AI Math. 1-2. 선형대수의 기본 요소

Dr. Minsu Cho
School of Information Convergence
mcho@kw.ac.kr

목차

스칼라 : 정의

- 스칼라(scalar)
  - 크기(magnitude)만으로 나타낼 수 있는 물리량
    - 길이, 넓이, 질량, 온도
    - $s \in \mathbb{R}$ (lower case)

나이	성별	직업	취미
10	0	3	2
20	1	2	1
14	1	3	3
32	0	1	4
56	0	5	2

스칼라

스칼라 : 정의

- 스칼라(scalar)
  - 변수에 스칼라 정의(수식)

$$x = 3$$

$$x = 2$$

  - 기하학적 정의

스칼라 : 기본 연산

- 스칼라의 덧셈

$$x = 2; y = 3$$

$$z = x + y = 2 + 3 = 5$$

- 스칼라의 뺄셈

$$x = 4; y = 1$$

$$z = x - y = 4 - 1 = 3$$

- 스칼라의 곱셈

$$x = 5; y = 3$$

$$z = x \times y = 5 \times 3 = 15$$

- 스칼라의 나눗셈

$$x = 5; y = 2$$

$$z = x \div y = 5 \div 2 = 2.5$$

벡터 : 정의

- 벡터(vector)
  - 스칼라의 집합이며, 행렬(matrix)를 구성하는 기본 단위 ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$)

- 모든 n차원 벡터 전체의 집합을 $n-$공간 (n차원 공간) $\mathbb{R}^n$으로 나타낸다. 즉

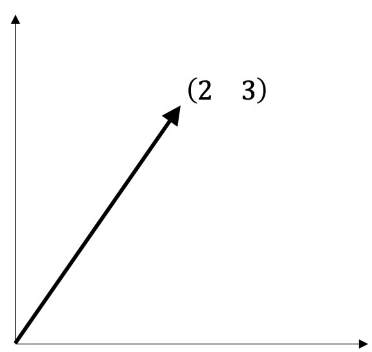
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

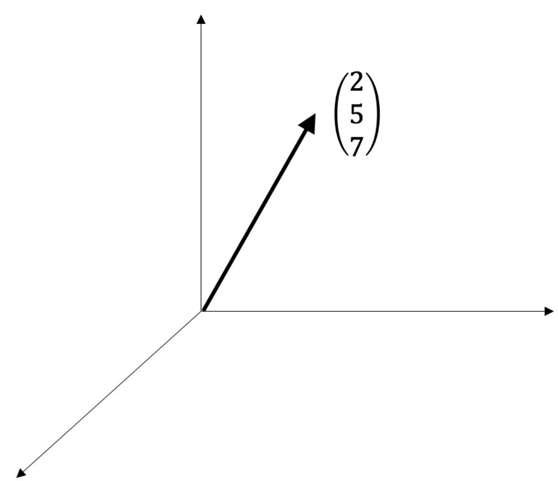
벡터 : 정의

- 벡터(vector)
  - 스칼라의 집합이며, 행렬(matrix)를 구성하는 기본 단위 ($\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$)
  - 크기(magnitude)와 방향(direction)을 모두 나타내는 개념

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

  - 기하학적 의미





벡터 : 정의

- 벡터(vector)
  - 열 벡터(column vector) : 열 방향으로 나열한 벡터(기본값)
  - 행 벡터(row vector) : 행 방향으로 나열한 벡터

나이	성별	직업	취미
10	0	3	2
20	1	2	1
14	1	3	3
32	0	1	4
56	0	5	2

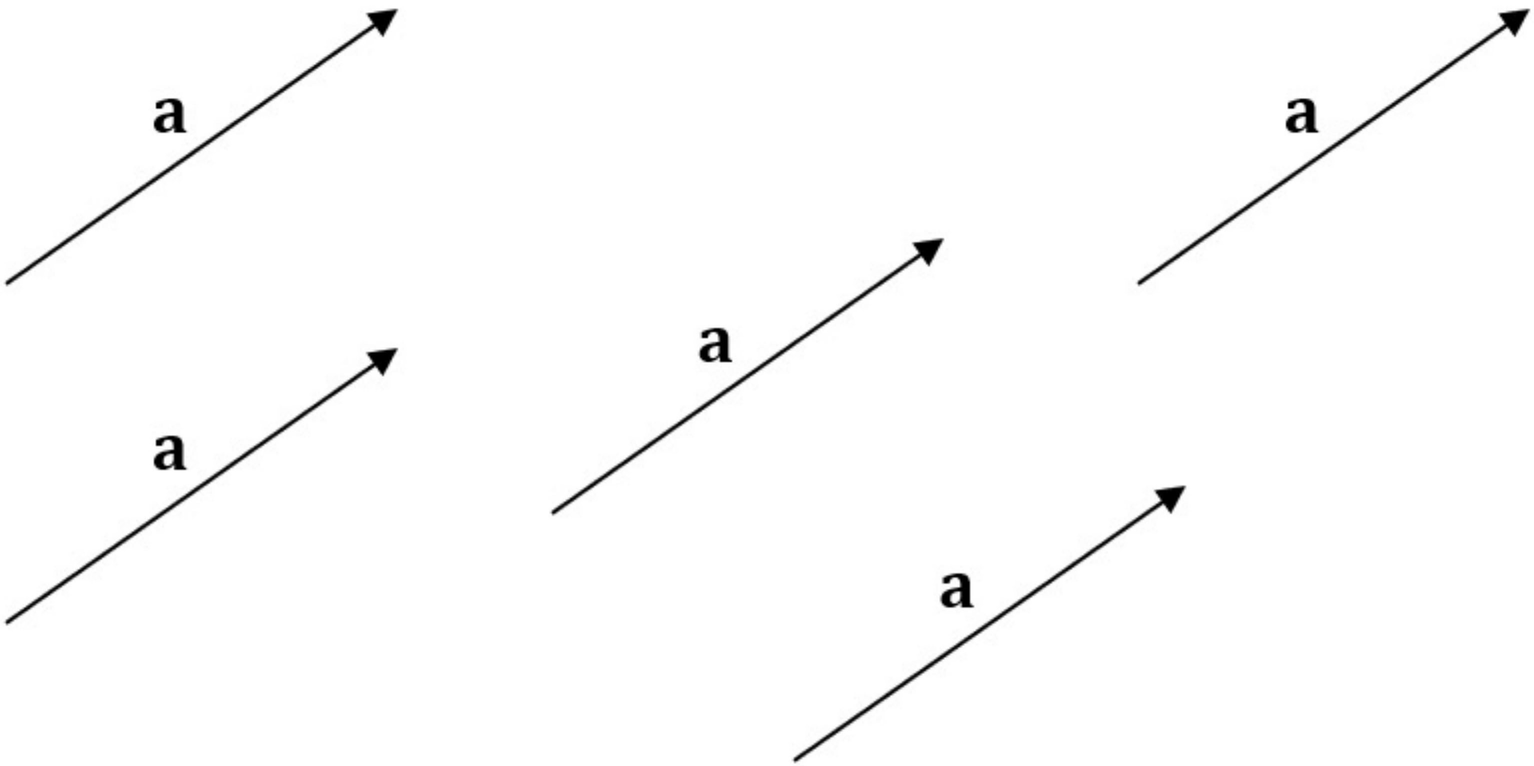
행 벡터

나이	성별	직업	취미
10	0	3	2
20	1	2	1
14	1	3	3
32	0	1	4
56	0	5	2

열 벡터

벡터 : 정의

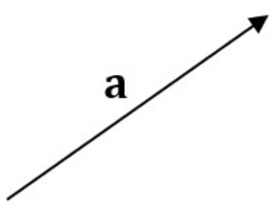
- 모두 동일한 벡터인가?



벡터 : 정의

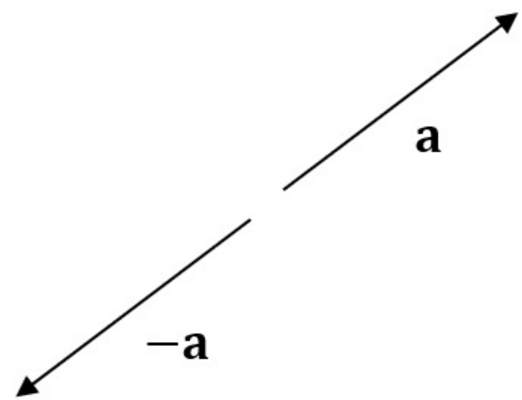
- 영 벡터(zero vector)
  - 크기가 0인 벡터
  - 벡터의 시작 지점과 종료 지점이 동일

- 마이너스 부호가 붙은 벡터
  - 방향이 정반대인 벡터



벡터(vector)

영 벡터(zero vector)

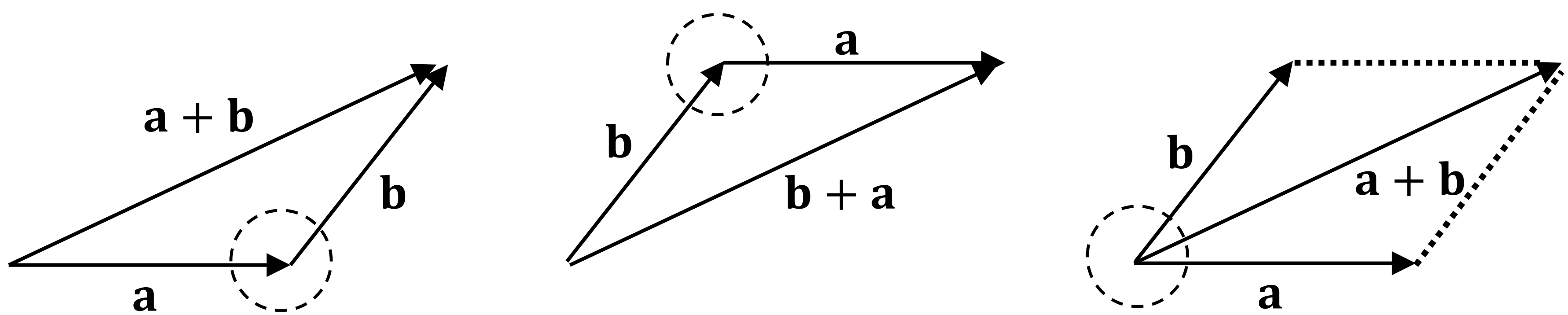


벡터 : 기본 연산

- 벡터의 덧셈과 뺄셈
  - 덧셈 : 두 벡터의 크기가 동일할 때만 연산
    - 수식을 통한 이해

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+4\\2+5\\3+6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\7\\9\end{bmatrix}$$

    - 기하학적 이해

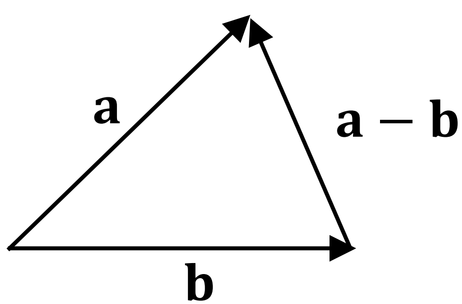


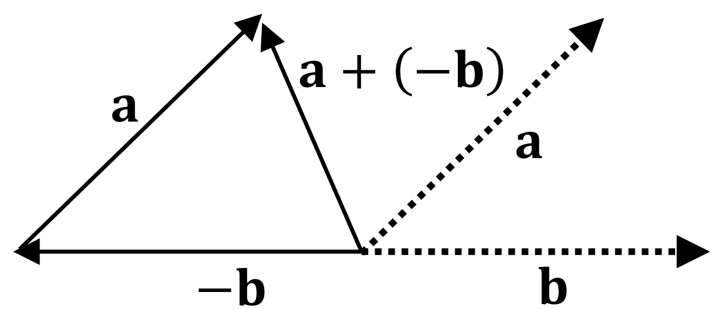
벡터 : 기본 연산

- 벡터의 덧셈과 뺄셈
  - 뺄셈 : 두 벡터의 크기가 동일할 때만 연산
    - 수식을 통한 이해

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-2 \\ 3-5 \\ 9-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

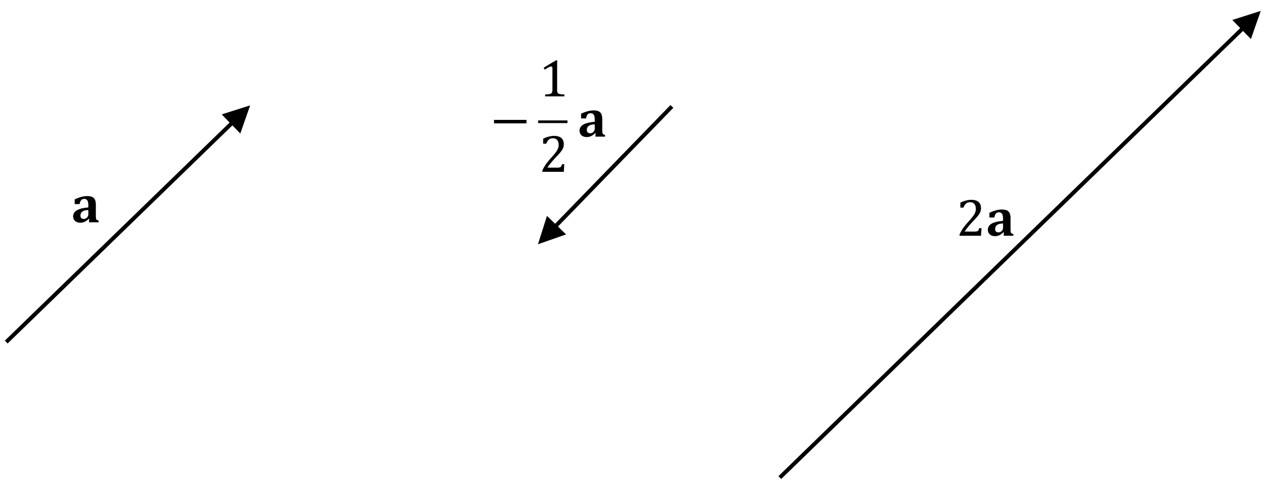
    - 기하학적 이해





벡터 : 기본 연산

- 벡터의 스칼라 곱
  - 벡터의 길이와 방향을 바꿀 수 있는 방법
    - 스칼라 부호 : 방향
    - 1보다 작은 양수 : 크기 감소
    - 1보다 큰 양수 : 크기 확대



벡터 : 기본 연산

- 벡터 기본 연산의 성질

1) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

2) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

3) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

4) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

5) $\mathrm{a}(\mathrm{b}\mathbf{u}) = (\mathrm{ab})\mathbf{u}$

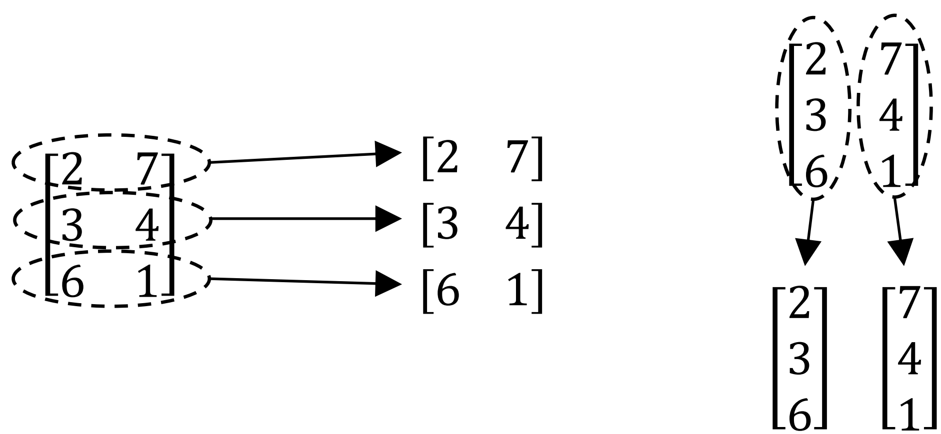
6) $\mathrm{a}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathrm{a}\mathbf{u} + \mathrm{a}\mathbf{v}$

7) $(\mathrm{a} + \mathrm{b})\mathbf{u} = \mathrm{a}\mathbf{u} + \mathrm{b}\mathbf{u}$

행렬 : 정의

- 행렬(matrix)
  - 사각형 형태로 숫자를 나열 ($\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$)
  - 행(row), 열(column)로 구성
    - 행 : 가로 방향; 열 : 세로 방향
  - 행렬 : 행 벡터의 집합; 열 벡터의 집합

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2}$$



행렬 : 정의

- 행렬(matrix)
  - 행렬을 구성하는 스칼라 값 : 원소(element)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

열(column)

행(row)

$$a_{ij}$$

i: 행 번호

j: 열 번호

  - 데이터 분석 시 데이터 셋을 구성하는 숫자의 집합

나이	성별	직업	취미
10	0	3	2
20	1	2	1
14	1	3	3
32	0	1	4
56	0	5	2

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 10 & 0 & 3 & 2 \\ 20 & 1 & 2 & 1 \\ 14 & 1 & 3 & 3 \\ 32 & 0 & 1 & 4 \\ 56 & 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

행렬 : 정의

- 행렬(matrix) : $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
  - 열 벡터

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} = \mathbb{R}^{\boldsymbol{n \times 1}}$$

  - 행 벡터 : 열 벡터의 Transpose

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{1 \times n}}$$

행렬 : 기본 연산

- 행렬의 덧셈과 뺄셈
  - 행렬의 크기가 동일한 경우 연산이 가능

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} \ (c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij})$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2+1 & 7+4 \\ 3+4 & 4-1 \\ 6+2 & 1+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 7 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

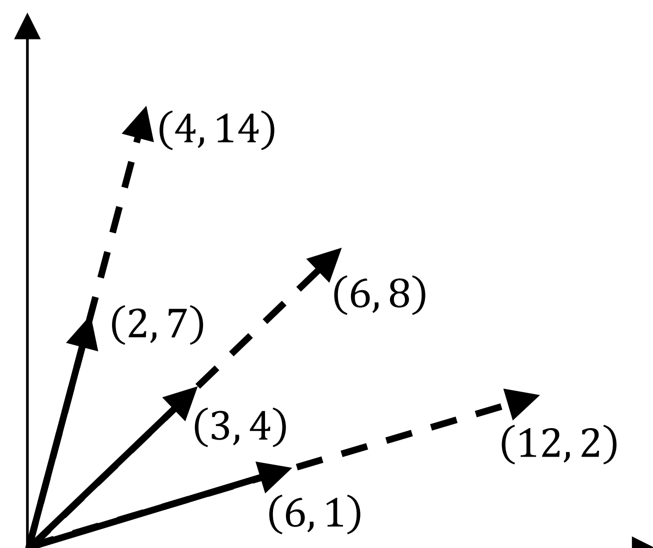
$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2-1 & 7-4 \\ 3-4 & 4-(-1) \\ 6-2 & 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

행렬 : 기본 연산

- 행렬의 스칼라 곱
  - 스칼라와 행렬의 곱

$$\boldsymbol{D} = a \cdot \boldsymbol{B} + c \ (d_{ij} = a \cdot b_{ij} + c)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, 2\boldsymbol{A} = 2\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 14 \\ 6 & 8 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}$$



행렬 : 기본 연산

- 행렬의 원소 곱 (matrix element multiplication)
  - 크기가 동일한 두 행렬에서 동일한 위치의 원소 곱

$$(\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B})_{ij} = a_{ij} b_{ij}$$

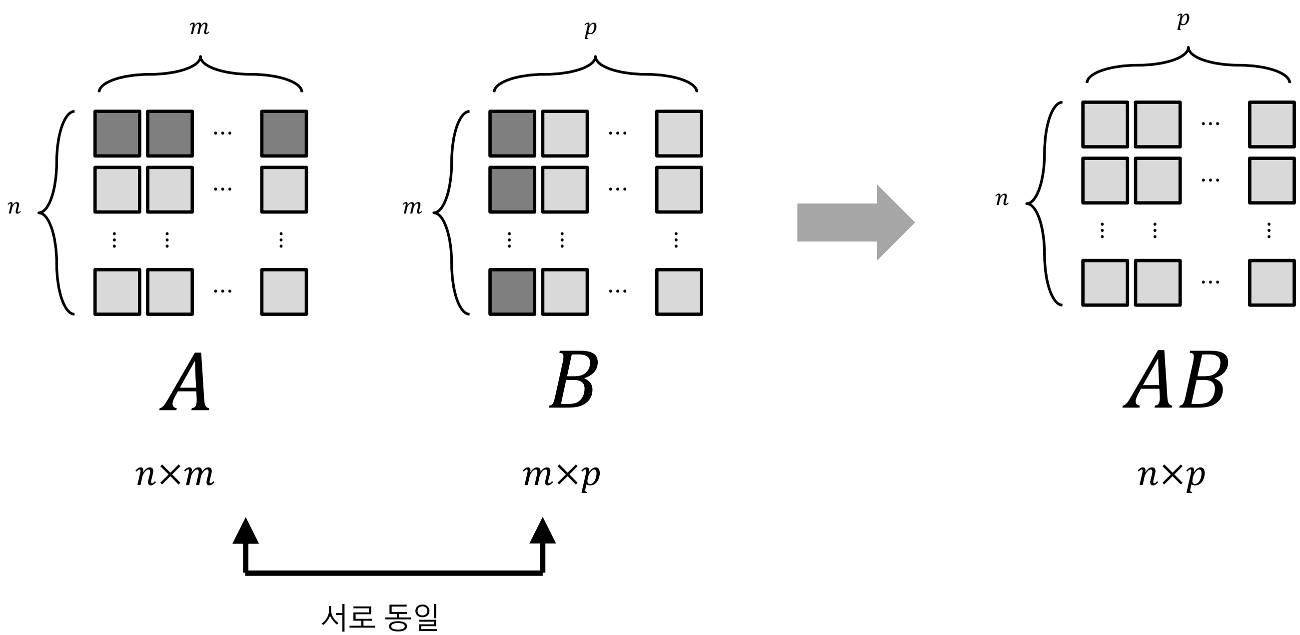
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \odot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 28 \\ 12 & -4 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$$

행렬 : 기본 연산

- 행렬의 곱 (matrix multiplication)
  - 곱하는 행렬의 열 크기와 곱해지는 행렬의 행 크기가 일치하여야 함

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \ (C_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj})$$



행렬 : 기본 연산

- 행렬의 곱 (matrix multiplication)

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \ (C_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj})$$

$$(2\times3) + (7\times-1) = -1$$

$$\boldsymbol{AB} = \underset{3\times2}{\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}} \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{3\times3}{\begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 5 & -1 & 11 \\ 13 & -11 & 23 \end{bmatrix}}$$

행렬 : 기본 연산

- 행렬의 곱 (matrix multiplication)

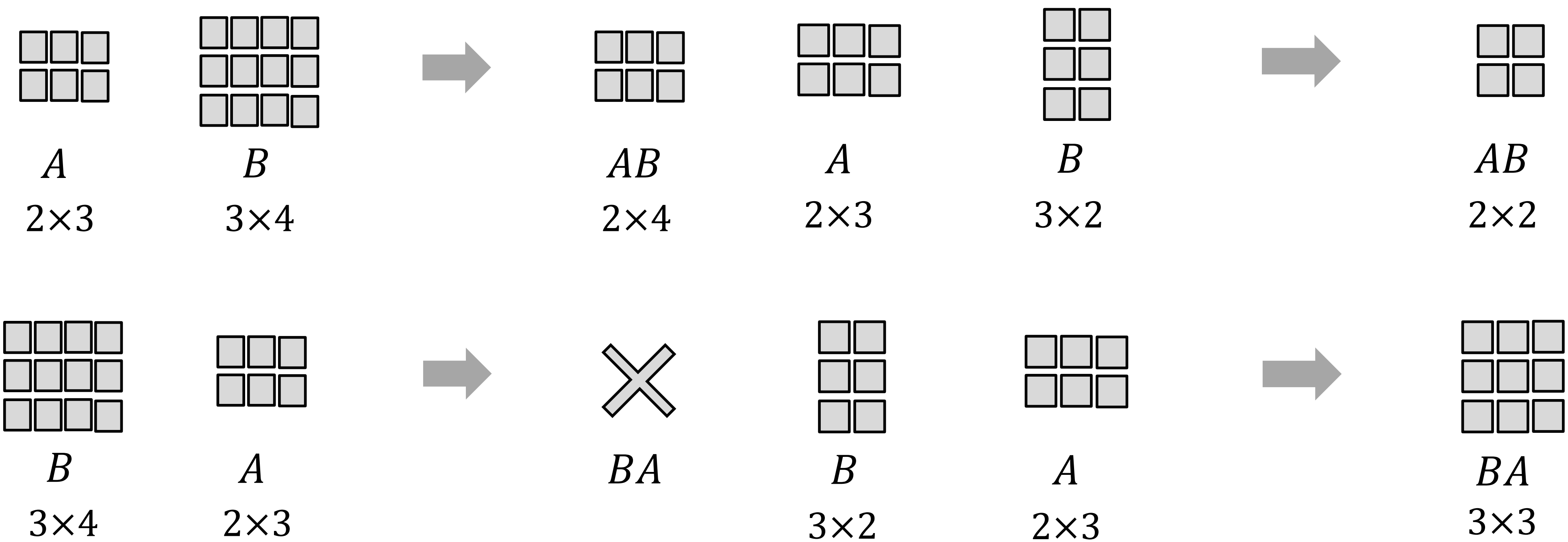
$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times3 + 7\times(-1) & 2\times(-3) + 7\times2 & 2\times5 + 7\times(-1) \\ 3\times3 + 4\times(-1) & 3\times(-3) + 4\times2 & 3\times5 + 4\times(-1) \\ 5\times3 + 2\times(-1) & 5\times(-3) + 2\times2 & 5\times5 + 2\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 5 & -1 & 11 \\ 13 & -11 & 23 \end{bmatrix}$$

행렬 : 기본 연산

- 행렬의 곱 (matrix multiplication)
  - 행렬 곱의 교환법칙은 성립하지 않음 ($\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$)



행렬 : 기본 연산

- 행렬의 곱 (matrix multiplication)
  - 행렬 곱의 교환법칙은 성립하지 않음 ($\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$$

행렬 : 기본 연산

- 행렬의 대각합(trace)
  - 행렬 $\boldsymbol{A}$가 정사각행렬일 때, 주대각원소를 모두 더한 값

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$tr(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad tr(\boldsymbol{A}) = 1 + 5 + 9 = 15$$

행렬 : 기본 연산

- 행렬 연산의 성질

1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

2) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$

3) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$

4) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

5) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$

6) $\mathbf{A}(\mathbf{B}-\mathbf{C})=\mathbf{AB}-\mathbf{AC}$

7) $(\mathbf{B}-\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}-\mathbf{CA}$

행렬 : 기본 연산

- 행렬 연산의 성질

8) $a(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = a\mathbf{B} + a\mathbf{C}$

9) $a(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = a\mathbf{B} - a\mathbf{C}$

10) $(a+b)\mathbf{C} = a\mathbf{C} + b\mathbf{C}$

11) $(a-b)\mathbf{C} = a\mathbf{C} - b\mathbf{C}$

12) $a(b\mathbf{C}) = ab\mathbf{C}$

13) $a(\mathbf{BC}) = (a\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{B}(a\mathbf{C})$

Python Implementation

```
# 스칼라 정의
x = 4
y = 2

# 스칼라 연산
add_xy = x + y
subt_xy = x - y
mul_xy = x * y
div_xy = x / y

print(add_xy)
print(subt_xy)
print(mul_xy)
print(int(div_xy))
```

Python Implementation

```
# 벡터 정의
u = np.array([1,2,4])
v = np.array([7,3,2])
k = 3

print(u, v)
```

```
# 벡터 연산
add_uv = u + v
subt_uv = u - v
mul_ku = k * u
mul_uv = u * v
div_uv = u / v

print(add_uv)
print(subt_uv)
print(mul_ku)
print(mul_uv)
print(div_uv)
```

Python Implementation

```python
# 행렬 정의
A = np.array([[2,7], [3,4], [6,1]])
B = np.array([[1,4], [4,-1],
[2,5]])
C = np.array([[3,-3,5], [-1,2,-1]])
k = 3

print(A)
print(B)
print(C)
```

```python
# 행렬 연산
add_AB = A + B
subt_AB = A - B
mul_kA = k * A
mul_AB = np.multiply(A, B)
matmul_AC = np.matmul(A, C)

print(add_AB)
print(subt_AB)
print(mul_kA)
print(mul_AB)
print(matmul_AC)
```

Next Session

- 선형대수학(2) 선형연립방정식

Any questions?