Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Foundations - Übung 1

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 1

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* **kurz: KR**

Logik

1. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 5:** Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um zu zeigen, dass das Distributivgesetz $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ gilt.

I. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 13a:** Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um zu zeigen, dass das Absorbtionsgesetz $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ gilt.

2. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 19:** Zeigen Sie, dass $\neg p \leftrightarrow q$ und $p \leftrightarrow \neg q$ logisch äquivalent sind.

II. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 29:** Zeigen Sie unter Verwendung einer Wahrheitstabelle, dass $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ eine Tautologie ist.

III. **KR, Abschnitt 1.2, Aufgabe 29:** Zeigen Sie unter Verwendung der logischen Äquivalenzregeln (**KR**, Seiten 24 und 25), dass $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ eine Tautologie ist.

Hinweis: Die Aufgabe ist nicht leicht zu lösen. Alternativ können Sie versuchen jeden Umformungsschritt in der Lösung durch die Regeln (**KR**, Seiten 24 und 25) zu begründen. Beachten Sie, dass stets $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$ gilt.

Prädikate und Quantoren

3. **KR, Abschnitt 1.3, Aufgabe 11:** Sei $P(x)$ die Aussage "$x = x^2$" und die Universalmenge $\mathbb{Z}$. Was sind die Wahrheitswerte von (a) $P(0)$, (b) $P(1)$, (c) $P(2)$, (d) $P(-1)$, (e) $\exists x P(x)$ und (f) $\forall x P(x)$. Begründen Sie Ihre Aussagen.

IV. **KR, Abschnitt 1.3, Aufgabe 13:** Bestimme die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen, falls die Universalmenge $\mathbb{Z}$ ist: (a) $\forall n\,(n+1 > n)$, (b) $\exists n\,(2n = 3n)$, (c) $\exists n\,(n = -n)$, (d) $\forall n\,\left(n^2 \geq n\right)$. Begründen Sie Ihre Aussagen.

4. **KR, Abschnitt 1.4, Aufgaben 27a, 27g:** Bestimmen Sie den Wahrheitswert der folgenden Aussagen wobei die Universalmenge die Menge aller ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist. Begründen Sie Ihre Aussagen.

   (a) $\forall n \exists m\,\left(n^2 < m\right)$, (b) $\exists n \exists m\,(n+m = 4 \wedge n-m = 1)$.

5. **KR, Abschnitt 1.4, Aufgabe 45:** Bestimmen Sie den Wahrheitswert von $\forall x \exists y\,(xy = 1)$ falls die Universalmenge (a) $\mathbb{R} - \{0\}$, (b) $\mathbb{Z} - \{0\}$, bzw. (c) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$ ist.

Beweise

6. **KR, Abschnitt 1.6, Aufgabe 1:** Beweisen Sie, dass die Summe zweier ungerader (ganzer) Zahlen gerade ist.

V. **KR, Abschnitt 1.6, Aufgabe 27:** Beweisen Sie, dass für eine positive ganze Zahl n folgendes gilt: n ist genau dann ungerade, wenn $5n+6$ ungerade ist.

   Hinweis: Die Behauptung ist eine Äquivalenzaussage(keine Implikation!), der Beweis sollte also aus zwei Teilen bestehen:

   a) n ungerade $\rightarrow$ $5n+6$ ungerade

   b) $5n+6$ ungerade $\rightarrow$ n ungerade

Lösungen

1.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

I. -

2. Die Proposition $\neg p \leftrightarrow q$ ist genau dann wahr, wenn $\neg p$ und q den selben Wahrheitswert haben, was bedeutet, dass p und q verschiedene Wahrheitswerte haben müssen. Wann ist der Ausdruck $p \leftrightarrow \neg q$ wahr??

II. -

III.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r) &\equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \to (\neg p \vee r) \\
&\equiv \neg[(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r) \\
&\equiv [\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee r)] \vee (\neg p \vee r) \\
&\equiv [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)] \vee (\neg p \vee r) \\
&\equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r) \vee \neg p \vee r \\
&\equiv [(p \wedge \neg q) \vee \neg p] \vee [(q \wedge \neg r) \vee r] \\
&\equiv [(p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee [(q \vee r) \wedge (\neg r \vee r)] \\
&\equiv [\mathbf{T} \wedge (\neg q \vee \neg p)] \vee [(q \vee r) \wedge \mathbf{T}] \\
&\equiv (\neg q \vee \neg p) \vee (q \vee r) \\
&\equiv \neg q \vee \neg p \vee q \vee r \\
&\equiv \neg q \vee q \vee \neg p \vee r \equiv \mathbf{T} \vee (\neg p \vee r) \equiv \mathbf{T}
\end{aligned}$$

3. (a) wahr, (b) wahr, (c) falsch, (d) falsch, (e) wahr, (f) falsch

   Sicher muss man bei den Aufgabenteilen (a)-(d) nicht lange überlegen. Versuchen Sie aber für die Teile (e) und (f) kurze Begründungen zu formulieren.

IV. (a) *wahr*, (b) *wahr*, (c) *wahr*, (d) *wahr*

   Jede dieser Aussagen **muss** (kurz) begründet werden.

4. (a) wahr, (b) falsch

   Jede dieser Aussagen **muss** (kurz) begründet werden.

5. (a) wahr, (b) falsch, (c) wahr

   Jede dieser Aussagen **muss** (kurz) begründet werden.

6. Erinnerung: Sei z eine ganze Zahl. Dann ist z gerade, falls es eine ganze Zahl z_0 gibt, so dass $z = 2z_0$. z ist ungerade, falls es eine ganze Zahl z_0 gibt, so dass $z = 2z_0 + 1$.

   Seien m und n zwei ungerade ganze Zahlen, d.h. beide Zahlen lassen sich wie folgt darstellen: $m = 2k+1$ und $n = 2l+1$. Für die Summe beider Zahlen folgt dann: $m+n \;=\; 2k+1+2l+1 \;=\; 2k+2l+2 \;=\; 2(k+l+1)$ und das ist eine gerade Zahl.

V.