Diskrete Mathematik

Patrick Bucher

23. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Logik und Beweise

- Proposition: eine Aussage oder ein Satz ist:
  - wahr (w: wahr, t: true, 1)

- falsch (f: falsch/false, 0)

- Fragen und Gleichungen mit einer Unbekannten sind keine Aussagen
- Bezeichnung von Aussagen: p, q, r, s
- Beispiele für Präpositionen:
  - p = «Es regnet draussen.»
  - q = «Der Platz draussen ist nass.»

1.1 Logische Operationen

1.1.1 Negation

$\neg p$: «Es ist nicht der Fall, dass p gilt.» Wahrheitstabelle:

p	$\neg p$
w	f
f	w

1.1.2 Konjunktion

$p \wedge q$: «Es gelten p und q.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

1.1.3 Disjunktion

$p \vee q$: «Es gilt p oder q oder es gelten beide.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

1.1.4 EXOR

$p \oplus q$: «Es gilt p oder q aber nicht p und q.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \oplus q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

1.1.5 Implikation

$p \rightarrow q$: «Wenn p gilt, dann gilt q.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Aus einem Falschen kann etwas Beliebiges gefolgert werden! Beispiel: Ein Politiker sagt: «Wenn ich gewählt werde, senke ich die Steuern.»

- p: Politiker wird gewählt
- q: Politiker senkt die Steuern.
- $p \rightarrow q$
  1. Der Politiker wird gewählt und senkt die Steuern: die Aussage trifft zu.
  2. Der Politiker wird gewählt, senkt aber die Steuern nicht: die Aussage trifft nicht zu.
  3. Der Politiker wird nicht gewählt; es ist egal, was er in diesem Fall tun will: die Aussage trifft zu.

1.1.6 Bikonditional

$p \leftrightarrow q$: «Es gilt p genau dann, wann q gilt.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Eine bikonditionale Präposition ist dann wahr, wenn p und q den gleichen Wahrheitswert haben, also das Gegenteil von EXOR:
$p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q)$

1.2 Priorität logischer Operationen

1. $\neg$ (Negation)
2. $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion)
3. $\rightarrow$ (Implikation), $\leftrightarrow$ (Bikonditional)

1.3 Präpositionale Äquivalenzen

1.3.1 Tautologie

Die Aussage ist immer wahr. Beispiel: $p \vee \neg q$

1.3.2 Kontradiktion/Widerspruch

Die Aussage ist immer falsch. Beispiel: $p \wedge \neg q$

1.4 Logische Äquivalenz

Zwei Aussagen (p und q) sind logisch äquivalent, wenn $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist. Schreibweisen: $p \equiv q$, $p \sim q$, $p \Leftrightarrow q$

1.5 Logische Äquivalenzgesetze

T: True (wahr), F: False (falsch)

1.5.1 Identität

$p \wedge T \equiv p$
$p \vee F \equiv p$

1.5.2 Dominanz

$p \vee T \equiv T$
$p \wedge F \equiv F$

1.5.3 Idempotenz

$p \vee p \equiv p$
$p \wedge p \equiv p$

1.5.4 Doppelnegation

$\neg(\neg p) \equiv p$

1.5.5 Negation

$p \lor \neg p \equiv T$
$p \land \neg p \equiv F$

1.5.6 Kommutativität

$p \lor q \equiv q \lor p$
$p \land q \equiv q \land p$

1.5.7 Absorption

$p \lor (p \land q) \equiv p$
$p \land (p \lor q) \equiv p$

1.5.8 Assoziativ 1 und 2

$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$
$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$

1.5.9 Distributiv 1 und 2

$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$
$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$

1.5.10 De Morgan 1 und 2

$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$
$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$