

Summary

Shuang Hu

2022 年 6 月 14 日

1 广义函数与 Sobolev 空间

例 1.1. 考虑以下函数列:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{n^2 x^2 - 1}}, & |x| < \frac{1}{n} \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{n} \end{cases} \quad (1)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\varphi_n(x)$ 在常义函数的意义下不收敛。能否进一步扩充函数的定义, 使得这样的“极限函数”存在?

定义 1.1 (基本空间). 基本空间指满足一定条件的函数所构成的函数空间。对于区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 本书主要讨论三个常见的基本空间: $C_c^\infty(\Omega), C^\infty(\Omega), \mathcal{S}(\Omega)$.

定义 1.2 ($C_c^\infty(\Omega)$). $C_c^\infty(\Omega)$ 是由 Ω 上无限次连续可微且有紧支集的函数所构成的线性空间。其上的拓扑定义如下:

若一系列函数 $\varphi_n \rightarrow \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, 则这列函数满足下面两个条件:

- $\cup_{n=1}^\infty \text{supp}(\varphi_n) \subset K$, K 是 \mathbb{R}^n 中的紧集。
-

$$\|\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\| \rightarrow 0 \forall \alpha \in \mathbb{Z}^n. \quad (2)$$

定义 1.3 ($C^\infty(\Omega)$). $C^\infty(\Omega)$ 是由 Ω 上无限次连续可微且在无穷远处趋于 0 的函数所构成的线性空间。其上的拓扑定义如下:

若一系列函数 $\varphi_n \rightarrow \varphi \in C^\infty(\Omega)$, 则对任意紧集 K 和多重指标 α ,

$$\|\partial^\alpha \varphi_n(x) - \partial^\alpha \varphi(x)\| \rightarrow 0 (x \in K). \quad (3)$$

定义 1.4 ($\mathcal{S}(\Omega)$). $\mathcal{S}(\Omega)$ 由满足如下条件的函数组成:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \partial^\beta \varphi(x) \rightarrow 0 \forall \alpha, \beta. \quad (4)$$

其上的拓扑:

若 $\varphi_n \rightarrow 0$, 则

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} x^\alpha \partial^\beta \varphi_n(x) = 0. \quad (5)$$

定理 1.1.

$$C_c^\infty(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega). \quad (6)$$

定理 1.2. $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 和 $C^0(\mathbb{R}^n)$ 中稠密。

证明提示: L^p 函数定义, Lusin 定理, 利用卷积实现光滑化。

定义 1.5. 定义

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (7)$$

由此导出光滑化子 $\alpha_\epsilon := \frac{1}{\epsilon^n} \varphi(\frac{x}{\epsilon})$ 。该函数满足两个条件:

- $\alpha_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
- $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha_\epsilon(x) dx = 1$.

定义 1.6 (局部可积). 如果 Ω 上的一个函数 φ 在任意紧集 $K \subset \Omega$ 上 Lebesgue 可积, 则称该函数在 Ω 上**局部可积**, 记 $\varphi \in L_{loc}^1(\Omega)$.

定义 1.7. 设 $u \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $u_\epsilon(x) := u * \alpha_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 当 $\epsilon \rightarrow 0$, 若 $u \in X$, $X = C^0(\mathbb{R}^n)$ 或 $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, 则 $u_\epsilon \rightarrow u(X)$.