

# Basic Structures: Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studiengang Informatik  
Hochschule Luzern, Informatik

I.BA\_DMATH

# Outline

- 1 Mengen
- 2 Funktionen
- 3 Folgen
- 4 Reihen

Thema: Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

# Thema, Resultate, Ziele, Vorgehen

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

# Thema, Resultate, Ziele, Vorgehen

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

# Thema, Resultate, Ziele, Vorgehen

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

**Ziele:**

- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.

# Thema, Resultate, Ziele, Vorgehen

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

- Ziele:**
- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.
  - Sie können endliche Mengen mit dem Computer darstellen und die gängigen Rechenoperationen durchführen.

# Thema, Resultate, Ziele, Vorgehen

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

- Ziele:**
- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.
  - Sie können endliche Mengen mit dem Computer darstellen und die gängigen Rechenoperationen durchführen.
  - Sie verstehen Funktionen als Abbildungen von einer Menge in eine andere Menge und kennen deren Eigenschaften und können überprüfen, welche Eigenschaften eine Funktion hat.



# Thema, Resultate, Ziele, Vorgehen

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

- Ziele:**
- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.
  - Sie können endliche Mengen mit dem Computer darstellen und die gängigen Rechenoperationen durchführen.
  - Sie verstehen Funktionen als Abbildungen von einer Menge in eine andere Menge und kennen deren Eigenschaften und können überprüfen, welche Eigenschaften eine Funktion hat.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen.

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

- Ziele:**
- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.
  - Sie können endliche Mengen mit dem Computer darstellen und die gängigen Rechenoperationen durchführen.
  - Sie verstehen Funktionen als Abbildungen von einer Menge in eine andere Menge und kennen deren Eigenschaften und können überprüfen, welche Eigenschaften eine Funktion hat.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen und die inverse Funktion einer bijektiven Funktion darstellen und berechnen.

# Thema, Resultate, Ziele, Vorgehen

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

- Ziele:**
- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.
  - Sie können endliche Mengen mit dem Computer darstellen und die gängigen Rechenoperationen durchführen.
  - Sie verstehen Funktionen als Abbildungen von einer Menge in eine andere Menge und kennen deren Eigenschaften und können überprüfen, welche Eigenschaften eine Funktion hat.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen und die inverse Funktion einer bijektiven Funktion darstellen und berechnen.
  - Sie kennen einige typische Funktionen, die im Zusammenhang mit diskreter Mathematik auftreten.

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

- Ziele:**
- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.
  - Sie können endliche Mengen mit dem Computer darstellen und die gängigen Rechenoperationen durchführen.
  - Sie verstehen Funktionen als Abbildungen von einer Menge in eine andere Menge und kennen deren Eigenschaften und können überprüfen, welche Eigenschaften eine Funktion hat.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen und die inverse Funktion einer bijektiven Funktion darstellen und berechnen.
  - Sie kennen einige typische Funktionen, die im Zusammenhang mit diskreter Mathematik auftreten.
  - Sie können mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen umgehen.

**Thema:** Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

**Resultate:** Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

- Ziele:**
- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.
  - Sie können endliche Mengen mit dem Computer darstellen und die gängigen Rechenoperationen durchführen.
  - Sie verstehen Funktionen als Abbildungen von einer Menge in eine andere Menge und kennen deren Eigenschaften und können überprüfen, welche Eigenschaften eine Funktion hat.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen.
  - Sie können Funktionen zusammen setzen und die inverse Funktion einer bijektiven Funktion darstellen und berechnen.
  - Sie kennen einige typische Funktionen, die im Zusammenhang mit diskreter Mathematik auftreten.
  - Sie können mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen umgehen.

**Vorgehen:** Die einzelnen Themen werden der Reihe nach behandelt und gleich verwendet.

1 Mengen

2 Funktionen

3 Folgen

4 Reihen

## Definition

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Zusammenfassung wohldefinierter, unterscheidbarer Objekte, genannt *Elemente*, zu einem Ganzen.

Für irgend ein Objekt  $x$  gilt dann bezüglich der Menge  $A$  entweder  $x \in A$  oder dann  $x \notin A$ .

## Definition

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Zusammenfassung wohldefinierter, unterscheidbarer Objekte, genannt *Elemente*, zu einem Ganzen.

Für irgend ein Objekt  $x$  gilt dann bezüglich der Menge  $A$  entweder  $x \in A$  oder dann  $x \notin A$ .

## Example

Endliche Mengen lassen sich durch Aufschreiben der in ihnen enthaltenen Elemente beschreiben; z.B. die Menge aller natürlichen Zahlen kleiner als 101:

$$A = \{1, 2, \dots, 99, 100\}$$

$$99 \in A \quad \text{aber} \quad 101 \notin A.$$

eine andere Schreibweise ist

für die gilt ( : )

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 101\}$$



## Definition

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind gleich ( $A = B$ ), falls sie die selben Elemente enthalten.

## Definition

Zwei Mengen  $A$  und  $B$  sind gleich ( $A = B$ ), falls sie die selben Elemente enthalten.

## Example

Einige bekannte Mengen sind:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$$

Die Gleichung

$$x^2 = 2$$

hat in  $\mathbb{Q}$  keine Lösung

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$  : die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$  : die Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$  : die Menge der komplexen Zahlen

$x^2 = -1$  ist in  $\mathbb{R}$   
nicht lösbar.

Es braucht  $\mathbb{R}$ , denn die Gleichung  $x^2 = 2$  hat in  $\mathbb{Q}$  keine Lösung. Analog braucht es  $\mathbb{C}$ , denn die Gleichung  $x^2 = -1$  hat in  $\mathbb{R}$  keine Lösung.

**Teilmenge:**  $A$  ist **Teilmenge** von  $B$ , geschrieben  $A \subset B$ , genau dann, wenn  
 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ : Es gilt  $A \subset A$ !

# Spezielle Mengen

**Teilmenge:**  $A$  ist **Teilmenge** von  $B$ , geschrieben  $A \subset B$ , genau dann, wenn

$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ : Es gilt  $A \subset A$ !

**Leere Menge**  $\emptyset$ : Für jede Menge  $A$  gilt:  $\emptyset \subset A$ .

# Spezielle Mengen

**Teilmenge:**  $A$  ist **Teilmenge** von  $B$ , geschrieben  $A \subset B$ , genau dann, wenn  
 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ : Es gilt  $A \subset A$ !

**Leere Menge**  $\emptyset$ : Für jede Menge  $A$  gilt:  $\emptyset \subset A$ .

**Kardinalität:** Ist  $S$  eine endliche Menge, dann bezeichnet  $|S|$  die **Kardinalität** (Anzahl Elemente) von  $S$ . Eine nicht endliche Menge heisst unendliche Menge.

# Spezielle Mengen

**Teilmenge:**  $A$  ist **Teilmenge** von  $B$ , geschrieben  $A \subset B$ , genau dann, wenn  
 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ : Es gilt  $A \subset A$ !

**Leere Menge**  $\emptyset$ : Für jede Menge  $A$  gilt:  $\emptyset \subset A$ .

**Kardinalität:** Ist  $S$  eine endliche Menge, dann bezeichnet  $|S|$  die **Kardinalität** (Anzahl Elemente) von  $S$ . Eine nicht endliche Menge heisst unendliche Menge.

**Potenzmenge:** Die **Potenzmenge**  $P(S)$  oder  $2^S$  der Menge  $S$  besteht aus der Menge aller Teilmengen  $A \subset S$ .

# Spezielle Mengen

**Teilmenge:** A ist **Teilmenge** von B, geschrieben  $A \subset B$ , genau dann, wenn  
 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ : Es gilt  $A \subset A$ !



**Leere Menge**  $\emptyset$ : Für jede Menge A gilt:  $\emptyset \subset A$ .  $\emptyset = \{ \}$

**Kardinalität:** Ist S eine endliche Menge, dann bezeichnet  $|S|$  die **Kardinalität** (Anzahl Elemente) von S. Eine nicht endliche Menge heisst unendliche Menge.  $|\emptyset| = 0$

**Potenzmenge:** Die **Potenzmenge**  $P(S)$  oder  $2^S$  der Menge S besteht aus der Menge aller Teilmengen  $A \subset S$ .

## Example

Bestimmen Sie die Potenzmenge von  $S = \{1, 2\}$ .

**Lösung:** Die Potenzmenge von S ist eine Menge, bestehend aus allen Teilmengen von S inkl. die leere Menge und die Menge selber.

$$P(S) = 2^S = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\} \}.$$

*Handwritten notes:*  
-  $\{ \}$  die Elemente von  $2^S$  sind die Teilmengen von S.  
-  $\uparrow$  Potenzmenge von S

Es gilt allgemein  $|2^S| = 2^{|S|}$ .

**Kreuzprodukt:** (oder **kartesisches Produkt**) zweier Mengen  $A$  und  $B$ , bezeichnet mit  $A \times B$  ist die Menge aller geordneten Paare  $(a, b)$ , wobei  $a \in A$  und  $b \in B$ , d.h.  
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$



**Kreuzprodukt:** (oder **kartesisches Produkt**) zweier Mengen  $A$  und  $B$ , bezeichnet mit  $A \times B$  ist die Menge aller geordneten Paare  $(a, b)$ , wobei  $a \in A$  und  $b \in B$ , d.h.  
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

## Example

Berechnen Sie  $A \times B$  und  $B \times A$ , falls  $A = \{1, 2, 3\}$  und  $B = \{a, b\}$ .

**Lösung:** Das Kreuzprodukt  $A \times B$  enthält alle möglichen Tupel der Form  $(x, y)$  wobei  $x \in A$  und  $y \in B$ . Man hat also

$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$$

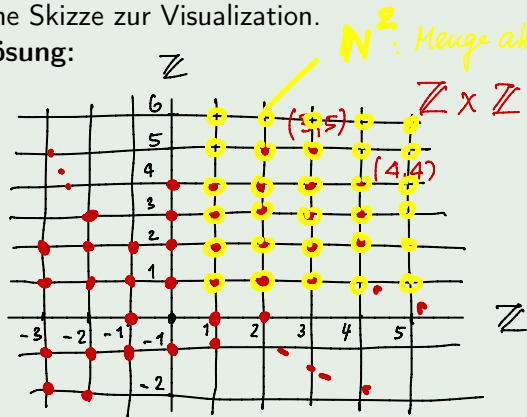
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$$

Bei Tupeln ist die Reihenfolge wesentlich, d.h.  $(1, a) \neq (a, 1)$ . Wie man sieht ist also  $A \times B \neq B \times A$ , d.h. das Kommutativgesetz gilt beim Kreuzprodukt nicht.

## Example

Das Kreuzprodukt kann verwendet werden, um Gitter einfach zu beschreiben. Beispielsweise ist  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  die Menge der Gitterpunkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten. Erstellen Sie eine Skizze zur Visualization.

Lösung:



$\mathbb{N}^2$ : Menge aller Gitterpunkte im ganzzahligen Koord. im 1. Quadranten.  
 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}^2$  rauten.

Was ist  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ? Die xy-Ebene!

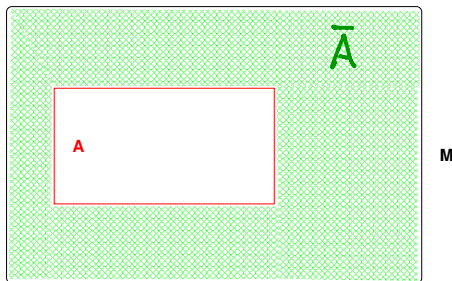
$\mathbb{R}^3$ ? Der 3D-Raum!

# Mengenoperationen: Komplement

Ist  $A$  eine Teilmenge der Menge  $M$ , so bezeichnet

$$A^c = \bar{A} = \{ m \in M : m \notin A \}$$

das Komplement von  $A$  in  $M$ .

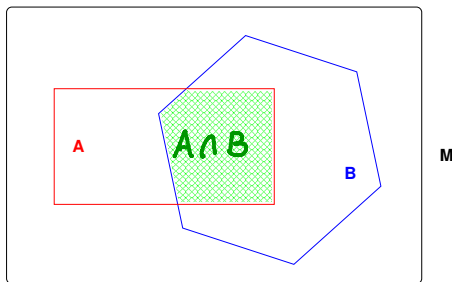


# Mengenoperationen: Durchschnitt

Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$$A \cap B = \{ m \in M \mid m \in A \underbrace{\wedge}_{\text{und}} m \in B \}$$

den Durchschnitt von A und B.



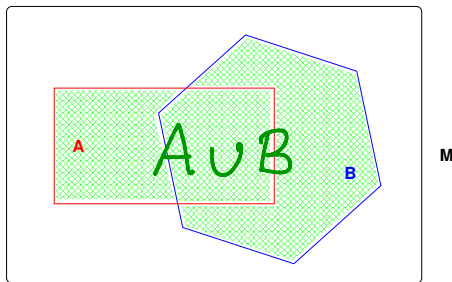
# Mengenoperationen: Vereinigung

Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$$A \cup B = \{ m \in M \mid m \in A \underbrace{\vee}_{\text{oder}} m \in B \}$$

die Vereinigung von A und B.

*das logische ODER*



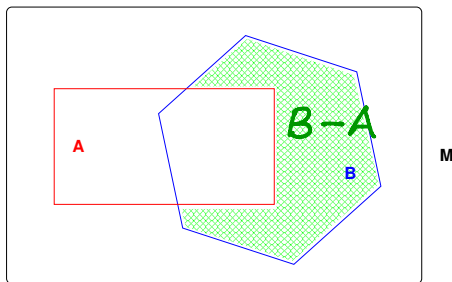
# Mengenoperationen: Differenz

Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$$B - A = \{ m \in M \mid m \in B \underbrace{\wedge}_{\text{und}} m \notin A \}$$

$$B \setminus A$$

die Differenz.



## Theorem

Für das Rechnen mit Mengen  $A, B, C \subseteq M$  gelten die folgenden Regeln:

$$A \cup B = B \cup A$$

*Kommutativgesetz*

$$A \cap B = B \cap A$$

*Kommutativgesetz*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

*Assoziativgesetz*

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

*Assoziativgesetz*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

*Distributivgesetz*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

*Distributivgesetz*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

*De Morgan's Gesetz*

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

*De Morgan's Gesetz.*

1 Mengen

2 Funktionen

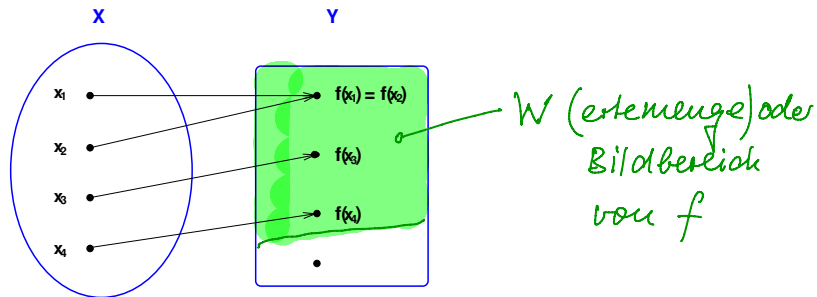
3 Folgen

4 Reihen



## Definition

Wird jedem Element  $x$  einer Menge  $X$  (Definitionsbereich) **genau** ein Element  $y$  einer Menge  $Y$  zugeordnet, so heisst die Zuordnung Funktion. (oder *Abbildung*)



Die Menge

$$W = \{y \in Y \mid f(x) = y \text{ für ein } x \in X\}$$

heißt Wertebereich oder Bildbereich.

Schreibweise:

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto f(x) \quad \text{oder} \quad f : x \longmapsto f(x)$$

**Wichtig!**

Wir wollen uns angewöhnen, zwischen der Funktion  $f$  und  $f(x)$  stets zu unterscheiden.

# Funktionen Beispiel 1

$X = \{1, 2, 3, 4\}$  und  $Y = \{1, 2, 3\}$

$f: X \longrightarrow Y$

$1 \mapsto 1 = f(1)$

$2 \mapsto 1 = f(2)$

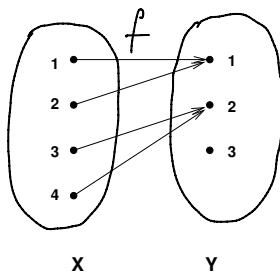
$3 \mapsto 2 = f(3)$

$4 \mapsto 2 = f(4)$

} Wertetabelle

$x$	1	2	3	4
$f(x)$	1	1	2	2

Bildmenge von  $f$ :  $f(X) = \{1, 2\}$



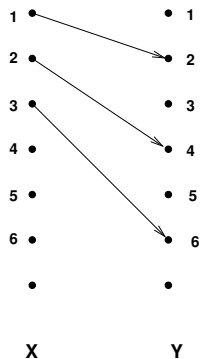
# Funktionen Beispiel 2

$X = \mathbb{N}$  und  $Y = \mathbb{R}$

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$i \longmapsto 2 \cdot i$$

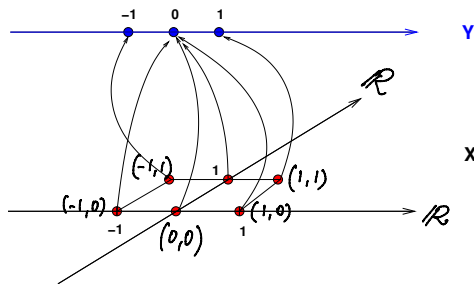
Bildmenge von  $f$ :  $f(X) = 2 \cdot \mathbb{N}$  (Menge aller geraden Zahlen)



# Funktionen Beispiel 3

$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und  $Y = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f: \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}^{\mathbb{R}^2} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 \cdot x_2 = f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

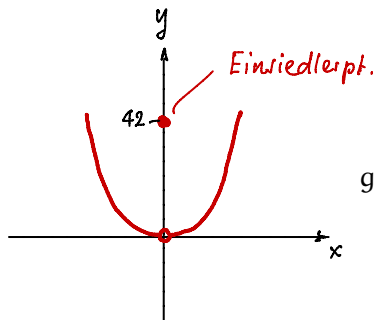


$$f(x, y) = x \cdot y$$

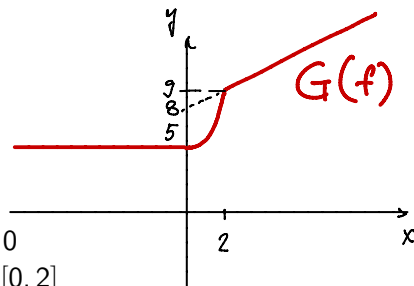
# Stückweise Definition von (reellen) Funktionen

Funktionen können auch stückweise definiert werden.

Beispiele:



$$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 5 & \text{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 8 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 42 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

## Definition

Eine Funktion heisst injektiv, wenn verschiedene  $x_1, x_2 \in X$  stets auf verschiedene Werte im Bildbereich abgebildet werden. Kurz:

## Definition

Eine Funktion heisst injektiv, wenn verschiedene  $x_1, x_2 \in X$  stets auf verschiedene Werte im Bildbereich abgebildet werden. Kurz:

- Für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ; oder



## Definition

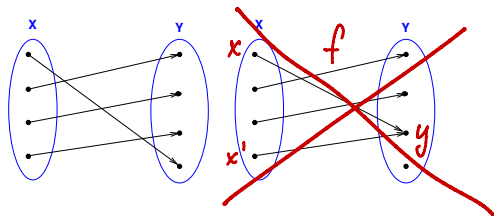
Eine Funktion heisst injektiv, wenn verschiedene  $x_1, x_2 \in X$  stets auf verschiedene Werte im Bildbereich abgebildet werden. Kurz:

- Für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ; oder
- für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$  gilt  $x_1 = x_2$ .

## Definition

Eine Funktion heisst injektiv, wenn verschiedene  $x_1, x_2 \in X$  stets auf verschiedene Werte im Bildbereich abgebildet werden. Kurz:

- Für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ; oder
- für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$  gilt  $x_1 = x_2$ .



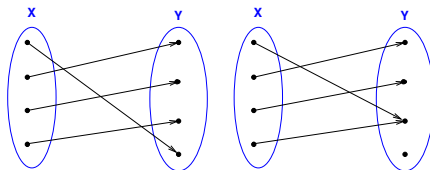
nicht injektiv, denn  $y$  hat zwei Urbilder nämlich  $x$  und  $x'$ .

$$y = f(x) = f(x')$$

## Definition

Eine Funktion heisst injektiv, wenn verschiedene  $x_1, x_2 \in X$  stets auf verschiedene Werte im Bildbereich abgebildet werden. Kurz:

- Für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $x_1 \neq x_2$  gilt  $f(x_1) \neq f(x_2)$ ; oder
- für alle  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = f(x_2)$  gilt  $x_1 = x_2$ .



Injektiv: auf jedes Element in  $Y$  zeigt höchstens ein Pfeil!!

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

ist nicht injektiv, denn z.B. gilt  $-2 \neq 2$  aber  $f(-2) = 4 = f(2)$ .

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

ist nicht injektiv, denn z.B. gilt  $-2 \neq 2$  aber  $f(-2) = 4 = f(2)$ .

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 2x + 3$$

ist injektiv, denn für alle  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  gilt

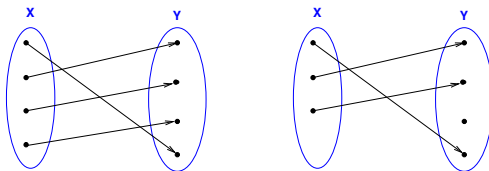
$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2) \\ \Leftrightarrow 2x_1 + 3 &= 2x_2 + 3 \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

## Definition

Eine Funktion heisst surjektiv, falls für jedes Element  $y \in Y$  (mindestens) ein Element  $x \in X$  existiert, so dass  $f(x) = y$  gilt.

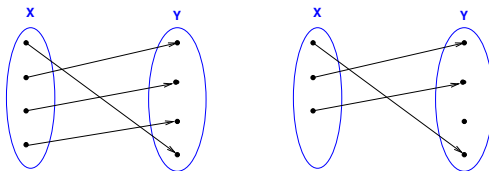
## Definition

Eine Funktion heisst surjektiv, falls für jedes Element  $y \in Y$  (mindestens) ein Element  $x \in X$  existiert, so dass  $f(x) = y$  gilt.



## Definition

Eine Funktion heisst surjektiv, falls für jedes Element  $y \in Y$  (mindestens) ein Element  $x \in X$  existiert, so dass  $f(x) = y$  gilt.



Surjektiv: auf jedes Element in Y zeigt mindestens ein Pfeil!!

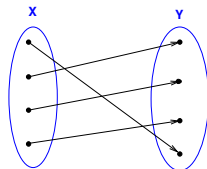


## Definition

Eine Funktion heisst bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

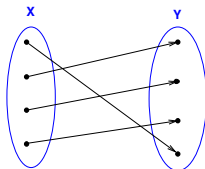
## Definition

Eine Funktion heisst bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.



## Definition

Eine Funktion heisst bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.



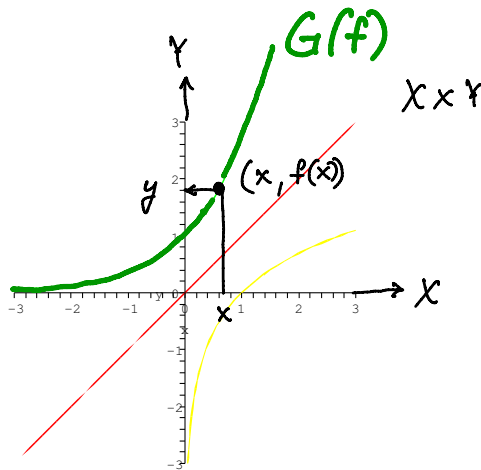
Bijektiv: auf jedes Element in  $Y$  zeigt genau ein Pfeil!!

# Der Graph einer Funktion

Betrachten wir eine Funktionen  $f : X \longrightarrow Y$ , so wird die Menge

$$G(f) = \{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subset X \times Y$$

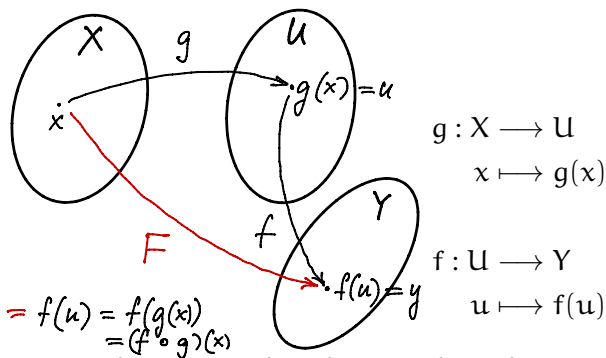
als der Graph von  $f$  bezeichnet.



Exponentialfunktion:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \\ x \mapsto y = e^x$$

# Zusammengesetzte Funktionen



$$y = e^{x^2} = \exp(x^2)$$

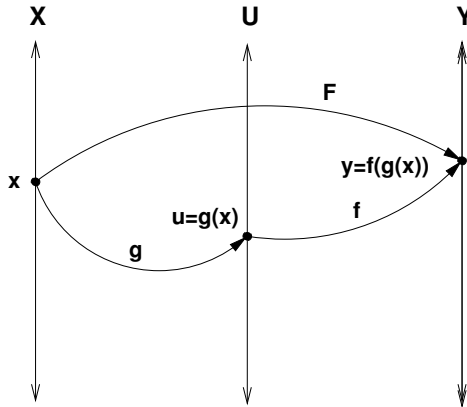
The diagram shows a set  $X$  with an element  $x$ . A green arrow maps  $x$  to  $x^2 = u$ . Another green arrow maps  $u$  to  $e^u = e^{x^2}$ . This illustrates the composition of the function  $g(x) = x^2$  and the function  $f(u) = e^u$ .

seien zwei Funktionen, so dass der Wertebereich von  $g$  im Definitionsbereich von  $f$  enthalten ist. Dann kann man die so genannte zusammengesetzte Funktion oder Komposition von  $f$  und  $g$  bilden:

$$F = f \circ g : X \rightarrow Y$$
$$x \mapsto f(g(x))$$

# Zusammengesetzte Funktionen (Fort.)

Natürlich ist  $F$  auf dem Definitionsbereich von  $g$  definiert



# Die Umkehrfunktion

Wir betrachten eine bijektive Funktion  $f$ , d.h. insbesondere, dass zu jedem  $y$  des Wertebereichs von  $f$  genau ein  $x$  des Definitionsbereiches von  $f$  mit der Eigenschaft  $y = f(x)$  existiert.

# Die Umkehrfunktion

Wir betrachten eine bijektive Funktion  $f$ , d.h. insbesondere, dass zu jedem  $y$  des Wertebereichs von  $f$  genau ein  $x$  des Definitionsbereiches von  $f$  mit der Eigenschaft  $y = f(x)$  existiert.

Somit können wir die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  definieren, die jedem Element  $y$  des Wertebereichs von  $f$  dieses eindeutig bestimmte Element  $x$  zuordnet.



# Die Umkehrfunktion

Wir betrachten eine bijektive Funktion  $f$ , d.h. insbesondere, dass zu jedem  $y$  des Wertebereichs von  $f$  genau ein  $x$  des Definitionsbereiches von  $f$  mit der Eigenschaft  $y = f(x)$  existiert.

Somit können wir die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  definieren, die jedem Element  $y$  des Wertebereichs von  $f$  dieses eindeutig bestimmte Element  $x$  zuordnet.

Bezeichnung:  $x = f^{-1}(y)$  bzw. nach Vertauschung der Variablen  $y = f^{-1}(x)$ .

# Die Umkehrfunktion

Wir betrachten eine bijektive Funktion  $f$ , d.h. insbesondere, dass zu jedem  $y$  des Wertebereichs von  $f$  genau ein  $x$  des Definitionsbereiches von  $f$  mit der Eigenschaft  $y = f(x)$  existiert.

Somit können wir die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  von  $f$  definieren, die jedem Element  $y$  des Wertebereichs von  $f$  dieses eindeutig bestimmte Element  $x$  zuordnet.

Bezeichnung:  $x = f^{-1}(y)$  bzw. nach Vertauschung der Variablen  $y = f^{-1}(x)$ .

## Example

Gegeben die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{-2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3x + 4}{x + 2} \end{aligned}$$

oder kurz

$$y = f(x) = \frac{3x + 4}{x + 2}$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von  $f$ , sowie deren Definitions- und Wertebereich.

## Example (Fortsetzung)

Konstruktion von  $f^{-1}$  (Auflösen nach  $x$ )

$$y = \frac{3x + 4}{x + 2}$$

$$\Leftrightarrow xy + 2y = 3x + 4$$

$$\Leftrightarrow xy - 3x = 4 - 2y$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 - 2y}{y - 3}, \quad \text{falls } y \neq 3$$

Also

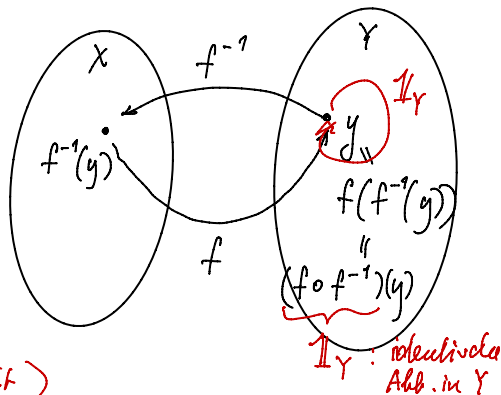
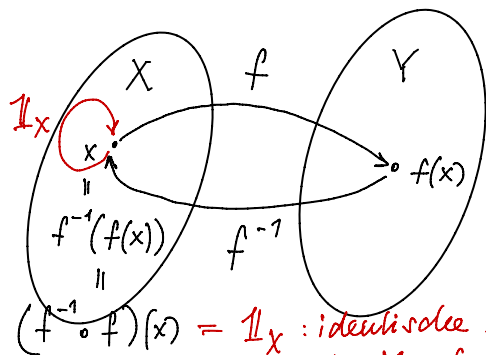
$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{4 - 2y}{y - 3} \end{aligned}$$

# Die Umkehrfunktion (Fortsetzung)

Wendet man auf ein  $x$  zunächst eine umkehrbare Funktion  $f$  an und danach die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  (auf  $f(x)$ ), so erhält man wieder  $x$ .

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$



# Die Umkehrfunktion (Fortsetzung)

Wendet man auf ein  $x$  zunächst eine umkehrbare Funktion  $f$  an und danach die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  (auf  $f(x)$ ), so erhält man wieder  $x$ .

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$$

## Example (Fortsetzung)

$$y = f(x) = \frac{3x+4}{x+2} \quad x = f^{-1}(y) = \frac{4-2y}{y-3}$$

Es gilt:

$$\text{zeige auch } f(f^{-1}(y)) = y !$$

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{4-2f(x)}{f(x)-3} = \frac{4-2 \frac{3x+4}{x+2}}{\frac{3x+4}{x+2}-3} = x.$$

# The function: Composition

**Example:** Define the function

$$f : \{A, B, C, \dots, Z\} \longrightarrow \{0, 1, 2, \dots, 25\}$$

by  $A \mapsto 0, B \mapsto 1, C \mapsto 2, \dots, Z \mapsto 25$

Define  $g$  on the domain/co-domain

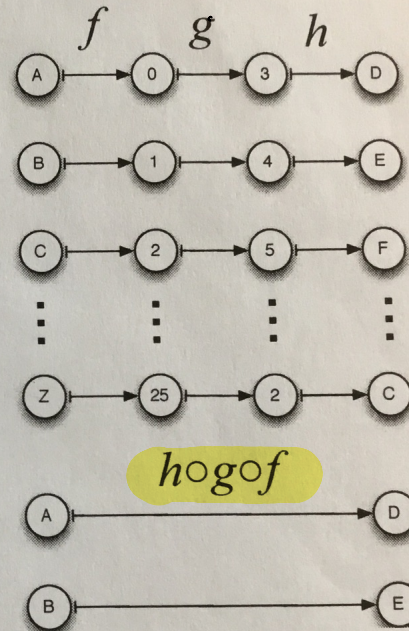
$\{0, 1, 2, \dots, 25\}$  by  $g(x) = (x + 3) \bmod 26$

Define  $h$  with domain  $\{0, 1, 2, \dots, 25\}$  and

co-domain  $\{A, \dots, Z\}$  such that  $0 \mapsto A,$

$1 \mapsto B$ , etc.

Then  $h \circ (g \circ f)$  is the Caesar cypher.



$f$  : Kodierung

$g$  : eigentliche Verschiebung

$$g(5) = (5 + 3) \bmod 26 = 8$$

$$g(23) = (23 + 3) \bmod 26 = 0$$

$$g(25) = (25 + 3) \bmod 26 = 2$$

$h$  : Dekodieren

1 Mengen

2 Funktionen

3 Folgen

4 Reihen

## Definition

Eine **Folge** ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  (oder auch  $\mathbb{N}_0$ ) in eine Menge  $A$ :

$$\{\cdot\} : \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n,$$

Man nennt  $a_n$  das  $n$ .te Glied der Folge, welche man auch mit  $\{a_n\}$  (oder  $(a_n)$ ) bezeichnet.



## Definition

Eine **Folge** ist eine Abbildung von  $\mathbb{N}$  (oder auch  $\mathbb{N}_0$ ) in eine Menge  $A$ :

$$\{ \cdot \} : \mathbb{N} \rightarrow A, n \mapsto a_n,$$

Man nennt  $a_n$  das  $n$ .te Glied der Folge, welche man auch mit  $\{a_n\}$  (oder  $(a_n)$ ) bezeichnet.

## Example (Die Harmonische Folge)

Man schreibe die ersten 6 Glieder der Folge auf, deren  $k$ . Glied gegeben ist durch  $a_k = 1/k$ .

**Lösung:** Man hat also

$$(a_k) = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \right)$$

## Example (Einige Folgen)

Wie lautet jeweils das  $k$ . Glied der Folge:

## Example (Einige Folgen)

Wie lautet jeweils das  $k$ . Glied der Folge:

(a)  $(a_k) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

## Example (Einige Folgen)

Wie lautet jeweils das  $k$ . Glied der Folge:

(a)  $(a_k) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

(b)  $(b_k) = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$

Lösungen:

$$a_k = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

## Example (Einige Folgen)

Wie lautet jeweils das  $k$ . Glied der Folge:

(a)  $(a_k) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

(b)  $(b_k) = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$

(c)  $(c_k) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$

Lösungen:

$$a_k = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = (-1)^{k-1}k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

## Example (Einige Folgen)

Wie lautet jeweils das  $k$ . Glied der Folge:

(a)  $(a_k) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

(b)  $(b_k) = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$

(c)  $(c_k) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$

(d)  $(d_k) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots)$

Lösungen:

$$a_k = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = (-1)^{k-1}k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_k = k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

## Example (Einige Folgen)

Wie lautet jeweils das  $k$ . Glied der Folge:

(a)  $(a_k) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

(b)  $(b_k) = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$

(c)  $(c_k) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$

(d)  $(d_k) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots)$

Lösungen:

$$a_k = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = (-1)^{k-1}k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_k = k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$d_k = 2^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$2^{-k} = \frac{1}{2^k}$$

# Die geometrische Folge

Bei einer geometrische Folge (Progression) ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich  $q$ .



# Die geometrische Folge

Bei einer geometrische Folge (Progression) ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich  $q$ .

## Example (Die geometrische Folge)

Handelt es sich bei der Folge 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ... um eine geometrische?


$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{64}{32} = 2$$

$$\frac{512}{256} = 2$$

# Die geometrische Folge

Bei einer geometrische Folge (Progression) ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich  $q$ .

## Example (Die geometrische Folge)

Handelt es sich bei der Folge 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ... um eine geometrische?

## Definition

Man nennt die Folge  $\{a_k\}$  eine **geometrische Folge**, falls das  $k$ . Glied gegeben ist durch:

$$a_k = a_0 q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei sind  $a_0$  und  $q$  beliebige, reelle Zahlen.

*1. glied*

# Die geometrische Folge

Bei einer geometrische Folge (Progression) ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich  $q$ .

## Example (Die geometrische Folge)

Handelt es sich bei der Folge 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ... um eine geometrische?

## Definition

Man nennt die Folge  $\{a_k\}$  eine **geometrische Folge**, falls das  $k$ . Glied gegeben ist durch:

$$a_k = a_0 q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei sind  $a_0$  und  $q$  beliebige, reelle Zahlen.

## Example (Die geometrische Folge)

Geben sie eine rekursive Definition der geometrischen Folge!

**Lösung:** Ist das Anfangsglied  $a_0$  gegeben, kann man mit  $a_{k+1} = a_k q$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  jedes nachfolgende Glied berechnen.

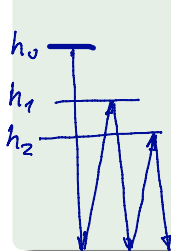
# Die geometrische Folge (Beispiel)

## Example (Hüpfender Ball)

Fällt ein Ball aus der Höhe  $h_0$ , dann hüpfte er wieder auf die Höhe  $h_1 = qh_0$  ( $0 < q < 1$ ). Nachdem er den Boden  $k$ -Mal berührt hat, springt er noch auf die Höhe

$$h_k = q^k h_0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Für sehr harte elastische Bälle hat man z.B.  $q = 0.8$  (d.h. der Ball springt wieder auf 80 % der Höhe) und für einen nicht elastischen Ball beispielsweise  $q = 0.3$ .



$$\begin{aligned} h_1 &= q h_0 \\ h_2 &= q h_1 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (q < 1)$$

$$h_k = q h_{k-1} \quad \text{rekursiv, oder explizit} \quad h_k = h_0 q^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{gesamter Weg: } L = 2 \sum_{k=0}^{\infty} h_k - h_0 = 2 \sum_{k=1}^{\infty} h_k + h_0$$

## Example (Hüpfender Ball)

Obwohl dieser (ideale) Ball unendlich oft hoch hüpfte steht er doch nach einer endlichen Zeit still: wie geht das? Antwort im Modul **MATH**.

# Die arithmetische Folge

Bei einer arithmetischen Folge (Progression) ist die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich gleich  $d$ .

## Definition

Man nennt die Folge  $\{a_k\}$  eine **arithmetische Folge**, falls das  $k$ . Glied gegeben ist durch:

$$a_k = a_0 + kd, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei sind  $a_0$  und  $d$  beliebige, reelle Zahlen.

# Die arithmetische Folge

Bei einer arithmetischen Folge (Progression) ist die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich gleich  $d$ .

## Definition

Man nennt die Folge  $\{a_k\}$  eine **arithmetische Folge**, falls das  $k$ . Glied gegeben ist durch:

$$a_k = a_0 + kd, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei sind  $a_0$  und  $d$  beliebige, reelle Zahlen. *1. glied*

## Example (Rekursive Definition)

Geben sie eine rekursive Definition der arithmetischen Folge!

**Lösung:** Man findet sofort  $a_{k+1} = a_k + d$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

Bsp.:  $(-2, 1, 4, 7, 10, 13, \dots) = b_k$  bestimme  $b_k$ !  $b_k = -2 + k \cdot 3$   
*( $k = 0, 1, 2, \dots$ )*

*1. Differenzenfolge*  $(3, 3, 3, 3, 3, \dots) = \text{konstante Folge}$

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`



## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) =$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen:  $\text{seq}(n!, n=1..6)$ ;

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

$$(n^4) =$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

$$(n^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`



## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

$$(n^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296, \dots)$$

$$(2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

$$(n^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296, \dots)$$

$$(2^n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

$$(n^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296, \dots)$$

$$(2^n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$$

$$(3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das n. Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

Arithm. Folge (AF) 1.Ord.

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

AF 2.Ord.

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

AF 3.Ord.

$$(n^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296, \dots)$$

AF 4.Ord.

$$(2^n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$$

GF mit  $a_0=2$  und  $q=2$

$$(3^n) = (3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots)$$

GF mit  $a_0=3$  und  $q=3$

1 4 9 16 25 36

1.DF 3 5 7 9 11

2.DF 2 2 2 2 = konst. Folge

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen:  $\text{seq}(n!, n=1..6)$ ;

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

$$(n^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296, \dots)$$

$$(2^n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$$

$$(3^n) = (3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots)$$

$$(1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

## Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das  $n$ . Glied:

$$(n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$$

$$(n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots)$$

$$(n^3) = (1, 8, 27, 64, 125, 216, \dots)$$

$$(n^4) = (1, 16, 81, 256, 625, 1296, \dots)$$

$$(2^n) = (2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots)$$

$$(3^n) = (3, 9, 27, 81, 243, 729, \dots)$$

$$(n!) = (1, 2, 6, 24, 120, 720, \dots)$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!, n=1..6);`

# Eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$

## Example

Gesucht ist eine bijektive Abbildung von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{Z}$ .

**Lösung:** Finde das  $k$ . Glied der Folge

$$(a_k) = (0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots)$$

$$a_k = \frac{1}{4} [1 - (-1)^k (1 + 2k)]$$

1 Mengen

2 Funktionen

3 Folgen

4 Reihen



Dank Summenzeichen lassen sich Summen einfacher schreiben:

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = \sum_{j=m}^n a_j$$

Der Index  $j$  wird **Summationsindex**,  $m$  **untere** und  $n$  **obere Grenze** der Summe genannt (es ist klar, dass  $n \geq m$  gelten muss). Der Summationsindex kann auch anders heissen: man verwendet aber meistens  $i$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $m$  und  $n$ .

Nach der **Indextransformation**  $i = j - m$ , welche die untere Grenze  $j = m$  nach  $i = m - m = 0$  und die obere Grenze  $j = n$  nach  $j = n - m$  transformiert, kann man obige Summe auch wie folgt schreiben:

$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{i=0}^{n-m} a_{m+i} = \sum_{k=1}^{n-m+1} a_{m+k-1}$$

Am Schluss setzen wir  $k = j - m + 1$ .

# Die endliche arithmetische Reihe

Addiert man die Glieder einer arithmetischen Folge  $(a_k)$ , entsteht die **arithmetische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + kd) = \sum_{k=0}^{n-1} a_0 + d \sum_{k=0}^{n-1} k = na_0 + d \frac{(n-1)n}{2}$$

$\Leftrightarrow 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1)$

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{na_0}{2} + d \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2} (\overbrace{a_0 + a_0}^{2a_0} + \underbrace{(n-1)d}_{a_{n-1}}) = n \frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$$

*Handwritten annotations:*  
-  $a_0 + a_0 + \dots + a_0$  (n Summanden)  
-  $a_0$  is labeled "1. Glied" (1st term)  
-  $a_{n-1}$  is labeled "letztes Glied" (last term)  
-  $n$  is labeled "Anzahl Glieder" (number of terms)

ergibt sich die Summe indem man das durchschnittliche Glied berechnet (Mittelwert des ersten und letzten Gliedes  $(a_0 + a_{n-1})/2$ ) und dieses mit  $n$  multipliziert!

# Die endliche geometrische Reihe

Addiert man die Glieder einer geometrischen Folge  $(a_k)$ , entsteht die **geometrische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_0 q^k = a_0 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wobei  $q \neq 1$  gelten muss (für  $q = 1$  hat man wieder eine arithmetische Reihe).

## Example

Wie viele Bitstrings mit einer Länge von höchstens  $n - 1$  Bit gibt es?

**Lösung:** Inklusive leerem Bitstring hat man

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^n - 1}{2 - 1} \approx 2^n = \mathcal{O}(2^n)$$

Zurück zum Hüpfball:

$$L = 2 \sum_{k=0}^{\infty} h_k - h_0 \quad \text{wobei} \quad h_k = q^k h_0$$
$$\stackrel{!}{=} 2 h_0 \sum_{k=0}^{\infty} q^k - h_0 = h_0 \left( 2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k - 1 \right) \quad \text{mit } |q| < 1$$

Statt  $\infty$  setzen wir die sehr grosse Zahl  $M$  ein.

$$\sum_{k=0}^M q^k = \frac{1 - q^{M+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{1}{1 - q} q^{M+1} \quad \text{mit } q^{M+1} \sim 0$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^M q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{falls } |q| < 1.$$

Somit

$$L = h_0 \left( 2 \frac{1}{1 - q} - 1 \right) = h_0 \frac{2 - (1 - q)}{1 - q} = h_0 \frac{1 + q}{1 - q}$$

$$q = 0.8 : \quad L = h_0 \frac{1 + 0.8}{1 - 0.8} = h_0 \frac{1.8}{0.2} = 9 h_0$$

# Einige nützliche Summenformeln

Summe	geschlossene Form
$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$1 + 4 + 9 + 16 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$1 + 8 + 27 + 64 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,  x  < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1},  x  < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

Dank dem Produktzeichen lassen sich Produkte einfacher schreiben:

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_n = \prod_{j=m}^n a_j$$

Der Index  $j$  geht hier von der unteren Grenze  $m$  bis zur oberen Grenze  $n$ . Wie auch beim Summenzeichen kann man auch hier eine Indextransformation durchführen.

## Example

Die Fakultät lässt sich mit Hilfe des Produktzeichen wie folgt schreiben:

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^n k$$

- Wir haben in dieser Woche die Foundation eines Gebäudes erstellt.

- Wir haben in dieser Woche die Foundation eines Gebäudes erstellt.
- Es wurde also der Baugrund gefestigt, Pfähle wurden eingeschlagen, Spundwände geschlagen, etc.



- Wir haben in dieser Woche die Foundation eines Gebäudes erstellt.
- Es wurde also der Baugrund gefestigt, Pfähle wurden eingeschlagen, Spundwände geschlagen, etc.
- In der nächsten Woche folgt das Fundament des Gebäudes.