星型八面体を任意の平面で切る

hsjoihs

1. 問題

1 辺の長さが 2 である立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点のうち隣り合わない 4 頂点を結んで得られる正四面体と、残りの 4 頂点を結んで得られる正四面体との和集合を考える。これは星型八面体 (stella octangula) と呼ばれる立体になるが、これを任意の平面で切ったときの断面積を求めよ。

2. 座標設定

問題文のシンプルさに反しておそろしく凶悪な問題である。我々には 3 次元立体の直観など生えていないのだなぁということを思い知らせてくれる。

なにはともあれ、座標を設定してパラメータをとって数式で殴るところから始める。立方体の頂点を $(X, Y, Z) = (\pm1, \pm1, \pm1)$ とすれば、片方の正四面体は

$$X+Y+Z \geq -1 \wedge X-Y-Z \geq -1 \wedge -X+Y-Z \geq -1 \wedge -X-Y+Z \geq -1$$

を満たす点の集合であって、もう片方が

$$X+Y-Z \geq -1 \wedge X-Y+Z \geq -1 \wedge -X+Y+Z \geq -1 \wedge -X-Y-Z \geq -1$$

を満たす点の集合である。切る平面の法線ベクトルのひとつを $(\sin T \cos P, \sin T \sin P, \cos T)$ としてやると、平面と原点との符号付き距離を z_0 としたとき $X \sin T \cos P + Y \sin T \sin P + Z \cos T = z_0$ が平面の式になる。

ここで $\begin{pmatrix} \sin T \cos P \\ \sin T \sin P \\ \cos T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos T \cos P \\ -\cos T \sin P \\ \sin T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin P \\ -\cos P \\ 0 \end{pmatrix}$ が正規直交基底を成すことから、

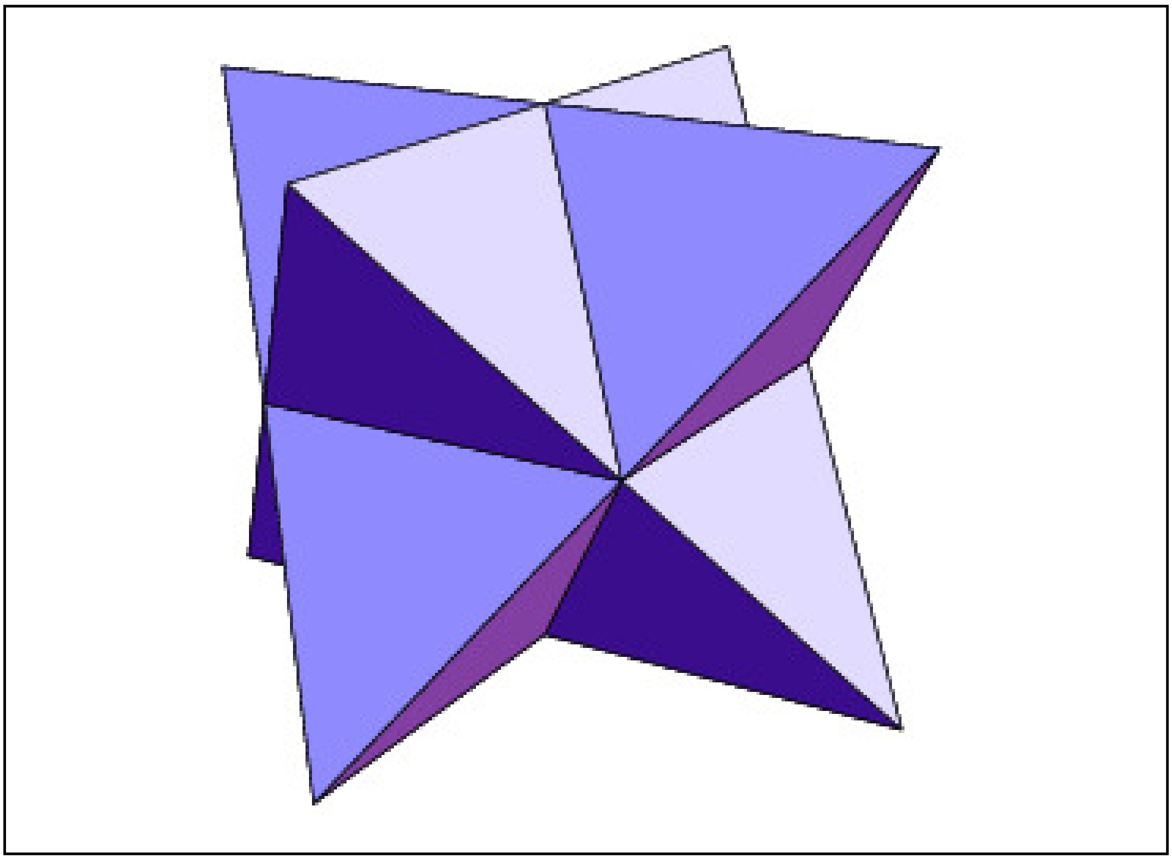

図 1 星型八面体 (stella octangula)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos T \cos P & -\cos T \sin P & \sin T \\ \sin P & -\cos P & 0 \\ \sin T \cos P & \sin T \sin P & \cos T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

という座標系でものごとを考えれば、切断平面の式が $z = z_0$ であり扱いやすくなる。

直交行列であるから逆変換を求めるのは簡単であり、

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos T \cos P & \sin P & \sin T \cos P \\ -\cos T \sin P & -\cos P & \sin T \sin P \\ \sin T & 0 & \cos T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ということで、 正四面体に属する条件を xyz 座標系で書き直して $z = z_0$ と固定することで断面を xy 平面上に得ることができる。

3. 切る

まずは片方の正四面体

$$X+Y+Z\geq -1 \wedge X-Y-Z\geq -1 \wedge -X+Y-Z\geq -1 \wedge -X-Y+Z\geq -1$$

を扱う。そのためには頂点候補が要る。それぞれの不等号を等号に変えて得られる条件を ppp, pnn, npn, nnp と書くことにすると、全然難しくはないがやたら手間のかかる計算により、

$ppp \wedge pnn$（図の赤）は

$$(x,y)=\left(\frac{-z_0\sin P\cos T-\cos P-z_0\sin T}{\sin P\sin T-\cos T},\frac{-\sin T+\sin P\cos T-z_0\cos P}{\sin P\sin T-\cos T}\right)$$

$npn \wedge ppp$（図の紫）は

$$(x,y)=\left(\frac{-\sin P-z_0\sin T-z_0\cos P\cos T}{\cos P\sin T-\cos T},\frac{\sin T-\cos P\cos T+z_0\sin P}{\cos P\sin T-\cos T}\right)$$

$pnn \wedge npn$（図のオレンジ）は

$$(x,y)=\left(\frac{1-z_0\cos T}{\sin T},\frac{(\cos P-\sin P)(\cos T-z_0)}{(\sin P+\cos P)\sin T}\right)$$

$ppp \wedge nnp$（図の緑）は

$$(x,y)=\left(\frac{-1-z_0\cos T}{\sin T},-\frac{(z_0+\cos T)(\cos P+\sin P)}{\sin T(\sin P-\cos P)}\right)$$

$npn \wedge nnp$（図の黒）は

$$(x,y)=\left(-\frac{(\cos P+z_0\sin P\cos T-z_0\sin T)}{\cos T+\sin P\sin T},\frac{\cos T\sin P+\sin T-z_0\cos P}{\cos T+\sin P\sin T}\right)$$

$pnn \wedge nnp$（図の青）は

$$(x,y)=\left(-\frac{z_0\cos P\cos T+\sin P-z_0\sin T}{\cos T+\cos P\sin T},\frac{-\cos P\cos T-\sin T+z\sin P}{\cos T+\cos P\sin T}\right)$$

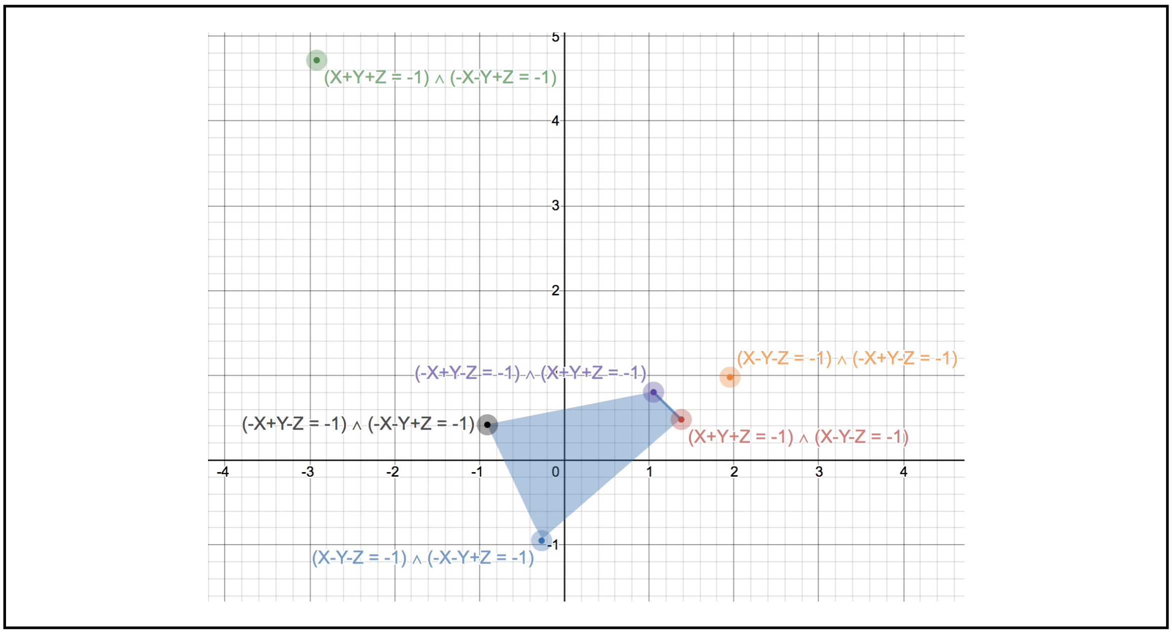

図 2 $T = 0.423, P = 0.257, z_0 = 0.22$ https://www.desmos.com/calculator/7hnbfebsp4

となる。

4. 条件分岐

先ほどの雑な計算は全て 0 除算のリスクを孕んでいる。とはいえ実際のところこれは当たり前であり、むしろないとおかしい。というのも、ppp, pnn, npn, nnp それぞれの条件は「正四面体を構成する面上にあるかどうか」なので、たとえば $ppp \wedge pnn$（図の赤）が 0 除算を起こす条件というのは「『ppp かつ pnn』、つまり『$(X, Y, Z) = (-1, -1, 1)$ と $(X, Y, Z) = (-1, 1, -1)$ を結ぶ直線』が切断平面と平行であるとき」のはずである。そのような状況は存在するはずであり、したがって 0 除算リスクも存在しなければならない。

せっかくなので代数的にも確認しよう。赤の 0 除算条件は $\sin P \sin T = \cos T$ であり、これは法線ベクトルが XYZ 座標系で $\left(\pm\sqrt{1 - 2a^2}, a, a\right)$ という形であることを意味する。『$(X, Y, Z) = (-1, -1, 1)$ と $(X, Y, Z) = (-1, 1, -1)$ を結ぶ直線』の方向ベクトルの一つは $(X, Y, Z) = (0, -2, 2)$ であって、これは切断平面の法線ベクトルと明らかに直交する。

とまあ 0 除算条件という等式条件は幾何学的考察が簡単なのでよいが、問題は不等式条件である。これはつらいので、少しでも条件を削るべく対称性を用いる。具体的には、$z_0 \geq 0$ として、球面の 8 分の 1、$0 \leq T \leq \pi, 0 \leq P \leq \dfrac{\pi}{4}$ で片方の正四面体だけを考える。これが解ければ球面の 16 分の 1、$0 \leq T \leq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leq P \leq \dfrac{\pi}{4}$ での星型八面体と平面との交わりを求めるこ

とができる。

試しに $P = 0.2$ で相図を書いてみる。そこから相図を予想する。とりあえず「赤紫 ⇔ 橙」「紫緑 ⇔ 黒」「緑青 ⇔ 赤」「青橙 ⇔ 黒」「青黒 ⇔ 橙」「赤青 ⇔ 緑」の 6 本の境界はありそう。

まず「赤紫 ⇔ 橙」。これは $X + Y + Z \geq -1$ を橙が満たしているかどうかによる分岐であり、条件は $1 + \dfrac{2\left(z_0 - \cos T\right)}{\left(\sin P + \cos P\right)\sin T} \geq -1$ である。この分岐は $0 \leq P \leq \dfrac{\pi}{4}$ の条件のもとで常に所望の範囲を二分し、その境界は $\left(z_0, T\right) = \left(1, 0\right)$ と $\left(z_0, T\right) = \left(0, \cot^{-1}\left(\sin P + \cos P\right)\right)$ を通過する曲線である。

次に「紫緑 ⇔ 黒」と「青橙 ⇔ 黒」。これはそれぞれ $X + Y + Z \geq -1$ と $X - Y - Z \geq -1$ をを黒が満たしているかどうかによる分岐であり、条件は $1 + \dfrac{2\left(z_0 - \sin T \cos P\right)}{\cos T + \sin P \sin T} \geq -1$ かつ $1 - \dfrac{2\left(z_0 - \sin T \cos P\right)}{\cos T + \sin P \sin T} \geq -1$ である。

一見 $\cos T + \sin P \sin T$ の符号が途中で変わるために $T = \cot^{-1}\left(-\sin P\right)$ あたりで面倒に見え、実際片方の条件のみではそうなるが、図から分かるように 2 つの条件を合わせればこの境界は実際には効いてこない。

次。「緑青 ⇔ 赤」。これは $-X - Y + Z \geq -1$ を赤が満たしているかどうかによる分岐であり、条件は $1 + \dfrac{-2\left(z_0 + \cos P \sin T\right)}{\sin P \sin T - \cos T} \geq -1$ である。だが、この条件で書くと 0 除算条件よりやっぱり横線が入って面倒なので、$-X + Y - Z \geq -1$ を赤が満たしているかどうかの分岐も入れてみる。すると追加で $1 + \dfrac{2\left(z_0 + \cos P \sin T\right)}{\sin P \sin T - \cos T} \geq -1$ を要求することとなり、かつこの境界はさっき橙でやったやつと一致してくれる。

ということで、相図の境界を定めるのは 4 本の正弦波

$$z_0 = \cos T \pm \left(\sin P + \cos P\right)\sin T$$

$$z_0 = -\cos T \pm \left(\sin P - \cos P\right)\sin T$$

であることがわかった。答えだけ見るとかなり簡単だな。いい感じの幾何的考察でサクッと出せそう。

T \ z	0	0.11	0.123	0.1287	0.15	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66	0.77	0.88	0.95	0.96	0.99	1.1	1.21	1.32	1.43	1.54	1.65	1.76
0	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
0.157	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅	∅	∅	∅
0.314	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅	∅	∅
0.471	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅	∅
0.628	黒青赤紫	黒青赤紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅
0.785	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅
0.942	緑青橙紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅
1.099	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅
1.256	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅	∅
1.413	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅	∅
1.57	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.727	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	黒青橙	黒青橙	黒青橙	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.755	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	黒青橙	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.765	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	黒青橙	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.7657	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.765796	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.76597	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.79	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.81	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
1.884	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅
2.041	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅
2.198	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅
2.29	赤橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅
2.314	赤橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅
2.32	赤橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅
2.34	赤橙紫	赤橙紫	赤橙紫	赤橙紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅
2.355	赤橙紫	赤橙紫	赤橙紫	赤青黒紫	緑青橙紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅
2.512	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅
2.669	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅
2.826	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅
2.983	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	緑黒紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅
3.14	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	赤青黒紫	∅	∅	∅	∅	∅	∅	∅

図 3 $P = 0.2$ における相図（実測）

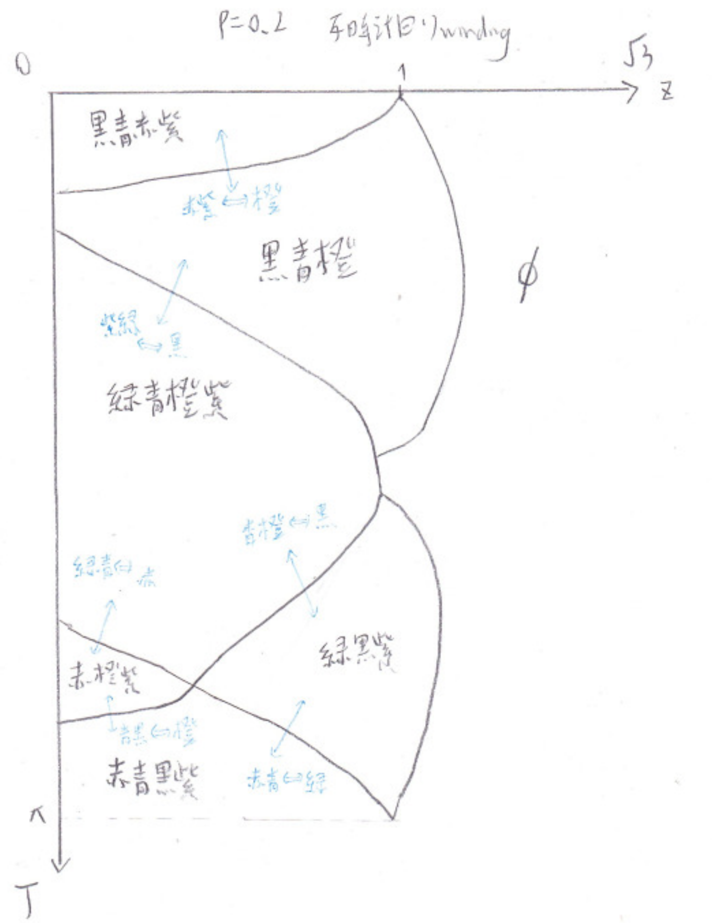

図 4 $P = 0.2$ における相図（予想）。緑青橙紫と ∅ との境界は線ではなく点かも。

ということで、$z_0 \geq 0$ で $0 \leq T \leq \pi, 0 \leq P \leq \dfrac{\pi}{4}$ において相は 7 つ。

1. 黒青赤紫の相：

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

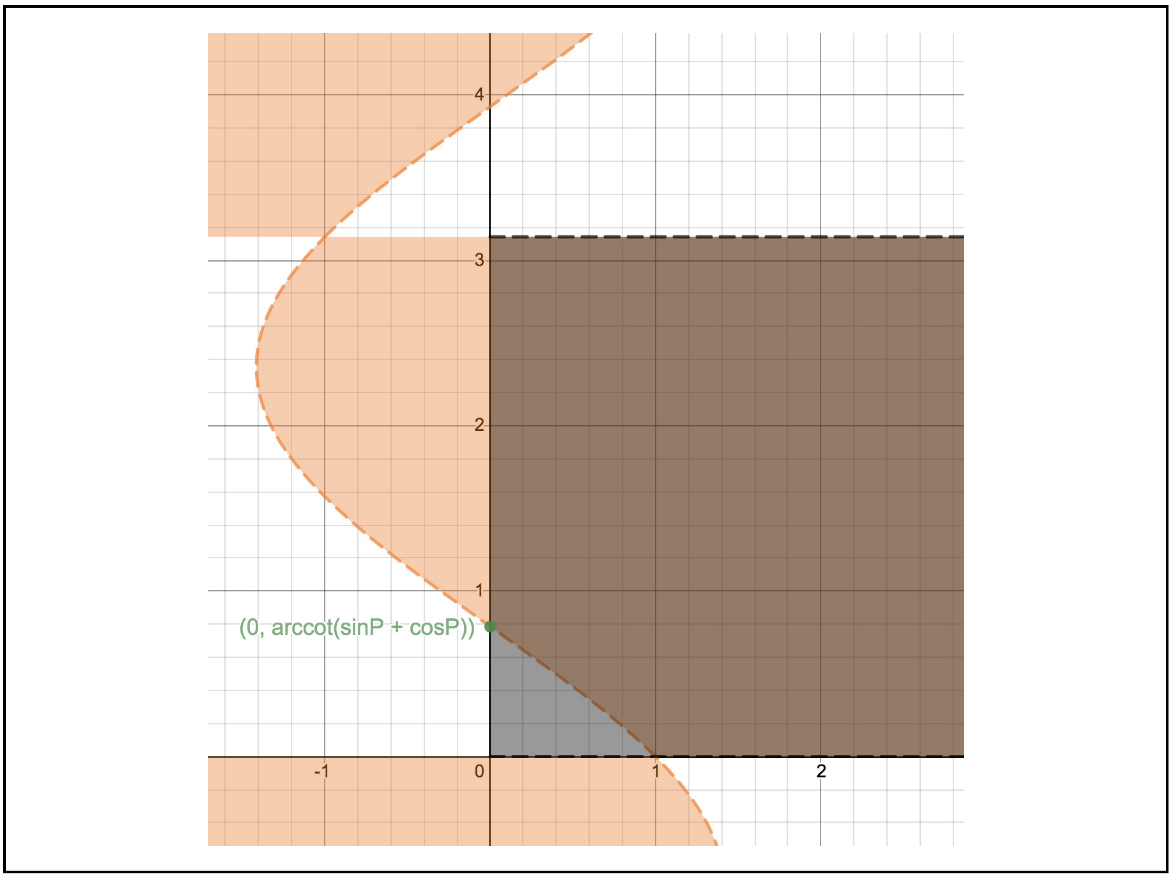

図 5 赤紫 ⇔ 橙（図の橙）

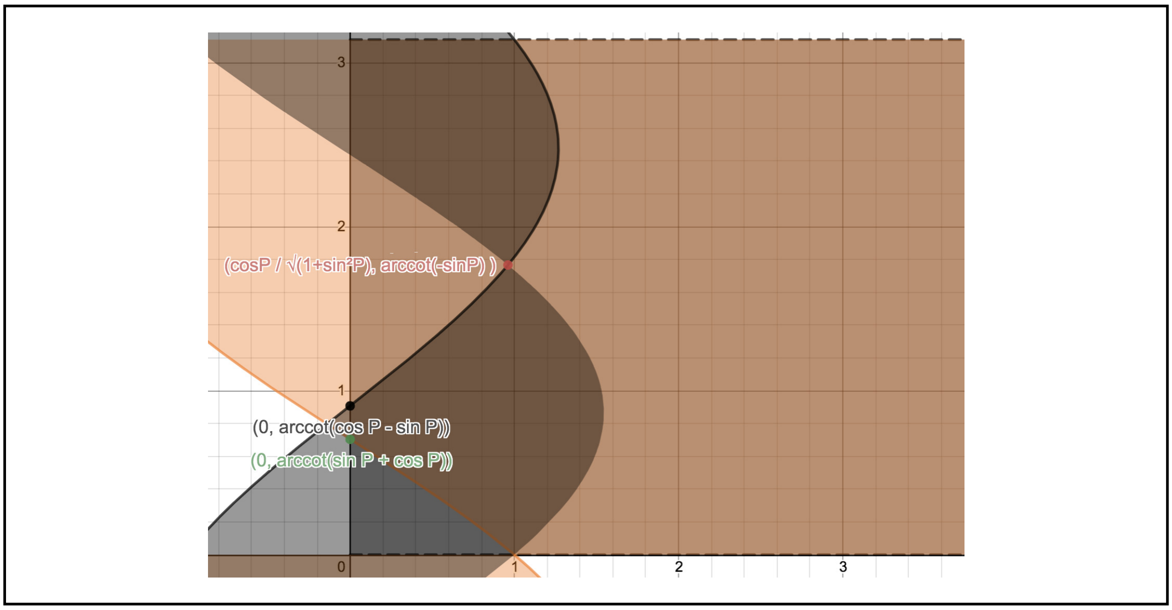

図 6 紫緑 ⇔ 黒、青橙 ⇔ 黒（図の黒）

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

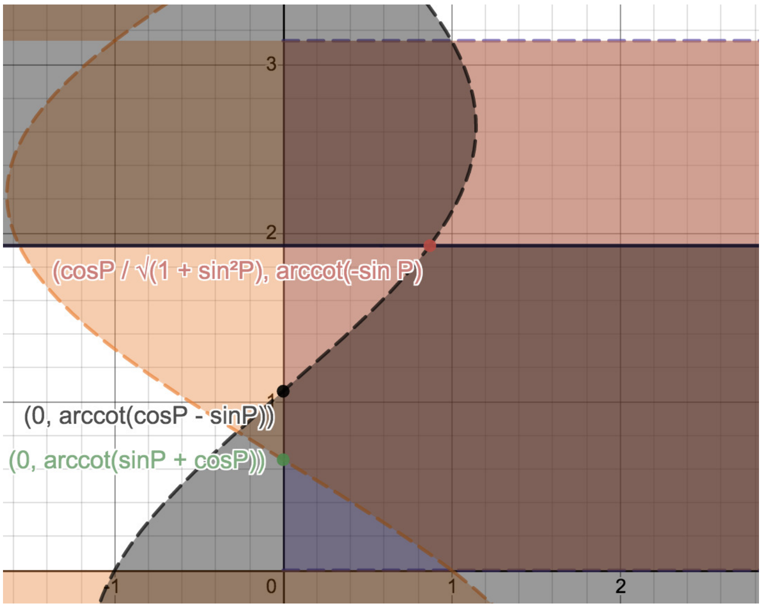

図 7 紫緑 ⇔ 黒のみ

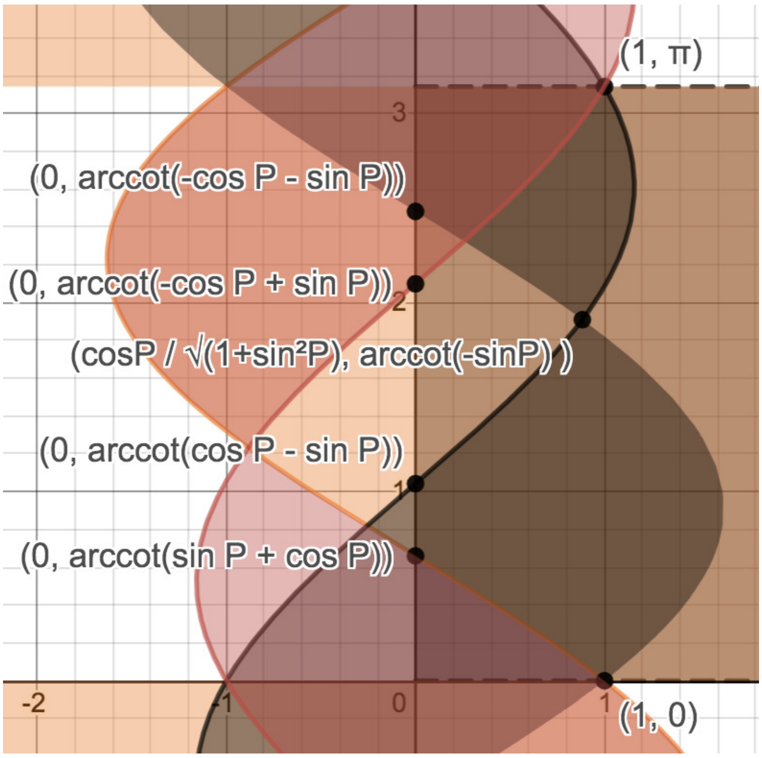

図 8 緑青 ⇔ 赤と追加の【橙紫 ⇔ 赤】

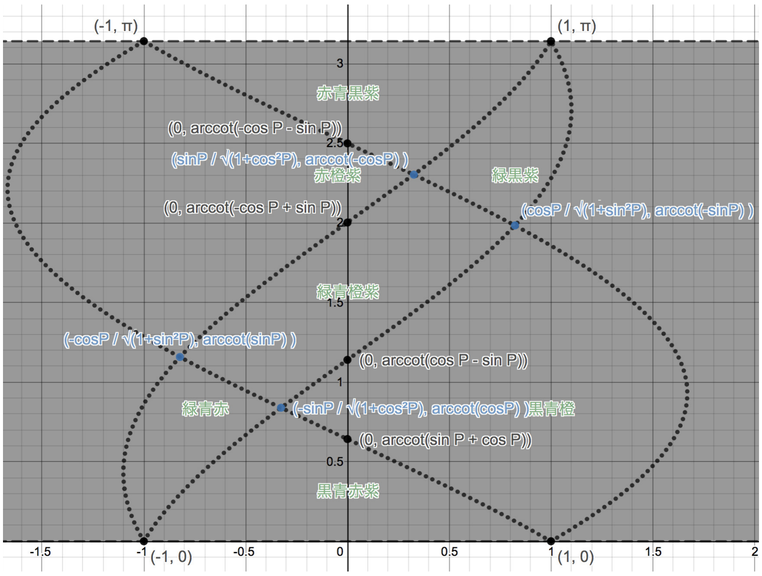

図 9 最終的な相図

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a

a