Note For Finite Element Methods

Zhejiang University

作者：Shuang Hu
组织：Zhejiang University
时间：Sept 14, 2022
版本：1.0
简介：2022 秋冬学季“有限元方法”课程笔记

ElegantLATEX Program

目录

第 1 章 引入

1.1 为什么需要有限元方法？

此前在《微分方程数值解》课程中，我们已经学习了有限差分法和有限体积法。这两种方法有不少优点：首先，比较直观，只要知道如何利用差分近似导数即可得到对应的差分公式；其次，在一些情形下，有限差分和有限体积方法可以实现较高的计算精度。

但是，这两种算法有一些明显的缺陷。

- 算法稳定性的分析比较复杂。
- 处理不规则区域的问题时较为麻烦，需要多次利用插值近似。
- 只是求解离散格点的近似点值/离散网格的近似积分平均值，未能给出函数整体的近似。

为此，基于函数逼近论的**有限元方法**被提出。该算法能弥补有限差分法的一些明显缺陷，目前是最主流的数值算法之一。

1.2 从一维边值问题说起

考虑如下例子：

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x), x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

类似于“偏微分方程”课程中对弱解的讨论方式，在(1.1)两边同时乘某个函数 v 并在 $[0,1]$ 上积分，得到如下形式：

$$\int_0^1 (-u'' + u)v\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

定义函数空间 V 如下：

$$V := \left\{ v \mid v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 ((v')^2 + v^2)\mathrm{d}x < \infty \right\}. \tag{1.3}$$

如果函数 $v \in V$, 利用分部积分法，(1.1)可以转化为以下问题：

例题 1.1 记 $a(u,v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\mathrm{d}x$, $h(v) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x\ \forall v \in V$. 求 $u \in V$，使得 $a(u,v) = h(v)\ \forall v \in V$.

下面的定理说明了该问题可以转化为一个优化问题：