特徵值和特徵向量的應用

翁志文

國立陽明交通大學應用數學系

2024 年 10 月

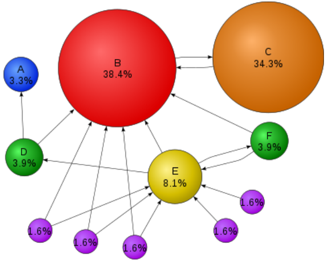
大綱

谷歌網頁評價

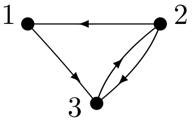
谷歌網頁評價

http://en.wikipedia.org/wiki/PageRank

PageRank 是一種網頁評價方法，其由 Google 創辦人 Larry Page 及 Sergey Brin 於 1990 年代末期在史丹佛大學參與新型搜尋引擎的研究時所發展出來。



Example



$$\begin{aligned} 1 &= p_1 + p_2 + p_3, \\ p_1 &= \frac{1-\alpha}{3} + \alpha\left(\frac{p_2}{2}\right), \\ p_2 &= \frac{1-\alpha}{3} + \alpha\left(\frac{p_3}{1}\right), \\ p_3 &= \frac{1-\alpha}{3} + \alpha\left(\frac{p_1}{1} + \frac{p_2}{2}\right). \end{aligned}$$

$\alpha \in (0,1)$ 是守規矩的機率。

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} + \frac{\alpha}{2} & \frac{1-\alpha}{3} \\ \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} & \frac{1-\alpha}{3} + \alpha \\ \frac{1-\alpha}{3} + \alpha & \frac{1-\alpha}{3} + \frac{\alpha}{2} & \frac{1-\alpha}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}.$$

觀察上述 3×3 方陣的行和 (column sum) 都為 1。

矩陣方程 $P = AP$

上頁我們看到一個三變數三列式的聯立方程式，以矩陣方程式為

$$P = AP \qquad (\mathbf{1}A = \mathbf{1}),$$

其中

- P 為 3×1 的行向量，其每一位置是一變數；
- A 為 3×3 方陣，A 的每一位置都是正數，以 $A > 0$ 表之；
- $\mathbf{1}$ 為每位置都是 1 的列向量 (row vector)。

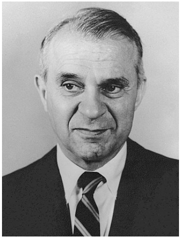
問題

- 解 P 會在某位置有負值嗎？
- 解 P 是唯一嗎？

里昂惕夫的投入產出分析

里昂惕夫 (Wassily Wassilyevich Leontief)

里昂惕夫是俄裔美籍的經濟學家，是投入產出分析的創始人。投入產出分析研究社會生產各部門之關係。



里昂惕夫得到 1973 年的諾貝爾經濟學獎，他有四個指導過的博士生也先後得獎 (Paul Samuelson 1970, Robert Solow 1987, Vernon L. Smith 2002, Thomas Schelling 2005)，堪稱一代宗師。

投入產出分析

假設：

- 每一個體需要所有商品以製造其唯一商品。
- 商品 j 的總價以 p_j 表示。p_j 也是個體 j 的收入。
- 以 a_{ij} 表商品 j 分配給個體 i 的比例。所以 $a_{1j}+a_{2j}+a_{3j}=1$ 且 $0\le a_{ij}\le 1$。
- 個體支出不能超過收入。也就是 $a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+a_{i3}p_3\le p_i$。

個體\商品	食物	醫藥	房子	花費	收入
農夫	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$a_{11}p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3$	p_1
醫師	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$a_{21}p_1+a_{22}p_2+a_{23}p_3$	p_2
工人	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$a_{31}p_1+a_{32}p_2+a_{33}p_3$	p_3
總價	p_1	p_2	p_3		

以矩陣表示問題：已知 $AP\le P$ 且 $\mathbf{1}A=\mathbf{1}$，求 P。

國立陽明交通大學
NATIONAL YANG MING CHIAO TUNG UNIVERSITY

引理

$$AP \le P \quad \text{且} \quad \mathbf{1}A = \mathbf{1} \qquad \Rightarrow \qquad AP = P.$$

證明.

$$\begin{aligned} & AP \le P \quad \text{且} \quad \mathbf{1}A = \mathbf{1} \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{1}P = (\mathbf{1}A)P = \mathbf{1}(AP) \le \mathbf{1}P \\ \Rightarrow \quad & \mathbf{1}(AP) = \mathbf{1}P \\ \Rightarrow \quad & AP = P. \end{aligned}$$

$\square$

在封閉系統每個體的收入等於支出。

上式假設 $AP \le P$ 改成 $AP \ge P$ 結論也是一樣。

國立陽明交通大學 NATIONAL YANG MING CHIAO TUNG UNIVERSITY

佩龍一弗羅賓尼斯定理

國立陽明交通大學
NATIONAL YANG MING CHIAO TUNG UNIVERSITY

定理 (佩龍一弗羅賓尼斯 (Perron-Frobenius), 1907)

假設

$$AP = P \quad 、\quad \mathbf{1}A = \mathbf{1} \quad 且 \quad A > 0，$$

則恆正解 P 存在，且在不計常數倍下是唯一的。事實上，任取第一象限的向量 $x > 0$，

$$P = c \cdot \lim_{n\to\infty} A^n x，$$

此處 $c > 0$。

證明的想法：

$$A \lim_{n\to\infty} A^n x = \lim_{n\to\infty} A^{n+1} x = \lim_{n\to\infty} A^n x。$$

上述極限有收斂性問題，不過可先觀察 $\mathbf{1}A^n x = \mathbf{1}x$，所以 $A^n x \not\to \infty$。但還是須排除跳動不收斂的情形。數學系學生對這會有興趣，我們先跳過此證明。

$A > 0$ 可改為 $A \geq 0$ 嗎？

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (\text{所有} \quad x, y \in \mathbb{R}).$$

每一個體都只消費自己的產品，會解出所有可能的收入分佈。

在 $A \geq 0$ 假設下，佩龍一弗羅賓尼斯定理結論的唯一性無法達到。

$A > 0$ 可改為 $A \geq 0$ 嗎？

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$

兩個體時，如每一個體都只消費他人的產品，兩個體收入相等。

$$c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \text{(極限因跳動不存在)。}$$

在 $A \geq 0$ 假設下，佩龍一弗羅賓尼斯定理結論仍可能成立，但上述證明想法須修正。

國立陽明交通大學
NATIONAL YANG MING CHIAO TUNG UNIVERSITY

數據的解讀

國立陽明交通大學
NATIONAL YANG MING CHIAO TUNG UNIVERSITY

解方程式尋找社會現象

$$\begin{pmatrix} 1-\epsilon & 1-\epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (0 < \epsilon < 1)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{\epsilon} \begin{pmatrix} 1-\epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1-\epsilon \\ \epsilon \end{pmatrix}.$$

兩個體時，個體產出的商品需求大，該個體收入就會高。

國立陽明交通大學
NATIONAL YANG MING CHIAO TUNG UNIVERSITY

正確解釋結果

個體\商品	食物	房子	醫藥	花費	收入
農夫	0.4	0.2	0.2	$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 = 0.25$	0.25
工人	0.1	0.7	0.2	$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 = 0.35$	0.35
醫師	0.5	0.1	0.6	$a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 = 0.4$	0.4
總價	0.25	0.35	0.4		

- 如果個體消費比例永遠不變，農夫拿到一大筆意外錢財，能讓他最後更有錢嗎？
- 收入比例最高的行業，平均薪水會最高嗎？
- 改變自己的消費習慣能影響自己跟別人的收入嗎？

隨機漫步

隨機漫步

- 矩陣方程式中

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: Ae_1 \text{，}$$

  (p_1, p_2, p_3) 代表由點 1 到三點 (1, 2, 3) 的機率分別為 $(0.4, 0.1, 0.5)$。
- 因此 $A^n e_1$ 代表有點 1 出發經過 n 步後抵達各點的機率。
- 我們稱一滿足 $\mathbf{1}A = \mathbf{1}$ 且 $A > 0$ 的方陣 A 為 隨機矩陣。
- 在條件及 $\mathbf{1}P = \mathbf{1}$ 及 $P > 0$ 下解 P，就得到隨機漫步最後穩定狀態時各點的機率。
- 此 P 必滿足 $P = \lim_{n\to\infty} A^n x$，與出發點 x 無關，只要 $A >$ 且 x 滿足 $\mathbf{1}x = \mathbf{1}$。

特徵值與特徵向量

特徵值與特徵向量

- 首先觀察

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

- 如果任一給定方陣 A 能找到純量 λ 及非零向量 $P \neq 0$ 滿足 $AP = \lambda P$，則稱 λ 為 A 的特徵值、P 為 A 的 λ-特徵向量。
- 我們之前等同在探討隨機矩陣 A 的 1-特徵向量。
- 其他特徵值及所對應的特徵向量也值得探討。

如何求方陣的特徵值與特徵向量

- 要求 $n \times n$ 方陣 A 的特徵值與特徵向量，等同要解 $AP = \lambda P$。
- 也等同解 $(A - \lambda I)P = 0$。
- 不管哪一式子，展開都有 n 個方程式，要解 $n + 1$ 個變數。
- 一個特徵值所對應的特徵向量有無限多個，不可能都寫下來，我們只能用"維數"去談論它們。
- 之前我們探討隨機矩陣的 1-特徵向量，它們構成的空間是 1 維的。
- 在 $n = 2$ 時要解 $AP = \lambda P$，雖不困難，但不夠細心的人因解太多，不知如何下手，會有一些心理障礙。
- 如果 $n \geq 3$，要解 $AP = \lambda P$，就很困難。一般要求助電腦。
- 最後我們介紹工程師的巧解。

工程師的巧解

範例

求下列方陣的所有特徵值及特徵向量：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

解：首先觀察 $AP = 0$ 中只有一個有用的式子，所以 0 是一特徵值，而 0-特徵向量都落在 $(1, -1, 0, 0)^T$, $(0, 1, -1, 0)^T$, $(0, 0, 1, -1)^T$ 所生成的 3 維空間。剩一個特徵值是 4，其對應 4-特徵向量是 $(1, 1, 1, 1)^T$，這可由以下特徵向量猜測及巧算得知：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot (x).$$

□

國立陽明交通大學
NATIONAL YANG MING CHIAO TUNG UNIVERSITY

範例

求下列方陣的所有特徵值及特徵向量：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

解：解 $AP = \lambda P$ 等同解 $(A+I)P = (\lambda+1)P$。利用上一題結果我們知 A 有 3 維的 (-1)-特徵向量及 1 維的 3-特徵向量。 $\square$

範例

求下列方陣的特徵值

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

解：前三列只能製造一個有用的式子，因此 0-特徵向量至少 2 維。利用以下特徵向量的猜測及巧算，我們又發現 3 及 4 這兩個特徵值：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \left(\begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ \hline y \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(3, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \left(4, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right). \quad \square$$

範例

求下列方陣 A 的兩個特徵值

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

解：利用以下特徵向量的猜測及巧算，我們可發現 2 個特徵值：

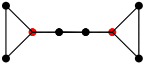
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ \hline y \end{array}\right) = \lambda \left(\begin{array}{c} x \\ x \\ x \\ \hline y \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

□

範例

求下列方陣 A 的兩個特徵值

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



提示： $A\begin{pmatrix} x \\ x \\ y \\ x \\ x \\ y \\ x \\ x \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ x \\ y \\ x \\ x \\ y \\ x \\ x \end{pmatrix}.$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

解：將上述矩陣的標號 $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 分成紅區塊 $\{3,6\}$ 及黑區塊 $\{1,2,4,5,7,8\}$，可發現黑列在黑行及紅行都僅有一個 1；而紅列在黑行三個 1 及在紅行沒有 1。以上圖理解此矩陣 A 及巧算所需 2×2 矩陣 N，實際計算可發現 N 有 $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$ 這兩個特徵值。