Logarithmic distribution の最尤推定

hsjoihs

1. 概要

どうでもいいが、https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_distribution に日本語記事がないし、日本語でどういうのかよく分からん。中国語版は対数分布だった。

2. $f(k) = \frac{-1}{\ln(1-p)}\frac{p^k}{k}$ で p の最尤推定

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n}\frac{-1}{\ln(1-p)}\frac{p^{x_i}}{x_i}$$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{-1}{\ln(1-p)}\right) + x_i \ln p - \ln x_i\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-p)\ln(1-p)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{p}$$

これを 0 とおくと

$$-\frac{n}{(1-p)\ln(1-p)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{p}$$

$$-\frac{np}{(1-p)\ln(1-p)} = \sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$-\frac{np}{(1-p)\ln(1-p)} = n\bar{x}$$

$q = \dfrac{1}{1-p}$ とおくと $p = 1 - 1/q$ であり、また $q \geq 1$ である。

$$\frac{pq}{\ln q} = \bar{x}$$

$$\frac{q-1}{\ln q} = \bar{x}$$

$r = \ln q$ とおくと $r > 0$ で $\dfrac{e^r - 1}{r} = \bar{x}$

$\bar{x} > 1$ である限りこの解は一意に存在する。

さて、W 関数で解くことを考えてみよう。$u = \dfrac{1}{\bar{x}}$ とおく。$-s = r + u$ とおけば $e^{-s-u} = -s\bar{x}$ なので $-ue^{-u} = se^s$

これの $s = -u$ でないほうの解を求めればいい。$-u > -1$ なので $s = W_{-1}(-ue^{-u})$ である。

具体例として、$\bar{x} = \dfrac{215}{168}$ であるときは、$s = -1.25601$ であり、$r = -s - u = 0.47461$ で $q = e^r = 1.60739$ なので $p = 0.37788$ となる。

なお、$E(x) = \dfrac{-1}{\ln(1-p)} \dfrac{p}{1-p}$ だそうなので、n が十分大きい時 p の estimator は p の真の値に近づく。

https://dlmf.nist.gov/4.13 によれば、$\eta = \ln \dfrac{-1}{-ue^{-u}} = -\ln(ue^{-u}) = u - \ln u$ とおくと $W_{-1}(-ue^{-u}) \approx -\eta - \ln\eta - \dfrac{\ln\eta}{\eta} = -u + \ln u - \ln(u - \ln u) - \dfrac{\ln(u - \ln u)}{u - \ln u}$

3. オチ

もう既に pdf 化してた。はい。