$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda}\ (0 < \lambda < 1)$

hsjoihs

1. 複素解析でチャチャッと答えを求める

「実軸の真上 ⟶ 無限の半径でグルっと周回 ⟶ 実軸の真下」というコースで積分。

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx + \int_\infty^0 \frac{x^{\lambda-1}e^{2\pi i(\lambda-1)}}{1+x}dx = 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(-1, \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z}\right)$$

$$\left(1-e^{2\pi i(\lambda-1)}\right)\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = 2\pi i \lim_{z\to-1} e^{(\lambda-1)\log z}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = \frac{2\pi i e^{(\lambda-1)\pi i}}{1-e^{2\pi i(\lambda-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-(\lambda-1)\pi i}-e^{\pi i(\lambda-1)}} = \frac{2\pi i}{-e^{-\lambda\pi i}+e^{\pi i\lambda}} = \frac{\pi}{\sin\pi\lambda}$$

2. 分割する

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx + \int_1^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx \qquad = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx + \int_1^0 \frac{u^{-\lambda+1}}{1+u^{-1}}\left(-u^{-2}\right)du$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{u^{-\lambda-1}}{1+u^{-1}}du \qquad = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{u^{-\lambda}}{u+1}du$$

ここで $F(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx$ とすると $\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = F(\lambda) + F(1-\lambda)$

3. $F(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx$ について調べる

プロットしてみると $\lambda > 0$ で収束するっぽさがある。$\frac{\pi}{\sin\pi\lambda}$ の特異点を二つに分離できているっぽさある。具体的に調べてみよう。

3.1. λ が整数のとき

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1} + (-1)^\lambda}{1+x}dx - (-1)^\lambda \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^{\lambda-2} - x^{\lambda-3} + ... + (-1)^\lambda\right)dx - (-1)^\lambda \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$$
$$= \left(\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda-2} + ... + (-1)^\lambda\right) - (-1)^\lambda \ln 2$$
$$= (-1)^\lambda\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda-1}\right) - (-1)^\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
$$= (-1)^\lambda \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - (-1)^\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
$$= -(-1)^\lambda \sum_{k=\lambda}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$
$$= -(-1)^\lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+\lambda-1}}{l+\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+\lambda}$$

3.2. λ が半整数のとき $\left(\lambda = n + \frac{1}{2}\right)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{n-\frac{1}{2}}}{1+x}dx &= \int_0^1 \frac{u^{2n-1}}{1+u^2}2udu = 2\int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2}du \\
&= 2\left[\int_0^1 \left(u^{2n-2} - u^{2n-4} + ... + (-1)^{n-1}\right)du + (-1)^n \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}du\right] \\
&= 2\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - ...(-1)^{n-1}\frac{1}{1}\right) + 2(-1)^n\frac{\pi}{4} \\
&= 2(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\right) + 2(-1)^n\frac{\pi}{4} \\
&= 2(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + 2(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 2(-1)^n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \\
&= 2(-1)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l+n+1-1}}{2(l+n+1)-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l+\lambda}
\end{aligned}
$$

3.3. ということは

一般に $F(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l+\lambda}$ が成り立つのではなかろうか。 そんな気がする。 ついでにこの形だと解析接続できそう。つよい。

冷静に考えてみたらかなり自然だった。端点以外では等比級数の和の公式が使えるので、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}dx &= \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} (-x)^l x^{\lambda-1} dx \\
&= \int_0^1 \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l x^{l+\lambda-1} dx \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^l x^{l+\lambda-1} dx \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+\lambda}
\end{aligned}$$

が期待される。もちろん総和と積分の入れ替えに条件が必要だし、λ が 0 以下だと $x=0$ の端点が消えてくれないからこそこれは $F(\lambda)$ の一般化になるのだなぁ。

3.4. ディガンマ関数

ディガンマ関数 $\psi(z) = \dfrac{\frac{d}{dx}\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$ は $\psi(z) = \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \dfrac{1}{z} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{z+k}\right]$ と書けることが知られているらしいので

$$\begin{aligned}
\psi\left(z+\frac{1}{2}\right) - \psi(z) &= \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \frac{1}{z+\frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+\frac{1}{2}+k}\right] - \lim_{n\to\infty}\left[\ln n - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{z+\frac{1}{2}+k} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{z+k}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{l=1, l\in 2\mathbb{Z}+1}^{2n+1}\frac{(-1)^l}{z+\frac{l}{2}} + \sum_{l=0, l\in 2\mathbb{Z}}^{2n}\frac{(-1)^l}{z+\frac{l}{2}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{l=0}^{2n+1}\frac{(-1)^l}{z+\frac{l}{2}}\right] = 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l+2z} = 2F(2z)
\end{aligned}$$

つまり $F(\lambda) = \dfrac{1}{2}\left(\psi\left(\dfrac{\lambda+1}{2}\right) - \psi\left(\dfrac{\lambda}{2}\right)\right)$ であることが期待される。

この期待の下だと $F(\lambda)+F(1-\lambda) = \frac{1}{2}\left(\psi\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \psi\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)\right)$

ここで $\psi(1-z)-\psi(z) = \pi \cot \pi z$ が知られているので

$$
\begin{aligned}
F(\lambda)+F(1-\lambda) &= \frac{1}{2}\left(\psi\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) - \psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \psi\left(\frac{2-\lambda}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\pi \cot \frac{\pi(1-\lambda)}{2} - \psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \psi\left(\frac{2-\lambda}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\lambda}{2}\right)} + \frac{\pi \cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{\pi \cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2}}{\sin \frac{\pi\lambda}{2} \cos \frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{\pi \cos^2 \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos \frac{\pi\lambda}{2} \sin \frac{\pi\lambda}{2}}\right) \\
&= \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi\lambda}{2} \cos \frac{\pi\lambda}{2}} = \frac{\pi}{\sin \pi\lambda}
\end{aligned}
$$

なるほどなぁ。