対数分布

hsjoihs

1. $f(k) = \dfrac{-1}{\ln(1-p)}\dfrac{p^k}{k}$ で p の最尤推定

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^{x_i}}{x_i}$$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{-1}{\ln(1-p)} \right) + x_i \ln p - \ln x_i \right)$$

$$\frac{\partial \ln L(p)}{\partial p} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1-p)\ln(1-p)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{p}$$

これを 0 とおくと

$$-\frac{n}{(1-\hat{p})\ln(1-\hat{p})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\hat{p}}$$

$$-\frac{n\hat{p}}{(1-\hat{p})\ln(1-\hat{p})} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$-\frac{n\hat{p}}{(1-\hat{p})\ln(1-\hat{p})} = n\bar{x}$$

$q = \dfrac{1}{1-\hat{p}}$ とおくと $\hat{p} = 1 - 1/q$ であり、また $q \geq 1$ である。

$$\frac{pq}{\ln q} = \bar{x}$$

$$\frac{q-1}{\ln q} = \bar{x}$$

$r=\mathrm{ln}q$ とおくと $r>0$ で、$\dfrac{e^r-1}{r}=\bar{x}$。$\bar{x}>1$ である限りこの解は一意に存在する。

2. W 関数で解く

さて、W 関数で解くことを考えてみよう。$u=\dfrac{1}{\bar{x}}$ とおく。$-s=r+u$ とおけば $e^{-s-u}=-\bar{x}$ なので $-ue^{-u}=se^s$。これの $s=-u$ でないほうの解を求めればいい。$-u>-1$ なので $s=W_{-1}(-ue^{-u})$ である。具体例として、$\bar{x}=\dfrac{215}{168}$ であるときは、$s=-1.25601$ であり、$r=-s-u=0.47461$ で $q=e^r=1.60739$ なので $\hat{p}=0.37788$ となる。

ここまでの操作は結局、$-\dfrac{\hat{p}}{(1-\hat{p})\ln(1-\hat{p})}=\bar{x}$ を解いて、$\hat{p}$ を $\bar{x}$ の閉じた式で表す方法を求めるという操作である。後で使うのでまとめておくと、$\hat{p}=1-\exp\left(u+W_{-1}(-ue^{-u})\right)$, $u=\dfrac{1}{\bar{x}}$ である。ということで、$Q(u)=1-\exp\left(u+W_{-1}(-ue^{-u})\right)$ を定義すれば $\hat{p}=Q\left(\dfrac{1}{\bar{x}}\right)$ と書ける。

3. estimator の良さ

さて、実は $E(x)=\dfrac{-1}{\ln(1-p)}\dfrac{p}{1-p}$ である。つまりこれは $p=Q\left(\dfrac{1}{E(x)}\right)$ ということであり、ここから直ちに「n が十分大きい時 p の estimator $\hat{p}$ は p の真の値に近づく」ということが分かる。

$E(\hat{p})$ とか $Var(\hat{p})$ とか求めるのは無理そうで、普通に $\bar{x}$ を攻めればよさそうという話になる。

$E(\bar{x})=E(x)=\dfrac{-1}{\ln(1-p)}\dfrac{p}{1-p}$、$Var(\bar{x})=-np\dfrac{p+\ln(1-p)}{(1-p)^2\left(\ln(1-p)\right)^2}$ であるので、中心極限定理より、n が十分大きいときは

$$P\left(\bar{x}-\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\sqrt{Var(x)}}\leq E(x)\leq \bar{x}+\frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n}\sqrt{Var(x)}}\right)=1-\alpha$$

である。ここで $Var(x) = -p \dfrac{p + \ln(1 - p)}{(1 - p)^2\left(\ln(1 - p)\right)^2}$ の p を $\hat{p}$ で推定することを考えると、まずは $-\dfrac{\hat{p}}{(1 - \hat{p})\ln(1 - \hat{p})} = \bar{x}$ なので $-\bar{x}^2 + \dfrac{\bar{x}}{1 - \hat{p}}$ と書け、つまり $-\bar{x}^2 + \dfrac{\bar{x}}{\exp\left(u + W_{-1}(-ue^{-u})\right)}$