BSpecRProblem Notes

Shuang Hu

2022 年 9 月 22 日

1 文档中的一些小问题

- 图 1 上面的叙述中，$x_i = ih$ 存在误导，后面的空间离散算法是在区间中点处进行而非区间端点。
- (11) 式的上标应当为 $n+1$，而不是 n。
- (25) 式中，矩阵 $B = (I + rA)^{-1}(I + rS)$。同理，后面关于 B^{-1} 的讨论也有同样的问题。
- (35) 和 (36) 式的符号都有小问题，应当是 $|\rho(B)| \leq 1$, $|\lambda(B^{-1})| = |1 + \lambda(Q)| \geq 1$.

2 关于算法的一些疑问

- 注意到，本次采用的虽然是熟悉的有限差分 MOL 算法，但取点的方案却和经典的有限差分算法有较大区别。记 n 为小区间段个数，$h = \frac{1}{n}$ 是每一段小区间的长度，之前我们学过的有限差分算法求解的是 $x_i = ih$ 处函数的近似值，在处理边界条件时为方便起见，往往取 $x_{-1} = -h$ 和 $x_{n+1} = (n+1)h$ 为 `Ghost Cell`。但在本问题的算法中，我们关心的是每段小区间中点处函数的近似取值，即 $x_i = (i + \frac{1}{2})h$。相应的，`Ghost Cell` 取为 $x_{-1} := -\frac{1}{2}h$ 和 $x_n := 1 + \frac{1}{2}h$。这样处理之后，方便了 **Neumann 边值条件**的处理，但与此同时对 **Dirichlet 边值条件**的处理造成了不便。这种处理方式和我们常用的处理方式相比较，优势和劣势分别体现在何处?
- 按照设定，x_I 点左侧为较快的物理过程，而 x_I 右侧较慢。那么，针对两种不一样的物理过程，为什么采用同样的数值算法进行处理？可能在 x_I 左侧采用中心差分和向后欧拉，在 x_I 右侧采用中心差分和向前欧拉，会是更合理的处理方式。
- 注意到，式 (24) 的矩阵 A 并非一个分块对角矩阵，这也就意味着 x_I 的左右两侧并没有完全解耦。这或许是稳定性分析的主要难点?
- 如果考虑到 x_I 左侧和右侧 ν 的显著区别，那么 $r := \frac{k\nu}{h^2}$ 至少需要分两段讨论，即 x_I 左侧和 x_I 右侧的 r 会存在显著区别，这样等式 (19) 则不成立，问题会更为复杂一些。

3 稳定性分析问题简述

假设 A 和 S 分别按 (24), (23) 式定义，记 $B := (I + rA)^{-1}(I + rS)$，文中所述算法稳定等价于式 (31) 成立，即序列 $b_n := \|B^n\|_\infty$ 为一个有界序列。而该问题可以转化为证明矩阵 B 的谱半径 $\rho(B) < 1$。

由于 B 的表达式较难给出，因此我们把问题转化为研究 B^{-1} 的模最小特征值。如果能证明 B^{-1} 的模最小特征值的模长大于 1，那么也就说明了 B 的谱半径小于 1。按文中 (16) 式，取 $a_{11}=3, a_{12}=-1$，可得 $B^{-1}=I+Q$，其中

$$Q=r\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & -1 & 1+\frac{1}{1+r^2} & \frac{2r^2-1}{1+r^2} & \frac{-3r^2}{1+r^2} & \frac{r^2}{1+r^2} & & \\ & & & & -\frac{1}{1+r^2} & 1+\frac{1-2r^2}{1+r^2} & \frac{2r^2-1}{1+r^2} & -\frac{r^2}{1+r^2} & & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

推导过程见文中等式 (34)。按这种方式，问题可以转化为证明矩阵 Q 的所有特征值实部大于 0。但这是一个充分而非必要的条件，事实上，只要 Q 的所有特征值满足：

$$|1+\lambda(Q)|\geq 1, \tag{2}$$

即可说明稳定性结论成立。

4 参考思路的可行性分析

文档第二部分给了一些参考思路，在本部分中，我对这些思路的可行性进行分析和评述。

4.1 秩 1 校正思路

该部分的主要思想是把待分析的矩阵 Q 分解为 $Q=Q_1+Q_2$，其中 Q_1 是三对角正定矩阵，Q_2 是秩 1 矩阵，它们的表达式分别为:

$$Q_1=r\begin{bmatrix} 3 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}, Q_2=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \\ & Q_{4\times 4} & \\ & & \mathbf{0} \end{bmatrix}, Q_{4\times 4}=\frac{r^3}{1+r^2}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(同文档中式 (37))。Q_1 的形式比较接近离散拉普拉斯算子的形式，分析其特征值相对比较容易，主要难点在于提出 Q_1 和 Q_2 的公因子 r 后，Q_2 的形式仍旧与参数 r 相关。但在分析 Q 的特征值时，我们依旧可以利用 Q_1 和 Q_2 的一些比较好的性质。该思路是我目前的首选思路，下一节的叙述中也会围绕这一条展开。

4.2 利用 Sherman-Morrison 公式给出矩阵 B 的表达式

我认为这一条思路可行性一般。如 (40) 式所示，B 的表达形式过于复杂，且涉及到求两个较复杂矩阵减法的过程，以至于我们很难对矩阵 B 的特征多项式进行分析。

4.3 矩阵的半正定分解

如果我们可以把矩阵 Q 分解为两个半正定矩阵的和，则问题即刻得到解决。但这条思路目前也不是我的首选，原因如下：

- Q 非对称矩阵，而一般讨论正定矩阵都需要在对称阵的框架下进行。在这种情况下，我们需要分解的矩阵不是 Q，而是更为复杂的 $\frac{Q+Q^t}{2}$。
- 数学问题中“举例说明存在”很多时候并非一件容易的事情，特别是在该问题中，Q 的大小，矩阵块 $Q_{4\times 4}$ 的位置和 r 的取值都是需要考虑的变量。

4.4 考虑其他 (易于计算的) 矩阵范数

文档中表 1 已经表明了直接计算矩阵 B 的 ∞ 范数不可行，而矩阵范数除了 ∞ 范数和 1 范数外都并不易于计算。所以这条思路也不太可行。

5 我的思路

按文档中的参考思路 1，由于我们只关心 $Q = Q_1 + Q_2$ 的特征值实部与 0 的关系，且 $r > 0$，故我们可以把 Q_1 和 Q_2 的公因子 r 提出来，讨论 $P = P_1 + \frac{r^2}{1+r^2} Q_2$ 的特征值。其中 $P_1 = \frac{1}{r} Q_1$。由于 $r > 0$，不妨设 $t = \frac{r^2}{1+r^2}$，则有 $t \in (0, 1)$，$P(t) = P_1 + tQ_2$。

下面分析 $P(t)$ 的特征多项式 $f(\lambda, t) := \det(\lambda I - P(t))$。为方便讨论，考虑多项式 $g(\lambda, t) := \det(P(t) - \lambda I)$，该多项式的根和 $f(\lambda, t)$ 相同。由于 $r(Q_2) = 1$，由行列式的性质可知 $g(\lambda, t)$ 关于 t 是一次多项式，从而 $\frac{\partial g}{\partial t} = C(\lambda)$，$C(\lambda)$ 仅与 λ 相关。这意味着 $g(\lambda, t)$ 关于 t 单调。

Theorem 1. 对 $\lambda \in \{\omega \in \mathbb{R} : C(\omega) \neq 0\}$，存在 $t_0 \in (0, 1)$ 使得 λ 为 $P(t_0)$ 的特征值，当且仅当 $g(\lambda, 0)g(\lambda, 1) < 0$。

证明. ” $\Leftarrow$ ”：由于 $h(t) := g(\lambda, t)$ 为连续函数，且 $h(0)h(1) < 0$，由零点存在定理，$\exists t_0 \in (0, 1)$ s.t. $h(t_0) = 0$，即 $g(\lambda, t_0) = 0$。

” $\Rightarrow$ ”：由上面的分析可知，$h(t)$ 是线性函数，且由于 $C(\lambda) \neq 0$，h 非常值函数。故 $h(t) = C(\lambda)(t - t_0)$，计算可知：

$$g(\lambda, 0)g(\lambda, 1) = C(\lambda)^2 (1 - t_0)(-t_0) < 0. \tag{4}$$

□

Theorem 2. 设 $\lambda \in \{\omega \in \mathbb{R} : C(\omega) = 0\}$，存在 $t_0 \in (0, 1)$ 使得 λ 为 $P(t_0)$ 的特征值，当且仅当 $g(\lambda, 0) = g(\lambda, 1) = 0$。

证明. 记 $h(t) := g(\lambda, t)$，由前面的分析知，当 $C(\lambda) = 0$ 时，$h(t) \equiv h(0)$。因此，在这种情况下，$h(t) = 0 \Leftrightarrow h(0) = h(1) = 0$，即 $g(\lambda, 0) = g(\lambda, 1) = 0$。 □

Remark.

$$g(\lambda, 0) = g(\lambda, 1) \Leftrightarrow C(\lambda) = 0. \tag{5}$$

已知 $P(0)$ 是正定矩阵，即:$\forall\lambda < 0$，$P(\lambda, 0) > 0$。综合上述定理 1，定理 2 和 remark，如果 $P(1)$ 不存在负特征根，即可说明 $P(t)$ 无小于 0 的实根。

如果 $P(1)$ 存在负特征根，则利用二分法查找 t_0，使得 $\forall t \in (0, t_0)$，$P(t)$ 不存在负特征根。二分法中输入的函数 $f(t) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : g(\lambda, t) = 0\}$，具体算法和数值分析讲义的算法 1.1 一致。

目前这个思路可能存在下面的这些难点：

- $P(1)$ 的特征值可能并不容易计算和估计。
- $P(1)$ 的最小实特征值可能与矩阵 Q 的大小 n，以及矩阵块 $Q_{4\times 4}$ 的装配位置有关。
- 目前这套方案可以解决实特征根的问题，但针对复特征根的问题则暂时无能为力。