Summary

Shuang Hu

2022 年 6 月 14 日

1 广义函数与 Sobolev 空间

例 1.1. 考虑以下函数列：

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{n^2x^2-1}}, |x| < \dfrac{1}{n} \\ 0, |x| \geq \dfrac{1}{n} \end{cases} \tag{1}$$

当 $n \to \infty$ 时，$\varphi_n(x)$ 在常义函数的意义下不收敛。**能否进一步扩充函数的定义，使得这样的"极限函数"存在？**

定义 1.1 (基本空间)**.** 基本空间指满足一定条件的函数所构成的函数空间。对于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 本书主要讨论三个常见的基本空间：$C_c^\infty(\Omega)$,$C^\infty(\Omega)$,$\mathscr{S}(\Omega)$.

定义 1.2 ($C_c^\infty(\Omega)$)**.** $C_c^\infty(\Omega)$ 是由 Ω 上无限次连续可微且有紧支集的函数所构成的线性空间。其上的拓扑定义如下：

若一列函数 $\varphi_n \to \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 则这列函数满足下面两个条件：

- $\cup_{n=1}^\infty supp(\varphi_n) \subset K$, K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集。
- $$\|\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\| \rightrightarrows 0 \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n. \tag{2}$$

定义 1.3 ($C^\infty(\Omega)$)**.** $C^\infty(\Omega)$ 是由 Ω 上无限次连续可微且在无穷远处趋于 *0* 的函数所构成的线性空间。其上的拓扑定义如下：

若一列函数 $\varphi_n \to \varphi \in C^\infty(\Omega)$，则对任意紧集 K 和多重指标 α,

$$\|\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\| \rightrightarrows 0.(x \in K). \tag{3}$$

定义 1.4 ($\mathscr{S}(\Omega)$)**.** $\mathscr{S}(\Omega)$ 由满足如下条件的函数组成*:*

$$\lim_{|x| \to \infty} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \to 0 \forall \alpha, \beta. \tag{4}$$

其上的拓扑：

若 $\varphi_n \to 0$，则

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} x^\alpha \partial^\beta \varphi_n(x) = 0. \tag{5}$$

定理 1.1.

$$C_c^\infty(\Omega) \subset \mathscr{S}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega). \tag{6}$$

定理 1.2. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $C^0(\mathbb{R}^n)$ 中稠密。

证明提示：L^p 函数定义，Lusin 定理，利用卷积实现光滑化。

定义 1.5. 定义

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, |x| < 1 \\ 0, |x| \geq 1 \end{cases} \tag{7}$$

由此导出光滑化子 $\alpha_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$。该函数满足两个条件：

- $\alpha_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha_\epsilon(x)\mathrm{d}x = 1$.

定义 1.6 (局部可积)**.** 如果 Ω 上的一个函数 φ 在任意紧集 $K \subset \Omega$ 上 *Lebesgue* 可积，则称该函数在 Ω 上**局部可积**，记 $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$.

定义 1.7. 设 $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$，则 $u_\epsilon(x) := u * \alpha_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 当 $\epsilon \to 0$，若 $u \in X$，$X = C^0(\mathbb{R}^n)$ 或 $X = L^p(\mathbb{R}^n)$，则 $u_\epsilon \to u(X)$.

定义 1.8. 对于基本空间 X,X 上的**有界线性泛函**称为 X 上的**广义函数**。如，我们称 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函为 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 广义函数。

定理 1.3.

$$\epsilon'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{8}$$

定理 1.4.

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \tag{9}$$

定义 1.9. 定义基本函数空间 X 上的泛函 δ 为：对 $\phi \in X$,

$$\delta(\phi) := \phi(0). \tag{10}$$

定理 1.5. $\delta \notin L^1_{loc}(\Omega)$.

定理 1.6. $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$,$\delta \in \mathscr{S}'(\Omega)$,$\delta \in \epsilon'(\Omega)$.