

Fundamentals - Übung 1

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 3

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungsweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durchschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontrolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage, kurz: KR*

Selbststudium

1. Generell geht es beim Suchproblem darum ein Element x in einer Liste unterschiedlicher Elemente $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ zu finden (das Suchresultat ist dann gleich dem Index i für den gilt: $a_i = x$) oder festzustellen, dass es nicht in der Liste vorkommt (das Suchresultat ist dann -1). Je nach verwendeter Programmiersprache kann dies auch anders definiert werden!

Bei der **linearen Suche** in einer Liste beginnt man mit dem ersten Element a_0 und vergleicht es mit dem gegebenen Element x . Bei einer Übereinstimmung ist man fertig und gibt 0 aus. Ansonsten fährt man weiter, bis eine Übereinstimmung ($a_k = x$) gefunden wird (dann gibt man k aus) oder bis man alle Elemente der Liste überprüft hat (in diesem Fall gibt man -1 aus).

Die **binäre Suche** kann man verwenden, wenn die Glieder der Liste $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ sortiert sind, d.h. es gilt $a_i < a_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-2$. Dann vergleicht man das gesuchte Element x mit dem mittleren Element a_m (wobei $m = \lfloor (n-1)/2 \rfloor$) und entscheidet, ob es in der rechten Hälfte $(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{n-1})$ liegt (nämlich dann, wenn $a_m < x$) oder ob es in der linken Hälfte (a_0, a_1, \dots, a_m) liegt (nämlich dann, wenn $x \leq a_m$). Danach sucht man entweder in der rechten oder linken Hälfte nach x . In beiden Fällen wurde das Suchproblem auf die Hälfte seiner Grösse reduziert. Diese Prozedur führt man so lange durch, bis die Liste nur noch ein Element enthält: entweder ist dieses gleich x (dann hat man x gefunden und kennt auch den Index dieses Elements) oder es ist verschieden von x (dann kommt x nicht in der Liste vor).

Führen sie sowohl die lineare, wie auch die binäre Suche schrittweise für die Liste $(1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11)$ durch. Bestimmen sie die Komplexität des Problems!

gross- \mathcal{O}

2. **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 1b, 1c:** Welche der beiden Funktionen $f(x) = 3x + 7$, bzw. $f(x) = x^2 + x + 1$ ist $\mathcal{O}(x)$? Geben sie allenfalls auch C und k an!
3. **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 19c:** Geben sie eine möglichst gute gross- \mathcal{O} Abschätzung für $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))$. Wie lauten C und k ?
- I. **KR, Abschnitt 3.2, Aufgaben 21:** Geben sie möglichst gute gross- \mathcal{O} Abschätzungen für die folgenden Funktionen an:
 - $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$,
 - $(n \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$ und
 - $n^{2^n} + n^{n^2}$

Gehen Sie bei den Abschätzungen Schritt für Schritt vor und begründen Sie jede Umformung. Geben Sie insbesondere auch an, für welche natürlichen Zahlen n jede Abschätzung stimmt, und bestimmen Sie für jede Funktion die entsprechenden Zeugen C und k .

Zahlen und Divisionen

4. **KR, Abschnitt 3.4, Aufgabe 5:** Zeigen sie, dass gilt: $\forall a, b \in \mathbb{Z} (a|b \wedge b|a \rightarrow a = b \vee a = -b)$
5. **KR, Abschnitt 3.4, Aufgabe 17:** Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:
a) $13 \bmod 3$, b) $-97 \bmod 11$, c) $155 \bmod 19$ d) $-221 \bmod 23$
6. **KR, Abschnitt 3.5, Aufgabe 3f:** Gesucht ist die Primfaktorisation von 909'090 (von Hand ausrechnen und mit dem Maple-Kommando `ifactor()` kontrollieren).
7. **KR, Abschnitt 3.5, Aufgabe 13c:** Bestimmen sie ob die Zahlen 12, 17, 31, 37 paarweise prim (teilerfremd) sind.
8. **KR, Abschnitt 3.5, Aufgabe 21a:** Was ist das ggT von $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ und $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9$?
9. **KR, Abschnitt 3.5, Aufgabe 23a:** Was ist das kgV von $3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^3$ und $2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^9$?
10. **KR, Abschnitt 3.6, Aufgabe 3d:** Konvertiere die Binärzahl 110'1001'0001'0000 in eine Dezimalzahl.
11. **KR, Abschnitt 3.6, Aufgabe 5b:** Konvertiere die Hexadezimalzahl 135AB in eine Binärzahl.
12. **KR, Abschnitt 3.6, Aufgabe 10:** Konvertiere $(1'1000'0110'0011)_2$ in eine Hexadezimalzahl.
- II. **KR, Abschnitt 3.6, Aufgabe 23d:** Berechne mit Hilfe des Euklid'schen Algorithmus die Zahl $\text{ggT}(12345, 54321)$ sowohl von Hand, wie auch mit der Maple-Funktion `igcd(12345, 54321)`.

Matrizen

13. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 3b:** Gesucht ist $\mathbf{A} \mathbf{B}$ falls

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

III. KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 5: Gesucht ist eine Matrix \mathbf{A} so, dass

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

14. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 11:** Was ist über die Grösse der beiden Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} bekannt, falls sowohl \mathbf{AB} wie auch \mathbf{BA} existieren?
15. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 19:** Erinnerung: Sei \mathbf{A} eine quadratische Matrix. Eine Matrix \mathbf{A}^{-1} (der selben Dimension) heisst Inverse von \mathbf{A} , falls $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$ gilt.

Sei \mathbf{A} eine 2×2 -Matrix mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Zeigen sie, dass für $ad - bc \neq 0$ folgt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

16. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 29:** Seien folgende Matrizen gegeben:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechnen sie (a) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ und (c) $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$.

17. **KR, Abschnitt 3.8, Aufgabe 31:** Gegeben sei die Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berechnen sie (a) $\mathbf{A}^{[2]}$, (b) $\mathbf{A}^{[3]}$ und (c) $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}^{[2]} \vee \mathbf{A}^{[3]}$.

Lösungen

1. -
2. $f(x) = 3x + 7$ ist $\mathcal{O}(x)$ wobei $k = 1$ (wie bei jedem Polynom) und $C = |3| + |7| = 10$ gewählt werden können.
3. Wir gehen Schrittweise und sehr ausführlich vor.

$$\begin{aligned}
 & |(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))| \\
 = & (n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1)) && \text{Funktion ist stets positiv} \\
 = & n! \cdot n^3 + n! \cdot \log(n^2 + 1) + 2^n \cdot n^3 + 2^n \cdot \log(n^2 + 1) && \text{ausmultiplizieren} \\
 \leq & n! \cdot n^3 + n! \cdot 3 \log(n) + 2^n \cdot n^3 + 2^n \cdot 3 \log(n) && \text{für alle } n \geq 2 \text{ (Nebenrechnung 1)} \\
 \leq & n! \cdot n^3 + n! \cdot 3n + 2^n \cdot n^3 + 2^n \cdot 3n && \text{für alle } n \geq 1 \text{ da } \log(n) < n \\
 \leq & n! \cdot n^3 + n! \cdot 3n^3 + 2^n \cdot n^3 + 2^n \cdot 3n^3 && \text{für alle } n \geq 1 \\
 = & 4 \cdot n! \cdot n^3 + 4 \cdot 2^n \cdot n^3 && \text{zusammenfassen} \\
 \leq & 4 \cdot n! \cdot n^3 + 4 \cdot n! \cdot n^3 && \text{für alle } n \geq 4 \text{ (Nebenrechnung 2)} \\
 = & 8 \cdot n! \cdot n^3
 \end{aligned}$$

Somit ist die Funktion $\mathcal{O}(n! \cdot n^3)$ und mögliche Zeugen sind $k = 4$ und $C = 8$.

Nebenrechnung 1:

$$\begin{aligned}
 \log(n^2 + 1) & \leq \log(n^2 + n^2) && \text{für alle } n \geq 1 \\
 & = \log(2n^2) \\
 & = \log(2) + \log(n^2) && \text{Rechenregeln für Logarithmen} \\
 & = \log(2) + 2 \log(n) && \text{Rechenregeln für Logarithmen} \\
 & \leq \log(n) + 2 \log(n) && \text{für alle } n \geq 2 \\
 & \leq 3 \log(n)
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung 2: Falls $n \geq 4$ ist gilt $2^n = 16 \cdot 2^{n-4} \leq 24 \cdot 5 \cdot 6 \cdots n = n!$.

I. $\mathcal{O}(n^2 \log(n))$, $\mathcal{O}(n^2 (\log(n))^2)$, $\mathcal{O}(n^{2^n})$

4. -

5. 1, 2, 3, 9

6. $2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$

7. Ja

8. $3^5 \cdot 5^3$

9. $2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^9 \cdot 7^3$

10. $26'896$

11. $1'0011'0101'1010'1011$

12. -

II. 3

13. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 9 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

III. $\begin{bmatrix} 9/5 & -6/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$

14. Zeilenanzahl A = Spaltenanzahl B und Spaltenanzahl A = Zeilenanzahl B

15. Der Beweis ist hier durch eine einfache Probe möglich, d.h. berechnen Sie $A \cdot A^{-1}$. Welches Ergebnis sollten Sie hier erhalten?

16. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$