Counting (Grundlagen des Zählens)

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studiengang Informatik
Hochschule Luzern, Informatik

I.BA_DMATH

Inhalt

1. Die Grundlagen des Zählens
2. Das Schubfachprinzip
3. Permutationen und Kombinationen
4. Verallgemeinerte Permutationen und Kombinationen
5. Binomialkoeffizienten

Die StudentIn kann

- die grundlegenden Prinzipien des Zählens anwenden
- kennt das Einschluss/Ausschlussprinzip und kann es anwenden
- kennt Permutationen und Kombinationen und kann diese in kombinatorischen Beweisen verwenden
- kennt den Binomialkoeffizienten und den Binomialsatz
- kennt Permutationen und Kombinationen mit Wiederholung

Übersicht

1. Die Grundlagen des Zählens
2. Das Schubfachprinzip
3. Permutationen und Kombinationen
4. Verallgemeinerte Permutationen und Kombinationen
5. Binomialkoeffizienten

Grundlegende Zählprinzipien

Definition (Produktregel)

Falls ein erstes Ereignis aus n_1 Möglichkeiten und danach ein zweites (unabhängig vom ersten Ereignis) aus n_2 Möglichkeiten ausgewählt werden kann, dann gibt es ingesamt $n = n_1 \cdot n_2$ Möglichkeiten, die beiden Ereignisse zu wählen.

Example

Wie viele Nummernschilder lassen sich herstellen, wenn jedes Schild aus einer Folge von drei Buchstaben und drei Zahlen besteht?

Lösung: Das erste Zeichen kann aus 26 Buchstaben ausgewählt werden, ebenso das zweite und dritte: dies ergibt 26^3 verschiedene, dreistellige Buchstabenkombinationen. Die drei Ziffern lassen sich auf 10^3 Arten auswählen. Total hat man $26^3 \cdot 10^3 = 17'576'000$ unterschiedliche Nummernschilder.

Produktregel

$S = \{s_1, s_2, s_3, \ldots, s_{n-1}, s_n\}$: fixe Aufzählung der El. von S

$\{s_1, s_2\} = $ "$1 \; 1 \; 0 \; \cdots \; 0 \; 0$" ; $\phi = \underbrace{0\,0 \cdots 0}_{n \text{ Nullen}}$; $S = \underbrace{1\,1 \cdots 1}_{n \text{ Einsen}}$

Example

Man zeige mit Hilfe der Produktregel, dass eine endliche Menge mit $|S|$ Elementen genau $2^{|S|}$ Teilmengen enthält, d.h. $|2^S| = 2^{|S|}$.

Lösung: Zähle die Elemente von S in einer beliebigen Reihenfolge auf. Jede Teilmenge lässt sich nun als Bitstring schreiben. Falls ein Element in einer Teilmenge liegt, setze an die entsprechende Stelle eine 1, sonst eine 0. Dadurch ergibt sich eine bijektive Abbildung zwischen 2^S (Menge der Teilmengen von S, d.h. Potenzmenge von S) und den Bitstrings der Länge $|S|$. Die Anzahl solcher Bitstrings ist aber $2^{|S|}$.

Damit ist die Behauptung bewiesen!

Es gibt 2^n Möglichkeit einen Bitstring der Länge n zu wählen, d.h. es gibt genau so viele Teilmengen von S, d.h. $|2^S| = 2^n = 2^{|S|}$ weil $n = |S|$.

Produktregel und kartesisches Produkt von Mengen

Für die Menge der Elemente des kartesischen Produkts der Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gilt die Produktregel:

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|$$

Example

Wie viele Nummernschilder lassen sich herstellen, wenn jedes Schild aus einer Folge von drei Buchstaben und drei Zahlen besteht?

Lösung: Man definiert

$$A_1 = A_2 = A_3 = \{A, B, \ldots, Y, Z\}; A_4 = A_5 = A_6 = \{0, 1, \ldots, 8, 9\}$$

Dann hat man $(A, A, Z, 0, 0, 1)$

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \times A_6| = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^3$$

Summenregel

Definition (Summenregel)

Kann ein erstes Ereignis auf n_1 Arten eintreten und ein zweites Ereignis auf n_2 Arten, wobei nicht beide Ereignisse gleichzeitig eintreten können, dann können die beiden Ereignisse auf $n_1 + n_2$ Arten eintreten

Example

Ein Student kann seine Projektarbeit aus drei Listen mit je 23, 15 bzw. 19 Arbeiten auswählen. Aus wie vielen Projekten kann er auswählen?

Lösung: Aus der ersten Liste kann er 23, aus der zweiten 15 und aus der dritten 19 Projekte auswählen: also total $23 + 15 + 19 = 57$ Projekte.

Summenregel und Vereinigung von Mengen

Für die Menge der Elemente einer Vereinigung paarweiser disjunkter Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(\forall i \forall j \ (A_i \cap A_j = \emptyset$ falls $j \neq i))$ gilt die Summenregel:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

Komplexere Zählprobleme lassen sich oft durch Anwendung der Produkt- und Summenregel lösen.

Example

Ein Passwort bestehe aus sechs bis acht Zeichen (Grossbuchstaben oder Ziffern) wobei mindestens ein Ziffer vorhanden sein muss. Wie viele mögliche Passwörter gibt es?

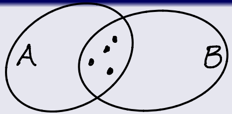
Lösung: Tafel! Sei P_6 die Anzahl gültiger Passwörter der Länge 6. Dito für P_7 und P_8.

P_6 = # aller PW der Länge 6 − # ungültige PW der Länge 6
$= 36^6 - 26^6$

Also $P = P_6 + P_7 + P_8 = \sum_{k=6}^{8} (36^k - 26^k) = 2'684'483'036'360$.

Theorem

Für zwei beliebige Mengen A und B gilt:



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Example

Wie viele Bitstrings der Länge 8 $\underbrace{\text{starten mit einer 1}}_{\text{liegen in } A}$, oder $\underbrace{\text{enden mit den beiden Bits 00?}}_{\text{liegen in } B}$

Lösung: Dank der Produktregel wissen wir, dass es $2^7 = 128$ Bitstrings gibt, die mit einer 1 beginnen und $2^6 = 64$ Bitstrings, die mit zwei Nullen (00) enden. Analog zeigt man, dass es $2^5 = 32$ Bitstrings gibt, die mit einer 1 beginnen **und** mit zwei Nullen enden.

Also hat man $128 + 64 - 32 = 160$ Bitstrings, die mit 1 beginnen **oder** mit zwei Nullen enden.

Anmerkung: Überprüfen Sie mit obiger Formel indem Sie die folgenden Mengen verwenden:

$|A \cap B| = 2^5$

$A =$ "Bitstrings der Länge 8, die mit 1 beginnen" $\quad |A| = 2^7$

$B =$ "Bitstrings der Länge 8, die mit 00 ~~beginnen~~ enden" $\quad |B| = 2^6$

Einschluss-/Ausschlussprinzip für 3 Mengen

$$|A \cup \underbrace{B \cup C}_{D}| = |A \cup D| \overset{\text{obige Regel}}{=} |A| + |D| - |A \cap D|$$

$$= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$

obige Regel + Distributivgesetz,

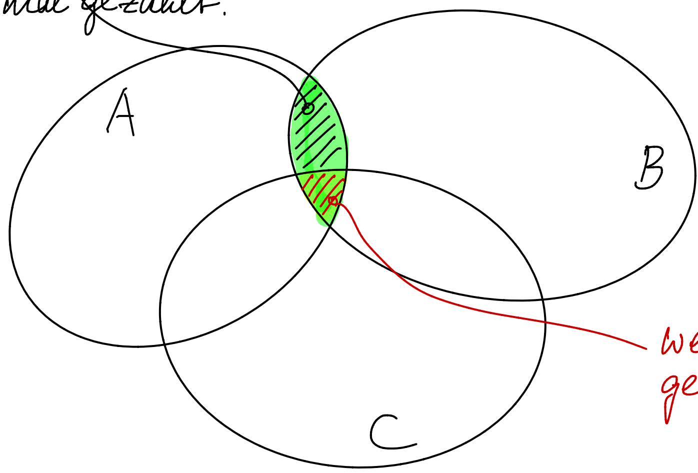
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - \Big(|A \cap B| + |A \cap C| - |\underbrace{(A \cap B) \cap (A \cap C)}_{A \cap B \cap C}| \Big)$$

Assoziativgesetz + $A \cap A = A$.

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

werden in $|A|+|B|+|C|$ zweimal gezählt.



werden 3-mal gezählt.

Für 4 Mengen:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| = {} & |A| + |B| + |C| + |D| && 4 \\ & - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| \\ & - |C \cap D| && 6 \\ & + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| && 4 \\ & + |B \cap C \cap D| \\ & - |A \cap B \cap C \cap D| && 1 \end{aligned}$$

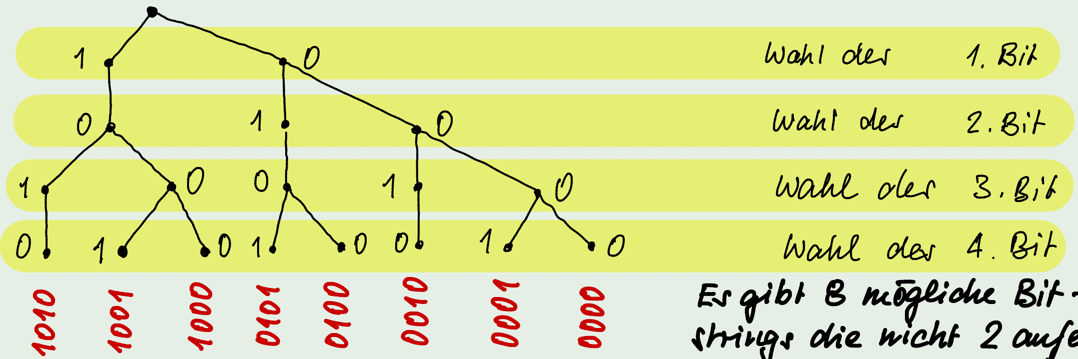
15 Terme

Zählprobleme können oft mit Baumdiagrammen gelöst werden.

Example

Wie viele Bitstrings der Länge 4 enthalten nicht zwei aufeinander folgende Einsen?

Lösung: Im Baum trage man alle möglichen Fälle ein und zähle diese am Ende!



Es gibt 8 mögliche Bit-strings die nicht 2 aufeinander folgende 1 enthalten

Übersicht

1. Die Grundlagen des Zählens
2. Das Schubfachprinzip
3. Permutationen und Kombinationen
4. Verallgemeinerte Permutationen und Kombinationen
5. Binomialkoeffizienten

Definition (Schubfachprinzip - Pigeonhole Principle)

Falls man $k + 1$ Objekte auf k Schubfächer verteilen muss, dann gibt es wenigstens ein Schubfach mit mehr als einem Objekt.

Example

k+1 Objekte

In einem Raum mit $\underbrace{367}_{k+1}$ Personen gibt es mindestens zwei mit dem selben Geburtstag; weil es ja nur $\underbrace{366}_{k}$ mögliche Geburtstage gibt!

k Schubfächer

Lösung: Tafel!

logisch !!?!

Während die Lösung in diesem Fall jedem Primarschüler einleuchtet, ist dies beim folgenden Beispiel nicht mehr der Fall.

Example

Zeige dass es für jede natürliche Zahl n ein Vielfaches ($k \cdot n$, $k \in \mathbb{N}$) gibt, welches in der Dezimaldarstellung lediglich Einsen und Nullen enthält.

Lösung: Betrachte die $n+1$ auf einander folgenden Zahlen $1, 11, 111, \ldots, 11\cdots1$. Berechne deren Reste nach Division durch n.

z.B. $n = 2$ $\quad 5 \cdot 2 = 10$ ist Vielfaches von 2 und enthält nur Einsen u. Nullen.

$n = 3 \quad 37 \cdot 3 = 111$

$n = 4 \quad 25 \cdot 4 = 100$

} Vielfaches von n enthält nur Einsen oder Nullen.

Für $n = 3$ betrachten wir die folgenden 4 aufeinander-folgenden Zahlen

$1 = a_1$ $\quad a_1 \bmod 3 = r_1 = 1$

$11 = a_2$ $\quad a_2 \bmod 3 = r_2 = 2$

$111 = a_3$ $\quad a_3 \bmod 3 = r_3 = 0$

$1111 = a_4$ $\quad a_4 \bmod 3 = r_4 = 1$

Es sind nur 3 Reste möglich, nämlich 0, 1, od. 2.

Es gibt zwei gleiche Reste

Es gibt 4 Reste, nämlich $a_i \bmod 3 = r_i \quad i = 1, 2, 3, 4$

$[a_4 \bmod 3 = a_1 \bmod 3]$

$(a_4 - a_1) \bmod 3 = 0$

$\Rightarrow$ $a_4 - a_1$ ist teilbar durch 3, oder $a_4 - a_1$ ist ein Vielfacher von 3. Also

$1111 - 1 = 1110$ ist ein Vielfacher von 3.

Verallgemeinertes Schubfachprinzip

Definition (Verallgemeinertes Schubfachprinzip)

Falls man N Objekte auf k Schubfächer verteilt, dann gibt es wenigstens ein Schubfach, welches mindestens $\lceil N/k \rceil$ Objekte enthält (Beweis: KR, p349).,

Example

$8.33\overline{3}$

Unter 100 Personen gibt es wenigstens $\lceil \underbrace{100/12}_{=8.33\overline{3}} \rceil = 9$ die im selben Monat Geburtstag haben!

Example

Wie gross ist die Mindestzahl von Studierenden in DMATH (N), damit mit absoluter Sicherheit mindestens 5 Studierende die selbe Note (A, B, C, D, E oder F) erhalten?

Lösung: Es muss gelten $\lceil N/6 \rceil = 5$. Also $N = 4 \cdot 6 + 1 = 25$. Wären es nur 24 Studierende, dann kann es pro Note höchstens 4 Studierende haben ($4 \cdot 6 = 24 = N$).

Übersicht

1. Die Grundlagen des Zählens
2. Das Schubfachprinzip
3. Permutationen und Kombinationen
4. Verallgemeinerte Permutationen und Kombinationen
5. Binomialkoeffizienten

Permutationen

Definition (Permutationen)

Eine Permutation von n verschiedenen Elementen ist eine geordnete Anordnung dieser n Elemente. Eine r-Permutation von n verschiedenen Elementen ist eine geordnete Anordnung von r der n Elemente.

Example

Die geordnete Anordnung 3, 1, 2 der Menge $S = \{1, 2, 3\}$ ist eine Permutation von S. Die geordnete Anordnung $(3, 2)$ ist eine 2-Permutation von S. Schreiben Sie alle Permutationen und 2-Permutationen von S auf.

Lösung:

$$\begin{aligned} &\text{3-Permutationen:} \quad (1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),\ (3,2,1) \\ &\text{2-Permutationen:} \quad (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2) \end{aligned}$$

Es gibt $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ 3-Permutationen und $6 = 3 \cdot 2$ 2-Permutationen von S.

Anzahl Permutationen

Theorem

Die Anzahl von r-Permutationen einer Menge von n Elementen ist:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad 0 \leqslant r \leqslant n \in \mathbb{N}.$$

Example

Auf wie viele Arten können die ersten drei Plätze bei einem Spiel mit 100 Teilnehmern ausgewählt werden?

Lösung: Der erste Platz kann aus 100, der zweite noch aus 99 und der dritte schliesslich noch aus 98 Teilnehmern ausgewählt werden:

$$P(100,3) = 100(100-1)(100-2) \;=\; 100 \cdot 99 \cdot 98 \;=\; 970'200$$

Beachte: Anzahl n-Permutationen einer Menge von n Elementen ist $P(n,n) = n!$.

Kombinationen

Definition (Kombinationen)

Eine r-Kombinationen von n verschiedenen Elementen ist eine ungeordnete Auswahl von r dieser n Elemente. Sie ist also nichts anderes als eine Teilmenge mit r Elementen.

Example

Für $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ist $\{1, 3, 4\}$ eine 3-Kombination von S. Beachte, dass $\{3, 1, 4\}$ die selbe 3-Kombination von S ist. Wie man sieht, ist $\{3, 1, 4\}$ eine Teilmenge von S. Wie viele 3-Kominationen von S gibt es?

Lösung: Die restlichen 3-Kombinationen erhält man, wenn man 3 Elemente aus S auswählt und dabei beachtet, dass die Reihenfolge keine Rolle spielt:

$$\{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}.$$

In diesem Fall kann man auch so argumentieren: lasse ein Element aus S weg (statt dass man 3 Elemente auswält)!

Theorem

Die Anzahl von r-Kombinationen einer Menge von $n \geqslant 0$ Elementen ist gegeben durch:

"n tief r"

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = C(n, n-r) \quad \textit{wobei } 0 \leqslant r \leqslant n \textit{ gelten muss.}$$

= Anzahl r-el. Teilmengen ein n-el. Menge.

Beweisidee Man überlege sich, dass der folgende Zusammenhang gelten muss

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r) = C(n,r) \cdot r!$$

A, B, C, D, E

Example

Wie viele Teams von 3 Personen lassen sich aus einer Gruppe von 5 Personen bilden?

Lösung: Tafel!

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 10 = \binom{5}{\underset{5-3}{2}} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$$

A B D, D A B
A D B, D B A
B A D,
B D A,

Unterschied Permutationen / Kombinationen

Wir betrachten die Menge $S = \{A, B, C, D\}$.

Dann gibt es folgende 3-Permutationen von S

(A B C), (A C B), (B A C), (B C A), (C A B), (C B A)

(A B D), (A D B), (B A D), (B D A), (D A B), (D B A)

(A C D), (A D C), (C A D), (C D A), (D A C), (D C A)

(B C D), (B D C), (C B D), (C D B), (D C B), (D B C)

also insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ 3-Permutationen von 4 El.

$$P(3,4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot (4-3+1) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4! = 12$$

Betrachtet man dagegen die 3-Kombinationen von S so findet man

$\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$, $\{B, C, D\}$.

Anzahl davon ist

$$C(4,3) = \binom{4}{3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 3 \cdot 2} = 4$$

Example

Wie viele Permutationen der Buchstaben ABCDEFGH enthalten die Zeichenkette ABC?

Lösung: Tafel! Idee: Führe die 6 Superzeichen "ABC", "D", "E", ..., "H" ein und zähle die Kombinationen.

Die 6 Superzeichen ABC, D, E, F, G, H lassen sich auf

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ Arten anordnen.

Beachte: F ABC E D G H $\neq$ F E ABC D G H

das sind unterschiedliche Zeichenketten!

Es gilt folgende Identität:

$$\binom{n}{r} = C(n, 4) = C(n, n-r) = \binom{n}{n-r}$$

Example

Man hat beispielsweise

$$\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot \cancel{2\cdot 1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot \cancel{2\cdot 1}} \qquad \frac{10!}{8!(10-8)!}$$

$$\binom{10}{8} = \binom{10}{10-8} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$$

Kontrolle:

$$\binom{10}{8} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} == \frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}}{1\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{8}} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}$$

Übersicht

1. Die Grundlagen des Zählens
2. Das Schubfachprinzip
3. Permutationen und Kombinationen
4. Verallgemeinerte Permutationen und Kombinationen
5. Binomialkoeffizienten

Permutationen mit Wiederholung

Theorem (r-Permutationen mit Wiederholung)

Die Anzahl r-Permutationen bei einer Menge mit n Objekten mit Wiederholung ist n^r.

Example

Wie viele Zeichenketten der Länge n können mit dem engl. (oder dt.) Alphabet erzeugt werden?

Lösung: Tafel!

$$\underbrace{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot \cdots \cdot 26}_{n \text{ Faktoren}} = 26^n$$

(Produkt-regel)

Kombinationen mit Wiederholung

Theorem (r-Kombination mit Wiederholung)

Die Anzahl von r-Kombinationen bei einer Menge von n Objekten mit Wiederholung ist $C(n+r-1, r)$.

Beweis.

Der Beweis zeigt eine Methode, die sich für die Lösung von Zählproblemen dieser Art sehr gut eignet! $\square$

Example

Auf wie viele Arten lassen sich aus einer Fruchtschale mit Äpfeln, Orangen und Birnen vier Früchte herausnehmen, wenn es auf die Reihenfolge nicht ankommt?

Lösung: Tafel!

Hier $n=3$, $r=4$

$C(3+4-1,4)=\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$

4 Birnen

2 Birnen, 1 Apfel, 1 Orange

$r = 4$ Früchte aus $n = 3$ "Sorten" (Objekte) auswählen

Bitstring		Auswahl
001010 =	0 0 | 0 | 0	2 Birnen, 1 Apfel, 1 Orange
	Fach für die Birnen / Fach für die Äpfel / Fach für die Orangen	
000011 =	0 0 0 0 | |	4 Birnen

Was ist die Auswahl, die zum Bitstring 010010 gehört?

Die gesuchte Anzahl von möglichen Auswahlen von 4 Früchten aus 3 Sorten ist gleich der Anzahl Bitstrings der Länge 6 mit zwei Einsen, also

$$\binom{4+3-1}{2} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$$

Anzahl Mögl. die 1. Eins zu plazieren

Für die 2. Eins bleiben noch 5 Stellen.

die beiden Einsen sind nicht unterscheidbar.

Statt die 2 Einsen, kann ich auch die 4 Nullen auf

$$\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}}{1\cdot 2\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}} = 15$$

Arten plazieren!

Kombinationen mit Wiederholung (Fort.)

Example

Auf wieviele Arten lassen sich aus einer Kasse mit 1-, 2-, 5- , 10-, 20—, 50- und 100-Doller Noten fünf Noten entnehmen falls es nicht auf die Reihenfolge der Noten ankommt?

Lösung: Eine mögliche Kombination von fünf Noten:
|||**|||*** (Balken für die Unterteilung und Sterne für die Noten). Statt Balken und Sterne verwenden Informatiker lieber Einsen und Nullen. Wir verwenden also $n-1$ Einsen und r Nullen. Gesucht ist somit die Anzahl Bitstrings der Länge $n+r-1$ die r Nullen enthalten.

$$\binom{11}{5} = \binom{7+5-1}{5} = \frac{11 \cdot \cancel{10}^{2} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot \cancel{8} \cdot 7}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5}} = 462$$

$n = 7$: Anzahl Objekte

$r = 5$: Anzahl Noten

$n + r - 1 = 7 + 5 - 1 = 11$

Theorem (Permutationen nicht unterscheidbarer Objekte)

Die Anzahl verschiedener Permutationen von n Objekten, von denen n_1 nicht unterscheidbare Objekte vom Typ 1, n_2 nicht unterscheidbare Objekte vom Typ 2, ... und schliesslich n_k nicht unterscheidbare Objekte vom Typ k sind, ist gegeben durch:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}, \quad \text{wobei } n = \sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

Example

Wie viele unterschiedliche Wörter kann man erzeugen, wenn man die Zeichen im Wort SUCCESS umordnet?

Lösung: Tafel

$n_1 = \text{Anzahl } S = 3$

$n_2 = \text{Anzahl } C = 2$

$n_3 = \text{Anzahl } U = 1$

$n_4 = \text{Anzahl } E = 1$

$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 3 + 2 + 1 + 1 = 7$

$$\text{Anzahl Wörter} = \frac{7!}{3! \cdot 2!\, 1!\, 1!} = 420$$

Bei Permutationen spielt die Reihenfolge eine Rolle; bei Kombinationen dagegen spielt die Reihenfolge keine Rolle!

Art	Wiederholung erlaubt	Anzahl
r-Permutationen	Nein	$\frac{n!}{(n-r)!}$
r-Kombinationen	Nein	$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$
r-Permutationen	Ja	n^r
r-Kombinationen	Ja	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$

Übersicht

1. Die Grundlagen des Zählens
2. Das Schubfachprinzip
3. Permutationen und Kombinationen
4. Verallgemeinerte Permutationen und Kombinationen
5. Binomialkoeffizienten

Definition (Binomialkoeffizienten ("α *tief* k"))

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \dfrac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!}, & k > 0, \\ 1, & k = 0, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0$$

Eselsbrücke: Der Zähler enthält genau so viele Faktoren wie der Nenner.

Anzahl k-Kombinationen von n Elementen für n, $k \in \mathbb{N}_0$:

$$C(n,k) = \binom{n}{k} \qquad = \text{Anzahl } k\text{-el. Teilmengen einer } n\text{-el. Menge}$$

Statt n-elementige Menge sagt man auch n-**Menge** und statt k-elementige Teilmenge sagt man auch k-**Untermenge**.

Die Binomialkoeffizienten (Fort.)

Example

Berechnen sie die folgenden Binomialkoeffizienten $\binom{3}{2}$ und $\binom{3}{1}$ und überlegen sie sich deren Bedeutung im Zusammenhang mit obiger Feststellung.

Lösung: Die Definition der Binomialkoeffizienten liefert:

$$\binom{3}{2} = \binom{3}{3-2} = \binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3 \text{und} \binom{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Also sind die beiden Binomialkoeffizienten gleich!
Zudem stellt $\binom{3}{2}$ die Anzahl 2-Untermengen einer 3-Menge dar. Denn für die 3-Menge $A = \{a, b, c\}$ hat man die 2-Untermengen $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ und $\{b, c\}$. Man erhält sie, indem man aus A ein Element entfernt. Dabei gibt es drei Möglichkeiten.
Analog stellt $\binom{3}{1}$ die Anzahl 1-Untermengen einer 3-Menge dar!

Example

Die Definition der Binomialkoeffizienten erlaubt auch $\binom{\pi}{2}$ zu berechnen. Solche Binomialkoeffizienten werden wir später im Zusammenhang mit der Binomialreihe antreffen.

Lösung: Man hat

$$\binom{\pi}{2} = \frac{\pi \cdot (\pi - 1)}{2 \cdot 1} \approx 3.364$$

1

1 1

1 2 1

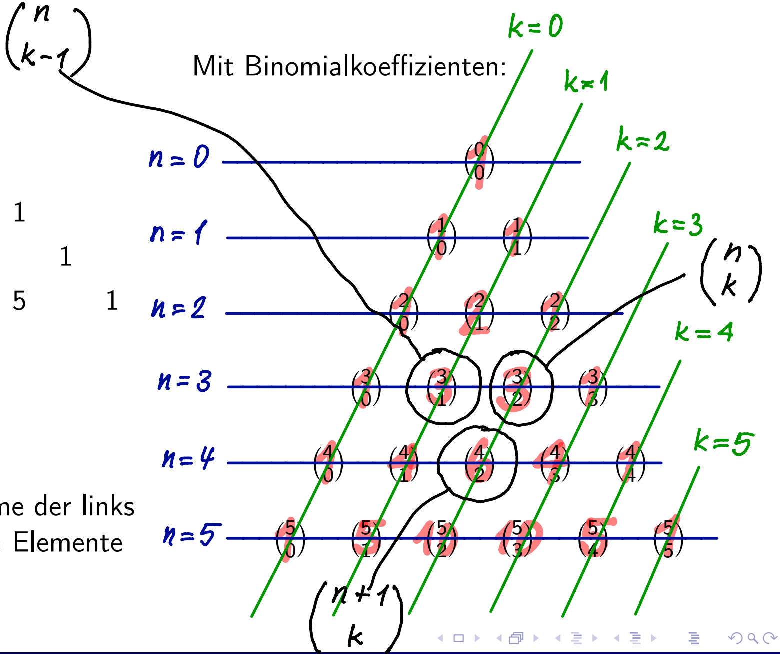
1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

- Symmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechten
- Aussen lauter Einsen
- Inneres Element gleich Summe der links und rechts darüber liegenden Elemente

Mit Binomialkoeffizienten:



$k-1$ $\quad$ k

Das Konstruktionsprinzip des Pascalschen Dreiecks

$$n: \quad \cdots \quad \binom{n}{k-1} \qquad \binom{n}{k} \quad \cdots$$

$$n+1: \quad \cdots \qquad \binom{n+1}{k} \qquad \cdots$$

liefert für $n > 0$, $0 \leqslant k \leqslant n$ die **Pascal'sche Identität**:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Infolge Symmetrie des Pascal'schen Dreiecks hat man für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Example

Wir haben bereits gezeigt:

$$\binom{3}{2} = 3 = \binom{3}{1}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{k\,n!}{\underbrace{k(k-1)!}_{k!}(n-k+1)!} + \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,\underbrace{(n-k)!\,(n-k+1)}_{(n-k+1)!}}$$

Def. Binomial-
koeff.

$$= \frac{k\,n! + (n-k+1)\,n!}{k!\,(n-k+1)!}$$

$k! = k(k-1)!$

$$= \frac{n!\,(\cancel{k} + n \cancel{-k} + 1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n+1)}{k!\,((n+1)-k)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,((n+1)-k)!}$$

$$\frac{m!}{k!\,(m-k)!} = \binom{m}{k}$$

$$\boxed{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}}$$

Der Binomialsatz

Example

Wir verallgemeinern das folgende Resultat

$$
\begin{aligned}
(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\
&= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}x^{3-k}y^k.
\end{aligned}
$$

Theorem (Binomialsatz)

Für $x,\ y \in \mathbb{R}$ (ja sogar in $\mathbb{C}$) und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$
(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k.
$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$
= \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} x^{n-0}y^0 + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \underbrace{\binom{n}{n-1}}_{n} x^{\overbrace{n-(n-1)}^{1}}y^{(n-1)} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n}{0}} x^0 y^n
$$

Example

Wie lautet der Koeffizient von x^{13} in $(2x + y)^{51}$?

Lösung: Tafel!

$$(2x+y)^{51} = \sum_{k=0}^{51} \binom{51}{k} (2x)^{51-k} y^k = \sum_{k=0}^{51} \underbrace{\binom{51}{k} 2^{51-k}}_{\text{setze für } k=38.} x^{51-k} y^k$$

für welches k steht hier x^{13}? Wenn

$$51 - k = 13$$

$$k = 51 - 13 = 38$$

Der gesuchte Koeff. ist

$$\binom{51}{38} 2^{13} = \binom{51}{13} 2^{13}.$$

Der Binomialsatz (Fort.)

Corollary (1)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Example

Wie viele Teilmengen hat eine n-Menge?

Lösung: Tafel

Beweis von Corollar 1:

$$2^n = (1+1)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Binomialsatz}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Der Binomialsatz (Fort.)

Corollary (2)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$0 = 0^n = (1+(-1))^n \overset{!}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k$$

Corollary (3)

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

$$3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \cdot 1^k$$

Beweis.

Tafel! □

Die Vandermonde-Konvolution

Corollary (4)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

Kombinatorischer Beweis: die RHS ist gleich der Anzahl Möglichkeiten, n Objekte aus einer Menge von $r+s$ Objekten auszuwählen. Diese Auswahl kann auch vorgenommen werden, indem man k Objekte aus den ersten r Objekten auswählt und dann $n-k$ Objekte aus den verbleibenden s Objekten. Dabei lässt man k nacheinander die Zahlen $0, 1, \cdots, n$ durchlaufen und summiert die Beträge: dies stellt die linke Seite (LHS) dar.