## 自由群 $F_4$ から $F_2$ への、とある準同型写像

hsjoihs

## 1. 問題

自由群  $F_4:\langle A,B,C,D|\rangle$  と  $F_2:\langle \alpha,\beta|\rangle$  があり、準同型写像  $f:F_4\to F_2$  が  $f(A)=\alpha^3$ ,  $f(B)=\beta\alpha^{-2}$ ,  $f(C)=\alpha\beta$ ,  $f(D)=\alpha^2\beta\alpha^{-1}$  によって定まるとき、

- ullet  $f(F_4)$  は  $F_2$  の正規部分群
- $F_2/f(F_4) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

であることを示せ。

## 2. 「 $f(F_4)$ は $F_2$ の正規部分群である」の略解

示すべきことは、 $\forall n \in f(F_4), \forall g \in F_2, gng^{-1} \in f(F_4)$  である。ところで、

$$\alpha f(A)\alpha^{-1} = \qquad \alpha \alpha^{3}\alpha^{-1} = \qquad \alpha^{3} = \qquad f(A)$$

$$\alpha f(B)\alpha^{-1} = \qquad \alpha \beta \alpha^{-2}\alpha^{-1} = \qquad \alpha \beta (\alpha^{3})^{-1} = \qquad f(CA^{-1})$$

$$\alpha f(C)\alpha^{-1} = \qquad \alpha \alpha \beta \alpha^{-1} = \qquad \alpha^{2}\beta \alpha^{-1} = \qquad f(D)$$

$$\alpha f(D)\alpha^{-1} = \qquad \alpha \alpha^{2}\beta \alpha^{-1}\alpha^{-1} = \qquad \alpha^{3}\beta \alpha^{-2} = \qquad f(AB)$$

$$\beta f(A)\beta^{-1} = \qquad \beta \alpha^{3}\beta^{-1} = \qquad \beta \alpha^{-2}\alpha^{3}(\beta \alpha^{-2})^{-1} = \qquad f(BAB^{-1})$$

$$\beta f(B)\beta^{-1} = \qquad \beta \beta \alpha^{-2}\beta^{-1} = \qquad \beta \alpha^{-2}\alpha^{2}\beta \alpha^{-1}(\alpha^{3})^{-1}(\beta \alpha^{-2})^{-1} = \qquad f(BAA^{-1}B^{-1})$$

$$\beta f(C)\beta^{-1} = \qquad \beta \alpha \beta \beta^{-1} = \qquad \beta \alpha^{-2}\alpha^{3}\alpha \beta(\alpha^{3})^{-1}(\beta \alpha^{-2})^{-1} = \qquad f(BACA^{-1}B^{-1})$$

$$\beta f(D)\beta^{-1} = \qquad \beta \alpha^{2}\beta \alpha^{-1}\beta^{-1} = \qquad \beta \alpha^{-2}\alpha^{3}\alpha \beta(\alpha^{3})^{-1}(\beta \alpha^{-2})^{-1} = \qquad f(BACA^{-1}B^{-1})$$

$$\alpha^{-1}f(A)\alpha = \qquad \alpha^{-1}\alpha^{3}\alpha = \qquad \alpha^{3} = \qquad f(A)$$

$$\alpha^{-1}f(B)\alpha = \qquad \alpha^{-1}\beta \alpha^{-2}\alpha = \qquad (\alpha^{3})^{-1}\alpha^{2}\beta \alpha^{-1} = \qquad f(A^{-1}D)$$

$$\alpha^{-1}f(C)\alpha = \qquad \alpha^{-1}\alpha\beta\alpha = \qquad \beta \alpha^{-2}\alpha^{3} = \qquad f(BA)$$

$$\alpha^{-1}f(D)\alpha = \qquad \alpha^{-1}\alpha^{2}\beta \alpha^{-1}\alpha = \qquad \alpha\beta = \qquad f(C)$$

$$\beta^{-1}f(A)\beta = \qquad \beta^{-1}\alpha^{3}\beta = \qquad (\alpha\beta)^{-1}\alpha^{3}\alpha\beta = \qquad f(C^{-1}AC)$$

$$\beta^{-1}f(B)\beta = \qquad \beta^{-1}\alpha\beta\beta = \qquad (\alpha\beta)^{-1}\alpha^{2}\beta \alpha^{-1}\alpha\beta = \qquad f(C^{-1}DC)$$

$$\beta^{-1}f(D)\beta = \qquad \beta^{-1}\alpha\beta\beta = \qquad (\alpha\beta)^{-1}\alpha^{3}\beta\alpha^{-2}\alpha\beta = \qquad f(C^{-1}ABC)$$

なので、 $F_2$  の任意の要素が  $\alpha$  ·  $\beta$  ·  $\alpha^{-1}$  ·  $\beta^{-1}$  の積で書ける以上、

$$\forall n \in f(F_4), \forall g \in F_2, gng^{-1} \in f(F_4)$$

は成り立つ。

## 3. 「 $F_2/f(F_4) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 」の略解

まだ解いてない。