全角運動量演算子 L^2 with アインシュタインの記法

hsjoihs

1. 概要

全角運動量演算子 L^2 をシュッと表す with アインシュタインの記法。

2. 計算

$$L^2\psi = \frac{1}{2}g_{km}g_{ln}\left(X^k\frac{\hbar}{i}\partial^l - X^l\frac{\hbar}{i}\partial^k\right)\left(X^m\frac{\hbar}{i}\partial^n - X^n\frac{\hbar}{i}\partial^m\right)\psi$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2}g_{km}g_{ln}\left(X^k\partial^l X^m\partial^n\psi - X^k\partial^l X^n\partial^m\psi - X^l\partial^k X^m\partial^n\psi + X^l\partial^k X^n\partial^m\psi\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2}\left(g_{km}g_{lp}X^k\partial^l X^m\partial^p\psi - g_{kp}g_{ln}X^k\partial^l X^n\partial^p\psi - g_{km}g_{lp}X^l\partial^k X^m\partial^p\psi + g_{kp}g_{ln}X^l\partial^k X^n\partial^p\psi\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2}\left(g_{km}\delta^p_l\left(X^k\partial^l X^m - X^l\partial^k X^m\right) + \delta^p_k g_{ln}\left(X^l\partial^k X^n - X^k\partial^l X^n\right)\right)\nabla_p\psi$$

ここで

$$X^k\partial^l X^m f = X^k X^m\partial^l f + X^k g^{lm} f$$

なので

$$g_{km}\delta^p_l\left(X^k\partial^l X^m - X^l\partial^k X^m\right) + \delta^p_k g_{ln}\left(X^l\partial^k X^n - X^k\partial^l X^n\right)$$

$$= g_{km}\delta^p_l\left(X^k X^m\partial^l + X^k g^{lm} - X^l X^m\partial^k - X^l g^{km}\right) + \delta^p_k g_{ln}\left(X^l X^n\partial^k + X^l g^{kn} - X^k X^n\partial^l - X^k g^{ln}\right)$$

$$= g_{km}\delta^p_l X^k X^m \partial^l + g_{km}\delta^p_l X^k g^{lm} - g_{km}\delta^p_l X^l X^m \partial^k - g_{km}\delta^p_l X^l g^{km}$$

$$+ \delta^p_k g_{ln} X^l X^n \partial^k + \delta^p_k g_{ln} X^l g^{kn} - \delta^p_k g_{ln} X^k X^n \partial^l - \delta^p_k g_{ln} X^k g^{ln}$$

$$= g_{km}\delta^p_q X^k X^m \partial^q + X^p - g_{qm}\delta^p_l X^l X^m \partial^q - 3X^p + \delta^p_q g_{ln} X^l X^n \partial^q + X^p - \delta^p_k g_{qn} X^k X^n \partial^q - 3X^p$$

$$= \Big(g_{km}\delta^p_q X^k X^m - g_{qm}\delta^p_l X^l X^m + \delta^p_q g_{ln} X^l X^n - \delta^p_k g_{qn} X^k X^n\Big)\partial^q - 4X^p$$

であり

$$L^2\psi = -\frac{\hbar^2}{2}\Big(\Big(g_{km}\delta^p_q X^k X^m - g_{qm}\delta^p_l X^l X^m + \delta^p_q g_{ln} X^l X^n - \delta^p_k g_{qn} X^k X^n\Big)\partial^q - 4X^p\Big)\nabla_p\psi$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2}\Big(\delta^p_q\Big(g_{km} X^k X^m + g_{ln} X^l X^n\Big) - g_{qm}\delta^p_l X^l X^m - \delta^p_k g_{qn} X^k X^n\Big)\nabla^q\nabla_p\psi + 2\hbar^2 X^p\nabla_p\psi$$

$$= -\hbar^2\Big(\delta^p_q\Big(g_{km} X^k X^m\Big) - \delta^p_k\Big(g_{qm} X^k X^m\Big)\Big)\nabla^q\nabla_p\psi + 2\hbar^2 X^p\nabla_p\psi$$

$$= -\hbar^2\Big(\delta^p_q\Big(g_{km} X^k X^m\Big) - \delta^p_k\Big(g_{qm} X^k X^m\Big)\Big)\nabla^q\nabla_p\psi + 2\hbar^2 X^p\nabla_p\psi$$

$$= -\hbar^2\Big(g_{km} X^k X^m\Big)\nabla^2\psi + \hbar^2\big(X^p X^m\big)\nabla_m\nabla_p\psi + 2\hbar^2 X^p\nabla_p\psi$$

したがって

$$L^2\psi = -\hbar^2\,|\,\vec{x}\,|^2\,\nabla^2\psi + \hbar^2\vec{x}\cdot\Big((\vec{x}\cdot\nabla)\nabla\psi\Big) + 2\hbar^2\vec{x}\cdot\nabla\psi$$