Random Matrix Theory – DM 1

Théo Dumont[1,2] Hugo Simon[1,3]
[1]ENS Paris-Saclay [2]Mines Paris [3]Télécom Paris

2021–2022

Exercice 1 : matrices bloc-diagonales

1.a) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \leq V \leq B) &= \mathbb{P}\left(\frac{A}{\sigma} \leq Y \leq \frac{B}{\sigma}\right) \\
&= \int_{A/\sigma}^{B/\sigma} f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_A^B \frac{1}{\sigma} f_Y(x/\sigma)\mathrm{d}x \quad \text{par changement de variable } x = \sigma y \\
&= \int_A^B \frac{1}{\sigma} g(x/\sigma)\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}(x/\sigma)\mathrm{d}x \\
&= \int_A^B \frac{1}{\sigma} g(x/\sigma)\mathbf{1}_{[\sigma\alpha,\sigma\beta]}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

La loi de $V = \sigma Y$ est donc

$$\boxed{f_V(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x}{\sigma}\right)\mathbf{1}_{[\sigma\alpha,\sigma\beta]}(x).}$$

1.b) On raisonne de la même façon :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \leq W \leq B) &= \int_{A-a}^{B-a} f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_A^B f_Y(x-a)\mathrm{d}x \quad \text{par changement de variable } x = y + a \\
&= \int_A^B g(x-a)\mathbf{1}_{[\alpha+a,\beta+a]}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

La loi de W est donc

$$\boxed{f_W(x) = g(x-a)\mathbf{1}_{[\alpha+a,\beta+a]}(x).}$$

2. A est une matrice hermitienne. D'après le théorème spectral, elle est donc diagonalisable de valeurs propres $(\lambda_i)_{i=1}^n$ réelles, et on peut donc l'écrire $A = U\Lambda U^*$ avec U une matrice unitaire et $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$.

2.a) On a que $\sigma A = \sigma(U\Lambda U^*) = U(\sigma\Lambda)U^*$. On peut donc écrire directement que

$$\boxed{\mathrm{sp}(\sigma A) = \sigma\,\mathrm{sp}(A)} := \{\sigma\lambda, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$$

2.b) On a que $A + aI_n = U\Lambda U^* + aI_n = U(\Lambda + aI_n)U^*$ car U est unitaire. On peut donc écrire directement que

$$\boxed{\mathrm{sp}(A + aI_n) = \mathrm{sp}(A) + a} := \{\lambda + a, \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$$

3.a) On a que les $(\sigma X_{ij})_{i<j}$ sont des variables aléatoires i.i.d. centrées de variance σ^2, que les (σX_{ii}) sont des variables aléatoires i.i.d. centrées, indépendantes de la famille $(\sigma X_{ij})_{i<j}$. On peut donc appliquer le théorème de Wigner pour écrire que

$$\boxed{\text{presque sûrement,}\quad L(V_n) = L\left(\frac{\sigma X_n}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{etr.} \mathbb{P}_{sc,\sigma},}$$

avec $L(V_n) = \frac{1}{n}\sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(V_n)} \delta_\lambda$ la mesure spectrale associée à V_n.

3.b,c) Les entrées de la matrice admettent un quatrième moment fini, donc on peut également écrire que

$$\boxed{\lambda_{\max}(V_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 2\sigma} \quad \text{et que} \quad \boxed{\lambda_{\min}(V_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} -2\sigma}$$

4.a) En rappelant que $\delta_{\sigma\lambda}(dx) = \frac{1}{\sigma}\delta_\lambda(\frac{dx}{\sigma})$, il vient

$$L(W_n)(dx) = \frac{1}{n}\sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(\frac{X_n}{\sqrt{n}})} \delta_{\sigma\lambda+a}(dx) = \frac{1}{n}\sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(\frac{X_n}{\sqrt{n}})} \frac{1}{\sigma}\delta_\lambda(\frac{dx-a}{\sigma}) \xrightarrow[n\to+\infty]{etr.,p.s.} \frac{1}{\sigma}\mathbb{P}_{sc}(\frac{dx-a}{\sigma}) = \mathbb{P}_{sc,\sigma}(\mathrm{d}x-a)$$

ainsi

$$\boxed{L(W_n)(dx) \xrightarrow[n\to+\infty]{etr.,p.s.} \mathbf{1}_{[-2\sigma+a,2\sigma+a]}(x)\frac{\sqrt{4\sigma^2-(x-a)^2}}{2\pi\sigma^2}\mathrm{d}x}$$

4.b,c) De même, les entrées de la matrice admettent un quatrième moment fini, donc on peut écrire que

$$\boxed{\lambda_{\max}(W_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 2\sigma+a} \quad \text{et que} \quad \boxed{\lambda_{\min}(W_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} -2\sigma+a}$$

5. La transformation affine sur la matrice correspond à une translation et dilatation de la mesure spectrale.

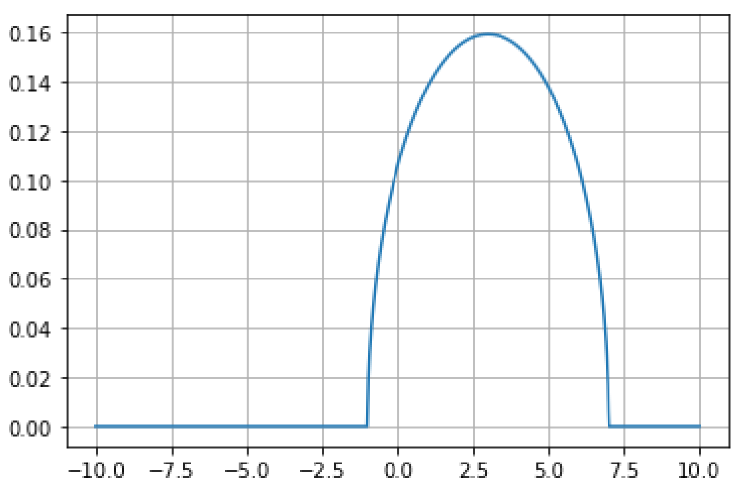

Figure 1: $\mathbb{P}_{SC,\sigma}(\cdot - a)$ avec $\sigma = 2, a = 3$, de support $[-1, 7]$

6. On sait que

$$L(\sqrt{c_1}\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n_1}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{etr.,p.s.} \mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_1}}$$

Puisque $\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_1}}$ est une mesure de probabilité, il nous suffit de montrer que

$$L(\sqrt{c_1}\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n_1}}) - L(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n_1}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{vague,p.s.} 0$$

Soit $f \in C_K$, continue à support compact K

$$\begin{aligned}|\int f(x)(L(\sqrt{c_1}\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n_1}})(dx) - L(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n_1}})(dx)| &\leq \frac{1}{n_1}\sum_{\lambda\in\mathrm{sp}(\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n_1}})} |f(\sqrt{c_1}\lambda) - f(\sqrt{\frac{n_1}{n}}\lambda)| \\ &\leq \sup_{x\in K} |f(\sqrt{c_1}x) - f(\sqrt{\frac{n_1}{n}}x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

par uniforme continuité (f est continue sur un compact donc uniformément continue).

Le même résultat tient pour $X^{(2)}$ par symétrie, avec $c_2 = 1 - c_1$. On a donc finalement :

$$\boxed{L\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n_1}{n}L\left(\frac{X^{(1)}}{\sqrt{n}}\right) + \frac{n_2}{n}L\left(\frac{X^{(2)}}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{etr.,p.s.} c_1\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_1}} + c_2\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_2}}}$$

7. Il semblerait que l'hypothèse d'indépendance des matrices $X^{(1)}$ et $X^{(2)}$ n'ait pas d'importance, car nous ne l'avons pas utilisée ci-dessus.

8. Dans le cas où $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$, le résultat de la question **6.** devient

$$L\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{etr.,p.s.} \frac{1}{2}\mathbb{P}_{sc,\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{sc,\frac{1}{\sqrt{2}}} = \mathbb{P}_{sc,\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

9. D'après la question **4.a)**, on peut écrire que $\boxed{L(Y)(\mathrm{d}x) \xrightarrow[n\to+\infty]{etr.,p.s.} c_1\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_1}}(\mathrm{d}x - a) + c_2\mathbb{P}_{sc,\sqrt{c_2}}(\mathrm{d}x - b)}$

10. On note $Y_{:n_1}$ (resp. $Y_{n_1:}$) le premier (resp. dernier) bloc diagonal de Y de taille n_1 (resp. n_2). La mesure spectrale limite de $Y_{:n_1}$ est de support $[-2\sqrt{c_1} + a, 2\sqrt{c_1} + a]$, et celle de $Y_{n_1:}$) est de support $[-2\sqrt{c_2}+b, 2\sqrt{c_2}+b]$. Puisque $a < b$, le support de la mesure spectrale limite de Y admet donc 2 composantes connexes si et seulement si $2\sqrt{c_1} + a < -2\sqrt{c_2} + b$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{si et seulement si } \sqrt{c_1} + \sqrt{1 - c_1} < \frac{b-a}{2}.}$$

11.a,b,c,d) Les conditions précédentes garantissent qu'après ordonnancement, les n_2 premieres valeurs spectrales sont celles de la matrice $Y_{n_1:}$ et les n_1 dernières sont celles de la matrice $Y_{:n_1}$.

Ainsi

- $\lambda_1(Y) = \lambda_{\max}(Y) = \lambda_{\max}(Y_{n_1:}) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 2\sqrt{c_2} + b$, donc

$$\boxed{\lambda_1(Y) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 2\sqrt{c_2} + b}$$

- $\lambda_{n_2}(Y) = \lambda_{\min}(Y_{n_1:}) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} -2\sqrt{c_2} + b$, donc

$$\boxed{\lambda_{n_2}(Y) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} -2\sqrt{c_2} + b}$$

- $\lambda_{n_2+1}(Y) = \lambda_{\max}(Y_{:n_1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 2\sqrt{c_1} + a$, donc

$$\boxed{\lambda_{n_2+1}(Y) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} 2\sqrt{c_1} + a}$$

- $\lambda_n(Y) = \lambda_{\min}(Y) = \lambda_{\min}(Y_{:n_1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} -2\sqrt{c_1} + a$, donc

$$\boxed{\lambda_n(Y) \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} -2\sqrt{c_1} + a}$$

Exercice 3 : transformée de Stieltjes de la loi du demi-cercle

1. Si $z \in \mathbb{C}^+$, alors $z-2$ et $z+2$ sont également dans $\mathbb{C}^+$ et leurs arguments sont donc dans $]0,\pi[$. Par suite, $\arg(z^2-4) = \arg(z-2) + \arg(z+2) \in]0, 2\pi[$, ce qui montre que $z^2 - 4 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. La fonction $z \mapsto z^2 - 4$, analytique car polynomiale, est donc définie de $\mathbb{C}^+$ vers $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. En composant avec la fonction $\sqrt{\cdot}$, analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{C}^+$ (division de l'argument par 2), on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } z \mapsto \sqrt{z^2-4} \text{ est analytique de } \mathbb{C}^+ \text{ dans } \mathbb{C}^+.}$$

2. **Option de preuve numéro 1:** On commence par montrer que l'on peut écrire pour $w \in \mathbb{C}^+$

$$\operatorname{Im} \sqrt{w} = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} w \sqrt{\frac{\sqrt{\operatorname{Re}^2 w + \operatorname{Im}^2 w} - \operatorname{Re} w}{2}}.$$

Pour montrer cela, on peut utiliser les formules trigonométriques de l'angle moitié [Rabinowitz, 1993]. On peut alors appliquer ce résultat avec $w := z^2 - 4 = (x^2 + y^2 - 4) + i(2xy)$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \sqrt{z^2-4} &= \operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im}(z^2-4)\right) \sqrt{\frac{\sqrt{\operatorname{Re}^2(z^2-4) + \operatorname{Im}^2(z^2-4)} - \operatorname{Re}(z^2-4)}{2}} \\
&= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{(x^2+y^2-4)^2 + (2xy)^2} - (x^2+y^2-4)}{2}} \\
&\underset{y\searrow 0}{\longrightarrow} \pm\sqrt{\frac{|4-x^2| + (4-x^2)}{2}} \\
&= \pm\sqrt{(4-x^2)_+}
\end{aligned}$$

Et on conclut en utilisant le fait que $\sqrt{z^2-4} \in \mathbb{C}^+$ d'après **1.**, et que donc $\operatorname{sgn} \operatorname{Im} \sqrt{z^2-4} = +1$.

Option de preuve numéro 2: Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$. On remarque que l'on peut prolonger la fonction $y \mapsto \sqrt{(x+iy)^2 - 4}$ par continuité sur $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$, et on a donc :

$$\operatorname{Im} \sqrt{(x+iy)^2-4} \underset{y\searrow 0}{\longrightarrow} \operatorname{Im} \sqrt{x^2-4} = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & \text{si } x^2 \leq 4 \\ 0 & \text{si } x^2 > 4 \end{cases} = \sqrt{(4-x^2)_+}$$

3. D'après la question **1.**, on sait que $\underline{m \text{ est une fonction analytique sur } \mathbb{C}^+}$. On admet ici que $\underline{\operatorname{Im}(m) \geq 0}$. Donnons-nous alors $z \in \mathbb{C}^+$. m est continue sur $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ et

$$|m(z)| = \frac{1}{2}|z| \times \left| -1 + \sqrt{1 - \frac{4}{z^2}} \right| \tag{1}$$

$$\underset{|z| \to \infty}{\sim} \frac{1}{2}|z| \times \frac{4}{|z|^2} = \frac{2}{|z|} \quad \text{par développement analytique} \tag{2}$$

Cela prouve que lorsque $|z| \to \infty$, il existe un $M > 0$ tel que

$$|m(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{\operatorname{Im} z}.$$

Il nous reste alors à étudier le comportement de $|m(z)|$ sur un ensemble $\mathcal{E}_A := \{z \in \mathbb{C}^+, \ |z| \leq A\}$. Pour cela, on utilise le fait que l'on peut prolonger m par continuité sur $\mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$ (question **2.**), et que l'on a donc bien que $|m(z)|$ est bornée sur $\mathcal{E}_A$, et qu'il existe donc un M' tel que l'équation 1 soit également vérifiée sur $\mathcal{E}_A$. D'après le théorème de Herglotz, il existe donc une unique mesure positive μ sur $\mathbb{R}$ telle que m soit la $\underline{\text{transformée de Stieltjes de } \mu}$. Calculons sa masse totale en utilisant que $\mu(\mathbb{R}) = \lim\limits_{y \to +\infty} -iy \ m(iy)$:

$$\begin{aligned} -iy \ m(iy) &= -\frac{y^2 - y\sqrt{y^2+4}}{2} \\ &= -\frac{y^2}{2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{y^2}}\right) \quad \text{car } y \neq 0 \\ &\underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 1. \end{aligned}$$

On a donc montré que $\boxed{f \text{ est la transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité.}}$

4. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}^+$. On a alors

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} m(z) &= \operatorname{Im}\left(-z + \sqrt{z^2 - 4}\right) \\ &= -y + \operatorname{Im}\sqrt{z^2 - 4} \\ &\underset{y \searrow 0}{\longrightarrow} 0 + \sqrt{(4 - x^2)_+} \quad \text{d'après } \mathbf{2.} \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\boxed{\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(x + iy) \underset{y \searrow 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4 - x^2)_+}.}$$

5. m est la transformée de Stieltjes de μ, de masse totale finie. Par théorème de cours, on peut donc écrire que pour tous a et b points de continuité de μ,

$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= \lim_{y \searrow 0} \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_a^b m(x + iy)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{y \searrow 0} \int_a^b \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} m(x + iy)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4 - x^2)_+}\mathrm{d}x \quad \text{d'après } \mathbf{4.} \end{aligned}$$

par convergence dominée sur l'intervalle défini par a et b, points de continuité de μ. Cela montre donc que

$$\boxed{\mu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4 - x^2)_+}\mathrm{d}x.}$$

Exercice 4 : stabilité de l'équation canonique de Wigner

1. Il est direct qu'une somme de deux transformées de Stieltjes g_1 et g_2 est également une transformée de Stieltjes. En effet, on peut écrire que $\mathrm{Im}(g_1 + g_2) = \mathrm{Im}(g_1) + \mathrm{Im}(g_2) \geq 0$, que $g_1 + g_2$ est analytique, et que

$$\forall z \in \mathbb{C}^+, \quad |g_1(z) + g_2(z)| \leq |g_1(z)| + |g_2(z)| \leq \frac{M_1 + M_2}{\mathrm{Im}\, z}$$

et il nous suffit d'invoquer le théorème de Herglotz pour conclure que $\underline{g_1 + g_2 \text{ est une transformée de Stieltjes}}$. Par suite, on a que $X + X_\delta$ est une transformée de Stieltjes, et on peut appliquer la Proposition 23 pour affirmer que

$$\boxed{\text{la fonction } f : z \mapsto -\frac{1}{z + (X + X_\delta)(z)} \text{ est la transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité.}}$$

2. Par hypothèse, on a $\begin{cases} X^2 + zX + 1 = 0 \\ X_\delta^2 + zX_\delta + 1 = \delta. \end{cases}$ En soustrayant les deux équations, on obtient donc successivement :

$$\begin{aligned}
(X - X_\delta)(X + X_\delta) + z(X - X_\delta) &= -\,\delta \\
(X - X_\delta)(X + X_\delta + z) &= -\,\delta \\
(X - X_\delta) &= \delta f(z) \quad \text{ car } f(z) \neq 0
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a montré en **1.** que f est la transformée de Stieltjes d'une mesure de probabilité. Elle vérifie donc $|f(z)| \leq 1 \times |\mathrm{Im}\, z|^{-1}$, ce qui nous permet d'écrire:

$$|X - X_\delta| \leq |\delta| \frac{1}{|\mathrm{Im}(z)|},$$

d'où

$$\boxed{X - X_\delta = \mathcal{O}_z(\delta)\,.}$$

References

[Rabinowitz, 1993] Rabinowitz, S. (1993). How to find the square root of a complex number. *Mathematics and Informatics Quarterly*, 3(54-56):126. 4