Logarithmic distribution の最尤推定

hsjoihs

1. 概要

どうでもいいが、https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_distribution に日本語記事がないし、日本語でどういうのかよく分からん。中国語版は対数分布だった。

2. $f(k) = \frac{-1}{\ln(1-p)}\frac{p^k}{k}$ で p の最尤推定

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} \frac{-1}{\ln(1-p)}\frac{p^{x_i}}{x_i}$$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{-1}{\ln(1-p)}\right) + x_i \ln p - \ln x_i\right)$$

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1-p)\ln(1-p)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{p}$$

これを 0 とおくと

$$-\frac{n}{(1-p)\ln(1-p)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{p}$$

$$-\frac{np}{(1-p)\ln(1-p)} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$-\frac{np}{(1-p)\ln(1-p)}=n\bar{x}$$

$q=\dfrac{1}{1-p}$ とおくと $p=1-1/q$ であり、また $q\geq 1$ である。

$$\frac{pq}{\ln q}=\bar{x}$$

$$\frac{q-1}{\ln q}=\bar{x}$$

$r=\ln q$ とおくと $r>0$ で $\dfrac{e^r-1}{r}=\bar{x}$

$\bar{x}>1$ である限りこの解は一意に存在する。

さて、W 関数で解くことを考えてみよう。$u=\dfrac{1}{\bar{x}}$ とおく。$-s=r+u$ とおけば $e^{-s-u}=-s\bar{x}$ なので $-ue^{-u}=se^s$

これの $s=-u$ でないほうの解を求めればいい。$-u>-1$ なので $s=W_{-1}(-ue^{-u})$ である。

具体例として、$\bar{x}=\dfrac{215}{168}$ であるときは、$s=-1.25601$ であり、$r=-s-u=0.47461$ で $q=e^r=1.60739$ なので $p=0.37788$ となる。

なお、$E(x)=\dfrac{-1}{\ln(1-p)}\dfrac{p}{1-p}$ だそうなので、n が十分大きい時 p の estimator は p の真の値に近づく。

https://dlmf.nist.gov/4.13 によれば、$\eta=\ln\dfrac{-1}{-ue^{-u}}=-\ln(ue^{-u})=u-\ln u$ とおくと $W_{-1}(-ue^{-u})\approx-\eta-\ln\eta-\dfrac{\ln\eta}{\eta}=-u+\ln u-\ln(u-\ln u)-\dfrac{\ln(u-\ln u)}{u-\ln u}$