

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA



Henrique Silva Simplicio

**IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE COLOCAÇÃO
DIRETA PARA OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIA
USANDO O SOFTWARE MATLAB**

Trabalho de Graduação
2024

Curso de Engenharia Aeroespacial

Henrique Silva Simplicio

**IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE COLOCAÇÃO
DIRETA PARA OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIA
USANDO O SOFTWARE MATLAB**

Orientador

Prof. Dr. Mauricio Andrés Varela Morales (ITA)

Coorientador

Prof. Dr. Flávio Luiz Cardoso Ribeiro (ITA)

ENGENHARIA AEROESPACIAL

SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE AERONÁUTICA

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

Silva Simplicio, Henrique
Implementação do método de colocação direta para otimização de trajetória usando o software MATLAB / Henrique Silva Simplicio.
São José dos Campos, 2024.
23f.

Trabalho de Graduação – Curso de Engenharia Aeroespacial– Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2024. Orientador: Prof. Dr. Mauricio Andrés Varela Morales. Coorientador: Prof. Dr. Flávio Luiz Cardoso Ribeiro.

I. Instituto Tecnológico de Aeronáutica. II. Título.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

SILVA SIMPLICIO, Henrique. **Implementação do método de colocação direta para otimização de trajetória usando o software MATLAB**. 2024. 23f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Henrique Silva Simplicio

TÍTULO DO TRABALHO: Implementação do método de colocação direta para otimização de trajetória usando o software MATLAB.

TIPO DO TRABALHO/ANO: Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) / 2024

É concedida ao Instituto Tecnológico de Aeronáutica permissão para reproduzir cópias deste trabalho de graduação e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste trabalho de graduação pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Henrique Silva Simplicio
Rua H8B, 234
12.228-461 – São José dos Campos–SP

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE COLOCAÇÃO DIRETA PARA OTIMIZAÇÃO DE TRAJETÓRIA USANDO O SOFTWARE MATLAB

Essa publicação foi aceita como Relatório Final de Trabalho de Graduação

Henrique Silva Simplicio

Autor

Mauricio Andrés Varela Morales (ITA)

Orientador

Flávio Luiz Cardoso Ribeiro (ITA)

Coorientador

Profa. Dra. Maisa de Oliveira Terra

Coordenadora do Curso de Engenharia Aeroespacial

São José dos Campos, 11 de novembro de 2024.

Àqueles que sempre me apoiaram e acreditaram em mim, principalmente minha mãe e minha parceira de vida.

Agradecimentos

“Agir conforme aquilo que se fala, alinhar discurso e prática, além de ser uma postura ética, é um sinal de autenticidade.”

— MARIO SERGIO CORTELLA

Resumo

Abstract

Lista de Figuras

FIGURA 2.1 – Representações das <i>splines</i> de controle e de estado	18
FIGURA 3.1 – Formatos das structures problem e solution	20
FIGURA 3.2 – Diagrama de forças no eVTOL	21

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Motivação	11
1.2	Objetivo	11
1.3	Revisão Bibliográfica	11
2	CONTROLE ÓTIMO	14
2.1	Formulação Geral	14
2.2	Formulação por Colocação Direta	17
2.2.1	Colocação Trapezoidal	18
3	METODOLOGIA	19
3.1	Interface de Dados	19
3.2	Trajetória de subida de eVTOL	20
	REFERÊNCIAS	22

1 Introdução

1.1 Motivação

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo a implementação de uma biblioteca no MATLAB, que permita a solução de problemas de otimização de trajetória utilizando um método de colocação direta, mais especificamente a colocação trapezoidal. Inspirando-se nos softwares PSOPT (BECERRA, 2022) e OptimTraj (KELLY, 2022), tal biblioteca deverá simplificar a resolução de problemas do tipo, de modo que o usuário deverá apenas modelizar o problema e entrar com os parâmetros necessários por meio de uma interface de dados. Assim, não haverá necessidade de implementar a lógica matemática por trás da solução numérica para obtenção dos resultados pertinentes.

1.3 Revisão Bibliográfica

Esta seção apresenta uma revisão histórica da otimização de trajetórias, com foco especial na modelagem do problema como um Problema de Controle Ótimo (PCO) e nas técnicas de solução, tanto analíticas quanto numéricas, que culminam na proposta de implementação de métodos de colocação direta usando o software MATLAB.

Iniciamos com as origens da otimização de trajetórias e a modelagem inicial do problema como um PCO. O estudo da otimização de trajetórias tem início com o problema da braquistócrona: encontrar a curva sob a qual uma partícula, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, leva o menor tempo para se deslocar entre dois pontos (SUSSMANN; WILLEMS, 1997). Dentre as soluções propostas, a mais famosa usava o Cálculo Variacional.

Por sua vez, o Controle Ótimo tem sua origem ligada ao desenvolvimento do Cálculo Variacional, uma vez que o objetivo do primeiro é minimizar (ou maximizar) uma função objetivo, o que, por sua vez, é o tema estudado pelo segundo. Isaac Newton, Johann

Bernoulli, Leonhard Euler e Ludovico Lagrange são alguns importantes nomes que inicialmente contribuíram para o desenvolvimento do Controle Ótimo (BECERRA, 2008). Como resultados importantes obtidos no desenvolvimento da teoria, podem-se citar a programação dinâmica (BELLMAN, 2010), o princípio mínimo de Pontryagin (PONTRYAGIN, 1987) e a formulação do regulador quadrático linear (*Linear-quadratic Regulator*, LQR) e do filtro de Kalman (KáLMÁN, 1960a; KáLMÁN, 1960b).

Existem diversas excelentes fontes que desenvolvem a teoria do Controle Ótimo, formulando diferentes tipos de problemas e suas soluções (BETTS, 2010; KIRK, 2004; BRYSON, 2018; ATHANS; FALB, 2007). Dentre os PCOs, há alguns casos específicos para os quais pode-se obter uma solução totalmente analítica. Como os mais conhecidos, têm-se os sistemas escalares lineares e o regulador quadrático linear, com possíveis variações nas condições de contorno (LEWIS *et al.*, 2012).

Com o advento do computador digital, tornou-se viável a solução de sistemas dinâmicos mais complexos e, conseqüentemente, de tratar problemas mais realistas. Os métodos numéricos desenvolvidos para solução de PCOs são, normalmente, classificados em duas categorias: os métodos indiretos e os métodos diretos (BETTS, 2010). Dentre aqueles classificados como indiretos, podem-se citar o *shooting* indireto e a colocação indireta. Por sua vez, dentre os classificados como diretos há maior variedade, como os métodos de colocação direta, o *shooting* direto, os métodos pseudoespectrais (BETTS, 1998) e a quasilinearização (PAINE, 1967).

Finalmente, nos concentramos na colocação direta como uma abordagem numérica para resolver PCOs. Nos métodos diretos, o problema de otimização de trajetória é discretizado, transformando-o em um problema de Programação Não-Linear (PNL). Os métodos de colocação direta não são diferentes. Neles, as funções contínuas que definem o problema são discretizadas usando vários segmentos polinomiais, construindo a função conhecida como *spline*. Dentre os métodos de discretização que se classificam como colocação direta, dois têm maior notoriedade: a colocação trapezoidal e a colocação de Hermite-Simpson (KELLY, 2017; BETTS, 2010).

Quanto a rotinas que implementam soluções numéricas e problemas exemplos disponibilizados, (LEWIS *et al.*, 2012) traz diversas rotinas em MATLAB, tanto para simulação de problemas usando resultados obtidos, quanto para implementação de métodos de solução numérica. (BECERRA, 2022) implementa o PSOPT, um software completo escrito em C++, apresentando uma interface de dados que permite a construção facilitada de problemas distintos e disponibilizando diferentes métodos de solução, como o pseudoespectral e as colocações trapezoidal e de Hermit-Simpson. (KELLY, 2022) é também um software completo escrito em MATLAB, que apresenta exemplos variados e permite a escolha dentre diversos métodos de solução. Além disso, em (KELLY, 2017), o autor objetiva ensinar sobre a implementação de métodos de colocação direta para solução de

problemas de otimização de trajetória, de modo que apresenta explicações claras e focadas no assunto, além de vários exemplos de problemas e rotinas em MATLAB.

2 Controle Ótimo

O controle ótimo é uma disciplina fundamental na teoria de controle, com amplas aplicações em diversas áreas da engenharia e ciências aplicadas. Esta teoria lida com o problema de determinar a trajetória de controle que otimiza uma determinada medida de desempenho, sujeita às dinâmicas do sistema e às restrições impostas. A formulação geral do controle ótimo fornece uma base teórica robusta para resolver uma ampla gama de problemas de otimização, desde o controle de veículos autônomos até a gestão de recursos em sistemas complexos.

Neste capítulo, será abordada, inicialmente, a formulação geral do controle ótimo, destacando os princípios e as equações que fundamentam a teoria. Em seguida, explora-se a formulação por colocação direta, uma técnica numérica eficiente para resolver problemas de controle ótimo, com foco especial no método de colocação trapezoidal. Esta abordagem não apenas simplifica a implementação computacional, mas também melhora a precisão e a estabilidade das soluções, tornando-a uma ferramenta valiosa para pesquisadores e profissionais na área de otimização de trajetórias.

2.1 Formulação Geral

Segundo (BETTS, 2010), o Problema de Controle Ótimo pode ser formulado como um conjunto de N fases. Para a fase i , o sistema dinâmico pode ser descrito como um conjunto de variáveis dinâmicas

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(i)}(t) \\ \mathbf{u}^{(i)}(t) \end{bmatrix}$$

composto por $n_x^{(i)}$ variáveis de estado e por $n_u^{(i)}$ variáveis de controle, respectivamente. Além disso, o sistema pode conter $n_p^{(i)}$ parâmetros $\mathbf{p}^{(i)}$, os quais são independentes de t .

Normalmente, as dinâmicas do sistema são definidas por um conjunto de EDOs, chamadas de *equações de estado*:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)} [\mathbf{x}^{(i)}(t), \mathbf{u}^{(i)}(t), \mathbf{p}^{(i)}, t],$$

A formulação geral do Problema de Controle Ótimo com N fases que a biblioteca implementada neste trabalho é descrita em (BECERRA, 2022) e apresentada a seguir.

Problema \mathcal{P}_1

Encontrar as trajetórias de controle, $\mathbf{u}^{(i)}(t)$, $t \in [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}]$, trajetórias de estado $\mathbf{x}^{(i)}(t)$, $t \in [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}]$, parâmetros estáticos $\mathbf{p}^{(i)}$ e instantes $t_0^{(i)}, t_f^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$, que minimizem o índice de desempenho J , definido pela equação 2.1.

$$J = \sum_{i=1}^N \left[\varphi^{(i)} [\mathbf{x}^{(i)}(t_0^{(i)}), \mathbf{x}^{(i)}(t_f^{(i)}), \mathbf{p}^{(i)}, t_0^{(i)}, t_f^{(i)}] + \int_{t_0^{(i)}}^{t_f^{(i)}} L^{(i)} [\mathbf{x}^{(i)}(t), \mathbf{u}^{(i)}(t), \mathbf{p}^{(i)}, t] dt \right] \quad (2.1)$$

O problema está sujeito às restrições diferenciais:

$$\dot{\mathbf{x}}^{(i)}(t) = \mathbf{f}^{(i)} [\mathbf{x}^{(i)}(t), \mathbf{u}^{(i)}(t), \mathbf{p}^{(i)}, t], \quad t \in [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}], \quad (2.2)$$

às restrições de trajetória:

$$\mathbf{g}_L^{(i)} \leq \mathbf{g}^{(i)} [\mathbf{x}^{(i)}(t), \mathbf{u}^{(i)}(t), \mathbf{p}^{(i)}, t] \leq \mathbf{g}_U^{(i)}, \quad t \in [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}], \quad (2.3)$$

às restrições de evento:

$$\mathbf{e}_L^{(i)} \leq \mathbf{e}^{(i)} [\mathbf{x}^{(i)}(t_0^{(i)}), \mathbf{u}^{(i)}(t_0^{(i)}), \mathbf{x}^{(i)}(t_f^{(i)}), \mathbf{u}^{(i)}(t_f^{(i)}), \mathbf{p}^{(i)}, t_0^{(i)}, t_f^{(i)}] \leq \mathbf{e}_U^{(i)}, \quad (2.4)$$

às restrições de ligação de fase:

$$\begin{aligned}
\psi_L &\leq \psi[\mathbf{x}^{(1)}(t_0^{(1)}), \mathbf{u}^{(1)}(t_0^{(1)}), \\
&\quad \mathbf{x}^{(1)}(t_f^{(1)}), \mathbf{u}^{(1)}(t_f^{(1)}), \mathbf{p}^{(1)}, t_0^{(1)}, t_f^{(1)}, \\
&\quad \mathbf{x}^{(2)}(t_0^{(2)}), \mathbf{u}^{(2)}(t_0^{(2)}), \\
&\quad \mathbf{x}^{(2)}(t_f^{(2)}), \mathbf{u}^{(2)}(t_f^{(2)}), \mathbf{p}^{(2)}, t_0^{(2)}, t_f^{(2)}, \\
&\quad \vdots \\
&\quad \mathbf{x}^{(N)}(t_0^{(N)}), \mathbf{u}^{(N)}(t_0^{(N)}), \\
&\quad \mathbf{x}^{(N)}(t_f^{(N)}), \mathbf{u}^{(N)}(t_f^{(N)}), \mathbf{p}^{(N)}, t_0^{(N)}, t_f^{(N)}] \leq \psi_U
\end{aligned} \tag{2.5}$$

às restrições de limite:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_L^{(i)} &\leq \mathbf{u}^{(i)}(t) \leq \mathbf{u}_U^{(i)}, \quad t \in [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}], \\
\mathbf{x}_L^{(i)} &\leq \mathbf{x}^{(i)}(t) \leq \mathbf{x}_U^{(i)}, \quad t \in [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}], \\
\mathbf{p}_L^{(i)} &\leq \mathbf{p}^{(i)} \leq \mathbf{p}_U^{(i)}, \\
t_{0L}^{(i)} &\leq t_0^{(i)} \leq t_{0U}^{(i)}, \\
t_{fL}^{(i)} &\leq t_f^{(i)} \leq t_{fU}^{(i)},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

e às seguintes restrições:

$$\begin{aligned}
t_f^{(i)} - t_0^{(i)} &\geq 0, \quad i = 1, \dots, N \\
\mathbf{u}^{(i)} : [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}] &\rightarrow \mathbb{R}^{n_u^{(i)}} \\
\mathbf{x}^{(i)} : [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}] &\rightarrow \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \\
\mathbf{p}^{(i)} &\in \mathbb{R}^{n_p^{(i)}} \\
\varphi^{(i)} : \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_p^{(i)}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
L^{(i)} : \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_u^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_p^{(i)}} \times [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}] &\rightarrow \mathbb{R} \\
\mathbf{f}^{(i)} : \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_u^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_p^{(i)}} \times [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}] &\rightarrow \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \\
\mathbf{g}^{(i)} : \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_u^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_p^{(i)}} \times [t_0^{(i)}, t_f^{(i)}] &\rightarrow \mathbb{R}^{n_g^{(i)}} \\
\mathbf{e}^{(i)} : \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_u^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_x^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_u^{(i)}} \times \mathbb{R}^{n_p^{(i)}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{n_e^{(i)}} \\
\psi : U_\Psi &\rightarrow \mathbb{R}^{n_\Psi}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

onde U_Ψ é o domínio da função ψ .

2.2 Formulação por Colocação Direta

Os métodos diretos discretizam o PCO, de forma a convertê-lo em um problema de PNL. Tal processo é conhecido como transcrição. Para isso, as funções contínuas do problema serão aproximadas por *splines*, as quais são funções compostas por vários segmentos polinomiais (KELLY, 2017).

Antes de apresentar a discretização das funções usando a colocação trapezoidal, faz-se necessário apresentar o problema de PNL. Tais problemas contêm um ou mais termos não-lineares, seja na sua função objetivo ou nas suas restrições. A típica formulação de um problema de PNL é apresentado na equação 2.8.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}} J(\mathbf{z}) \quad & \text{sujeito a} \\ & \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{g}(\mathbf{z}) \leq \mathbf{0}, \\ & \mathbf{z}_L \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{z}_U \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por simplicidade e clareza, dispensaremos a notação (i) , indicativa da fase. Iniciando a discretização das funções do PCO, seguindo o exposto em (BETTS, 2010), a duração da fase é dividida em n_s segmentos

$$t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_M = t_f, \tag{2.9}$$

onde cada ponto é chamado de *nó*. O número de nós é dado por $M \equiv n_s + 1$. Quanto às variáveis do problema, a notação utilizada será $\mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}(t_k)$ para as variáveis de estado e $\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}(t_k)$ para as variáveis de controle. Além disso, denota-se $\mathbf{f}_k \equiv \mathbf{f}[\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k), \mathbf{p}, t_k]$.

Dessa forma, visando a transcrição para um problema de PNL, as equações diferenciais do PCO são substituídas por um conjunto de restrições. Assim, as restrições do PCO - equações 2.2 a 2.4 - serão substituídas pelas restrições do problema de PNL:

$$\mathbf{c}_L \leq \mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{c}_U, \tag{2.10}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(\mathbf{x}) &= [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{M-1}, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_M, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_f, \psi_0, \psi_f]^\top \\ \mathbf{c}_L &= [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{g}_L, \dots, \mathbf{g}_L, \mathbf{e}_L, \mathbf{e}_L, \psi_L, \psi_L]^\top \\ \mathbf{c}_U &= [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{g}_U, \dots, \mathbf{g}_U, \mathbf{e}_U, \mathbf{e}_U, \psi_U, \psi_U]^\top \end{aligned} \tag{2.11}$$

As primeiras $n_x n_s$ restrições exigem que os vetores ζ sejam zero, satisfazendo aproxi-

madamente as equações diferenciais do PCO - dadas pela equação 2.2.

2.2.1 Colocação Trapezoidal

Focando no método trapezoidal, a variável de controle é discretizada usando uma *spline* linear

$$\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{u}_k + \frac{\tau}{h_k}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) \quad (2.12)$$

onde $\tau \equiv t - t_k$ e $h_k \equiv t_{k+1} - t_k$, e a variável de estado é discretizada usando uma *spline* quadrática

$$\mathbf{f}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \approx \mathbf{f}_k + \frac{\tau}{h_k}(\mathbf{f}_{k+1} - \mathbf{f}_k) \quad (2.13)$$

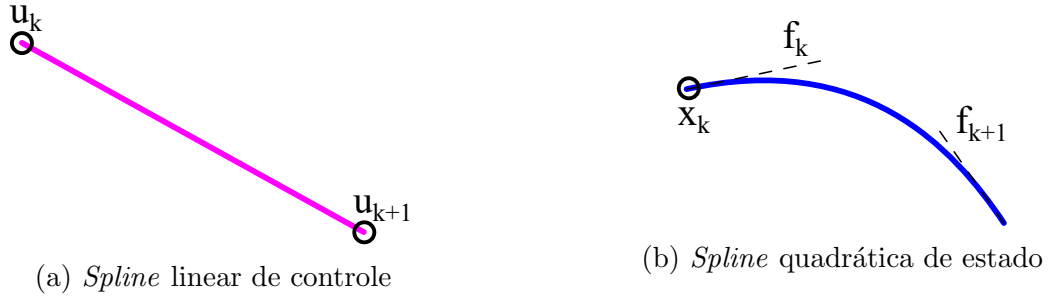


FIGURA 2.1 – Representações das *splines* de controle e de estado

Desse modo, as variáveis são definidas como

$$\mathbf{z}^\top = (\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{x}_M, \mathbf{u}_M) \quad (2.14)$$

e as restrições

$$\zeta_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k - \frac{h_k}{2}(\mathbf{f}_{k+1} + \mathbf{f}_k) \quad (2.15)$$

Assim, pode-se reescrever o índice de desempenho - equação 2.1 - como

$$J = \varphi[\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), \mathbf{p}, t_0, t_f] + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{1}{2} h_k (L_{k+1} + L_k) \quad (2.16)$$

3 Metodologia

Relembrando, o objetivo deste trabalho é criar uma biblioteca no MATLAB que permita a resolução de problemas de otimização de trajetória de maneira facilitada, de forma que o usuário precise apenas modelar o problema, sem a necessidade de implementar a lógica da solução numérica. Para isso, é necessário que a biblioteca forneça uma interface de dados, de modo a permitir que o usuário entre com a modelagem do seu problema. Além disso, deve-se implementar a colocação trapezoidal como método de solução.

Para validação da implementação a ser realizada, o estudo de otimização de trajetória de subida de eVTOL em (COSTA, 2023), o qual utiliza o software PSOPT citado na Seção 1.3, será replicado e os resultados serão comparados.

3.1 Interface de Dados

Tendo como referência os softwares OptimTraj (KELLY, 2022) e PSOPT (BECERRA, 2022), a implementação será realizada utilizando **structures** como interface de dados. As duas principais serão:

- **problem: structure** utilizada para entrar com o problema. Nela serão definidas as funções específicas do problema, as restrições, o palpite inicial de solução e informações adicionais, como número de fases e número de nós.
- **solution: structure** que conterá a solução do problema. Além dos valores do vetor solução - $[t, \mathbf{x}, \mathbf{u}]^T$ -, ela também conterá funções auxiliares usadas no seu cálculo e informações adicionais relacionadas a ele.

FIGURA 3.1 – Formatos das structures `problem` e `solution`

3.2 Trajetória de subida de eVTOL

O trabalho de referência considera um veículo multirrotor capaz de decolagem e pouso verticais, e visa encontrar a trajetória de subida que minimize o consumo energético da aeronave. Para modelar o problema, as variáveis de estado utilizadas foram

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ v_x \\ v_y \\ E \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde $[s_x, s_y]$ são as posições, $[v_x, v_y]$ as velocidades e E a energia total da bateria utilizada. As variáveis de controle são os comandos de tração dos rotores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

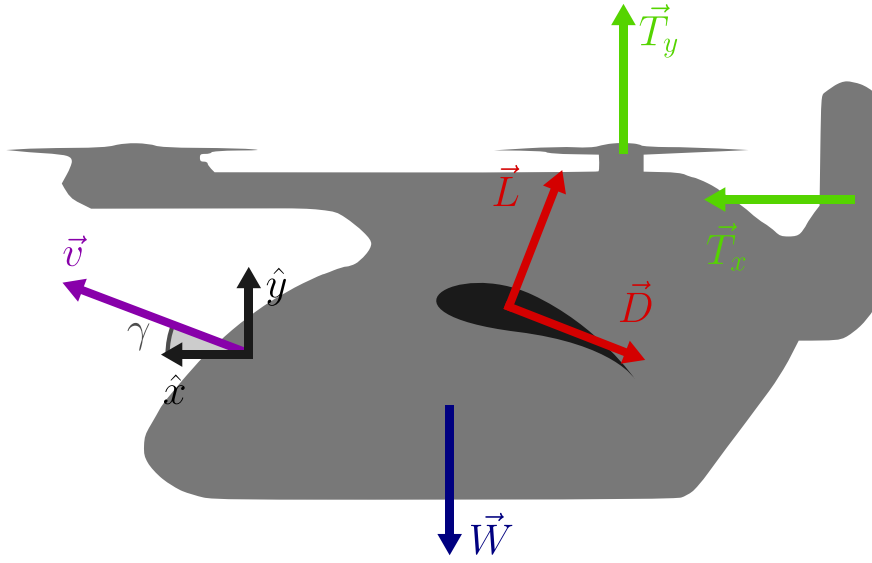


FIGURA 3.2 – Diagrama de forças no eVTOL

Conforme a figura 3.2, a dinâmica do sistema pode ser descrita como

$$\begin{aligned} m\ddot{p}_x &= F_x = T_x - D(\mathbf{v}) \cos(\gamma) - L(\mathbf{v}) \sin(\gamma) \\ m\ddot{p}_y &= F_y = T_y - D(\mathbf{v}) \sin(\gamma) + L(\mathbf{v}) \cos(\gamma) - mg \end{aligned} \quad (3.3)$$

de modo que as restrições diferenciais escrevem-se

$$\begin{aligned} \dot{s}_x &= v_x \\ \dot{s}_y &= v_y \\ \dot{v}_x &= \frac{1}{m} F_x \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{m} F_y \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{E} &= P_{total} \\ &= (2P_{ind,rotor,x}(1 + \chi) + T_x |\mathbf{v}| \cos(-\gamma)) \\ &\quad + (4P_{ind,rotor,y}(1 + \chi) + T_y |\mathbf{v}| \sin(-\gamma)) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Para finalizar a formulação do problema de otimização de trajetória, dado que se almeja o consumo mínimo da bateria, define-se a função objetivo como

$$J(\mathbf{z}) = E \quad (3.6)$$

Referências

ATHANS, M.; FALB, P. L. **Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications**. [S.l.]: Courier Corporation, 2007. Google-Books-ID: XJJDTSZ2HEEC. ISBN 978-0-486-45328-6. 12

BECERRA, V. **PSOPT Optimal Control Solver: User Manual**. 2022. Disponível em: <<https://github.com/PSOPT/psopt/releases/tag/5.02>>. 11, 12, 15, 19

BECERRA, V. M. Optimal control. **Scholarpedia**, v. 3, n. 1, p. 5354, jan. 2008. ISSN 1941-6016. Disponível em: <http://www.scholarpedia.org/article/Optimal_control>. 12

BELLMAN, R. **Dynamic Programming**. [S.l.]: Princeton University Press, 2010. Google-Books-ID: 92aYDwAAQBAJ. ISBN 978-0-691-14668-3. 12

BETTS, J. T. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, v. 21, n. 2, p. 193–207, mar. 1998. ISSN 0731-5090. Publisher: American Institute of Aeronautics and Astronautics. Disponível em: <<https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/2.4231>>. 12

BETTS, J. T. **Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming: Second Edition**. [S.l.]: SIAM, 2010. Google-Books-ID: n9hLriD8Lb8C. ISBN 978-0-89871-857-7. 12, 14, 17

BRYSON, A. E. **Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control**. [S.l.]: Routledge, 2018. Google-Books-ID: LFUPEAAAQBAJ. ISBN 978-1-351-46592-2. 12

COSTA, A. L. S. **Otimização de Trajetória de Subida de eVTOL utilizando o Método de Colocação Direta**. Dissertação (Mestrado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2023. 19

KELLY, M. An Introduction to Trajectory Optimization: How to Do Your Own Direct Collocation. **SIAM Review**, v. 59, n. 4, p. 849–904, jan. 2017. ISSN 0036-1445. Publisher: Society for Industrial and Applied Mathematics. Disponível em: <<https://epubs.siam.org/doi/10.1137/16M1062569>>. 12, 17

KELLY, M. P. **OptimTraj: Trajectory Optimization for Matlab**. 2022. Disponível em: <<https://github.com/MatthewPeterKelly/OptimTraj>>. 11, 12, 19

KIRK, D. E. **Optimal Control Theory: An Introduction**. [S.l.]: Courier Corporation, 2004. Google-Books-ID: fCh2SAtWIdwC. ISBN 978-0-486-43484-1. 12

KáLMáN, R. E. Contributions to the Theory of Optimal Control. In: . [s.n.], 1960. Disponível em: <<https://www.semanticscholar.org/paper/Contributions-to-the-Theory-of-Optimal-Control-K%C3%A1lm%C3%A1n/4602a97c4965a9f6c41c9a7eeaef5be8333dbaef>>. 12

KáLMáN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, mar. 1960. ISSN 0021-9223. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.3662552>>. 12

LEWIS, F. L. *et al.* **Optimal Control**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Google-Books-ID: U3Gtlot_hYEC. ISBN 978-1-118-12272-3. 12

PAINE, G. **The application of the method of quasilinearization to the computation of optimal control**. [S.l.], 1967. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19680002402/downloads/19680002402.pdf>>. 12

PONTRYAGIN, L. S. **Mathematical Theory of Optimal Processes**. [S.l.]: CRC Press, 1987. Google-Books-ID: kwzq0F4cBVAC. ISBN 978-2-88124-077-5. 12

SUSSMANN, H.; WILLEMS, J. 300 years of optimal control: from the brachystochrone to the maximum principle. **IEEE Control Systems Magazine**, v. 17, n. 3, p. 32–44, jun. 1997. ISSN 1941-000X. Conference Name: IEEE Control Systems Magazine. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/588098>>. 11

FOLHA DE REGISTRO DO DOCUMENTO			
1. CLASSIFICAÇÃO/TIPO TC	2. DATA 11 de novembro de 2024	3. DOCUMENTO Nº DCTA/ITA/DM-111/2024	4. Nº DE PÁGINAS 23
5. TÍTULO E SUBTÍTULO: Implementação do método de colocação direta para otimização de trajetória usando o software MATLAB			
6. AUTOR(ES): Henrique Silva Simplicio			
7. INSTITUIÇÃO(ÕES)/ÓRGÃO(S) INTERNO(S)/DIVISÃO(ÕES): Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA			
8. PALAVRAS-CHAVE SUGERIDAS PELO AUTOR: Controle Ótimo; Otimização de Trajetória; Colocação Direta			
9. PALAVRAS-CHAVE RESULTANTES DE INDEXAÇÃO: 1; 2; 3			
10. APRESENTAÇÃO: Trabalho de Graduação, ITA, São José dos Campos, 2024. 23 páginas.		(X) Nacional () Internacional	
11. RESUMO:			
12. GRAU DE SIGILO: (X) OSTENSIVO () RESERVADO () SECRETO			