

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} \quad (0 < \lambda < 1)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}$$

$$(0 < \lambda < 1)$$

hsjoihs

1. 複素解析でチャチャッと答えを求める

「実軸の真上 → 無限の半径でグルッと周回 → 実軸の真下」というコースで積分。

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx + \int_{\infty}^0 \frac{x^{\lambda-1} e^{2\pi i(\lambda-1)}}{1+x} dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(-1, \frac{e^{(\lambda-1)\log z}}{1+z}\right)$$

$$(1 - e^{2\pi i(\lambda-1)}) \int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = 2\pi i \lim_{z \rightarrow -1} e^{(\lambda-1)\log z}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(\lambda-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(\lambda-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-(\lambda-1)\pi i} - e^{\pi i(\lambda-1)}} = \frac{2\pi i}{-e^{-\lambda\pi i} + e^{\pi i\lambda}} = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}$$

2. 分割する

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx &&= \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx + \int_1^0 \frac{u^{-\lambda+1}}{1+u^{-1}} (-u^{-2}) du \\ &= \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{u^{-\lambda-1}}{1+u^{-1}} du &&= \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{u^{-\lambda}}{u+1} du \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} \quad (0 < \lambda < 1)$$

ここで $F(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx$ とすると $\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = F(\lambda) + F(1-\lambda)$

3. $F(\lambda) = \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx$ について調べる

プロットしてみると $\lambda > 0$ で収束するっぽさがある。 $\frac{\pi}{\sin \pi \lambda}$ の特異点を二つに分離できているっぽさある。具体的に調べてみよう。

3.1. λ が整数のとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{x^{\lambda-1} + (-1)^\lambda}{1+x} dx - (-1)^\lambda \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \int_0^1 (x^{\lambda-2} - x^{\lambda-3} + \dots + (-1)^\lambda) dx - (-1)^\lambda \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left(\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda-2} + \dots + (-1)^\lambda \right) - (-1)^\lambda \ln 2 \\ &= (-1)^\lambda \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda-1} \right) - (-1)^\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= (-1)^\lambda \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - (-1)^\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= -(-1)^\lambda \sum_{k=\lambda}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= -(-1)^\lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+\lambda-1}}{l+\lambda} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+\lambda} \end{aligned}$$

3.2. λ が半整数のとき $\left(\lambda = n + \frac{1}{2} \right)$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} \quad (0 < \lambda < 1)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{u^{2n-1}}{1+u^2} 2u du = 2 \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2} du \\
&= 2 \left[\int_0^1 (u^{2n-2} - u^{2n-4} + \dots + (-1)^{n-1}) du + (-1)^n \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du \right] \\
&= 2 \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} - \dots (-1)^{n-1} \frac{1}{1} \right) + 2(-1)^n \frac{\pi}{4} \\
&= 2(-1)^{n-1} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \right) + 2(-1)^n \frac{\pi}{4} \\
&= 2(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + 2(-1)^n \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 2(-1)^n \sum_{k=n+1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \\
&= 2(-1)^n \sum_{l=0}^\infty \frac{(-1)^{l+n+1-1}}{2(l+n+1)-1} = \sum_{l=0}^\infty \frac{(-1)^l}{l+\lambda}
\end{aligned}$$

3.3. ということは

一般に $F(\lambda) = \sum_{l=0}^\infty \frac{(-1)^l}{l+\lambda}$ が成り立つのではなからうか。そんな気がする。ついでにこの形だと解析接続できそう。つよい。

冷静に考えてみたらかなり自然だった。端点以外では等比級数の和の公式が使えるので、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx &= \int_0^1 \sum_{l=0}^\infty (-x)^l x^{\lambda-1} dx \\
&= \int_0^1 \sum_{l=0}^\infty (-1)^l x^{l+\lambda-1} dx \\
&= \sum_{l=0}^\infty \int_0^1 (-1)^l x^{l+\lambda-1} dx \\
&= \sum_{l=0}^\infty \frac{(-1)^l}{l+\lambda}
\end{aligned}$$

が期待される。もちろん総和と積分の入れ替えに条件が必要だし、 λ が 0 以下だと $x = 0$ の端点が消えてくれないからこそこれは $F(\lambda)$ の一般化になるのだなあ。

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} \quad (0 < \lambda < 1)$$

3.4. デイガンマ関数

デイガンマ関数 $\psi(z) = \frac{d}{dz} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x)}$ は $\psi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln n - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{z+k} \right]$ と書けることが知られているらしいので

$$\begin{aligned} \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) - \psi(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln n - \frac{1}{z + \frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{z + \frac{1}{2} + k} \right] - \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\ln n - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{z+k} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\sum_{k=0}^n \frac{1}{z + \frac{1}{2} + k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{z+k} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=1, l \in 2\mathbb{Z}+1}^{2n+1} \frac{(-1)^l}{l} \frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \sum_{l=0, l \in 2\mathbb{Z}}^{2n} \frac{(-1)^l}{l} \frac{1}{z + \frac{1}{2}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{l=0}^{2n+1} \frac{(-1)^l}{l} \frac{1}{z + \frac{1}{2}} \right] = 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l+2z} = 2F(2z) \end{aligned}$$

つまり $F(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\psi\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) \right)$ であることが期待される。

$$\text{この期待の下だと } F(\lambda) + F(1-\lambda) = \frac{1}{2} \left(\psi\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \psi\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) \right)$$

ここで $\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \cot \pi z$ が知られているので

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} \quad (0 < \lambda < 1)$$

$$\begin{aligned}
F(\lambda) + F(1-\lambda) &= \frac{1}{2} \left(\psi\left(\frac{\lambda+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\lambda}{2}\right) - \psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \psi\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\pi \cot \frac{\pi(1-\lambda)}{2} - \psi\left(\frac{\lambda}{2}\right) + \psi\left(\frac{2-\lambda}{2}\right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi\lambda}{2}\right)} + \frac{\pi \cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos \frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{\pi \cos \frac{\pi\lambda}{2}}{\sin \frac{\pi\lambda}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \sin^2 \frac{\pi\lambda}{2}}{\sin \frac{\pi\lambda}{2} \cos \frac{\pi\lambda}{2}} + \frac{\pi \cos^2 \frac{\pi\lambda}{2}}{\cos \frac{\pi\lambda}{2} \sin \frac{\pi\lambda}{2}} \right) \\
&= \frac{\pi}{2 \sin \frac{\pi\lambda}{2} \cos \frac{\pi\lambda}{2}} = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}
\end{aligned}$$

なるほどなあ。