# BSpecRProblem Notes

Shuang Hu

2022 年 9 月 25 日

**注: 如无特殊说明，本文中的公式编号均为文档 BSpecRProblem.pdf 中的编号，“文档” 也特指 BSpecRProblem.pdf**。

## 1 文档中的一些小问题

- 图 1 上面的叙述中，$x_i = ih$ 存在误导，文档所述算法的空间离散是在区间中点处进行而非区间端点。
- (11) 式的上标应当为 $n+1$，而不是 $n$。
- (25) 式中，矩阵 $B = (I + rA)^{-1}(I + rS)$。后面关于 $B^{-1}$ 的讨论也有同样的问题。
- (35) 和 (36) 式的符号都有小问题，应当是 $|\rho(B)| \le 1$, $|\lambda(B^{-1})| = |1 + \lambda(Q)| \ge 1$。

## 2 关于算法的一些疑问

- 注意到，本次采用的虽然也是有限差分 $MOL$ 算法，但取点的方案却和经典的有限差分算法有较大区别。记 $n$ 为小区间段个数，$h = \frac{1}{n}$ 是每一段小区间的长度，之前我们学过的有限差分算法求解的是 $x_i = ih$ 处函数的近似值，在处理边界条件时为方便起见，往往取 $x_{-1} = -h$ 和 $x_{n+1} = (n+1)h$ 为 `Ghost Cell`。但在本问题的算法中，我们关心的是每段小区间中点处函数的近似取值，即 $x_i = (i + \frac{1}{2})h$。相应的，`Ghost Cell` 取为 $x_{-1} := -\frac{1}{2}h$ 和 $x_n := 1 + \frac{1}{2}h$(文中列方程时实际上消去了 `Ghost Cell`)。这种处理方案，相比于传统的有限差分方法，有哪些优势？在本问题中为何要采用这种处理方案？
- 按照设定，$x_I$ 点左侧为较快的物理过程，而 $x_I$ 右侧较慢。那么，针对两种不一样的物理过程，为什么采用同样的数值算法进行处理？可能在 $x_I$ 左侧采用中心差分和向后欧拉，在 $x_I$ 右侧采用中心差分和向前欧拉，会是更合理的处理方式。
- 注意到，式 (24) 的矩阵 $A$ 并非一个分块对角矩阵，这也就意味着 $x_I$ 的左右两侧并没有完全解耦。这或许是稳定性分析的主要难点？
- 如果考虑到 $x_I$ 左侧和右侧 $\nu$ 的显著区别，那么 $r := \frac{k\nu}{h^2}$ 至少需要分两段讨论，即 $x_I$ 左侧和 $x_I$ 右侧的 $r$ 会存在显著区别，问题会更为复杂一些。

# 3 稳定性分析问题简述

假设 $A$ 和 $S$ 分别按 (24), (23) 式定义，记 $B := (I+rA)^{-1}(I+rS)$，文档中所述算法数值稳定等价于式 (31) 成立，即序列 $b_n := \|B^n\|_\infty$ 为一个有界序列。而该问题可以转化为证明矩阵 $B$ 的谱半径 $\rho(B) < 1$。

由于 $B$ 的表达式较难给出，因此我们把问题转化为研究 $B^{-1}$ 的模最小特征值。如果能证明 $B^{-1}$ 的模最小特征值的模长大于 1，那么也就说明了 $B$ 的谱半径小于 1。按文中 (16) 式，取 $a_{11} = 3, a_{12} = -1$，可得 $B^{-1} = I + Q$，其中

$$Q = r\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & -1 & 1+\frac{1}{1+r^2} & \frac{2r^2-1}{1+r^2} & \frac{-3r^2}{1+r^2} & \frac{r^2}{1+r^2} & & \\ & & & & -\frac{1}{1+r^2} & 1+\frac{1-2r^2}{1+r^2} & \frac{2r^2-1}{1+r^2} & -\frac{r^2}{1+r^2} & & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

推导过程见文中等式 (34)。按这种方式，问题可以转化为证明矩阵 $Q$ 的所有特征值实部大于 0。但这是一个充分而非必要的条件，事实上，只要 $Q$ 的所有特征值 $\lambda(Q)$ 满足：

$$|1+\lambda(Q)| \geq 1, \tag{2}$$

即可说明稳定性结论成立。

# 4 参考思路的可行性分析

文档第二部分给了一些参考思路，在本部分中，我对这些思路的可行性进行分析和评述。

## 4.1 秩 1 校正思路

该部分的主要思想是把待分析的矩阵 $Q$ 分解为 $Q = Q_1 + Q_2$，其中 $Q_1$ 是三对角正定矩阵，$Q_2$ 是秩 1 矩阵，它们的表达式分别为:

$$Q_1 = r\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & & \\ & Q_{4\times4} & \\ & & \mathbf{O} \end{bmatrix}, Q_{4\times4} = \frac{r^3}{1+r^2}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(同文档中式 (37))。由于我们只关心矩阵 $Q$ 的特征值实部是否大于 0，且参数 $r>0$，我们可以把公因子 $r$ 提取出来，转化为分析矩阵 $P := P_1 + \frac{r^2}{1+r^2}P_2$ 的特征值。$P_1$，$P_2$ 的表达式分别为：

$$P_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & P_{4\times 4} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, P_{4\times 4} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

$P_1$ 的形式比较接近离散拉普拉斯算子的形式，分析其特征值相对比较容易，而 $P_2$ 是一个秩 1 矩阵，也比较易于分析。对于 $P = P_1 + \frac{r^2}{1+r^2}P_2$，主要的难点在于 $P_2$ 前面的系数与参数 $r$ 相关。但在分析 $P$ 的特征值时，我们依旧可以利用 $P_1$ 和 $P_2$ 的一些比较好的性质。该思路是我目前的首选思路，下一节的叙述中也会围绕这一条展开。

### 4.2 利用 Sherman-Morrison 公式给出矩阵 $B$ 的表达式

我认为这一条思路可行性较低。如 (40) 式所示，$B$ 的表达形式过于复杂，且涉及到求两个较复杂矩阵减法的过程，以至于我们很难对矩阵 $B$ 的特征多项式进行分析。

### 4.3 矩阵的半正定分解

如果我们可以把矩阵 $Q$ 分解为两个半正定矩阵的和，则问题即刻得到解决。但这条思路目前也不是我的首选，原因如下：

- $Q$ 非对称矩阵，而一般讨论正定矩阵都需要在对称阵的框架下进行。在这种情况下，我们需要分解的矩阵不是 $Q$，而是更为复杂的 $\frac{Q+Q^t}{2}$。
- 数学问题中“举例说明存在”很多时候并非一件容易的事情，特别是在该问题中，$Q$ 的大小，矩阵块 $Q_{4\times 4}$ 的位置和 $r$ 的取值都是需要考虑的变量。

### 4.4 考虑其他 (易于计算的) 矩阵范数

文档中表 1 已经表明了直接计算矩阵 $B$ 的 $\infty$ 范数不可行，而矩阵范数除了 $\infty$ 范数和 1 范数外都并不易于计算。所以这条思路也不太可行。

## 5 我的思路

由于 $r \in (0,\infty)$，记 $t = \frac{r^2}{1+r^2}$，可知 $t \in (0,1)$，我们需要分析的矩阵 $P(t) = P_1 + \frac{r^2}{1+r^2}P_2 = P_1 + tP_2$。

首先我们讨论实特征值。分析 $P(t)$ 的特征多项式 $f(\lambda,t) := \det(\lambda I - P(t))$。为方便讨论，考虑多项式 $g(\lambda,t) := \det(P(t) - \lambda I)$，该多项式的根和 $f(\lambda,t)$ 相同。由于 $\mathrm{rank}(Q_2) = 1$，由行列式的性质可知 $g(\lambda,t)$ 关于 $t$ 是一次多项式，从而 $\frac{\partial g}{\partial t} = C(\lambda)$，$C(\lambda)$ 仅与 $\lambda$ 相关。这意味着对于给定的 $\lambda \in \mathbb{R}$，$g(\lambda,t)$ 关于 $t$ 单调。

**Theorem 1.** *给定* $\lambda_0 \in \{\omega \in \mathbb{R} : C(\omega) \neq 0\}$*，存在* $t_0 \in (0, \tau)$ $(\tau > 0)$ *使得* $\lambda_0$ *为* $P(t_0)$ *的特征值，当且仅当* $g(\lambda_0, 0)g(\lambda_0, \tau) < 0$*。*

证明. "$\Leftarrow$"：由于 $h(t) := g(\lambda_0, t)$ 为连续函数，且 $h(0)h(\tau) < 0$，由零点存在定理，$\exists t_0 \in (0, \tau)$ s.t. $h(t_0) = 0$，即 $g(\lambda_0, t_0) = 0$，从而 $\lambda_0$ 是 $P(t_0)$ 的特征值。

"$\Rightarrow$"：由于 $\frac{\partial g(\lambda_0, t)}{\partial t} = C(\lambda_0)$，$h(t)$ 是一次函数。且由于 $C(\lambda_0) \neq 0$，可知 $h$ 非常值函数。故 $h(t) = C(\lambda_0)(t - t_0)$，计算可得:

$$g(\lambda_0, 0)g(\lambda_0, \tau) = C(\lambda_0)^2(\tau - t_0)(-t_0) < 0. \tag{5}$$

最后一步不等式的依据是 $0 < \tau < t_0$。 □

**Theorem 2.** *给定* $\lambda_0 \in \{\omega \in \mathbb{R} : C(\omega) = 0\}$*，存在* $t_0 \in (0, \tau)$ $(\tau > 0)$ *使得* $\lambda_0$ *为* $P(t_0)$ *的特征值，当且仅当* $g(\lambda_0, 0) = g(\lambda_0, \tau) = 0$*。*

证明. 记 $h(t) := g(\lambda_0, t)$，当 $C(\lambda_0) = 0$ 时，

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial g(\lambda_0, t)}{\partial t} = C(\lambda_0) = 0, \tag{6}$$

从而 $h(t) \equiv h(0)$。因此，在这种情况下，$h(t_0) = 0 \Leftrightarrow h(0) = h(\tau) = 0$，即 $g(\lambda_0, 0) = g(\lambda_0, \tau) = 0$。 □

*Remark.*

$$g(\lambda, 0) = g(\lambda, 1) \Leftrightarrow C(\lambda) = 0. \tag{7}$$

**Corollary 3.** *给定* $\tau > 0$*，如果* $P(\tau)$ *的所有实特征值都大于 0，那么* $\forall t \in [0, \tau]$*，*$P(t)$ *的所有实特征值都大于 0。*

证明. 由于 $P(0) = P_1$ 为对称正定矩阵，$\forall \lambda \leq 0$，$g(\lambda, 0) > 0$。根据 $g(\lambda, t)$ 的定义，$\lim_{\lambda \to -\infty} g(\lambda, \tau) = +\infty$，且 $g(\lambda, \tau)$ 关于 $\lambda$ 连续。又根据已知条件，$\forall \lambda \leq 0$，$g(\lambda, \tau) \neq 0$，由零点存在性定理可知:

$$\forall \lambda \leq 0, g(\lambda, \tau) > 0. \tag{8}$$

结合定理 1和定理 2，$\forall \lambda \leq 0, t \in [0, \tau], g(\lambda, t) > 0$。即 $P(t)$ 的所有实特征值均大于 0。 □

由推论 3 可知，如果我们可以验证 $P(1)$ 的所有实特征值均大于 0，则说明 $\forall t \in [0, 1], P(t)$ 的所有实特征值均大于 0。

如果 $P(1)$ 存在非正特征根，则利用二分查找算法寻找 $t_0$，使得 $\forall t \in (0, t_0)$，$P(t)$ 不存在非正特征根。算法流程大致如下:

1. 设定 $t_0 = 0$，$t_e = 1$，最小查询区间长度 $\epsilon$。
2. 如果 $|t_e - t_0| < \epsilon$，终止程序并返回 $t_0$。
3. 计算 $mid = \frac{t_0 + t_e}{2}$。
4. 判断多项式 $g(\lambda, mid)$ 是否存在非正实数根。如果存在，设定 $t_e = mid$；如果不存在，设定 $t_0 = mid$，返回第二步。

推论 3 保证了二分法输出的 $t_0$ 满足：$\forall t \in [0, t_0]$，$P(t)$ 不存在非正的特征根。

这样我们可以保证在 $\frac{r^2}{1+r^2} \in [0, t_0]$ 的条件下矩阵 $B$ 不存在绝对值大于等于 1 的实特征根。

# 6 存在问题和研究展望

目前这个思路可能存在下面的这些难点:

- 给定 $\tau \in (0,1]$，不容易计算出 $P(\tau)$ 特征值的解析表达式，如果找不到合适的估计，则需要考虑数值求解矩阵特征值。
- $P(\tau)$ 的最小实特征值与矩阵 $P$ 的大小 $N$，以及矩阵块 $P_{4\times 4}$ 的装配位置 $M$ 有关。
- 由于复数域并非有序域，且第五部分所述方案高度依赖零点存在定理，这个方案不能直接用于解决复特征根的问题。$P(0)$ 是实对称矩阵，特征根均为实数，但对于 $\tau \neq 0$，$P(\tau)$ 可能出现实部非正的复特征根，这是目前的方案无法探测的。

研究展望:

- 试着给出 $P(1)$ 特征值的一个下界估计。
- 检查 $P(1)$ 是否存在非实数特征根。如果存在，则设计一组方案处理之。
- 完成该算法求解热方程的稳定性分析后，尝试对区域耦合的扩散方程进行稳定性分析。