

Logarithmic distribution の最尤推定

hsjoihs

1. 概要

どうでもいいが、https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_distribution に日本語記事がないし、日本語でどういうのかよく分からん。中国語版は対数分布だった。

2. $f(k) = \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^k}{k}$ で p の最尤推定

$$L(p) = \prod_{i=1}^n \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^{x_i}}{x_i}$$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{-1}{\ln(1-p)} \right) + x_i \ln p - \ln x_i \right)$$

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1-p) \ln(1-p)} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{p}$$

これを 0 とおくと

$$-\frac{n}{(1-p) \ln(1-p)} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{p}$$

$$-\frac{np}{(1-p) \ln(1-p)} = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$-\frac{np}{(1-p) \ln(1-p)} = n\bar{x}$$

$q = \frac{1}{1-p}$ とおくと $p = 1 - 1/q$ であり、また $q \geq 1$ である。

$$\frac{pq}{\ln q} = \bar{x}$$

$$\frac{q-1}{\ln q} = \bar{x}$$

$r = \ln q$ とおくと $r > 0$ で $\frac{e^r - 1}{r} = \bar{x}$

$\bar{x} > 1$ である限りこの解は一意的に存在する。

さて、 W 関数で解くことを考えてみよう。 $u = \frac{1}{\bar{x}}$ とおく。 $-s = r + u$ とおけば $e^{-s-u} = -s\bar{x}$ なので $-ue^{-u} = se^s$

この $s = -u$ でないほうの解を求めればよい。 $-u > -1$ なので $s = W_{-1}(-ue^{-u})$ である。

具体例として、 $\bar{x} = \frac{215}{168}$ であるときは、 $s = -1.25601$ であり、 $r = -s - u = 0.47461$ で $q = e^r = 1.60739$ なので $p = 0.37788$ となる。

なお、 $E(x) = \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p}{1-p}$ だそうなので、 n が十分大きい時 p の estimator は p の真の値に近づく。

<https://dlmf.nist.gov/4.13> によれば、 $\eta = \ln \frac{-1}{-ue^{-u}} = -\ln(ue^{-u}) = u - \ln u$ とおくと $W_{-1}(-ue^{-u}) \approx -\eta - \ln \eta - \frac{\ln \eta}{\eta} = -u + \ln u - \ln(u - \ln u) - \frac{\ln(u - \ln u)}{u - \ln u}$

3. オチ

もう既に pdf 化してた。はい。