Diskrete Mathematik

Patrick Bucher

25. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Logik und Beweise

Proposition: eine Aussage oder ein Satz ist:

- wahr (w: wahr, t: true, 1)
- falsch (f: falsch/false, 0)

Fragen und Gleichungen mit einer Unbekannten sind keine Aussagen. Aussagen werden meist mit p, q, r, s bezeichnet. Beispiele für Propositionen

- p = «Es regnet draussen.»
- q = «Der Platz draussen ist nass.»

1.1 Logische Operationen

1.1.1 Negation

$\neg p$: «Es ist nicht der Fall, dass p gilt.» Wahrheitstabelle:

p	$\neg p$
w	f
f	w

1.1.2 Konjunktion

$p \wedge q$: «Es gelten p und q.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \wedge q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

1.1.3 Disjunktion

$p \vee q$: «Es gilt p oder q oder es gelten beide.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \vee q$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

1.1.4 Exklusives Oder (EXOR)

$p \oplus q$: «Es gilt p oder q aber nicht p und q.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \oplus q$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

1.1.5 Implikation

$p \to q$: «Wenn p gilt, dann gilt q.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \to q$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Aus einem Falschen kann etwas Beliebiges gefolgert werden! Beispiel: Ein Politiker sagt: «Wenn ich gewählt werde, senke ich die Steuern.»

- p: Politiker wird gewählt
- q: Politiker senkt die Steuern.

$p \to q$

1. Der Politiker wird gewählt und senkt die Steuern: die Aussage trifft zu.
2. Der Politiker wird gewählt, senkt aber die Steuern nicht: die Aussage trifft nicht zu.
3. Der Politiker wird nicht gewählt; es ist egal, was er in diesem Fall tun will: die Aussage trifft zu.

1.1.6 Bikonditional

$p \leftrightarrow q$: «Es gilt p genau dann, wann q gilt.» Wahrheitstabelle:

p	q	$p \leftrightarrow q$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Eine bikonditionale Präposition ist dann wahr, wenn p und q den gleichen Wahrheitswert haben, also das Gegenteil von EXOR:
$p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \oplus q)$

1.2 Priorität logischer Operationen

1. $\neg$ (Negation)
2. $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion)
3. $\to$ (Implikation), $\leftrightarrow$ (Bikonditional)

1.3 Präpositionale Äquivalenzen

1.3.1 Tautologie

Die Aussage ist immer wahr. Beispiel: $p \vee \neg q$

1.3.2 Kontradiktion (Widerspruch)

Die Aussage ist immer falsch. Beispiel: $p \wedge \neg q$

1.4 Logische Äquivalenz

Zwei Aussagen (p und q) sind logisch äquivalent, wenn $p \leftrightarrow q$ eine Tautologie ist. Schreibweisen: $p \equiv q$, $p \sim q$, $p \Leftrightarrow q$

1.5 Logische Äquivalenzgesetze

T: True (wahr), F: False (falsch)

1.5.1 Identität

$p \wedge T \equiv p$
$p \vee F \equiv p$

1.5.2 Dominanz

$p \vee T \equiv T$
$p \wedge F \equiv F$

1.5.3 Idempotenz

$p \vee p \equiv p$
$p \wedge p \equiv p$

1.5.4 Doppelnegation

$\neg(\neg p) \equiv p$

1.5.5 Negation

$p \vee \neg p \equiv T$
$p \wedge \neg p \equiv F$

1.5.6 Kommutativität

$p \vee q \equiv q \vee p$
$p \wedge q \equiv q \wedge p$

1.5.7 Absorption

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

1.5.8 Assoziativ 1 und 2

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

1.5.9 Distributiv 1 und 2

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.5.10 De Morgan 1 und 2

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

1.5.11 Weitere Equivalenzgesetze

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
$\neg(p \oplus q) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \oplus q) \equiv p \leftrightarrow q$