Basic Structures: Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studiengang Informatik
Hochschule Luzern, Informatik

I.BA_DMATH

Outline

Thema, Resultate, Ziele, Vorgehen

Thema: Mengen, Funktionen, Folgen und Reihen

Resultate: Sie können die korrekten Bezeichnungen für Mengen und Funktionen im Alltag verwenden und können mit Folgen und Reihen umgehen.

Ziele:

- Die Studierenden verstehen den Begriff Menge und können die bis jetzt gelernte Notation im Zusammenhang mit Mengen anwenden. Sie können beispielsweise die Regeln anwenden, um die Gesetze von De Morgan schlüssig zu beweisen.
- Sie können endliche Mengen mit dem Computer darstellen und die gängigen Rechenoperationen durchführen.
- Sie verstehen Funktionen als Abbildungen von einer Menge in eine andere Menge und kennen deren Eigenschaften und können üperprüfen, welche Eigenschaften eine Funktion hat.
- Sie können Funktionen zusammen setzen.
- Sie können Funktionen zusammen setzen und die inverse Funktion einer bijektiven Funktion darstellen und berechnen.
- Sie keinen einige typische Funktionen, die im Zusammenhang mit diskreter Mathematik auftreten.
- Sie können mit arithmetischen und geometrischen Folgen und Reihen umgehen.

Vorgehen: Die einzelnen Themen werden der Riehe nach behandelt und gleich verwendet.

Übersicht

Mengen

Definition

Eine *Menge* ist eine ungeordnete Zusammenfassung wohldefinierter, unterscheidbarer Objekte, genannt *Elemente*, zu einem Ganzen.
Für irgend ein Objekt x gilt dann bezüglich der Menge A entweder $x \in A$ oder dann $x \notin A$.

Example

Endliche Mengen lassen sich durch Aufschreiben der in ihnen enthaltenen Elemente beschreiben; z.B. die Menge aller natürlichen Zahlen kleiner als 101:

$$A = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$$

$$99 \in A \quad \text{aber} \quad 101 \notin A.$$

eine andere Schreibeweise ist

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 101\}$$

Gleichheit, elementare Mengen

Definition

Zwei Mengen A und B sind gleich ($A = B$), falls sie die selben Elemente enthalten.

Example

Einige bekannte Mengen sind:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, \ldots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\
\mathbb{Z}^+ &= \{1, 2, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \{p/q \,|\, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\} \\
\mathbb{R} &: \quad \text{die Menge der reellen Zahlen} \\
\mathbb{C} &: \quad \text{die Menge der komplexen Zahlen}
\end{aligned}
$$

Es braucht $\mathbb{R}$, denn die Gleichung $x^2 = 2$ hat in $\mathbb{Q}$ keine Lösung. Analog braucht es $\mathbb{C}$, denn die Gleichung $x^2 = -1$ hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

Spezielle Mengen

Teilmenge: A ist **Teilmenge** von B, geschrieben $A \subset B$, genau dann, wenn $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$: Es gilt $A \subset A$!

Leere Menge $\emptyset$: Für jede Menge A gilt: $\emptyset \subset A$.

Kardinalität: Ist S eine endliche Menge, dann bezeichnet $|S|$ die **Kardinalität** (Anzahl Elemente) von S. Eine nicht endliche Menge heisst unendliche Menge.

Potenzmenge: Die **Potenzmenge** $P(S)$ oder 2^S der Menge S besteht aus der Menge aller Teilmengen $A \subset S$.

Example

Bestimmen Sie die Potenzmenge von $S = \{1, 2\}$.

Lösung: Die Potenzmenge von S ist eine Menge, bestehend aus allen Teilmengen von S inkl. die leere Menge und die Menge selber.

$$P(S) = 2^S = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Es gilt allgemein $|2^S| = 2^{|S|}$.

Spezielle Mengen (Fort.)

Kreuzprodukt: (oder **kartesisches Produkt**) zweier Mengen A und B, bezeichnet mit $A \times B$ ist die Menge aller geordneten Paare (a, b), wobei $a \in A$ und $b \in B$, d.h. $A \times B = \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}$

Example

Berechnen Sie $A \times B$ und $B \times A$, falls $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b\}$.
Lösung: Das Kreuzprodukt $A \times B$ enthält alle möglichen Tuppel der Form (x, y) wobei $x \in A$ und $y \in B$. Man hat also

$$A \times B = \{(1, a),\ (2, a),\ (3, a),\ (1, b),\ (2, b),\ (3, b)\}$$
$$B \times A = \{(a, 1),\ (a, 2),\ (a, 3),\ (b, 1),\ (b, 2),\ (b, 3)\}$$

Bei Tupeln ist die Reihenfolge wesentlich, d.h. $(1, a) \neq (a, 1)$. Wie man sieht ist also $A \times B \neq B \times A$, d.h. das Kommutativgesetz gilt beim Kreuzprodukt nicht.

Spezielle Mengen (Fort.)

Example

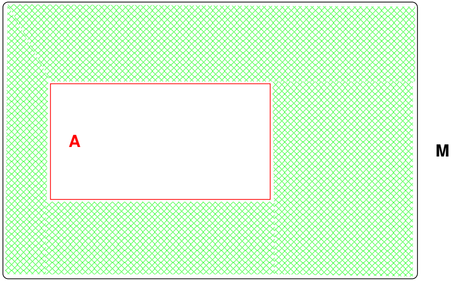
Das Kreuzprodukt kann verwendet werden, um Gitter einfach zu beschreiben. Beispielsweise ist $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die Menge der Gitterpunkte in der Ebene mit ganzzahligen Koordinaten. Erstellen Sie eine Skizze zur Visualization.

Lösung:

Ist A eine Teilmenge der Menge M, so bezeichnet

$$A^c = \overline{A} = \{ m \in M : m \notin A \}$$

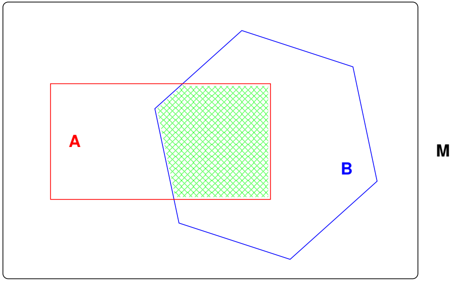
das Komplement von A in M.



Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$$A \cap B = \{\, m \in M \mid m \in A \underbrace{\wedge}_{\text{und}} m \in B \,\}$$

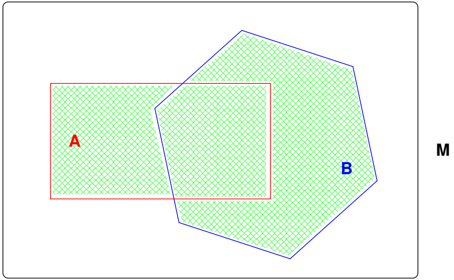
den <u>Durchschnitt</u> von A und B.



Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$$A \cup B = \{\, m \in M \mid m \in A \underbrace{\vee}_{\text{oder}} m \in B \,\}$$

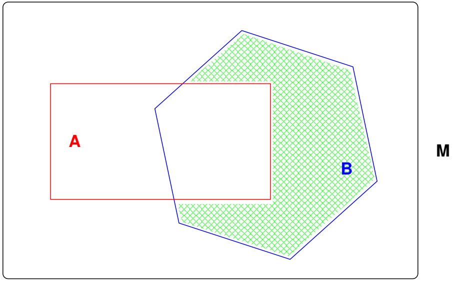
die Vereinigung von A und B.



Sind A und B Teilmengen einer Menge M, so bezeichnet

$$B - A = \{\, m \in M \mid m \in B \underbrace{\wedge}_{\text{und}} m \notin A \,\}$$

die Differenz.



Rechenregeln für das Rechnen mit Mengen

Theorem

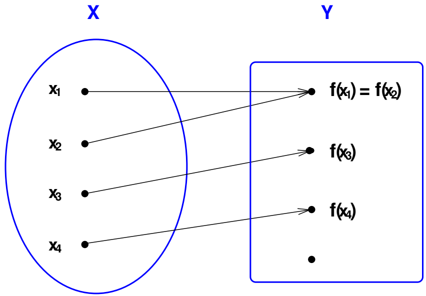
Für das Rechnen mit Mengen $A, B, C \subseteq M$ gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A && \textit{Kommutativgesetz}\\
A \cap B &= B \cap A && \textit{Kommutativgesetz}\\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C && \textit{Assoziativgesetz}\\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && \textit{Assoziativgesetz}\\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) && \textit{Distributivgesetz}\\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \textit{Distributivgesetz}\\
\overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} && \textit{De Morgan's Gesetz}\\
\overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} && \textit{De Morgan's Gesetz.}
\end{aligned}$$

Übersicht

Definition

Wird jedem Element x einer Menge X (Definitionsbereich) genau ein Element y einer Menge Y zugeordnet, so heisst die Zuordnung Funktion.



Die Menge

$$W = \{y \in Y \mid f(x) = y \text{ für ein } x \in X\}$$

heisst Wertebereich oder Bildbereich.
Schreibweise:

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) \qquad \text{oder } f : x \longmapsto f(x) \end{aligned}$$

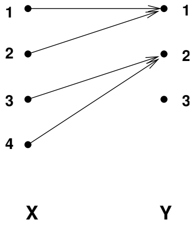
Wichtig!
Wir wollen uns angewöhnen, zwischen der Funktion f und $f(x)$ stets zu unterscheiden.

Funktionen Beispiel 1

$X = \{1, 2, 3, 4\}$ und $Y = \{1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ 1 &\longmapsto 1 = f(1) \\ 2 &\longmapsto 1 = f(2) \\ 3 &\longmapsto 2 = f(3) \\ 4 &\longmapsto 2 = f(4) \end{aligned}$$

Bildmenge von f: $f(X) = \{1, 2\}$

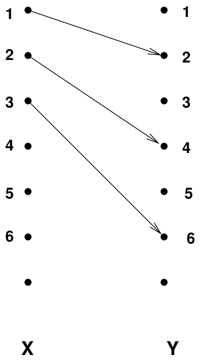


Funktionen Beispiel 2

$X = \mathbb{N}$ und $Y = \mathbb{R}$

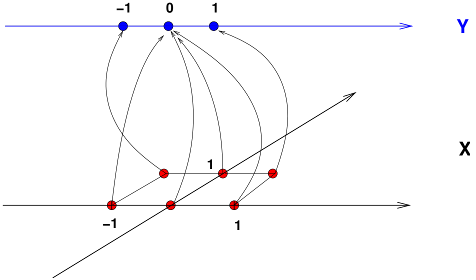
$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ i &\longmapsto 2 \cdot i \end{aligned}$$

Bildmenge von f: $f(X) = 2 \cdot \mathbb{N}$ (Menge aller geraden Zahlen)



$X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$



Stückweise Definition von (reellen) Funktionen

Funktionen können auch stückweise definiert werden.

Beispiele:

$$f(x) := \begin{cases} 5 & \text{für } x < 0 \\ x^2 + 5 & \text{für } x \in [0, 2] \\ 0.5x + 8 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

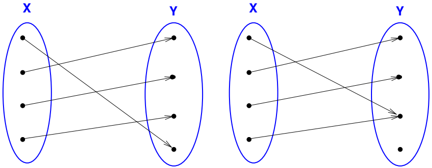
$$g(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 42 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Injektive Funktionen

Definition

Eine Funktion heisst injektiv, wenn verschiedene $x_1, x_2 \in X$ stets auf verschiedene Werte im Bildbereich abgebildet werden. Kurz:

- Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$; oder
- für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt $x_1 = x_2$.



Injektiv: auf jedes Element in Y zeigt höchstens ein Pfeil!!

- $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

  ist nicht injektiv, denn z.B. gilt $-2 \neq 2$ aber $f(-2) = 4 = f(2)$.

- $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x + 3 \end{aligned}$$

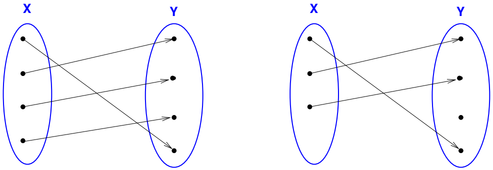
  ist injektiv, denn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt

  $$\begin{array}{rlcl} & f(x_1) & = & f(x_2) \\ \leftrightarrow & 2x_1 + 3 & = & 2x_2 + 3 \\ \leftrightarrow & x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Surjektive Funktionen

Definition

Eine Funktion heisst surjektiv, falls für jedes Element $y \in Y$ (mindestens) ein Element $x \in X$ existiert, so dass $f(x) = y$ gilt.

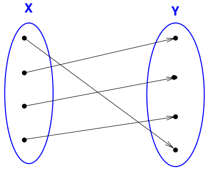


Surjektiv: auf jedes Element in Y zeigt mindestens ein Pfeil!!

Bijektive Funktionen

Definition

Eine Funktion heisst bijektiv, falls sie injektiv und surjektiv ist.

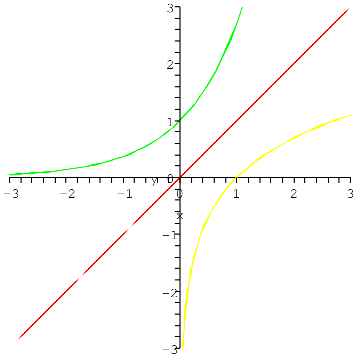


Bijektiv: auf jedes Element in Y zeigt genau ein Pfeil!!

Betrachten wir eine Funktionen $f : X \longrightarrow Y$, so wird die Menge

$$\{ (x, f(x)) \mid x \in X \} \subset X \times Y$$

als der Graph von f bezeichnet.



Zusammengesetzte Funktionen

$$\begin{aligned} g : X &\longrightarrow U \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

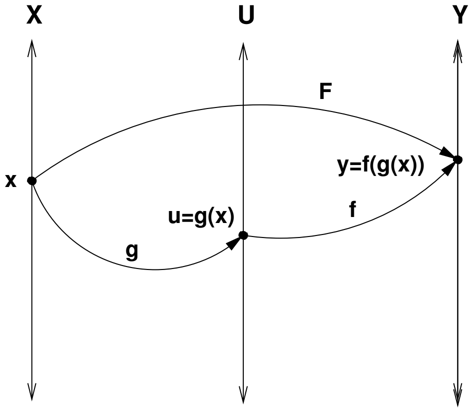
$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow Y \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

seien zwei Funktionen, so dass der Wertebereich von g im Definitionsbereich von f enhalten ist. Dann kann man die so genannte <u>zusammengesetzte Funktion</u> oder <u>Komposition</u> von f und g bilden:

$$\begin{aligned} F = f \circ g : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

Zusammengesetzte Funktionen (Fort.)

Natürlich ist F auf dem Definitionsbereich von g definiert



Die Umkehrfunktion

Wir betrachten eine bijektive Funktion f, d.h. insbesondere, dass zu jedem $\mathbf{y}$ des Wertebereichs von f genau ein x des Definitionsbereiches von f mit der Eigenschaft $y = f(x)$ existiert.

Somit können wir die Umkehrfunktion f^{-1} von f definieren, die jedem Element y des Wertebereichs von f dieses eindeutig bestimmte Element x zuordnet.

Bezeichnung: $x = f^{-1}(y)$ bzw. nach Vertauschung der Variablen $y = f^{-1}(x)$.

Example

Gegeben die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{-2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{3x+4}{x+2} \end{aligned}$$

oder kurz

$$y = f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$$

Bestimmen Sie die Umkehrfunktion von f, sowie deren Definitions- und Wertebereich.

Example (Fortsetzung)

Konstruktion von f^{-1} (Auflösen nach x)

$$
\begin{array}{rrcl}
 & y & = & \dfrac{3x+4}{x+2} \\
\leftrightarrow & xy+2y & = & 3x+4 \\
\leftrightarrow & xy-3x & = & 4-2y \\
\leftrightarrow & x & = & \dfrac{4-2y}{y-3}, \quad \text{falls } y \neq 3
\end{array}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
f^{-1} : \mathbb{R} - \{3\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
y &\longmapsto \frac{4-2y}{y-3}
\end{aligned}
$$

Die Umkehrfunktion (Fortsetzung)

Wendet man auf ein x zunächst eine umkehrbare Funktion f an und danach die Umkehrfunktion f^{-1} (auf $f(x)$), so erhält man wieder x.

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$	$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y$

Example (Fortsetzung)

$$y = f(x) \;=\; \frac{3x+4}{x+2} \qquad x = f^{-1}(y) \;=\; \frac{4-2y}{y-3}$$

Es gilt:

$$f^{-1}(f(x)) \;=\; \frac{4-2f(x)}{f(x)-3} = \frac{4-2\,\dfrac{3x+4}{x+2}}{\dfrac{3x+4}{x+2}-3} \;=\; x.$$

Übersicht

Definition

Eine **Folge** ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ (oder auch $\mathbb{N}_0$) in eine Menge A:

$$\{\cdot\} : \mathbb{N} \to A, n \mapsto a_n,$$

Man nennt a_n das n.te Glied der Folge, welche man auch mit $\{a_n\}$ (oder (a_n)) bezeichnet.

Example (Die Harmonische Folge)

Man schreibe die ersten 6 Glieder der Folge auf, deren k. Glied gegeben ist durch $a_k = 1/k$.
Lösung: Man hat also

$$(a_k) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$$

Example (Einige Folgen)

Wie lautet jeweils das k. Glied der Folge:

(a) $(a_k) = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$

(b) $(b_k) = (1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$

(c) $(c_k) = (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$

(d) $(d_k) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots\right)$

Lösungen:

$$a_k = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = (-1)^{k-1} k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_k = k^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$d_k = 2^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Die geometrische Folge

Bei einer geometrische Folge (Progression) ist der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich q.

Example (Die geometrische Folge)

Handelt es sich bei der Folge $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, \ldots$ um eine geometrische?

Definition

Man nennt die Folge $\{a_k\}$ eine **geometrische Folge**, falls das k. Glied gegeben ist durch:

$$a_k = a_0 q^k, \; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dabei sind a_0 und q beliebige, reelle Zahlen.

Example (Die geometrische Folge)

Geben sie eine rekursive Definition der geometrischen Folge!

Lösung: Ist das Anfangsglied a_0 gegeben, kann man mit $a_{k+1} = a_k q$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ jedes nachfolgende Glied berechnen.

Die geometrische Folge (Beispiel)

Example (Hüpfender Ball)

Fällt ein Ball aus der Höhe h_0, dann hüpft er wieder auf die Höhe $h_1 = qh_0$ $(0 < q < 1)$. Nachdem er den Boden k-Mal berührt hat, springt er noch auf die Höhe

$$h_k = q^k h_0 \quad k = 1, 2, 3, \dots .$$

Für sehr harte elastische Bälle hat man z.B. $q = 0.8$ (d.h. der Ball springt wieder auf 80 % der Höhe) und für einen nicht elastischen Ball beispielsweise $q = 0.3$.

Die geometrische Folge (Beispiel)

Example (Hüpfender Ball)

Obwohl dieser (ideale) Ball unendlich oft hoch hüpft steht er doch nach einer endlichen Zeit still: wie geht das? Antwort im Modul **MATH**.

Die arithmetische Folge

Bei einer arithmetischen Folge (Progression) ist die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder immer gleich, nämlich gleich d.

Definition

Man nennt die Folge $\{a_k\}$ eine **arithmetische Folge**, falls das k. Glied gegeben ist durch:

$$a_k = a_0 + kd, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Dabei sind a_0 und d beliebige, reelle Zahlen.

Example (Rekursive Definition)

Geben sie eine rekursive Definition der arithmetischen Folge!

Lösung: Man findet sofort $a_{k+1} = a_k + d, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots.$

Example

Schreiben sie jeweils die ersten sechs Glieder der Folge auf oder formulieren sie das n. Glied:

$$
\begin{aligned}
(n) &= (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots) \\
\left(n^2\right) &= (1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots) \\
\left(n^3\right) &= (1, 8, 27, 64, 125, 216, \ldots) \\
\left(n^4\right) &= (1, 16, 81, 256, 625, 1296, \ldots) \\
(2^n) &= (2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots) \\
(3^n) &= (3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots) \\
(n!) &= (1, 2, 6, 24, 120, 720, \ldots)
\end{aligned}
$$

Glieder mit Hilfe von Maple berechnen: `seq(n!,n=1..6);`

Example

Gesucht ist eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$.

Lösung: Finde das k. Glied der Folge

$$(a_k) = (0,\, 1,\, -1,\, 2,\, -2,\, 3,\, -3,\, 4,\, -4,\, \ldots)$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left[1 - (-1)^k(1 + 2k)\right]$$

Übersicht

Summation

Dank Summenzeichen lassen sich Summen einfacher schreiben:

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n = \sum_{j=m}^{n} a_j$$

Der Index j wird **Summationsindex**, m **untere** und n **obere Grenze** der Summe genannt (es ist klar, dass $n \geqslant m$ gelten muss). Der Summationsindex kann auch anders heissen: man verwendet aber meistens i, j, k, l, m und n.
Nach der **Indextransformation** $i = j - m$, welche die untere Grenze $j = m$ nach $i = m - m = 0$ und die obere Grenze $j = n$ nach $j = n - m$ transformiert, kann man obige Summe auch wie folgt schreiben:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=0}^{n-m} a_{m+i} = \sum_{k=1}^{n-m+1} a_{m+k-1}$$

Am Schluss setzten wir $k = j - m + 1$.

Addiert man die Glieder einer arithmetischen Folge (a_k), entsteht die **arithmetische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_0 + kd) = \sum_{k=0}^{n-1} a_0 + d \sum_{k=0}^{n-1} k = na_0 + d\frac{(n-1)n}{2}$$

Wegen

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = na_0 + d\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2}(a_0 + \underbrace{a_0 + (n-1)d}_{a_{n-1}}) = n\frac{a_0 + a_{n-1}}{2}$$

ergibt sich die Summe indem man das durchschnittliche Glied berechnet (Mittelwert des ersten und letzten Gliedes $(a_0 + a_{n-1})/2$) und dieses mit n multipliziert!

Die endliche geometrische Reihe

Addiert man die Glieder einer geometrischen Folge (a_k), entsteht die **geometrische Reihe**:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_0 q^k = a_0 \sum_{k=0}^{n-1} q^k = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

wobei $q \neq 1$ gelten muss (für $q = 1$ hat man wieder eine arithmetische Reihe).

Example

Wie viele Bitstrings mit einer Länge von höchsten $n-1$ Bit gibt es?
Lösung: Inklusive leerem Bitstring hat man

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^n - 1}{2 - 1} \approx 2^n = \mathcal{O}(2^n)$$

Einige nützliche Summenformeln

Summe	**geschlossene Form**
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \ \lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \ \lvert x\rvert < 1$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$

Produktzeichen

Dank dem Produktzeichen lassen sich Produkte einfacher schreiben:

$$a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_n = \prod_{j=m}^{n} a_j$$

Der Index j geht hier von der unteren Grenze m bis zur oberen Grenze n. Wie auch beim Summenzeichen kann man auch hier eine Indextransformation durchführen.

Example

Die Fakultät lässt sich mit Hilfe des Produktzeichen wie folgt schreiben:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$$

Zusammenfassung

- Wir haben in dieser Woche die Fundation eines Gebäudes erstellt.
- Es wurde also der Baugrund gefestigt, Pfähle wurden eingeschlagen, Spundwände geschlagen, etc.
- In der nächsten Woche folgt das Fundament des Gebäudes.