Summary

Shuang Hu

2022 年 6 月 15 日

1 广义函数与 Sobolev 空间

例 1.1. 考虑以下函数列：

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{n^2x^2-1}}, |x| < \frac{1}{n} \\ 0, |x| \geq \frac{1}{n} \end{cases} \tag{1}$$

当 $n \to \infty$ 时，$\varphi_n(x)$ 在常义函数的意义下不收敛。**能否进一步扩充函数的定义，使得这样的"极限函数"存在？**

定义 1.1 (基本空间)**.** 基本空间指满足一定条件的函数所构成的函数空间。对于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 本书主要讨论三个常见的基本空间：$C_c^\infty(\Omega)$,$C^\infty(\Omega)$,$\mathscr{S}(\Omega)$.

定义 1.2 ($C_c^\infty(\Omega)$)**.** $C_c^\infty(\Omega)$ 是由 Ω 上无限次连续可微且有紧支集的函数所构成的线性空间。其上的拓扑定义如下:

若一列函数 $\varphi_n \to \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 则这列函数满足下面两个条件:

- $\cup_{n=1}^\infty supp(\varphi_n) \subset K$, K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集。
- $$\|\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\| \rightrightarrows 0 \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n. \tag{2}$$

定义 1.3 ($C^\infty(\Omega)$)**.** $C^\infty(\Omega)$ 是由 Ω 上无限次连续可微且在无穷远处趋于 *0* 的函数所构成的线性空间。其上的拓扑定义如下:

若一列函数 $\varphi_n \to \varphi \in C^\infty(\Omega)$, 则对任意紧集 K 和多重指标 α,

$$\|\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\| \rightrightarrows 0.(x \in K). \tag{3}$$

定义 1.4 ($\mathscr{S}(\Omega)$)**.** $\mathscr{S}(\Omega)$ 由满足如下条件的函数组成*:*

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \to 0 \forall \alpha, \beta. \tag{4}$$

其上的拓扑:

若 $\varphi_n \to 0$, 则

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} x^\alpha \partial^\beta \varphi_n(x) = 0. \tag{5}$$

定理 1.1.

$$C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega). \tag{6}$$

定理 1.2. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $C^0(\mathbb{R}^n)$ 中稠密。

证明提示：L^p 函数定义，Lusin 定理，利用卷积实现光滑化。

定义 1.5. 定义

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, |x| < 1 \\ 0, |x| \geq 1 \end{cases} \tag{7}$$

由此导出光滑化子 $\alpha_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$。该函数满足两个条件:

- $\alpha_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha_\epsilon(x)\mathrm{d}x = 1$.

定义 1.6 (局部可积)**.** 如果 Ω 上的一个函数 φ 在任意紧集 $K \subset \Omega$ 上 *Lebesgue* 可积，则称该函数在 Ω 上**局部可积**，记 $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$.

定义 1.7. 设 $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, 则 $u_\epsilon(x) := u * \alpha_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 当 $\epsilon \to 0$, 若 $u \in X$, $X = C^0(\mathbb{R}^n)$ 或 $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $u_\epsilon \to u(X)$.

定义 1.8. 对于基本空间 X,X 上的**有界线性泛函**称为 X 上的**广义函数**。如，我们称 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函为 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数。

定理 1.3.

$$\epsilon'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{8}$$

定理 1.4.

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \tag{9}$$

对应 $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ 的泛函为*:*

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x. \tag{10}$$

定义 1.9. 定义基本函数空间 X 上的泛函 δ 为：对 $\phi \in X$,

$$\delta(\phi) := \phi(0). \tag{11}$$

定理 1.5. $\delta \notin L^1_{loc}(\Omega)$.

定理 1.6. $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$,$\delta \in \mathscr{S}'(\Omega)$,$\delta \in \epsilon'(\Omega)$.

定义 1.10 (支集)**.** 函数 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ 的支集定义为:

$$supp\varphi := \mathcal{C}(\{\mathbf{x} : \varphi(\mathbf{x}) \neq 0\}) \tag{12}$$

$\mathcal{C}$ 表示取闭包。

注记 1.1. 一般我们无法按 *1.10*的形式定义一个分布的支集, 因为分布是整体定义的, 我们一般无法讨论一个分布”在某点处”的取值。

定义 1.11. 对于 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, 如果对任意的 $\varphi \in C_c^\infty(\Omega')$, 有

$$\langle T, \varphi \rangle = 0, \tag{13}$$

则 T 在 Ω' 内**取零值**。

定理 1.7. 如果广义函数 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 在每个点的开邻域上取零值, 那么在整个 Ω 上 $T \equiv 0$。

证明提示: 有限覆盖 + 单位分解。

定义 1.12. 使广义函数 T 取零值的最大开集的补集, 称广义函数 T 的**支集**, 记为 $suppT$。

例 1.2. $supp\delta = \{0\}$.

定理 1.8. 任何 $\epsilon'(\Omega)$ 的广义函数 T 具有紧支集。任意具有紧支集的 $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ 必为 $\epsilon'(\Omega)$ 广义函数。

定义 1.13 (弱极限)**.** 如果一列属于某一基本函数空间的广义函数列 $\{T_k\}$, 对基本空间上的任意元素 φ, 满足*:*

$$\langle T_k, \varphi \rangle \to 0. \tag{14}$$

则称 T_k **弱收敛**于 *0*。

例 1.3.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{2x}{x^2 + \epsilon^2} = P.V.(\frac{2}{x}). \tag{15}$$

定理 1.9. 若 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_y)$, 则 $\langle T_y, \alpha_\epsilon(x-y) \rangle$ 为 $\mathbb{R}^n_x$ 上的 C^∞ 函数。
这一过程称为**广义函数 T 的正则化**。

定理 1.10. 当 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,$T_\epsilon \to T(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))$.

证明思路:T_ϵ 为常义函数, 其作用在 φ 上的值可用积分表示。估计积分表达式即可。

定义 1.14 (广义导数)**.** 广义函数 T 的 α 阶导数定义为:

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle . \tag{16}$$

例 1.4. *Heaviside* 函数 $H(x)$ 满足 $H'(x) = \delta$.

定理 1.11. 如果一个广义函数的导数为连续函数，那么这个广义函数一定是常义的 C^1 函数。

证明思路：$-\langle T, \partial\varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle$, 考察 $\int g \mathrm{d}x$.

定义 1.15. 设 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,$\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定义:

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha\varphi \rangle . \tag{17}$$

定义 1.16. 设 S,T 为两个广义函数，则 $S * T$ 定义为:

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \rangle . \tag{18}$$

例 1.5.

$$tH(t) * e^t H(t) = (e^t - t - 1)H(t). \tag{19}$$

定理 1.12. 如果 T 为 $\epsilon'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数，S 为 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数，那么 $S * T$ 为 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数。

证明思路：设 T 的紧支集为 K，构造辅助函数 $\zeta(y)$ 使得其在 K 上取值为 1。

定理 1.13. $\epsilon'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数全体关于线性运算和卷积运算构成一个可交换的有单位元的代数，δ 为其单位元。

定义 1.17 ($\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换)**.** 对于函数 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义其 *Fourier* 变换为:

$$F[f] := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x. \tag{20}$$

又若 $g(\xi) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义其 *Fourier* 逆变换为:

$$F^{-1}(g) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\xi\cdot x} \mathrm{d}\xi. \tag{21}$$

定理 1.14.

$$F^{-1}(F[f]) = f. \tag{22}$$

例 1.6.

$$F[\frac{1}{a^2+x^2}] = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|} \tag{23}$$

定理 1.15 (Fourier 变换的基本性质)**.**

- 线性：
$$F[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 F[f_1] + \alpha_2 F[f_2]. \tag{24}$$

- 求导：
$$F[\partial_j f] = i\xi_j F[f]. \tag{25}$$

- 乘多项式
$$F[x_j f] = i\partial_j F[f]. \tag{26}$$

- 卷积
$$\begin{aligned} F[f * g] &= F[f].F[g] \\ F[f.g] &= (2\pi)^{-n} F[f] * F[g] \end{aligned} \tag{27}$$

定理 1.16 (Parseval)**.**
$$\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g} \mathrm{d}x = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} F[f]\overline{F[g]} \mathrm{d}x. \tag{28}$$

定义 1.18 ($\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换)**.** *对于任意 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数 T, 定义其 Fourier 变换 $F[T]$ 为：*
$$\langle F[T], \varphi \rangle = \langle T, F[\varphi] \rangle . \tag{29}$$
逆 Fourier 变换同样定义。

广义函数 Fourier 变换的性质大多和常义函数相同，但卷积性质略有区别，因为广义函数的卷积不一定可以定义。

定理 1.17. *若 $\varphi \in \mathbb{R}$,$T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\varphi * T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且*
$$F[\varphi * T] = F[\varphi]F[T]. \tag{30}$$

定理 1.18. *对于 $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), T \in \epsilon'(\mathbb{R}^n)$, 有：*
$$F[T * S] = F[T].F[S] \tag{31}$$

例 1.7.
$$F[\delta(x)] = 1. \tag{32}$$

例 1.8.
$$F[1] = (2\pi)^n \delta. \tag{33}$$

例 1.9.

$$F[\sin ax] = -i\pi(\delta(\xi - a) - \delta(\xi + a)). \tag{34}$$

设在空间 $\mathbb{R}^n$ 中给定线性微分算子

$$p(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha(x) D^\alpha, D = \frac{1}{i}\partial. \tag{35}$$

则由 Fourier 变换的性质:

$$p(x, D)u = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} p(x, \xi)\hat{u}(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{36}$$

定义 1.19 (微分算子的推广). 如果 $a(x, \xi) \in S^m$, 可以定义 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的线性连续映射为:

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} a(x, \xi)\hat{u}(\xi) \mathrm{d}\xi \tag{37}$$

$a(x, \xi)$ 称为 A 的**象征**。