Advanced Counting Techniques (Fortgeschrittene Zähltechnik)

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studiengang Informatik
Hochschule Luzern, Informatik

I.BA_DMATH

Inhalt

Ziele

Die StudentIn

- kann Rekursionsbeziehungen herleiten
- kann diese lösen
- kann erzeugende Funktionen von Folgen berechnen und kann damit Zählprobleme lösen
- kann das erweitere Ein-/Ausschlussprinzip anwenden

Übersicht

Example

Wie viele Bitstrings der Länge n enthalten nicht zwei aufeinander folgende Nullen?

Lösung: Sei a_n die gesuchte Anzahl dieser Bitstrings der Länge n. Nach langem Nachdenken kann man zeigen (was wir gleich anschliessend machen werden), dass folgendes gilt:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

wobei $a_1 = 2$ und $a_2 = 3$ gilt (was man sofort einsieht). Wie berechnen wir jetzt a_3, a_9 oder $a_{1'998'459}$?

$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5$; $a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8$

$a_9 = a_8 + a_7 = 55 + 34$
$= 89$

$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13$

$a_6 = a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21$

$a_7 = a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34$

Nun wäre es sehr schön, wenn man diese Rekursionsbeziehung lösen könnte. Damit beschäftigt sich dieser erste Abschnitt!

Rekursionsbeziehungen (Fort.)

Definition (Rekursionsbeziehung)

Eine **Rekursionsbeziehung** der Folge $\{a_n\}$ ist eine Beziehung der Form

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1), \quad \forall n \geqslant n_0,\ n_0 \in \mathbb{N}^+.$$

Eine **Lösung dieser Rekursionsbeziehung** ist eine Folge, die diese Relation erfüllt.

Example

Gegeben sei die Rekursionsbeziehung $\overset{(*)}{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}}$ für alle $n = 2, 3, 4, \ldots$ Sind die Zahlenfolgen Lösungen dieser Rekursion?

$a_n = 3n$ $\Rightarrow a_{n-1} = 3(n-1)$; $a_{n-2} = 3(n-2)$. Damit wird aus $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ folgendes $3n \overset{?}{=} \underbrace{2 \cdot 3(n-1) - 3(n-2)}_{3n-6+6=3n}$

falls das "=" Zeichen gilt, dann ist $a_n = 3n$ eine Lösung von (*)

$a_n = 2^n$

$a_n = 5$

- Ist $a_n = 2^n$ ebenfalls eine Lösung von $\underbrace{a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}}_{(*)}$?

Einsetzen ergibt:

Left hand side = $LHS = 2^n$ $\neq$

$RHS = 2 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-2} = 2^n - 2^{n-2}$

Setzt man $a_n = 2^n$ in (*) ein, dann gilt sicher nicht

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$

Somit ist $a_n = 2^n$ keine Lösung von (*) !

- Ist $a_n = 5$ eine Lösung von (*) ?

$LHS = 5$ =

$RHS = 2 \cdot 5 - 5 = 5$

Somit ist $a_n = 5$ eine Lösung von (*)

Modellierung mit Rekursionsbeziehungen

Examples (Zinseszins Rechnung)

Die jährliche Entwicklung des Kapitals P_0. Sei P_n das Kapital nach n Jahren (am Ende des n. Jahres). Dann hat man

(*)

$$P_n = P_{n-1} + \frac{p}{100} P_{n-1} = \left(1 + \frac{p}{100}\right) P_{n-1} = qP_{n-1},$$

wobei $q = 1 + p/100$ und p der Zinssatz (in Prozent ist). Die explizite Form erhält man, wenn man sukzessive einsetzt:

$$P_n = qP_{n-1} = q^2 P_{n-2} = q^3 P_{n-3}$$
$$= q^n P_0$$

Lösung der Rekursionsbez. (*)

$0 = n - n$

Beispielsweise hat man bei $P_0 = 10000$ und $p = 5\%$ nach 30 Jahren ein Kapital von $P_{30} = (1.05)^{30} \cdot 10'000 = 43'219.4$.

Modellierung mit Rekursionsbeziehungen (Fort.)

Zurück zum ersten Beispiel!

Examples (Bitstrings ohne 00)

Wie viele Bitstrings der Länge n enthalten 00 nicht?

Lösung: Ein Bitstring der Länge n mit der geforderten Eigenschaft endet entweder mit einer 1 oder einer 0. Im ersten Fall kann der restliche Bitstring der Länge $n-1$ ein beliebiger Bitstring ohne 00 sein. Davon gibt es a_{n-1}. Im zweiten Fall muss an der zweitletzten Stelle eine 1 stehen, da sonst 00 vorkommen würde. Der verbleibende Bitstring der Länge $n-2$ enthält 00 nicht: es gibt a_{n-2} Bitstrings dieser Art.

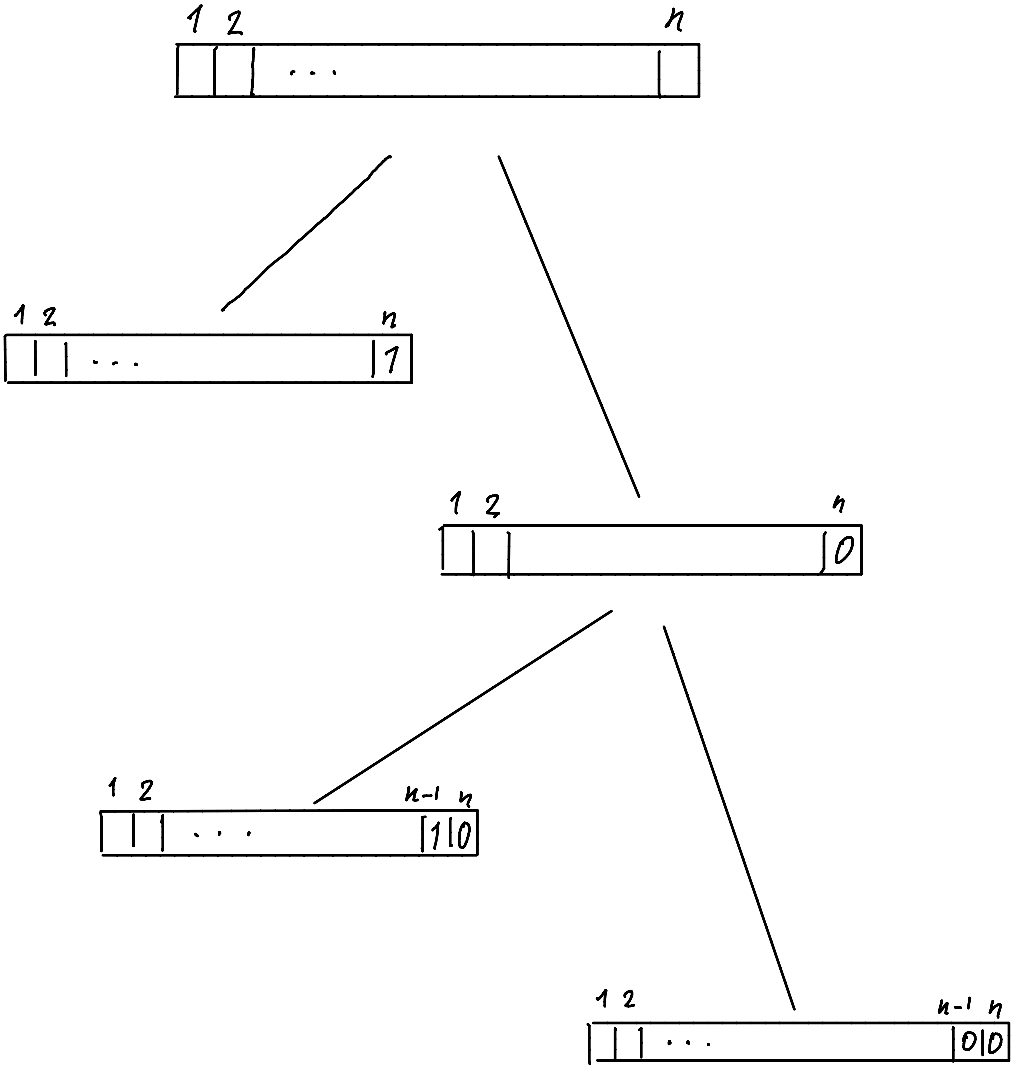
Insgesamt gibt es also

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Bitstrings der Länge n ohne 00.

Zulässige Bitstrings (enthalten "00" **nicht**) der Länge n

Anzahl davon



a_n

$\|$

a_{n-1}

$+$

a_{n-2}

$+$

weil nicht zulässig 0

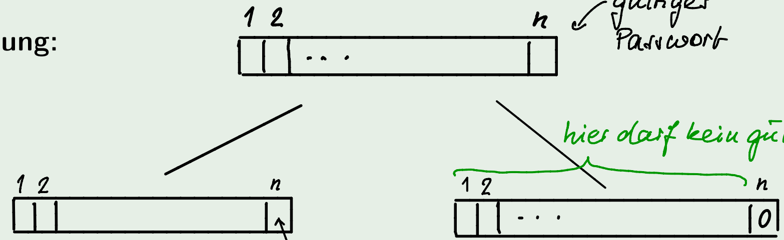
Die Rekursionbez. lautet:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Example

Ein Computersystem betrachtet eine Folge von Dezimalziffern als ein **gültiges** Passwort, wenn es eine gerade Anzahl von Nullen enthält (z.B. 1230329830 ist gültig und 1203040556 ist ungültig). Sei a_n die Anzahl gültiger Passworte der Länge n. Gesucht: Rekursionsbeziehung für a_n.

Lösung:



gültiges Passwort

Anzahl a_n

hier darf kein gültiges PW stehen: die Anzahl ist gleich

$10^{n-1} - a_{n-1}$

gültiges PW der Länge n-1

eine Ziffer zwischen 1 und 9

Anzahl $= 9 \cdot a_{n-1}$

damit hier ein gültiges PW entsteht, müssen in den ersten n-1 Stellen eine ungerade Anzahl Nullen stehen

RB: $a_n = 9a_{n-1} + 10^{n-1} - a_{n-1} \Rightarrow a_n - 8a_{n-1} = 10^{n-1}$

Übersicht

Eigenschaften von Rekursionsbeziehungen

nicht linear:

a_n^2; $a_n a_{n-1}$, ...

$\sin(a_n)$, ...

Die Rekursionsbeziehung gelte ab $n_0 \in \mathbb{N}^+$, $\forall n \geqslant n_0$:

$$F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1) = r(n).$$

- Sie ist **linear**, falls F eine lineare Funktion ihrer Variablen a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1 ist. Typischer Weise ist F von der Form:

$$F(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1) = a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \ldots - c_k a_{n-k}.$$

- Sie ist **homogen**, falls die rechte Seite verschwindet, d.h. falls $r(n) = 0$, $\forall n$ (d.h. die RHS verschwindet).
- Sie ist vom **Grade** k, falls F höchstens von Gliedern ab a_{n-k} abhängt, aber keinesfalls von früheren Gliedern.

Definition

Eine **lineare, homogene Rekursionsbeziehung vom Grade** k **mit konstanten Koeffizienten** ist eine Beziehung der Form

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \ldots - c_k a_{n-k} = 0,$$

wobei für die Koeffizienten gilt: $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ und $c_k \neq 0$.

Example

Die Rekursionsbeziehung für die Anzahl Bitstrings, die nicht 00 enthalten ist $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ und somit **homogen**.

Die Lösung allgemeiner Rekursionbeziehungen ist sehr schwierig. Lineare Rekursionbeziehungen lassen sich aber relativ einfach lösen.

Hat man auf der rechten Seite eine Funktion $r(n)$, die nur von n, nicht aber von a_k abhängt, spricht man von einer **inhomogenen, linearen Rekursionsbeziehung vom Grade** k **mit konstanten Koeffizienten**. (Maple: rsolve)

Allg. Lösung einer inhomogenen, linearen RB in drei Schritten:

1. Bestimme die allgemeine Lösung $\left\{a_n^{(h)}\right\}$ der zugehörigen homogenen Rekursionsbeziehungen (RHS Null setzen):

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \ldots - c_k a_{n-k} = 0.$$

2. Bestimme eine (einzige) partikuläre Lösung $\left\{a_n^{(p)}\right\}$ der inhomogenen Rekursionsbeziehungen:

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \ldots - c_k a_{n-k} = r(n).$$

3. Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Rekursionsbeziehungen die Summe dieser beiden Lösungen:

$$\{a_n\} = \left\{a_n^{(h)}\right\} + \left\{a_n^{(p)}\right\}.$$

Lösen von Rekursionsbeziehungen

- Will man eine spezielle Lösung der inhomogenen Rekursionsbeziehungen berechnen, müssen die Konstanten in $\left\{a_n^{(h)}\right\}$ bestimmt werden.
- Dazu wird $\{a_n\}$ in die Rekursiongleichung eingesetzt.
- Dann werden die Konstanten so gewählt, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind.
- Dies führt typischer Weise auf ein Gleichungssystem.

Lösung der homogenen Rekursionsbeziehungen

1. Schritt: Die homogene Rekursionsbeziehung

$$a_n - c_1 a_{n-1} - c_2 a_{n-2} - \ldots - c_k a_{n-k} = 0 \tag{1}$$

wird durch den folgenden **Ansatz** gelöst

$$a_k = r^k, \quad k = n-k, n-k+1, \ldots, n. \tag{2}$$

Falls der Ansatz (2) die Gleichung (1) erfüllen soll, muss r die folgende **charakteristische Gleichung** erfüllen:

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

Man erhält sie aus (1), indem man a_k durch r^k ersetzt, und den Ausdruck durch r^{n-k} dividiert.

Example (Bitstrings ohne 00)

Setzt man in die lineare, homogene Rekursionsbeziehung $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0$ den Ansatz $a_n = r^n$ ein, erhält man

$$r^n - r^{n-1} - r^{n-2} = 0.$$

Nach Division durch $r^{n-2} \neq 0$ erhält man die charakteristische Gleichung

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

$p = -1, \; q = -1$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right).$$

$$r_{1,2} = -\left(\frac{-1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-1)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{1}{4} + 1}_{D > 0}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$$

Lösung der homogenen Rekursionsbeziehungen

Die charakteristische Gleichung ist für $k = 1$ eine lineare und für $k = 2$ eine quadratische Gleichung (allg. eine algebraische Gleichung vom Grade k)

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0. \tag{3}$$

Deren Lösungen sind

$$r_{1,2} = \frac{c_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + c_2}$$

Es gibt drei Fälle, abhängig von der **Diskriminanten** der Gleichung (3)

$$D = \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + c_2$$

$D > 0$ Dann hat die charakteristische Gleichung zwei unterschiedliche Lösungen $r_1 \neq r_2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist dann

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n.$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, bel. Konst.

$D = 0$ Dann hat die charakteristische Gleichung eine Doppellösungen $r = r_1 = r_2$. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist dann

$$a_n^{(h)} = (\alpha_1 + \alpha_2 n)\, r^n.$$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, bel. Konstanten

$D < 0$ Dann hat die charaktestische Gleichung (für reelle c_1 und c_2) eine Paar konjugiert komplexer Lösungen. Dieser Fall ist für uns nicht interessant!

Example (Bitstrings ohne 00 (Fort.))

Hier ist die Diskriminante $D = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-1) = \frac{5}{4} > 0$, d.h. die charakteristische Gleichung hat zwei unterschiedliche Lösungen und damit ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 \Bigg(\underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{r_1}\Bigg)^n + \alpha_2 \Bigg(\underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{r_2}\Bigg)^n \quad \left(= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ bel. Konst.}\right)$$

Die Anfangsbedingungen sind $a_1 = 2$ (es gibt die beiden Bitstrings 0 und 1) und $a_2 = 3$ (es gibt die drei Bitstrings 01, 10 und 11). Die Koeffizienten α_1 und α_2 müssen also die beiden Gleichungen

$$2 = a_1^{(h)} = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

Lösung der homogenen Rekursionsbeziehungen (Beispiel)

Example (Bitstrings ohne 00 (Fort.))

und

$$3 = a_2^{(h)} = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

erfüllen. Die Lösung dieses Systems von zwei linearen Gleichungen ist $(\alpha_1, \alpha_2) = \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right)$. Für diese homogene, lineare Rekursionsbeziehung gilt $a_n^{(p)} = 0$, und somit ist die allgemeine Lösung:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = a_n^{(h)} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

für $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Lösung der homogenen Rekursionsbez. (Fort.)

Example

Was ist die allgemeine Lösung der linearen, homogenen Rekursionsbeziehung mit konstanten Koeffizienten:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \tag{4}$$

Lösung: wir können (4) in der Form $\overset{r^2}{a_n} - \overset{r^1}{a_{n-1}} - 2\overset{r^0}{a_{n-2}} = 0$ schreiben. Daraus ergibt sich die charakteristische Gleichung: $\underbrace{r^2 - r - 2}_{(r+1)(r-2)} = 0$. Sie hat die beiden Lösungen $r_1 = 2$ und $r_2 = -1$. Also lautet die allg. Lösung von (4):

$$a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 (-1)^n \tag{5}$$

Spezielle Lösung zu $a_0 = 2$ und $a_1 = 7$ durch Einsetzen in (5) und Auflösen nach α_1 und α_2: also $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$.

Example

Finden Sie alle Lösungen der Rekursionsbeziehung $a_n = 3a_{n-1} + 2n$. (lin. RB vom Grade 1)

Lösung: $a_n - 3a_{n-1} = 2n$

1. Lösung der zugehörigen hom. RB: $a_n - 3a_{n-1} = 0 \quad (*)$; char. gen. $r - 3 = 0$

Lösung der char. gen: $r = 3$. Somit ist die allg. Lös. von $(*)$: $a_n^{(h)} = \alpha\, 3^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$

2. Partikuläre Lös. der inhom. RB: $a_n - 3a_{n-1} = 2n \quad (**)$ mit einem Ansatz für die part. Lös., die sich an der "Störung", d.h. der RHS orientiert:

$$a_n^{(p)} = c_1 n + c_2$$ (mit noch zu bestimmenden Konst. c_1 u. c_2)

Einsetzen in $(**)$:

$$\underbrace{c_1 n + c_2}_{a_n^{(p)}} - 3\underbrace{(c_1(n-1) + c_2)}_{a_{n-1}^{(p)}} = 2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(c_1 - 3c_1)n + c_2 - 3c_2 + 3c_1 = 2n$$

$$-2c_1 n + \boxed{3c_1 - 2c_2} = 2n + \boxed{0}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$2 = -2c_1 \Rightarrow c_1 = -1$

$0 = 3c_1 - 2c_2 \quad c_2 = -1{,}5$

Somit $a_n^{(p)} = -n - 1.5$.

Und weiter ist die allg. Lös. der inhom. RB:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha 3^n - n - 1.5$$

Möchten wir die spezielle Lösung für $a_1 = 1$, dann muss gelten

$$1 = a_1 = \alpha \cdot 3^1 - 1 - 1.5 = 3\alpha - 2.5$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 1 + 2.5 = \frac{7}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{7}{6}$$

Die spezielle Lösung wäre dann

$$a_n = \frac{7}{6} 3^n - n - 1.5 = \frac{7}{2} 3^{n-1} - n - 1.5$$

Example

Bestimme die Lösungen der Rekursionsbez. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 7^n$. (1)

Lösung: Standardform: $1a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \overset{(1)}{=} 7^n$ lin., inhom. RB vom Grade 2 konst. Koeff.

1. Bestimme die allg. Lös. der zugeh. homogenen RB: $1a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} \overset{(*)}{=} 0$

$a_n \to r^2$, $a_{n-1} \to r^1$, $a_{n-2} \to r^0$

Die char. Gl. ist $1r^2 - 5r^1 + 6r^0 = 0$

kurz $\underbrace{r^2 - 5r + 6}_{(r-2)(r-3)} = 0$

(Ansatz: $a_n \overset{!}{=} r^n$)

Die char. Gl. hat die Lösungen $r_1 = 2$ und $r_2 = 3$. Somit ist die allg. Lös. von (*):

$$a_n^{(h)} = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Hausaufgabe: Überprüfen Sie dies durch Einsetzen in (*)!

2. Eine partikuläre Lösung der inhom. RB (1):

Ansatz für die part. Lös. basierend auf der Störung (RHS), 7^n.

$$a_n^{(p)} = c\,7^n$$

wobei c noch eine zu bestimmende (reelle) Konstante ist.

Einsetzen in (1):

$$a_n^{(p)} - 5a_{n-1}^{(p)} + 6a_{n-2}^{(p)} = 7^n$$

$$\Longleftrightarrow \quad c\,7^n - 5c\,7^{n-1} + 6c\,7^{n-2} = 7^n$$

$$\Longleftrightarrow \quad c\,7^{n-2}(\underbrace{7^2 - 5\cdot 7 + 6}_{49-35+6\;=\;20}) = 7^n$$

$$\Longleftrightarrow \quad c\cdot 20\cdot 7^{n-2} = 7^n$$

$$\Longleftrightarrow \quad c = 7^n\cdot 7^{2-n}/20 = \frac{7^2}{20} = \frac{49}{20}$$

Also lautet die part. Lös von (1):

$$a_n^{(p)} = \frac{7^2}{20}7^n = \frac{1}{20}7^{n+2}$$

3. Die allg. Lös. von (1) ist somit nichts anderes als die Superposition von $a_n^{(h)}$ und $a_n^{(p)}$:

$$\boxed{a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = \alpha_1 2^n + \alpha_2 3^n + \frac{1}{20}7^{n+2}}$$

4. Spezielle Lös. von (1)

z.B. zu den Anfangsbedingungen $a_1 = 0$ und $a_2 = 1$. Die Koeffizienten α_1 u. α_2 werden dadurch bestimmt, und zwar durch das (lin.) Gleichungssystem

$$0 = a_1 = \alpha_1 2^1 + \alpha_2 3^1 + \frac{1}{20}7^3 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7^3/20$$

$$1 = a_2 = \alpha_1 2^2 + \alpha_2 3^2 + \frac{1}{20}7^4 = 4\alpha_1 + 9\alpha_2 + 7^4/20$$

Also:

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 = -7^3/20$$

$$4\alpha_1 + 9\alpha_2 = -7^4/20 + 1$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -7^3/20 \\ -7^4/20+1 \end{bmatrix}}_{b}$$

$\Rightarrow x = A^{-1}b$ Hausaufgabe ! :)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = A^{-1} b = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \cdot \frac{7^3}{20} + \frac{7^4}{40} - \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \frac{7^3}{20} - \frac{7^4}{60} + \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Übersicht

Erzeugende Funktionen (Definition)

Definition

Die **erzeugende Funktion der Folge** $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ von reellen Zahlen ist die unendliche Reihe

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$$

Example

- $3, 3, 3, \ldots \quad \rightsquigarrow \quad G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3\, x^k = 3x^0 + 3x^1 + 3x^2 + 3x^3 + \ldots,$
- $1, 2, 3, \ldots \quad \rightsquigarrow \quad G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, x^k = 1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 3x^2 + 4 \cdot x^3 + \ldots$
- $\underbrace{1, 1, 1, 1, 1}_{\text{endl. Folge}} \quad \rightsquigarrow \quad G(x) = \sum_{k=0}^{4} x^k = 1 \cdot x^0 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^4$

  $= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ erz. Fkt.

Erzeugende Funktionen (Beispiele)

Example

Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen der folgenden Zahlenfolgen. Geben Sie die gefundenen Funktionen in möglichst einfacher Form (geschlossen) an.

1. $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \ldots, \binom{m}{m}$,
2. $1, 1, 1, 1, \ldots$
3. $1, a, a^2, a^3, \ldots$

Binomische Formel

(1) $\binom{m}{0}x^0 + \binom{m}{1}x^1 + \ldots + \binom{m}{m}x^m = (1+x)^m$. Denn $(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \underbrace{\overbrace{1^{m-k}}^{1} x^k}_{x^k}$

(2) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ geometrische Reihe (MATH, DMATH)

(3) $1 + ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-ax}$, $|ax| < 1$

Example

Wieviele Lösungen hat die Gleichung $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ falls $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ und

- $2 \leqslant x_1 \leqslant 5$
- $3 \leqslant x_2 \leqslant 6$
- $4 \leqslant x_3 \leqslant 7$

gelten soll?

Siehe auch KRosen, p 543 !

Lösung: Wir suchen x_1, x_2, x_3 so, dass $x^{x_1} \cdot x^{x_2} \cdot x^{x_3} = x^{x_1+x_2+x_3} = x^{17}$

x_1, x_2, x_3

$$(x^2+x^3+x^4+x^5)(x^3+x^4+x^5+x^6)(x^4+x^5+x^6+x^7) = \underbrace{x^2 \cdot x^3 \cdot x^4}^{x^9} + \ldots$$

$$+ \underbrace{x^4 \cdot x^6 \cdot x^7}_{x^{17} = x^{x_1+x_2+x_3}} + \ldots + \underbrace{x^5 \cdot x^6 \cdot x^6}_{x^{17}} + \ldots + \underbrace{x^5 x^6 \cdot x^7}_{x^{18}}$$

$$= x^9 + \ldots + 3x^{17} + \ldots + x^{18}$$

Es gibt also 3 Lös. !

Übersicht

Einführung

Theorem (siehe SW 05)

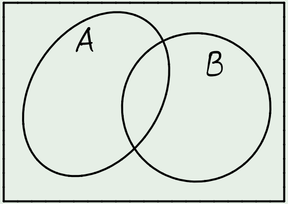
Für beliebige Mengen A und B gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Example

Wieviele positive natürliche Zahlen nicht grösser als 1000 sind durch 7 oder 11 teilbar?

Lösung:



A: Menge der durch 7 teilbaren Zahlen in $\{1, 2, \ldots, 1000\}$

B: dito für 11

$$|A| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = \lfloor 142.9 \rfloor = 142$$

floor function

$$|B| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = \lfloor 90.9 \rfloor = 90$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = \lfloor 12.99 \rfloor = 12$$

$$\Rightarrow |A \cup B| = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Theorem (Ein-/Ausschlussprinzip — siehe SW 05)

Falls $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *beliebige, endliche Mengen sind, dann gilt:*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = &\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\ &\cdots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned}$$

Example

Wie lautet obige Formel für vier Mengen A_1, A_2, A_3 und A_4?

Lösung: $$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = &|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\ &- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

Ein-/Ausschlussprinzip: Derangements

Definition (Derangement)

Ein **Derangement** ist eine Permutation, die kein Objekt am selben Platz lässt.

Example

Die Permutation 21453 ist ein Derangement von 12345! Gibt es weitere? Wie viele? Wo kann man das brauchen?

keine Zahl bleibt an seinem Ort!

Theorem

Die Anzahl Derangements bei einer Menge von n Elementen ist:

Herleitung siehe Rosen, p562ff

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

Example

Es werden 100 Briefe zufällig in die adressierten Umschläge gesteckt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich kein Brief im richtigen Umschlag?

Lösung: Wir gehen von einer Laplaceverteilung aus.

$$p = \frac{\#\text{günstige Fälle}}{\#\text{mögliche Fälle}} = \frac{\text{Anzahl Derangements von 100 El.}}{\text{Anzahl Permutationen von 100 El.}}$$

$$= \frac{1}{100!}\, 100!\, \Big[\underbrace{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{100!}}_{\approx e^{-1}}\Big] \approx e^{-1} = 0.368 \mathrel{\hat{=}} 36.8\,\%$$

Hausaufgabe: vergleiche mit dem früheren Bsp.

Wir verwenden: $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots$ mit $x = 1$:

$$e^{-1} = \underline{1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - + \ldots} \Longrightarrow$$

Zusammenfassung

Wir haben folgende Begriffe kennen gelernt und können sie in Problemen aus dem Informatikalltag anwenden:

- Rekursionsbeziehungen und deren Lösung
- ~~Das exponentielle Verhalten im Fall von *teile und herrsche* Algorithmen~~
- Erzeugende Funktionen von Folgen und deren Anwendung zum Lösen von Zählproblemen
- Das erweitere Ein-/Ausschlussprinzip

FFT (fast Fourier Transform)