Discrete Probability II (Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studiengang Informatik
Hochschule Luzern, Informatik

I.BA_DMATH

Discrete Probability II (Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung)

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studiengang Informatik
Hochschule Luzern, Informatik

I.BA_DMATH

Ziele

Die StudentIn

- kennt die folgenden (häufig vorkommenden) Verteilungsfunktionen und deren Verwendung:

Ziele

Die StudentIn

- kennt die folgenden (häufig vorkommenden) Verteilungsfunktionen und deren Verwendung:
  - die Bernoulli-Verteilung

Ziele

Die StudentIn

- kennt die folgenden (häufig vorkommenden) Verteilungsfunktionen und deren Verwendung:
  - die Bernoulli-Verteilung
  - die Binomialverteilung

Ziele

Die StudentIn

- kennt die folgenden (häufig vorkommenden) Verteilungsfunktionen und deren Verwendung:
  - die Bernoulli-Verteilung
  - die Binomialverteilung
  - die hypergeometrische Verteilung

Ziele

Die StudentIn

- kennt die folgenden (häufig vorkommenden) Verteilungsfunktionen und deren Verwendung:
  - die Bernoulli-Verteilung
  - die Binomialverteilung
  - die hypergeometrische Verteilung
  - die Poissonverteilung

Ziele

Die StudentIn

- kennt die folgenden (häufig vorkommenden) Verteilungsfunktionen und deren Verwendung:
  - die Bernoulli-Verteilung
  - die Binomialverteilung
  - die hypergeometrische Verteilung
  - die Poissonverteilung
- kann Mittelwerte und Varianzen von diskreten Verteilungen berechnen.

Ziele

Die StudentIn

- kennt die folgenden (häufig vorkommenden) Verteilungsfunktionen und deren Verwendung:
  - die Bernoulli-Verteilung
  - die Binomialverteilung
  - die hypergeometrische Verteilung
  - die Poissonverteilung
- kann Mittelwerte und Varianzen von diskreten Verteilungen berechnen.
- versteht den Begriff Zufallsvariable und kann damit umgehen, d.h. deren Erwartungswert wie auch deren Varianz und Standardabweichung bestimmen.

Ziele

Die StudentIn

- kennt die folgenden (häufig vorkommenden) Verteilungsfunktionen und deren Verwendung:
  - die Bernoulli-Verteilung
  - die Binomialverteilung
  - die hypergeometrische Verteilung
  - die Poissonverteilung
- kann Mittelwerte und Varianzen von diskreten Verteilungen berechnen.
- versteht den Begriff Zufallsvariable und kann damit umgehen, d.h. deren Erwartungswert wie auch deren Varianz und Standardabweichung bestimmen.
- kann mit diskreten zweidimensionalen Zufallsvariablen umgehen. Sie/Er weiss, wie man die Randdichte und bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnet.

Inhalt

Übersicht

Binomialverteilung

Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit zwei möglichen Ausgängen E (oder 1) und $\overline{E}$ (oder 0), welche mit der Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ eintreten können (Bernoulli-Verteilung).

Example (Erzeugen eines Zufallsbit)

Ein (rein) zufälliges Bit ist mit der selben W'keit Null wie Eins, d.h. $p = 1/2$!

Was kann man dann über die Wahrscheinlichkeiten sagen, wenn das selbe Experiment n-Mal durchgeführt wird?

Example (Erzeugen von n Zufallsbits)

Uns interessiert, wie viele der n Bit im Schnitt 1 sind und wie viele 0 sind!

p : W'keit eine Eins zu erhalten (wenn wir ein Bit erzeugen)

$q = 1 - p$: dito für Null.

Binomialverteilung (Fort.)

Definition (Binomialverteilung)

Die Wahrscheinlichkeit von genau k Ereignissen E (Erfolge) bei n unabhängigen (Bernoulli-) Versuchen ist unter der obigen Voraussetzung:

Anzahl unabh. Versuch — W'keit für Erfolg

$$B(k|n,p) = B_{n,p}(k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Anzahl Erfolge

Vergleich mit der binomischen Formel $1 = 1^n + (p+(1-p))^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Example (Erzeugen von n Zufallsbits)

Uns interessiert, wie viele der n Bit im Schnitt 1 sind, wie viele 0 sind!

$n=3$; $p = 1/2$ = "W'keit für eine 1"; $q = 1-p = 1/2$ = "W'keit für eine 0)

- 0 Einsen : $B(0|3,\tfrac{1}{2}) = \binom{3}{0}\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^3 = 1\cdot 1\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- 1 Eins : $B(1|3,\tfrac{1}{2}) = \binom{3}{1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^1\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{8}$

Anzahl Möglichkeiten die Eins zu erhalten wenn man 3x wirft.

W'keit eine Eins zu werfen

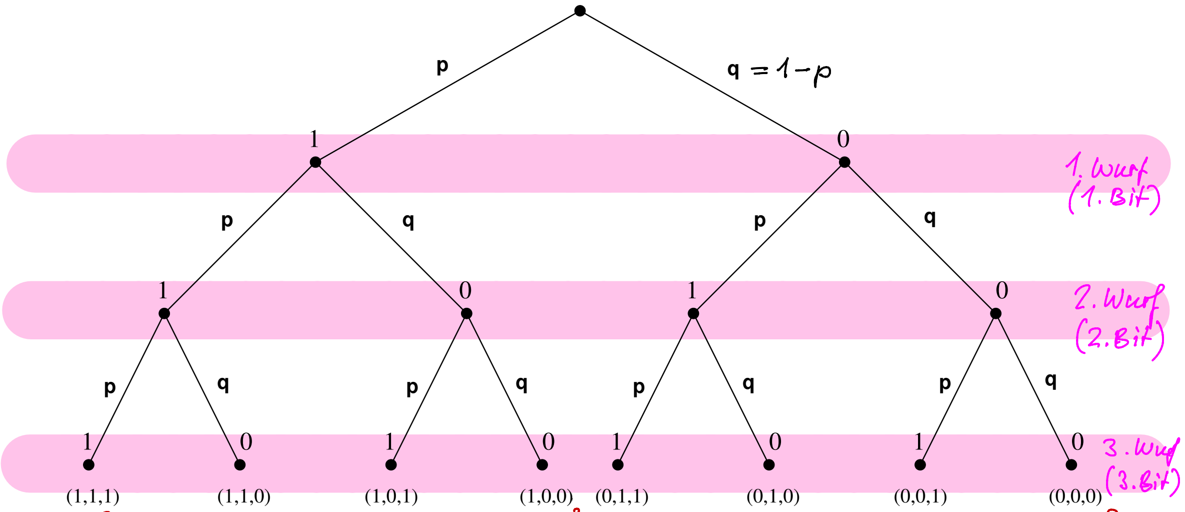
W'keit zwei Nullen zu erhalten

analog für $k = 2$:

– 2 Einsen: $B(2|3, 1/2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{8}$

dito für $k = 3$:

– 3 Einsen: $B(3|3, 1/2) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 1 = \frac{1}{8}$



W'keit p^3 | $p^2(1-p)$ | $p^2(1-p)$ | $p(1-p)^2$ | $p^2(1-p)$ | $p(1-p)^2$ | $p(1-p)^2$ | $(1-p)^3$

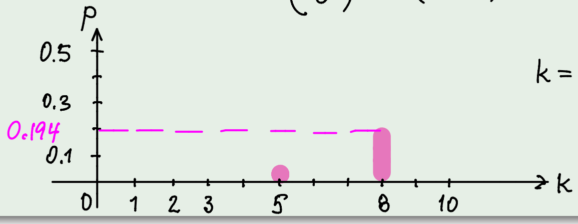
$\binom{3}{3}p^3(1-p)^0$ $\quad 3p^2(1-p) = \binom{3}{2}p^2(1-p)$ $\quad 3p(1-p)^2 = \binom{3}{1}p(1-p)^2$ $\quad \binom{3}{0}p^0(1-p)^3$

Example

Eine Folge von 10 Bit wird Bit für Bit zufällig erzeugt. Dabei gilt in jedem einzelnen Erzeugungsschritt $p(0) = 0.9$ (und $p(1) = 1 - 0.9 = 0.1$). Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Bitfolge genau 8 Nullen?

Lösung: $n = 10$; Erfolg sei eine 0 zu erhalten; $p = 0.9$; Anzahl Erfolge $k = 8$. Dann ist die gesuchte W'keit

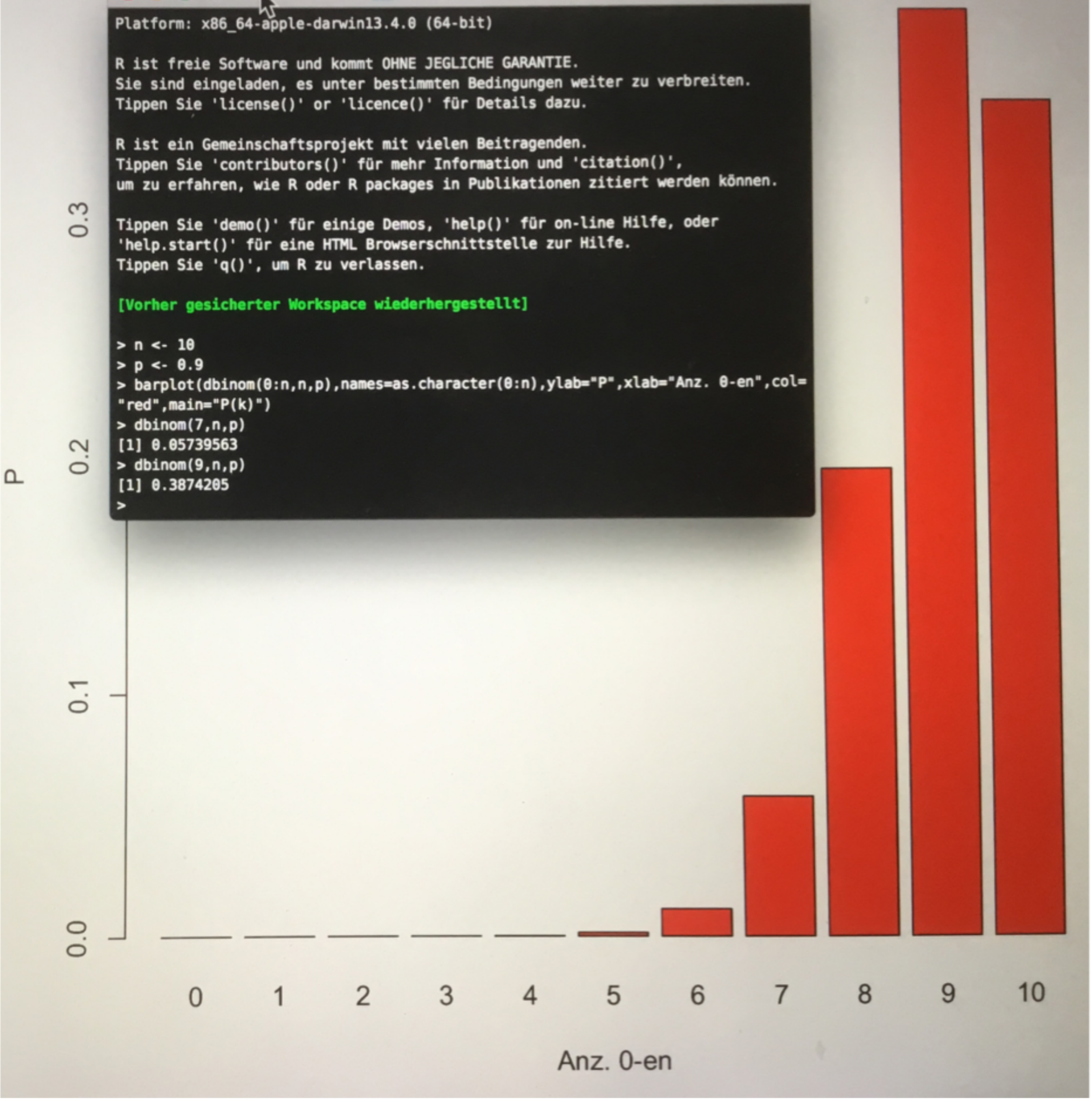
$$p = B(8|10, 0.9) = \binom{10}{8} p^8 (1-p)^{10-8} = \binom{10}{2}(0.9)^8 (0.1)^2 \doteq 0.1937 \,\hat{=}\, 19.4\%$$



$$k = 5: \quad B(5|10, 0.9) = \binom{10}{5}(0.9)^5 (0.1)^5 = 0.0574 \,\hat{=}\, 5{,}74\%$$

R-Studio dbinom(k,n,p)

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$


Platform: x86_64-apple-darwin13.4.0 (64-bit)
R ist freie Software und kommt OHNE JEGLICHE GARANTIE.
Sie sind eingeladen, es unter bestimmten Bedingungen weiter zu verbreiten.
Tippen Sie 'license()' or 'licence()' für Details dazu.
R ist ein Gemeinschaftsprojekt mit vielen Beitragenden.
Tippen Sie 'contributors()' für mehr Information und 'citation()',
um zu erfahren, wie R oder R packages in Publikationen zitiert werden können.
Tippen Sie 'demo()' für einige Demos, 'help()' für on-line Hilfe, oder
'help.start()' für eine HTML Browserschnittstelle zur Hilfe.
Tippen Sie 'q()', um R zu verlassen.
[Vorher gesicherter Workspace wiederhergestellt]
> n <- 10
> p <- 0.9
> barplot(dbinom(0:n,n,p),names=as.character(0:n),ylab="P",xlab="Anz. 0-en",col="red",main="P(k)")
> dbinom(7,n,p)
[1] 0.05739563
> dbinom(9,n,p)
[1] 0.3874205
>
P
0.0
0.1
0.2
0.3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Anz. 0-en

Die Hypergeometrische Verteilung

Binomialverteilung: sie liegt vor, wenn bei Stichproben die einzelnen Objekte nach der Prüfung wieder zurückgelegt werden.

Wie sieht die Situation aus, wenn die Objekte nach der Prüfung nicht wieder zurückgelegt werden?

Eine Schachtel enthalte N Teile (Objekte), von denen M $(0 \leqslant M \leqslant N)$ defekt seien. Nun entnehmen wir, ohne Zurücklegen n Teile. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen n Teilen exakt k Teile defekt sind?

Dann gilt die **Hypergeometrische Verteilung**:

Möglichkeiten aus M defekten Teilen k auszuwählen

Möglichkeiten aus N−M nicht defekten Teilen (n−k) nicht defekte Teile auszuwählen

$$\frac{\#\,\text{günstige Fälle}}{\#\,\text{mögliche Fälle}} = p(k) = \frac{\overbrace{\binom{M}{k}}\,\overbrace{\binom{N-M}{n-k}}}{\underbrace{\binom{N}{n}}}, \quad (k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Mögl. n aus N auszuwählen

Die Hypergeometrische Verteilung (Fort.)

Dabei haben wir folgendes verwendet:

(i) n Teile können aus N Teilen auf $\binom{N}{n}$ Arten ausgewählt werden.

(ii) k defekte Teile können aus M defektenTeilen auf $\binom{M}{k}$ Arten ausgewählt werden.

(iii) $n-k$ nicht defekte Teile können aus $N-M$ nicht defektenTeilen auf $\binom{N-M}{n-k}$ Arten ausgewählt werden.

Die Hypergeometrische Verteilung (Fort.)

Dabei haben wir folgendes verwendet:

(i) n Teile können aus N Teilen auf $\binom{N}{n}$ Arten ausgewählt werden.

(ii) k defekte Teile können aus M defektenTeilen auf $\binom{M}{k}$ Arten ausgewählt werden.

(iii) $n - k$ nicht defekte Teile können aus $N - M$ nicht defektenTeilen auf $\binom{N-M}{n-k}$ Arten ausgewählt werden.

Die Hypergeometrische Verteilung (Fort.)

Dabei haben wir folgendes verwendet:

(i) n Teile können aus N Teilen auf $\binom{N}{n}$ Arten ausgewählt werden.

(ii) k defekte Teile können aus M defektenTeilen auf $\binom{M}{k}$ Arten ausgewählt werden.

(iii) $n - k$ nicht defekte Teile können aus $N - M$ nicht defektenTeilen auf $\binom{N-M}{n-k}$ Arten ausgewählt werden.

Dabei haben wir folgendes verwendet:

(i) n Teile können aus N Teilen auf $\binom{N}{n}$ Arten ausgewählt werden.

(ii) k defekte Teile können aus M defektenTeilen auf $\binom{M}{k}$ Arten ausgewählt werden.

(iii) $n-k$ nicht defekte Teile können aus $N-M$ nicht defektenTeilen auf $\binom{N-M}{n-k}$ Arten ausgewählt werden.

Anzahl günstige Fälle: $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$

Anzahl mögliche Fälle: $\binom{N}{n}$

Example

In einer Schachtel befinden sich 10 Ventile von denen 3 defekt sind. Nun entnimmt man der Schachtel (a) zuerst zwei Ventile mit Zurücklegen (d.h. zuerst das eine, schaut ob es defekt ist, legt es wieder zurück, mischt und entimmt das zweite) und (b) zweitens zwei Ventile ohne Zurücklegen (d.h. man entnimmt zwei Ventile gleichzeitig und schaut, ob sie defekt sind).
Wie gross ist in jedem der beiden Fälle die Wahrscheinlichkeit 0, 1 oder 2 defekte Teile zu finden?

Lösung: a) Binomialverteilung : $n = 2$; $k = 0, 1, 2$; $p = \frac{3}{10} = 0.3$

k	0	1	2
$p(k) = \binom{2}{k}(0.3)^k(0.7)^{3-k}$	0.49	0.42	0.09

n <- 2
p <- 3/10
dbinom(0:n, n, p)

b) Hypergeometrische Verteilung: $p(k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \dfrac{\binom{3}{k}\binom{7}{2-k}}{\binom{10}{2}}$

$(N=10,\ M=3,\ n=2$

k	0	1	2
$p(k) = \dfrac{\binom{3}{k}\binom{7}{2-k}}{\binom{10}{2}}$	$\dfrac{\binom{3}{0}\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{1\cdot 21}{45} = 0.4\overline{6}$	$\dfrac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{3\cdot 7}{45} = 0.4\overline{6}$	$\dfrac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{3\cdot 1}{45} = 0.0\overline{6}$

M ← 3 ; N ← 10 ; n ← 2
dhyper(0:2, M, N-M, n)

Summe muss 1 ergeben!

Die Poissonverteilung

Im Grenzfall $p \to 0$ und $n \to \infty$ kann man $\mu = np$ setzen und näherungsweise die wesentlich einfachere **Poissonverteilung**

$$f(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots,)$$

anstelle der Binomialverteilung verwenden.

Example (Grippeimpfung)

Die Wahrscheinlichkeit bei der Grippeimpfung an Nebenwirkungen zu erkranken ist $p = 0.001$. Nun werden $n = 2000$ Personen geimpft. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

$$\mu = n \cdot p = 2000 \cdot 0.001 = 2$$

Im Grenzfall $p \to 0$ und $n \to \infty$ kann man $\mu = np$ setzen und näherungsweise die wesentlich einfachere **Poissonverteilung**

$$f(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots,)$$

anstelle der Binomialverteilung verwenden.

Example (Grippeimpfung)

Die Wahrscheinlichkeit bei der Grippeimpfung an Nebenwirkungen zu erkranken ist $p = 0.001$. Nun werden $n = 2000$ Personen geimpft. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) genau 3 Personen

$$f(3) = \frac{\mu^3}{3!} e^{-\mu} = \frac{2^3}{6} e^{-2} = \frac{4}{3} \frac{1}{e^2} = 0.18$$

Analog
$f(2) = 0.2707$
$f(3) = 0.1804$

$$f(0) = \frac{\mu^0}{0!} e^{-\mu} = \frac{1}{1} e^{-2} = 0.1353$$

$$f(1) = \frac{\mu^1}{1!} e^{-\mu} = \frac{2}{1} e^{-2} = 0.2707$$

```
n <- 2000
p <- 0.001
μ <- n * p
dpois(0:3, μ)
```

Im Grenzfall $p \to 0$ und $n \to \infty$ kann man $\mu = np$ setzen und näherungsweise die wesentlich einfachere **Poissonverteilung**

$$f(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots,)$$

anstelle der Binomialverteilung verwenden.

Example (Grippeimpfung)

Die Wahrscheinlichkeit bei der Grippeimpfung an Nebenwirkungen zu erkranken ist $p = 0.001$. Nun werden $n = 2000$ Personen geimpft. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) genau 3 Personen

(ii) mehr als 2 Personen

$$\underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}}_{\text{W'keit für mehr als 2}} = 1 - \overbrace{\underbrace{\left(f(0) + f(1) + f(2)\right)}_{\text{höchstens 2}}}^{1 - sum(dpois(0:2, mu))} = 1 - \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right)e^{-2} = 0.323$$

Die Poissonverteilung

Im Grenzfall $p \to 0$ und $n \to \infty$ kann man $\mu = np$ setzen und näherungsweise die wesentlich einfachere **Poissonverteilung**

$$f(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots,)$$

anstelle der Binomialverteilung verwenden.

Example (Grippeimpfung)

Die Wahrscheinlichkeit bei der Grippeimpfung an Nebenwirkungen zu erkranken ist $p = 0.001$. Nun werden $n = 2000$ Personen geimpft. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(i) genau 3 Personen

(ii) mehr als 2 Personen

an diesen Nebenwirkungen erkranken? Verwenden Sie die Poissonverteilung!

Die Poissonverteilung (Fort.)

Example (Grippeimpfung - Fortsetzung)

Lösung: Der einzige Parameter in der Poissonverteilung ist der Mittelwert $\mu = np = 2000 \cdot 0.001 = 2$. Damit erhält man

Falls man **R** (`r-project.org`) verwendet, führen folgende Befehle zum Ziel:

```
n <- 2000
p <- 0.001
mu <- n*p
dpois(3,mu)
1 - sum(dpois(0:2,mu))
# alternativ kann man auch verwenden
1 - ppois(2,mu)
```

Example (Grippeimpfung - Fortsetzung)

Lösung: Der einzige Parameter in der Poissonverteilung ist der Mittelwert $\mu = np = 2000 \cdot 0.001 = 2$. Damit erhält man

(i) genau 3 Personen: $p(k=3) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} \;=\; \frac{4}{3}e^{-2} \;=\; 0.18$

Falls man **R** (`r-project.org`) verwendet, führen folgende Befehle zum Ziel:

```
n <- 2000
p <- 0.001
mu <- n*p
dpois(3,mu)
1 - sum(dpois(0:2,mu))
# alternativ kann man auch verwenden
1 - ppois(2,mu)
```

Die Poissonverteilung (Fort.)

Example (Grippeimpfung - Fortsetzung)

Lösung: Der einzige Parameter in der Poissonverteilung ist der Mittelwert $\mu = np = 2000 \cdot 0.001 = 2$. Damit erhält man

(i) genau 3 Personen: $p(k=3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \;=\; \frac{4}{3} e^{-2} \;=\; 0.18$

(ii) mehr als 2 Personen:
$$p(k>2) = 1 - (p(0) + p(1) + p(2)) \;=\; 1 - \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) e^{-2} \;=\; 1 - (1+2+2)\, e^{-2} \;=\; 0.323$$

Falls man **R** (`r-project.org`) verwendet, führen folgende Befehle zum Ziel:

```
n <- 2000
p <- 0.001
mu <- n*p
dpois(3,mu)
1 - sum(dpois(0:2,mu))
# alternativ kann man auch verwenden
1 - ppois(2,mu)
```

Example (Mittlere Fahrzeugdichte)

Es zeigt sich, dass die mittlere Anzahl Fahrzeuge, die eine bestimmte Brücke zur Stosszeiten befährt einer Poissonverteilung mit $\mu = 20$ (pro Minute) folgt. Wie gross ist die W'keit, dass während einer bestimmten Minute mehr als 4 Fahrzeuge die Brücke befahren?

Lösung:

$$p(\text{"mehr als 4 Fahrzeuge"}) = 1 - p(\text{"höchstens 4 Fz"})$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{4} p(\text{"exakt } k \text{ Fz"})$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{20^k}{k!} e^{-20} = 0.9999831$$

Zusammenfassung der (diskreten) Verteilung

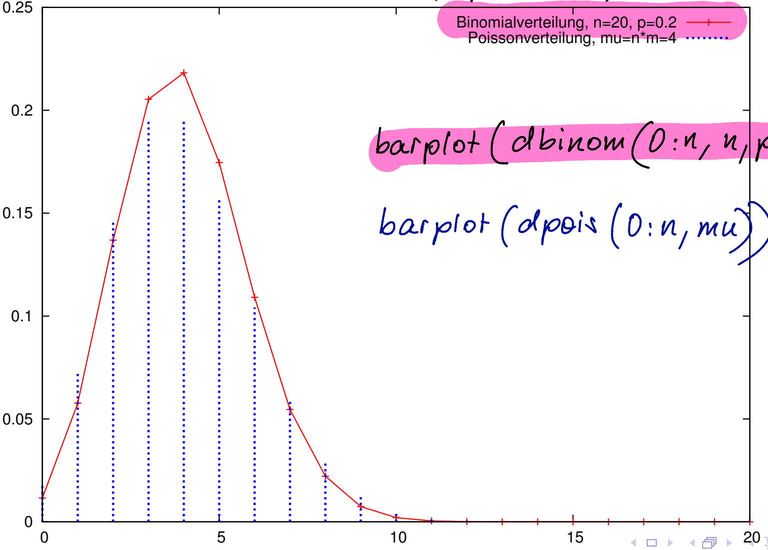
Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $f(x)$ der Hypergeometrischen Verteilung kann im Grenzfall grosser N und M und kleinem n durch die Binomial- verteilung mit $p = M/N$ approximiert werden. Diese kann für kleine p und grosse n durch die Poissonverteilung mit $\mu = np$ approximiert werden.

Verteilung	$f(k)$	Bedingung für Approximation
Hypergeometrisch	$\dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	
Binomial	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	wobei $p = M/N$ $n \leqslant M/10,\ n \leqslant (N-M)/10$
Poisson	$\dfrac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$	wobei $\mu = np$ $p \leqslant 0.1,\ n \geqslant 100$

Zusammenfassung der (diskreten) Verteilung (Fort.)

Vergleich Binomial-/Poissonverteilung für $n = 20$, $p = 0.2$ und $\mu = 4$

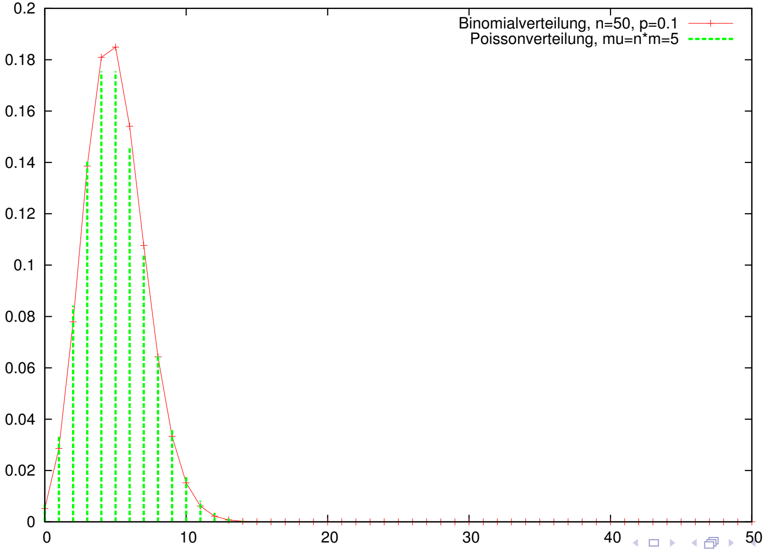
n <- 20 ; p <- 0.2 ; mu <- n*p



barplot(dbinom(0:n, n,p))

barplot(dpois(0:n, mu))

Vergleich Binomial-/Poissonverteilung für $n = 50$, $p = 0.1$ und $\mu = 5$



Übersicht

Definition (Zufallsvariablen)

Eine Zufallsvariable X ist eine Abbildung vom Stichprobenraum S in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, wobei jedem Ereignis $A \subset S$ eine reelle Zahl $\mathrm{X}(A)$ zugeordnet wird.

Example (Fundamentalbeispiel)

Eine Münze werde 3-Mal geworfen. Sie $\mathrm{X}(\mathrm{t})$ die Anzahl **Kopf** des Ergebnisses t bei der Durchführung des Versuchs. Man hat:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{X}(\mathrm{KKK}) &= 3, \\
\mathrm{X}(\mathrm{KKZ}) &= \mathrm{X}(\mathrm{KZK}) = \mathrm{X}(\mathrm{ZKK}) = 2, \\
\mathrm{X}(\mathrm{ZZK}) &= \mathrm{X}(\mathrm{ZKZ}) = \mathrm{X}(\mathrm{KZZ}) = 1, \\
\mathrm{X}(\mathrm{ZZZ}) &= 0.
\end{aligned}
$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen

Definition (Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen)

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung (oder kurz Verteilung) einer Zufallsvariablen X auf einem Stichprobenraum S ist die Menge

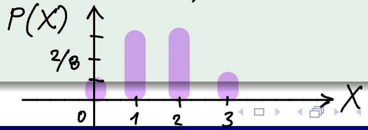
$$\{\,(r, p(X=r))\ |\ \forall r \in X(S)\,\},$$

wobei $p(X=r)$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass die Zufallsvariable X den Wert r annimmt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird üblicherweise dadurch spezifiziert, dass man $p(X=r)$, $\forall r \in X(S)$ spezifiziert.

Example

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen aus dem Fundamentalbeispiel(3maliger Wurf einer fairen Münze) X : Anzahl "Köpfe"

r	0	1	2	3
$p(X=r)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$

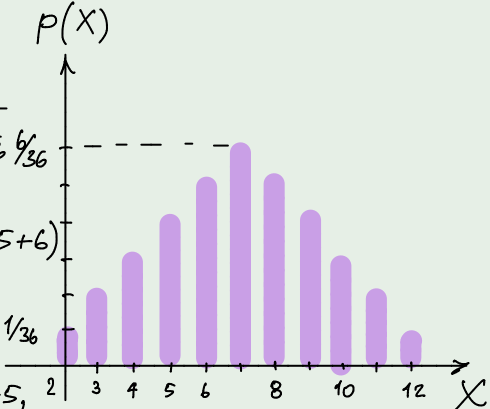


Example (Augensumme beim Wurf zweier fairer Würfel)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable
$X =$ "Augensumme beim Wurf zweier fairer Würfel".

Lösung:

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X=r)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



$$p(X \leq 7) = \sum_{k=2}^{7} p(X=k) = \frac{1}{36}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{36}$$

$$p(3 \leq X \leq 7) = \sum_{k=3}^{7} p(X=k) = \frac{1}{36}(2+3+4+5+6) = 20/36$$

Übersicht

Definition

Der **Erwartungswert** einer Zufallsvariablen $X(s)$ über dem Stichprobenraum S ist gegeben durch:

$$E(X) = \sum_{s \in S} X(s) \cdot p(s) = \sum_{r \in X(S)} r \cdot p(X = r).$$

Example

Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen aus dem Fundamentalbeispiel.

Lösung: W'keitsverteilung

r	0	1	2	3
$p(X=r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8}(0+3+6+3) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Erwartungswert einer Zufallsvariablen (Fort.)

Example

Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable
$X =$ "Augensumme beim Wurf zweier fairer Würfel".

Lösung:

mögliche Werte der Zufallsvariable X

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X=r)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\,\frac{2}{36} + 4\,\frac{3}{36} + 5\,\frac{4}{36} + 6\,\frac{5}{36} + 7\,\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\,\frac{3}{36} + 11\,\frac{2}{36} + 12\,\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}(2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12) = \frac{252}{36} = 7$$

Example

In einem Experiment ziehen wir zwei Zahlen von 0 bis 2 (wobei Wiederholungen erlaubt sind) und bilden die Summe X. (a) Wie lautet die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X und (b) was ist der Erwartungswert von X?

Lösung: Als Summe können wir die Werte 0 bis 4 mit den folgenden W'keiten erhalten:

$$P(0) = P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{9}, \qquad P(1) = P(\{(0,1),\ (1,0)\}) = \frac{2}{9}$$

$$P(2) = P(\{(0,2),\ (1,1),\ (2,0)\}) = \frac{3}{9}$$

$$P(3) = P(\{(1,2),\ (2,1)\}) = \frac{2}{9}, \qquad P(4) = P(\{(2,2)\}) = \frac{1}{9}$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} X & & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & \leftarrow \text{Wert der Zufallsvariable } X \text{ (Summe)} \\ S & = & \{(0,0), & (0,1), & (0,2), & (1,0), & (1,1), & (1,2), & (2,0), & (2,1), & (2,2)\} & \end{array}$$

All diese Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich.

Erwartungswert einer Zufallsvariablen - Beispiel (Fort.)

Example (Fort.)

Verteilungsfunktion

mögliche Werte der Zufallsvariable X

x_i	0	1	2	3	4
$P(x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

Erwartungswert:

$$E(X) = \sum_{i=0}^{4} x_i P(x_i) = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{3}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

Wenn man diesen Versuch sehr oft wiederholt, wird man im Schnitt die Summe 2 erhalten: die erste Zahl ist im Schnitt 1, die zweite ebenfalls und damit ist die Summe im Schnitt gleich 2!

Erwartungswert einer Zufallsvariablen - Beispiel

Example

Sie können bei einem Gewinnspiel in der Finalrunde aus 3 Couverts auswählen. In den ersten beiden stecken 30, im dritten aber 3000 Franken. Wie hoch ist der Erwartungswert des Gewinns? Zufallsvariable soll der Gewinn sein!

Lösung: Wandtafel

Mögliche Werte für die Zufallsvariable X (= Gewinn)

r	30	3000
$P(X=r)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Somit $E(X) = 30 \cdot \frac{2}{3} + 3000 \cdot \frac{1}{3} = 20 + 1000 = 1020$

Example

Eine faire Münze wird so oft geworfen bis ein Kopf, oder fünfmal Zahl geworfen wurde. Berechne die erwartete Anzahl von Würfen (die wir im Mittel erwarten!)

Lösung: Die möglichen Ergebnisse des Experiments sind

X : Anzahl Würfe

$$\begin{array}{ccccccc} X & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ S = \{ & \text{H}, & \text{TH}, & \text{TTH}, & \text{TTTH}, & \text{TTTTH}, & \text{TTTTT} \} \end{array}$$

Die entsprechenden W'keiten (bei unabhängigen Würfen) sind

$$\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^4, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Die uns interessierende Zufallsvariable X ist gleich der Anzahl Würfe, d.h.

$$X(\text{H}) = 1, \qquad X(\text{TH}) = 2, \qquad X(\text{TTH}) = 3,$$
$$X(\text{TTTH}) = 4, \qquad X(\text{TTTTH}) = 5, \qquad X(\text{TTTTT}) = 5$$

Example (Fort.)

Mit den W'keiten

r	1	2	3	4	5
$p(X=r)$	$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/16$

$$P(1) = P(H) = \frac{1}{2}, \quad P(2) = P(TH) = \frac{1}{4}, \quad P(3) = P(TTH) = \frac{1}{8},$$

$$P(4) = P(TTTH) = \frac{1}{16}, \quad P(5) = \underbrace{P(TTTTH)}_{1/32} + \underbrace{P(TTTTT)}_{1/32} = \frac{1}{16}$$

erhält man für den Erwartungswert

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{31}{16} \approx 1.94$$

Es sind also im Schnitt 2 Würfe nötig, bis diese Situation (ein Kopf, oder fünfmal Zahl) eingetroffen ist. Probieren Sie das mit einer kleinen Simulation aus!

Durchschnittliche Komplexität

Die durchschnittliche Komplexität eines Algoritmus berechnen heisst, den Erwartungswert einer geeigneten Zufallsvariablen berechnen. Der Stichpro- benraum besteht aus der Menge aller möglichen Eingaben a_j, $j = 1, \ldots, n$. Die Zufallsvariable X ordne jeder Eingabe a_j die Anzahl der für die Berech- nung verwendeten Operationen zu. Dann ist die durchschnittliche Komple- xität gegeben durch den folgenden Erwartungswert:

W'keit für die Eingabe a_j

Erwartungswert für die (Rechen) Zeit.

$$E(X) = \sum_{j=1}^{n} p(a_j)X(a_j).$$

Zeit die er braucht um die Eingabe a_j zu verarbeiten

Summe über alle möglichen Eingaben

Die durchschnittliche Komplexität von bestimmten Algorithmen kann unter vereinfachenden Annahmen schnell berechnet werden. Im allgemeinen Fall kann die Berechnung sehr komplex werden.

Zwei mögl. Eingaben mit $p(a_1) = 0.1$ und $p(a_2) = 0.9$. Der Rechenaufwand sei $X(a_1) = 3h$, $X(a_2) = 0.5h$. Dann hat

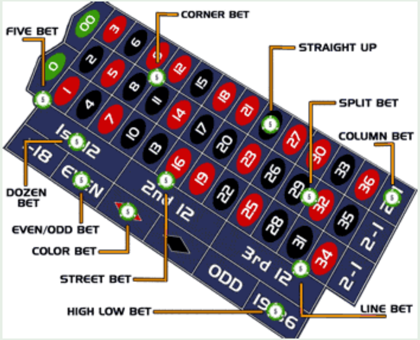
$$E(X) = 0.1 \cdot 3h + 0.9 \cdot 0.5h = 0.3h + 0.45h = 0.75h = 3/4 h$$

Example (Roulette)

Beim Roulette kann die Kugel am Ende bei den Zahlen 1 bis 36, bei 0 oder bei 00 (in Amerika) stehen bleiben.

Es sind verschiedene Wetten möglich.

Wir wetten auf Schwarz und setzen einen Dollar ein: wie gross ist der erwartete Gewinn?



Lösung: Mit einer W'keit von 18/38 gewinnen wir einen Dollar, mit einer W'keit von 20/38 verlieren wir den Dollar, d.h. man hat

Europa:

E. gewinn $= \frac{18}{37}(+1) + \frac{19}{37}(-1) = \frac{18-19}{37} = -\frac{1}{37}$.

$$\text{Erwarteter Gewinn} = \frac{18}{38}(+1) + \frac{20}{38}(-1) = -\frac{1}{19}$$

The five number bet on "0", "00", 1, 2 and 3 has a pay-out of 6 : 1. Compute the expected outcome if we invest 1\$.

$$\text{Expected Outcome} = \frac{5}{38}6\$ + \frac{33}{38}(-1\$) = -\frac{3}{38}\$ \approx -7.89\%$$

zusätzlich zum Einsatz von 1\$ kriege ich 6\$

Europa:

$$EO = \frac{5}{37}6\$ + \frac{32}{37}(-1\$) = \frac{30-32}{37}\$ = -\frac{2}{37}\$ \approx -5.4\%$$

Rechnen mit Erwartungswert

Der Erwartungswert ist linear!

Theorem

Falls X *und* X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ *Zufallsvariablen auf* S *sind und* a, b *beliebige reelle Zahlen, dann gilt:*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &= E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) \\ \text{(ii)} \quad E(aX + b) &= aE(X) + b \end{aligned}$$

Example (Erwartungswert der Augensumme)

Wir betrachten wieder einmal den Wurf zweier fairer Würfel und wollen den Erwartungswert der Augensumme berechnen. Dabei sei X_1 die Augenzahl des 1.Würfels, X_2 die Augenzahl des 2. Würfels: dann ist $\underbrace{X_1 + X_2}_{X \text{ (von früher)}}$ die Augensumme! Berechne $E(X_1 + X_2)$.

r	1	2	3	4	5	6
$p(X_1 = r)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 3.5 + 3.5 = 7$

$E(X_1) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$

Rechnen mit Erwartungswert (Fort.)

Die Linearität des Erwartungswertes erlaubt die Behandlung scheinbar komplizierter Bespiele: wir brauchen lediglich den Erwartungswert der einfachen Problem berechnen aus denen das komplizierte Problem besteht.

Example (Erwartungswert von n Bernoulli-Versuchen)

Ein Bernoulliversuch ist ein einzelner Versuch, welcher mit der W'keit p erfolgreich ist, und mit der W'keit $1 - p$ nicht erfolgreich ist. Was ist der Erwartungswert von n Bernoulliversuchen mit der W'keit p?

Lösung:

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{Erfolg} \\ 0, & \text{NICHT-Erfolg} \end{cases}$$

p : Erfolgsw'keit bei einem Versuch

$1-p$: NICHT-Erfolgsw'keit

$$E(X_1) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$$

Erwartungswert der Binomialverteilung

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n \cdot p$$

(n malige Durchführung mit Erfolgsw'keit p)

n malige Durchführung

Definition (Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Man nennt die beiden Zufallsvariablen X und Y auf dem Stichprobenraum S unabhängig, falls

$$\forall r_1 \in \mathbb{R} \forall r_2 \in \mathbb{R} \Big(p\big(X(s) = r_1 \wedge Y(s) = r_2\big) = p\big(X(s) = r_1\big) \cdot p\big(Y(s) = r_2\big) \Big).$$

In Worten: Die Wahrscheinlichkeit, dass $X(s) = r_1$ und $Y(s) = r_2$ ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten, dass $X(s) = r_1$ und $Y(s) = r_2$ und zwar für alle reellen Zahlen r_1 und r_2.

Example (Würfeln mit zwei Würfeln)

Zeige, dass die oben verwendeten Zufallsvariablen X_1 und X_2 unabhängig sind (X_k: Augenzahl des k. Würfels).

Lösung: Mit Hilfe der Verbundw'keit

Randw'keiten

$r_1 \backslash r_2$	Mögliche Werte von X_2: 1	2	3	4	5	6	$p(X_1=r_1)$
Mögliche Werte von X_1: 1	$1/36$	$1/36$	. . .				$1/6$
2	$1/36$	. . .					$1/6 = \sum_{j=1}^{6} p(X_1=2 \wedge X_2=j)$
3							$1/6$
4					$1/36$		$1/6 = p(X_1=4)$
5							$1/6$
6							$1/6$
$p(X_2=r_2)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	

Verbundw'keit

$1/36 = p(X_1=4 \wedge X_2=5)$

$p(X_2=5) = 1/6$

Randw'keit

$p(X_2=3) = \sum_{k=1}^{6} p(X_1=k \wedge X_2=3)$

Varianz einer Zufallsvariablen

Definition

Die **Varianz** der Zufallsvariablen X über dem Stichprobenraum S ist definiert durch

$$V(X) = \sum_{s \in S} (X(s) - E(X))^2 \cdot p(s) \; = \sum_{r \in X(S)} (r - E(X))^2 \cdot p(X = r)$$

Die **Standardabweichung** von X ist definiert durch $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Theorem

Ist X eine Zufallsvariable. Dann gilt: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Example

Bestimmen Sie die Varianz (direkt und mit Hilfe des Theorems) der Zufallsvariablen aus dem Fundamentalbeispiel.

r	0	1	2	3
$p(X=r)$	$1/8$	$3/8$	$3/8$	$1/8$
$r-E(X)$	-1.5	-0.5	0.5	1.5
$(r-E(X))^2$	2.25	0.25	0.25	2.25

$E(X) = 1.5$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{\text{alle } r} (r - E(X))^2 \, p(X=r) = 2.25 \cdot \frac{1}{8} + 0.25 \frac{3}{8} + 0.25 \cdot \frac{3}{8} + 2.25 \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8}(2.25 + 0.75 + 0.75 + 2.25)$$

$$= \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sigma(X) = \sqrt{0.75} = 0.87$$

Mass für die Streuung ("Varianz").

Varianz einer Zufallsvariablen (Fort.)

Example

Bestimmen Sie die Varianz (direkt und mit Hilfe des Theorems) der Zufallsvariablen $X =$ "Augensumme beim Wurf zweier fairer Würfel".

$E(X) = 7$ (von früher)

Lösung:

r	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X=r)$	$1/36$	$2/36$	.	.	.	$6/36$					$1/36$
$r-E(X)$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$(r-E(X))^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

$$Var(X) = \sum_{\text{alle } r} (r-E(X))^2 p(X=r) = 25\cdot\frac{1}{36} + 16\cdot\frac{2}{36} + \dots + 25\cdot\frac{1}{36}$$

$$= \frac{1}{36}\left(2\cdot 25 + 4\cdot 16 + \dots + 2\,\frac{5}{36}\right) = \dots$$

Example

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilung $B_{n,p}(k)$.

Lösung:

$$E(X) = n \cdot p$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

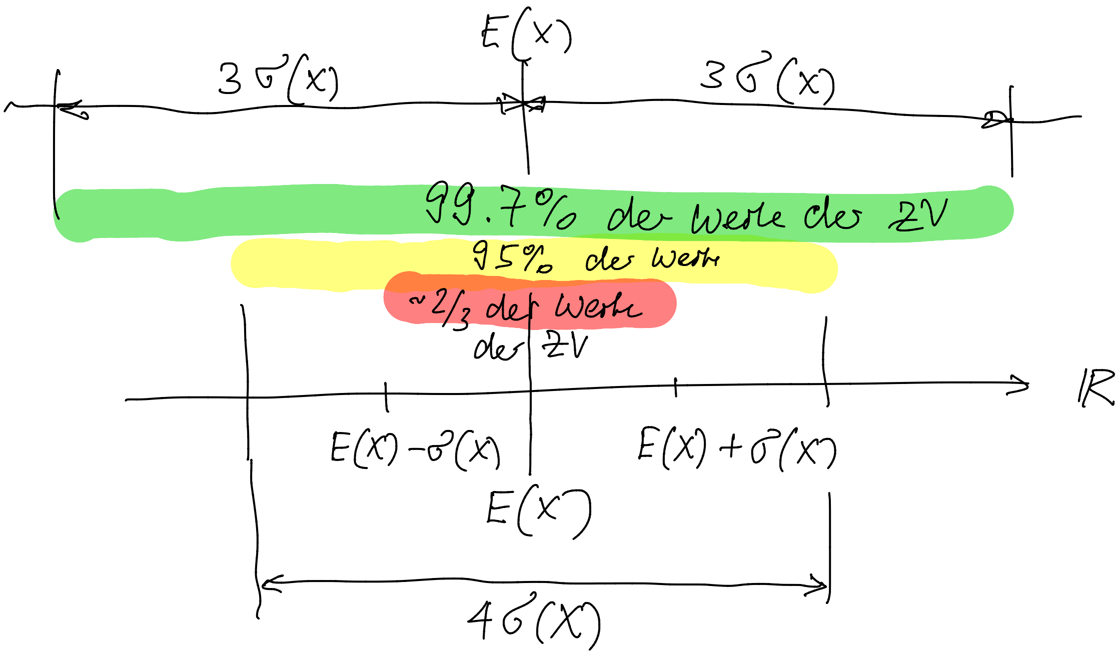
} längere Rechnung!

dito für Poissonvert.:

$$E(X) = \mu$$

$$Var(X) = \mu$$

→ siehe Formelsammlung



$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Theorem

Sind X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen über dem Stichprobenraum S dann gilt $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$. Sind weiter X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ paarweise unabhängige Zufallsvariablen über S, dann gilt

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)$$

Beweis der ersten Aussage:

Im Allg. gilt:

$$V(X_1 + X_2) \neq V(X_1) + V(X_2)$$

Example

Bestimmen Sie die Varianz und Standardabweichung der Zufallsvariable $X = \text{“Augensumme”}$ beim Wurf zweier fairer Würfel, d.h. wenn (i, j) geworfen wurde, dann ist $X((i, j)) = i + j$. Verwende $X = X_1 + X_2$ wobei X_k die Augenzahl des k. Würfels ist.

Lösung:

X_1 u. X_2 sind unabh. ZV

Hier gilt $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$ (siehe die Tabelle)

Rest Hausaufgabe!

Ungleichung von Chebyshev — optional

Theorem (Ungleichung von Chebyshev)

Ist X eine Zufallsvariablen über dem Stichprobenraum S mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion p, dann gilt für jede positive reelle Zahl r:

$$p\left(|X(s) - E(X)| \geqslant r\right) \leqslant \frac{V(X)}{r^2}.$$

Beweis:

Ungleichung von Chebyshev (Fort.)

Example

Die Zufallsvariable X gebe an, wie oft Kopf geworfen wird, wenn eine faire Münze n Mal geworfen wird. Mit der Ungleichung von Chebyshev kann man zeigen, dass die Anzahl Kopf nur mit einer W'keit von nicht mehr als $1/4$ ausserhalb den Bereich $n/2-\sqrt{n}, n/2+\sqrt{n}$ fällt.

Beweis:

Zusammenfassung

Wir haben folgende Begriffe kennen gelernt und können sie in Problemen aus dem Informatikalltag anwenden:

- Die häufigsten Verteilungsfunktionen.
- Zufallsvariablen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
- Erwartungswerte und Varianzen von Verteilungen.
- Rechnen mit Mittelwerten und Varianzen.