

Counting - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 5

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungsweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durchschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontrolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage, kurz: KR*

Grundlagen des Zählens

1. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 7:** Wieviele Monogramme (oder Benutzernamen) mit 3 Buchstaben gibt es?
1. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 15:** Wieviele Worte mit höchstens 4 Buchstaben gibt es?
2. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 21a-d:** Wieviele ganze Zahlen zwischen 100 und 999 (beide Zahlen inklusive) gibt es,
 - a) die durch 7 teilbar sind?
 - b) die ungerade sind?
 - c) deren drei Dezimalstellen gleich sind?
 - d) die nicht durch 4 teilbar sind?
3. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 23a:** Wieviele Zahlen mit 3 Dezimalstellen gibt es, die keine Ziffer dreimal enthalten?
4. **KR, Abschnitt 5.1, Aufgabe 3:** Eine Multiple-Choice Prüfung enthält 10 Fragen und jeweils 4 mögliche Antworten.
 - a) Wieviele Möglichkeiten hat ein Student, diese Prüfung zu „lösen“, wenn er jede Frage beantwortet?
 - b) Wieviele Möglichkeiten hat ein Student, diese Prüfung zu „lösen“, wenn er auch Antworten auslassen kann?

Schubfachprinzip

- II. **KR, Abschnitt 5.2, Aufgabe 5:** Zeigen Sie, dass sich in jeder Menge von 5 ganzen Zahlen (mindestens) zwei befinden, die bei Division durch 4 gleichen Rest haben.
5. **KR, Abschnitt 5.2, Aufgabe 13a:** Beweisen Sie: Wählt man 5 natürliche Zahlen aus den ersten 8 natürlichen Zahlen aus, so gibt es ein Paar (von diesen Zahlen) mit der Summe 9.

Permutationen und Kombinationen

6. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 1:** Listen Sie alle Permutationen von $\{a, b, c\}$ auf.
7. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 3:** Wieviele Permutationen von $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ enden auf a ?
8. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgaben 5a-c und 6a-c:** Berechnen Sie: $P(6, 3)$, $P(6, 5)$ und $P(8, 1)$ sowie $C(5, 1)$, $C(5, 3)$ und $C(8, 4)$.
9. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 11a+b:** Wieviele binäre Strings der Länge 10 enthalten
- a) genau viermal die 1?
 - b) höchstens viermal die 1?
10. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 17:** Wieviele Teilmengen mit mehr als 2 Elementen hat eine Menge mit 100 Elementen?
11. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 19a+b:** Eine Münze wird zehnmal geworfen.
- a) Wieviele mögliche Ausgänge hat dieses Experiment?
 - b) Wieviele mögliche Ausgänge, die genau dreimal Kopf enthalten, hat dieses Experiment?
12. **KR, Abschnitt 5.3, Aufgabe 25a-d:** Einhundert Lose, durchnummeriert von 1 bis 100, werden an 100 verschiedene Leute verkauft. Es sollen vier verschiedene Preise verlost werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Preise zu verteilen,
- a) falls man keine Einschränkung macht?
 - b) falls die Person mit Los 47 den Hauptpreis gewinnen soll?
 - c) falls die Person mit Los 47 einen der Preise gewinnen soll?
 - d) falls die Person mit Los 47 keinen Preis gewinnen soll?
13. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 3:** Berechnen Sie $(x + y)^6$.
14. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 9:** Bestimmen Sie den Koeffizienten von $x^{101}y^{99}$ in $(2x - 3y)^{200}$.
- III. **KR, Abschnitt 5.4, Aufgabe 23:** Zeigen Sie, dass für alle positiven ganzen Zahlen n und k die folgende Relation gilt:

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Nutzen Sie diese Identität, um eine rekursive Definition der Binomialkoeffizienten zu konstruieren.

15. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 1:** Auf wieviele Arten können 5 Elemente aus einer Menge von 3 Elementen ausgewählt werden, wenn die Reihenfolge berücksichtigt wird und Wiederholungen erlaubt sind?

16. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 7:** Auf wieviele Arten können 3 Elemente aus einer Menge von 5 Elementen ausgewählt werden, wenn die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird und Wiederholungen erlaubt sind?
17. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 13:** Ein Buchhändler hat 3000 Kopien eines Buches. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Bücher in seinen drei Filialen zu lagern, wenn die einzelnen Bücher nicht unterscheidbar sind?
18. **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 15a-c:** Wieviele Lösungen hat die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

wobei x_i für $i = 1, 2, 3, 4, 5$ eine nichtnegative ganze Zahl ist, mit

- a) $x_1 \geq 1$?
 - b) $x_i \geq 2$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
 - c) $0 \leq x_1 \leq 10$?
- IV. KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 29:** Wieviele verschiedene binäre Strings können gebildet werden, wenn ein String stets mit einer 1 beginnen muss, ausserdem stets genau drei weitere 1 Bits enthalten muss, stets genau zwölf 0 Bits enthalten muss **und** jedem 1 Bit mindestens zwei 0 Bits folgen müssen?
- 19 **KR, Abschnitt 5.5, Aufgabe 51:** Wieviele Möglichkeiten gibt es, 6 unterscheidbare Objekte in 4 ununterscheidbare Fächer zu verteilen, so dass jedes der Fächer mindestens ein Objekt enthält?

Lösungen

1. 26^3

I. 475'255 (leeren String nicht vergessen)

2. a) 128, b) 450, c) 9, d) 675

3. 990

4. a) 4^{10} und b) 5^{10}

II. Geben Sie eine „hieb- und stichfeste“ Begründung!

5. Bilden Sie 2-elementige Teilmengen der ersten 8 natürlichen Zahlen, so dass die Summe der Elemente jeweils 9 ist. Wieviele gibt es davon? Nutzen Sie das Schubfachprinzip.

6. $abc, acb, bac, bca, cab, cba$

7. 720

8. 120, 720, 8, 5, 10, 70

9. a) 210, b) 386

10. $2^{100} - 5051$

11. a) 1024, b) 120

12. a) 94'109'400, b) 941'094, c) 3'764'376, d) 90'345'024

13. $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

14. $-2^{101}3^{99}\binom{200}{99}$

III. Führen Sie die fehlenden Rechenschritte aus! Nutzen Sie die Definition der Fakultät (und deren Rekursion).

$$\binom{n+1}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \dots\dots\dots = \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1}$$

15. 243

16. 35

17. 4'504'501

18. a) 10'626, b) 1'365, c) 11'649

IV. 35

19. $20 + 45 = 65$