自由群 F_4 から F_2 への、とある準同型写像

hsjoihs

1. 問題

自由群 $F_4 : \langle A, B, C, D | \rangle$ と $F_2 : \langle \alpha, \beta | \rangle$ があり、準同型写像 $f : F_4 \to F_2$ が $f(A) = \alpha^3$, $f(B) = \beta\alpha^{-2}$, $f(C) = \alpha\beta$, $f(D) = \alpha^2\beta\alpha^{-1}$ によって定まるとき、

- $f(F_4)$ は F_2 の正規部分群
- $F_2 / f(F_4) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

であることを示せ。

2. 「$f(F_4)$ は F_2 の正規部分群である」の略解

示すべきことは、$\forall n \in f(F_4), \forall g \in F_2, gng^{-1} \in f(F_4)$ である。ところで、

$$
\begin{aligned}
\alpha f(A)\alpha^{-1} &= \alpha\alpha^3\alpha^{-1} &= \alpha^3 &= f(A) \\
\alpha f(B)\alpha^{-1} &= \alpha\beta\alpha^{-2}\alpha^{-1} &= \alpha\beta\left(\alpha^3\right)^{-1} &= f\left(CA^{-1}\right) \\
\alpha f(C)\alpha^{-1} &= \alpha\alpha\beta\alpha^{-1} &= \alpha^2\beta\alpha^{-1} &= f(D) \\
\alpha f(D)\alpha^{-1} &= \alpha\alpha^2\beta\alpha^{-1}\alpha^{-1} &= \alpha^3\beta\alpha^{-2} &= f(AB) \\
\beta f(A)\beta^{-1} &= \beta\alpha^3\beta^{-1} &= \beta\alpha^{-2}\alpha^3\left(\beta\alpha^{-2}\right)^{-1} &= f\left(BAB^{-1}\right) \\
\beta f(B)\beta^{-1} &= \beta\beta\alpha^{-2}\beta^{-1} &= \beta\alpha^{-2}\alpha^2\beta\alpha^{-1}\left(\alpha^3\right)^{-1}\left(\beta\alpha^{-2}\right)^{-1} &= f\left(BDA^{-1}B^{-1}\right) \\
\beta f(C)\beta^{-1} &= \beta\alpha\beta\beta^{-1} &= \beta\alpha^{-2}\alpha^3 &= f(BA) \\
\beta f(D)\beta^{-1} &= \beta\alpha^2\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} &= \beta\alpha^{-2}\alpha^3\alpha\beta\left(\alpha^3\right)^{-1}\left(\beta\alpha^{-2}\right)^{-1} &= f\left(BACA^{-1}B^{-1}\right) \\
\alpha^{-1} f(A)\alpha &= \alpha^{-1}\alpha^3\alpha &= \alpha^3 &= f(A) \\
\alpha^{-1} f(B)\alpha &= \alpha^{-1}\beta\alpha^{-2}\alpha &= \left(\alpha^3\right)^{-1}\alpha^2\beta\alpha^{-1} &= f\left(A^{-1}D\right) \\
\alpha^{-1} f(C)\alpha &= \alpha^{-1}\alpha\beta\alpha &= \beta\alpha^{-2}\alpha^3 &= f(BA) \\
\alpha^{-1} f(D)\alpha &= \alpha^{-1}\alpha^2\beta\alpha^{-1}\alpha &= \alpha\beta &= f(C) \\
\beta^{-1} f(A)\beta &= \beta^{-1}\alpha^3\beta &= (\alpha\beta)^{-1}\alpha^3\alpha\beta &= f\left(C^{-1}AC\right) \\
\beta^{-1} f(B)\beta &= \beta^{-1}\beta\alpha^{-2}\beta &= \left(\alpha^3\right)^{-1}\alpha\beta &= f\left(A^{-1}C\right) \\
\beta^{-1} f(C)\beta &= \beta^{-1}\alpha\beta\beta &= (\alpha\beta)^{-1}\alpha^2\beta\alpha^{-1}\alpha\beta &= f\left(C^{-1}DC\right) \\
\beta^{-1} f(D)\beta &= \beta^{-1}\alpha^2\beta\alpha^{-1}\beta &= (\alpha\beta)^{-1}\alpha^3\beta\alpha^{-2}\alpha\beta &= f\left(C^{-1}ABC\right)
\end{aligned}
$$

なので、F_2 の任意の要素が α・β・α^{-1}・β^{-1} の積で書ける以上、

$$\forall n \in f(F_4), \forall g \in F_2, gng^{-1} \in f(F_4)$$

は成り立つ。

3. 「$F_2/f(F_4) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$」の略解

まだ解いてない。