



Note For Finite Element Methods

Zhejiang University

作者: Shuang Hu

组织: Zhejiang University

时间: Sept 14, 2022

版本: 1.0

简介: 2022 秋冬学期“有限元方法”课程笔记



目录

第1章 引入	1
1.1 为什么需要有限元方法?	1
1.2 从一维边值问题说起	1
1.3 有限元思想的导出	2

第1章 引入

1.1 为什么需要有限元方法？

此前在《微分方程数值解》课程中，我们已经学习了有限差分法和有限体积法。这两种方法有不少优点：首先，比较直观，只要知道如何利用差分近似导数即可得到对应的差分公式；其次，在一些情形下，有限差分法和有限体积法可以实现较高的计算精度。

但是，这两种算法有一些明显的缺陷。

- 算法稳定性的分析比较复杂。
- 处理不规则区域的问题时较为麻烦，需要多次利用插值近似。
- 只是求解离散格点的近似点值/离散网格的近似积分平均值，未能给出函数整体的近似。

为此，基于函数逼近论的**有限元方法**被提出。该算法能弥补有限差分法的一些明显缺陷，目前是最主流的数值算法之一。

1.2 从一维边值问题说起

考虑如下例子：

$$\begin{cases} -u'' + u = f(x), x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

类似于“偏微分方程”课程中对弱解的讨论方式，在(1.1)两边同时乘某个函数 v 并在 $[0, 1]$ 上积分，得到如下形式：

$$\int_0^1 (-u'' + u)v dx = \int_0^1 f v dx. \quad (1.2)$$

定义函数空间 V 如下：

$$V := \left\{ v \mid v(0) = v(1) = 0, \int_0^1 ((v')^2 + v^2) dx < \infty \right\}. \quad (1.3)$$

如果函数 $v \in V$ ，利用分部积分法，(1.1)可以转化为以下问题：

例题 1.1 记 $a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx$, $h(v) = \int_0^1 f v dx$, $v \in V$. 求 $u \in V$ ，使得 $a(u, v) = h(v) \forall v \in V$.

下面的定理说明了该问题可以转化为一个优化问题：

定理 1.1

记泛函 $J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - h(v)$ ，问题 1.1 与最小化 $J(v)$ 的优化问题等价。即：如果 $a(u, v) = h(v) \forall v \in V$ ，那么 $J(u) \leq J(v) \forall v \in V$ 。

证明 \Rightarrow :

$$\begin{aligned} J(v) - J(u) &= \frac{1}{2}a(v, v) - h(v) - \frac{1}{2}a(u, u) + h(u) \\ &= \frac{1}{2}(a(v, v) - a(u, u) - 2h(v - u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v, v) - a(u, u) - 2a(u, v - u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v, v) + a(u, u) - 2a(v, u)) \\ &= \frac{1}{2}(a(v - u, v - u)) \geq 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

由(1.4)可得，如果 $a(u, v) = h(v)$ ，那么 $J(u) \leq J(v)$ 。

\Leftarrow : $\forall v \in V, t \in \mathbb{R}$, 有 $J(u+tv) \geq J(u)$ 。我们定义函数 $g(t) := J(u+tv)$, 根据上面的讨论可知: $g'(0) = 0$ 。另一方面, 计算 $g(t)$ 的表达式, 有:

$$\begin{aligned} g(t) &= J(u+tv) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 ((u' + tv')^2 + (u+tv)^2) dx - \int_0^1 f(u+tv) dx \end{aligned} \quad (1.5)$$

对(1.5)求一阶导数, 可得:

$$g'(0) = \int_0^1 (u'v' + uv) dx - \int_0^1 f v dx. \quad (1.6)$$

根据 g 的一阶条件, 可得 $a(u, v) = h(v)$ 。又由于 v 的任意性, 结论得证。

如此, 我们把一个解微分方程的问题, 利用 1.1 和 1.2 转化为了一个变分问题。由于 V 是一个无穷维空间, 我们不能期望利用算法给出这个变分问题的精确解, 但我们可以考虑对空间 V 进行有限维近似, 并在有限维空间上近似求解这个变分问题。

1.3 有限元思想的导出

接下来, 根据上一节的思路, 我们继续问题(1.1)的近似求解。根据上面的分析, 我们的数值算法需要解决两个问题:

- 如何对函数空间 V 进行有限维近似?
- 在进行有限维近似之后, 如何在有限维空间中对变分问题进行求解?

首先, 我们考虑第二个问题。根据上面的讨论, 近似求解变分问题有两种不同的思路, 分别对应的是 **Galerkin 近似方法**和 **Ritz 近似方法**。

1.3.1 Galerkin 近似