Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Basic Structures - Übung 1

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 2

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* **kurz: KR**

Mengen

1. **KR, Abschnitt 2.1, Aufgabe 19b:** Wie lautet die Potenzmenge von $\{a, b\}$?
2. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 3:** Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{0, 3, 6\}$. Bestimmen sie dann (a) $A \cup B$, (b) $A \cap B$, (c) $A \setminus B$ und (d) $B \setminus A$.
3. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 15:** Zeigen sie, dass für zwei Mengen A und B gilt: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 50:** Die Universalmenge sei $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Drücken sie jede der folgenden Mengen mit einem Bitstring der Länge 10 (denn U hat genau 10 Elemente) aus, wobei das i-te Bit 1 ist, falls das i in der Menge ist (und Null sonst): (a) $\{3, 4, 5\}$, (b) $\{1, 3, 6, 10\}$ und (c) $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$.
5. **KR, Abschnitt 2.2, Aufgabe 51:** Welche Mengen stellen die folgenden Bitstrings dar, wenn man die Universalmenge aus der letzten Aufgabe verwendet: (a) 11 1100 1111, (b) 01 0111 1000 und (c) 10 0000 0001.

Funktionen

I. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgabe 5b:** Gesucht ist der Definitions- und Wertebereich der Funktion f, die jedem Bitstring das doppelte der Anzahl Nullen im Bitstring zuordnet (z.B. gilt $f(101000) = 2 \cdot 4 = 8$, $f(111) = 2 \cdot 0 = 0$ und $f(00) = 2 \cdot 2 = 4$).

6. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 8a bis 9c:** Gesucht sind die folgenden Werte: (a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil$, (b) $\lceil 1.1 \rceil$ und (c) $\lfloor -0.1 \rfloor$. Hier haben wir die *ceiling*- und *floor*-Funktionen verwendet:

$$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | x \leq n\}$$
$$\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, x \mapsto \lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

Zeichnen Sie die Graphen der beiden Funktionen auf: Sie werden sehen, dass es sich um äusserst nützliche Funktionen handelt! Man sieht sofort, dass gilt:

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1.$$

7. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgabe 11:** Welche Funktionen von $\{a, b, c, d\}$ auf sich selbst sind bijektiv: (a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$, (b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$, und (c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$?

8. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 19a, 19b:** Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ bijektiv sind: (a) $f(x) = 2x + 1$ und (b) $f(x) = x^2 + 1$.

9. **KR, Abschnitt 2.3, Aufgaben 26:** Sei $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$. Gesucht ist $f(S)$ falls (a) $f(x) = \lceil x/5 \rceil$, (b) $f(x) = \lfloor (x^2 + 1)/3 \rfloor$.

Folgen, Summationen und Produkte

10. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 1:** Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit $a_n = 2 \cdot (-3)^n + 5^n$. Berechnen Sie **a**) a_0 **b**) a_1 **c**) a_4 **d**) a_5

11. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 5d:** Bestimmen Sie die ersten 10 Glieder der Zahlenfolge, deren n-tes Glied gleich $n! - 2^n$ ist.

12. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 9c:** Wir betrachten die folgende (Anfangs)sequenz natürlicher Zahlen: $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots$ Bestimmen Sie ein allgemeines Bildungsgesetz für diese Zahlenfolge, d.h. eine Vorschrift der Gestalt $a_n = f(n)$, so dass $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, ...

13. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgaben 13a, 13d und 17d:** Bestimmen Sie die Werte der folgenden Summen:

$$a)\ \sum_{k=1}^{5} (k+1) \qquad b)\ \sum_{j=0}^{8} (2^{j+1} - 2^j) \qquad c)\ \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} ij$$

II. **KR, Abschnitt 2.4, Aufgabe 27:** Bestimmen Sie die Werte der folgenden Produkte [1]

$$a)\ \prod_{i=0}^{10} i \qquad b)\ \prod_{i=5}^{8} i \qquad c)\ \prod_{i=1}^{100} (-1)^i \qquad d)\ \prod_{i=1}^{10} 2$$

[1] Das Produkt der Zahlen a_m, a_{m+1}, ..., a_n kann mit Hilfe des Produktzeichen wie folgt abgekürzt werden: $\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$. Beispielsweise ist $\prod_{j=0}^{5} (2j+1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10'395$.

III. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 15:** Was ist der Wert der folgenden Summen:

$$a)\ \sum_{j=0}^{8} 3\cdot 2^j \qquad b)\ \sum_{k=1}^{8} 2^k \qquad c)\ \sum_{l=2}^{8} (-3)^l \qquad d)\ \sum_{i=0}^{8} 2\cdot(-3)^i$$

IV. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 24:** Bestimmen Sie die Summe $\sum_{k=99}^{200} k^3$.

V. Was sind die Werte der folgenden Produkte:

$$a)\ \prod_{i=0}^{10} 2^i \qquad b)\ \prod_{i=5}^{8} e^{-i} \qquad c)\ \prod_{i=1}^{100} (-2)^i \qquad d)\ \prod_{i=1}^{10} 2^{-1}$$

VI. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 29 und 30:** Bestimmen Sie

$$a)\ \sum_{j=0}^{4} j! \qquad b)\ \prod_{j=0}^{4} j!$$

VII. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 19:** Gegeben die Folge von reellen Zahlen $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$. Zeigen Sie, dass folgendes gilt

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$$

Schreiben Sie die Summe für kleine n auf. Zwei aufeinander folgende Terme heben sich gegenseitig weg: deshalb nennt man Summen dieser Art **teleskopierende Summen**.

VIII. **KR, Abschnitt 2.4, Aufg. 20:** Man verwende vorige Aufgabe und die Identität

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

um die folgende Summe zu berechnen:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Lösungen

1. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ (die Elemente dieser Menge sind selbst Mengen!)
2. (a) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$, (b) $\{3\}$, (c) $\{1,2,4,5\}$, (d) $\{0,6\}$
3. Wir erstellen eine Tabelle für die Mitgliedschaften in beiden Mengen. Ergänzen Sie die fehlenden Einträge.

A	B	$A \cup B$	$\overline{A \cup B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \cap \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0					
0	1					
0	0			1	1	1

4.

Teilmenge	Bitstring
$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$	1111111111
$\emptyset$	0000000000
$\{3,4,5\}$	0011100000
$\{1,3,6,10\}$	1010010001
$\{2,3,4,7,8,9\}$	0111001110

5.

Teilmenge	Bitstring
$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$	1111111111
$\emptyset$	0000000000
$\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$	1111001111
?	0101111000
?	1000000001

6. (a) 1, (b) 2, (c) 0.
7. (a) bijektiv, (b) weder injektiv noch surjektiv, (c) weder injektiv noch surjektiv.
8. (a) ist bijektiv, (b) ist weder injektiv noch surjektiv und damit auch nicht bijektiv.
9. (a) $f(S) = \{0,0,1,1,2\}$, (b) $f(S) = \{0,0,1,5,16\}$.
10. a) $a_0 = 3$, b) $a_1 = -1$, c) $a_4 = 787$, d) $a_5 = 2639$
11. Falls wir mit $n =$ beginnen, lautet die Folge

$$(a_n) = \big(0,\ -1,\ -2,\ -2,\ 8,\ 88,\ 656,\ 4'912,\ 40'064,\ 362'368\big)$$

12. Man verifiziert durch Einsetzen sofort, dass

$$a_n = 2^{\frac{n}{2}}\,\frac{1+(-1)^n}{2} \;=\; 2^{\frac{n}{2}-1}\left((-1)^n+1\right)$$

mit $n = 0$ beginnend die Zahlen 1, 0, 2, 0, 4, ... liefert.

13. a) 20, b) 511, c) 18.