Finite Volume Design

Shuang Hu

2022 年 7 月 13 日

1 问题描述

设计四阶精度的有限体积算法求解**对流扩散方程**的初边值问题和**不可压 Navier-Stokes 方程**的周期边界问题。方程的表示形式具体如下：

对流扩散方程：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{u}\phi) + \nu \Delta \phi + f, \\
\phi(\mathbf{x}, 0) = g_1(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \\
\phi(\mathbf{x}, t) = g_2(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{1}
$$

如果是 Neumann 边界条件，第三个表达式则改为

$$
\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = g_2(\mathbf{x}, t).
\tag{2}
$$

周期边界的 INSE, 区域 $\Omega := [0, 1]^2$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{g} - \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \\
\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{x} \in \Omega, \\
\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{u}(x + 1, y, t). \\
\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y)
\end{cases}
\tag{3}
$$

在本次作业中，需要实现对流扩散方程在 **Dirichlet** 和 **Neumann** 两种边界条件下的求解，其中时间积分方法利用 **ERK-ESDIRK IMEX Runge-Kutta 格式**，并且在近似 **Leray-Helmholtz 投影算子**时，需要采用多重网格算法。

2 底层程序

底层的数据结构和数值算法沿用先前组里求解 Navier-Stokes 方程的软件包，在本程序中需要用到的是以下内容：

- `class Vec`: 用来表示空间中的点。
- `class Tensor`: 用来存储体平均值，表示系数矩阵等。

- `class RowSparse`: 用于存储稀疏矩阵。
- `class Box`: 用于网格离散。
- `class RectDomain`: 用于表示问题区域（矩形）。
- `numlib.h`: 一些常用的数值算法，这里会多次用到数值积分程序段。

3 class VectorFunction

- 函数 $\mathbb{R}^{\mathrm{Dim}_1} \to \mathbb{R}^{\mathrm{Dim}_2}$ 的基类，用于表示方程的初值/边值信息，或者是右端项。
- **模板:** `template<int Dim1,int Dim2>`:

  `Dim1` 和 `Dim2` 分别表示定义域和值域所在的空间维数。
- **成员函数:**
  1. `virtual const Vec<Dim2> operator()(const Vec<Dim1>& pt) const = 0;`

     public 成员函数

     输入: `pt` 表示 `Dim1` 维空间中的一个点。

     输出: 该函数在 `pt` 点处的取值。

     作用: 计算函数在一个离散点上的值。纯虚函数，需要在继承类中具体实现。