

Diskrete Mathematik

Patrick Bucher

23. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Logik und Beweise | 1 |
| 1.1 | Logische Operationen | 2 |
| 1.1.1 | Negation | 2 |
| 1.1.2 | Konjunktion | 2 |
| 1.1.3 | Disjunktion | 2 |
| 1.1.4 | EXOR | 2 |
| 1.1.5 | Implikation | 3 |
| 1.1.6 | Bikonditional | 3 |
| 1.2 | Priorität logischer Operationen | 4 |
| 1.3 | Präpositionale Äquivalenzen | 4 |
| 1.3.1 | Tautologie | 4 |
| 1.3.2 | Kontradiktion/Widerspruch | 4 |
| 1.4 | Logische Äquivalenz | 4 |
| 1.5 | Logische Äquivalenzgesetze | 4 |
| 1.5.1 | Identität | 4 |
| 1.5.2 | Dominanz | 4 |
| 1.5.3 | Idempotenz | 4 |
| 1.5.4 | Doppelnegation | 4 |
| 1.5.5 | Negation | 5 |
| 1.5.6 | Kommutativität | 5 |
| 1.5.7 | Absorption | 5 |
| 1.5.8 | Assoziativ 1 und 2 | 5 |
| 1.5.9 | Distributiv 1 und 2 | 5 |
| 1.5.10 | De Morgan 1 und 2 | 5 |

1 Logik und Beweise

- Proposition: eine Aussage oder ein Satz ist:
 - wahr (w: wahr, t: true, 1)

- falsch (f: falsch/false, 0)
- Fragen und Gleichungen mit einer Unbekannten sind keine Aussagen
- Bezeichnung von Aussagen: p, q, r, s
- Beispiele für Präpositionen:
 - $p = \text{«Es regnet draussen.»}$
 - $q = \text{«Der Platz draussen ist nass.»}$

1.1 Logische Operationen

1.1.1 Negation

$\neg p$: «Es ist nicht der Fall, dass p gilt.» Wahrheitstabelle:

| p | $\neg p$ |
|-----|----------|
| w | f |
| f | w |

1.1.2 Konjunktion

$p \wedge q$: «Es gelten p und q .» Wahrheitstabelle:

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

1.1.3 Disjunktion

$p \vee q$: «Es gilt p oder q oder es gelten beide.» Wahrheitstabelle:

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

1.1.4 EXOR

$p \oplus q$: «Es gilt p oder q aber nicht p und q .» Wahrheitstabelle:

| p | q | $p \oplus q$ |
|-----|-----|--------------|
| w | w | f |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

1.1.5 Implikation

$p \rightarrow q$: «Wenn p gilt, dann gilt q .» Wahrheitstabelle:

| p | q | $p \rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

Aus einem Falschen kann etwas Beliebiges gefolgert werden! Beispiel: Ein Politiker sagt: «Wenn ich gewählt werde, senke ich die Steuern.»

- p : Politiker wird gewählt
- q : Politiker senkt die Steuern.
- $p \rightarrow q$
 1. Der Politiker wird gewählt und senkt die Steuern: die Aussage trifft zu.
 2. Der Politiker wird gewählt, senkt aber die Steuern nicht: die Aussage trifft nicht zu.
 3. Der Politiker wird nicht gewählt; es ist egal, was er in diesem Fall tun will: die Aussage trifft zu.

1.1.6 Bikonditional

$p \leftrightarrow q$: «Es gilt p genau dann, wenn q gilt.» Wahrheitstabelle:

| p | q | $p \leftrightarrow q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

Eine bikonditionale Präposition ist dann wahr, wenn p und q den gleichen Wahrheitswert haben, also das Gegenteil von EXOR:

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q)$$

1.2 Priorität logischer Operationen

1. \neg (Negation)
2. \wedge (Konjunktion), \vee (Disjunktion)
3. \rightarrow (Implikation), \leftrightarrow (Bikonditional)

1.3 Präpositionale Äquivalenzen

1.3.1 Tautologie

Die Aussage ist immer wahr. Beispiel: $p \vee \neg q$

1.3.2 Kontradiktion/Widerspruch

Die Aussage ist immer falsch. Beispiel: $p \wedge \neg q$

1.4 Logische Äquivalenz

Zwei Aussagen (p und q) sind logisch äquivalent, wenn $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist. Schreibweisen: $p \equiv q$, $p \sim q$, $p \Leftrightarrow q$

1.5 Logische Äquivalenzgesetze

T : True (wahr), F : False (falsch)

1.5.1 Identität

$$p \wedge T \equiv p$$

$$p \vee F \equiv p$$

1.5.2 Dominanz

$$p \vee T \equiv T$$

$$p \wedge F \equiv F$$

1.5.3 Idempotenz

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

1.5.4 Doppelnegation

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

1.5.5 Negation

$$p \vee \neg p \equiv T$$

$$p \wedge \neg p \equiv F$$

1.5.6 Kommutativität

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

1.5.7 Absorption

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

1.5.8 Assoziativ 1 und 2

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

1.5.9 Distributiv 1 und 2

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

1.5.10 De Morgan 1 und 2

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$