x + 5$ b) $x - \frac{1}{2} \geq 2x + \frac{3}{2}$

12) O preço a pagar por uma corrida de táxi depende da distância percorrida. A tarifa **P** é composta por duas partes: uma parte fixa, denominada bandeirada e uma parte variável que depende do número **d** de quilômetros rodados. Suponha que a bandeirada esteja custando R\$ 6,00 e o quilômetro rodado, R\$ 1,20.

a) Expresse o preço **P** em função da distância **d** percorrida.
 b) Quanto se pagará por uma corrida em que o táxi rodou 10 km?
 c) Sabendo que a corrida custou R\$ 20,00, calcule a distância percorrida pelo táxi.

13) Uma piscina de 30 mil litros, totalmente cheia, precisa ser esvaziada para limpeza e para isso

uma bomba que retira água à razão de 100 litros por minuto foi acionada. Baseado nessas informações, pede-se:

- a expressão que fornece o volume (V) de água na piscina em função do tempo (t) que a bomba fica ligada.
- a expressão que fornece o volume de água que sai da piscina (V_s) em função do tempo (t) que a bomba fica ligada.
- o tempo necessário para que a piscina seja esvaziada.
- quanto de água ainda terá na piscina após 3 horas de funcionamento da bomba?
- o esboço do gráfico que representa o volume de água na piscina em função do tempo em que a bomba fica ligada.

14) Determinar a lei da função do 1º grau que passa pelo ponto (-2, 1) e cujo coeficiente angular é -4.

15) Dadas as funções $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ e $g(x) = 2x - 4$, calcule os valores de x para os quais $g(x) < f(x)$.

16) Determine a lei da função do 1º grau que passa pelos pares de pontos abaixo:

- (0, 1) e (1, 4)
- (-1, 2) e (1, -1)

17) Faça os gráficos das seguintes funções:

a) $y = 2x + 3$
 b) $y = \frac{-3x+1}{2}$
 d) $y = -x$

18) Em uma determinada loja, o salário mensal fixo de um vendedor é de R\$ 240,00. Além disso, ele recebe R\$ 12,00 por unidade vendida.

a) Expresse o ganho mensal (S) desse vendedor em função do número (u) de unidades vendidas.

b) Quantas unidades ele deve vender para receber um salário de R\$ 700,00 ?

c) Determine o domínio e a imagem desta função.

19) Um botijão de cozinha contém 13 kg de gás. Sabendo que em média é consumido, por dia, 0,5 kg de gás:

a) Expresse a massa (m) de gás no botijão, em função do número (t) de dias de consumo.
 b) Esboce o gráfico desta função.

c) Depois de quantos dias o botijão estará vazio ?

20) A água congela a 0°C e a 32°F ; ferv e a 100°C e 212°F . A temperatura em graus Fahrenheit (F) varia linearmente com a temperatura em graus Celsius (C).

a) Expresse a temperatura em F em função de C e faça o gráfico desta função.

b) A temperatura do corpo humano não febril é de 37°C . Qual é esta temperatura em graus Fahrenheit?



c) A que temperatura, em graus Celsius, corresponde 20° F.

21) Dois táxis têm preços dados por:

Táxi A: bandeirada a R\$ 4,00, mais R\$ 0,75 por quilômetro rodado;

Táxi B: bandeirada a R\$ 3,00, mais R\$ 0,90 por quilômetro rodado.

a) Obtenha a expressão que fornece o preço de cada táxi (P_A e P_B) em função da distância percorrida.

b) Para que distâncias é vantajoso tomar cada táxi?

22) De modo geral, a lei que rege as transações comerciais é dada por: $V = C + L$

Onde V = preço total de venda

C é o custo total do produto

L é o lucro total

Para produzir um objeto, uma firma gasta R\$1,20 por unidade produzida. Além disso, há uma despesa fixa de R\$4000,00, independente da quantidade produzida. O preço de venda é de R\$2,00 por unidade. Qual é o número mínimo de unidades a partir do qual a firma começa a ter lucro?

Respostas:

14) $y = -4x - 7$

15) $x < \frac{3}{2}$

16) a) $y = 3x + 1$

b) $y = \frac{-3x+1}{2}$

18) a) $S = 240 + 12u$

b) 39 unidades

c) $D(f) = [0, \infty)$

$Im(f) = [240, \infty)$

19) a) $m = 13 - 0,5t$

c) 26 dias

20) a) $F = 1,8C + 32$

b) $F = 98,6^\circ$

c) $C = -6,7^\circ$

21) a) $P_A = 4 + 0,75d$

$P_B = 3 + 0,90d$

b) Táxi A: a partir de 6,7 km

Táxi B: Até 6,7 km

22) 5000

18 FUNÇÃO DO 2º GRAU

Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função f de \mathbb{R} em \mathbb{R} dada por uma lei de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são números reais $\neq 0$.

Exemplos:

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde $a = 3$, $b = -4$ e $c = 1$

2. $f(x) = x^2 - 1$, onde $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$

3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde $a = 2$, $b = 3$ e $c = 5$

4. $f(x) = -x^2 + 8x$, onde $a = -1$, $b = 8$ e $c = 0$

5. $f(x) = -4x^2$, onde $a = -4$, $b = 0$ e $c = 0$

1) Gráfico

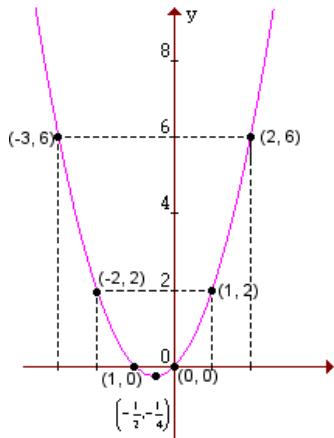
O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada parábola.

Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$:

Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

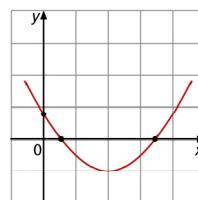
x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
2	6



Observação:

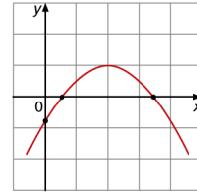
Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:

Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para



cima;

Se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para



baixo;

2) Zero da função

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.



Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara.

Temos:

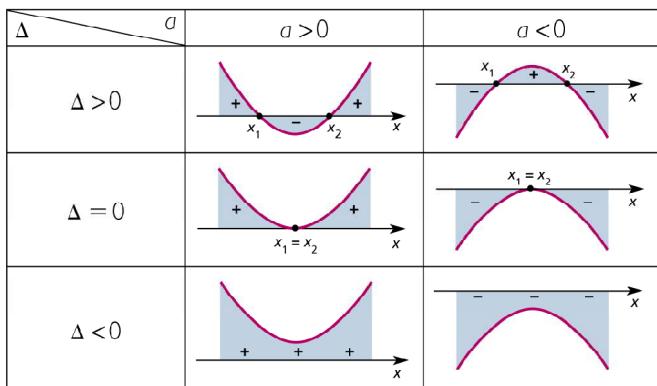
$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observação:

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante, a saber:

- quando Δ é positivo ($\Delta > 0$), a função tem duas raízes reais e distintas e a parábola corta o eixo x nesses dois pontos;
- quando Δ é zero ($\Delta = 0$), a função tem dois zeros reais e iguais e a parábola corta o eixo x em um único ponto;
- quando Δ é negativo ($\Delta < 0$), a função não tem nenhum zero real e a parábola não corta o eixo x.

3) Estudo do sinal



Vértice: $V = \left(-\frac{b}{a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

O vértice da parábola é ponto máximo quando $a < 0$.

O vértice da parábola é ponto mínimo quando $a > 0$.

Exercícios:

1-(ANGLO) O vértice da parábola $y = 2x^2 - 4x + 5$ é o ponto

- a) (2,5) b) $(-1, \sqrt{11})$ c) (-1,11) d)
 $(1, \sqrt{3})$ e) (1,3)

2-(ANGLO) A função $f(x) = x^2 - 4x + k$ tem o valor mínimo igual a 8. O valor de k é :

- a) 8 b) 10 c) 12 d) 14
 e) 16

3-(ANGLO) Se o vértice da parábola dada por $y = x^2 - 4x + m$ é o ponto (2, 5), então o valor de m é :

- a) 0 b) 5 c) -5 d) 9
 e) -9

4- (VUNESP) A parábola de equação $y = ax^2$ passa pelo vértice da parábola $y = 4x - x^2$.

- Ache o valor de a :
- a) 1 b) 2 c) 3 d) -1
 e) nda

5-(METODISTA) O valor mínimo da função $f(x) = x^2 - kx + 15$ é -1. O valor de k , sabendo que $k < 0$ é :

- a) -10 b)-8 c)-6 d)-1/2
 e)-1/8

6-(ANGLO) A parábola definida por $y = x^2 + mx + 9$ será tangente aos eixos das abscissas se, e somente se :

- a) $m = 6$ ou $m = -6$ b) $-6 < m < 6$ c)
 $-6 \leq m \leq 6$ d) $m \geq 6$ e) $m \leq -6$

7-(ANGLO) Considere a parábola de equação $y = x^2 - 4x + m$. Para que a abscissa e a ordenada do vértice dessa parábola sejam iguais, então m deve ser igual a :

- a) -14 b) -10 c) 2 d) 4
 e) 6

8-(VUNESP) O gráfico da função quadrática definida por $y = x^2 - mx + (m - 1)$, onde $m \in \mathbb{R}$, tem um único ponto em comum com o eixo das abscissas. Então, o valor de y que essa função associa a $x = 2$ é :

- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1
 e) 2

9-(UFPE) Planeja-se construir duas estradas em uma região plana. Colocando coordenadas cartesianas na região, as estradas ficam representadas pelas partes dos gráficos da parábola $y = -x^2 + 10x$ e da reta $y = 4x + 5$, com $2 \leq x \leq 8$. Qual a soma das coordenadas do ponto representando a interseção das estradas?

- a) 20 b) 25 c) 30 d) 35
 e) 40

10-(FATEC) A distância do vértice da parábola $y = -x^2 + 8x - 17$ ao eixo das abscissas é :

- a) 1 b) 4 c) 8 d) 17
 e) 34

11-(MACK-99) O gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (15 - m)$ tangencia o eixo das abscissas e corta o eixo das ordenadas no ponto $(0, k)$. Se a abscissa do vértice da parábola é negativa, k vale :

- a) 25 b) 18 c) 12 d) 9
 e) 6

12-(FUVEST-02) Os pontos $(0, 0)$ e $(2, 1)$ estão no gráfico de uma função quadrática f . O mínimo de f é assumido no ponto de abscissa $x = -1/4$. Logo, o valor de $f(1)$ é:



- a) 1/10 b) 2/10 c) 3/10 d) 4/10
e) 5/10

13-(FATEC) O gráfico de uma função f , do segundo grau, corta o eixo das abscissas para $x=1$ e $x=5$. O ponto de máximo de f coincide com o ponto de mínimo da função g , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definida por $g(x)=(2/9)x^2 - (4/3)x + 6$. A função f pode ser definida por

- a) $y = -x^2 + 6x + 5$ b) $y = -x^2 - 6x + 5$
c) $y = -x^2 - 6x - 5$ e) $y = x^2 - 6x + 5$

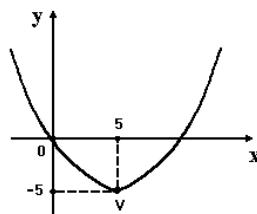
14-(UFPE) O gráfico da função quadrática $y=ax^2+bx+c$, x real, é simétrico ao gráfico da parábola $y=2-x^2$ com relação à reta de equação cartesiana $y=-2$. Determine o valor de $8a+b+c$.

- a) -4 b) 1/2 c) 2 d) 1
e) 4

15-(UEL) A função real f , de variável real, dada por $f(x)=-x^2+12x+20$, tem um valor

- a) mínimo, igual a -16, para $x = 6$
b) mínimo, igual a 16, para $x = -12$
c) máximo, igual a 56, para $x = 6$
d) máximo, igual a 72, para $x = 12$
e) máximo, igual a 240, para $x = 20$

16-(UFMG) Nessa figura, está representada a parábola de vértice V , gráfico da função de segundo grau cuja expressão é

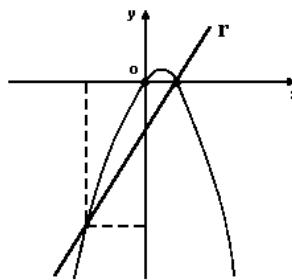


- a) $y = (x^2/5) - 2x$
b) $y = x^2 - 10x$
c) $y = x^2 + 10x$
d) $y = (x^2/5) - 10x$
e) $y = (x^2/5) + 10x$

17-(UFMG) A função $f(x)$ do segundo grau tem raízes -3 e 1. A ordenada do vértice da parábola, gráfico de $f(x)$, é igual a 8.

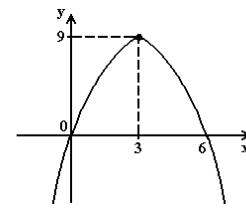
- A única afirmativa VERDADEIRA sobre $f(x)$ é
a) $f(x) = -2(x-1)(x+3)$ b) $f(x) = -(x-1)(x+3)$
c) $f(x) = -2(x+1)(x-3)$
d) $f(x) = (x-1)(x+3)$ e) $f(x) = 2(x+1)(x-3)$

18-(UFMG) Nessa figura, a reta r intercepta a parábola nos pontos $(-4, -24)$ e $(2, 0)$.



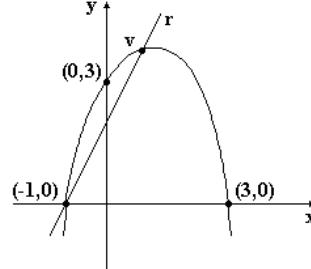
- a) Determine a equação da reta r .
b) Determine a equação dessa parábola.
c) Seja $f(x)$ a diferença entre as ordenadas de pontos de mesma abscissas x , nesta ordem: um sobre a parábola e o outro sobre a reta r .
d) Determine x para que $f(x)$ seja a maior possível.

19- (UFPE) O gráfico da função $y=ax^2+bx+c$ é a parábola da figura a seguir. Os valores de a , b e c são, respectivamente:



- a) 1, -6 e 0 b) -5, 30 e 0 c) -1, 3 e 0 d) -1, 6 e 0 e) -2, 9 e 0

20-(UFSC) A figura a seguir representa o gráfico de uma parábola cujo vértice é o ponto V .



A equação da reta r é:

- a) $y = -2x + 2$ b) $y = x + 2$ c) $y = 2x + 1$ d) $y = 2x + 2$. e) $y = -2x - 2$

21-(MACK) Se a função real definida por $f(x) = -x^2 + (4 - k^2)$ possui um máximo positivo, então a soma dos possíveis valores inteiros do real k é:

- a) -2. b) -1. c) 0. d) 1. e) 2.

22-(GV) A função f , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , dada por $f(x)=ax^2-4x+a$ tem um valor máximo e admite duas raízes reais e iguais. Nessas condições, $f(-2)$ é igual a

- a) 4 b) 2 c) 0 d) -1/2
e) -2

23-(UFPE) Qual o maior valor assumido pela função $f:[-7,10] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 5x + 9$?

24-(FUVEST) O gráfico de $f(x)=x^2+bx+c$, onde b e c são constantes, passa pelos pontos $(0,0)$ e $(1,2)$. Então $f(-2/3)$ vale



- a) - 2/9 b) 2/9 c) - 1/4 d) 1/4
e) 4

25-(PUCMG) Na parábola $y = 2x^2 - (m - 3)x + 5$, o vértice tem abscissa 1. A ordenada do vértice é:
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6
e) 7

26-(UFMG) O ponto de coordenadas (3,4) pertence à parábola de equação $y = ax^2 + bx + 4$. A abscissa do vértice dessa parábola é:
a) 1/2 b) 1 c) 3/2 d) 2

27-(UEL) Uma função f , do 2º grau, admite as raízes $-1/3$ e 2 e seu gráfico intercepta o eixo y no ponto $(0; -4)$. É correto afirmar que o valor
a) mínimo de f é $-5/6$
b) máximo de f é $-5/6$
c) mínimo de f é $-13/3$
d) máximo de f é $-49/9$
e) mínimo de f é $-49/6$

28-(CESGRANRIO) O ponto de maior ordenada, pertence ao gráfico da função real definida por $f(x) = (2x - 1)(3 - x)$, é o par ordenado (a, b) . Então $a - b$ é igual a:
a) $-39/8$ b) $-11/8$ c) $3/8$ d) $11/8$
e) $39/8$

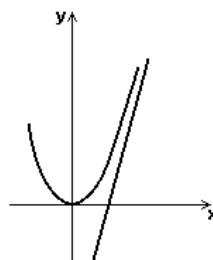
29-(UEL) Seja x um número real estritamente positivo. Sejam as funções f e g tais que f associa a cada x o comprimento da circunferência de raio x centímetros e g associa a cada x a área do círculo de raio x centímetros. Nessas condições, é verdade que
a) $f(x) > g(x)$ para $0 < x < 2$. b) $f(x) = g(x)$ para $x = 4$.
c) $g(x) > f(x)$ para $0 < x < 1$.
d) $f(x) > g(x)$ para $x > 10$.
e) $f(x) > g(x)$ para qualquer valor de x .

30-(PUCCAMP) A soma e o produto das raízes de uma função do 2º grau são, respectivamente, 6 e 5 . Se o valor mínimo dessa função é -4 , então seu vértice é o ponto
a) $(3, -4)$ b) $(11/2, -4)$ c) $(0, -4)$ d) $(-4; 3)$
e) $(-4, 6)$

31-(PUCRIO) O número de pontos de intersecção das duas parábolas $y=x^2$ e $y=2x^2-1$ é:
a) 0. b) 1. c) 2. d) 3.
e) 4.

32-(UFV) O gráfico da função real f definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a < 0$, passa pelos pontos $(-1, 10)$ e $(0, 5)$. Logo o conjunto de todos os valores possíveis de b é:
a) $\{b \in \mathbb{R} \mid b \leq -4\}$ b) $\{b \in \mathbb{R} \mid b < -5\}$
c) $\{b \in \mathbb{R} \mid b \leq -3\}$ d) $\{b \in \mathbb{R} \mid b \leq -2\}$
e) $\{b \in \mathbb{R} \mid b \leq -1\}$

33-(UFMG-01) Nessa figura, estão representados os gráficos das funções



$$f(x) = x^2/2 \text{ e } g(x) = 3x - 5.$$

Considere os segmentos paralelos ao eixo y , com uma das extremidades sobre o gráfico da função f e a outra extremidade sobre o gráfico da função g . Entre esses segmentos, seja S o que tem o menor comprimento. Assim sendo, o comprimento do segmento S é

- a) 1/2 b) 3/4 c) 1 d) 5/4

34-(UNIFESP-02) O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c números reais) contém os pontos $(-1, -1)$, $(0, -3)$ e $(1, -1)$.

O valor de b é:

- a) -2. b) -1. c) 0. d) 1
e) 2.

35-(PUCCAMP-01) Considere a função dada por $y=3t^2 - 6t+24$, na qual y representa a altura, em metros, de um móvel, no instante t , em segundos.

O valor mínimo dessa função ocorre para t igual a

- a) -2 b) -1 c) 0 d) 1
e) 2

36-(PUCCAMP-01) (Considere a função dada por $y=3t^2-6t+24$, na qual y representa a altura, em metros, de um móvel, no instante t , em segundos.

O ponto de mínimo da função corresponde ao instante em que

- a) a velocidade do móvel é nula.
b) a velocidade assume valor máximo.
c) a aceleração é nula.
d) a aceleração assume valor máximo.
e) o móvel se encontra no ponto mais distante da origem.

37-(PUCPR-01) O gráfico da função definida por $f(x) = x^2 + bx + \cos 8\pi/7$, $x \in \mathbb{R}$

- a) intercepta o eixo das abscissas em exatamente 2 pontos positivos.
b) intercepta o eixo das abscissas em exatamente 2 pontos negativos.
c) intercepta o eixo das abscissas em 2 pontos de sinais diferentes.
d) intercepta o eixo das abscissas na origem.
e) não intercepta o eixo das abscissas.

38-(UFAL) O gráfico da função quadrática definida por $f(x)=4x^2+5x+1$ é uma parábola de vértice V e intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B . A área do triângulo AVB é



- a) 27/8 b) 27/16 c) 27/32
d) 27/64 e) 27/128

39-(UFES-00) O gráfico da função $y = x^2 - 1$ é transladado de 3 unidades na direção e sentido do eixo x e de 1 unidade na direção e sentido do eixo y. Em seguida, é refletido em torno do eixo x. A figura resultante é o gráfico da função

- a) $y = -(x + 3)^2$ b) $y = -(x - 3)^2$ c) $y = -(x + 3)^2 - 2$ d)
 $y = (x - 3)^2 - 2$ e) $y = (x + 3)^2$

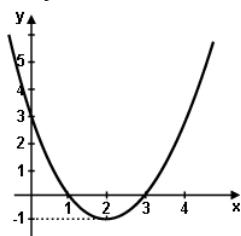
40-(PUCPR-04) O gráfico de uma função do segundo grau tem seu eixo de simetria na reta $x = 3$, tem uma raiz igual a 1 e corta o eixo dos y em $y = 25$, então seu conjunto imagem é:

- a) $[-20, \infty [$ b) $[20, \infty [$ c) $]-\infty, -20]$ d) $]-\infty, 20]$ e) $]-\infty, 25]$

41-(UFMG-04) O intervalo no qual a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ é crescente é:

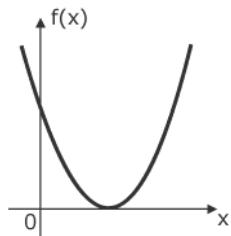
- a) $x < 5$ b) $1 < x < 5$ c) $x > 1$ d) $x > 3$

42-(UFSM-03) A parábola P representada na figura é o gráfico de uma função quadrática f. Se $y = g(x)$ for outra função quadrática cujas raízes sejam as mesmas de f e se o vértice do gráfico dessa g for simétrico ao vértice de P com relação ao eixo Ox, então $g(-1)$ vale



- a) -8 b) -6 c) 0 d) 6
e) 8

43-(MACK-03) Se a figura mostra o esboço do gráfico de $f(x) = ax^2 + 2bx + c$, então os números a, b e c sempre são:



- a) nessa ordem, termos de uma PA b) nessa ordem, termos de uma PG c) números inteiros.
d) tais que $a < b < c$. e) tais que $a > b > c$.

GABARITO

- 1) E 2) C 3) D 4) A 5) B 6) A 7) E 8) D 9) C 10) A
11) D 12) C 13) D 14) C 15) C 16) A 17) A 18) a) $4x + y + 8 = 0$
b) $y = -x^2 + 2x$ c) $x = -1$ 19) D 20) D
21) C 22) E 23) 93 24) A 25) A 26) C 27) E 28) B 29)

- A 30) A 31) C 32) B 33) A 34) C 35) D 36) A 37) C
38) E 39) B 40) A 41) D 42) A 43) B

19 FUNÇÃO MODULAR

Revisão:

19.1 Módulo (ou valor absoluto) de um número:

O módulo (ou valor absoluto) de um número real x, que se indica por $|x|$ é definido da seguinte maneira:

$$x = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Então, à se x é positivo ou zero, $|x|$ é igual ao próprio x.

Exemplos:

- a) $|2| = 2; |1/2| = 1/2; |15| = 15$
Então, à se x é negativo, $|x|$ é igual a $-x$.
b) $|-2| = -(-2) = 2; |-20| = -(-20) = 20$

O módulo de um número real é sempre positivo ou nulo. O módulo de um número real nunca é negativo. Representando geometricamente, o módulo de um número real x é igual a distância do ponto que representa, na reta real, o número x ao ponto 0 de origem. Assim:

- Se $|x| < a$ (com $a > 0$) significa que a distância entre x e a origem é menor que a, isto é, x deve estar entre $-a$ e a , ou seja, $|x| < a \Rightarrow -a < x < a$.



- Se $|x| > a$ (com $a > 0$) significa que a distância entre x e a origem é maior que a, isto é, deve estar à direita de a ou à esquerda de $-a$ na reta real, ou seja: $|x| > a \Rightarrow x > a$ ou $x < -a$.



19.2 Equações modulares

Toda equação que contiver a incógnita em um módulo num dos membros será chamada equação modular.

Exemplos:

- a) $|x^2 - 5x| = 1$
b) $|x+8| = |x^2 - 3|$

Algumas equações modulares resolvidas:



1) Resolver a equação $|x^2 - 5x| = 6$.

Solução:

Temos que analisar dois casos:

caso 1: $x^2 - 5x = 6$

caso 2: $x^2 - 5x = -6$

Resolvendo o caso 1:

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x' = 6 \text{ e } x'' = -1.$$

Resolvendo o caso 2:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x' = 3 \text{ e } x'' = 2.$$

Resposta: $S = \{-1, 2, 3, 6\}$

2) Resolver a equação $|x - 6| = |3 - 2x|$.

Solução:

Temos que analisar os dois casos:

caso 1: $x - 6 = 3 - 2x$

caso 2: $x - 6 = -(3 - 2x)$

Resolvendo o caso 1:

$$x - 6 = 3 - 2x \Rightarrow x + 2x = 3 + 6 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Resolvendo o caso 2:

$$x - 6 = -(3 - 2x) \Rightarrow x - 2x = -3 + 6 \Rightarrow -x = 3 \Rightarrow x = -3$$

Resposta: $S = \{-3, 3\}$

Outros exemplos:

1: $|x| = 7 \Leftrightarrow x = 7 \text{ ou } x = -7$

2: $|x + 1| = 5$

$$x + 1 = 5 \Leftrightarrow x = 5 - 1 \Leftrightarrow x = 4$$

$$-x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = -5 - 1 \Leftrightarrow x = -6$$

Observação: Esta segunda parte poderia também ser resolvida como: $x + 1 = -5$ ou $x = -6$.

3: $|2x - 3| = 4$

$$2x - 3 = 4 \Leftrightarrow 2x = 4 + 3 \Leftrightarrow x = 7/2$$

$$-2x + 3 = 4 \Leftrightarrow -2x = 4 - 3 \Leftrightarrow x = -1/2 \text{ ou então fazendo } 2x - 3 = -4, \text{ que gera } 2x = -1 \text{ ou } x = -1/2.$$

4: $|5x - 1| = -8$

Esta equação não possui solução uma vez que não é possível que o módulo resulte num número negativo (-8).

5: $|x^2 - 3| = 13$

$$x^2 - 3 = 13 \Leftrightarrow x^2 = 13 + 3 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$-x^2 + 3 = 13 \Leftrightarrow x^2 = -13 + 3 \Leftrightarrow x^2 = -10 \Leftrightarrow S = \emptyset$$

Poderia também fazer: $x^2 - 3 = -13$ ou ainda $x^2 = -10$, o que acarreta em solução vazia, no campo dos números reais.

6: $|x + 3| = 2x - 5$

$$x + 3 = 2x - 5 \Leftrightarrow x = 5 + 3 \Leftrightarrow x = 8$$

$$-x - 3 = 2x - 5 \Leftrightarrow 3x = 5 - 3 \Leftrightarrow x = 2/3$$

(esta solução não serve, pois o resultado de um módulo, no caso $2x - 5$, deve ser maior ou igual a zero $\Leftrightarrow 2x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 5/2$), logo teremos: $S = \{8\}$

7: $|x|^2 - 5|x| + 6 = 0$

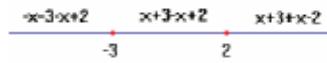
Troca-se $|x|$ por $y: y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = 3$

Assim que encontramos os valores para y , retornamos em $|x|$, para encontrarmos o valor de x .

$$|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$|x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

8: $|x + 3| + |x - 2| = 4$



$x + 3 + x - 2 = 4 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 1,5$ (não serve, pois x deve ser maior que 2)

$$x + 3 - x + 2 = 4 \Leftrightarrow 0x = -1 \Leftrightarrow \text{impossível}$$

$-x - 3 - x + 2 = 4 \Leftrightarrow -2x = 5 \Leftrightarrow x = -2,5$ (não serve, pois x deve ser menor que -3) Solução vazia.

19.3 Inequações modulares

Chamamos de inequações modulares as inequações nos quais aparecem módulos de expressões que contém a incógnita. Algumas inequações modulares resolvidas:

- Dê o conjunto solução da equação $|x^2 - 2x + 3| = 4$.

Solução:

$$|x^2 - 2x + 3| = 4 \Leftrightarrow -4 = x^2 - 2x + 3 = 4.$$

Então temos duas inequações (que devem ser satisfeitas ao mesmo tempo):

$$\text{Eq.1: } -4 = x^2 - 2x + 3$$

$$\text{Eq.2: } x^2 - 2x + 3 = 4$$

Resolvendo a Eq.1:

$$-4 = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow -4 - 3 = x^2 - 2x \Rightarrow -7 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 7 = 0 \Rightarrow \text{sem raízes reais.}$$

Resolvendo a Eq.2:

$$x^2 - 2x + 3 = 4$$



Aplicando Bháskara encontramos as raízes $x' = 1 - \sqrt{2}$ e $x'' = 1 + \sqrt{2}$

Solução: $S = \{x \in \mathbb{R} / 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}\}$

Outros exemplos:

1: $|x| > 3$

$$x > 3$$

$$-x > 3 \Leftrightarrow x < -3$$

A solução será a união desses dois intervalos:



$$S = \{x \in \mathbb{R} / x < -3 \text{ e } x > 3\}$$

2: $|x| \leq 3$

$$x \leq 3$$

$$-x \leq 3 \Leftrightarrow x \geq -3$$

A solução será a interseção desses dois intervalos:



$$S = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 3\}$$

3: $|2x - 5| < 6$

$$2x - 5 < 6 \Leftrightarrow 2x < 11 \Leftrightarrow x < 5,5$$

$$-2x + 5 < 6 \Leftrightarrow -2x > 1 \Leftrightarrow x > -1/2$$

A solução será a interseção desses dois intervalos:



$$S = \{x \in \mathbb{R} / -0,5 < x < 5,5\}$$

4: $|x^2 - 2| \geq 7$

$$x^2 - 2 \geq 7 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3$$

$$-x^2 + 2 \geq 7 \Leftrightarrow -x^2 - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

A solução será a união desses dois intervalos:



$$S = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -3 \text{ e } x \geq 3\}$$

19.4 Módulo e raiz quadrada

Consideremos os números reais x e y . Temos por definição que $\sqrt{x} = y$, se e somente se, $y^2 = x$. Daí podemos concluir que $\sqrt{x^2} = x$.

Se tivermos $x < 0$, não podemos afirmar que $\sqrt{x^2} = x$, pois isso contradiz a definição.

Por exemplo, se $x = -3$, teríamos: $\sqrt{(-3)^2} = -3$ o que é um absurdo, pois o primeiro membro é positivo e o segundo negativo. Usando a definição de módulo, podemos escrever:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

o que é verdadeiro para todo x real.

Devemos proceder da mesma forma em relação a todas raízes de índice par:

19.5 Função modular

Chamamos de função modular a função $f(x) = |x|$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observe, então, que a função modular é uma função definida por duas sentenças.

Exemplos:

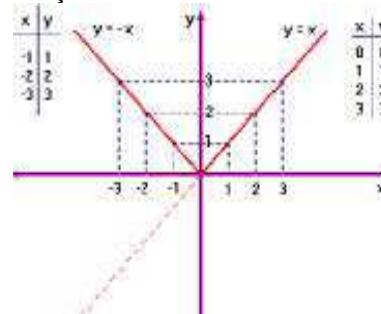
1: $f(x) = |x|$.

Para ser efetuada a construção gráfica, a função modular será desmembrada em duas:

$$\begin{cases} y = x, & \text{se } x \geq 0 \\ y = -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observe que a função que estava dentro do módulo (no caso a função identidade $y = x$) foi mantida para valores de y positivos (acima do eixo x).

Já para valores negativos de y (abaixo do eixo x) a função foi rebatida em relação ao eixo x . Foi obtida uma nova função ($y = -x$) simétrica à anterior em relação ao eixo x .



$$D = \mathbb{R}$$

$$\text{Im} = \mathbb{R}_+$$

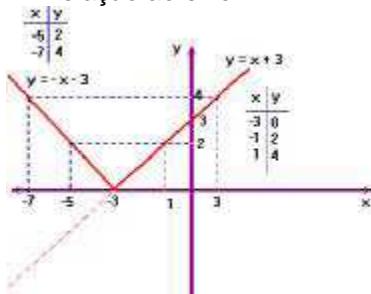
Resumindo: a parte da função que estava “em baixo” do eixo x foi refletida para cima do eixo x . Essa idéia valerá para todas as funções modulares. Daí em diante, o gráfico da função modular será construído usando tal idéia.

2: $f(x) = |x + 3|$. As funções equivalentes serão:
 $\begin{cases} x + 3, & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 3, & \text{se } x < -3 \end{cases}$



A função que estava dentro do módulo ($y = |x + 3|$) foi mantida para valores de x maiores que 3 (acima do eixo x).

Já para valores menores que 3 (abaixo do eixo x), a função foi rebatida em relação ao eixo x . Foi obtida uma nova função ($y = -x - 3$) simétrica à anterior em $D = \mathbb{R}$ relação ao eixo x .



Observe também que esta função foi deslocada de 3 unidades para esquerda em relação à função anterior $y = |x|$.

3: $f(x) = |x + 3| - 2$. As funções equivalentes serão:

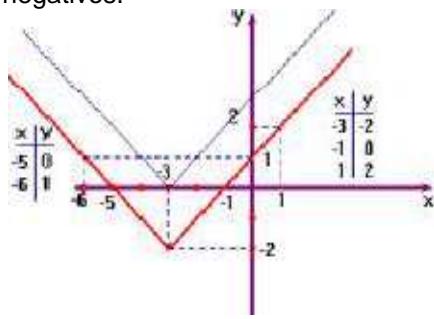
$$\begin{cases} x + 1, & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 5, & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

$$y = |x + 3|$$

$$y = |x + 3| - 2$$

Comparando com a função anterior $y = |x + 3|$, constata-se um deslocamento para baixo de 2 unidades.

Com isso a imagem passa a incluir números reais negativos.

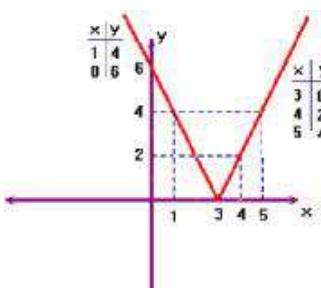


$D = \mathbb{R}$ e $\text{Im} = [2, +\infty[$

4: $f(x) = |2x + 6|$. As funções equivalentes serão:

$$\begin{cases} 2x + 6, & \text{se } x \geq -3 \\ -2x - 6, & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

O gráfico mudou de inclinação uma vez que o coeficiente angular ($a = 2$) da função de primeiro grau que está dentro do módulo foi aumentado em relação às anteriores.



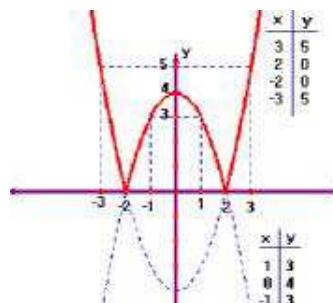
$D = \mathbb{R}$ e $\text{Im} = \mathbb{R}_+$

5: $f(x) = |x^2 - 4|$. As funções equivalentes serão:

$$\begin{cases} x^2 - 4, & \text{se } x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2 \\ -x^2 + 4, & \text{se } -2 < x < 2 \end{cases}$$

As partes da parábola $y = x^2 - 4$ à direita do 2 e à esquerda do -2 foram mantidas uma vez que tinham y não negativo ("acima" ou no próprio eixo x).

Já a parte da parábola que estava situada entre $-2 < x < 2$ foi rebatida para cima, visto que tinham sinal negativo de y (abaixo do eixo x).



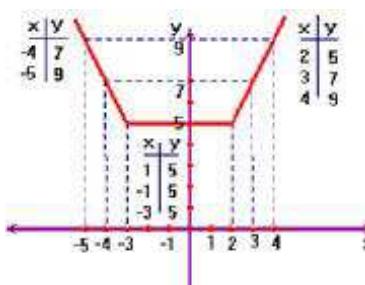
$D = \mathbb{R}$ e $\text{Im} = \mathbb{R}_+$

6: $f(x) = |x + 3| + |x - 2|$. As funções equivalentes serão:

$$\begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \geq 2 \\ 5, & \text{se } -3 < x < 2 \\ -2x - 1, & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} -x-3 \quad x+3 \quad x+3 \\ -3 \quad -x+2 \quad x-2 \\ -x-3-x+2 \quad x+3+x-2 \\ -3 \quad z \end{array}$$

Note que agora a função foi dividida em três partes. Uma reta crescente ($a > 0$) para valores de x maiores ou iguais a 2, uma reta constante para x entre -3 e 2 e uma reta decrescente ($a < 0$) para valores de x menores que -3.



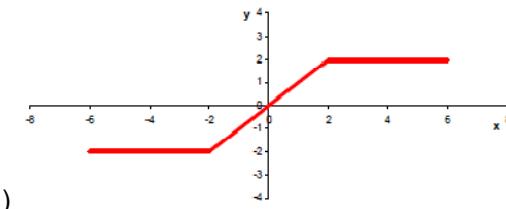
$D = \mathbb{R}$ e $\text{Im} = \mathbb{R}_+$



Exercícios

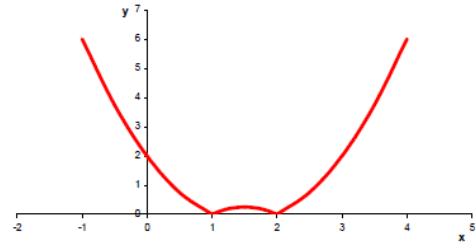
- 1) Construir o gráfico da função definida em R.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{se } x \leq -2 \\ x, & \text{se } -2 < x < 2 \\ 2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



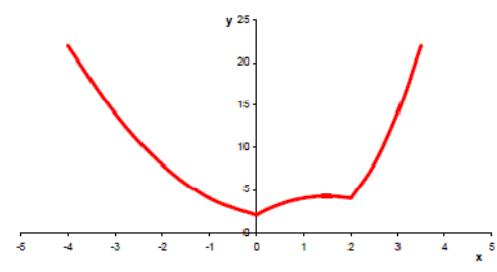
1)

- 2) Construa o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.



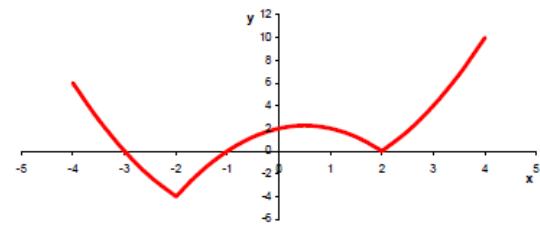
2)

- 3) Construa o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 2x| + x + 2$.



3)

- 4) Construa o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 4| - |x - 2|$



4)

- 5) Resolver as seguintes equações em R:

- a) $|3x - 1| = 2$
b) $|2x - 3| = -1$
c) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

- 6) Resolver em R as seguintes equações:

- a) $|4x - 1| - |2x + 3| = 0$
b) $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$

- 7) Resolver as seguintes equações em R:

- a) $|2x - 5| = x - 1$
b) $|2x^2 + 15x - 3| = x^2 + 2x - 3$

- 8) Resolver em R as inequações abaixo:

- a) $|4 - 3x| \leq 5$
b) $|4x - 7| \geq -1$

- 9) Resolver em R as inequações abaixo:

- a) $|x^2 - 5x + 5| < 1$
b) $\left|\frac{x+1}{2x-1}\right| \leq 2$

- 10) Resolver em R as seguintes inequações:

- a) $|x - 1| - 3x + 7 \leq 0$
b) $|x^2 - 4x| - 3x + 6 \leq 0$

- 11) Resolver as seguintes inequações em R:

- a) $|x - 2| - |x + 4| \leq 1 - x$
b) $|x - 2| - |x + 3| \geq x^2 - 4x + 3$

Respostas:

5) a) $S = \left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$ b) $S = \emptyset$ a) $S = \{1, 3\}$

6) a) $S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$ b) $S = \{-6, -1, 1, 4\}$

7) a) $S = \{2, 4\}$ b) $S = \{-6, -13\}$

8) a) $S = \left\{x \in R / -\frac{1}{3} \leq x \leq 3\right\}$ b) $S = R$

9) a) $S = \{x \in R / 1 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
b) $S = S_1 \cap S_2 = \left\{x \in R / x \leq \frac{1}{5} \text{ ou } x \geq 1\right\}$

10) a) $S = \{x \in R / x \geq 3\}$
b) $S = \{x \in R / 3 \leq x \leq 6\}$

11) a) $S = \{x \in R / x \leq -5 \text{ ou } -3 \leq x \leq 7\}$
b) $S = \emptyset$

20 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Função exponencial é toda equação que contém variáveis no expoente. Para resolvê-la devemos



transformar a equação em uma igualdade de mesma base.

Para resolver equações exponenciais, devemos realizar dois passos importantes:

1º) redução dos dois membros da equação a potências de mesma base;

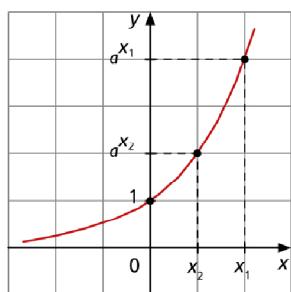
2º) aplicação da propriedade:

$$a^m = a^n \Rightarrow m = n \quad (a \neq 0 \text{ e } a > 0)$$

Condição de existência da função exponencial:

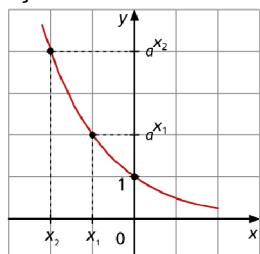
$$f: R \rightarrow R^* \quad f(x) = a^x \quad (a \in R, a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

Se $a > 1$, a função é crescente.



$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

Se $0 < a < 1$, a função é decrescente.



$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

Domínio: $D = R$

Imagem: $Im = R^*$

Observações:

- o gráfico nunca intercepta o eixo horizontal; a função não tem raízes;
- o gráfico corta o eixo vertical no ponto $(0, 1)$;
- os valores de y são sempre positivos (potência de base positiva é positiva), portanto o conjunto imagem é $Im = R^*$.

Gráfico:

Temos dois casos a considerar:

- 1) quando $a > 1$
- 2) quando $0 < a < 1$

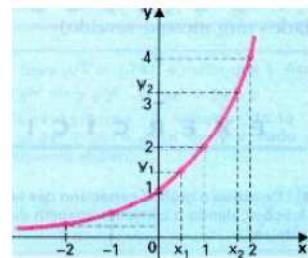
Exemplos:

$$1) \quad y=2^x$$

Condição de Existência (CE) :Nesse caso $a=2$, logo $a > 1$.

Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y , obtemos a tabela e o gráfico:

x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4

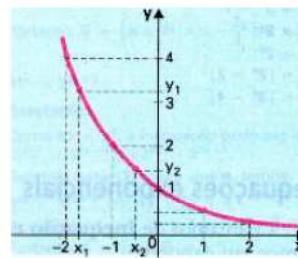


$$2) \quad y=(1/2)^x$$

CE: Nesse caso, $a = 1/2$, logo $0 < a < 1$.

Atribuindo alguns valores a x e calculando os correspondentes valores de y , obtemos a tabela e o gráfico:

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	1/2	1/4



1) Propriedades de potenciação

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

2) Equação exponencial

É toda equação cuja incógnita está no expoente de uma potência:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Exemplos:

$$1) \quad 3^x = 81$$

Solução:

Como $81 = 3^4$, podemos escrever $3^x = 3^4$

E dai, $x=4$.

$$2) \quad 9^x = 1$$

Solução:

$$9^x = 1 \rightarrow 9^x = 9^0 \rightarrow \text{Logo } x = 0.$$

$$3) \quad \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256}$$

Solução:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3^4}{4^4} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$



Logo: $x = 4$

4) $3^x = \sqrt[4]{27}$

Solução:

$$3^x = \sqrt[4]{27} \Rightarrow 3^x = \sqrt[4]{3^3} \Rightarrow 3^x = 3^{\frac{3}{4}}; \log x = \frac{3}{4}$$

5) $2^{3x-1} = 32^{2x}$

Solução:

$$2^{3x-1} = 32^{2x} \rightarrow 2^{3x-1} = (2^5)^{2x} \rightarrow 2^{3x-1} = 2^{10x}$$

Daí: $3x - 1 = 10$, de onde $x = -\frac{1}{7}$

6) Resolva a equação $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$.

Solução:

Vamos resolver esta equação através de uma transformação:

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$$

Fazendo $3^x = y$, obtemos:

$$y^2 - 6y - 27 = 0$$

Aplicamos Bhaskara encontramos $y_1 = -3$ e $y_2 = 9$.

Para achar o x , devemos voltar os valores para a equação auxiliar $3^x = y$, logo:

$$y_1 = -3 \rightarrow 3^x = -3 \text{ não existe } x^*, \text{ pois potência de base positiva é positiva}$$

$$y_2 = 9 \rightarrow 3^x = 9 \rightarrow 3^x = 3^2 \rightarrow x = 2$$

Portanto a solução é $x = 2$.

3) Inequação exponencial

É toda desigualdade cuja incógnita está no expoente de uma potência:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ se } a > 1 \text{ (} f(x) \text{ é crescente).}$$

(Note que o sentido da desigualdade se mantém)

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \text{ se } a > 1 \text{ (} f(x) \text{ é crescente).}$$

(Note que o sentido da desigualdade é invertido)

Exemplos:

1) $3^x > 81$ (a solução é $x > 4$)

2) $2^{2x-2} \leq 2^{x^2-1}$ (que é satisfeita para todo x real)

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^x \geq \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$ (que é satisfeita para $x \leq -3$)

4) $25^x - 150 \cdot 5^x + 3125 < 0$ (que é satisfeita para $2 < x < 3$)

5) $4^{x-1} + 4^x - 4^{x+1} > -\frac{11}{4}$

Solução:

A inequação pode ser escrita $\frac{4^x}{4} + 4^x - 4^x \cdot 4 > -\frac{11}{4}$

Multiplicando ambos lados por 4 temos:

$4^x + 4 \cdot 4^x - 4^x \cdot 16 > -11$, ou seja:

$$4^x(1 + 4 - 16) > -11 \rightarrow 4^x \cdot (-11) > -11$$

E daí, $4^x < 1$

Porém, $4^x < 1 \rightarrow 4^x < 4^0$.

Como a base 4 é maior que 1, obtemos:

$$4^x < 4^0 \rightarrow x < 0$$

Portanto, $S = \mathbb{R}^-$ (Reais negativos)

Observação:

A **função exponencial** é uma das mais importantes funções da matemática. Descrita como e^x (onde e é a constante matemática neperiana, base do logaritmo neperiano), pode ser definida de duas maneiras equivalentes: a primeira, como uma série infinita; a segunda, como limite de uma seqüência:

$$1^o) e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$2^o) e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Exercícios:

1) (UFMG) O conjunto de todos os valores de x que satisfazem a equação abaixo é :

$$3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3}$$

a) vazio

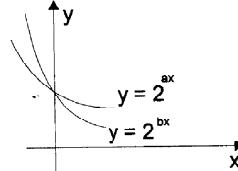
b) zero

c) -1 e 1

d) 3 e $1/3$

2) (UFMG) Na figura, estão representados os gráficos das funções $f(x) = 2^{ax}$ e $g(x) = 2^{bx}$

A afirmativa correta é:



3) (UFMG) A soma das raízes da equação abaixo, é:

$$3^{1+x} + \frac{1}{7^x} = 8$$

a) 0

b) -1

c) 1

d) 7

4) (UFMG) Seja $(x + 2)^{1/3} = 3$, $x > 0$. Pode-se afirmar que $x^{-3/2}$ vale:

a) 0,002

b) 0,008

c) 0,025

d) 0,125

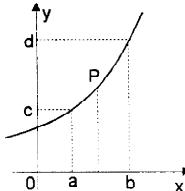
5) (UFMG)- A figura é um esboço do gráfico da função $f(x) = 2^x$. A ordenada do ponto P de abscissa $(a + b)/2$ é:

a) cd

b) $(c+d)/2$

c) $(cd)/2$

d) $(cd)/12$





6) (UFMG) A solução da equação $2^{3x+2} - 2^{3x+1} + 2^{3x-1} = 50^x$, é um número:

- a) menor que -3
- b) entre -2 e -1
- c) entre 0 e 1
- d) entre 2 e 3

7) (PUC) Se $a=16$ e $x = 1,25$, qual o valor de a^x ?

- a) $2^{1/2}$
- b) 32
- c) 20
- d) 64

8) (UFES) Se x e y são números tais que $2^x = m$ e $2^y = n$ então 4^{x-y} é igual a:

- a) $2(m-n)$
- b) $(m-n)/2$
- c) $-m/n$
- d) $(m/n)^2$

9) (UFRN) $2^{3/2} \cdot 4^{1/2} : 8^{5/6}$ é igual a :

- a) 1
- b) 2
- c) $4^{1/2}$
- d) $8^{3/4}$

10) (PUC) se $2^8 \cdot 5^5 = 0,8 \cdot 10^n$, o valor de n é:

- a) 6
- b) 5
- c) -1
- d) 2

11) (MACK) Determine o valor de $A^2 - B^2$, sendo:

$$A = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad B = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}$$

- a) 0
- b) 1
- c) -1
- d) 2

12) (PUC) Se $3^3 \cdot 2^5 = 4 \cdot 6^k$ então o valor de k é :

- a) 15
- b) 8
- c) 6
- d) 3

13) (FGV) O conjunto solução da equação abaixo é :

$$x^{3^3 - 8} = 1$$

- a) -1
- b) 1
- c) 0
- d) 2

14) Determine a solução da equação :

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 9 = 0$$

- a) 0
- b) 1

- c) 2
- d) 3

15) Determine o valor de $x - y$. x e y são as soluções do sistema abaixo:

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases}$$

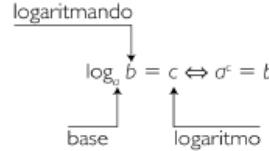
- a) -2
- b) -2
- c) 0
- d) 1

GABARITO

1-c	2-a	3-b	4-b	5-d	6-c	7-d
14-d	15-a					

21 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Notação



In: logaritmo neperiano, $\ln b = \log_e b$, $e \approx 2,71$

$\log_{10} b$: logaritmo decimal, $\log_{10} b = \log b$

Definição: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, para $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$ (condição de existência de um logaritmo)

1) Consequências da definição:

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^n = n$
- $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

2) Propriedades operatórias

$$1.^{\text{a})} \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \text{ com } a > 0, b > 0, c > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$2.^{\text{a})} \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \text{ com } a > 0, b > 0, c > 0 \text{ e } a \neq 1$$

$$3.^{\text{a})} \log_a b^n = n \cdot \log_a b, \text{ com } a > 0, b > 0, c > 0 \text{ e } a \neq 1$$

3) Cologaritmo

Cologaritmo de um número b na base ($a > 0$, $b < 0$ e $a \neq 1$) é o logaritmo do inverso do número b na base a . Indicamos por:

$$\text{colog}_a b = \log_a \frac{1}{b} \text{ ou } \text{colog}_a b = -\log_a b, \text{ com } a > 0, b > 0 \text{ e } a \neq 1$$

4) Mudança de base

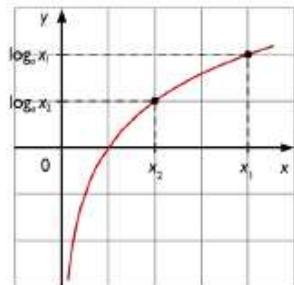
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ com } a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1 \text{ e } c \neq 1$$

5) Função Logarítmica

$$f: R_+^* \rightarrow R, \quad f(x) = \log_a b \quad (0 < a \neq 1)$$

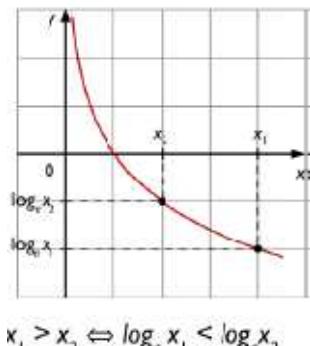


Se $a > 1$, f é crescente



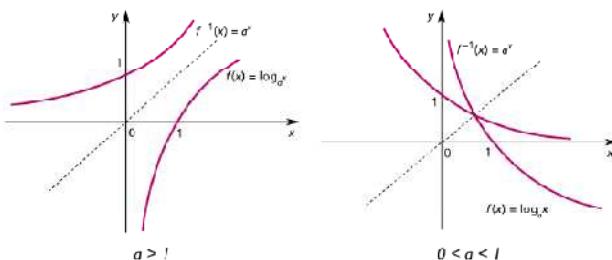
$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Se $0 < a < 1$, f é decrescente



$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

A função $f(x) = \log_a x$ admite a inversa, que é $f^{-1}(x) = a^x$



21.1 Equação logarítmica

É toda equação cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos.

Exemplos:

1) $\log_3 x = 5$ (a solução é $x = 243$)

2) $\log(x^2 - 1) = \log 3$ (as soluções são $x' = -2$ e $x'' = 2$)

3) $\log_2(x+3) + \log_2(x-3) = \log_2 7$ (a solução é $x=4$)

4) $\log_{x+1}(x^2 - x) = 2$ (a solução é $x = -1/3$)

5) $\log_3(x+5) = 2$

Solução:

Condição de existência: $x+5 > 0 \rightarrow x > -5$

$\log_3(x+5) = 2 \rightarrow x+5 = 3^2 \rightarrow x = 9 - 5 \rightarrow x = 4$

Como $x=4$ satisfaz a condição de existência, então o conjunto solução é $S=\{4\}$.

6) $\log_2(\log_4 x) = 1$

Solução:

Condição de existência: $x > 0 \log_4 x > 0$

$$\log_2(\log_4 x) = 1; \text{ sabemos que } 1 = \log_2(2), \text{ então } \log_2(\log_4 x) = \log_2(2) \rightarrow \log_4 x = 2 \rightarrow 4^2 = x \rightarrow x = 16$$

Como $x=16$ satisfaz as condições de existência, então o conjunto solução é $S=\{16\}$.

3) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \log x + \log y = 7 \\ 3 \log x - 2 \log y = 1 \end{cases}$$

Solução:

Condições de existência: $x > 0$ e $y > 0$

Da primeira equação temos:

$$\log x + \log y = 7 \rightarrow \log y = 7 - \log x$$

Substituindo $\log y$ na segunda equação temos:

$$3 \cdot \log x - 2 \cdot (7 - \log x) = 1 \rightarrow 3 \cdot \log x - 14 + 2 \cdot \log x = 1 \rightarrow 5 \cdot \log x = 15 \rightarrow \log x = 3 \rightarrow x = 10^3$$

Substituindo $x = 10^3$ em $\log y = 7 - \log x$ temos:

$$\log y = 7 - \log 10^3 \rightarrow \log y = 7 - 3 \rightarrow \log y = 4 \rightarrow y = 10^4$$

Como essas raízes satisfazem as condições de existência, então o conjunto solução é $S=\{(10^3, 10^4)\}$.

21.2 Inequação logarítmica

É toda inequação cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos.

Exemplos:

1) $\log_2 x > 0$ (a solução é $x > 1$)

2) $\log_2(x+2) > \log_2 8$

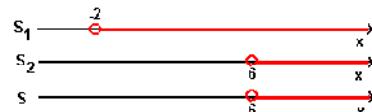
Solução:

Condições de existência:

(S1) $x+2 > 0$, ou seja, $x > -2$

(S2) Como a base (2) é maior que 1, temos:
 $x+2 > 8$ e, dai, $x > 6$

Portanto a solução final é a intersecção de S1 e S2:



O conjunto solução é $S=S1 \cap S2 = \{x \in \mathbb{R} | x > 6\}$.

3) $\log_2(\log_3 x) \geq 0$

Solução:

Condições de existência:

$$X > 0 \text{ e } \log_3 x > 0$$



Como $\log_2 1 = 0$, a inequação pode ser escrita assim
 $\log_2 (\log_3 x) \geq \log_2 1$

Sendo a base (2) maior que 1, temos: $(\log_3 x) \geq 1$.

Como $(\log_3 3 = 1)$, então, $(\log_3 x \geq (\log_3 3))$ e, dai, $x \geq 3$, porque a base (3) é maior que 1.

As condições de existência estão satisfeitas, portanto
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

Exercícios

1) (F.G.V - 72) Seja x o numero cujo logaritmo na base $\sqrt[3]{9}$ vale 0,75. Então $x^2 - 1$ vale:

R: 2

2) (PUC-SP-77) O numero, cujo logaritmo na base a é 4 e na base $a/3$ é 8, é:

R: 6561

3) (U.MAC.-75) O logaritmo de 144 no sistema de base $2\sqrt{3}$ é igual a:

R: 4

4) (PUC-SP-80) Se $x + y = 20$ e $x - y = 5$, então $\log_{10}(x^2 - y^2)$ é igual a:

R: 2

5) (U.MACK.-77) O valor de A tal que $4^{\log_2 A} + 2A - 2 = 0$ é:

R: $\sqrt{3} - 1$

6) (PUC-SP-77) Se $\log_a x = n$ e $\log_a y = 6n$, então, $\log_a 3\sqrt{x^2 y}$ é igual a:

R: $2/3.n + 1/3.n$

7) (EPUSP-67) Se $\log_2(a - b) = 16$ e $(a + b) = 8$, então, $\log_2(a^2 - b^2)$ é igual a:

R: 7

8) (PUC-SP-79) Se $\log a + \log b = p$, então $\log 1/a + \log 1/b$ vale:

R: - p

9) (UFBA-81) Sendo $\log 2 = 0,3$ e $x = 64$, então o $\log x$ é:

R: 1,8

10) (PUC-SP-79) Se $\log_{10} 2 = 0,3$, então $\log_{10} 5$ é igual a:

R: 0,7

11) (CESCEA-75) Sabendo que $\log 2 = 0,3$, determinar o valor da expressão $\log 25$

R: 1,4

12) (EAESP-FGV-80) Sabendo-se que $\log_{10} 2 = 0,3$ e $\log_{10} 3 = 0,48$, então $\log_{10} 0,6$ é igual a:

R: - 0,22

13) (CESGRANRIO-85) Se $\log a = 0,48$ e $\log b = 0,3$, então $\log a/b$ é:

R: 0,18

14) (FEI-66) A soma dos logaritmos de dois números na base 9 é 0,5. O produto desses números é:

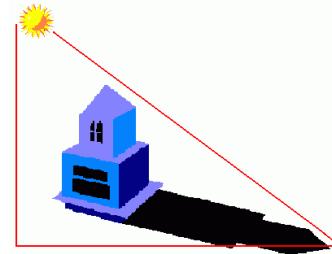
R: 3

22 TRIGONOMETRIA

A trigonometria possui uma infinidade de aplicações práticas. Desde a antiguidade já se usava da trigonometria para obter distâncias impossíveis de serem calculadas por métodos comuns.

Algumas aplicações da trigonometria são:

Determinação da altura de um certo prédio.

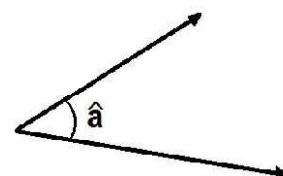


Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.

Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

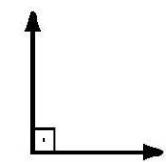
Tudo isto é possível calcular com o uso da trigonometria do triângulo retângulo.

Ângulo é uma figura plana formada por duas semirretas de mesma origem. As semirretas chamam-se *lados* do ângulo e o ponto de origem chama-se *vértice*.



Ângulo raso: ângulo de medida 180° (seus lados

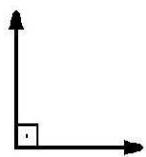
180° formam uma reta).



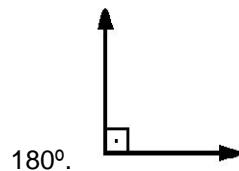
Ângulo reto: ângulo de medida 90° .



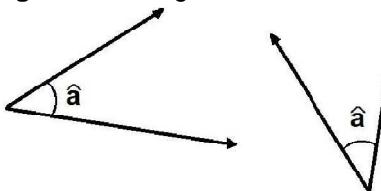
Ângulo agudo: ângulo cuja medida está entre 0° e 90° .



Ângulo obtuso: ângulo cuja medida está entre 90° e 180° .

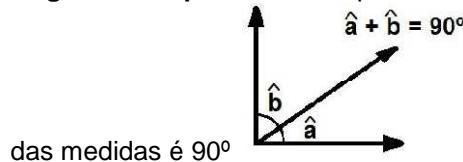


Ângulos congruentes: ângulos de mesma medida



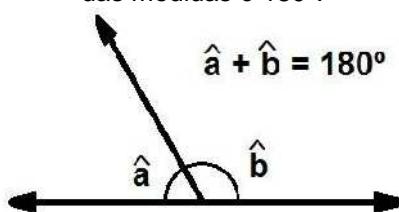
(símbolo).

Ângulos Complementares: par de ângulos cuja soma

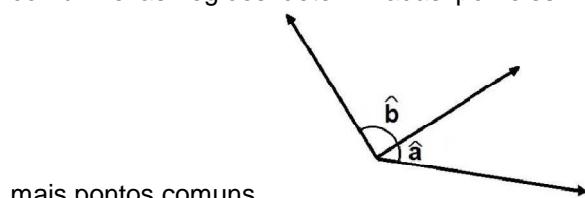


das medidas é 90°

Ângulos suplementares: par de ângulos cuja soma das medidas é 180° .



Ângulos adjacentes: ângulos que possuem um lado comum e as regiões determinadas por eles não tem



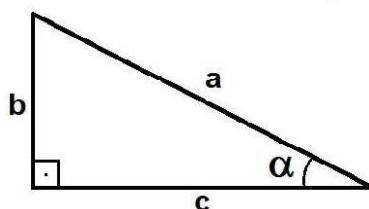
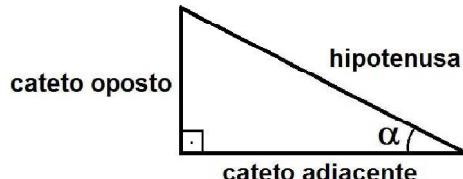
mais pontos comuns.

22.1 Funções trigonométricas básicas

As Funções trigonométricas básicas são relações entre as medidas dos lados do triângulo retângulo e seus ângulos. As três funções básicas mais importantes da trigonometria são: seno, cosseno e tangente.

As definições dos valores de seno, cosseno e tangente tomam como referência a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo, ou seja, um triângulo

em que um dos ângulos mede 90° . O lado que fica oposto ao ângulo de 90° é chamado de hipotenusa, enquanto os lados que formam o ângulo de 90° são os catetos.



Tomando um ângulo "a" como referência neste triângulo, nota-se que um dos catetos ficará na frente desse ângulo, e é chamado de cateto oposto, enquanto o outro cateto, cujo lado está junto desse ângulo, é chamado de cateto adjacente.

Para facilitar as demonstrações chamamos de:

"a" a medida da hipotenusa

"b" a medida do cateto oposto ao ângulo α

"c" a medida do cateto adjacente ao ângulo α

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

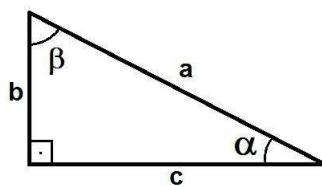
Simplificando:

$$\text{sen}\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{cos}\alpha = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{b}{c}$$

Agora, tomando β como referência, os valores de seno, cosseno e tangente mudam, pois o lado "c" passa a ser o cateto oposto e o lado "b" o cateto adjacente ao ângulo β .



No triângulo, os ângulos de 30° , 45° e 60° são considerados notáveis, pois estão presentes em diversos cálculos. Por isso seus valores trigonométricos correspondentes são organizados em uma tabela, veja:



	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Nas situações envolvendo outros ângulos, os valores trigonométricos podem ser obtidos através do uso de uma calculadora científica, que dispõe das teclas sen (seno), cos (cosseno) e tan (tangente). Outra opção seria dispor de uma tabela trigonométrica.

Para o cálculo dos valores trigonométricos envolvendo ângulos obtusos podemos utilizar das seguintes definições:

$$\begin{aligned} \text{sen } x &= \text{sen } (180^\circ - x) \\ \cos x &= -\cos (180^\circ - x) \end{aligned}$$

Exemplo:

Obtenha o valor de seno de 120° e cosseno de 120°.
 $\text{sen } 120^\circ = \text{sen } (180^\circ - 120^\circ) \rightarrow \text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = 0,8660$
 $\cos 120^\circ = -\cos (180^\circ - 120^\circ) \rightarrow \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0,5000$

22.2 Unidades de Medidas de arcos:

Grau: é a unidade usada quando dividimos uma circunferência em 360 partes congruentes. Cada parte é um arco de um grau (1°).

Radiano: um arco de um radiano (1 rad) é aquele cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

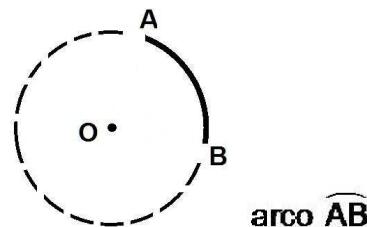
Um arco de 180° e raio unitário tem comprimento de π radianos. Sendo assim podemos afirmar que um arco de 180° equivale a π rad.

Exemplo: Para determinar a medida em radianos de um arco de comprimento igual a 12 cm, em uma circunferência de raio medindo 8 cm, fazemos,

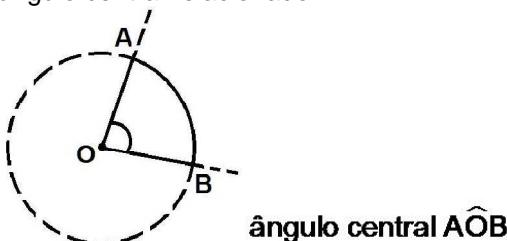
$$m(AB) = \frac{\text{comprimento do arco}(AB)}{\text{comprimento do raio}} = \frac{12}{8}$$

Portanto $m(AB)=1,5$ radianos

Arco geométrico: é uma das partes da circunferência delimitada por dois pontos, incluindo-os



Ângulo central: todo arco de circunferência tem um ângulo central relacionado.



Comprimento da circunferência de raio r:
 $C = 2\pi r$

Comprimento e medida do arco:
 $\ell = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r$ ℓ é o comprimento e
 α é a medida do arco
em graus.

22.3 Arcos de uma volta

Se AB é o arco correspondente à volta completa de uma circunferência, a medida do arco é igual a $C=2\pi r$, então:

$$m(AB) = \frac{\text{comprimento do arco}(AB)}{\text{comprimento do raio}} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Assim a medida em radianos de um arco de uma volta é 2π rad, isto é, 2π rad = 360 graus.

Podemos estabelecer os resultados seguintes

Desenho				
Desenho				
Grau	90	180	270	360
Radiano	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

0 graus = 0 radianos

22.4 Mudança de unidades

Consideremos um arco AB de medida R em radianos, esta medida corresponde a G graus. A relação entre estas medidas é obtida pela seguinte proporção,

$$\begin{aligned} 2\pi \text{ rad} &\dots 360 \text{ graus} \\ R \text{ rad} &\dots G \text{ graus} \end{aligned}$$

Assim, temos a igualdade $R/2\pi = G/360$, ou ainda,



$$\frac{R}{\pi} = \frac{G}{180}$$

Exemplos

Para determinar a medida em radianos de um arco de medida 60 graus, fazemos

$$\frac{R}{\pi} = \frac{60}{180}$$

Assim: $R = \pi/3$ ou 60 graus = $\pi/3$ rad

Para determinar a medida em graus de um arco de medida 1 radiano, fazemos:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{G}{180}$$

Assim: $1 \text{ rad} = 180/\pi$ graus.

Como 60° é $1/3$ de 180° , logo é $1/3$ de π rad. $\rightarrow 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$

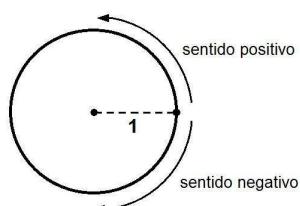
Como 30° é $1/6$ de 180° , logo é $1/6$ de π rad. $\rightarrow 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

Como 45° é $1/4$ de 180° , logo é $1/4$ de π rad. $\rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$

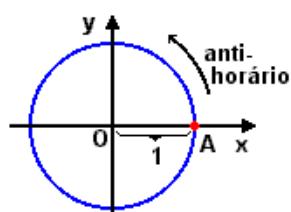
Como 120° é o dobro de 60° , logo é o dobro de $\pi/3$ rad.
 $\rightarrow 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

22.5 Círculo Trigonométrico

Considere uma circunferência de raio unitário com centro na origem de um sistema cartesiano ortogonal e o ponto $A=(1,0)$. O ponto A será tomado como a origem dos arcos orientados nesta circunferência e o sentido positivo considerado será o anti-horário. A região contendo esta circunferência e todos os seus pontos interiores, é denominada *círculo trigonométrico*.



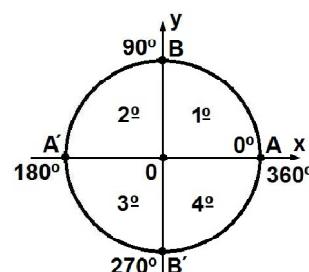
Inserindo os eixos x e y nesse círculo:



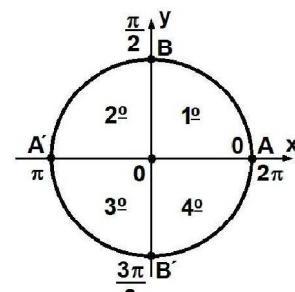
Os eixos OX e OY decomponem o círculo trigonométrico em quatro quadrantes que são enumerados como segue:

2o. quadrante: Abscissa: negativa Ordenada: positiva $90^\circ < \text{ângulo} < 180^\circ$		1o. quadrante: Abscissa: positiva Ordenada: positiva $0^\circ < \text{ângulo} < 90^\circ$
3o. quadrante: Abscissa: negativa Ordenada: negativa $180^\circ < \text{ângulo} < 270^\circ$		4o. quadrante: Abscissa: positiva Ordenada: negativa $270^\circ < \text{ângulo} < 360^\circ$

Os quadrantes são usados para localizar pontos e a caracterização de ângulos trigonométricos.



Por convenção, os pontos situados sobre os eixos não pertencem a qualquer um dos quadrantes.



Para todo ponto (x,y) pertencente à circunferência unitária, temos:

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1.$$

22.6 Arcos com mais de uma volta

Nos estudos trigonométricos existem arcos que possuem medidas maiores que 360° , isto é, eles possuem mais de uma volta. Sabemos que uma volta completa equivale a 360° ou 2π rad, com base nessa informação podemos reduzi-lo à primeira volta, realizando o seguinte cálculo: **dividir a medida do arco em graus por 360° (volta completa)**, o resto da divisão será a menor determinação positiva do arco. Dessa forma, a determinação principal do arco em um dos quadrantes fica mais fácil.

Exemplo 1

Determinar a localização principal do arco de 4380° utilizando a regra prática.



$4380^\circ : 360^\circ$ é correspondente a $4320^\circ + 60^\circ$, portanto, o resto da divisão é igual a 60° que é a determinação principal do arco, dessa forma, sua extremidade pertence ao 1º quadrante.

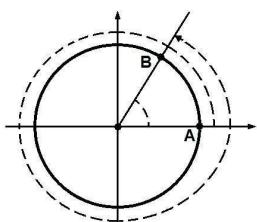
Exemplo 2

Qual a determinação principal do arco com medida igual a 1190° ?

$1190^\circ : 360^\circ$, a divisão possui resultado igual a 3 e resto 110, concluímos que o arco possui três voltas completas e extremidade no ângulo de 110° , pertencendo ao 2º quadrante.

22.7 Arcos Côngruos

Dois arcos são côngruos quando possuem a mesma origem e a mesma extremidade. Uma regra prática eficiente para determinar se dois arcos são côngruos consiste em verificar se a diferença entre eles é um número divisível ou múltiplo de 360° , isto é, a diferença entre as medidas dos arcos dividida por 360° precisa ter resto igual a zero.



- a) (30°) e $(30^\circ + 360^\circ)$ ou $\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)$ são côngruos
- b) (45°) e $(45^\circ + 2 \cdot 360^\circ)$ ou $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi\right)$ são côngruos
- c) (60°) e $(60^\circ - 3 \cdot 360^\circ)$ ou $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{3} - 3 \cdot 2\pi\right)$ são côngruos

Exemplo 3

Verifique se os arcos de medidas 6230° e 8390° são côngruos.

$$8390^\circ - 6230^\circ = 2160$$

$160^\circ / 360^\circ = 6$ e resto igual a zero. Portanto, os arcos medindo 6230° e 8390° são côngruos.

Exemplo 4

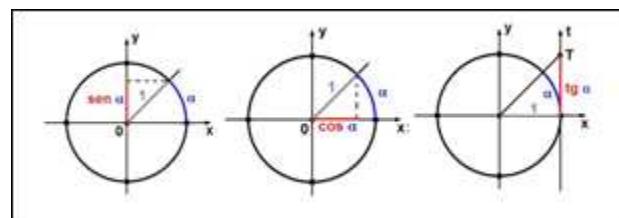
Confira se os arcos de medidas 2010° e 900° são côngruos.

$$2010^\circ - 900^\circ = 1110^\circ$$

$1110^\circ / 360^\circ = 3$ e resto igual a 30. Portanto, os arcos não são côngruos.

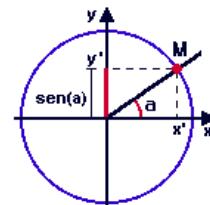
22.8 Seno e cosseno

Dada uma circunferência trigonométrica contendo o ponto $A=(1,0)$ e um número real x , existe sempre um arco orientado AM sobre esta circunferência, cuja medida algébrica corresponde a x radianos.



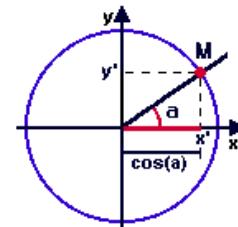
Seno: No plano cartesiano, consideremos uma circunferência trigonométrica, de centro em $(0,0)$ e raio unitário. Seja $M=(x',y')$ um ponto desta circunferência, localizado no primeiro quadrante, este ponto determina um arco AM que corresponde ao ângulo central a . A projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OX determina um ponto $C=(x',0)$ e a projeção ortogonal do ponto M sobre o eixo OY determina outro ponto $B=(0,y')$.

A medida do segmento OB coincide com a ordenada y' do ponto M e é definida como o seno do arco AM que corresponde ao ângulo a , denotado por $\text{sen}(AM)$ ou $\text{sen}(a)$.



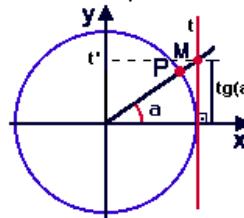
Para simplificar os enunciados e definições seguintes, escreveremos $\text{sen}(x)$ para denotar o seno do arco de medida x radianos.

Cosseno: O cosseno do arco AM correspondente ao ângulo a , denotado por $\text{cos}(AM)$ ou $\text{cos}(a)$, é a medida do segmento OC , que coincide com a abscissa x' do ponto M .



Tangente

Seja a reta t tangente à circunferência trigonométrica no ponto $A=(1,0)$. Tal reta é perpendicular ao eixo OX . A reta que passa pelo ponto M e pelo centro da circunferência interseca a reta tangente t no ponto $T=(1,t')$. A ordenada deste ponto T , é definida como a tangente do arco AM correspondente ao ângulo a .

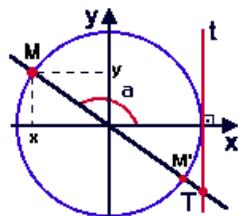




Amplaremos estas noções para ângulos nos outros quadrantes

Ângulos no segundo quadrante

Se na circunferência trigonométrica, tomamos o ponto M no segundo quadrante, então o ângulo a entre o eixo OX e o segmento OM pertence ao intervalo $\pi/2 < a < \pi$. Do mesmo modo que no primeiro quadrante, o cosseno está relacionado com a abscissa do ponto M e o seno com a ordenada deste ponto. Como o ponto M=(x,y) possui abscissa negativa e ordenada positiva, o sinal do seno do ângulo a no segundo quadrante é positivo, o cosseno do ângulo a é negativo e a tangente do ângulo a é negativa.

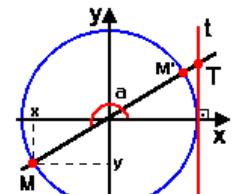


Outro caso particular importante é quando o ponto M está sobre o eixo vertical OY e neste caso: $\cos(\pi/2)=0$ e $\sin(\pi/2)=1$

A tangente não está definida, pois a reta OM não intercepta a reta t, pois elas são paralelas.

Ângulos no terceiro quadrante

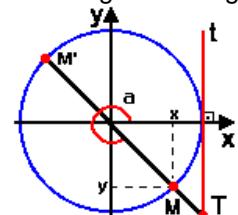
O ponto M=(x,y) está localizado no terceiro quadrante, o que significa que o ângulo pertence ao intervalo: $\pi < a < 3\pi/2$. Este ponto M=(x,y) é simétrico ao ponto M'=(-x,-y) do primeiro quadrante, em relação à origem do sistema, indicando que tanto a sua abscissa como a sua ordenada são negativos. O seno e o cosseno de um ângulo no terceiro quadrante são negativos e a tangente é positiva.



Em particular, se $a = \pi$ radianos, temos que $\cos(\pi)=-1$, $\sin(\pi)=0$ e $\tan(\pi)=0$

Ângulos no quarto quadrante

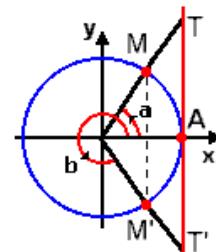
O ponto M está no quarto quadrante, $3\pi/2 < a < 2\pi$. O seno de ângulos no quarto quadrante é negativo, o cosseno é positivo e a tangente é negativa.



Quando o ângulo mede $3\pi/2$, a tangente não está definida pois a reta OP não intercepta a reta t, estas são paralelas. Quando $a = 3\pi/2$, temos:
 $\cos(3\pi/2)=0$, $\sin(3\pi/2)=-1$

Simetria em relação ao eixo OX

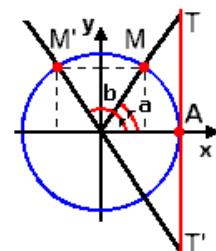
Em uma circunferência trigonométrica, se M é um ponto no primeiro quadrante e M' o simétrico de M em relação ao eixo OX, estes pontos M e M' possuem a mesma abscissa e as ordenadas possuem sinais opostos.



Sejam $A=(1,0)$ um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM', obtemos:
 $\sin(a) = -\sin(b)$
 $\cos(a) = \cos(b)$
 $\tan(a) = -\tan(b)$

Simetria em relação ao eixo OY

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico de M em relação ao eixo OY, estes pontos M e M' possuem a mesma ordenada e as abscissas são simétricas.

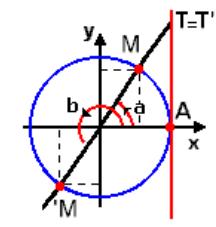


Sejam $A=(1,0)$ um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM'. Desse modo:

$$\begin{aligned} \sin(a) &= \sin(b) \\ \cos(a) &= -\cos(b) \\ \tan(a) &= -\tan(b) \end{aligned}$$

Simetria em relação à origem

Seja M um ponto da circunferência trigonométrica localizado no primeiro quadrante, e seja M' simétrico de M em relação a origem, estes pontos M e M' possuem ordenadas e abscissas simétricas.





Sejam $A=(1,0)$ um ponto da circunferência, a o ângulo correspondente ao arco AM e b o ângulo correspondente ao arco AM' . Desse modo:

$$\begin{aligned}\text{sen}(a) &= -\text{sen}(b) \\ \cos(a) &= -\cos(b) \\ \tan(a) &= \tan(b)\end{aligned}$$

Relações Trigonométricas Fundamentais

$$① \quad \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$② \quad \operatorname{tg} x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

$$③ \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

$$④ \quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$⑤ \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

$$⑥ \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$⑦ \quad \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$⑧ \quad \operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$$

Estudos das funções seno, cosseno

Função Seno

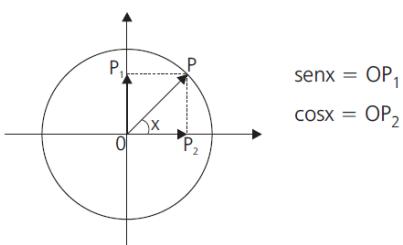
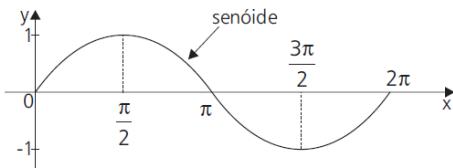


Gráfico de $y = \text{sen} x$



1^a) O domínio de $f(x) = \text{sen } x$ é \mathbb{R} , pois para qualquer valor real de x existe um e apenas um valor para $\text{sen } x$.

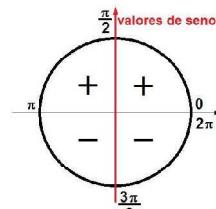
2^a) O conjunto imagem de $f(x) = \text{sen } x$ é o intervalo $[-1, 1]$.

3^a) A função seno não é sobrejetora, pois $[-1, 1] \neq \mathbb{R}$, isto é, sua imagem não é igual ao contradomínio.

4^a) A função seno não é injetiva, pois para valores diferentes de x temos o mesmo $f(x)$.

5^a) A função seno é função ímpar, isto é, qualquer que seja $x \in D(f) = \mathbb{R}$, temos $\text{sen } x = -\text{sen } (-x)$.

Estudo do sinal na Função Seno



A função é *positiva* para valores do 1º e 2º quadrantes e *negativa* para valores do 3º e 4º quadrantes.

Função Cosseno

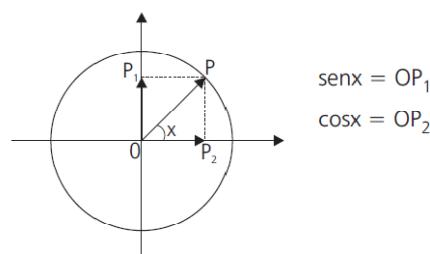
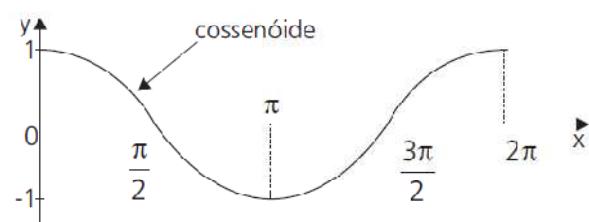


Gráfico de $y = \cos x$



1^a) A cossenoide não é uma nova curva, e sim uma senoide translada $\pi/2$ unidades para a direita. A maioria dos aspectos relevantes da função cosseno são os mesmos da função seno.

2^a) O domínio é o mesmo: $D = \mathbb{R}$

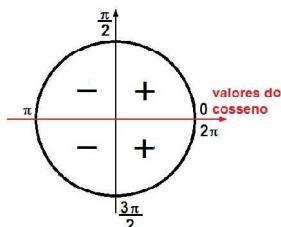
3^a) A imagem é a mesma: $\text{Im} = [-1, 1]$.

4^a) O período é o mesmo: $p = 2\pi$

5^a) A função cosseno não é nem injetiva nem subjetiva.

6^a) A função cosseno é par, pois temos $\cos x = \cos(-x)$.

Estudo do sinal na Função Seno

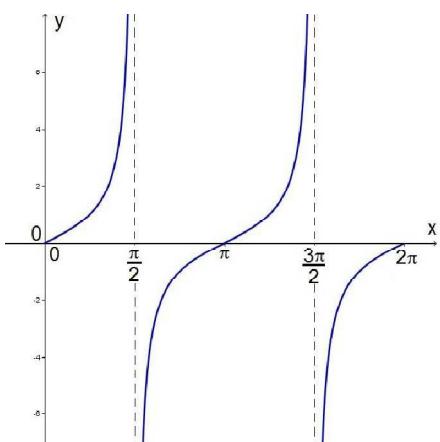


A função é *positiva* para valores do 1º e 4º quadrantes e *negativa* para valores do 2º e 3º quadrantes.

Funções complementares

Função Tangente

Gráfico de $y = \operatorname{tg} x$



1ª) Domínio: $D=R - \{x \in R / x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z\}$.

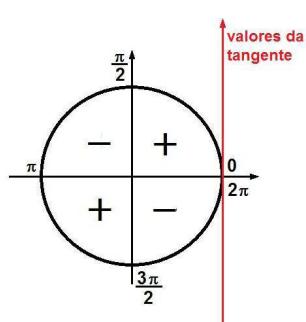
2ª) Imagem: $Im = R$.

3ª) A função tangente não é injetiva, mas é sobrejetiva.

4ª) A função tangente é função ímpar, isto é, $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} (-x)$.

5ª) Período: $p = \pi$.

Estudo do sinal na Função Tangente



A função é positiva para valores do 1º e 3º quadrantes e negativa para valores do 2º e 4º quadrantes.

Funções Secante, Cossecante e Cotangente

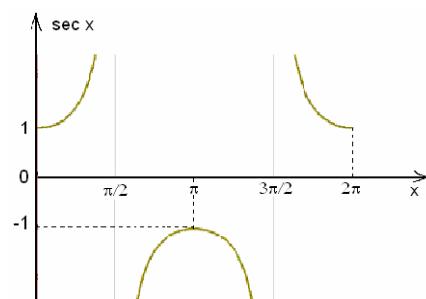
$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \text{ para } \operatorname{sen} x \neq 0;$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \text{ para } \cos x \neq 0;$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \text{ para } \operatorname{sen} x \neq 0;$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \text{ para } \operatorname{sen} x \neq 0 \text{ e } \cos x \neq 0.$$

Função Secante:

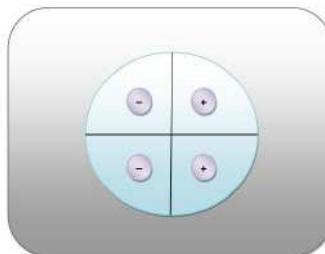


1º Domínio: $D=R - \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z\}$.

2º Imagem: $Im = \{y \in R / y \leq 1, \text{ ou } y \geq -1\}$.

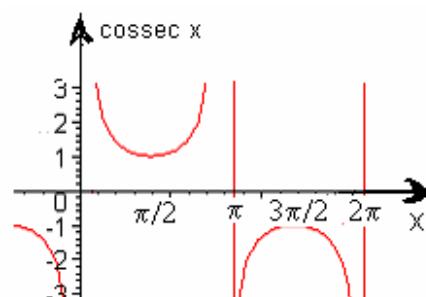
3º A função $y = \sec x$ é par, pois $\sec(-x) = \sec(x)$

Estudo do sinal na Função Tangente



A função secante tem os sinais da função cosseno iguais, em cada um dos quadrantes.

Função Cossecante



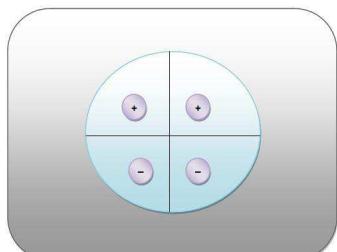


1º Domínio: $D=R - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

2º Imagem: $Im = \{y \in \mathbb{R} / y \leq -1, \text{ ou } y \geq 1\}$.

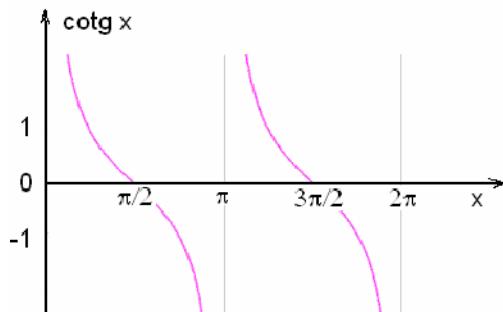
3º A função $y = \operatorname{cossec} x$ é ímpar, pois $\operatorname{cossec}(-x) = -\operatorname{cossec}(x)$

Estudo do sinal na Função Tangente



A função cossecante tem os sinais da função seno iguais, em cada um dos quadrantes.

Função Cotangente

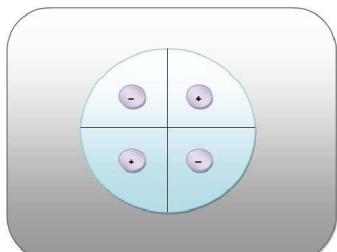


1º Domínio: $D=R - \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

2º Imagem: $Im = \mathbb{R}$

3º A função $y = \operatorname{cotgx}$ é ímpar, pois $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotgx}$

Estudo do sinal na Função Tangente



A função cotangente tem os mesmos sinais da tangente, em cada um dos quadrantes.

Funções Trigonométricas Inversas

Dada a função $x = \operatorname{sen} y$, a função inversa será $y = \operatorname{arcsen} x$.

Dada a função $x = \cos y$, a função inversa será $y = \operatorname{arccos} x$.

Dada a função $x = \operatorname{tg} y$, a função inversa será $y = \operatorname{arctg} x$.

Se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $x = \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}$, então $x = \frac{\pi}{6}$.

Se $0 < x < \pi$ e $x = \operatorname{arccos} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, então $x = \frac{3\pi}{4}$.

Se $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$, então $x = \frac{5\pi}{6}$.

Fórmulas de adição e subtração

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}a \cdot \cos b + \operatorname{sen}b \cdot \cos a \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen}a \cdot \cos b - \operatorname{sen}b \cdot \cos a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+b) &= \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}b}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b} \\ \operatorname{tg}(a-b) &= \frac{\operatorname{tg}a - \operatorname{tg}b}{1 + \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}b}\end{aligned}$$

Fórmulas do arco duplo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+a) &= \operatorname{sen}a \cdot \cos a + \operatorname{sen}a \cdot \cos a \\ \operatorname{sen}2a &= 2 \cdot \operatorname{sen}a \cdot \cos a\end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}2a = 2 \cdot \operatorname{sen}a \cdot \cos a$$

$$\begin{aligned}\cos(a+a) &= \cos a \cdot \cos a - \operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}a \\ \cos(2a) &= \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a\end{aligned}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

Lembrando que $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ teremos:

$$\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(a+a) &= \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}a} \\ \operatorname{tg}(a+a) &= \frac{\operatorname{tg}a + \operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}a \cdot \operatorname{tg}a} \\ \operatorname{tg}2a &= \frac{2 \cdot \operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Fórmulas do arco metade



$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ 2 \cos^2 x - 1 + \cos 2x &\\ \cos^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \text{fazendo } 2x = a, \text{ temos } x = \frac{a}{2}, \text{ e dai:} & \end{aligned}$$

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - 2 \sin^2 x \\ 2 \sin^2 x - 1 + \cos 2x &\\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \text{fazendo } 2x = a, \text{ temos } x = \frac{a}{2}, \text{ e dai:} & \end{aligned}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}$$

Fórmulas de transformação em produto

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \\ \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \\ \text{Fazendo } \boxed{a+b} \text{ e } \boxed{a-b}, \text{ teremos:} & \\ \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \cdot \sin a \cdot \cos b \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2 \cdot \sin b \cdot \cos a \\ \text{Indicando } a = b+x \text{ e } a = b-y, \text{ temos} & \\ a = \frac{x+y}{2} \text{ e } b = \frac{x-y}{2} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \cdot \sin \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \text{Fazendo } \boxed{a+b} \text{ e } \boxed{a-b}, \text{ teremos:} & \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \\ \cos(a+b) - \cos(a-b) &= -2 \cdot \sin a \cdot \sin b \\ \text{Indicando } a = b+x \text{ e } a = b-y, \text{ temos} & \\ a = \frac{x+y}{2} \text{ e } b = \frac{x-y}{2} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

Exercícios resolvidos de Trigonometria

- 1) (UNESP) Se x e y são dois arcos complementares, então podemos afirmar que $A = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$ é igual a:

- a) 0
- b) $\frac{1}{2}$
- c) $\frac{3}{2}$
- d) 1
- e) 2

Solução:

Desenvolvendo os quadrados, vem:

$$A = \cos^2 x - 2 \cdot \cos x \cdot \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x + 2 \cdot \sin x \cdot \sin y + \sin^2 y$$

Organizando convenientemente a expressão, vem:

$$A = (\cos^2 x + \sin^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) - 2 \cdot \cos x \cdot \cos y + 2 \cdot \sin x \cdot \sin y$$

$$A = 1 + 1 - 2 \cdot \cos x \cdot \cos y + 2 \cdot \sin x \cdot \sin y$$

$$A = 2 - 2 \cdot \cos x \cdot \cos y + 2 \cdot \sin x \cdot \sin y$$

Como os arcos são complementares, isto significa que $x + y = 90^\circ \Rightarrow y = 90^\circ - x$.

Substituindo, vem:

$$A = 2 - 2 \cdot \cos x \cdot \cos(90^\circ - x) + 2 \cdot \sin x \cdot \sin(90^\circ - x)$$

Mas, $\cos(90^\circ - x) = \sin x$ e $\sin(90^\circ - x) = \cos x$, pois sabemos que o seno de um arco é igual ao cosseno do seu complemento e o cosseno de um arco é igual ao seno do seu complemento.

Logo, substituindo, fica:

$$A = 2 - 2 \cdot \cos x \cdot \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$A = 2 + (2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x) = 2 + 0 = 2, \text{ e portanto a alternativa correta é a letra E.}$$

- 2) Calcule $\sin 2x$ sabendo-se que $\tan x + \cot x = 3$.

Solução:

Escrevendo a $\tan x$ e $\cot x$ em função de $\sin x$ e $\cos x$, vem:

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = 3$$

Daí, vem: $1 = 3 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \cdot \cos x = 1/3$. Ora, sabemos que $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ e portanto $\sin x \cdot \cos x = (\sin 2x)/2$, que substituindo vem:

$$(\sin 2x)/2 = 1/3 \text{ e, portanto, } \sin 2x = 2/3.$$

Resposta: 2/3

- 3) Simplifique a expressão: $\cos(x+y) \cdot \cos y + \sin(x+y) \cdot \sin y$

Solução. Desenvolvendo as operações de acordo com as relações fundamentais e simplificando, temos:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) \cos y + \sin(x+y) \sin y &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) \cos y + (\sin x \cos y + \cos x \sin y) \sin y = \\ &= \cos x \cos^2 y - \sin x \sin y \cos y + \sin x \cos y \sin y + \cos x \sin^2 y = \cos x (\cos^2 y + \sin^2 y) = \cos x. (1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos(x+y) \cos y + \sin(x+y) \sin y = \cos x \end{aligned}$$

- 4) Calcule o valor:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos 105^\circ & \\ \text{b) } \tan 75^\circ & \end{aligned}$$

Solução. Aplicando as fórmulas da soma e diferenças de arcos, temos:



a)

$$\cos(105^\circ) = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

b)

$$\tan(75^\circ) = \tan(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(1)} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{9+6\sqrt{3}+3}{9-3} = \sqrt{3} + 2$$

- 5) Sendo $\sin x = 4/5$ e $\cos y = 12/13$, em $0 \leq x \leq \pi/2$ e $0 \leq y \leq \pi/2$, determine:

a) $\sin(x+y)$ b) $\tan(x-y)$

Solução. Sabendo que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, calculamos as raízes positivas de $\cos x$ e $\sin y$.

i) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

ii) $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$

a)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{48+15}{65} = \frac{63}{65}$$

b) $\tan(x-y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x-y)} = \frac{\frac{33}{65}}{\frac{56}{65}} = \frac{33}{56}$

- 6) Se x e y são dois arcos complementares, calcule $A = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x + \sin y)^2$

Solução.

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 x - 2 \cos x \cos y + \cos^2 y + \sin^2 x + 2 \sin x \sin y + \sin^2 y \\ A &= (\cos^2 x + \sin^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) - 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) \\ A &= 1 + 1 - 2 \cdot \cos(x+y) = 2 - 2 \cos 90^\circ = 2 - 2(0) \Rightarrow A = 2. \end{aligned}$$

- 7) Calcule $\sin 2x$ sabendo-se que $\tan x + \cot x = 3$.

Solução. A cotangente é o inverso da tangente. E podemos escrever $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Temos:

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x &= 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 3 \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 3 \sin x \cos x \\ 1 &= 3 \sin x \cos x \\ \sin x \cos x &= \frac{1}{3} \Rightarrow 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Trigonometria: Exercícios sobre elementos gerais

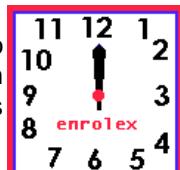
- 1) Um arco AB de uma circunferência tem comprimento L. Se o raio da circunferência mede 4 cm, qual a medida em radianos do arco AB, se:
 - (a) L=6cm
 - (b) L=16cm
 - (c) L=22cm
 - (d) L=30cm
- 2) Em uma circunferência de raio R, calcule a medida de um arco em radianos, que tem o triplo do comprimento do raio.
- 3) Um atleta percorre $1/3$ de uma pista circular, correndo sobre uma única raia. Qual é a medida do arco percorrido em graus? E em radianos?
- 4) Em uma pista de atletismo circular com quatro raias, a medida do raio da circunferência até o meio da primeira raias (onde o atleta corre) é 100 metros e a distância entre cada raias é de 2 metros. Se todos os atletas corressem até completar uma volta inteira, quantos metros cada um dos atletas correria?



- 5) Qual é a medida (em graus) de três ângulos, sendo que a soma das medidas do primeiro com o segundo é 14 graus, a do segundo com o terceiro é 12 graus e a soma das medidas do primeiro com o terceiro é 8 graus.

Qual é a medida do ângulo que o ponteiro das horas de um relógio descreve em um minuto? Calcule o ângulo em graus e em radianos.

- 6) Os dois ponteiros de um relógio se sobrepoem à 0 horas. Em que momento os dois ponteiros



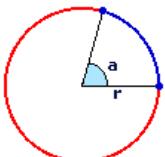


coincidem pela primeira vez novamente?

- 7) Calcular o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 12h e 20minutos.
- 8) Em um polígono regular um ângulo externo mede $\pi/14$ rad. Quantos lados tem esse polígono?
- 9) Escreva o ângulo $a=12^{\circ}28'$ em radianos.
- 10) Escreva o ângulo $a=36^{\circ}12'58''$ em radianos.
- 11) Dados os ângulos $x=0,47623\text{rad}$ e $y=0,25412\text{rad}$, escreva-os em graus, minutos e segundos.

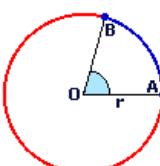
- 12) Em uma circunferência de raio r , calcular a medida do arco subtendido pelo ângulo A em cada caso:

- a. $A=0^{\circ}17'48''$ $r=6,2935\text{cm}$
- b. $A=121^{\circ}18''$ $r=0,2163\text{cm}$



- 13) Em uma circunferência de centro O e raio r , calcule a medida do ângulo $A\hat{O}B$ subtendido pelo arco AB nos seguintes casos.

- a. $AB=0,16296 \text{ cm}$ $r=12,587\text{cm}$.
- b. $AB=1,3672\text{cm}$ $r=1,2978\text{cm}$.



- 14) Em uma circunferência, dado o comprimento do arco AB e o ângulo $A\hat{O}B$ subtendido a este arco, calcule a medida do raio.

- a. $A\hat{O}B=0^{\circ}44'30''$ $AB=0,032592\text{cm}$

Trigonometria: Exercícios sobre o círculo trigonométrico

- 1) Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco A de medida: $A=810$ graus.

- 2) Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco A de medida $A=-2000$ graus.
- 3) Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco de medida $38\pi/3$.
- 4) Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco de medida:
 - (a) $A=1620^{\circ}$
 - (b) $A=-37\pi/3$
 - (c) $A=-600^{\circ}$
 - (d) $A=125\pi/11$
- 5) Unindo as extremidades dos arcos da forma $(3n+2)\pi/6$, para $n=0,1,2,\dots$, obtém-se qual dos polígonos regulares?
 - (a) Quadrado
 - (b) Hexágono
 - (c) Octógono
- 6) Verifique se os arcos de medidas $7\pi/3$ e $19\pi/3$ são arcos côngruos?
- 7) Marcar no círculo trigonométrico as extremidades dos arcos de medidas $x=2k\pi/3$, onde k é um número inteiro.
- 8) Marcar no círculo trigonométrico as extremidades dos arcos de medidas $x=\pi/4+2k\pi/3$, onde k é um número inteiro.

Trigonometria: Exercícios sobre seno, cosseno e tangente

- 1) Determine o valor de $\sin(4290^{\circ})$.
- 2) Determine os valores de $\cos(3555^{\circ})$ e de $\sin(3555^{\circ})$.
- 3) Determine o valor de $\sin(-17\pi/6)$.
- 4) Determine o valor de $\cos(9\pi/4)$.
- 5) Determine o valor de $\tan(510^{\circ})$.
- 6) Determine o valor de $\tan(-35\pi/4)$.
- 7) Se x está no segundo quadrante e $\cos(x)=-12/13$, qual é o valor de $\sin(x)$?
- 8) Quais são os valores de y que satisfazem a ambas as igualdades:
 $\sin(x)=(y+2)/y$ e $\cos(x)=(y+1)/y$
- 9) Quais são os valores de m que satisfazem à igualdade $\cos(x)=2m-1$?
- 10) Quais são os valores de m que satisfazem à igualdade $\sin(x)=2m-5$?
- 11) Mostre que a função definida por $f(x)=\cos(x)$ é par, isto é, $\cos(-a)=\cos(a)$, para qualquer a real.



- 12) Mostre que a função definida por $f(x)=\sin(x)$ é ímpar, isto é, $\sin(-a)=-\sin(a)$, para qualquer a real.
- 13) Mostre que a função definida por $f(x)=\tan(x)$ é ímpar, isto é, $\tan(-a)=-\tan(a)$, para qualquer a real, tal que $\cos(a) \neq 0$.
- 14) Se x está no terceiro quadrante e $\tan(x)=3/4$, calcular o valor de $\cos(x)$.
- 15) Se x pertence ao segundo quadrante e $\sin(x)=1/\sqrt{26}$, calcular o valor de $\tan(x)$.

Trigonometria: Exercícios sobre secante, cossecante e cotangente

1) Calcular:

(a) $\sec(405^\circ)$ (b) $\csc(-150^\circ)$ (c) $\cot(19\pi/3)$

2) Calcule:

(a) $\sec(-15\pi/6)$ (b) $\csc(300^\circ)$ (c) $\cot(15\pi/4)$

3) Verifique a igualdade:

$$\frac{1}{1+\sin^2(x)} + \frac{1}{1+\cos^2(x)} + \frac{1}{1+\sec^2(x)} + \frac{1}{1+\csc^2(x)} = 2$$

4) Mostre que:

$$\frac{\sin^2(x)+2\cos^2(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \tan(x)+2\cot(x)$$

5) Mostre que:

$$\frac{\csc(x)}{\tan(x)+\cot(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

6. Verifique que

$$\sin^4(x)-\cos^4(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$$

7. Fazendo a substituição $x=5 \cos(t)$, com t no primeiro quadrante, demonstre que

$$(25-x^2)^{1/2} = 5 \sin(t)$$

8. Fazendo a substituição $x=2 \tan(t)$, com t no quarto quadrante, demonstre que

$$1/(4+x^2)^{1/2} = \cos(t)/2$$

BIBLIOGRAFIA

Matemática Essencial:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/trigonometria/mod114.htm>

<http://www.exatas.mat.br/>

CD Ensino Médio Digital. Editora Ática e Editora Scipione

CD Assessoria Pedagógica Digital –Ensino Médio. Editora Scipione

CD Projeto ECO –Ensino Médio Volume 1,2 e 3 –Editora Positivo

Apostila de Matemática - Fascículo 04 - Álvaro Zimmermann Aranha

Apostila de Matemática – Prof. Joselias S. da Silva

Exercícios Tio Heraclito <http://www.tioheraclito.com/>

So matemática www.somatematica.com.br/

Site Brasil Escola
<http://www.brasilescola.com/matematica>