$(A \times B) \cdot (C \times D)$

hsjoihs

1. 概要

$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (B \cdot C)(A \cdot D)$ は commutable なときには成り立ちそうだが、そうでないときはどうなんだろう。

2. 計算

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \varepsilon_{ilm} C_l D_m = \left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) A_j B_k C_l D_m$$

$$= A_j B_k C_j D_k - A_j B_k C_k D_j$$

あっなるほど。

3. 全角運動量演算子

$$L^2 = (\hat{x} \times \hat{p}) \cdot (\hat{x} \times \hat{p}) = \hat{x}_j \hat{p}_k \hat{x}_j \hat{p}_k - \hat{x}_j \hat{p}_k \hat{x}_k \hat{p}_j = -\hbar^2 \Big(x_j \nabla_k x_j \nabla_k - x_j \nabla_k x_k \nabla_j \Big)$$

ここで $\nabla_k x_j = x_j \nabla_k + \delta_{kj}$ と $\nabla_k x_k = x_k \nabla_k + 3$ より、

$$L^2 = -\hbar^2 \Big(x_j \big(x_j \nabla_k + \delta_{kj} \big) \nabla_k - x_j \big(x_k \nabla_k + 3 \big) \nabla_j \Big)$$

$$= -\hbar^2 \Big(x_j x_j \nabla_k \nabla_k + x_j \delta_{kj} \nabla_k - x_j x_k \nabla_k \nabla_j - x_j 3 \nabla_j \Big) = -\hbar^2 \Big(x_j x_j \nabla_k \nabla_k - x_j x_k \nabla_k \nabla_j - x_j 2 \nabla_j \Big)$$

$$= -\hbar^2 \mid \vec{x} \mid^2 \nabla^2 + \hbar^2 \vec{x} \cdot \Big((\vec{x} \cdot \nabla) \nabla \Big) + 2\hbar^2 \vec{x} \cdot \nabla$$