Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Discrete Probability II - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

I.BA_DMATH, Semesterwoche 7

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* ***kurz: KR***

Binomialverteilung

1. **KR, Abschnitt 6.2, Beispiel 8, Seite 406:** Wird eine bestimmte Münze geworfen, erscheint mit einer W'keit $p = 2/3$ Kopf. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass exakt 4 Mal Kopf erscheint, wenn man den Würfel 7 Mal wirft?

I. Eine Maschine produziert mit einer W'keit von $p = 0.01$ $(0 < p < 1)$ defekte Teile. Wir nehmen an, dass die Produktion defekter Teile unabhängig ist (was wohl in der Realität nicht ganz stimmt). Es werden $n = 1000$ Teile produziert. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass (a) exakt 10 Teile defekt sind, (b) weniger als 10 Teile defekt sind, und (c) mehr als 20 Teile defekt sind?

2. Fünf faire Münzen werden gleichzeitig geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man (a) 0-Mal Kopf, (b) genau 1-Mal Kopf, (c) mindestens einmal Kopf, (d) nicht mehr als 4-Mal Kopf wirft.

Poissonverteilung

3. Eine Telefonzentrale kann während Stosszeiten durchschnittlich 240 Anrufe pro Stunde entgegen nehmen. Die Telefonzentrale kann maximal 8 Anrufe pro Minute bewältigen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Telefonzentrale während einer bestimmten Minute überlastet?

II. Die Anzahl Fehler auf einer Seite Source-Code ist annähernd Poissonverteilt. Durchschnittlich fand man auf einer Seite 3 Fehler. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass (a) auf einer Seite keine Fehler, (b) genau ein Fehler, (c) höchstens 2 Fehler und (d) mehr als 2 Fehler vorkommen?

4. Wir betrachten einen Prozess, der $n = 100$ Mal abläuft und mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0.05$ erfolgreich ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man $k = 10$ Erfolge hat? Verwenden Sie die (a) Binomial- und approximativ die (b) Poissonverteilung!

Zufallsvariablen, Erwartungswerte, Varianz

5. **KR, Abschnitt 6.4, Aufgabe 3:** Ein Würfel wird zehnmal geworfen. Wieviel Mal erwarten Sie dabei den Ausgang „6"?
6. **KR, Abschnitt 6.4, Aufgabe 11:** Wir wollen einen Würfel höchstens zehnmal werfen, aber dann aufhören, wenn eine „6" erscheint. Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Würfe.
7. **KR, Abschnitt 6.4, Aufgabe 23:** Eine faire Münze wird zehnmal geworfen. Unsere Zufallsvariable zähle das Ereignis „Kopf". Bestimmen Sie die Varianz dieser Zufallsvariablen.

III. In einer Urne befinden sich 3 weisse und 2 schwarze Kugeln. Nacheinander werden zufällig 3 Kugeln gezogen, wobei wir jeweils die Kugel nach dem Ziehen wieder zurücklegen. Bestimmen Sie die Warscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariabeln

$$X = \text{“Anzahl der erhaltenen schwarzen Kugeln bei drei Ziehungen mit Zurücklegen”}.$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X?

IV. Die Zufallsvariable X zählt wie oft Kopf erscheint, die Zufallsvariable Y zählt wie oft Zahl erscheint beim n-maligen Wurf einer fairen Münze. Zeigen Sie, dass X und Y nicht unabhängig sind.

V. Zwei Würfel werden so lange geworfen, bis die Augensumme 7 erscheint. Wie oft muss man die Würfel im Schnitt werfen, bis dieses Ereignis eintritt?

Lösungen

1. 560/2187

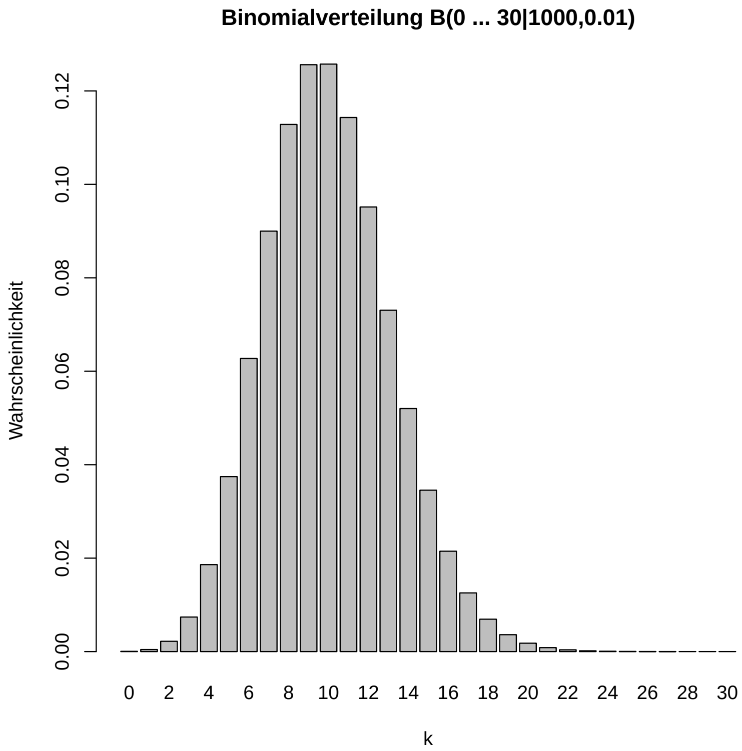
I. Für all diese Aufgaben wird die Binomialverteilung verwendet: $B(k|n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
Dabei ist $n = 1000$ und $p = 0.01$.

a) $k = 10$, daraus folgt: $B(10|1000,0.01) = \binom{1000}{10} 0.01^{10} (0.99)^{990} = 0.1257 \approx 12.6\%$

b) $k < 10$, daraus folgt: $\sum_{i=0}^{9} (B(i|1000,0.01)) = \sum_{i=0}^{9} (\binom{1000}{i} 0.01^i (0.99)^{1000-i}) = 0.4573 \approx 45.8\%$

c) $k > 20$, daraus folgt: $1 - \sum_{i=0}^{20} (B(i|1000,0.01)) = 1 - \sum_{i=0}^{20} (\binom{1000}{i} 0.01^i (0.99)^{1000-i}) = 0.001496 \approx 0.15\%$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für $n = 1000$, $p = 0.01$ ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



2. (a) 0.03125, (b) 0.15625, (c) 0.96875, (d) 0.96875.

3. $1 - \sum_{k=0}^{8} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = 0.0214$

II. Für all diese Aufgaben wird die Poisonverteilung verwendet: $P(k,\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$.
Dabei ist $\mu = 3$.

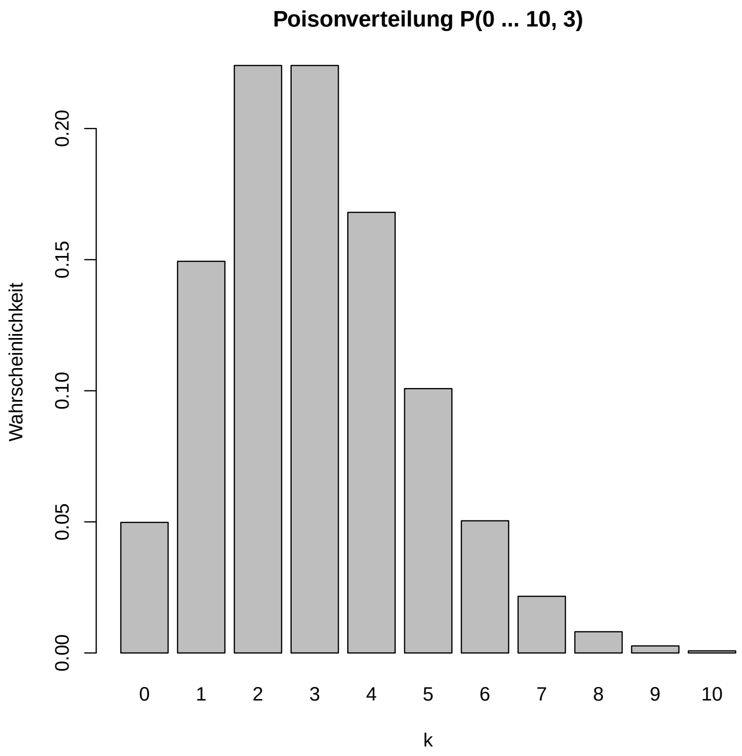
a) $k = 0$, daraus folgt: $P(0,3) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = 0.0498 \approx 5\%$

b) $k = 1$, daraus folgt: $P(1,3) = \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 0.1494 \approx 14.9\%$

c) $k <= 2$, daraus folgt: $\sum_{i=0}^{2} P(i,3) = \sum_{i=0}^{2} (\frac{3^i}{i!} e^{-3}) = 0.4232 \approx 42.3\%$

d) $k > 2$, daraus folgt: $1 - \sum_{i=0}^{2} P(i,3) = 1 - \sum_{i=0}^{2} (\frac{3^i}{i!} e^{-3}) = 0.5768 \approx 57.7\%$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion für $\mu = 3$ ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



4. (a) $\binom{n}{p} p^k (1-p)^{n-k} = 0.0167$, (b) $\frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = 0.0181$ (wobei $\mu = np$).
5. $5/3$
6. ≈ 5.03
7. $5/2$

III. Die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen ist $p = 2/5$. Die Anzahl schwarze Kugeln X bei $n = 3$ und $p = 2/5$ ist binomialverteilt, d.h. man hat

- 0 schwarze Kugeln [1]:
  $p(X=0) = B(0|3, \frac{2}{5}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{3}{0} \frac{2}{5}^0 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$
- 1 schwarze Kugeln:
  $p(X=1) = B(1|3, \frac{2}{5}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{3}{1} \frac{2}{5}^1 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{54}{125}$
- 2 schwarze Kugeln:
  $p(X=2) = B(2|3, \frac{2}{5}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{3}{2} \frac{2}{5}^2 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^1 = \frac{36}{125}$
- 3 schwarze Kugeln:
  $p(X=3) = B(3|3, \frac{2}{5}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{3}{3} \frac{2}{5}^3 \left(1 - \frac{2}{5}\right)^0 = \frac{8}{125}$

[1] Wahrscheinlichkeit für auftreten: $\left(1 - \frac{2}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$; Anzahl Kombinationen: $\binom{3}{0} = 1$

Allgemein, d.h. für $0 \leq i \leq 3$:
$p(X=i) = B(i|3, \frac{3}{5}) = \binom{3}{i} \frac{2}{5}^i \left(1-\frac{2}{5}\right)^{3-i}$. Daraus ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariablen X:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

Sei x_i die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln. Dann gilt für den **Erwartungswert** der Zufallsvariablen $X = x_i$:

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}(x_i \cdot P(X=x_i)) \;=\; 0\cdot\frac{27}{125} + 1\cdot\frac{54}{125} + 2\cdot\frac{36}{125} + 3\cdot\frac{8}{125} \;=\; 1.2$$

Dies ist auch gleich $n\,p = 3\,2/5 = 6/5$ wie man das bei einer solchen Binomialverteilung erwartet. Für die **Varianz** erhält man:

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=0}^{n}((x_i - E(X))^2 \cdot P(X=x_i)) \\
&= (0-1.2)^2\cdot\frac{27}{125} + (1-1.2)^2\cdot\frac{54}{125} + (2-1.2)^2\cdot\frac{36}{125} + (3-1.2)^2\cdot\frac{8}{125} \\
&= \frac{36}{25}\cdot\frac{27}{125} + \frac{1}{25}\cdot\frac{54}{125} + \frac{16}{25}\cdot\frac{36}{125} + \frac{81}{25}\cdot\frac{8}{125} \;=\; 0.72
\end{aligned}$$

Dies ist gleich $n\,p\,(1-p) = 3\,2/5\,3/5 = 18/25$, wie man das bei einer solchen Binomialverteilung erwartet.

IV. Sei n die Anzahl der Würfe, die Zufallsvariable X gleich der Anzahl der Kopfwürfe und die Zufallsvaraible Y gleich der Anzahl der Zahlwürfe. Der Stichprobenraum, beispielsweise für $n=3$ ist

$$S = \{KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZZK, ZZZ\}$$

Dann folgen durch einfaches Abzählen für eine faire Münze die Wahrscheinlichkeiten $P(X=i \wedge Y=j)$, $P(X=i)$ und $P(Y=j)$; sie sind in folgender Tabelle dargestellt

	$Y=j$				
$X=i$	0	1	2	3	$P(X=i)$
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
1	0	0	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
2	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
$P(Y=j)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

Man sieht sofort, dass z.B. $P(X=0 \wedge Y=3) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = P(X=0)\cdot P(Y=3)$ d.h. die beiden Zufallsvariablen X und Y sind nicht unabhängig.

V. Sei $X =$ "Anzahl Würfe mit 2 Würfeln bis zum ersten mal die Augensumme 7 erscheint"

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X ist gegeben durch:

$$P(X=k) = \underbrace{\left(1-\frac{1}{6}\right)^{k-1}}_{(k-1)-\text{mal Augensumme verschieden von 7}} \cdot \underbrace{\frac{1}{6}}_{1-\text{mal Augensumme 7}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\frac{1}{6}$$

Damit lässt sich der Erwartungswert der Zufallsvariablen X, $E(X) =$ "mittlere Anzahl Würfe bis zum ersten Mal die Augensumme 7 erscheint" wie folgt berechnen:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k(\frac{5}{6})^{k-1}\frac{1}{6} \;=\; \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty} k(\frac{5}{6})^{k-1} \;=\; \frac{1}{6}\frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} \;=\; 6$$

Diese Summe kann man berechnen, wenn man bemerkt, dass es sich dabei um die Ableitung der geometrischen Reihe handelt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad |x|<1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x|<1.$$