Discrete Probability I
(Diskrete Wahrscheinlichkeitsrechnung I)

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studiengang Informatik
Hochschule Luzern, Informatik

I.BA_DMATH

Inhalt

Ziele

Die StudentIn

- Die StudentIn kennt und kann folgende Begriffe anwenden: Stichprobenraum, Zufallsexperiment, Ergebnis eines Zufallsexperiments sowie Ereignis.

Ziele

Die StudentIn

- Die StudentIn kennt und kann folgende Begriffe anwenden: Stichprobenraum, Zufallsexperiment, Ergebnis eines Zufallsexperiments sowie Ereignis.
- Die StudentIn kann die Wahrscheinlichkeit von gleich verteilten Zufallsexperimenten berechnen.

Ziele

Die StudentIn

- Die StudentIn kennt und kann folgende Begriffe anwenden: Stichprobenraum, Zufallsexperiment, Ergebnis eines Zufallsexperiments sowie Ereignis.
- Die StudentIn kann die Wahrscheinlichkeit von gleich verteilten Zufallsexperimenten berechnen.
- Die StudentIn kann bedingte Wahrscheinlichkeiten und die totale Wahrscheinlichkeit berechnen und kann den Satz von Bayes anwenden.

Übersicht

1. Einführung
2. Wahrscheinlichkeitstheorie
3. Der Satz von Bayes

Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Versicherungsmathematik (Tod durch Hufschlag führte zur ersten Versicherung)
- Spieltheorie:
  - welche Strategie führt zum maximalen Gewinn?
  - wie gross ist die maximale Gewinnchance?
  - Prinzen- oder Sekretärinnen-Problem
- Banking/Trading (High Speed Trading)
- Produktionskontrolle (Von der Stichprobe zur Qualität der Produktionsprodukte)

Definitionen

Die Wahrscheinlichkeitstheorie geht zurück auf die franz. Mathematiker Blaise Pascal (17. Jh.) und Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

Definition (Zufallsexperiment, Stichprobenraum, Ereignis)

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Vorgang, der (1) unter ganz bestimmten, reproduzierbaren Voraussetzungen durchgeführt wird, (2) der beliebig oft wiederholt werden kann und (3) bei dem das Resultat jeder Durchführung alleine vom Zufall abhängt, d.h. von Einflüssen, die sich unserer Kontrolle entziehen.

Eine Durchführung des Zufallsexperiments heisst **Versuch** und das dabei erhaltene Resultat **Ergebnis** (engl. *event*).

Die Menge aller möglichen Ergebnisse heisst **Stichprobenraum**.

Ein einzelnes Element des Stichprobenraumes heisst **Elementarereignis**. Eine Teilmenge des Stichprobenraumes heisst **Ereignis**.

Beispiele

Example (Wurf einer fairen Münze)

Mögliche **Ergebnisse** sind der Wurf von Kopf oder Zahl. Also besteht der Stichprobenraum aus den beiden Elementen K, Z, d.h.

$$S = \{K, Z\}.$$

Ein mögliches **Ereignis** $E \subset S$ ist entweder Kopf oder Zahl zu werfen: wir schreiben $E = \{K, Z\}$.

Example (Wurf eines fairen Würfels)

Ergebnisse sind der Wurf der Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, d.h., der Stichprobenraum ist

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ein mögliches **Ereignis** ist eine ungerade Zahl zu würfeln ($E = \{1, 3, 5\}$). $E \subset S$

1. Würfel rot und 2. Würfel schwarz

Example (Wurf zweier fairer Würfel)

Augenzahl des roten Würfels — dito für den schwarzen Würfel.

Ergebnisse sind Zahlenpaare der Form (a, b) wobei a die Augenzahl des ersten Würfels und b die Augenzahl des zweiten Würfels darstellt, d.h. man hat den Stichprobenraum Stichprobenraum ist

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\\ &(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\\ &(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\\ &(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\\ &(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\\ &(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}. \end{aligned}$$

Augensumme ist hier 7.

gerade umgekehrt.

Beachten Sie, dass die beiden Würfe $(1, 2)$ und $(2, 1)$ verschieden sind: Stellen Sie sich vor, der erste Würfel wäre rot, der zweite blau.

roter Würfel zeigt 1
schwarzer Würfel zeigt 2

Definition (Wahrscheinlichkeit)

Jedem Ereignis $A \subset S$ (S: Stichprobenraum) wird eine reelle Zahl $p(A) \in [0, 1]$ zugeordnet. Sie entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt. Formal ist die Wahrscheinlichkeit eine Abbildung:

Menge aller Teilmengen von S

$$p : 2^S \to [0, 1]\,,\ A \mapsto p(A),$$

jedem Ereignis A wird "seine" W'keit zugeordnet.

mit den Eigenschaften:

unmöglicher Ereignis

sicherer Ereignis

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \forall A\,(0 \leqslant p(A) \leqslant 1)\,,\\
&(2) \quad p(S) = 1,\\
&(3) \quad \forall A \forall B\,(A \cap B = \emptyset \to p(A \cup B) = p(A) + p(B))
\end{aligned}$$

Wir haben verwendet, dass 2^S die Potenzmenge von S, d.h. die Menge aller Teilmengen von S bezeichnet!

Gleichverteilung

Definition (W'keit bei Gleichverteilung)

Besteht der Stichprobenraum S aus den n Elementarereignissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die alle mit der selben Wahrscheinlichkeit eintreten, dann hat man (nach Laplace) die **Gleichverteilung**:

$$p(x_i) = \frac{1}{|S|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A des endlichen Stichprobenraumes S von lauter gleich wahrscheinlichen Ereignissen ist gegeben durch:

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}}.$$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (Wurf eines fairen Würfels)

A = "gerade Zahl zu werfen" $= \{2, 4, 6\}$ $\quad p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Gleichverteilung (Fort.)

Example (Fairer Würfel)

Berechne die W'keit, eine gerade Zahl zu würfeln, d.h. die W'keit für $A = \{2, 4, 6\}$:

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Dabei haben wir verwendet, dass die Anzahl möglicher Fälle gleich

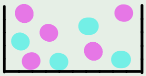
$$|S| = |\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}|$$

ist, d.h. gleich der Anzahl Elemente im Stichprobenraum.

Gleichverteilung (Fort.)

Examples

1. Aus einer Urne mit 4 blauen und 5 roten Kugeln wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel blau?



B = "blaue Kugel wird gezogen"

$$P(B) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögl. Fälle}} = \frac{4}{9}$$

Gleichverteilung (Fort.)

Examples

1. Aus einer Urne mit 4 blauen und 5 roten Kugeln wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel blau?

$$p(\text{“blaue Kugel”}) = \frac{4}{9}$$

Gleichverteilung (Fort.)

Examples

1. Aus einer Urne mit 4 blauen und 5 roten Kugeln wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel blau?

$$\text{p}(\text{“blaue Kugel”}) = \frac{4}{9}$$

2. Zwei Würfel werden geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme genau 7?

Gleichverteilung (Fort.)

Examples

1. Aus einer Urne mit 4 blauen und 5 roten Kugeln wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel blau?

$$p(\text{“blaue Kugel”}) = \frac{4}{9}$$

2. Zwei Würfel werden geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme genau 7?

$$p(\text{“Augensumme 7”}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Examples

1. Aus einer Urne mit 4 blauen und 5 roten Kugeln wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel blau?

$$\mathrm{p}(\text{“blaue Kugel”}) = \frac{4}{9}$$

2. Zwei Würfel werden geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme genau 7?

$$\mathrm{p}(\text{“Augensumme 7”}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt man beim Lotto „6 aus 49„ genau 6 Richtige?

$$p(\text{“Sechser”}) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögl. Fälle}} = \frac{1}{\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}} = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13'983'816}$$

Gleichverteilung (Fort.)

Examples

1. Aus einer Urne mit 4 blauen und 5 roten Kugeln wird eine Kugel gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel blau?

$$\mathrm{p}(\text{“blaue Kugel”}) = \frac{4}{9}$$

2. Zwei Würfel werden geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme genau 7?

$$\mathrm{p}(\text{“Augensumme 7”}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tippt man beim Lotto „6 aus 49„ genau 6 Richtige?

$$\mathrm{p}(\text{“Sechser”}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13'483'816}$$

Wichtige Regeln

Theorem (W'keit des Komplements)

Falls A *ein Ereignis des Stichprobenraumes* S *ist, dann gilt für deren Komplement:*

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Wichtige Regeln

Theorem (W'keit des Komplements)

Falls A ein Ereignis des Stichprobenraumes S ist, dann gilt für deren Komplement:

Beweis: $S = A \cup \bar{A}$, $A \cap \bar{A} = \phi$

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

$$1 \underset{(2)}{=} p(S) = p(A \cup \bar{A}) \underset{(3)}{=} p(A) + p(\bar{A})$$

Example

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Folge von 10 zufälligen Bit mindestens eine Null?

$A =$ "Menge der Bitstrings mit mind. einer Null"

$\bar{A} = \{(1111111111)\}$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{10}-1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$$

Wichtige Regeln

Theorem (W'keit des Komplements)

Falls A ein Ereignis des Stichprobenraumes S ist, dann gilt für deren Komplement:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Example

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält eine Folge von 10 zufälligen Bit mindestens eine Null?

Lösung: Betrachte die Ereignisse

$$A = \text{“Menge der Bitstrings mit mindestens einer Null”}$$
$$\overline{A} = \{1111111111\}$$
$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$$

Wichtige Regeln (Fort.)

Theorem (Additionsregel)

Falls A_1 *und* A_2 *zwei Ereignisse des Stichprobenraumes* S *sind, dann gilt die Additionsregel:*

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2).$$

Wichtige Regeln (Fort.)

Theorem (Additionsregel)

Falls A_1 und A_2 zwei Ereignisse des Stichprobenraumes S sind, dann gilt die Additionsregel:

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2).$$

Verallgemeinerung von (3).

Example

Aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 100$ wird zufällig eine Zahl gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl durch 2 **oder** 5 teilbar?

Lösung:

A_1 = "durch zwei teilbare Zahlen" $= \{2, 4, 6, \ldots, 98, 100\} \Rightarrow |A_1| = 50$

A_2 = "durch fünf teilbare Zahlen" $= \{5, 10, 15, \ldots, 95, 100\} \Rightarrow |A_2| = 20$

$A_1 \cap A_2 = \{10, 20, 30, \ldots, 90, 100\} \Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 10$

$$p(A_1) = \frac{|A_1|}{|S|} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}; \quad p(A_2) = \frac{|A_2|}{|S|} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, \quad p(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow p(A_1 \cup A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{5+2-1}{10} = \frac{6}{10} \mathrel{\hat{=}} 60\%$$

Wichtige Regeln (Fort.)

Theorem (Additionsregel)

Falls A_1 und A_2 zwei Ereignisse des Stichprobenraumes S sind, dann gilt die Additionsregel:

$$p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2).$$

Example

Aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 100$ wird zufällig eine Zahl gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Zahl durch 2 **oder** 5 teilbar?

Lösung: Betrachte die Ereignisse

$$\begin{aligned}
A_1 &= \text{“Menge der Zahlen von 1-100, die durch 2 teilbar sind”} &= \{2, 4, 6, \ldots\} \\
A_2 &= \text{“Menge der Zahlen von 1-100, die durch 5 teilbar sind”} &= \{5, 10, 15, \ldots\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) &= \frac{|A_1|}{|S|} + \frac{|A_2|}{|S|} - \frac{|A_1 \cap A_2|}{|S|} \\
&= \frac{|50|}{|100|} + \frac{|20|}{|100|} - \frac{|10|}{|100|} = \frac{50 + 20 - 10}{100} = \frac{60}{100} = 0.6
\end{aligned}$$

Example (The Matching Problem mit 3 Briefen)

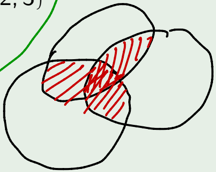
Es werden drei Briefe mit entsprechenden Umschlägen an drei verschiedene Personen geschrieben. Leider werden die Briefe aber per Zufall in die jeweiligen Couverts gesteckt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer der Briefe in den zugehörigen Umschlag gesteckt wurde?

W'keit den 1. und 2. Brief ins richtige Couvert zu stecken

Lösung: Betrachte die Ereignisse

$$A_k = \text{“Der k. Brief ist im richtigen Umschlag”} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned} p(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) &= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) \\ &\quad - p(A_1 \cap A_2) - p(A_1 \cap A_3) - p(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.6667 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \end{aligned}$$



$$\frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögl. Fälle}} = \frac{\text{1. Brief im richtigen Couvert}}{\text{Anzahl Couverts}}$$

Example (The Matching Problem mit n Briefen)

Es werden n Briefe mit entsprechenden Umschlägen an n verschiedene Personen geschrieben. Leider werden die Briefe aber per Zufall in die jeweiligen Couverts gesteckt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer der Briefe in den zugehörigen Umschlag gesteckt wurde?

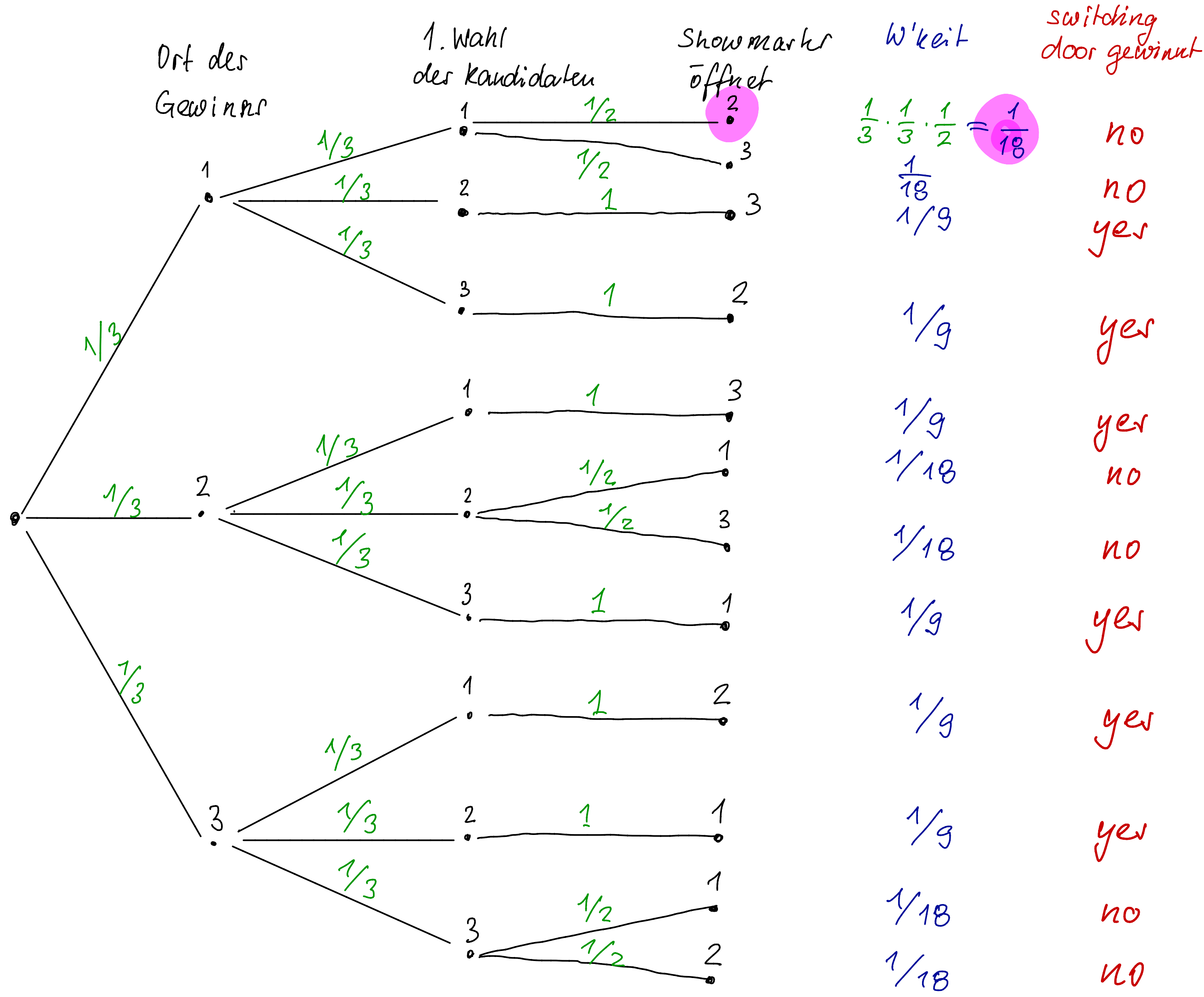
Lösung: Verallgemeinerung des Resultats von vorhin

$$p(\text{“mind. einer richtig”}) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$
$$\approx 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} \approx 0.632$$

Dabei haben wir in der Exponentialreihe

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} \pm \ldots$$

$x = 1$ eingesetzt.


Ort des Gewinns
1. Wahl der Kandidaten
Showmaster öffnet
W'keit
switching door gewinnt
1/3
1/2
1
1/3 · 1/3 · 1/2 = 1/18
1/18
1/9
1/9
1/9
1/18
1/18
1/9
1/9
1/9
1/18
1/18
no
no
yes
yes
yes
no
no
yes
yes
yes
no
no

The Monty Hall Three Door Puzzle

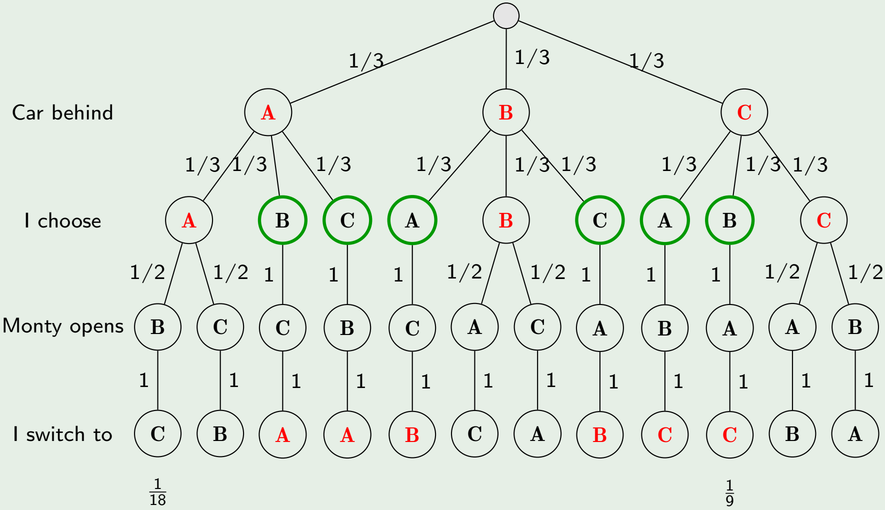
Example

In einer Show kann ich als Kandidat einen grossen Preis (ein Auto) gewinnen, indem ich eines von drei Toren auswähle, hinter dem sich der Preis befinden könnte. Nachdem ich mich festgelegt habe, öffnet der Showmaster eines der verbleibenden Tore, hinter dem sich der Preis nicht befindet: dort befindet sich jeweils eine Ziege. Nun kann ich meine erste Wahl nochmals überdenken und auf Wunsch ändern: Soll ich das Tor wechseln oder soll ich beim ursprünglich gewählten Tor bleiben? Wie gross sind die jeweiligen Gewinn-Wahrscheinlichkeiten bei den Strategien "wechseln" oder "nicht wechseln"?

Lösung: Wir nummerieren die drei Tore der Reihe nach mit $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$. Wir erstellen einen Entscheidungsbaum:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass das Auto hinter einem der Tore $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ steckt ist jeweils $1/3$.
- In jedem dieser Fälle wähle ich eines der Tore aus. Es gibt jetzt zwei Fälle:
    1. Habe ich das Tor mit dem Auto ausgewählt, öffnet der Showmaster mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ eines der beiden anderen Tore.
    2. Habe ich nicht das Gewinntor ausgewählt, dann bleibt dem Shomaster nur dasjenige Tor zu öffnen, hinter dem das Auto nicht versteckt ist.

Example (Fort.)



The Monty Hall Three Door Puzzle (Fort.)

Example (Fort.)

- Jeder Pfad, der zu keinem Gewinn führt tritt mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_L = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \;=\; \frac{1}{18}$$

  auf. Es gibt 6 solche Pfade;also hat man folgende Wahrscheinlichkeit **nicht zu gewinnen**:

$$P_L = 6 \cdot \frac{1}{18} \;=\; \frac{1}{3}$$

- Jeder Pfad, der zu einem Gewinn führt, tritt mit der Wahrscheinlichkeit

$$p_G = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \;=\; \frac{1}{9}$$

  auf. Es gibt 6 solche Pfade; also hat man folgende Wahrscheinlichkeit **zu gewinnen** (falls man die Strategie "Tor wechseln" verwendet):

$$P_G = 6 \cdot \frac{1}{9} \;=\; \frac{2}{3}$$

Übersicht

1 Einführung

2 Wahrscheinlichkeitstheorie

3 Der Satz von Bayes

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen

Definition (Wahrscheinlichkeit eines beliebigen Ereignisses)

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse s in A:

$$p(A) = \sum_{s \in A} p(s).$$

Example

Ein gezinkter Würfel hat die Eigenschaft, dass die Zahl 3 doppelt so häufig wie jede andere Zahl fällt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt man mit diesem Würfel eine ungerade Zahl?

Lösung: Sei p die Wahrscheinlichkeit, irgend eine Zahl, ausser 3 zu werfen. Dann hat man

W'keit 1, 2, 4, 5 od. 6 zu werfen

$$p = p(1) = p(2) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{2}p(3)$$

W'keit eine 2 zu werfen.

$$1 = \underbrace{5p}_{} + \underbrace{2p}_{\text{W'keit eine 3 zu werfen}} = 7p \Rightarrow p = 1/7$$

$$p(1) + p(3) + p(5) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \hat{=} 57\%$$

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen (Fort.)

Example

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten muss 1 ergeben:

$$1 = \sum_{k=1}^{6} p(k) = 5p + 2p = 7p \qquad \text{daraus folgt} \quad p = \frac{1}{7}$$

und somit

$$p(1) = p(2) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{7} \quad \text{und} \quad p(3) = \frac{2}{7}.$$

Schliesslich hat man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p(\text{“ungerade Zahl”}) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7} \approx 0.57.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Typische Frage: “Beim dreimaligen Werfen einer fairen Münze wissen wir, dass beim ersten Mal Zahl geworfen wurde. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine ungerade Anzahl *Zahlen* geworfen wurden?”

Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Sind A und B zwei Ereignisse mit $p(B) > 0$, dann bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit von A unter der Voraussetzung B mit $p(A|B)$. "W'keit von A unter der Voraussetzung, dass B eingetreten ist"

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Typische Frage: “Beim dreimaligen Werfen einer fairen Münze wissen wir, dass beim ersten Mal Zahl geworfen wurde. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass eine ungerade Anzahl *Zahlen* geworfen wurden?”

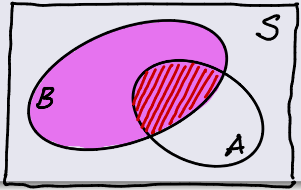
Definition (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Sind A und B zwei Ereignisse mit $p(B) > 0$, dann bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit von A unter der Voraussetzung B mit $p(A|B)$.

Theorem (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A unter der Voraussetzung, dass Ereignis B eingetreten ist, ist gegeben durch

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$



Das Bsp mit dem 3maligen Würfeln:

$$S = \{(KKK), (KKZ), (KZK), (KZZ), (ZKK), (ZKZ), (ZZK), (ZZZ)\}$$

B = "Beim 1. Wurf wurde eine Zahl geworfen"

$$\stackrel{!}{=} \{(ZKK), (ZKZ), (ZZK), (ZZZ)\}$$

A = "Ungerade Anzahl Zahl geworfen

$$= \{(KKZ), (KZK), (ZKK), (ZZZ)\}$$

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{|A \cap B| / |S|}{|B| / |S|} = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Fort.)

Example (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Bei einem bestimmten Lottospiel muss man 6 Zahlen zwischen 1 und 30 raten. Nun werden in der Ziehung die Zahlen 1, 14, 15, 20, 23 und 27 gezogen. Sie erfahren aber lediglich, dass die Zahl 15 gezogen wurde. Um wieviel wird Ihre Gewinnchance durch diese Information vergrössert?

Lösung: Wir betrachten die beiden Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \text{“Die Zahlen } 1,\ 14,\ 15,\ 20,\ 23 \text{ u. } 27 \text{ wurden gezogen”}, \\ B &= \text{“Die Zahl } 15 \text{ wurden gezogen”}, \end{aligned}$$

Dann berechnen wir

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{\binom{30}{6}}}{\frac{\binom{29}{5}}{\binom{30}{6}}} = \frac{1}{\binom{29}{5}}. = 5 \cdot \frac{1}{\binom{30}{6}}.$$

Somit sind die Gewinnchancen um den Faktor 5 gestiegen; denn die ursprüngliche Gewinnchance war $\frac{1}{\binom{30}{6}}$.

Unabhängige Ereignisse

Definition (Unabhängige Ereignisse)

Man nennt zwei Ereignisse A und B genau dann **unabhängig**, falls $p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$.

Example

Zeigen Sie, dass die folgenden drei Gleichungen (unter bestimmten Bedingungen) gleichwertig sind:

$$
\begin{aligned}
p(A \cap B) &= p(A)\,p(B) \\
p(A|B) &= p(A) \\
p(B|A) &= p(B)
\end{aligned}
$$

Lösung: Man hat beispielsweise

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)\,p(B)}{p(B)} = p(A)$$

Example

Ein Bitstring der Länge 4 wird zufällig erzeugt. Wir betrachten die beiden Ereignisse

- $A =$ „String enthält mindestens zwei aufeinanderfolgende 0-en„.
- $B =$ „erstes Bit ist 0„ und

Bestimmen Sie $p(A|B)$ und prüfen Sie, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind.

Lösung: Mit $|S| = 2^4 = 16$ und

$$A = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 1000, 1001, 1100\}, \qquad |A| = 8$$
$$B = \{0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111\}, \qquad |B| = 8$$

erhält man

$$p(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \qquad p(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|} = \frac{5}{16}$$
$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{5/16}{1/2} = \frac{5}{8} \neq p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Fort.)

Example

Eine Familie habe zwei Kinder. Wir betrachten die beiden Ereignisse

- $B =$ „Familie hat mindestens einen Jungen" und
- $A =$ „Familie hat genau zwei Jungen".

Bestimmen Sie $p(A|B)$ und prüfen Sie, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind.

$A \cap B = A$

Lösung: M stehe für Mädchen und K für Knabe. Dann ist der Stichprobenraum

$$S = \{(MM), (MK), (KM), (KK)\}, \quad \text{und} \quad B = \{(MK), (KM), (KK)\}, \quad A = \{(KK)\}.$$

Damit folgt

W'keit, dass die Fam. 2 Jungen hat, wenn man sieht, wie ein Junge im Garten spielt

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{|A|/|S|}{|B|/|S|} = \frac{|A|}{|B|} = \frac{1}{3} > p(A) = \frac{1}{4} = \frac{|A|}{|S|}$$

Da $p(A|B) \neq p(A)$ sind die beiden Ereignisse A und B nicht unabhängig.

Übersicht

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Theorem (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Voraussetzungen:

- $B_1, \ldots, B_k \subset S$ *eine vollständige Zerlegung von* S *(paarweise disjunkte Ereignisse deren Vereinigung ganz* S *ist)*
- $p(B_i) > 0$ *für alle* i

Dann gilt für ein Ereignis A

$$\boxed{p(A) = \sum_{i=1}^{k} p(A \cap B_i) \; = \sum_{i=1}^{k} p(A|B_i) \cdot p(B_i)}$$

Für die bedingte W'keit von A *unter der Voraussetzung* C *gilt:*

$$\boxed{p(A|C) = \frac{1}{p(C)} \sum_{i=1}^{k} p\left(A \cap (B_i \cap C)\right) \; = \sum_{i=1}^{k} p(A|B_i \cap C) \cdot p(B_i|C)}$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Die Mengen B_1, B_2 bis B_8 bilden eine vollständige Zerlegung des Stichprobenraums Ω (links). Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A lässt sich mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit ausdrücken (rechts).

Bed. W'keit

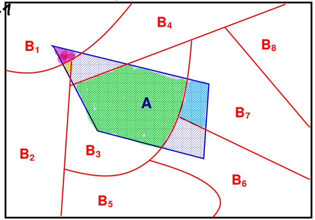
$$P(A \mid B_k) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(B_k)}$$

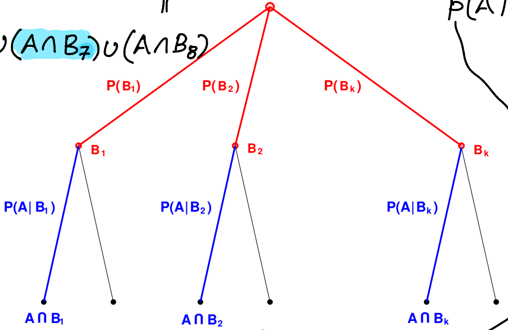
$$\phi$$

$$A = (A\cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A\cap B_3) \cup \ldots \cup (A \cap B_7) \cup (A \cap B_8)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{8} (A \cap B_k)$$

S





$$\bigcup_{k=1}^{8} B_k = S \qquad B_i \cap B_j = \phi, \forall i \neq j$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{8} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{8} P(A \mid B_k)\, P(B_k)$$

(3) Kolmogorov

Beweis:
Wir nutzen hier die Eigenschaften einer vollständigen Zerlegung von S (alle Schnittmengen $A \cap B_i$ sind paarweise disjunkt) und die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit aus:

$$\begin{aligned} p(A) &= p((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_k)) \\ &= p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \cdots + p(A \cap B_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} p(A \cap B_i) \ = \ \sum_{i=1}^{k} p(A|B_i) \cdot p(B_i). \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit verwendet

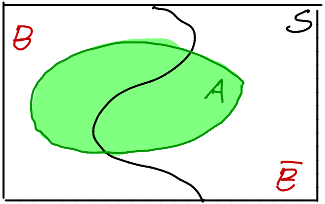
$$p(A|B_i) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(B_i)}.$$

Spezialfall (für $n=2$ Mengen)

- $B, \overline{B} \subset S$ (vollständige Zerlegung)
- $p(B), p(\overline{B}) > 0$
- Ereignis A

$B \cup \overline{B} = S$

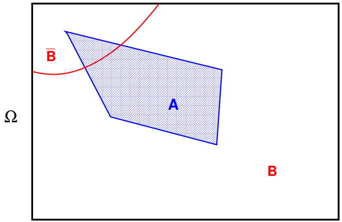
$B \cap \overline{B} = \emptyset$

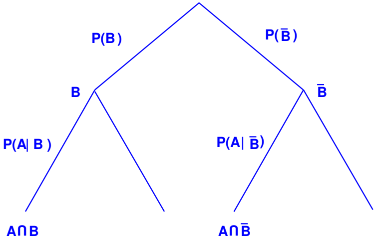


Dann gilt:

$$\boxed{p(A) \quad = \quad p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\overline{B}) \cdot p(\overline{B})}$$

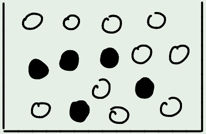
Die Mengen B, $\overline{B}$ bilden eine vollständige Zerlegung des Stichprobenraums Ω (links). Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A lässt sich mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit ausdrücken (rechts).





Example

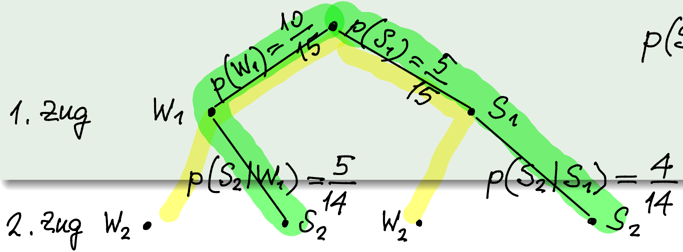
Aus einer Urne mit 10 weissen und 5 schwarzen Kugeln wird zweimal hintereinander je eine Kugel gezogen, wobei nicht zurückgelegt wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die zweite entnommene Kugel schwarz?



W_k : Beim k. Zug $(k=1,2)$ wird eine weisse Kugel gezogen

S_k : dito für schwarz

Verwende einen Baum:



$$p(S_2)=p(S_2|W_1)\cdot p(W_1)+p(S_2|S_1)p(S_1)$$

$$= \frac{10}{15}\cdot\frac{5}{14}+\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}$$

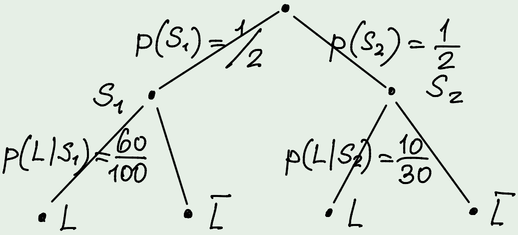
$$=\frac{50+20}{15\cdot 14}=\frac{70}{15\cdot 14}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Example

Eine Schachtel enthält 60 lange und 40 kurze Schrauben. Eine zweite Schachtel enthält 10 lange und 20 kurze Schrauben. Nun wird per Zufall aus einer der beiden Schachteln eine Schraube entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Schraube lang?

Lösung: Tafel! Wir verwenden folgenden Baum



Wahl der Schachtel (S_1 für Schachtel 1)

Wahl der Schraube (L für lang)

$$p(L) = p(L|S_1)p(S_1) + p(L|S_2)p(S_2) = \frac{60}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10}{30} \frac{1}{2} = \frac{7}{15}$$

Der Satz von Bayes

Oft kennt man die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten $p(A|B_j)$. Man ist aber interessiert an den Wahrscheinlichkeiten $p(B_j|A)$. Beispielsweise wenn $A =$ "Email ist SPAM" und $B_j =$ "Email enthält das Wort j" (wobei j z.B. Superangebot).

Theorem (Der Satz von Bayes)

Voraussetzungen:

- $B_1, \ldots, B_k \subset S$ *eine vollständige Zerlegung von S*
- $p(B_i) > 0$ *für alle* i
- *Ereignis* A *mit* $p(A) > 0$

Dann gilt für jedes j*:*

$$p(B_j|A) = \frac{p(A|B_j)\, p(B_j)}{p(A)} = \frac{p(A|B_j)\, p(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} p(A|B_i) \cdot p(B_i)}$$

Der Satz von Bayes (Fort.)

Beweis:
Für die Formel von Bayes nutzen wir zunächst die Identitäten

$$p(A \cap B_j) = p(A|B_j) \cdot p(B_j) \; = \; p(B_j|A) \cdot p(A).$$

Kombinieren wir nun die beiden rechten Seiten und nutzen die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit, so erhalten wir

$$p(B_j|A) = \frac{p(A|B_j) \cdot p(B_j)}{p(A)} \; = \; \frac{p(A|B_j) \cdot p(B_j)}{\sum_{i=1}^{k} p(A|B_i) \cdot p(B_i)}.$$

Der Satz von Bayes (Fort.)

Spezialfall:

- $B, \overline{B} \subset S$ (vollständige Zerlegung)
- $p(B), p(\overline{B}) > 0$
- Ereignis A mit $p(A) > 0$

  Dann gilt:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{p(A|B)\, p(B)}{p(A|B) \cdot p(B) + p(A|\overline{B}) \cdot p(\overline{B})}}$$

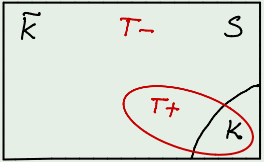
Der Satz von Bayes (Anwendungsbeispiel)

Example (Medizinischer Test)

Eine bestimmte Krankheit komme bei 0.5% der Bevölkerung vor. Ein Test zur Auffindung der Krankheit führe bei 99% der Kranken zu einer (positiven) Reaktion, aber auch bei 2% der Gesunden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, deren Test positiv ist, die Krankheit wirklich hat?

Lösung: Wir verenden folgende Bezeichnungen:

- Menge aller Kranken: K und Menge aller Gesunden: $\overline{K}$.
- Menge der Personen mit positiver (negativer) Testreaktion: T+ (T−).



Dann wissen wir:

- $p(K) = \frac{5}{1000}$ und $p(\overline{K}) = \frac{995}{1000}$
- $p(T+\,|K) = \frac{99}{100}$ und $p(T+\,|\overline{K}) = \frac{2}{100}$

Weiter liefert der Satz über die totale Wahrscheinlichkeit:

$$p(T+) = p(T+\,|K)\cdot p(K) + p(T+\,|\overline{K})\cdot p(\overline{K})$$

$$= \frac{99}{100}\cdot\frac{5}{1000} + \frac{2}{100}\cdot\frac{995}{1000} = 0.99\cdot 0.005 + 0.02\cdot 0.995$$

Example (Medizinischer Test - Fort.)

Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$p(K|T+) = \frac{p(T+|K) \cdot p(K)}{p(T+)}$$

$$p(K|T+) = \frac{p(T+|K) \cdot p(K)}{p(T+|K) \cdot p(K) + p(T+|\overline{K}) \cdot p(\overline{K})}$$

$$= \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{5}{1000}}{\frac{99}{100} \cdot \frac{5}{1000} + \frac{2}{100} \cdot \frac{995}{1000}} = \frac{495}{2485} \approx 0.2$$

Das bedeutet, dass von allen Personen, an denen eine (positive) Testreaktion beobachtet wird, nur etwa 20% wirklich krank sind!

$$p(K|T-) = \frac{p(T-|K)\,p(K)}{p(T-)}$$

$$p(T-) = p(T-|K)\,p(K) + p(T-|\bar{K})\,p(\bar{K})$$

Spezifität und Sensitivität eines Tests

Im Zusammenhang mit Tests verwendet man auch die folgenden Begriffe:

W'keit für einen neg. Test wenn man gesund ist.

1. Die Spezifität eines Tests ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(T - | \overline{K})$ für einen negativen Test, unter der Voraussetzung, dass der Proband gesund ist.
2. Die Sensitivität eines Tests ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(T + | K)$ für einen positiven Test, unter der Voraussetzung, dass der Proband krank ist.

W'keit für einen pos. Test. wenn man krank ist

Beide sind Gütekriterien eines Tests und sollten nahe bei 1 liegen.

Example

Berechnen Sie die beiden Grössen für das obige Beispiel!

1) Spezifität $= p(T- | \overline{K}) = 1 - p(T+ | \overline{K}) = 1 - 0.02 = 0.98$

2) Sensitivität $= p(T+ | K) = 0.99$

Ein ganz einfacher SPAM-Filter

Example (Stock/Undervalued)

Ein Bayes'scher SPAM-Filter wurde mit 2000 SPAM-Mails und 1000 Nicht-SPAM-Mails trainiert. Das Wort "*Stock*" erscheint in 400 SPAM-Mails und 60 Mails, die nicht SPAM sind. Das Wort "*Undervalued*" kommt in 200 SPAM-Mails und in 25, die nicht SPAM sind vor. Mit welcher W'keit ist ein E-Mail mit beiden Worten SPAM? Wird die Meldung als SPAM taxiert wenn der Threshold 0.9 ist?

Lösung: Verwenden Sie die Approximation

$$r(w) = \frac{p(w)}{p(w) + q(w)}$$

wobei $r(w)$ die W'keit dafür ist, dass das E-Mail SPAM ist, falls das Wort w vorkommt; $p(w)$ ist die W'keit, dass SPAM das Wort w enthält und $q(w)$ ist die W'keit, dass Nicht-SPAM das Wort w enthält.

$$\underset{\text{SPAM}}{p(S} \mid \underset{\substack{\text{enthält Worte} \\ \text{"Stock/undervalued"}}}{W)} \overset{\text{Bayes}}{=} \frac{p(W|S)\,p(S)}{p(W)} \overset{\text{tot. W'keit}}{=} \frac{p(W|S)\,p(S)}{p(W|S)\,p(S) + p(W|\bar{S})\,p(\bar{S})}$$

Beim Anlernen: $p(S) = p(\bar{S}) = \frac{1}{2}$

Damit

$$p(S|W) = \frac{p(W|S)}{\underbrace{p(W|S)}_{p(W)\text{: W'keit für "SPAM enthält Wort"}} + \underbrace{p(W|\bar{S})}_{q(W)\text{: W'keit für "Nicht-SPAM enthält Wort"}}}$$

für Stock

$$p(W) = \frac{400}{2000} \qquad q(W) = \frac{60}{1000}$$

$$p(\text{SPAM} \mid \text{"Stock"}) = \frac{400/2000}{400/2000 + 60/1000} = \frac{10}{13} = 0.769 < 0.9 \Rightarrow \underline{\neg\text{SPAM}}$$

Für undervalued: $= 0.8 < 0.9 \Rightarrow \underline{\neg\text{SPAM}}$

Für beide:

$$\ldots = \frac{p(\text{Stock})\,p(\text{undervalued})}{\ldots + q(\text{Stock})\,q(\text{undervalued})} = \frac{0.2 \cdot 0.1}{0.2 \cdot 0.1 + \underset{\substack{\| \\ \frac{60}{1000}}}{0.06} \cdot \underset{\substack{\| \\ \frac{25}{1000}}}{0.025}}$$

$= 0.93 > 0.9 \rightsquigarrow \underline{\text{SPAM}}$

Zusammenfassung

Wir haben folgende Begriffe kennen gelernt und können sie in Problemen aus dem Informatikalltag anwenden:

- Stichprobenraum, Zufallsexperiment, Ergebnis eines Zufallsexperiments sowie Ereignis.
- Wahrscheinlichkeit von gleich verteilten Zufallsexperimenten.
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten, die totale Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes.