BSpecRProblem Notes

Shuang Hu

2022 年 8 月 24 日

1 文档中的一些小错误

- (11) 式的上标应当为 $n+1$，而不是 n。
- (25) 式中，矩阵 $B=(I+rA)^{-1}(I+rS)$。同理，后面关于 B^{-1} 的讨论也有同样的问题。
- (31) 式下面说明，范数 $\|\cdot\|$ 为 ∞ 范数，但 Section 1.2.1 中实际讨论的是 2-范数 (谱半径)，那么是不是意味着我们没必要强调该范数是无穷范数?
- (35) 和 (36) 式的符号都有小问题，应当是 $|\rho(B)\leq 1|$, $|\lambda(B^{-1})|=|1+\lambda(Q)|\geq 1$.

2 关于算法的一些疑问

- 注意到，本次采用的虽然是熟悉的有限差分 MOL 算法，但取点的方案却和经典的有限差分算法有较大区别。记 n 为小区间段个数，$h=\frac{1}{n}$ 是每一段小区间的长度，之前我们学过的有限差分算法求解的是 $x_i=ih$ 处函数的近似值，在处理边界条件时为方便起见，往往取 $x_{-1}=-h$ 和 $x_{n+1}=(n+1)h$ 为 `Ghost Cell`。但在本问题的算法中，我们关心的是每段小区间中点处函数的近似取值，即 $x_i=(i+\frac{1}{2})h$。相应的，`Ghost Cell` 取为 $x_{-1}:=-\frac{1}{2}h$ 和 $x_n:=1+\frac{1}{2}h$。这样处理之后，方便了 **Neumann 边值条件**的处理，但与此同时对 **Dirichlet 边值条件**的处理造成了不便。这种处理方式和我们常用的处理方式相比较，优势和劣势分别体现在何处?
- 按照设定，x_I 点左侧为较快的物理过程，而 x_I 右侧较慢。那么，针对两种不一样的物理过程，为什么采用同样的数值算法进行处理? 可能在 x_I 左侧采用中心差分和向后欧拉，在 x_I 右侧采用中心差分和向前欧拉，会是更合理的处理方式。
- 如上一点所述，对于 x_I 左侧和右侧的数据点分别求解，其原因是系数 $\nu(x)$ 在 x_I 左侧和右侧存在截然不同的表现。如果 ν 在问题区域 $[0,1]$ 上为一个常值，那么直接在整个区域上进行有限差分离散就可以了。但在稳定性讨论时，我们则是针对一个经典的热方程进行讨论，这是因为我们需要先保证该算法求解热方程的正确性吗?
- 注意到，式 (24) 的矩阵 A 并非一个分块对角矩阵，这也就意味着 x_I 的左右两侧并没有完全解耦。这或许是稳定性分析的主要难点?
- 如果考虑到 x_I 左侧和右侧 ν 的显著区别，那么 $r:=\frac{k\nu}{h^2}$ 至少需要分两段讨论，即 x_I 左侧和 x_I 右侧的 r 会存在显著区别，这样等式 (19) 则不成立，问题会更为复杂一些。