Diskrete Mathematik

Patrick Bucher

25. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Logik und Beweise

Proposition: eine Aussage oder ein Satz ist:

- wahr (w: wahr, t: true, 1)
- falsch (f: falsch/false, 0)

Fragen und Gleichungen mit einer Unbekannten sind keine Aussagen. Aussagen werden meist mit p, q, r, s bezeichnet. Beispiele für Propositionen

- p = „Es regnet draussen.“
- q = „Der Platz draussen ist nass.“

1.1 Logische Operationen

1.1.1 Negation

$\neg p$: „Es ist nicht der Fall, dass p gilt.“ Wahrheitstabelle:

p	$\neg p$
w	f
f	w

1.1.2 Konjunktion

$p \wedge q$: „Es gelten p und q.“ Wahrheitstabelle:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

1.1.3 Disjunktion

$p \vee q$: „Es gilt p oder q oder es gelten beide.“ Wahrheitstabelle:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

1.1.4 Exklusives Oder (EXOR)

$p \oplus q$: „Es gilt p oder q aber nicht p und q.“ Wahrheitstabelle:

p	q	$p \oplus q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

1.1.5 Implikation

$p \rightarrow q$: „Wenn p gilt, dann gilt q.“ Wahrheitstabelle:

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Aus einem Falschen kann etwas Beliebiges gefolgert werden! Beispiel: Ein Politiker sagt: „Wenn ich gewählt werde, senke ich die Steuern.“

- p: Politiker wird gewählt
- q: Politiker senkt die Steuern.

$p \rightarrow q$

1. Der Politiker wird gewählt und senkt die Steuern: die Aussage trifft zu.
2. Der Politiker wird gewählt, senkt aber die Steuern nicht: die Aussage trifft nicht zu.
3. Der Politiker wird nicht gewählt; es ist egal, was er in diesem Fall tun will: die Aussage trifft zu.

1.1.6 Bikonditional

$p \leftrightarrow q$: „Es gilt p genau dann, wann q gilt.“ Wahrheitstabelle:

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Eine bikonditionale Präposition ist dann wahr, wenn p und q den gleichen Wahrheitswert haben, also das Gegenteil von EXOR:
$p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q)$

1.2 Priorität logischer Operationen

1. $\neg$ (Negation)
2. $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion)
3. $\rightarrow$ (Implikation), $\leftrightarrow$ (Bikonditional)

1.3 Präpositionale Äquivalenzen

1.3.1 Tautologie

Die Aussage ist immer wahr. Beispiel: $p \vee \neg q$

1.3.2 Kontradiktion (Widerspruch)

Die Aussage ist immer falsch. Beispiel: $p \wedge \neg q$

1.4 Logische Äquivalenz

Zwei Aussagen (p und q) sind logisch äquivalent, wenn $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist. Schreibweisen: $p \equiv q, p \sim q, p \Leftrightarrow q$

1.5 Logische Äquivalenzgesetze

T: True (wahr), F: False (falsch)

1.5.1 Identität

$p \land T \equiv p$
$p \lor F \equiv p$

1.5.2 Dominanz

$p \lor T \equiv T$
$p \land F \equiv F$

1.5.3 Idempotenz

$p \lor p \equiv p$
$p \land p \equiv p$

1.5.4 Doppelnegation

$\neg(\neg p) \equiv p$

1.5.5 Negation

$p \lor \neg p \equiv T$
$p \land \neg p \equiv F$

1.5.6 Kommutativität

$p \lor q \equiv q \lor p$
$p \land q \equiv q \land p$

1.5.7 Absorption

$p \lor (p \land q) \equiv p$
$p \land (p \lor q) \equiv p$

1.5.8 Assoziativ 1 und 2

$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$

1.5.9 Distributiv 1 und 2

$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

1.5.10 De Morgan 1 und 2

$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$

1.5.11 Weitere Equivalenzgesetze

$p \to q \equiv \neg p \lor q$
$p \to q \equiv \neg q \neg p$
$p \lor q \equiv \neg p \to q$
$p \land q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$
$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \lor q) \to r$
$(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$
$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (p \land q) \to r$

$p \oplus q \equiv (p \lor q) \land (\neg p \lor \neg q)$
$\neg(p \oplus q) \equiv (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$
$\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$

1.6 Prädikate und Quantoren

Prädikat: eine Folge von Wörtern, die Variablen enthalten, und für jede (erlaubte) Belegung dieser Variablen zu einer Aussage werden. Die Aussage hat nur dann einen eindeutigen Wahrheitswert, wenn für die Variable ein eindeutiger Wahrheitswert eingesetzt wird.

Beispiel:

$P(x) =$ „$x > 3$“
$P(4) =$ „$4 > 3$“ (wahr)
$P(2) =$ „$2 > 3$“ (falsch)

Aussage $P(x)$: Wert der propositionalen Funktion P für x.

1.6.1 Der Allquantor

Ist $P(x)$ wahr für *alle* x aus einer bestimmten Universalmenge, schreibt man:

$\forall x P(x)$

„Für alle x aus der Universalmenge gilt $P(x)$.“

1.7 Der Existenzquantor

Ist $(P(x)$ wahr für *mindestens ein* x aus einer bestimmten Universalmenge, schreibt man:

$\exists x P(x)$

„Es existiert ein x in der Universalmenge, für das $P(x)$ gilt.“

1.8 Freie und gebundene Variablen

Wird ein Quantor auf eine Variable angewandt, so ist diese Variable *gebunden*. Wird ein Quantor nicht auf eine Variable angewendt, so ist diese Variable *frei*. Beispiel:

Bei $\forall x Q(x, y)$ ist die Variable x gebunden, die Variable y frei.

1.9 Negation

Für die Negierung der Quantoren gelten folgende Regeln:

- $\neg\forall P(x)$ bedeutet: $P(x)$ gilt nicht für alle x.
  - Das Äquivalent $\exists x \neg P(x)$ bedeutet: Es existiert mindestens ein x, für das $P(x)$ nicht gilt.
- $\neg\exists P(x)$ bedeutet: Es gibt kein x, für das $P(x)$ gilt.
  - Das Äquivalent $\forall x \neg P(x)$ bedeutet: Für alle x gilt $P(x)$ nicht.

1.10 Verschachtelte Quantoren

TODO: p. 41, 42