



Note For Finite Element Methods

Zhejiang University

作者: Shuang Hu

组织: Zhejiang University

时间: Sept 14, 2022

版本: 1.0

简介: 2022 秋冬学期“有限元方法”课程笔记



目录

第 1 章 一维有限元方法	1
1.1 为什么需要有限元方法?	1
1.2 从一维边值问题说起	1
1.3 有限元思想的导出	2
1.3.1 Galerkin 近似	2
1.3.2 Ritz 方法	2
1.4 有限元方法	3
1.4.1 线性有限元空间	3
1.4.2 刚度矩阵与负载	3
1.5 误差分析	4
1.6 一阶非齐次 BVP	8
1.7 其他边值问题	9
1.7.1 Neumann 边值问题	9
1.7.2 Robin 边值问题	9
1.8 本章总结	9
第 2 章 变分原理	10
2.1 变分问题以及等价形式	10
2.1.1 预备知识	10
2.1.2 存在唯一性	11
2.1.3 变分问题的等价形式	12
2.2 Lax-Milgram 引理	13
2.3 具体实例	13

第 1 章 一维有限元方法

1.1 为什么需要有限元方法？

此前在《微分方程数值解》课程中，我们已经学习了有限差分法和有限体积法。这两种方法有不少优点：首先，比较直观，只要知道如何利用差分近似导数即可得到对应的差分公式；其次，在一些情形下，有限差分法和有限体积法可以实现较高的计算精度。

但是，这两种算法有一些明显的缺陷。

- 算法稳定性的分析比较复杂。
- 处理不规则区域的问题时较为麻烦，需要多次利用插值近似。
- 只是求解离散格点的近似点值/离散网格的近似积分平均值，未能给出函数整体的近似。

为此，基于函数逼近论的**有限元方法**被提出。该算法能弥补有限差分法的一些明显缺陷，目前是最主流的数值算法之一。

1.2 从一维边值问题说起

考虑如下例子：

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x), x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

类似于“偏微分方程”课程中对弱解的讨论方式，在(1.1)两边同时乘某个函数 v 并在 $[0, 1]$ 上积分，得到如下形式：

$$\int_0^1 (-u'' + u)v dx = \int_0^1 f v dx. \quad (1.2)$$

定义函数空间 V 如下：

$$V := \left\{ v \mid v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 ((v')^2 + v^2) dx < \infty \right\}. \quad (1.3)$$

如果函数 $v \in V$ ，利用分部积分法，(1.1)可以转化为以下问题：

例题 1.1 记 $a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx$, $h(v) = \int_0^1 f v dx$, $v \in V$. 求 $u \in V$ ，使得 $a(u, v) = h(v) \forall v \in V$.

下面的定理说明了该问题可以转化为一个优化问题：

定理 1.1

记泛函 $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - h(v)$ ，问题 1.1 与最小化 $J(v)$ 的优化问题等价。即：如果 $a(u, v) = h(v) \forall v \in V$ ，那么 $J(u) \leq J(v) \forall v \in V$ 。

证明 \Rightarrow :

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}a(v, v) - h(v) - \frac{1}{2}a(u, u) + h(u) \\ &= \frac{1}{2}(a(v, v) - a(u, u) - 2h(v - u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v, v) - a(u, u) - 2a(u, v - u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v, v) + a(u, u) - 2a(v, u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v - u, v - u)) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

由(1.4)可得，如果 $a(u, v) = h(v)$ ，那么 $J(u) \leq J(v)$ 。

$\Leftarrow: \forall v \in V, t \in \mathbb{R}$, 有 $J(u+tv) \geq J(u)$ 。我们定义函数 $g(t) := J(u+tv)$, 根据上面的讨论可知: $g'(0) = 0$ 。另一方面, 计算 $g(t)$ 的表达式, 有:

$$\begin{aligned} g(t) &= J(u+tv) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 ((u' + tv')^2 + (u+tv)^2) dx - \int_0^1 f(u+tv) dx \end{aligned} \quad (1.5)$$

对(1.5)求一阶导数, 可得:

$$g'(0) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx - \int_0^1 f v dx. \quad (1.6)$$

根据 g 的一阶条件, 可得 $a(u, v) = h(v)$ 。又由于 v 的任意性, 结论得证。

如此, 我们把一个解微分方程的问题, 利用1.1和1.2转化为了一个变分问题。由于 V 是一个无穷维空间, 我们不能期望利用算法给出这个变分问题的精确解, 但我们可以考虑对空间 V 进行有限维近似, 并在有限维空间上近似求解这个变分问题。

1.3 有限元思想的导出

接下来, 根据上一节的思路, 我们继续问题(1.1)的近似求解。根据上面的分析, 我们的数值算法需要解决两个问题:

- 如何对函数空间 V 进行有限维近似?
- 在进行有限维近似之后, 如何在有限维空间中对变分问题进行求解?

首先, 我们考虑第二个问题。根据上面的讨论, 近似求解变分问题有两种不同的思路, 分别对应的是 **Galerkin 近似方法**和 **Ritz 近似方法**。

1.3.1 Galerkin 近似

假设已经给出有限维子空间 $V_N \leq V$, Galerkin 近似的目的是求解 $u_N \in V_N$ 使得

$$a(u_N, v_N) = h(v_N) \quad (1.7)$$

对所有 $v_N \in V_N$ 都成立。

由于 V_N 是有限维的空间, 我们可以找到这个空间中的一组基函数 $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$, 注意到 $a(u, v)$ 是对称双线性函数, 设 $u_N = \alpha_1 \phi_1(x) + \dots + \alpha_N \phi_N(x)$, $v_N(x) = \phi_i(x)$, 代入(1.7), 可得一个线性方程组:

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) & \cdots & a(\phi_1, \phi_N) \\ a(\phi_2, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_2) & \cdots & a(\phi_2, \phi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_N, \phi_1) & a(\phi_N, \phi_2) & \cdots & a(\phi_N, \phi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\phi_1) \\ h(\phi_2) \\ \vdots \\ h(\phi_N) \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

解这个线性方程组, 得到系数向量, 即可给出该方程的近似解。

1.3.2 Ritz 方法

同样, 假设有限维子空间 $V_N \leq V$ 已经给出, **Ritz 方法**的思路是求解有关 $J(u)$ 的优化问题, 即: 求 $u_N \in V_N$, 使得

$$J(u_N) \leq J(v) \forall v \in V_N. \quad (1.9)$$

这里 $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - h(v)$ 。

给出这个问题之后, 我们在有限维空间中, 利用最优化解法求解该问题。

这两个思路都是建立在有限维子空间 V_N 已经给出的前提下的。但这个有限维空间如何构造?

一个很容易想到的思路是利用 $v(0) = v(1)$ 这一性质，构造三角函数系作为基底。这种选取思路对于问题(1.1)而言当然是极好的，三角函数系的正交性也使得(1.8)中的系数矩阵变得相当简单易求解。但这个方案的可扩展性并不强，如果扩展到二维平面上，乃至更高维度的椭圆偏微分方程，就很难找到像这样全局定义的基函数。如果问题区域非规则或是存在不同方程的耦合，则更是如此。

有限元方法由此引出。

1.4 有限元方法

在上面两种思路的基础上，我们需要一个方便推广的构建有限维子空间的方法。

多项式函数空间是最容易表示的函数空间，因此这是我们的首选。但全局定义的多项式很难保证其符合边界条件。于是，借助样条插值的思想，我们转为考虑分段多项式空间。

1.4.1 线性有限元空间

我们先针对问题(1.1)，考虑最简单的近似形式—分段线性近似。在这种情形下，有限维子空间 V_h 由 $(0, 1)$ 上的分段线性函数表示。

定义 1.1 (线性有限元空间)

线性有限元空间的定义为：

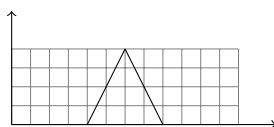
$$V_h := \{v_h \in C(0, 1) : v_h(0) = v_h(1) = 0, v_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1\}. \quad (1.10)$$

其中 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 为 $[0, 1]$ 上给定的互异节点, $x_0 = 0$, $x_n = 1$ 。

首先需要讨论的是，空间 V_h 的维数和基底。空间(1.10)的形式很容易联想到数值分析课程中学习过的 **B-样条空间**。特别地，一维 B-样条基函数为所谓的“hat-function”，定义如下：

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.11)$$

图 1.1: hat 函数的示意图



容易验证，如此定义的 $(\phi_1, \dots, \phi_{n-1})$ 构成了空间 V_h 的一组基。从而可得 $\dim(V_h) = n - 1$ 。

1.4.2 刚度矩阵与负载

此处我们采用 Galerkin 近似的思路，下面我们需要讨论的是方程组(1.8)的导出与求解。

定义 1.2 (刚度矩阵)

线性有限元空间 1.1 的刚度矩阵定义为：

$$A = (a(\phi_i, \phi_j))_{i,j=1}^{n-1}. \quad (1.12)$$

其中 ϕ_i 为(1.11)中定义的基函数。

定义 1.3 (负载)

方程(1.1)关于线性有限元空间1.1的负载向量定义为:

$$\mathbf{b} := \left(\int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \right)_{i=1}^{n-1}. \quad (1.13)$$



下面讨论(1.1)负载的计算。由于我们是用一次样条多项式近似真实解的,在选取数值积分公式的时候只需要使用一阶代数精度的公式即可不损失计算精度。因此此处采用复化梯形公式进行负载的近似计算。

记 $h_i = x_i - x_{i-1}$, 负载的近似计算公式如下:

$$b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \phi_i(x) \approx \frac{1}{2} (h_i + h_{i+1}) f(x_i). \quad (1.14)$$

对于刚度矩阵的计算,虽然基函数 ϕ_i 在整个区间 $(0, 1)$ 上并不可导,但不可导点为零测集,不会对积分的计算产生影响。将基函数 ϕ_i 的表达式代入刚度矩阵,计算得:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, |i - j| > 1 \\ a_{ii} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{3}(h_i + h_{i+1}) \\ a_{i-1,i} = -\frac{1}{h_i} + \frac{1}{6}h_i \\ a_{i,i+1} = -\frac{1}{h_{i+1}} + \frac{1}{6}h_{i+1} \end{cases} \quad (1.15)$$

由(1.15)可知,刚度矩阵是一个三对角矩阵,因此如果采用传统的矩阵存储方式和求解方式可能会造成计算资源的浪费。下面给出一种采用“局部矩阵”的形式存储(1.15)的技巧。

记负载矩阵 $A = \sum_{k=1}^n A^{(k)}$, 其中 $A^{(k)} := (a_{ij}^{(k)})$, $a_{ij}^{(k)} := \int_{x_{k-1}}^{x_k} [\phi_i'(x) \phi_j'(x) + \phi_i(x) \phi_j(x)] dx$, 由定义可得, $a_{ij}^{(k)}$ 只在 $i, j \in \{k-1, k\}$ 时取非零值。所以每个 $A^{(k)}$ 都可以存储为一个 2×2 的矩阵,而整体的负载矩阵 A 可以视为把所有的 $A^{(k)}$ “装配”起来的结果。在求解最终的线性方程组的时候,由于矩阵 A 是一个三对角对称正定矩阵,我们可以采用一系列数值代数算法加速方程组的求解。

1.5 误差分析

在本节中我们针对求解(1.1)的线性有限元近似算法进行误差分析。在叙述之前,为方便起见,先给出两个记号。

注 $\|f\|_0$: 表示 L^2 范数, $\|f\|_0 := \sqrt{\int_0^1 f^2 dx}$. $\|f\|_1$: 表示 $W^{1,2}$ 范数, $\|f\|_1 := \sqrt{\int_0^1 ((f')^2 + f^2) dx}$.

回顾一下有限元逼近问题的提法:

例题 1.2 记泛函 $a(u, v) = \int_0^1 (uv + u'v') dx$, $h(v) = \int_0^1 f v dx$, $V = \{v(x) : v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 ((v')^2 + v^2) dx < \infty\}$, 原问题是求解 $u \in V$ 使得 $a(u, v) = h(v) \forall v \in V$, 而在线性有限元空间上的逼近问题则是,在线性有限元空间 $V_h \leq V$ 上求解 $u_h \in V$ 使得 $a(u_h, v_h) = h(v_h) \forall v_h \in V_h$.

在进行讨论前,首先给出一个重要的引理。该引理保证了在 $W^{1,2}$ 范数的意义下, $u_h \in V_h$ 是 $u \in V$ 在子空间 V_h 下的最优逼近。

引理 1.1 (Cea 引理)

设 u 和 u_h 是1.2的解,则有:

$$\|u - u_h\|_1 \leq \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1. \quad (1.16)$$



证明 由于 u 满足: $\forall v \in V, a(u, v) = h(v) \Rightarrow \forall v_h \in V_h, a(u, v_h) = h(v_h)$. 又有: u_h 满足 $a(u_h, v_h) = h(v_h) \forall v_h \in V_h$, 两式相减, 得:

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \forall v_h \in V_h. \quad (1.17)$$

(1.17)表示了向量 $u - u_h$ 和空间 V_h 的正交性。下面讨论 $\|u - u_h\|_1^2$ 的估计。

$$\begin{aligned}
 \|u - u_h\|_1^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\
 &= a(u - u_h, u - v_h) \\
 &= \int_0^1 ((u' - u'_h)(u' - v'_h) + (u - u_h)(u - v_h)) dx \\
 &\leq \left(\int_0^1 (u' - u'_h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (u' - v'_h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 (u - u_h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (u - v_h)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \left\{ \int_0^1 ((u' - u'_h)^2 + (u - u_h)^2) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^1 ((u' - v'_h)^2 + (u - v_h)^2) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|u - u_h\|_1 \|u - v_h\|_1 \Rightarrow \|u - u_h\|_1 \leq \|u - v_h\|_1.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

该引理在 $\|\cdot\|$ 的意义下, 把有限元解的误差转化为计算解函数的插值误差 (这个插值误差可以作为一个上界)。目前解函数用 u 表示, 假设 u 在节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 上的分段线性插值多项式记为 u_I , 考虑 $\|u - u_I\|_1$ 的估计。关于分段线性插值, 我们有下面的误差估计公式:

定理 1.2

$$\begin{cases} \max_{[0,1]} |u(x) - u_I(x)| \leq \frac{1}{8} h^2 \max_{[0,1]} |u''(x)| \\ \max_{[0,1]} |u'(x) - u'_I(x)| \leq h \max_{[0,1]} |u''(x)| \end{cases} \tag{1.19}$$

其中 $h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$ 。

证明 见任何一本数值分析教材。

根据1.2和1.1, 可以针对 $\|u - u_h\|_1$ 进行估计。

$$\|u - u_h\|_1^2 \leq \|u - u_I\|_1^2 = \int_0^1 ((u - u_I)^2 + (u' - u'_I)^2) dx \leq \left(\frac{1}{64} h^4 + h^2 \right) \max_{[0,1]} |u''(x)|^2. \tag{1.20}$$

从而, 我们导出了下面的估计定理:

定理 1.3

$$\|u - u_h\|_1 \leq 2h \max_{[0,1]} |u''|. \tag{1.21}$$

1.3给出了利用无穷范数控制 $\|\cdot\|_1$ 的方法。但由于二阶求导可能会大幅度提升 u 的振幅, $\max_{[0,1]} |u''|$ 可能会大的令人难以接受, 所以我们最好能找到更合理的范数估计。事实上, 如果右端项取 u'' 的 L^2 -norm, 我们可以有下面的估计:

定理 1.4

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch \|u''\|_0 \leq Ch \|f\|_0. \tag{1.22}$$

证明 在介绍1.4的证明前, 我们需要先给出一些命题。

命题 1.1

如果 $w \in C^2$ 是下面的微分方程的解:

$$\begin{cases} -w'' + w = g(x), x \in (0, 1), \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

则有

$$\int_0^1 (w'')^2 dx \leq \int_0^1 g^2 dx. \quad (1.24)$$

证明 在(1.23)的第(1)式左右两边同乘 w'' , 并同时在区间 $[0, 1]$ 上积分:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-w'' + w)w'' dx &= \int_0^1 g(x)w''(x) dx \\ \Rightarrow \int_0^1 (w'')^2 dx + \int_0^1 (w')^2 dx &= - \int_0^1 g(x)w''(x) dx \\ \Rightarrow \int_0^1 (w'')^2 dx &\leq \int_0^1 g(-w'') dx \leq \|g\|_0 \|w''\|_0 \\ \Rightarrow \|w''\|_0 &\leq \|g\|_0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

注 该结论的证明思路正是偏微分方程理论中非常常见的“能量模估计”。

命题 1.2

记

$$G_i(x, t) = \begin{cases} (t - x_i)(x - x_{i+1}), & x > t, \\ (x - x_i)(t - x_{i+1}), & x \leq t. \end{cases} \quad (1.26)$$

那么在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上, 有下面这一等式成立:

$$(u(x) - u_I(x))(x_{i+1} - x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} G_i(x, t)u''(t)dt. \quad (1.27)$$

证明 记符号 $h_i := x_{i+1} - x_i$, 计算右端项的积分, 有:

$$\begin{aligned} &\int_{x_i}^{x_{i+1}} G_i(x, t)u''(t)dt \\ &= (x - x_{i+1}) \int_{x_i}^x (t - x_i)u''(t)dt + (x - x_i) \int_x^{x_{i+1}} u''(t)(t - x_{i+1})dt \\ &= (x - x_{i+1}) \left[\int_{x_i}^x (t - x_i)du'(t) \right] + (x - x_i) \left[\int_x^{x_{i+1}} (t - x_i)du'(t) \right] \\ &= (x - x_{i+1}) \left[(x - x_i)u'(x) - \int_{x_i}^x u'(t)dt \right] + (x - x_i) \left[(x_{i+1} - x)u'(x) - \int_x^{x_{i+1}} u'(t)dt \right] \\ &= h_i u(x) + (x - x_{i+1})u(x_i) - (x - x_i)u(x_{i+1}) \\ &= h_i(u(x) - u_I(x)). \end{aligned} \quad (1.28)$$

下面利用 1.1 和 1.2 证明定理 1.4。首先讨论 $\|u - u_1\|_0$ 的估计。由 1.2，我们有：

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 [u(x) - u_I(x)]^2 dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u(x) - u_I(x)]^2 dx \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} G_i(x, t) u''(t) dt \right]^2 dx. \\
 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left[\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (t - x_i)(x_{i+1} - t) |u''(t)| dt \right]^2 \\
 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{4} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)| dt \right]^2 \\
 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{16} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)| dt \right]^2 \\
 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^4}{16} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt \\
 &\leq \frac{h^4}{16} \int_0^1 |u''(t)|^2 dt.
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

(1.29) 中，第三行和第四行的不等式都源于对函数 $G_i(x, t)$ 的估计，第六行的不等式则源于柯西不等式。

由 1.2 可知，在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，我们有：

$$\begin{aligned}
 |u'(x) - u'_I(x)| &= \left| \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left[\int_{x_i}^x \frac{(t - x_i) u''(t)}{x_{i+1} - x_i} dt + \int_x^{x_{i+1}} \frac{(t - x_{i+1}) u''(t)}{x_{i+1} - x_i} dt \right] \right| \\
 &\leq C(x_{i+1} - x_i)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

(1.30) 中， C 为常数，该不等式由柯西不等式导出。借助该式，我们有：

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 |u'(x) - u'_I(x)|^2 dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u'(x) - u'_I(x)]^2 dx \\
 &\leq \sum_{i=0}^{n-1} C^2 (x_{i+1} - x_i)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(t)|^2 dt \\
 &\leq C^2 h^2 \int_0^1 |u''(t)|^2 dt.
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

联立 (1.29) 和 (1.31)，结合引理 1.1 和命题 1.1，定理 1.4 得证。

注 对 1.4，可以用 Fourier 分析给出一个更优的估计。

练习 1.1 补充 (1.31) 的证明细节，并给出常数 C 的值。

利用定理 1.4，对于 $\|u - u_h\|_0$ ，我们可以给出更精细的估计：

定理 1.5 (Aubin-Nitsche 技巧)

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^2 \|u''\|_0. \tag{1.32}$$

证明 考虑辅助问题：

$$\begin{cases} -z'' + z = u - u_h, \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases} \tag{1.33}$$

其变分形式为：

$$a(z, v) = (u - u_h, v)_{L^2}, \quad \forall v \in V. \tag{1.34}$$

从而：

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_0 &= a(z, u - u_h) \\ &= a(z - \omega_h, u - u_h) \quad \forall \omega_h \in V_h\end{aligned}\quad (1.35)$$

取 ω_h 为函数 z 的分段线性插值 z_I ，那么：

$$a(z - z_I, u - u_h) \leq C\|z - z_I\|_1\|u - u_h\|_1 \leq Ch^2\|z''\|_0\|f\|_0. \quad (1.36)$$

由 (1.24)， $\|z''\|_0 \leq C\|u - u_h\|_0$ ，结论得证。

1.6 一阶非齐次 BVP

接下来我们把研究对象改为一般的非齐次两点边值问题。事实上，虽然方程看似复杂了些，但处理方法和之前基本一致。

考虑下面的例子：

$$\begin{cases} -(k(x)u')' + q(x)u = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{cases} \quad (1.37)$$

其中 $k(x) \in C^1$, $k(x) \geq k_0 > 0$, $q(x) \geq 0$.

和齐次问题同样的道理，先考虑该问题的变分形式。在 (1.37) 两端同乘函数 v 并在 $[0, 1]$ 上积分，有：

$$\begin{aligned}& \int_0^1 [-(k(x)u')'v(x) + q(x)u(x)v(x)]dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \\ \Rightarrow & \int_0^1 quvdx - \int_0^1 v(x)d(k(x)u') = \int_0^1 f(x)v(x)dx \\ \Rightarrow & \int_0^1 (quv + ku'v')dx + v(0)k(0)u'(0) - v(1)k(1)u'(1) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.\end{aligned}\quad (1.38)$$

要保证 (1.38) 有意义，同样需要确保 $u, v \in V := W^{1,2}$ 。在此基础上，如果 $v(0) = v(1) = 1$ ，令 $a(u, v) := \int_0^1 (ku'v' + quv)dx$ ， $h(v) := \int_0^1 fvdv$ ，则有：

$$a(u, v) = h(v) \quad \forall v \in V, \quad v(0) = v(1) = 0. \quad (1.39)$$

其中 $u \in W := \{v : \int_0^1 ((v')^2 + v^2)dx < \infty, v(0) = \alpha, v(1) = \beta\}$.

同样地，该问题也有与之相对应的极小化问题：

例题 1.3 求 $u \in W$ s.t. $J(u) \leq J(v) \forall v \in W$ ，此处 $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - f(v)$ 。

下一步则是构造对应的线性有限元空间。注意到，对于非齐次边值问题，函数集合 W 并不构成线性空间，所以我们构建的“线性有限元空间”实际上是一个由分段线性函数构成的子集。但与此同时，这个子集可以写成陪集 (coset) 的形式，所以我们依旧可以利用基底的线性组合来表示这个函数集合。

取 $[0, 1]$ 区间的分划 $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ ，由于 $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$ ，记函数集合 $W_h := \{w \in C(0, 1) : w|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, w(0) = \alpha, w(1) = \beta\}$ ，那么我们必定有 $u \in W_h$ 。 V_h 的定义同 1.10，设分段线性函数 $g(x)$ 满足：

$$g(0) = \alpha, g(1) = \beta, \forall i \in [1, n-1], g(x_i) = 0. \quad (1.40)$$

那么我们有 $W_h = g + V_h$ 。

最后考虑有限元近似求解。此处 ϕ_i 的定义沿用 (1.11) 的表达式，记 $u_h(x) := g(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \phi_i(x)$ ， $v_i(x) := \phi_i(x)$ ，代入 (1.39)，得：

$$a(g, \phi_i) + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a(\phi_j, \phi_i) = h(\phi_i). \quad (1.41)$$

由 $a(\cdot, \cdot)$ 的对称性，我们把 (1.41) 转化为矩阵形式 $Ax = b$ 。其中刚度矩阵 $A := a(\phi_i, \phi_j)_{i,j=1}^{n-1}$ ，负载 $b := (h(\phi_i) - a(g, \phi_i))^t$ 。可以证明，刚度矩阵仍旧为对称正定三对角矩阵。但刚度矩阵和负载向量的计算则需要通过数值积

分完成。当然，在编程计算刚度矩阵时，利用装配技巧同样能节省存储空间并增加程序的可读性。

与齐次方程同样，非齐次方程变分问题的有限元解也有与之相对应的 Cea 引理和各种范数估计，且证明方法近乎雷同，故此处省略不表，留作习题。

注 (1.37) 中 $q(x) \geq 0$ 的条件似乎应当改为 $q(x) \geq q_0 > 0$ ，否则 Cea 引理的证明会出问题。举个例子，如果 $q(x) \equiv 0$ ，引出的就不再是对 $\|u - u_h\|_1$ 的估计，而是 $\|u' - u'_h\|_0$ 的估计。

1.7 其他边值问题

1.7.1 Neumann 边值问题

问题描述：

$$\begin{cases} -(ku')' + qu = f \\ -k(0)u'(0) = \gamma_1, k(1)u'(1) = \gamma_2 \end{cases} \quad (1.42)$$

变分形式：

$$\int_0^1 (ku'v' + quv)dx = \int_0^1 fvdx + \gamma_2v(1) + \gamma_1v(0). \quad (1.43)$$

1.7.2 Robin 边值问题

问题描述：

$$\begin{cases} -(ku')' + qu = f \\ -k(0)u'(0) = -\beta_1u(0) + \gamma_1, k(1)u'(1) = -\beta_2u(1) + \gamma_2 \end{cases} \quad (1.44)$$

变分形式：

$$\int_0^1 (ku'v' + quv)dx = \int_0^1 fvdx + \gamma_1v(0) + \gamma_2v(1) - \beta_1u(0)v(0) - \beta_2u(1)v(1). \quad (1.45)$$

1.8 本章总结

有限元的基本逻辑：

- 两边相乘试验函数，同时积分。
- 给出变分形式。
- 构造函数空间的有限维子空间。
- 在有限维子空间上求解变分形式。
- 误差估计。

由于有限元方法的输出并非解函数在某些点上的取值或者控制体上的积分平均值，而是整体函数，其误差范数定义和有限差/有限体方法有一些区别。本章中常用的范数是 L^2 范数和 $W^{1,2}$ 范数。同样，由于有限元方法是在函数空间中求解优化问题或者线性方程，函数逼近论在有限元方法的研究中居于重要地位。

第2章 变分原理

上一章中，我们用一个具体的例子说明了有限元的大体思路和操作步骤。本章则会着眼于变分问题的提法，给出一般情形下的变分问题（以及其等价形式），并证明其解的存在唯一性。最后则是给出几个具体的算例以及它们各自的变分形式。

2.1 变分问题以及等价形式

在上一章定理1.2中，我们针对一个特殊问题，提出了两种变分问题，并证明了这两种问题的等价性。本节中，我们将着眼于更一般的问题，并对一般的问题尝试说明两者的等价性，以及其解的存在唯一性。在此之前，先要做一些概念和定理上的准备。

2.1.1 预备知识

首先，我们讨论双线性函数。

定义 2.1 (双线性函数)

一个双线性函数 $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 需要满足下面的条件：

- $a(k_1u + k_2v, w) = k_1a(u, w) + k_2a(v, w)$.
- $a(u, k_1v + k_2w) = k_1a(u, v) + k_2a(u, w)$.

对任意 $u, v \in V, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 均成立。特别地，假设 V 是以 $\|\cdot\|$ 为范数的赋范线性空间，如果对任意 $u, v \in V$ ，存在 $M > 0$ 使得：

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad (2.1)$$

总成立，那么我们称双线性型 a 为有界的或连续的。如果 $\forall u, v \in V$ ，均有：

$$a(u, v) = a(v, u), \quad (2.2)$$

那么双线性型 a 为对称的。如果满足下面的性质：

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V, \alpha \|v\|^2 \leq a(v, v), \quad (2.3)$$

则称双线性型 a 是 **V-椭圆**的。

特别地，第一章所述

$$a(u, v) = \int_0^1 (uv + u'v') dx, \quad (2.4)$$

是一个有界且 V-椭圆的双线性函数。双线性函数的性质在后续对变分问题的讨论中相当重要。

为方便后续内容的展开，本节中将给出一些泛函分析中的重要结论。

命题 2.1 (Riesz 表示定理)

设 H 是 Hilbert 空间，则任意 $f \in H^*$ ，存在唯一 $x_f \in H$ ，使得：

$$f(y) = (x_f, y) \quad \forall y \in H, \|f\|_{H^*} = \|x_f\|_H. \quad (2.5)$$

证明 存在性：考查闭子空间 $\ker f \leq H$ 。

如果 $\ker f = H$ ，这意味着 $f(x) = 0 \forall x \in H$ ，取 $x_f = 0$ 则有 $f(y) = 0 = (x_f, y), \forall y \in H$ ，且 $\|f\|_{H^*} = \|x_f\|_H = 0$ 。

如果 $\ker f \neq H$ ，由于 $f \in H^*$ ，由第一同构定理可知 $\text{codim } \ker f = 1$ 。记 $(\ker f)^\perp$ 的一组基为 $\{y_0\}$ ，则由正交分解定理， $\forall y \in H, y = ky_0 + \tilde{y}$ ，其中 $\tilde{y} \in \ker f$ 。

此时, $f(y) = kf(y_0)$, 记 $x_f = \lambda y_0$, $(x_f, y) = \lambda k \|y_0\|_H^2$ 。从而: 取 $x_f = \frac{f(y_0)}{\|y_0\|_H^2} y_0$, 等式(2.5)成立。且有:

$$\|x_f\|_H = \frac{|f(y_0)|}{\|y_0\|_H} = \|f\|_{H^*}. \quad (2.6)$$

唯一性: 如果存在 w_f s.t. $f(y) = (w_f, y)$, 那么 $\forall y \in H$, 我们有

$$(x_f - w_f, y) = 0, \forall y \in H. \quad (2.7)$$

取 $y = x_f - w_f$, 由内积的定义即得 $x_f - w_f = 0$, 即 $x_f = w_f$ 。

命题 2.2 (闭凸子集投影的存在唯一性)

设 V 是一个 Hilbert 空间, 如果 U 是 V 的闭凸子集, 对于 $v \in V$, 存在唯一 $u_0 \in U$ 使得:

$$\langle v - u_0, v - u_0 \rangle = \min_{u \in U} \langle v - u, v - u \rangle. \quad (2.8)$$

证明 记范数 $\|u\| := \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$, U 是闭凸子集, 由 F-Riesz 定理, $\|v - u\|_U$ 在 $u \in U$ 中存在下确界 d 。由此, 存在序列 $\{u_n\} \subset U, \forall \epsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时有:

$$d^2 \leq d_n^2 := \|v - u_n\|^2 < d^2 + \epsilon \quad (2.9)$$

往证序列 $\{u_n\}$ 存在极限, 且极限在集合 U 内部。由平行四边形公式, $\forall n, m > N$, 有:

$$\|u_m + u_n - 2v\|^2 + \|u_m - u_n\|^2 = 2(d_m^2 + d_n^2). \quad (2.10)$$

根据等式(2.10), 我们有:

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|^2 &= 2(d_m^2 + d_n^2) - \|u_m + u_n - 2v\|^2 \\ &< 4d^2 + 4\epsilon - 4\left(\left\|\frac{u_m + u_n}{2} - v\right\|^2\right) \\ &\leq 4\epsilon. \end{aligned} \quad (2.11)$$

最后一个不等号源于 U 为凸集, 从而 $\frac{u_m + u_n}{2} \in U$, 这意味着 $\|\frac{u_m + u_n}{2} - v\| \geq d$ 。

(2.11)保证了 $\{u_n\}$ 是 Cauchy 列, 即该序列收敛。又 U 是闭的, 该序列收敛于 $u_0 \in U$ 。存在性得证。

唯一性证明完全同理, 留作习题。

命题 2.3 (压缩映射原理)

设 V 是 Banach 空间, 连续映射 T 满足:

$$\|Tv_1 - Tv_2\| \leq L\|v_1 - v_2\|, \forall v_1, v_2 \in V, \quad (2.12)$$

其中 $0 < L < 1$ 为常数, 则存在唯一的 $u \in V$ 使得 $u = Tu$ 。

该定理证明从略, 留作习题。

2.1.2 存在唯一性

本节中讨论抽象意义下的优化问题。

定义 2.2 (优化问题)

给定赋范线性空间 V 以及其上的有界双线性函数 a , $f \in V^*$, 对于 $U \subset V$, 寻找 $u \in U$, 使得:

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v), \quad J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \quad (2.13)$$

2.2中叙述的优化问题和第一章对应的问题相比, 极大放宽了对 U 的要求, 这也使得第一章对该问题的讨论不一定适用于此。为此, 我们需要给出问题2.2解存在唯一的条件。

定理 2.1

如果2.2满足下列额外条件:

- V 完备,
- U 是 V 的闭凸子集,
- 双线性函数 $a(u, v)$ 是对称且 V -椭圆的,

那么优化问题2.2存在唯一解。



证明 由于 $a(u, v)$ 是连续对称椭圆双线性型, 可知 $a(u, v)$ 构成空间 V 上的一个内积, 导出的范数记作 $\|\cdot\|$ 。由 Riesz 表示定理, 可以把 f 用 a 表示, 即:

$$\forall v \in V, f(v) = a(\sigma_f, v). \quad (2.14)$$

由(2.14), 代入(2.13)可得:

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}a(v, v) - a(\sigma_f, v) \\ &= \frac{1}{2}a(v - \sigma_f, v - \sigma_f) - \frac{1}{2}a(\sigma_f, \sigma_f). \end{aligned} \quad (2.15)$$

由此, 该极小化问题转化为在 U 上最小化 $\|v - \sigma_f\|$ 。由于 $\sigma_f \in V$, 而 U 是 V 的闭凸子集, 借助闭凸子集投影的存在唯一性, 当且仅当 v 是 σ_f 在 U 上的投影时, 优化问题2.2取极小值。由此便证明了该问题解的存在唯一性。

2.1.3 变分问题的等价形式

在第一章中, 我们说最小化 $J(v)$ 的问题等价于求解泛函方程 $a(u, v) = f(v)$ 。本节中, 我们将进一步探究这两个问题之间的关系。

定理 2.2

1. 如果 u 是问题2.2的解, 当且仅当

$$\forall v \in U, a(u, v - u) \geq f(v - u). \quad (2.16)$$

2. 特别地, 如果 U 是以 0 为顶点的凸锥, 那么:

$$\begin{cases} \forall v \in U, a(u, v - u) \geq f(v - u), \\ a(u, u) = f(u). \end{cases} \quad (2.17)$$

3. 特别地, 如果 U 是 V 的闭子空间, 那么:

$$\forall v \in U, a(u, v) = f(v). \quad (2.18)$$



证明 由 Riesz 表示定理, $f(v - u) = a(\sigma_f, v - u)$ 。

先证明问题 1 的充分性部分。任取 $v \in U$, 可得:

$$\begin{aligned} a(v - \sigma_f, v - \sigma_f) &= a(v - u + u - \sigma_f, v - u + u - \sigma_f) \\ &= a(v - u, v - u) + 2a(v - u, u - \sigma_f) + a(u - \sigma_f, u - \sigma_f) \\ &\geq a(u - \sigma_f, u - \sigma_f). \end{aligned} \quad (2.19)$$

即, 在(2.16)成立时, u 是2.2的解。

再证明其必要性部分。由于 U 是凸集, $\forall t \in (0, 1)$, $tv + (1 - t)u \in U$ 。如果 u 是2.2的解, 那么:

$$a(\sigma_f - tv - (1 - t)u, \sigma_f - tv - (1 - t)u) \geq a(\sigma_f - u, \sigma_f - u). \quad (2.20)$$

化简, 有:

$$-2ta(\sigma_f - u, v - u) + t^2a(v - u, v - u) \geq 0. \quad (2.21)$$

取 $t \rightarrow 0$ 即可证(2.16)成立。

对于问题 2, 由凸锥的性质, $u+v \in U$, 在(2.16)中取 $v_1 := u+v$, 可得 $a(u, v) \geq f(v)$ 。又 0 在凸锥顶点, 取 $v=0$, 可得 $a(u, u) \leq f(u)$ 。由此, $a(u, u) = f(u)$ 。

对于问题 3, 根据刚刚对于凸锥的推理, $a(u, v) \geq f(v)$ 。根据闭子空间的性质, $-v \in U$, 将 $\tilde{v} := -v$ 可得 $a(u, -v) \geq f(-v)$, 即 $a(u, v) \leq f(v)$ 。由此, $a(u, v) = f(v)$ 。

2.2 Lax-Milgram 引理

定理 2.3 (Lax-Milgram 引理)

设 V 是一个 Hilbert 空间, $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个连续 V -椭圆双线性型, $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续线性泛函, 那么, 存在唯一 $u \in V$, 使得:

$$a(u, v) = f(v) \quad (2.22)$$

对任意 $v \in V$ 成立。

注 此处 $a(u, v)$ 并没有对称性条件, 故不能诱导 V 上的内积。

证明 第一步: 将双线性型 $a(u, v)$ 转化为 $V \rightarrow V'$ 的映射。

定义 $Au(v) := a(u, v)$, 则 $Au \in V'$, 且

$$\|Au\| = \sup_{v \in V} \frac{|Au(v)|}{\|v\|} \leq M\|u\|. \quad (2.23)$$

由 a 的有界性, 即可直接推出 Au 的有界性。由此: 映射 $A : V \rightarrow V', u \mapsto Au$ 为连续线性映射。(2.22)转换为 $Au(v) = f(v)$ 。但直接比较 V' 上的两个元素并不容易。

第二步: 将 V' 中两元素的比较转化为 V 中两元素的比较。

设 τ 为 $V' \rightarrow V$ 的 Riesz 表示映射, 那么 $Au = f \Leftrightarrow \tau Au = \tau f$ 。下面需要证明满足该等式的 u 存在唯一。关于存在唯一性的问题, 我们可以通过构造压缩映射求解。

第三步: 构造压缩映射。

记 $T : V \rightarrow V$, 其定义为:

$$T(v) = v - \rho(\tau Av - \tau f). \quad (2.24)$$

ρ 为一个可以自行选定的参数。 T 的不动点即 $v = v - \rho(\tau Av - \tau f)$, 可得 $\tau Av = \tau f$ 。下证 T 在 ρ 取适当值的时候是压缩映射。

记 $\varphi = v - w$, $v \in V, w \in V$, 那么

$$\begin{aligned} & \|Tv - Tw\|^2 \\ &= \|T\varphi\|^2 \\ &= \|\varphi - \rho(\tau A\varphi)\|^2 \\ &= \|\varphi\|^2 - 2\rho \langle \tau A\varphi, \varphi \rangle + \rho^2 \langle \tau A\varphi, \tau A\varphi \rangle \\ &\leq \|\varphi\|^2 - 2\rho\alpha\|\varphi\|^2 + \rho^2 M^2\|\varphi\|^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

最后一个不等号的依据是: 1. τ 是等距同构。2. A 是有界线性算子。3. $a(\varphi, \varphi)$ 的椭圆性。事实上:

$$\langle \tau A\varphi, \varphi \rangle = (A\varphi)(\varphi) = a(\varphi, \varphi) \geq \alpha\|\varphi\|^2. \quad (2.26)$$

$$\langle \tau A\varphi, \tau A\varphi \rangle = (A\varphi)(\tau A\varphi) = a(\varphi, \tau A\varphi) \leq M\|\varphi\|\|\tau A\varphi\| \leq M^2\|\varphi\|^2. \quad (2.27)$$

由此, 只要 $\rho < \frac{2\alpha}{M^2}$, T 即为压缩映射, 这意味着 $\tau Au = \tau f$ 存在唯一解。

2.3 具体实例

注 此处内容可能用到一些 Sobolev 空间的相关知识，由于之后会专题讨论该内容，此处不过多赘述相关知识点。请读者翻阅后续的笔记内容，或参考任何一本泛函分析教材。