

Foundations: Logik und Beweise

Prof. Dr. Josef F. Bürgler

Studiengang Informatik
Hochschule Luzern, Informatik

I.BA_DMATH

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Thema: Propositionale und Prädikatenlogik, Beweise

Resultate: Sie können logische Ausdrücke umwandeln und einfache Beweise führen.

- Ziele:**
- Die Studierenden verstehen die Grundlagen der Logik und können sie in einfachen Beispielen anwenden.
 - Sie erkennen propositionale Äquivalenzen und können mit ihnen rechnen.
 - Sie können mit Prädikaten und Quantoren umgehen und diese in konkreten Problemen verwenden.
 - Sie können einfache Beweise selbstständig durchführen.

Vorgehen: Die einzelnen Themen werden der Reihe nach behandelt und gleich verwendet.

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

- Die Regeln der Logik geben mathematischen Aussagen eine präzise Bedeutung.
- Diese Regeln werden verwendet, um zwischen gültigen und ungültigen mathematischen Argumenten zu unterscheiden.
- Ein grosser Teil dieses Moduls beschäftigt sich mit der Konstruktion korrekter mathematischer Argumente.
- Logik hat zahlreiche Anwendungen in der Informatik (Design logischer Schaltungen, Computer Programme, Verifikation von Programmen).
- Aristoteles (–384 bis –322) legte die Grundsteine der Logik.
- George Boole (1815 bis 1864) schuf in seiner Schrift *The Mathematical Analysis of Logic* von 1847 den ersten algebraischen Logikkalkül und begründete damit die moderne mathematische Logik
- Kurt Gödel (1906 bis 1978) war einer der bedeutendsten Logiker des 20. Jahrhunderts. Er leistete u. A. massgebliche Beiträge zur Prädikatenlogik (Vollständigkeit und Entscheidungsproblem in der Arithmetik und der axiomatischen Mengenlehre). Gottesbeweis

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Propositionen (Aussagen)

Example (Propositionen)

- Bern ist die Bundesstadt der Schweiz. *wahr* ($w, t, 1$)
- $1 + 1 = 2$. *wahr*
- $1 + 2 = 4$. *falsch* ($f, f, 0$)
- *Goldbachsche Vermutung*: Jede gerade natürliche Zahl grösser als 2 ist die Summe zweier Primzahlen. Man ist bisher nicht in der Lage, die Wahrheit oder Falschheit zu beweisen ^{1!}

¹Diese Aussage ist entweder wahr oder falsch: im Moment wissen wir's nicht!

Example (Keine Propositionen)

- Wie spät ist es?
- $x + 1 = 2$.
- Dieser Satz ist falsch.

Propositionen (Definition)

Grundeigenschaft von Aussagen: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Definition (Proposition (Aussage))

Eine **Proposition** (Aussage) ist ein Satz, der entweder **wahr** (Wahrheitswert **w**) oder **falsch** (Wahrheitswert **f**) ist.

- Bezeichnung:

p, q, r, s, \dots

- **Wahrheitswerte:** t (oder w oder 1) für **wahr** und f (oder f oder 0) für **falsch**.
- **Propositionale Logik** heisst das Gebiet der Logik, welches sich mit Propositionen befasst.
- Im folgenden werden wir aus Proposition durch Verknüpfungen neue Propositionen erzeugen: dadurch entstehen **zusammengesetzte Propositionen!**
- Diese Methoden wurden bereits 1854 von George Boole im Buch *The Laws of Thought* publiziert.

Definition

Ist p eine Proposition, dann ist die Proposition "*Es ist nicht der Fall, dass p gilt*" die **Negation** von p ; man schreibt $\neg p$ und liest "*nicht p* ".

Example

Die Negation der Proposition

p = "Heute ist Freitag"

wird wie folgt beschrieben:

$\neg p$ = "Es ist nicht der Fall, dass heute ist Freitag"

$\neg p$ = "Heute ist nicht Freitag"

Definition (Wahrheitstabelle)

Die **Wahrheitstabelle** stellt die Beziehungen zwischen den Wahrheitswerten von Propositionen dar. Sie ist vor allem dann nützlich, wenn Propositionen aus einfachen Propositionen konstruiert werden.

p	$\neg p$
w	f
f	w

$$\neg p = \overline{p}$$

Tabelle: Die Wahrheitstabelle der **Negation**

Der **Negationsoperator** \neg wirkt auf die Proposition p . Es handelt sich um einen **unären** (einstelligen) Operator, weil er nur auf einen einzigen Operanden, nämlich die Proposition p wirkt!

Definition (Konjunktion – UND-Verknüpfung)

Die Propositionen $p \wedge q$ (gelesen: “*p und q*”) heisst **Konjunktion** der Propositionen p und q , falls diese genau dann wahr ist, wenn p und q wahr sind; andernfalls ist sie falsch.

Example

Die Konjunktion der Propositionen

p = “Heute ist Freitag”

q = “Es regnet heute”

ist

$p \wedge q$ = “Heute ist Freitag und es regnet”

Definition (Disjunktion)

Die Propositionen $p \vee q$ (gelesen: "p oder q") heisst **Disjunktion** der Propositionen p und q falls diese wahr ist, wenn mindestens eine der Propositionen p oder q wahr ist; andernfalls ist sie falsch.

Example

Die Disjunktion der Propositionen

p = "Heute ist Freitag"

q = "Es regnet heute"

ist

$p \vee q$ = "Heute ist Freitag oder es regnet heute"

Konjunktion und Disjunktion

- Konjunktion und Disjunktion werden auch **UND-** und **ODER-Verknüpfung** genannt.
- Beachte: Mit *oder* ist hier nicht ein *exklusives oder* gemeint. Die exklusive ODER-Verknüpfung wird weiter unten gezeigt!
- Es gilt folgende Wertetabelle

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Tabelle: Wahrheitstabelle der **Konjunktion u. Disjunktion**

Definition (EXOR)

Die Propositionen $p \oplus q$ (gelesen: "p exor q") heisst **EXOR-Verknüpfung** der Propositionen p und q, falls diese genau dann wahr ist, wenn genau eine der Propositionen p oder q wahr ist (aber nicht beide gleichzeitig); ansonsten ist sie falsch.

p	q	$p \oplus q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Tabelle: Die Wahrheitstabelle der **EXOR-Verknüpfung**

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen**
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Implikationen (Subjunktion)

Definition

Die **Implikation** $p \rightarrow q$ (gelesen "p impliziert q" oder "falls p, dann q") ist diejenige Proposition, die genau dann falsch ist, wenn p wahr und q falsch ist; anderenfalls ist die Implikation wahr. p heisst auch **Hypothese** und q **Konklusion**.

p	q	$p \rightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Tabelle: Die Wahrheitstabelle der **Implikation**

Die Implikation $p \rightarrow q$ ist nur dann falsch, wenn die Hypothese p wahr, die Konklusion q aber falsch ist. In allen anderen Fällen ist sie wahr.

Example (Politiker vor den Wahlen)

Falls $p = \text{"ich werde gewählt"} \text{ und } q = \text{"ich senke die Steuern"}$ zwei Aussagen sind, dann kann $p \rightarrow q$ wie folgt formuliert werden:

“Falls ich gewählt werde, dann senke ich die Steuern.”

Wann ist diese Aussage wahr, wann falsch? Oder anders gesagt: wann lügt der Politiker, wann lügt er nicht?

Implikationen (Fort.)

Die Implikation $p \rightarrow q$ kann auch so interpretiert werden¹:

- wenn p , dann q ✓
- schon wenn p , dann q ✓
- p ist eine hinreichende Bedingung für q ✓
- eine hinreichende Bedingung für p ist q ✓
- p ist hinreichend für q ✓
- p nur wenn q ✓
- eine notwendige Bedingung für p ist q ✓
- q ist eine notwendige Bedingung für p ✓
- q folgt aus p ✓
- p impliziert q ✓

¹Siehe Kenneth Rosen, 6th Ed, p 6

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- **Bikonditional**
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Bikonditional (Bijunktion)

Definition

Das **Bikonditional** $p \leftrightarrow q$ (gelesen “*p genau dann, wenn q*” ist diejenige Proposition, die wahr ist, wenn p und q die selben Wahrheitswerte haben und sonst falsch.

Example

Falls p = “Sie können den Flug nehmen” und q = “Sie kaufen ein Ticket” zwei Aussagen sind, dann gilt sicher $p \leftrightarrow q$ was in Umgangssprache auch sinnvoll ist und etwa so lautet: “Sie können den Flug nehmen genau dann, wenn sie ein Ticket kaufen”.

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Example

Wie ist $\neg p \wedge q$ zu verstehen?

Damit möglichst wenig Klammern gesetzt werden müssen, hat jeder Operator eine gewisse **Priorität**, die entscheidet, wann der Operator angewandt wird.

Operator	Priorität
\neg	1
\wedge	2
\vee	2
\rightarrow	3
\leftrightarrow	3

Negation
Konjunktion
Disjunktion
Implikation
Bikonditionals

Tabelle: Priorität logischer Operatoren

Übersicht

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Definition (Tautologie, Widerspruch)

Eine zusammengesetzte Aussage, die immer wahr (falsch) ist heisst **Tautologie** (**Kontradiktion** oder **Widerspruch**).

Example

Was kann man über die beiden folgenden Propositionen sagen: $p \vee \neg p$ und $p \wedge \neg p$? Tipp: betrachten sie die Wahrheitstabelle!

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
w	f	w	f
f	w	w	f

Kontradiktion

Tautologie

Definition (Logische Äquivalenz)

Die Aussagen p und q heissen **logisch äquivalent**, falls $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist. Man schreibt dann $p \Leftrightarrow q$ (oder auch $p \equiv q$ bzw. $p \sim q$).

Example

Zeigen sie, dass $p \vee (q \wedge r)$ und $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ logisch äquivalent sind, indem sie eine geeignete Wahrheitstabelle betrachten.

P	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	w	f	w
w	f	f	w	w	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	f	w	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

\equiv Distributivgesetz.

Logische Äquivalenzgesetze

T = w

F = f

$p \wedge T \equiv p$	$p \vee F \equiv p$	Identität
$p \vee T \equiv T$	$p \wedge F \equiv F$	Dominanz
$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	Idempotenz
$\neg(\neg p) \equiv p$		Doppelnegation
$p \vee \neg p \equiv T$	$p \wedge \neg p \equiv F$	Negation
$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	Kommutativität
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$		Assoziativ 1
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$		Assoziativ 2
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$		Distributiv 1
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$		Distributiv 2
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$		De Morgan's 1
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$		De Morgan's 2

Logische Äquivalenzen (Fort.)

Example

Zeigen Sie Schritt für Schritt durch Anwendung der Äquivalenzregeln dass der Ausdruck $(p \vee \neg(q \wedge p)) \wedge (r \vee (s \vee r))$ logisch äquivalent zu $(r \vee s)$ ist.

Lösung: die Wahrheitstabelle hätte bei 4 Variablen $16 = 2^4$ Zeilen!

$$\begin{aligned} (p \vee \neg(q \wedge p)) \wedge (r \vee (s \vee r)) &\equiv (p \vee (\neg q \vee \neg p)) \wedge (r \vee (r \vee s)) \\ &\quad \text{Kom. Gesetz, De Morgan} \\ &\equiv (p \vee (\neg p \vee \neg q)) \wedge ((\underbrace{r \vee r}_{\text{Idempot. G.}}) \vee s) \\ &\equiv ((p \vee \neg p) \vee \neg q) \wedge (r \vee s)^r \\ &\quad \text{W} \quad \text{W} \\ &= w \wedge (r \vee s) = r \vee s \end{aligned}$$

Logische Äquivalenzen (Fort.)

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$$

$$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$$

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

$$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \oplus q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

$$\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$$

$$\text{Beh.: } p \rightarrow q = \neg p \vee q$$

Beweis mit Wahrheitstabelle

p	$\neg p$	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	w	f	w	w

für alle mögl. Belegungen von p und q

q.e.d
(w.z.b.w.,
h.g.d.b.c)

$$\text{Beh. } p \leftrightarrow q = \neg(p \oplus q)$$

Beweis

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &= (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \end{aligned}$$

Distr. G.

$$\begin{aligned} &= (A \wedge \neg q) \vee (A \wedge p) \\ &= ((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee q) \wedge p) \\ &= (\underbrace{(\neg p \wedge \neg q)}_{F} \vee \underbrace{(q \wedge \neg q)}_{F}) \vee (\underbrace{(\neg p \wedge p)}_{F} \vee \underbrace{(q \wedge p)}_{F}) \\ &= (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \end{aligned}$$

3. Regel von oben
rechts.

Mit einer Wahrheitstabelle kann man sich jetzt überzeugen, dass dies gerade
 $\neg(p \oplus q)$ Hausaufgabe!

Übersicht

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Example

Aussagen wie

$$P(x) = "x > 3"$$

enthalten eine Variable (hier x): sie haben aber nur dann einen eindeutigen Wahrheitswert, wenn man für diese Variable einen bestimmten Wert einsetzt.

Man kann also nach den Wahrheitswerten von $P(4)$ und $P(2)$ fragen.

Lösung: $P(4) = "4 > 3"$ ist wahr, während $P(2) = "2 > 3"$ falsch ist.

Definition

Ein **Prädikat** ist eine Folge von Wörtern die Variablen enthalten und für jede (erlaubte) Belegung dieser Variablen zu einer Aussage werden. Man nennt die Aussage $P(x)$ auch den Wert der **propositionalen Funktion** P für x .

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

\forall = For ALL

Definition (Allquantor)

Ist $P(x)$ wahr für alle x aus einer bestimmten Universalmenge, dann schreibt man $\forall x P(x)$ und liest: "für alle $x P(x)$ ". (*für alle x aus der Universalmenge gilt $P(x)$*)

Examples

- Steht $P(x)$ für die Aussage $x + 1 > x$, dann kann man sofort nachprüfen $\forall x P(x)$.
- Steht $Q(x)$ für die Aussage $x < 2$, dann gilt sicherlich nicht $\forall x Q(x)$.
- Was ist der Wahrheitswert von $\forall x (x^2 \geq x)$ falls die Universalmenge (1) gleich \mathbb{R} ist, bzw.
(2) gleich \mathbb{Z} ist?

Definition (Existenzquantor)

Ist $P(x)$ wahr für mindestens ein x aus einer bestimmten Universalmenge, dann schreibt man $\exists x P(x)$ und liest: "es existiert ein x für welches $P(x)$ wahr ist".

Examples

- Steht $P(x)$ für die Aussage $x^2 - 1 < 0$, dann kann man sofort nachprüfen $\exists x P(x)$ (beachte $x = 0$).
- Steht $Q(x)$ für die Aussage $x + 1 = x$, dann kann man sofort nachprüfen, dass $\exists x Q(x)$ falsch ist (Es gibt keine reelle Zahl, die um eins vergrössert sich selber ist).

$$\cancel{\exists x Q(x)}$$
$$\neg \exists x Q(x)$$

Quantifikatoren (Fort.)

Wird ein Quantor auf die Variable x angewandt, dann nennt man diese Variable *gebunden*, ansonsten *frei*.

Examples

- (a) In $\forall x Q(x, y)$ ist die Variable x gebunden, die Variable y aber frei.
- (b) In $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$ sind alle Variablen gebunden.

$$Q(x, y) \approx "x + y = 1" \quad \text{Universalmenge, } x \in \mathbb{R} \text{ u. } y \in \mathbb{R}.$$

Quantifikatoren (Fort.)

Die Negation von Ausdrücken mit Quantoren führt auf folgende Regeln:

Negation	äquivalent	Negation ist wahr	Negation ist falsch
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	für alle x ist $P(x)$ falsch	Es gibt ein x , für welches $P(x)$ wahr ist
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Es gibt ein x , für welches $P(x)$ falsch ist	$P(x)$ ist wahr für alle x

Tabelle: Negationen von Quantoren

Outline

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

Verschachtelte Quantoren

Die Reihenfolge der Quantoren ist wesentlich; außer alle Quantoren sind vom gleichen Typ (also Allquantoren oder Existenzquantoren)!

Example

Schreiben sie die Negation der folgenden Aussage ohne Negationszeichen:

$$\forall x \exists y (xy = 1)$$

8-nug: $\exists y \forall x (xy = 1)$ ist etwas anderes.

Lösung: Wenden sie nacheinander die Regeln für das Negieren von Ausdrücken mit Quantoren an und übersetzen sie dann die Negation des innersten Ausdruckes. Dadurch erhalten sie:

$$\exists x \forall y (xy \neq 1)$$

Was muss hier für die Universalmenge gelten? ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

$$\neg \forall x \exists y (xy = 1) \equiv \exists x \neg \exists y (xy = 1) \equiv \exists x \forall y \neg (xy = 1) \equiv \exists x \forall y (xy \neq 1)$$

Verschachtelte Quantoren (Fort.)

Oft ist es sinnvoll, verschachtelte Quantoren mit mehr als zwei Variablen als verschachtelte Schlaufen zu betrachten!

Example

Falls $\forall x \forall y P(x, y)$ wahr ist, kann man in einer äusseren Schlaufe über alle x gehen und dann für ein festes x über alle y .

Falls $P(x, y)$ für alle durchlaufenen Werte von x und y wahr ist, dann gilt: $\forall x \forall y P(x, y)$ ist wahr!

Falls wir aber einen Wert x und für diesen auch nur einen einzigen Wert y finden, für den $P(x, y)$ falsch ist, dann gilt: $\forall x \forall y P(x, y)$ ist falsch!

- $\forall x \exists y (x + y = 0)$ ist wahr, denn
 $\forall x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $y \in \mathbb{R}$, nämlich $y = -x$
 sodass $x + y = x + (-x) = 0$
- $\exists y \forall x (x + y = 0)$ ist NICHT wahr, davon sobald man
 y wählt/festlegt (also irgend eine reelle Zahl nimmt)
 gilt sicher nicht für alle $x \in \mathbb{R}$
 $x + y = 0$
 (dass wäre nur für $x = -y$ wahr!)

$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Q} (x + y = 0)$ ist nicht wahr !!!

Fazit: Man darf $\forall x \exists y$ nicht einfach mit $\exists y \forall x$ vertauschen!

Übersicht

1 Logik

- Einführung
- Propositionen
- Implikationen
- Bikonditional
- Priorität logischer Operatoren

2 Propositionale Äquivalenzen

3 Prädikate und Quantoren

- Einführung
- Quantifikatoren
- Verschachtelte Quantoren

4 Beweise

- Ein Satz (**Theorem**) ist eine Aussage, von der man zeigen kann, dass sie wahr ist.
- Um zu zeigen, dass ein Satz wahr ist, verwendet man eine Abfolge (Sequenz) von Aussagen, die zusammen ein Argument, genannt **Beweis** ergeben.
- Aussagen können **Axiome** oder **Postulate** enthalten (grundlegende Annahmen der mathematischen Strukturen).
- Durch logisches (also gewissen Regeln gehorchendes) Schliessen werden Folgerungen gemacht, die zusammen den Beweis ergeben.
- Ein **Lemma** ist ein einfacher Satz, der in Beweisen von komplizierteren Sätzen verwendet wird. Ein **Korollar** ist eine einfache Folgerung eines Satzes.

Im folgenden zeigen wir einige Methoden auf, einen Beweis zu führen.

Der direkte Beweis

n ist gerade
|| // n^2 ist gerade

Die Implikation $p \rightarrow q$ kann bewiesen werden indem man zeigt, dass aus der Richtigkeit von p die von q folgt.

Example

Behauptung: Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl n ist gerade.



Beweis: Sei n eine gerade natürliche Zahl. Dann existiert (genau eine) natürliche Zahl k , so dass $n = 2k$ gilt. Daraus folgt

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$$

und n^2 ist das Doppelte einer natürlichen Zahl, also gerade.



$$\forall n \in \mathbb{Z} (n \text{ gerade} \rightarrow n^2 \text{ gerade})$$

Der indirekte Beweis

n^2 ist gerade
" " $\rightarrow n$ ist gerade

(oder *Beweis durch Kontraposition*) Statt $p \rightarrow q$ verwendet man die logisch äquivalente Aussage $\neg q \rightarrow \neg p$.
 $\neg p = n^2$ ist ungerade
 n ist ungerade

Example ✓

Behauptung: Sei das Quadrat n^2 einer natürlichen Zahl gerade. Dann ist auch n gerade.

Beweis: Statt " n^2 gerade $\rightarrow n$ gerade" direkt zu beweisen, beweisen wir " n nicht gerade $\rightarrow n^2$ nicht gerade" direkt. Sei also n eine ungerade natürliche Zahl. Dann existiert (genau eine) natürliche Zahl k , so dass $n = 2k + 1$ gilt. Daraus folgt:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{2 \cdot (2k^2 + 2k)}_{\text{ganze Zahl}} + 1$$

ungerade Zahl!

und n^2 ist ungerade. □

Der Beweis durch Kontradiktion (Widerspruch)

Falls ein Widerspruch q gefunden werden kann, für den $\neg p \rightarrow q$ (also $\neg p \rightarrow f$) wahr ist, dann muss $\neg p$ falsch und damit p wahr sein.

Example

Behauptung: Aristoteles glaubte, dass schwere Objekte schneller fallen, als leichte Objekte. Wir wollen das widerlegen!

Beweis: Angenommen, schwere Objekte fallen schneller, als leichtere. Dann nehmen wir ein schweres und ein leichtes Objekt und kleben beide zusammen. Einerseits müsste die Fallgeschwindigkeit dieses neuen Objektes zwischen den Geschwindigkeiten der Ausgangsobjekte liegen, denn das leichte (langsam fallende) Teilobjekt wird den Fall des schweren (schnell fallenden) Teilobjektes abbremsen. Andererseits ist das neue Objekt sicher schwerer als jedes einzelne Teilobjekt, müsste also auch schneller fallen als beide. Beide (logischen) Überlegungen widersprechen sich, unsere Annahme muss also falsch sein. □

Wir zeigen jetzt, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dazu nehmen wir an, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ und zeigen dann, dass dies auf einen Widerspruch führt.

$$(1) \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p \text{ und } q \text{ teilerfremd.} \\ (p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$$

Beide Seiten quadrieren

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad \text{oder} \quad p^2 = 2q^2 \quad \text{d.h. } p^2 \text{ ist eine} \\ \text{gerade Zahl.} \\ \text{Also ist auch } p \\ \text{gerade, d.h.} \\ p = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Somit

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2$$

Oder

$$q^2 = 2k^2, \quad \text{d.h. } q^2 \text{ ist gerade und damit} \\ \text{auch } q.$$

Also sind p u. q nicht teilerfremd (sie enthalten den gemeinsamen Faktor 2). Dies ist im Widerspruch zur **Annahme**.

Also ist die Annahme falsch, dann $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Zusammenfassung

- Wir haben in dieser Woche die Fundation eines Gebäudes erstellt.
- Es wurde also der Baugrund gefestigt, Pfähle wurden eingeschlagen, Spundwände geschlagen, etc.
- In der nächsten Woche werden wir Vorbereitungen treffen, damit wir in der darauffolgenden Woche das Fundament des Gebäudes erstellen können.

5 Gottesbeweis von Gödel

Existenz Gottes, wissenschaftlich bewiesen

BY ISRASWISS on SEPTEMBER 12, 2013 • (3)



 2 Votes

Am Computer haben ein deutscher und ein österreichischer Forscher bewiesen, dass es Gott gibt – ohne Glauben, rein anhand logischer Argumente.

Bisher war es eine Glaubensfrage: Gibt es eine höhere Macht, gibt es Gott? Forscher der Freien Universität Berlin und der TU Wien wollen nun den Beweis angetreten haben – allein mit der Kraft der Logik. Die Vorlage dazu fand sich im Nachlass des genialen Mathematikers und Logikers Kurt Gödel (1906 bis 1978). Er lehrte an der Elite-Universität Princeton in den USA, war ein enger Freund Einsteins.





In zwölf Gedankenschritten (s. unten) hatte Gödel versucht zu beweisen, dass es Gott gibt. Seine Kernidee: Aus der Existenz positiver Eigenschaften ergebe sich, dass es Gott geben müsse, der alles Positive in sich vereint.

Das Problem: Selbst für hochgebildete Wissenschaftler war seine abstrakte Beweisführung geistig kaum nachzuvollziehen.

Die modernen Forscher wandelten daher die Sätze in mathematische Formeln um, liessen sie anschliessend vom Computer durchrechnen. Ihr Ergebnis: Alles stimmt.

«Die logische Argumentationskette in diesem Gottesbeweis ist nachweisbar korrekt », sagt Christoph Benzmüller von der TU Berlin, einer der beteiligten Forscher und Experte für künstliche Intelligenz. Als Argument, persönlich an Gott zu glauben, dürften diese Formel allerdings nur die wenigsten sehen.



Mathematiker Kurt Gödel hinterliess den Gottesbeweis.

Gödels Kette der Argumente für Gott:

Annahme 1: Eine Eigenschaft oder ihre Umkehrung ist positiv, nie beides.

$$\forall \phi [P(\neg\phi) \leftrightarrow \neg P(\phi)]$$

Annahme 2: Eine Eigenschaft, die eine positive Eigenschaft beinhaltet, ist positiv.

$$\forall \phi \forall \psi [(P(\phi) \wedge \square \forall x [\phi(x) \rightarrow \psi(x)]) \rightarrow P(\psi)]$$

Lehrsatz 1: Positive Eigenschaften sind möglicherweise beispielhaft.

$$\forall \varphi [P(\varphi) \rightarrow \Diamond \exists x \varphi(x)]$$

Definition 1: Ein göttliches Wesen enthält alle positiven Eigenschaften.

$$G(x) \leftrightarrow \forall \phi [P(\phi) \rightarrow \phi(x)]$$

Annahme 3: Die Eigenschaft, gottgleich zu sein, ist positiv.

$$P(G)$$

Schlussfolgerung: Möglicherweise existiert Gott.

$$\Diamond \exists x G(x)$$

Annahme 4: Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv.

$$\forall \phi [P(\phi) \rightarrow \square P(\phi)]$$

Definition 2: Die Essenz eines Individuums ist die Eigenschaft, die von diesem umgesetzt wird und beinhaltet notwendigerweise irgendeine seiner Eigenschaften.

$$\phi \text{ ess. } x \leftrightarrow \phi(x) \wedge \forall \psi (\psi(x) \rightarrow \square \forall y (\phi(y) \rightarrow \psi(y)))$$

Lehrsatz 2: Göttlich zu sein ist die Essenz jeder götterähnlichen Existenz.

$$\forall x [G(x) \rightarrow G \text{ ess. } x]$$

Definition 3: Notwendige Existenz eines Individuums ist die notwendige Beispielhaftigkeit all seiner Esszenzen.

$$NE(x) \leftrightarrow \forall \phi [\phi \text{ ess. } x \rightarrow \square \exists y \phi(y)]$$

Annahme 5: Die notwendige Existenz ist eine positive Eigenschaft.

$$P(NE)$$

Lehrsatz 3: Notwendigerweise existiert Gott.

$$\square \exists x G(x)$$