Note For Finite Element Methods

Zhejiang University

作者：Shuang Hu

组织：Zhejiang University

时间：Sept 14, 2022

版本：1.0

简介：2022 秋冬学季“有限元方法”课程笔记

ElegantLaTeX Program

目录

第 1 章 引入 **1**
1.1 为什么需要有限元方法? 1
1.2 从一维边值问题说起 1
1.3 有限元思想的导出 2
1.3.1 Galerkin 近似 2
1.3.2 Ritz 方法 2
1.4 有限元方法 3
1.4.1 线性有限元空间 3

第 1 章 引入

1.1 为什么需要有限元方法？

此前在《微分方程数值解》课程中，我们已经学习了有限差分法和有限体积法。这两种方法有不少优点：首先，比较直观，只要知道如何利用差分近似导数即可得到对应的差分公式；其次，在一些情形下，有限差分和有限体积方法可以实现较高的计算精度。

但是，这两种算法有一些明显的缺陷。

- 算法稳定性的分析比较复杂。
- 处理不规则区域的问题时较为麻烦，需要多次利用插值近似。
- 只是求解离散格点的近似点值/离散网格的近似积分平均值，未能给出函数整体的近似。

为此，基于函数逼近论的**有限元方法**被提出。该算法能弥补有限差分法的一些明显缺陷，目前是最主流的数值算法之一。

1.2 从一维边值问题说起

考虑如下例子：

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x), x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

类似于“偏微分方程”课程中对弱解的讨论方式，在(1.1)两边同时乘某个函数 v 并在 $[0,1]$ 上积分，得到如下形式：

$$\int_0^1 (-u'' + u) v \mathrm{d}x = \int_0^1 f v \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

定义函数空间 V 如下：

$$V := \left\{ v \mid v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 ((v')^2 + v^2) \mathrm{d}x < \infty \right\}. \tag{1.3}$$

如果函数 $v \in V$, 利用分部积分法，(1.1)可以转化为以下问题：

例题 1.1 记 $a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\mathrm{d}x$, $h(v) = \int_0^1 f v \mathrm{d}x$, $v \in V$. 求 $u \in V$，使得 $a(u,v) = h(v)\ \forall v \in V$.

下面的定理说明了该问题可以转化为一个优化问题：

定理 1.1

记泛函 $J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - h(v)$, 问题1.1与最小化 $J(v)$ 的优化问题等价。即：如果 $a(u,v) = h(v) \forall v \in V$, 那么 $J(u) \leq J(v) \forall v \in V$。

证明 $\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}a(v,v) - h(v) - \frac{1}{2}a(u,u) + h(u) \\ &= \frac{1}{2}(a(v,v) - a(u,u) - 2h(v-u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v,v) - a(u,u) - 2a(u, v-u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v,v) + a(u,u) - 2a(v,u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v-u, v-u)) \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

由(1.4)可得，如果 $a(u,v) = h(v)$，那么 $J(u) \leq J(v)$.

$\Leftarrow$: $\forall v \in V, t \in \mathbb{R}$, 有 $J(u+tv) \geq J(u)$。我们定义函数 $g(t) := J(u+tv)$，根据上面的讨论可知:$g'(0) = 0$。另一方面，计算 $g(t)$ 的表达式，有:

$$\begin{aligned} g(t) &= J(u+tv) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 ((u'+tv')^2 + (u+tv)^2)\mathrm{d}x - \int_0^1 f(u+tv)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.5}$$

对(1.5)求一阶导数，可得:

$$g'(0) = \int_0^1 (u'v' + uv)\mathrm{d}x - \int_0^1 fv\mathrm{d}x. \tag{1.6}$$

根据 g 的一阶条件，可得 $a(u,v) = h(v)$。又由于 v 的任意性，结论得证。

如此，我们把一个解微分方程的问题，利用1.1和1.2转化为了一个变分问题。由于 V 是一个无穷维空间，我们不能期望利用算法给出这个变分问题的精确解，但我们可以考虑对空间 V 进行有限维近似，并在有限维空间上近似求解这个变分问题。

1.3 有限元思想的导出

接下来，根据上一节的思路，我们继续问题(1.1)的近似求解。根据上面的分析，我们的数值算法需要解决两个问题:

- 如何对函数空间 V 进行有限维近似?
- 在进行有限维近似之后，如何在有限维空间中对变分问题进行求解?

首先，我们考虑第二个问题。根据上面的讨论，近似求解变分问题有两种不同的思路，分别对应的是 **Galerkin 近似方法**和 **Ritz 近似方法**。

1.3.1 Galerkin 近似

假设已经给出有限维子空间 $V_N \leq V$，Galerkin 近似的目的是求解 $u_N \in V_N$ 使得

$$a(u_N, v_N) = h(v_N) \tag{1.7}$$

对所有 $v_N \in V_N$ 都成立。

由于 V_N 是有限维的空间，我们可以找到这个空间中的一组基函数 $\{\phi_1, \cdots, \phi_N\}$，注意到 $a(u,v)$ 是对称双线性函数，设 $u_N = \alpha_1\phi_1(x) + \cdots + \alpha_N\phi_N(x)$，$v_N(x) = \phi_i(x)$，代入(1.7)，可得一个线性方程组:

$$\begin{bmatrix} a(\phi_1,\phi_1) & a(\phi_1,\phi_2) & \cdots & a(\phi_1,\phi_N) \\ a(\phi_2,\phi_1) & a(\phi_2,\phi_2) & \cdots & a(\phi_2,\phi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\phi_N,\phi_1) & a(\phi_N,\phi_2) & \cdots & a(\phi_N,\phi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\phi_1) \\ h(\phi_2) \\ \vdots \\ h(\phi_N) \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

解这个线性方程组，得到系数向量，即可给出该方程的近似解。

1.3.2 Ritz 方法

同样，假设有限维子空间 $V_N \leq V$ 已经给出，**Ritz 方法**的思路是求解有关 $J(u)$ 的优化问题，即：求 $u_N \in V_N$，使得

$$J(u_N) \leq J(v)\forall v \in V_N. \tag{1.9}$$

这里 $J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - h(v)$。

给出这个问题之后，我们在有限维空间中，利用最优化算法求解该问题。

这两个思路都是建立在有限维子空间 V_N 已经给出的前提下的。但这个有限维空间如何构造?

一个很容易想到的思路是利用 $v(0) = v(1)$ 这一性质，构造三角函数系作为基底。这种选取思路对于问题(1.1)而言当然是极好的，三角函数系的正交性也使得(1.8)中的系数矩阵变得相当简单易求解。但这个方案的可扩展性并不强，如果扩展到二维平面上，乃至更高维度的椭圆偏微分方程，就很难找到像这样全局定义的基函数。如果问题区域非规则或是存在不同方程的耦合，则更是如此。

有限元方法由此引出。

1.4 有限元方法

在上面两种思路的基础上，我们需要一个方便推广的构建有限维子空间的方法。

多项式函数空间是最容易表示的函数空间，因此这是我们的首选。但全局定义的多项式很难保证其符合边界条件。于是，借助样条插值的思想，我们转为考虑分段多项式空间。

1.4.1 线性有限元空间

我们先针对问题(1.1)，考虑最简单的近似形式–分段线性近似。在这种情形下，有限维子空间 V_h 由 $(0,1)$ 上的分段线性函数表示。

定义 1.1 (线性有限元空间)

线性有限元空间的定义为：

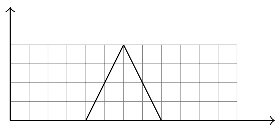
$$V_h := \{v_h \in C(0,1) : v_h(0) = v_h(1) = 0, v_h|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1\}. \tag{1.10}$$

其中 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 为 $[0,1]$ 上给定的互异节点,$x_0 = 0$，$x_n = 1$。♣

首先需要讨论的是，空间 V_h 的维数和基底。空间(1.10)的形式很容易联想到数值分析课程中学习过的 **B-样条空间**。特别地，一维 B-样条基函数为所谓的“hat-function”，定义如下：

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x_{i-1} \le x \le x_i \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, otherwise \end{cases} \tag{1.11}$$

图 1.1: hat 函数的示意图



容易验证，如此定义的 $(\phi_1, \cdots, \phi_{n-1})$ 构成了空间 V_h 的一组基。从而可得 $\dim(V_h) = n - 1$。