Lucerne University of
Applied Sciences and Arts

HOCHSCHULE
LUZERN

Informatik
FH Zentralschweiz

Mathematical Reasoning - Übung

Prof. Dr. Josef F. Bürgler und Thomas Zehrt

I.BA_DMATH, Semesterwoche 4

Die Aufgaben sind zusammen mit dem Lösungweg in möglichst einfacher Form darzustellen. Numerische Resultate sind mit einer Genauigkeit von 4 Stellen anzugeben. Skizzen müssen qualitativ und quantitativ richtig sein.

Sie sollten im Durschnitt 75% der Aufgaben bearbeiten. Die mit grossen römischen Zahlen gekennzeichneten Aufgaben **müssen** bearbeitet werden und die Lösungen dieser Aufgaben werden kontolliert und bewertet. Abgabetermin ihrer Übungsaufgaben ist die letzte Vorlesungsstunde in der Woche nachdem das Thema im Unterricht besprochen wurde.

Referenz: *Kenneth H. Rosen, Discrete Mathematics and its Applications, McGraw-Hill International Edition, 6. Auflage,* **kurz: KR**

Vollständige Induktion

1. **KR, Abschnitt 4.1, Example 5** Verwenden Sie mathematische Induktion um zu zeigen, dass $\forall n \in \mathbb{N}\,(n < 2^n)$.
2. **KR, Abschnitt 4.1, Example 6** Verwenden Sie mathematische Induktion um zu zeigen, dass $2^n < n!$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

I. **KR, Abschnitt 4.1, Example 7** Zeigen Sie mittels mathematische Induktion, dass für die **harmonischen Zahlen**

$$H_j = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots$$

folgende Ungleichung gilt:

$$H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nochmals vollständige Induktion

3. Für jede positive ganze Zahl n sei $P(n)$ die Aussage

$$2^2 + 4^2 + 6^2 \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

a) Formulieren Sie die Aussage $P(1)$ und überprüfen Sie den Wahrheitsgehalt dieser Aussage. (Induktionsanfang)

b) Formulieren Sie die Induktionsvoraussetzung.

c) Führen Sie den Induktionsschritt aus.

d) Erklären Sie in eigenen Worten warum Induktionsanfang und Induktionsschritt beweisen, dass $P(n)$ für jede positive ganze Zahl n wahr ist.

II. **KR, Abschnitt 4.1, Aufgabe 5:** Beweisen Sie die folgende Aussage: Für jede nichtnegative ganze Zahl n gilt

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2 \;=\; \sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}.$$

Rekursiv definierte Funktionen

4. **KR, Abschnitt 4.3, Aufgaben 1b, 3a:** Bestimmmen Sie $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ und $f(5)$ falls
   a) $f(0)=1$ und $f(n+1)=3f(n)$
   b) $f(0)=-1$, $f(1)=2$ und $f(n+1)=f(n)+3f(n-1)$.
5. **KR, Abschnitt 4.3, Aufgabe 7b:** Geben Sie die rekursive Definition der Zahlenfolge $\{a_n\}$ an, falls $a_n=2n+1$ für alle $n=1,2,3,\ldots$

III. **KR, Abschnitt 4.3, Aufgaben 12, 13:** Zeigen Sie, dass die Fibonacci-Zahlen f_k folgende Eigenschaften haben:

a) $\forall n\in\mathbb{N} \quad (f_1^2+f_2^2+\cdots+f_n^2 \;=\; f_nf_{n+1})$

b) $\forall n\in\mathbb{N} \quad (f_1+f_3+\cdots+f_{2n-1} \;=\; f_{2n})$

Rekursive Algorithmen

6. **KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 9:** Beschreiben Sie einen rekursiven Algorithmus, der die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen berechnet.
7. **KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 13:** Beschreiben Sie einen rekursiven Algorithmus, der für jeweils zwei beliebige natürliche Zahlen n und m den Ausdruck $n!$ **mod** m berechnet.
8. **KR, Abschnitt 4.4, Aufgabe 15:** Für alle nichtnegativen ganzen Zahlen a und b (mit $a<b$) gilt $ggT(a,b)=ggT(a,b-a)$. Nutzen Sie diese Tatsache, um einen rekursiven Algorithmus zu konstruieren, der den grössten gemeinsamen Teiler von zwei nichtnegativen ganzen Zahlen bestimmt.

Schlussregeln (Inferenzregeln)

9. **KR, Abschnitt 1.5, Example 9:** Zeigen Sie, dass die Hypothesen $(p\wedge q)\vee r$ und $r\to s$ die Konklusion $p\vee s$ implizieren.

IV. **KR, Abschnitt 1.5, Übung 9a:** Für die folgenden Prämissen schreibe man die relevanten Konklusionen auf, die daraus folgen. Dabei sollen jeweils die Schlussregeln angegeben werden die verwendet wurden, um Konklusion aus den Prämissen zu erhalten:

- "*Wenn ich einen Tag frei mache, dann regnet oder schneit es*"
- "*Ich machte Dienstag oder Donnerstag frei*"

- "*Am Dienstag war es sonnig*"
- "*Es schneite nicht am Donnerstag*"

Korrekte Programme

10. **KR, Abschnitt 4.5, Aufgabe 1:** Beweisen Sie, dass das Programmsegment

$$y := 1$$
$$z := x + y$$

bezüglich der Anfangsbedingung $x = 0$ und der Endbedingung $z = 1$ (teilweise) korrekt ist.

V. **KR, Abschnitt 4.5, Aufgabe 1:** Beweisen Sie, dass das Programmsegment

$$x := 2$$
$$z := x + y$$
$$\textbf{if } y > 0 \textbf{ then } z := z + 1 \textbf{ else } z := 0$$

bezüglich der Anfangsbedingung $y = 3$ und der Endbedingung $z = 6$ (teilweise) korrekt ist.

Lösungen

1. -
2. -

I. -

3. a) $(2 \cdot 1)^2 = \frac{(2 \cdot 1)(1+1)(2 \cdot 1+1)}{3}$ ist wahr, denn beide Seiten sind gleich.

   b) $2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2 = (2k)(k+1)(2k+1)/3$

   c) Wir müssen zeigen, dass für jedes $k \geq 1$ aus der Annahme(!) das $P(k)$ wahr ist auch stets die Wahrheit der Aussage $P(k+1)$ folgt. Das bedeutet hier, dass aus der angenommenen Richtigkeit der Gleichung $2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2 = (2k)(k+1)(2k+1)/3$ die Richtigkeit der Aussage $2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2 + (2(k+1))^2 = (2(k+1))(k+2)(2(k+1)+1)/3$ abgeleitet werden muss:

$$\begin{aligned} 2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2 + (2(k+1))^2 &= (2^2 + 4^2 + \cdots + (2k)^2) + (2(k+1))^2 \\ &= \frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} + (2(k+1))^2 \\ &= \frac{2k(k+1)(2k+1) + 3 \cdot (2(k+1))^2}{3} \\ &= \ldots \end{aligned}$$

   d) -

II. -

4. a) $f(2) = 9$, $f(3) = 27$, $f(4) = 81$, $f(5) = 243$

   b) $f(2) = -1$, $f(3) = 5$, $f(4) = 2$, $f(5) = 17$

5. $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 3$

III. -

6. **procedure** SummeUngeraderZahlen(n:positive integer)

   if n=1 **then** SummeUngeraderZahlen(n) := 1

   else SummeUngeraderZahlen(n) := SummeUngeraderZahlen(n-1) + 2n -1

7. **procedure** ModFakultaet(n,m:positive integers)

   if n=1 **then** ModFakultaet(n,m) := 1

   else ModFakultaet(n,m) := (n · ModFakultaet(n-1,m)) **mod** m

8. **procedure** ggT(a, b: nonnegative integers mit $a < b$)

   if a=0 **then** ggT(a, b) := b

   else if a = b - a **then** ggT(a, b) := a

   else if a < b - a **then** ggT(a, b) := ggT(a, b- a)

   else ggT(a, b) := ggT(b - a, a)

   Warum sind alle Fallunterscheidungen nötig?

9. -

IV. -

10. Falls die Anfangsbedingung $x = 0$ gilt, setzt das Programmsegment $y := 1$ und $z := x + y = 0 + 1 = 1$. Also ist die Endbedingung $z = 1$ war.

V. Falls die Anfangsbedingung $y = 3$ erfüllt ist arbeitetet das Programm wie folgt: $x := 2$ und $z := x + y = 2 + 3 = 5$. Da $y = 3 > 0$ gilt, wird die **then**-Anweisung ausgeführt: $z := z + 1 = 5 + 1 = 6$ und somit ist die gegebene Endbedingung war.

Viel Spass!