

Analisi Quaternionica

Teoria di funzioni di una variabile

Lorenzo Matarazzo

Indice

0.1	Contesto Storico	1
0.1.1	Come sono nati i quaternioni?	1
0.1.2	Perché i quaternioni?	1
0.1.3	Come reagì la comunità scientifica del tempo?	3
0.2	Perché i quaternioni oggi?	3
0.3	Obiettivi della monografia	4
0.4	A chi è rivolto questo testo?	6
0.5	Nota al lettore	7
1	Preliminari	9
1.1	Elementi di topologia	9
1.1.1	Perché la topologia?	9
1.1.2	Spazi topologici	11
1.1.3	Insiemi aperti e punti interni	15
1.1.4	Definizione alternativa di topologia	19
1.1.5	Punti di accumulazione, insiemi chiusi e chiusura di un insieme	23
1.1.6	Punti interni, bordo ed esterno	27
1.1.7	Basi	29
1.1.8	Funzioni continue ed omeomorfismi	30
1.2	Elementi di topologia Algebrica	32
1.2.1	Omotopia	32
1.2.2	Omologia simpliciale	40
1.2.3	Omologia singolare	46
1.3	Elementi di Geometria Differenziale	48
1.3.1	Varietà differenziabili	48
1.3.2	Applicazioni lisce e diffeomorfismi	52
1.3.3	Spazi tangentici	53
1.3.4	Differenziali e spazi cotangenti	54
1.3.5	Fibrati tangentici, campi vettoriali e fibrati cotangenti	55
1.3.6	Prodotto tensoriale di spazi vettoriali	56

1.3.7	Forme differenziali e l'algebra esterna di Grassmann	60
1.3.8	Pullback e integrazione	62
1.3.9	Differenziazione esterna	63
1.3.10	Teorema di Stokes e proprietà degli integrali	64
2	Algebra dei quaternioni	67
2.1	Costruzione dell'Algebra dei quaternioni	67
2.1.1	La costruzione di Cayley-Dickson di \mathbb{C}	67
2.1.2	La costruzione di Cayley-Dickson dei quaternioni . .	70
2.1.3	Operazioni algebriche di base dei quaternioni in ter- mini delle loro 4 componenti	73
2.2	Parte vettoriale e parte scalare di un quaternione	79
2.2.1	Operazioni vettoriali con i quaternioni	81
2.3	Forma polare di un quaternione	85
2.4	Polinomi a coefficienti quaternionici	87
2.4.1	Costruzione dell'anello dei polinomi $\mathbb{C}[x]$	87
2.4.2	Costruzione dell'anello dei polinomi $R[x]$ per un anel- lo unitario R	88
2.4.3	Proprietà topologiche di $\ker(ev_\phi)$	95
2.5	Rappresentazioni matriciali di \mathbb{H}	109
2.5.1	Rappresentazione matriciale complessa dei quater- nioni	109
2.5.2	Scrivere quaternioni come matrici reali 4x4	110
3	Geometria dei quaternioni	113
3.1	Visualizzare luoghi geometrici quaternionici	113
3.2	Quaternioni e rotazioni	117
3.3	Problemi con le matrici euleriane	123
3.4	Interpolazione di rotazioni	126
4	Topologia dei quaternioni	131
4.1	Costruzione di $(\mathbb{H}, \mathcal{U})$	131
4.2	Successioni quaternioniche	136
4.2.1	Operazioni 1-arie e binarie di successioni quaterno- niche	136
4.2.2	Convergenza di successioni quaternioniche	137
4.2.3	Sottosuccessioni di una successione quaternionica	142
4.3	Successioni di Cauchy quaternioniche	142
4.4	Il teorema di Heine-Borel per i quaternioni	144
4.5	Limiti di funzioni di una variabile quaternionica	146
4.6	Funzioni continue	151

4.7	Compattificazione di Alexandroff di \mathbb{H}	155
4.7.1	Proiezione stereografica e sfera di Riemann	155
4.7.2	Compattificazione di Alexandroff dei Quaternioni	159
4.8	Teorema di Eilenberg-Niven	161
4.9	Serie quaternioniche	163
5	Funzioni elementari	177
5.1	Esponenziale quaternionico	177
5.2	Logaritmo naturale quaternionico	184
5.3	Potenze di quaternioni	186
5.4	Seno e coseno quaternionici	189
5.5	Tangente e cotangente	195
5.6	Funzioni iperboliche	196
5.7	Visualizzare funzioni quaternioniche	201
6	Calcolo differenziale e integrale su \mathbb{H}	207
6.1	Alcuni enti preliminari	207
6.2	Forme differenziali quaternioniche	208
6.3	Operatori differenziali quaternionici	213
6.4	L'approccio classico	214
6.5	Funzioni regolari e l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter	220
6.6	Forma vettoriale dell'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter	230
6.7	Teoremi integrali quaternionici	232
6.8	Costruire funzioni regolari da funzioni armoniche	244
6.9	Costruire funzioni regolari da funzioni \mathbb{C} -olomorfe	249
6.10	Altri metodi per costruire funzioni regolari	254
6.11	Funzioni quaternioniche omogenee	258
6.12	Serie di Taylor e di Laurent quaternioniche	263
6.13	Considerazioni finali	271
7	Analisi alternative su \mathbb{H}	273
7.1	Calcolo differenziale su spazi di Banach	273
7.2	Derivate di Fréchet di funzioni quaternioniche	281
7.3	Funzioni \mathbb{H}_Σ derivabili	286
7.4	Analisi differenziale su D-moduli di Banach	296
7.5	Funzioni C-regolari	300
8	Note	309
8.1	Introduzione	309
8.2	Capitolo 1: Preliminari	310
8.3	Capitolo 2: Algebra dei quaternioni	310

8.4 Capitolo 4: Topologia dei quaternioni	311
8.5 Capitolo 5: Funzioni elementari	311
8.6 Capitolo 6: Calcolo differenziale e integrale su \mathbb{H}	312

0.1 Contesto Storico

0.1.1 Come sono nati i quaternioni?

Prima di trattare la teoria delle funzioni di una variabile quaternionica, e in generale dell'algebra del corpo dei quaternioni \mathbb{H} , sarebbe di certo una buona idea abbandonarsi velocemente a una digressione storica. Difatti, i quaternioni sono dapprima una nozione matematica molto interessante dal punto di vista storico, la cui scoperta precede e motiva molte definizioni matematiche che oggi utilizziamo frequentemente nell'analisi vettoriale, divise oramai dalla loro matrice originaria.

I quaternioni sono attribuiti secondo la storiografia matematica classica al matematico irlandese Sir William Hamilton. Tuttavia, intorno allo stesso periodo, una teoria analoga fu sviluppata dal matematico francese Benjamin Olinde Rodrigues, seppur in una chiave più geometrica, in quanto tale teoria fu sviluppata principalmente per problemi circa le rotazioni tridimensionali [Nota 1]. La scoperta (o invenzione, in base alle opinioni del lettore riguardo faccende filosofiche) dei quaternioni da parte di Hamilton è quasi leggendaria. Si narra infatti che il matematico irlandese ebbe un lampo di genio durante una passeggiata nei pressi del Royal Canal a Dublino con la moglie Helen il 16 Ottobre 1843 [Nota 2]. La scoperta di questo sistema numerico diletto il matematico talmente tanto da portarlo a incidere nella roccia del Broom Bridge quella che oggi è nota come "La regola di Hamilton", un'equazione dalla quale si possono dedurre le regole per la moltiplicazione di questi numeri.



Figura 1: Placca commemorativa sul Royal Canal, luogo ove Hamilton incise la sua equazione, purtroppo non pervenutaci [immagine tratta da Wikipedia [Link1], caricata dall'utente Cone83. Licenza: CC BY-SA 4.0].

0.1.2 Perché i quaternioni?

A questo punto sorge spontanea la seguente domanda: cosa ha motivato lo sviluppo dei quaternioni?

Per rispondere a questa domanda conviene fare mente locale e immedesimarsi in uno studioso del tempo.

Ci troviamo nei primi anni del decennio 1840; i numeri complessi sono oramai adoperati come strumento dai matematici da quasi 300 anni (ricordiamo che furono inizialmente introdotti dal matematico italiano Gerolamo Cardano nel 1545 nella sua "Ars Magna", sviluppati come concetto mentre lavorava a dei casi particolari della formula risolutiva di equazioni di terzo grado confidatagli da Tartaglia [Nota 3]).

Non solo i matematici dell'epoca erano avvezzi all'uso dei numeri complessi e ne comprendevano i risvolti geometrici, ma i primi anni del 1800 furono proprio gli anni in cui l'analisi complessa subì il suo sviluppo più significativo e in cui furono dimostrati molti dei famosi risultati che oggi vengono spesso studiati nei corsi introduttivi alla disciplina (ricordiamo ad esempio il "Teorema di Cauchy-Goursat", teorema di fondamentale importanza nell'analisi complessa, i cui rudimenti sono abbozzati in documenti che risalgono addirittura al 1814, mentre fu fornita una dimostrazione completa nel 1825 [Nota 4]).

Trovandoci in un'epoca antecedente allo sviluppo di teorie fisiche che facessero un uso estensivo del campo dei complessi, potremmo domandarci da dove scaturisca questo vivo interesse per un sistema di numeri apparentemente staccato dalla realtà; a motivare gli studiosi dell'epoca furono le interessanti proprietà geometriche dei numeri complessi, osservate in maniera estensiva da matematici come Wessel e Argand [Nota 5]. Perché è stato importante precisare ciò? Perché per lo stesso esatto motivo furono sviluppati quelli che oggi sono noti come quaternioni. Hamilton, inizialmente, voleva sviluppare un'algebra di numeri che chiamò "triplette", geometricamente rappresentati da punti nello spazio, che idealmente avrebbero dovuto permettergli di eseguire rotazioni tramite l'operazione di moltiplicazione, analogamente a come accade nel campo dei complessi. Tuttavia, tali tentativi furono tutti vani, e Hamilton lavorò per oltre 10 anni su questo problema senza ottenere risultati. Fu solo il 16 ottobre 1843 che durante la passeggiata di cui abbiamo precedentemente discusso, riuscì a sviluppare un'algebra con proprietà desiderabili che permetesse di moltiplicare, non triplette, ma quaterne di numeri.

Il nome stesso quaternioni, come è facile intuire, deriva infatti dal sostanzioso maschile latino "quaternio", che vuol dire quattro. La scelta di questo nome, come ci testimoniano alcuni documenti del suo allievo P.G Tait [Nota 6], fu probabilmente motivata anche dal grande interesse di Hamilton per il simbolo mistico pitagorico della "tetractys" (che veniva visto dai pitagorici come il simbolo del "kosmos", principalmente per i suoi legami alla musica e ai movimenti planetari).

In aggiunta, i quaternioni sono di estremo interesse per lo studio della storia della matematica in quanto si deve allo studio compiuto su questi ultimi lo sviluppo di una grande gamma di termini appartenenti al lessico matematico e di convenzioni notazionali tuttora molto comuni. Difatti, parole come vettore, scalare o versore furono adoperate per la prima volta nei lavori di Hamilton riguardanti i quaternioni. La parola vettore, infatti, deriva dal latino "vehere", che vuol dire trasportare/condurre, mentre la parola scalare deriva a sua volta dal sostantivo latino "scala", il cui significato è banalmente uguale all'italiano. Anche la convenzione abbastanza comune di rappresentare la base ortonormale $\{[1,0,0]^T, [0,1,0]^T, [0,0,1]^T\}$ di \mathbb{R}^3 come $\{i, j, k\}$ è dovuta ai quaternioni. Detto ciò, ritorneremo su questa faccenda storiografica denominativa a tempo debito, una volta introdotte le nozioni di base dell'algebra dei quaternioni, in quanto sarà anche più chiaro il contesto in cui Hamilton introdusse tali definizioni.

0.1.3 Come reagì la comunità scientifica del tempo?

Altro importante argomento da approfondire è la reazione che i matematici dell'epoca ebbero dinanzi alla scoperta dei quaternioni. Infatti, si può dire che tra gli studiosi dell'epoca ci fu una scissione tra coloro che consideravano i quaternioni una grande scoperta, e addirittura il modo in cui si sarebbe potuta scrivere tutta la fisica in un linguaggio unitario, e lo schieramento opposto che invece li considerava inutilmente complicati e poco scientificamente fruttiferi. Tra i matematici del primo gruppo figurano, oltre a, ovviamente, Hamilton: Alexander MacFarlane, Peter G. Tait, Charles Jasper Joly, Robert Ball, van Elfrinkhof e molti altri, che arrivarono addirittura a formare, nel 1899, quella che venne chiamata la "Quaternion Society" [Nota 7], una società scientifica volta alla promozione dello studio e dell'adoperazione dei quaternioni e vari altri sistemi numerici ipercomplessi. Tra lo schieramento opposto, invece, avremo molti altri famosi matematici, tra cui il matematico britannico Oliver Heaviside, il padre della moderna analisi vettoriale, "liberata" dalla sua componente quaternionica che aveva assunto all'inizio.

0.2 Perché i quaternioni oggi?

In base a quanto detto anche nella sezione precedente, sarà probabilmente risultato anche al lettore che tale sistema sia dunque pressoché inutile, ed è dunque superfluo studiare alcunché delle sue proprietà e pe-

culiarità. Tuttavia, nonostante siano i quaternioni senza dubbio un sistema tedioso con cui lavorare (soprattutto algebricamente a causa della loro non commutatività moltiplicativa e della laboriosità dei calcoli), ma anche per le difficoltà che si incontreranno cercando di definire un'analisi per funzioni di una variabile quaternionica, non è il caso di "gettare il bambino con l'acqua sporca". Infatti, i quaternioni hanno un gran numero di ambiti in cui sono oggigiorno adoperati e di grande utilità, come ad esempio nella computer grafica. Sarà capitato sicuramente a coloro che utilizzano software di computer grafica di essersi imbattuti nelle impostazioni riguardanti le rotazioni e di aver probabilmente notato le voci "Euler angles" o "Quaternions". I quaternioni sono, al giorno d'oggi, uno dei sistemi prediletti di rappresentare rotazioni nello spazio, in quanto non presentano il problema, tipico dei sistemi che effettuano rotazioni con angoli di Euler (che avrete probabilmente incontrato in un corso di algebra lineare), del "Gimbal Lock" (in italiano è tradotto spesso come "Blocco cardanico"), che avviene quando due anelli di rotazione di una sospensione cardanica si allineano, causando la perdita di un grado di libertà. In aggiunta, i quaternioni sono al momento adoperati anche in alcune branche della fisica; sono utili nella dinamica del corpo rigido ed inoltre sono isomorfi allo spazio delle matrici hermitiane che agiscono su uno spazio di Hilbert 2-dimensionale, come quello di un qubit o quello delle particelle di spin $\frac{1}{2}$ (fermioni).

Di grande importanza per la fisica è inoltre il loro legame con i gruppi di Lie $SO(3)$ e $SU(2)$, che copriremo in questo testo a tempo debito.

0.3 Obiettivi della monografia

In questo breve testo analizzeremo l'algebra associativa unitaria reale 4-dimensionale dei quaternioni, dimostrando dapprima alcuni fatti algebrici fondamentali sulla suddetta struttura, per poi analizzare invece lo spazio topologico metrico indotto dalla loro norma canonica, coincidente con la norma euclidea 4-dimensionale. Una volta fatto ciò, utilizzeremo le definizioni topologiche di continuità e di limite di una funzione tra spazi metrici nel caso specifico dei quaternioni, facendo alcuni esempi, e svilupperemo una teoria elementare delle funzioni di una variabile quaternionica, che vedremo essere un'impresa non molto difficoltosa fino a questo punto. I primi ostacoli sul cammino, infatti, cominceranno con la volontà di estendere il calcolo differenziale a funzioni di una variabile quaternionica. Tale difficoltà nascerà, come molti avranno potuto già intuire, dalla non commutatività moltiplicativa dei quaternioni. I quaternioni, infatti, a differenza dei numeri complessi e dei numeri reali, sono solamente un corpo, ossia

sono un campo meno la proprietà commutativa della moltiplicazione. Infatti, con una definizione operativa di limite di una funzione quaternionica alla mano, volendo definire il concetto di derivata in modo analogo a come viene fatto nei corsi di Analisi Reale e Analisi Complessa, ci troveremmo dinanzi a due grossi ostacoli:

- La definizione di "derivata di funzione" non sarebbe univoca. Per la non commutatività della moltiplicazione, infatti, sarà necessario definire una "derivata destra" (in cui moltiplicheremo il fattore $f(x + h) - f(x)$ per l'inverso moltiplicativo di un quaternione h a destra) e una "derivata sinistra" (in cui invece moltiplicheremo il medesimo fattore per h^{-1} da sinistra).
- La definizione di derivata di cui abbiamo parlato sopra è estremamente esclusiva. Risulterà addirittura che la derivabilità sinistra/destra di una funzione di una variabile quaternionica sia una condizione sufficiente affinché essa sia sinistro/destro lineare. La classe di funzioni derivabili si restringerebbe dunque a un insieme talmente piccolo da non essere d'interesse alcuno.

Questi due problemi, come poi vedremo proseguendo nel testo, non sono la fine del mondo. Infatti, la soluzione sarà semplicemente quella di definire la differenziabilità di una funzione quaternionica in una maniera diversa. L'unico grosso problema sussistente sarà che, a differenza dell'analisi reale e dell'analisi complessa, qui avremo diversi approcci per lo sviluppo di un calcolo differenziale. Uno dei più importanti è quello sviluppato all'inizio del secolo XX da Fueter, Moisil, Haefeli [16] [14] [13] [15] [21] e molti altri matematici, riportato poi in lingua inglese per la prima volta nell'importante paper di C.A Deavours "The Quaternion Calculus" [6], e dopodiché compattato ed espanso nell'altrettanto importante paper del matematico e fisico inglese A.Sudbery "The Quaternionic Analysis" [43].

Tale teoria è riuscita a fornire molti analoghi quaternionici dei più importanti teoremi dell'analisi complessa, partendo dal teorema integrale di Cauchy (riportiamo qui sotto la forma complessa a sinistra e quella quaternionica a destra):

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \iiint_C Dq\phi(q) = 0$$

dove qui $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione complessa olomorfa su e all'interno di γ , che è una curva chiusa semplice regolare a tratti, e dove $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è una funzione regolare sinistra quaternionica in un dominio $U \subset \mathbb{H}$ (vedremo poi il significato di regolarità per funzioni quaternioniche a tempo

debito) e C è una 3-catena liscia omologa a 0 nell'omologia singolare di U (il testo inizia con un ripasso di topologia algebrica, pertanto anche un lettore senza previa preparazione in tale materia matematica potrà fruire del testo). Come possiamo vedere le forme dei due teoremi sono molto simili. Ancora molto simile al caso complesso è la forma quaternionica del teorema integrale di Cauchy (dove ancora poniamo la forma complessa a sinistra e quella quaternionica a destra):

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad n\phi(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C \frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} Dq\phi(q)$$

Omettiamo qui le ipotesi per ambedue i teoremi poiché sono alquanto convolute, al netto della specificazione che qui con n si intende l'indice di avvolgimento della catena liscia C attorno a q_0 .

Ovviamente, oltre alla teoria citata prima, affronteremo anche altri approcci al calcolo di funzioni a una variabile quaternionica, tra cui quello presentato da C.G Cullen [5] [19].

0.4 A chi è rivolto questo testo?

Come il lettore avrà potuto notare nell'introduzione, il bagaglio di conoscenze preliminari per comprendere l'analisi quaternionica richiederebbe una discreta conoscenza della geometria differenziale, della topologia generale e della topologia algebrica. Ciononostante ho provato a rendere questo testo accessibile anche a chi non ha studiato queste materie previamente includendo un capitolo iniziale in cui vengono affrontate in maniera mirata solo le nozioni propedeutiche alla nostra disquisizione. Così facendo, per usufruire del testo, basterà semplicemente aver buone conoscenze di analisi reale, analisi complessa e algebra (gruppi, spazi vettoriali, etc.). Se invece il lettore ha già studiato la topologia algebrica e la geometria differenziale, allora consiglio di saltare a piè pari il primo capitolo (in tal caso potrebbe risultare superfluo anche il quarto al netto della sezione sul teorema di Eilenberg-Niven, e se ciò è il caso, ne consiglio pertanto una lettura spedita). Ciononostante il capitolo primo potrà sempre essere usato come appendice da consultare, interna al libro, nel caso in cui non si dovesse rammentare un determinato risultato citato nel testo.

0.5 Nota al lettore

Concludiamo ora l'introduzione con alcune precisazioni di carattere non matematico, ma più stilistico/organizzativo. Anzitutto volevo precisare che al momento della scrittura di tale monografia il sottoscritto aveva 17 anni; essendo, per questo motivo, non inserito in contesti accademici, ed avendo realizzato e corretto questo testo da solo, chiedo scusa in anticipo per eventuali imprecisioni; nel caso in cui il lettore dovesse riscontrare qualche errore gli sarei immensamente grato se me lo potesse comunicare. Detto ciò parliamo anche delle convenzioni che adotterò in questo testo per rendere più chiara la fruizione di quest'ultimo; citerò tra parentesi quadre tutti i riferimenti bibliografici (come di prassi), realizzati con la libreria biblatex di LaTeX. La bibliografia completa è presente nelle ultime pagine del testo, e le citazioni rimanderanno tramite dei numeri ai testi lì presenti. Inoltre, qualora necessario, includerò anche la pagina interessata del testo citato di fianco.

Le parentesi quadre, all'interno del testo, verranno utilizzate anche per rimandare il lettore alla sezione delle note, anch'essa riposta alla fine del testo, dove verranno precise alcune proposizioni del testo o verranno forniti dei riferimenti bibliografici con delle spiegazioni annesse.

La maggior parte dei grafici e delle illustrazioni di questo testo sono realizzati con le seguenti librerie (o software): matplotlib, PGF/TikZ, GeoGebra e più raramente Blender e Gimp.

La copertina del testo è un frattale quaternionico realizzato dal sottoscritto con il freeware ChaosPro (link per il download: <http://www.chaospro.de>).

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Elementi di topologia

1.1.1 Perché la topologia?

Cominciamo la prima sezione del capitolo parlando di spazi topologici: cosa sono? È sempre una buona idea rispondere alla domanda partendo da un'analisi etimologica del termine.

La parola topologia è di derivazione greca, in particolar modo deriva dal greco *topos* (luogo) e *logos* (ragionamento/studio/pensiero).

Può essere dunque tradotta in italiano, un po' bruscamente, con il termine "studio del luogo".

Prima di proseguire, tuttavia, suppongo che potrebbe esser sorto al lettore il seguente dubbio: come differisce la topologia dalla geometria? Non è anch'essa uno studio del luogo? La risposta risiede nella genesi della disciplina: la soluzione del problema dei 7 ponti di Königsberg, formulato e risolto da Leonhard Euler nel lontano 1736, è considerato un importante punto di svolta [Nota 1.1]; è qui che Euler comprese che le considerazioni geometriche e matematiche fatte per risolvere il problema erano di gran lunga diverse da quelle affrontate per un canonico problema di geometria euclidea, e che dunque la geometria adoperata non era una "geometria quantitativa", ma bensì una geometria qualitativa.

Verso la fine del 19esimo secolo, in sempre più istanze venne adoperata in linguaggio accademico la parola "topologia" con il significato, per l'appunto, di geometria qualitativa.

Cosa s'intende tuttavia per luogo? Pensiamo ad un esempio concreto; guardandoci intorno, ci accorgiamo di vivere in uno spazio tridimensionale (modellabile matematicamente in modo astratto con \mathbb{R}^3).

Tale spazio è un insieme di punti, ossia di terne di valori reali che indicano la posizione di un ente nello spazio. È ora tuttavia di porci una domanda: lo spazio in cui viviamo è solamente un insieme? O c'è per caso della sovrastruttura che lo rende più "interessante"? Risulta molto plausibile rispondere affermativamente alla seconda domanda; pensiamo ad un insieme qualunque, ad esempio, $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Possiamo per caso dire che α è vicino a γ ? Possiamo calcolare la distanza tra due elementi? Se ci è dato solamente quest'insieme, senza alcuna informazione extra, la risposta è chiaramente no, tali nozioni non sono ben definite.

Nel nostro spazio circostante tridimensionale, invece, le nozioni appena menzionate sono ben definite:

- Possiamo misurare le distanze. Ad esempio, Marco (che modelliamo come un punto $X \in \mathbb{R}^3$, $X = (x_1, x_2, x_3)$) può dire di trovarsi a una certa distanza d da Mario (che modelliamo come un altro punto $Y \in \mathbb{R}^3$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$). La distanza verrà calcolata tramite la formula:

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} = d(X, Y)$$

Osserviamo che questa è una funzione che mappa una doppietta di punti nello spazio, $(X, Y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ in un numero reale. Chiameremo questa funzione metrica (dal greco metron=misura) euclidea di \mathbb{R}^3 , o metrica euclidea 3-dimensionale; sceglieremo il nome metrica in quanto precisamente questa funzione ci permette di misurare distanze nel nostro spazio.

- Potendo misurare le distanze in modo preciso, è ovviamente ben definito nel nostro spazio il concetto di "vicinanza"; nel linguaggio comune diremo ad esempio di trovarci "vicino" o "nelle vicinanze" di qualcosa se la nostra distanza da quell'oggetto non è ingente (la parola ingente in questo caso sarà tuttavia arbitraria).

Dunque, per formalizzare quanto appena detto in linguaggio matematico, diremo invece che possiamo dire di trovarci vicino a un oggetto se esiste una distanza d tra noi che ci separa.

Marco dell'esempio precedente, potrà dunque dire di trovarsi vicino a Mario.

Come abbiamo appena visto, dunque, il nostro spazio \mathbb{R}^3 è dotato di una sovrastruttura che definisce su quest'ultimo questi concetti; i suddetti sono ben definiti anche sulla linea reale \mathbb{R} o nel piano \mathbb{R}^2 .

Osserviamo che è proprio grazie a questa sovrastruttura che riusciamo a fare "analisi" su questi spazi:

Il concetto di limite è strettamente legato al concetto di distanza di \mathbb{R} , e a sua volta lo è molto anche la derivata, essendo essa stessa un limite.

Ma in misura ancora più considerevole dipende dal concetto di distanza, o più generalmente di "vicinanza", l'importante nozione di continuità di una funzione. Infatti, noi diciamo intuitivamente che una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua se essa "non ha buchi nel suo grafico", cioè che una funzione è continua in un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ se punti "abbastanza vicini a x_0 " sull'asse x vengono mandati in punti "abbastanza vicini a $f(x_0)$ " sull'asse y.

Finita questa digressione possiamo finalmente spiegare in maniera soddisfacente gli scopi della topologia generale.

1.1.2 Spazi topologici

Nella parte precedente del testo, abbiamo parlato di alcune delle proprietà "extra" dell'insieme \mathbb{R}^3 che lo rendono "più di un insieme". La definizione da manuale (che tecnicamente è quella che dà l'idea migliore di cosa si studi in un corso di topologia generale a patto che si sappia di cosa si stia parlando) è la seguente: la topologia è la branca della matematica che studia spazi topologici e le proprietà topologiche dei suddetti, definite come quelle proprietà che vengono preservate da delle applicazioni chiamate omeomorfismi.

Tale definizione, tuttavia, appare priva di significato agli occhi di un qualcuno che si sta appena avvicinando alla materia. Introdurremo pertanto il lettore alla topologia in maniera un po' diversa.

Pensiamo a quanto detto prima sullo spazio \mathbb{R}^3 e l'insieme qualsiasi dell'esempio precedente, $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$: e se volessimo introdurre una nozione di "vicinanza" su quest'insieme? (o ancor meglio di "distanza", ma questo lo vedremo dopo quando parleremo di spazi metrici). È qui che entra in gioco il concetto di spazio topologico, vogliamo cioè dotare un insieme qualsiasi di un concetto di vicinanza tra i suoi oggetti. Diamo ora la definizione di spazio topologico:

Definizione 1.1 (Spazio Topologico). *Uno spazio topologico è composto da un insieme X , insieme ad una classe di sottoinsiemi di X associati ad ogni punto $p \in X$. Chiameremo i sottoinsiemi associati a un punto $p \in X$ intorni di p . Richiediamo inoltre che gli intorni appena definiti soddisfino le seguenti proprietà:*

1. Se $U \subset X$ è un intorno di $p \in X$, allora $p \in U$.

2. Ogni sottoinsieme di X che contiene un intorno di un punto $p \in X$ è a sua volta un intorno di p . In simboli: sia $V \subset X$, allora se per un intorno U di p , si avrà $U \subset V$, avremo che V è un intorno di p .
3. Se U è un intorno di p , allora esiste un intorno V di p tale che U è un intorno di ogni punto di V .
4. Se U e V sono due intorni di un punto p , allora anche la loro intersezione $U \cap V$ lo è.

Chiameremo un insieme X , assieme alla classe $\mathcal{N} := \{\mathcal{N}_p\}_{p \in X}$ di classi di intorni per ogni punto $p \in X$ **spazio topologico**, scrivendolo come (X, \mathcal{N}) .

Le classi di sottoinsiemi di X associati ad ogni punto p sono precisamente il modo in cui realizziamo il nostro obiettivo iniziale rigorosamente: ricordiamo che inizialmente l'obiettivo era dotare un insieme di un concetto di vicinanza tra punti.

L'idea è dunque la seguente: dotiamo ogni punto p di una classe di sottoinsiemi che contengano i punti "vicini" a p , specificando per l'appunto quali punti gli sono vicini, e di conseguenza costringiamo questa classe di insiemi ad obbedire ad alcune regole necessarie affinché la nostra struttura astratta sia affine alla nostra idea intuitiva originale. Forniamo ora degli esempi per chiarire la definizione astratta appena presentata:

Esempio 1.1. Per vedere se la definizione "combacia" con l'esempio di prima dello spazio \mathbb{R}^3 , controlliamo che gli insiemi di "punti vicini" a un punto nello spazio $P \in \mathbb{R}^3$ formino un insieme di intorni.

Ricordando come abbiamo definito il concetto di vicinanza in \mathbb{R}^3 prima, rendiamolo ora rigoroso dicendo che un intorno di un punto $P \in \mathbb{R}^3$ è un insieme contenente una sfera di raggio r e centro P , $B(P, r) = \{Q \mid d(P, Q) < r\}$. Dimostriamo infine che questa classe di insiemi formi un insieme di intorni:

1. Supponiamo che $U \in \mathbb{R}^3$ sia un intorno di un punto $P \in \mathbb{R}^3$. Per la definizione data sopra, seguirà che U contiene una sfera (più spesso detta palla) di raggio $r > 0$ con centro P , $B(P, r)$. Ma tale palla contiene banalmente P , in quanto $d(P, P) = 0 < r$, e dunque $P \in B(P, r) \subset U \implies P \in U$.
2. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$, e supponiamo che quest'ultimo contenga un intorno di un punto $P \in \mathbb{R}^3$, $U \subset S$. Per la definizione data sopra, avremo che l'intorno U conterrà una sfera di raggio r e centro P , $B(P, r) \subset U$. Ma essendo $U \subset S$, avremo $B(P, r) \subset S$. Da ciò segue che S è un intorno di P .

3. Sia U un intorno di un punto $P \in \mathbb{R}^3$. Allora esiste una palla $B(P, r) \subset U$. Notiamo che tutte le palle $B(p, \tilde{r})$ dove $\tilde{r} < r$ sono banalmente contenute in U . Dunque la palla $B(P, \frac{r}{4})$ è contenuta in U . Mostriamo ora che U è un intorno di ogni elemento Q di $B(P, \frac{r}{4})$. Per far ciò, vogliamo trovare una palla $B(Q, \epsilon)$, di centro Q e raggio ϵ contenuta in U .

Per la definizione di palla, avremo che $\tilde{Q} \in B(Q, \epsilon)$ se e solo se $d(\tilde{Q}, Q) < \epsilon$. Ma siccome Q era un elemento di $B(P, \frac{r}{4})$, avremo a sua volta che $d(Q, P) < \frac{r}{4}$.

Applicando la diseguaglianza del triangolo (nel caso della metrica 3-euclidea):

$$d(\tilde{Q}, P) \leq d(\tilde{Q}, Q) + d(Q, P) = \epsilon + \frac{r}{4}$$

se la distanza $d(\tilde{Q}, P) < r$, avremo che \tilde{Q} sarà contenuto nella palla $B(P, r)$ contenuta per ipotesi in U . Richiediamo dunque che ϵ sia un numero reale positivo tale che $\epsilon + \frac{r}{4} < r \implies \epsilon < \frac{3r}{4}$.

Abbiamo trovato la palla in questione e abbiamo dimostrato che U è un intorno di ogni punto Q della palla $B(P, \frac{r}{4})$, in quanto contiene una palla aperta di ogni Q .

4. Siano U, V due intorni di $P \in \mathbb{R}^3$. Per ipotesi, allora, avremo che esistono due palle $B(P, \rho) \subset U$ e $B(P, \tilde{\rho}) \subset V$. Ma siccome le due palle hanno lo stesso centro, e i numeri reali sono un insieme totalmente ordinato (in parole povere dati due numeri reali $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, avremo o $r_1 < r_2$, o $r_1 > r_2$ oppure $r_1 = r_2$), avremo che una delle due è contenuta nell'altra, cioè:

$$B(P, \rho) \subset B(P, \tilde{\rho}) \quad \text{o} \quad B(P, \tilde{\rho}) \subset B(P, \rho)$$

Nel primo caso, avremo $B(P, \rho) \subset U$ e $B(P, \rho) \subset B(P, \tilde{\rho}) \subset V$, e dunque $B(P, \rho) \subset U \cap V$.

Nel secondo, invece, $B(P, \tilde{\rho}) \subset V$ e $B(P, \tilde{\rho}) \subset B(P, \rho) \subset U$, dunque $B(P, \tilde{\rho}) \subset U \cap V$; ergo, in ambo i casi riusciremo a trovare una palla contenuta nell'intersezione dei due intorni: l'intersezione di due intorni è dunque un intorno.

Pertanto, l'insieme di questa classe d'insiemi associati ad ogni punto $P \in \mathbb{R}^3$ chiamati intorni, \mathcal{N} , forma un sistema di intorni sull'insieme \mathbb{R}^3 , e dunque $(\mathbb{R}^3, \mathcal{N})$ forma una topologia.

Questa definizione di intorno di un punto, definita in modo del tutto analogo, cioè come insieme contenente una palla centrata nel punto in questione e con un certo raggio $r > 0$, può essere estesa allo spazio

euclideo n-dimensionale \mathbb{R}^n . Lasciamo al lettore la dimostrazione che tali insiemi formino un sistema di intorni per \mathbb{R}^n , in quanto la dimostrazione è del tutto analoga a quella fornita prima per \mathbb{R}^3 .

Esercizio 1.1. *Sia \mathbb{R}^n , con $n \geq 1$ lo spazio euclideo n-dimensionale. Ricordiamo che su \mathbb{R}^n , la metrica euclidea tra 2 punti $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ è data da:*

$$d(P, Q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots + (p_n - q_n)^2} = \sqrt{\sum_{m=1}^n (p_m - q_m)^2}$$

e che una palla di centro P e raggio $\rho > 0$ diventa, di conseguenza:

$$B(P, \rho) = \left\{ Q \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\sum_{m=1}^n (p_m - q_m)^2} = d(P, Q) < \rho \right\}$$

Chiamiamo un sottoinsieme di \mathbb{R}^n , U un intorno di $P \in \mathbb{R}^n$ se quest'ultimo contiene una palla centrata in P .

Dimostrare che l'insieme delle classi di intorni in tutti i punti di \mathbb{R}^n forma un sistema di intorni \mathcal{N} , e che dunque $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N})$ forma una topologia.

Esercizio 1.2. Dare all'insieme $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ una topologia, i.e associare ad ogni punto di quest'ultimo un insieme di intorni che soddisfi le proprietà della definizione 1.1.

Se abbiamo due spazi topologici, X e Y , possiamo definire in maniera naturale una topologia sul loro prodotto cartesiano $X \times Y$ indotta dalle corrispettive topologie degli spazi d'origine.

Definizione 1.2 (Topologia prodotto). *Siano X e Y due spazi topologici. Chiamiamo un insieme $S \subset X \times Y$ un intorno di $P = (x, y) \in X \times Y$ se esiste un intorno U di x in X e un intorno V di y in Y tale che $U \times V \subset S$. Tale affiliazione di classi di insiemi per ogni punto di $X \times Y$ forma un sistema d'intorni su $X \times Y$. Chiamiamo la topologia così ottenuta la topologia prodotto di X e Y .*

Proposizione 1.1. *La topologia prodotto appena definita è una topologia su $X \times Y$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che gli intorni appena definiti soddisfano gli assiomi necessari.

1. Supponiamo S sia un intorno di (x, y) . Allora, per ipotesi sappiamo che esiste un intorno U di x in X e un intorno V di y in Y tale che $U \times V \subset S$. Ma essendo X e Y spazi topologici, i loro intorni soddisfano gli assiomi necessari, e dunque sappiamo che $x \in U$ e $y \in V$. Da ciò segue che $(x, y) \in U \times V \subset S$ e dunque $(x, y) \in S$.
2. Supponiamo che T sia un sottoinsieme di $X \times Y$ che contiene al suo interno un intorno S di (x, y) . Per ipotesi avremo che esistono un intorno U di x e un intorno V di y tale che $U \times V \subset S \subset T$ e dunque T è un intorno di (x, y) .
3. Supponiamo che S sia un intorno di (x, y) . Allora esiste un intorno U di x e un intorno V di y tale che $U \times V \subset S$. Ma, essendo X e Y degli spazi topologici, avremo che i loro intorni soddisfano gli assiomi della definizione 1.1. Dunque, esisterà un intorno \tilde{U} di x tale che U è un intorno di ogni punto di \tilde{U} , e un intorno \tilde{V} di y tale che V è un intorno di ogni punto di \tilde{V} . Da ciò segue che S sarà un intorno di ogni punto dell'intorno $\tilde{U} \times \tilde{V}$.
4. Supponiamo di avere due intorni di (x, y) , S e \tilde{S} . Allora sappiamo, per ipotesi, dell'esistenza di due intorni U e \tilde{U} di x , e di due intorni V e \tilde{V} di y , tale che $U \times V \subset S$ e $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset \tilde{S}$. Ma X e Y sono spazi topologici, e dunque gli intorni appena menzionati soddisfano gli assiomi della definizione 1.1, avremo che anche $U \cap \tilde{U}$ sarà un intorno di x e anche $V \cap \tilde{V}$ sarà un intorno di y .

Prendiamo ora in considerazione l'insieme $S \cap \tilde{S}$. Notiamo, che, siccome $U \times V \subset S$ e $\tilde{U} \times \tilde{V} \subset \tilde{S}$ avremo che $(U \times V) \cap (\tilde{U} \times \tilde{V}) \subset S \cap \tilde{S}$. Ma $(U \times V) \cap (\tilde{U} \times \tilde{V}) = (U \cap \tilde{U}) \times (V \cap \tilde{V}) \subset S \cap \tilde{S}$, e dunque $S \cap \tilde{S}$ è un intorno di (x, y) .

□

Esercizio 1.3. Sia A l'insieme $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Scegliere a piacimento due sistemi di intorni \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 in modo da formare i due spazi topologici $X := (A, \mathcal{N}_1)$ e $Y := (A, \mathcal{N}_2)$. Dopodiché scrivere i sistemi di intorni della topologia prodotto $X \times Y$ per ogni punto di $A \times A$.

1.1.3 Insiemi aperti e punti interni

Una volta definito un concetto di vicinanza nel nostro spazio, è ora di definire matematicamente cosa voglia dire "bordo" di un insieme, e cosa voglia dire appartenere all'interno di un insieme.

Come prima, ragioniamo prima intuitivamente: rozzamente, potremmo dire che un punto "interno" a una figura è un punto immerso in quest'ultima, ossia circondato in ogni direzione da altri punti dell'insieme. In caso contrario, diremo di avere un punto del bordo.

Avendo ora introdotto in modo rigoroso il concetto di vicinanza in uno spazio, possiamo definire cosa voglia dire essere "all'interno" di una figura nel seguente modo:

Definizione 1.3. Sia S un insieme in uno spazio topologico X . Un punto $p \in S$ è detto punto interno di S se esiste un intorno di p , U , tale che $U \subset S$. L'insieme di tutti i punti interni di un insieme S è detto parte interna di S , denotata con:

$$\text{int}(S) = \{p \in X \mid \exists U \in \mathcal{N}(p), \text{ t.c } U \subset S\} \quad (1.1)$$

Definizione 1.4 (Insieme aperto). Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X . Diremo che S è un insieme aperto se ogni punto di S è un punto interno, o in altre parole, se S è la sua parte interna:

$$S = \text{int}(S)$$

Esempio 1.2. Sia $(a, b) \in \mathbb{R}$ un intervallo aperto della linea reale. Verifichiamo che tale intervallo aperto sia effettivamente un insieme aperto sotto la definizione appena data di aperto.

Sia $x \in (a, b)$. Chiamiamo $V_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta)$ un δ -intorno centrato a x , dove $\delta > 0$. Visualizzandolo graficamente:

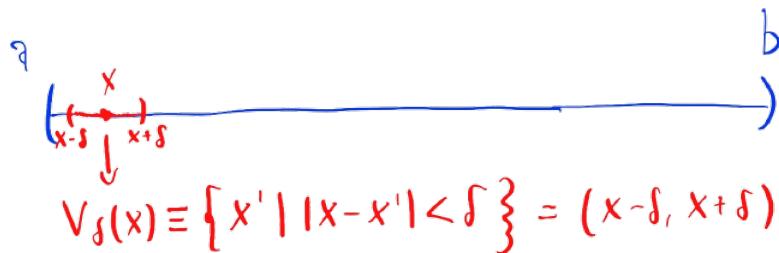


Figura 1.1: δ -intorno centrato ad x .

Dobbiamo dimostrare che possiamo scegliere un $\delta > 0$ per il quale tale intorno rientra nell'insieme (a, b) . Notiamo che, essendo $x \in (a, b)$, avremo che $a < x < b$. Troviamo le distanze di x da a e da b , e diremo Δ il minore tra le due, $\Delta := \min\{|x - a|, |x - b|\}$. Graficamente:

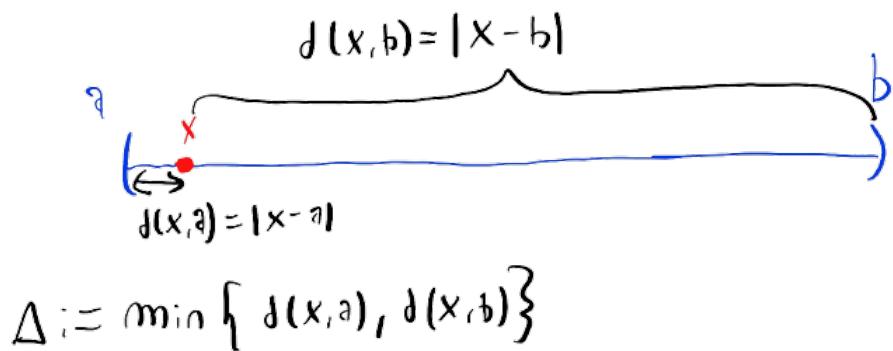


Figura 1.2: Distanze di x dagli estremi a e b visualizzate graficamente.

Sceglieremo allora δ come $\frac{\Delta}{2}$. Dimostriamo che $V_\delta(x)$ è un sottoinsieme di (a, b) : sia $y \in V_\delta(x)$, allora $|x - y| < \delta = \frac{\Delta}{2}$. Per appartenere ad (a, b) , y deve essere strettamente minore di b e strettamente maggiore di a . Notiamo che, espandendo $|x - y| < \delta = \frac{\Delta}{2}$ otteniamo:

$$a < x - \frac{\Delta}{2} < y < \frac{\Delta}{2} + x < b$$

dunque $y \in (a, b)$, cioè (a, b) è un insieme aperto rispetto alla topologia definita prima su \mathbb{R} .

Introduciamo ora un importante risultato circa gli insiemi aperti di uno spazio topologico.

Teorema 1.1. Sia X uno spazio topologico, allora:

1. L'unione di un insieme arbitrario di aperti è un aperto in X , in simboli: se $\{U_\alpha\}_\alpha$ è una collezione di aperti di X , allora $\bigcup_\alpha U_\alpha$ è un aperto.

2. L'intersezione di un numero finito di aperti è un aperto in X , in simboli:

se $\{U_i\}_{i=1}^n$ è una collezione finita di aperti in X , $\bigcap_{i=1}^n U_i$ è un aperto.

3. L'intero insieme X e l'insieme vuoto \emptyset sono aperti.

Dimostrazione. 1. Sia $x \in \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, allora $x \in U_{\alpha^*}$ per almeno un α^* . Ergo x è un punto interno di U_{α^*} , cioè esiste un intorno di x , V_x contenuto in U_{α^*} , $V_x \subset U_{\alpha^*}$. Ma essendo contenuto in U_{α^*} , V è anche contenuto in $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ e dunque $\bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ è un aperto.

2. Sia $x \in \bigcap_{j=1}^n U_j$, allora $x \in U_j \forall j \in [1, n] \cap \mathbb{N} \implies \forall j, \exists V_{xj} \subset U_j$, dove V_{xj} è un intorno di x .

Notiamo che, come conseguenza immediata degli assiomi di intorno (basta applicare l'induzione matematica) avremo che intersezioni finite di intorni di un punto sono un intorno, e dunque $\bigcap_{j=1}^n V_{xj}$ è un intorno di x . Ma notando che $\bigcap_{j=1}^n V_{xj} \subset \bigcap_{j=1}^n U_j$, avremo che $\bigcap_{j=1}^n U_j$ è senza dubbio un aperto.

3. L'insieme vuoto, non avendo punti, è banalmente un aperto. Mentre per quanto riguarda l'insieme intero, altrettanto banalmente, avremo che ogni punto ha almeno un intorno, e tale intorno è contenuto in X .

□

Dimostriamo ora alcuni fatti importanti sugli insiemi aperti e sulle parti interne:

Proposizione 1.2. *Sia A un insieme in uno spazio topologico X , allora la sua parte interna $\text{int}(A)$ è un aperto, ed inoltre ogni aperto contenuto in A è contenuto in $\text{int}(A)$.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima che $\text{int}(A)$ è un aperto: $p \in \text{int}(A)$ vuol dire che p è un punto interno di A , i.e. esiste un intorno U di p contenuto in A , $U \subset A$. Essendo U un intorno di p , esso rispetta gli assiomi di intorno presentati nella definizione 1.1 e allora per 1.1(3) avremo che esiste un intorno V di p tale che U è un intorno di ogni punto di $V \implies V \subset \text{int}(A)$. Abbiamo trovato un intorno contenuto in $\text{int}(A)$ per ogni punto di $\text{int}(A)$. Ma questa è precisamente la definizione di aperto.

Dimostriamo ora la seconda asserzione della proposizione: supponiamo di avere un aperto $\tilde{U} \subset A$. Ma per la definizione di aperto, potremo trovare un intorno W di p contenuto in $\tilde{U} \forall p \in \tilde{U}$. Avremo dunque $W \subset \tilde{U} \subset A$, da cui segue, per la definizione di punto interno, che p è un punto interno di A , e dunque $p \in \text{int}(A)$. \square

Proposizione 1.3 (Caratterizzazione di un intorno). *U è un intorno di $p \iff U$ contiene un aperto contenente p .*

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando l'implicazione diretta (\implies). Supponiamo che U sia un intorno di p , in tal caso avremo che banalmente $p \in \text{int}(U)$, in quanto esiste un intorno di p contenuto in U , U stesso. Per la proposizione precedente, $\text{int}(U)$ è aperto, ed essendo $\text{int}(U) \subset U$, abbiamo dimostrato l'implicazione diretta.

Il converso (\iff) è altrettanto immediato: supponiamo che U contenga un aperto W contenente p ; allora, per la definizione di aperto, esisterà un intorno V di p con $V \subset W$. Ma allora $V \subset U$, e per il secondo assioma della definizione 1.1, avremo che anche U sarà un intorno. \square

Proposizione 1.4 (Caratterizzazione alternativa di un aperto). *Un insieme U di uno spazio topologico è aperto se e solo se esso è un intorno di ognuno dei suoi punti*

Dimostrazione. Cominciamo dall'implicazione diretta (\implies). Se U è un aperto, allora $\forall p \in U$ esiste un intorno W di p , tale che $W \subset U$. Ma allora, per il secondo assioma della definizione 1.1, U è un intorno di ognuno dei suoi punti.

Per l'inverso, invece, supponendo che U sia un intorno di ognuno dei suoi punti, giungeremo alla conclusione che ciò implica che ognuno dei suoi punti p sia un punto interno (in quanto esiste un intorno $p \in U \subset U$). Ma allora $U = \text{int}(U)$ e dunque è un aperto. \square

I risultati appena introdotti ci saranno d'aiuto per la costruzione di una nuova definizione di topologia, equivalente a quella data poc'anzi. Per quale motivo dovremmo volere una definizione alternativa? Perché quella appena data, seppur intuitiva, è spesso difficile da utilizzare. La convenzione è infatti quella di definire una topologia a partire dalla classe dei suoi insiemi aperti, ed è anche la convenzione che utilizzeremo in questo testo da questo momento in poi.

1.1.4 Definizione alternativa di topologia

Teorema 1.2. *Sia X un insieme, e \mathcal{T} una classe di sottoinsiemi di X con le seguenti proprietà:*

$$1. \forall \{U_\alpha\}_\alpha \subset \mathcal{T}, \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}.$$

$$2. \forall \{U_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{T}, \bigcap_{j=1}^n U_j \in \mathcal{T}.$$

$$3. X, \emptyset \in \mathcal{T}.$$

Allora esiste un unico modo di dotare X di un sistema d'intorni in modo tale da rendere gli insiemi di \mathcal{T} gli insiemi aperti di X , ed è il seguente:
Diremo che un insieme $U \subset X$ è un intorno di $p \in X$ se esiste un insieme $V \in \mathcal{T}$ tale che $p \in V \subset U$.

Dimostrazione. Per dimostrare questo teorema, dimostriamo anzitutto che gli intorni così definiti soddisfano gli assiomi della definizione 1.1, cioè sono effettivamente un sistema d'intorni per X , e dopodiché dimostriamo che gli aperti sotto la topologia indotta da questo sistema di intorni sono precisamente gli elementi dell'insieme \mathcal{T} .

1. Sia U un intorno di p . Allora per la definizione appena data, esisterà un insieme $V \in \mathcal{T}$ tale che $p \in V \subset U$. Ma allora $p \in U$
2. Sia A un insieme di X e U un intorno di p contenuto in A , $U \subset A$. Per la definizione appena data d'intorno, avremo che esisterà un insieme $V \in \mathcal{T}$ tale che $p \in V \subset U \subset A$, quindi A è un intorno di p .
3. Sia U un intorno di p , allora esiste un elemento V di \mathcal{T} contenuto in U . Notiamo che V è un intorno, in quanto è un insieme di \mathcal{T} ed è banalmente contenuto in se stesso. Inoltre, avremo $\forall q \in V, q \in V \subset U$, e dunque U è un intorno di ogni punto di V .
4. Infine siano U e \tilde{U} due intorni di p , allora esistono due elementi di \mathcal{T} , $V, \tilde{V} \in \mathcal{T}$, tale che $p \in V \subset U$ e $p \in \tilde{V} \subset \tilde{U}$. Notiamo che $p \in V \cap \tilde{V} \subset U \cap \tilde{U}$, e dunque $U \cap \tilde{U}$ è un intorno di p , siccome $V \cap \tilde{V}$ è un aperto.

Dimostriamo ora che gli aperti di questa topologia sono gli insiemi di \mathcal{T} . Supponiamo che U sia un insieme di \mathcal{T} , allora $\forall q \in U$, avremo che U sarà un intorno di q , in quanto contiene un insieme di \mathcal{T} (sé stesso) contenente q e contenuto in U . Ma allora quest'ultimo è un aperto, in quanto è un intorno di ognuno dei suoi punti.

Conversamente, supponiamo che U sia un aperto; allora esiste un intorno

Z di $p \forall p \in U$. Ma per la definizione di intorno data sopra, avremo che esisterà a sua volta un insieme $V_p \in \mathcal{T}$, tale che $p \in V_p \subset Z \subset U$. Da ciò segue che potremo scrivere il nostro aperto U come $U = \cup_{p \in U} V_p$. Essendo $V_p \in \mathcal{T} \forall p$, avremo che $\cup_{p \in U} V_p$ sarà anch'esso un elemento di \mathcal{T} . Infine, la proposizione 1.3 ci assicura che questa sia l'unica topologia in cui tali insiemi sono la classe degli insiemi aperti. \square

Molto spesso in corsi di topologia generale viene direttamente introdotto il concetto di spazio topologico con la definizione riportata qui sopra. Nonostante questo sia l'insieme di assiomi più pratico da utilizzare, definire direttamente questo concetto in questo modo potrebbe far perdere un po' dell'intuizione dietro l'idea di spazio topologico ad un neofita, rendendola ai suoi occhi una definizione astrusa e senza senso. La digressione fatta in precedenza dunque era perlopiù per aiutare il lettore a comprendere cosa si celasse dietro queste definizioni astratte in termini intuitivi.

Nota 1.1. *La classe di insiemi aperti \mathcal{T} viene spesso chiamata topologia, e utilizzeremo anche noi questa convenzione. Gli insiemi aperti nella topologia indotta da \mathcal{T} verranno chiamati insiemi \mathcal{T} -aperti, e un insieme X dotato di una topologia, (X, \mathcal{T}) verrà chiamato spazio topologico.*

Avendo ora dimostrato che queste due definizioni sono equivalenti, procederemo a lavorare con quest'ultima. Prima di continuare con la disquisizione sulla teoria, tuttavia, forniamo alcuni esempi esplicativi:

Esempio 1.3. *Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali, e \mathcal{T} la classe di sottoinsiemi di \mathbb{N} composta da \emptyset e tutti i sottoinsiemi della forma $S_n = \{n, n + 1, n + 2, n + 3, \dots\}$:*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Questa classe di sottoinsiemi forma una topologia su \mathbb{N} ; verifichiamolo:

1. *Banalmente, da come abbiamo definito \mathcal{T} , avremo $\mathbb{N}, \emptyset \in \mathcal{T}$.*
2. *Sia $\{S_n\}_{n \in I}$, $I \subset \mathbb{N}$ una collezione di sottoinsiemi del tipo specificato sopra. Essendo \mathbb{N} un insieme totalmente ordinato con un elemento minima, I , essendo un suo sottoinsieme, avrà un elemento minima che chiameremo $m \in I$. Osservando che:*

$$\bigcup_{n \in I} S_n = S_m \in \mathcal{T} \quad (1.2)$$

concludiamo che l'unione di aperti è un aperto.

3. Siano $S_m, S_l \in \mathcal{T}$. Allora, $S_m \cap S_l = S_{\max\{m,l\}} \in \mathcal{T}$.

Dunque i numeri naturali con questa classe di sottoinsiemi forma una topologia, $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$.

Esempio 1.4 (La topologia discreta su X). Sia X un qualunque insieme, allora possiamo definire banalmente su quest'ultimo la seguente topologia, che chiameremo topologia discreta, selezionando l'insieme degli aperti \mathcal{T} come l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X (chiamato l'insieme potenza e indicato con $\mathcal{P}(X)$):

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$$

Esempio 1.5 (La topologia indiscreta su X). Sia X ancora un insieme qualunque, allora possiamo definire una topologia su quest'ultimo selezionando l'insieme degli aperti \mathcal{T} come:

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$$

chiamiamo tale topologia la **topologia indiscreta su X**.

Proposizione 1.5. Sia $\{\mathcal{T}_\alpha\}_\alpha$ una collezione di topologie su un insieme X, allora l'intersezione $\bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$ è una topologia su X.

Dimostrazione. 1. Essendo \mathcal{T}_α delle topologie, avremo $X, \emptyset \in \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha$, da cui $X, \emptyset \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$.

2. Sia $\{U_\beta\} \subset \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$. Allora $\{U_\beta\}_\beta \subset \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha$, e dunque $\bigcup_\beta U_\beta \in \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha$, da cui segue che $\bigcup_\beta U_\beta \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$.

3. Sia $\{U_j\}_{j=1}^n \subset \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$. Allora, analogamente a prima, $\{U_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha$, da cui segue che $\bigcap_{j=1}^n U_j \in \mathcal{T}_\alpha \forall \alpha$, e dunque $\bigcap_{j=1}^n U_j \in \bigcap_\alpha \mathcal{T}_\alpha$.

□

Esercizio 1.4. Convincersi, fornendo un controesempio, che generalmente un'unione di topologie su un insieme X **non** forma una topologia su X.

Esercizio 1.5. Trovare tutte le topologie dell'insieme $\{\alpha, \beta\}$.

1.1.5 Punti di accumulazione, insiemi chiusi e chiusura di un insieme

Una volta introdotto nel nostro insieme un concetto di vicinanza, un concetto di interno e di "apertura", sorge la questione di come definire in modo altrettanto rigoroso un concetto di "bordo" e di chiusura.

Usiamo ancora l'intuizione: pensiamo ad una figura aperta V (senza bordo) che possiamo pensare come sottoinsieme di un insieme più grande che chiameremo \mathcal{U} .

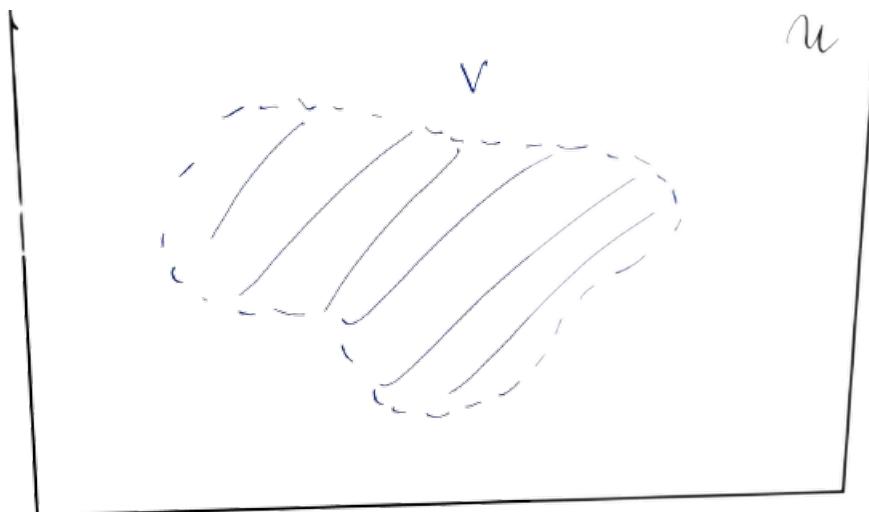


Figura 1.3: La nostra figura V .

Abbiamo detto che un punto interno è un punto "circondato" da altri punti di un insieme, ed un insieme aperto è un insieme in cui tutti i punti sono interni. Vediamo che, il complemento in \mathcal{U} di V , sarà una figura con un "contorno", e dunque, in questo senso geometrico/intuitivo, una figura "chiusa".

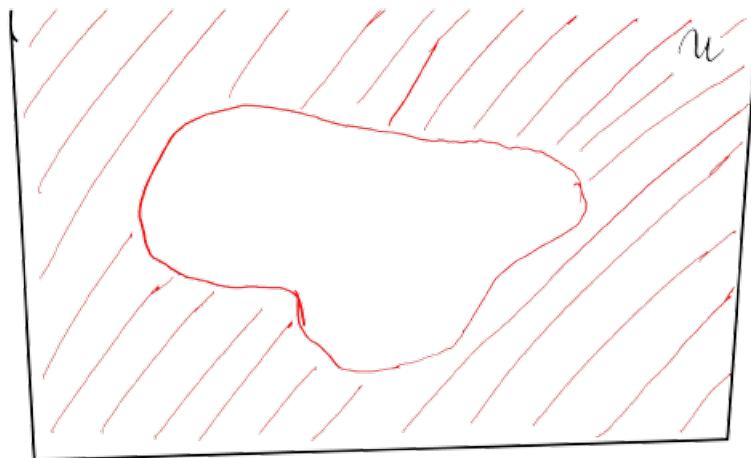


Figura 1.4: Complemento di V in \mathcal{U} .

Questo ragionamento preliminare ci motiva a definire gli insiemi chiusi in maniera rigorosa nel seguente modo:

Definizione 1.5 (Insieme chiuso). *Un insieme $A \subset X$ si dice chiuso se il suo complemento in X , $X \setminus A = A^c$ è un insieme aperto.*

Proposizione 1.6. *Un insieme U di uno spazio topologico X è un insieme aperto se e solo se il suo complemento in X , U^c è chiuso.*

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di chiuso. □

Nota 1.2. *È importante non lasciarsi ingannare dal fatto che nel gergo comune la parola chiuso e la parola aperto siano opposti, i.e una porta è chiusa \iff una porta non è aperta e viceversa. In topologia, un insieme può essere tanto solo chiuso o solo aperto, come anche chiuso e aperto allo stesso tempo (in questo caso si chiama di insiemi "clopen"), o anche nessuno dei due.*

Esercizio 1.6. *Convincersi di questo fatto dimostrando che, in qualunque insieme X , sotto qualsiasi topologia \mathcal{T} , gli insiemi $X, \emptyset \in \mathcal{T}$ sono sia chiusi che aperti.*

Esercizio 1.7. *Sia $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ la topologia sui numeri naturali introdotta prima, determinare su quest'ultima l'insieme degli insiemi chiusi.*

Esercizio 1.8. *Sia $A = \{\alpha, \beta\}$. Per ognuna delle topologie su quest'insieme trovate prima, trovare l'insieme dei chiusi.*

Diamo ora un'altra importante definizione topologica, ossia quella di "punto limite" o "punto di accumulazione".

Definizione 1.6 (Punto di accumulazione). *Sia $S \subset X$ un insieme in uno spazio topologico, e $p \in X$ un punto. Diremo che p è un punto di accumulazione di S , se ogni aperto G_p di p contiene almeno un punto di S diverso da p . In simboli:*

$$(G_p \setminus \{p\}) \cap S \neq \emptyset$$

L'insieme di tutti i punti di accumulazione di un insieme S è detto l'insieme derivato di S , indicato spesso con $\text{der}(S)$ o $\text{acc}(S)$.

Data questa nuova definizione, dimostriamo ora un'importante caratterizzazione degli insiemi chiusi:

Proposizione 1.7. *Un insieme $S \subset X$ di uno spazio topologico è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione.*

Dimostrazione. Partiamo dall'implicazione diretta (\implies). Essendo S chiuso, sappiamo che S^c è aperto. Notiamo che i due sono disgiunti, cioè $S \cap S^c = \emptyset$. Supponiamo per assurdo che un punto limite $p \in \text{der}(S)$ di S non sia in S , $p \notin S \iff p \in S^c$. Ma S^c è un aperto e $(S^c \setminus \{p\}) \cap S = \emptyset$, cioè $p \notin \text{der}(S)$, una contraddizione. Dunque $\text{der}(S) \subset S$.

Per il converso (\iff), invece, basta notare che se $\text{der}(S) \subset S$, avremo che per ogni punto p di S^c , non essendo un punto di accumulazione di S , esisterà un aperto di p , G_p tale che $(G_p \setminus \{p\}) \cap S = \emptyset$. Siccome p non appartiene ad S , tuttavia, possiamo scrivere semplicemente $G_p \cap S = \emptyset$. Abbiamo trovato quindi un aperto disgiunto con S per ogni punto di S^c . Quindi possiamo scrivere S^c come:

$$S^c = \bigcup_{p \in S^c} G_p \quad (1.3)$$

che per gli assiomi di aperti su una topologia è un aperto, e dunque S è chiuso. \square

Definizione 1.7 (Chiusura di un insieme). *Sia S un insieme di uno spazio topologico X . Allora la chiusura di S è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono S . In simboli:*

$$\overline{S} = \bigcap_{C \text{ chiuso ; } S \subset C} C$$

Proposizione 1.8. *La chiusura di un insieme S , \overline{S} è un chiuso. Inoltre, se C è un chiuso tale che $S \subset C$, allora $S \subset \overline{S} \subset C$.*

Dimostrazione. Entrambe seguono banalmente dalla definizione di chiusura fornita sopra: vediamo che la chiusura di un insieme è un chiuso perché intersezione arbitraria di chiusi, ed inoltre, essendo l'intersezione di tutti i chiusi contenenti S , avremo che se un chiuso contiene S , l'intersezione di quest'ultimo con potenzialmente altri insiemi è contenuta in esso. \square

Proposizione 1.9. *Sia S un insieme in uno spazio topologico X , allora S è chiuso se e solo se è uguale alla sua chiusura, i.e $S = \bar{S}$.*

Dimostrazione. L'implicazione inversa è banalmente vera in quanto \bar{S} è un chiuso, come dimostrato nella proposizione precedente. Per l'implicazione diretta, invece, basta notare che se S è un chiuso, allora banalmente sarà il superset chiuso di S "minimale", e dunque $\bar{S} = \bigcap_{C \text{ chiuso ; } S \subset C} C = S$. \square

Esercizio 1.9. *Dimostrare che se A è un sottoinsieme di B allora ogni punto di accumulazione di A è un punto di accumulazione di B , i.e:*

$$A \subset B \implies \text{der}(A) \subset \text{der}(B)$$

Teorema 1.3. *Sia S un insieme di uno spazio topologico, allora:*

$$\bar{S} = S \cup \text{der}(S) \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo risultato, dimostriamo prima che $S \cup \text{der}(S)$ sia un chiuso, i.e che $(S \cup \text{der}(S))^c$ è un aperto. Basta osservare che, se $s \in (S \cup \text{der}(S))^c$, allora esiste un aperto G_s di s tale che

$$G_s \cap S = \emptyset$$

in quanto $s \notin \text{der}(S)$ e $s \notin S$. Ma essendo $G_s \cap S = \emptyset$, avremo che ogni elemento di G_s , g , non sarà un punto di accumulazione di S , $g \notin \text{der}(S)$ e dunque $G_s \cap \text{der}(S) = \emptyset$.

Da ciò segue che possiamo scrivere l'insieme $(S \cup \text{der}(S))^c$ come un'unione di aperti nel seguente modo:

$$(S \cup \text{der}(S))^c = \bigcup_{s \in (S \cup \text{der}(S))^c} G_s$$

e dagli assiomi di insiemi aperti, segue che dev'essere un aperto, e dunque $S \cup \text{der}(S)$ è chiuso.

Ora dimostriamo che $\bar{S} = S \cup \text{der}(S)$. Essendo $S \cup \text{der}(S)$ un superset chiuso di S , avremo che $\bar{S} \subset S \cup \text{der}(S)$.

Per l'inclusione inversa, invece, banalmente avremo $S \subset \bar{S}$ per S , mentre per l'insieme derivato basta osservare che:

$$S \subset \bar{S} \implies \text{der}(S) \subset \text{der}(\bar{S})$$

per il risultato dell'esercizio 1.9. Ma \bar{S} è chiuso, e quindi contiene tutti i suoi punti di accumulazione; in altre parole:

$$\text{der}(\bar{S}) \subset \bar{S}$$

e dunque $\text{der}(S) \subset \bar{S}$, da cui segue che $S \cup \text{der}(S) \subset \bar{S}$, e quindi l'asserto $\bar{S} = S \cup \text{der}(S)$. \square

Esercizio 1.10. *Siano R, S due insiemi di uno spazio topologico. Dimostrare che:*

$$\text{der}(R \cup S) = \text{der}(R) \cup \text{der}(S)$$

Esercizio 1.11. *Dimostrare che, dati sempre due insiemi R, S di uno spazio topologico X :*

$$\overline{R \cup S} = \overline{R} \cup \overline{S}$$

1.1.6 Punti interni, bordo ed esterno

Ridefiniamo ora il concetto di punto interno introdotto prima in termini di insiemi aperti:

Definizione 1.8. *Sia S un insieme di uno spazio topologico X . Un punto $p \in S$ è detto punto interno di S se esiste un aperto U di p contenuto in S ; in simboli:*

$$\exists U \in \mathcal{T} \quad p \in U \subset S$$

come prima, scriviamo sempre l'insieme dei punti interni di S come $\text{int}(S)$.

Proposizione 1.10. *La parte interna di un insieme S , $\text{int}(S)$, è l'unione di tutti i sottoinsiemi aperti di S ; in simboli:*

$$\text{int}(S) = \bigcup_{U \text{ aperto } U \subset S} U$$

Dimostrazione. Cominciamo dall'inclusione "diretta" (\subset). Supponiamo che $s \in \text{int}(S)$. Allora, per la definizione data sopra, $\exists U$ aperto tale che $s \in U \subset S$. Sia $\Sigma = \bigcup_{U \text{ aperto } U \subset S} U$ l'unione di tutti i sottoinsiemi aperti di S . Essendo U un sottoinsieme aperto di S , avremo $U \subset \Sigma$ e quindi $s \in \Sigma$.

Per l'inclusione inversa, supponiamo invece che $s \in \Sigma$, dove Σ è la medesima unione definita prima. Notiamo tuttavia che Σ è esso stesso un sottoinsieme aperto di S , e dunque s è un punto interno, ergo $s \in \text{int}(S)$. \square

Corollario 1.1. *Sia S un insieme di uno spazio topologico X , allora:*

1. $\text{int}(S)$ è un aperto.
2. Se U è un sottoinsieme aperto di S , allora $S \subset \text{int}(S)$.
3. $\text{int}(S) \subset S$.
4. S è aperto se e solo se $S = \text{int}(S)$.

Definizione 1.9 (Parte esterna). *Sia S un insieme di uno spazio topologico X . Allora definiamo la parte esterna di S come la parte interna del suo complemento:*

$$\text{ext}(S) = \text{int}(X \setminus S) = \text{int}(S^c)$$

Definizione 1.10 (Bordo di un insieme). *Sia S un insieme di uno spazio topologico X . Chiamiamo bordo di S , indicato in simboli con ∂S , l'insieme dei punti che non appartengono né all'interno né all'esterno di S :*

$$\partial S = X \setminus (\text{int}(S) \cup \text{ext}(S)) = (\text{int}(S) \cup \text{ext}(S))^c$$

Concludiamo questa sottosezione con un ultimo importante risultato:

Teorema 1.4. *Sia S un insieme di uno spazio topologico X . Allora:*

$$\bar{S} = \text{int}(S) \cup \partial S \tag{1.5}$$

Dimostrazione. Osservando che $X = \text{int}(S) \cup \partial S \cup \text{ext}(S)$ avremo che $(\text{int}(S) \cup \partial S)^c = \text{ext}(S)$ e dunque per dimostrare il teorema ci basterà dimostrare che $(\bar{S})^c = \text{ext}(S)$. Per dimostrare l'inclusione diretta, osserviamo che se $p \in (\bar{S})^c$, allora $p \notin \text{der}(S)$ e dunque esiste un aperto U tale che:

$$(U \setminus \{p\}) \cap S = \emptyset$$

ma siccome avremo anche che $p \notin S$, seguirà che l'aperto U ed S saranno disgiunti, e dunque, per la definizione di esterno di un insieme, $p \in \text{ext}(S)$, i.e. $(\bar{S})^c \subset \text{ext}(S)$.

Per l'inclusione inversa, al contrario, supponendo che p sia in $\text{ext}(S)$, e utilizzando la definizione di esterno dato poc'anzi potremo dedurre che esiste un aperto U tale che:

$$p \in U \subset S^c$$

da cui segue immediatamente che $U \cap S \neq \emptyset$, e dunque p non è un punto di accumulazione di S , i.e. $p \notin \text{der}(S)$. Ma, essendo U in S^c , avremo che $p \notin S$, e dunque $p \notin \bar{S}$ i.e. $\text{ext}(S) \subset (\bar{S})^c$.

Pertanto $(\bar{S})^c = \text{ext}(S) = (\text{int}(S) \cup \partial S)^c$. □

1.1.7 Basi

In questa sottosezione introduciamo il concetto di **base di uno spazio topologico**. Per base, qui, intenderemo un insieme di aperti con cui è possibile generare il nostro spazio.

Definizione 1.11 (Base di uno spazio topologico). *Sia (X, \mathcal{T}) uno spazio topologico. Una classe \mathcal{B} di insiemi aperti di X è detta **base** per la topologia \mathcal{T} se ogni aperto $U \in \mathcal{T}$ è l'unione di membri di \mathcal{B} .*

Esercizio 1.12. *Dimostrare che, dato uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) , \mathcal{B} è una base di \mathcal{T} se e solo se per ogni punto p di un aperto U , $p \in U$, esiste un elemento della base $B \in \mathcal{B}$ tale che:*

$$p \in B \subset U$$

A questo punto, dato un insieme X (senza una struttura topologica) e una classe di sottoinsiemi di quest'ultimo, ci chiediamo sotto quali condizioni tale classe formi una base per una topologia su X . Le condizioni ci vengono date dal seguente teorema:

Teorema 1.5. *Sia \mathcal{B} una classe di sottoinsiemi di un insieme non vuoto X . Allora \mathcal{B} sarà una base per una topologia su X se e solo se possiede le seguenti proprietà:*

1. *X è dato dall'unione dei membri di \mathcal{B} , i.e.:*

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

2. *Per ogni $B, \bar{B} \in \mathcal{B}$, $B \cap \bar{B}$ è l'unione di membri di \mathcal{B} , o alternativamente, se $p \in B \cap \bar{B}$ allora esiste un insieme $B_p \in \mathcal{B}$ tale che $p \in B_p \subset B \cap \bar{B}$.*

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando la direzione (\Rightarrow). Supponiamo che \mathcal{B} sia una base di una topologia \mathcal{T} su X ; per la definizione di base avremo che ogni insieme \mathcal{T} -aperto $U \subset X$ potrà essere scritto come unione di elementi di \mathcal{B} . Pertanto, essendo X un aperto, avremo $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Per il secondo punto, invece, osserviamo che gli elementi della base $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ sono aperti, ergo dati due elementi della base $B, \bar{B} \in \mathcal{B}$, avremo che $B \cap \bar{B}$ sarà un aperto per le proprietà degli insiemi aperti. Essendo un aperto, quest'ultimo può essere scritto come unione di elementi di \mathcal{B} . Con ciò abbiamo concluso la dimostrazione della direzione diretta. Supponiamo ora che una classe di sottoinsiemi di X , \mathcal{B} , soddisfi le proprietà 1 e 2. Vogliamo dimostrare che la classe di insiemi \mathcal{T} formata da

tutti i sottoinsiemi di X esprimibili come unioni di elementi di \mathcal{B} sia effettivamente una topologia su X : se ciò è il caso, infatti, avremo ottenuto una topologia di cui \mathcal{B} è banalmente una base.

Cominciamo dalla dimostrazione della proprietà 1.2-1 (i.e la proprietà no.1 del teorema 1.2). Vediamo che tale proprietà è vera per la nostra classe \mathcal{T} : \emptyset , essendo l'unione vuota, è esprimibile come l'unione di elementi di \mathcal{B} , e pertanto $\emptyset \in \mathcal{T}$. Per X , invece, essendo per ipotesi (proprietà 1) esprimibile come unione di elementi di \mathcal{B} , avremo $X \in \mathcal{T}$.

Sia $\{U_\alpha\}_\alpha$ una collezione di elementi di \mathcal{T} . Per come abbiamo definito \mathcal{T} , avremo che $\forall \alpha$ l'insieme U_α sarà esprimibile come unione di elementi di \mathcal{B} , da cui segue che l'unione $\bigcup_\alpha U_\alpha$ sarà a sua volta rappresentabile come unione di elementi di \mathcal{B} , cioè $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$. Ciò dimostra la proprietà 1.2-2.

Siano, infine, $U, V \in \mathcal{T}$ due insiemi di \mathcal{T} . Vediamo che, per la definizione da noi data di \mathcal{T} , avremo che ambedue potranno essere scritti come l'unione di elementi di \mathcal{B} :

$$U = \bigcup_\alpha B_\alpha \quad V = \bigcup_\beta B_\beta ; \quad B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B} \quad \forall \alpha, \beta$$

Usando le proprietà di unioni e intersezioni otterremo:

$$U \cap V = \bigcup_{\alpha, \beta} B_\alpha \cap B_\beta$$

ma per la proprietà 2 della nostra classe \mathcal{B} , sappiamo che $B_\alpha \cap B_\beta$ è un'unione di insiemi di \mathcal{B} , da cui segue che lo sarà anche $U \cap V$, dimostrando così la proprietà 1.2-3. \square

1.1.8 Funzioni continue ed omeomorfismi

Concludiamo questa sezione sulla topologia generale introducendo il concetto di continuità. Tale concetto, come il lettore avrà potuto intuire dal nome, non è altro che una generalizzazione a spazi più generali del concetto di continuità di funzioni reali. L'idea alla base è la stessa: vorremmo idealmente una funzione $f : X \rightarrow Y$ tra spazi topologici che mappa punti del dominio "vicini" a un punto $x \in X$ in punti del codominio "vicini" ad $f(x) \in Y$. Adesso che abbiamo una definizione rigorosa di "vicinanza" sui nostri spazi, possiamo introdurre tale nozione in modo matematicamente rigoroso nel seguente modo:

Definizione 1.12 (Funzione continua in x). *Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra spazi topologici (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') . Diremo che f è **continua in x** , dove qui x è un punto di X , se l'immagine inversa (detta anche pre-immagine) di un intorno di $f(x)$ è un intorno di x , i.e.:*

$$V \in \mathcal{N}_{f(x)} \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{N}_x$$

La definizione in termini di intorni appena data è locale. È possibile dare una definizione globale logicamente equivalente di continuità, questa volta in termini di aperti, nel seguente modo:

Definizione 1.13 (Funzione continua). *Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra spazi topologici (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') . Diremo che f è **continua** (rispetto alle topologie \mathcal{T} e \mathcal{T}') se la pre-immagine $f^{-1}(V)$ di ogni insieme \mathcal{T}' -aperto V di Y è un insieme \mathcal{T} -aperto di X , i.e.:*

$$V \in \mathcal{T}' \implies f^{-1}(V) \in \mathcal{T}$$

Esercizio 1.13. Dimostrare che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è continua se e solo se la preimmagine di ogni elemento di una base \mathcal{B} della topologia su Y è un aperto in X .

Di grande importanza è la nozione di omeomorfismo: il lettore potrà aver incontrato nel suo cammino i concetti di isomorfismi di spazi vettoriali, di gruppi o di anelli. Nella stessa misura in cui gli anzidetti preservavano la struttura algebrica di queste strutture, rappresentando pertanto un'equivalenza algebrica, gli omeomorfismi di spazi topologici preservano le proprietà topologiche (ne definiremo alcune di qui a breve) di uno spazio, e rappresentano un'equivalenza topologica. Diamo dunque la definizione di omeomorfismo:

Definizione 1.14 (Omeomorfismo di spazi topologici). *Siano (X, \mathcal{T}) e (Y, \mathcal{T}') due spazi topologici. Diremo che questi due spazi sono **omeomorfi**, e scriveremo $X \cong Y$, se esiste un'applicazione biettiva $\varphi : X \rightarrow Y$ tale che φ e φ^{-1} sono entrambe funzioni continue. Chiamiamo l'applicazione φ **omeomorfismo**.*

Esercizio 1.14. Dimostrare che la relazione "essere omeomorfo" forma una relazione d'equivalenza tra spazi topologici, i.e dimostrare che tale relazione soddisfa le seguenti proprietà:

- *Riflessiva*: $X \cong X$.
- *Simmetrica* $X \cong Y \implies Y \cong X$.

- *Transitiva* $X \cong Y$ e $Y \cong Z \implies X \cong Z$.

Gli omeomorfismi di spazi topologici preservano alcune proprietà degli spazi: tali proprietà sono dette proprietà topologiche proprio per questo motivo. Elenchiamone alcune (non dimostreremo che esse sono proprietà topologiche in quanto ciò ci sottrarrebbe molto tempo e quest'introduzione si prefigge solo il compito di dare il minimo indispensabile).

Definizione 1.15 (Connessione). *Diremo che uno spazio X è **disnesso** se esso è l'unione di due insiemi aperti disgiunti non vuoti, in simboli:*

$$X = U \sqcup V \quad U, V \text{ aperti} \quad U, V \neq \emptyset$$

se uno spazio non è disnesso, allora diremo che è connesso.

Definizione 1.16 (Spazi di Hausdorff). *Diremo che uno spazio topologico (X, \mathcal{T}) è uno spazio di Hausdorff (o spazio T-2) se per ogni due punti distinti $p, q \in X$ esistono degli aperti disgiunti che li contengono. In simboli:*

$$\forall p, q \in X \quad \exists U_p, U_q \in \mathcal{T} \text{ tale che } U_p \cap U_q = \emptyset \quad \text{con } p \in U_p, q \in U_q$$

1.2 Elementi di topologia Algebrica

Introduciamo ora, in questa sezione, le definizioni e i concetti necessari di topologia algebrica per affrontare questo testo, in modo da renderlo fruibile anche al lettore che non ha preventivamente studiato tale materia. La topologia algebrica, come suggerisce il nome, sfrutta strumenti algebrici (gruppi, anelli etc.) per lo studio di spazi topologici e delle loro proprietà; in particolar modo, l'obiettivo è quello di affidare ad uno spazio una certa struttura algebrica che sia topologicamente invariante, i.e che dati due spazi topologici omeomorfi X e Y , con due strutture algebriche associate A_X e A_Y rispettivamente, si avrà che le due strutture A_X, A_Y saranno isomorfe (vedremo spesso però che tali strutture non risulteranno invarianti solo rispetto ad omeomorfismi, ma anche rispetto ad altre relazioni di equivalenza su spazi topologici più "larghe" come l'equivalenza omotopica di spazi).

Cominciamo questa sezione introducendo il concetto di omotopia e di gruppo fondamentale.

1.2.1 Omotopia

Immaginiamo di avere un disco ed una regione anulare (vedi figura sotto).

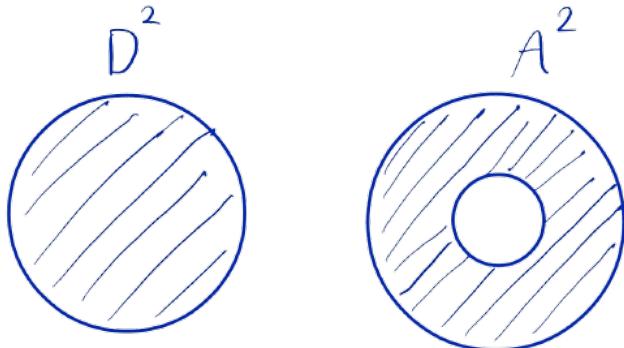


Figura 1.5: Un disco D^2 e una regione anulare A^2 .

Possiamo esplicitamente verificare che sarà molto difficile dimostrare che i due spazi in questione siano o non siano omeomorfi controllando le loro proprietà topologiche a noi note (vediamo, ad esempio, che entrambi gli spazi sono di Hausdorff e sono connessi); dovremo dunque trovare un distinguo di altra natura. La risposta intuitiva immediata sarebbe quella di dire che uno spazio presenta un buco mentre l'altro no; come possiamo, tuttavia, rendere questa affermazione matematicamente rigorosa? È per questa necessità che introdurremo il concetto di "omotopia" e di "cammini omotopici".

Definiamo anzitutto il concetto di "cammino" in un generale spazio topologico X :

Definizione 1.17 (Cammino in uno spazio topologico). *Chiameremo una funzione continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, i.e. una funzione continua dall'intervallo unitario $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ in X , cammino (o curva) in uno spazio topologico X . Chiameremo $\gamma(0) = x \in X$ e $\gamma(1) = y \in X$ gli estremi di γ , e diremo che quest'ultima è **chiusa** se i due coincidono, i.e. se $\gamma(0) = \gamma(1)$.*

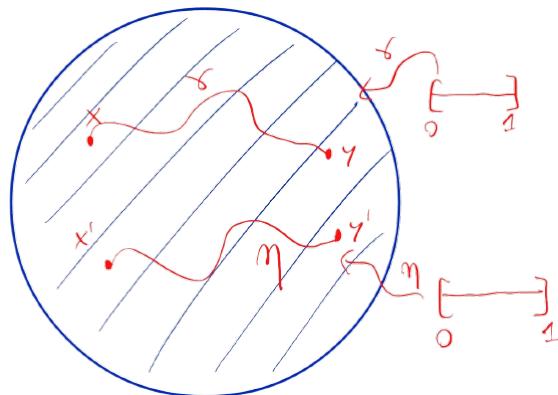


Figura 1.6: Visualizzazione di cammini su uno spazio.

Siamo ora pronti ad elaborare una strategia per "individuare i buchi di uno spazio" utilizzando il concetto di "deformabilità" di una curva in un'altra che introdurremo qui di seguito.

Definizione 1.18 (Cammini omotopi). *Siano γ ed η due cammini su X , cioè due funzioni continue dall'intervallo $[0, 1]$ in X : allora diremo che questi due sono omotopi in X se esiste una funzione continua $F : I^2 \rightarrow X$, dove qui $I^2 := [0, 1] \times [0, 1] = \{(s, t) ; 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\}$, tale che $F|_{s \times \{0\}} = F(s, 0) = \gamma(s)$ e $F|_{s \times \{1\}} = F(s, 1) = \eta(s)$. In tal caso, scriveremo $\gamma \simeq \eta$.*

L'intuizione geometrica dietro l'idea di omotopia è quella di deformare continuamente una curva nell'altra con una funzione continua $F(s, t)$ in cui possiamo intuitivamente vedere il secondo parametro t come un parametro temporale: tale funzione, nell'istante $t = 0$ è pari alla prima curva $\gamma(s)$, e nell'istante $t = 1$ è pari alla seconda curva $\eta(s)$, mentre quando assume valori strettamente compresi a 0 ed 1, $0 < t' < 1$, possiamo visualizzare $F(s, t')$ come una curva "intermedia" a γ ed η , come illustrato nell'immagine seguente:

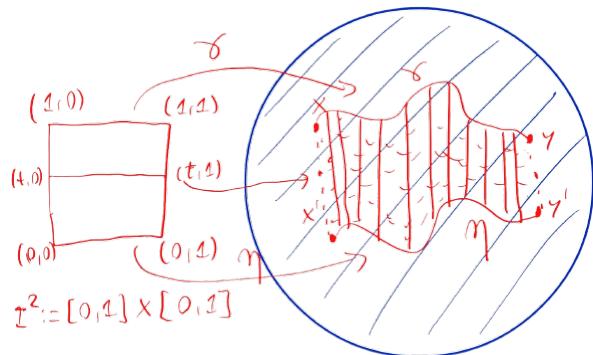


Figura 1.7: Cammini omotopi.

L'idea di omotopia è estendibile anche a due generali funzioni continue nel seguente modo:

Definizione 1.19 (Omotopia di due funzioni continue). *Siano X e Y due spazi topologici, e siano $f, g : X \rightarrow Y$ due funzioni continue da X in Y . Chiameremo f e g funzioni omotope su X (e scriveremo $f \simeq g$) se esiste una funzione continua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, $(x, t) \mapsto F(x, t)$, tale che $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$.*

L'idea dietro è sempre la stessa di quella di prima (deformare continuamente una funzione nell'altra con un parametro temporale t), e vediamo che l'omotopia di cammini è "contenuta" in quest'ultima. Lavoriamo ora su un esempio pratico per "acclimatare" il lettore alla nuova nozione appena introdotta:

Esempio 1.6. *Dimostrare che \forall continue $f, \phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \simeq \phi$, cioè che per ogni due cammini f e ϕ sullo spazio euclideo n -dimensionale essi saranno omotopi.*

Dimostrazione: *Esplicitiamo le coordinate dell'immagine di tali funzioni, i.e.:*

$$f(s) = \langle f_1(s), f_2(s), \dots, f_n(s) \rangle$$

$$\phi(s) = \langle \phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s) \rangle$$

Costruiamo ora la seguente funzione F , che definiremo come:

$$F(s, t) := \langle (1 - t)f_1(s) + t\phi_1(s), (1 - t)f_2(s) + t\phi_2(s), \dots, (1 - t)f_n(s) + t\phi_n(s) \rangle$$

dove qui $s, t \in [0, 1]$. È immediato verificare che $F(s, 0) = f(s)$ e $F(s, 1) = \phi(s)$, ed altrettanto immediato è osservare che tale funzione è continua

(ricordando la nozione di continuità su funzioni da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^n e sfruttando la continuità data per assunto di f e ϕ).

Proposizione 1.11. *L'omotopia di cammini è una relazione d'equivalenza tra cammini su uno spazio topologico X .*

Dimostrazione. Enumeriamo le proprietà da dimostrare, cominciando dalla riflessiva:

- Per la riflessiva, data una $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, basta porre $F(s, t) = \gamma(s)$, dove qui $0 \leq t \leq 1$: avremo che la F così definita sarà continua in quanto γ è continua per ipotesi, ed inoltre avremo banalmente $F(s, 0) = \gamma(s) = F(s, 1)$, da cui segue $\gamma \simeq \gamma$.
- Per la simmetrica, dati due cammini γ ed η , tale che $\gamma \simeq \eta$, vogliamo dimostrare che $\eta \simeq \gamma$:
Per ipotesi sappiamo dell'esistenza di una funzione continua $F : I^2 \rightarrow X$, tale che $F(s, 0) = \gamma(s)$ e $F(s, 1) = \eta(s)$: otteniamo l'omotopia desiderata $\eta \simeq \gamma$ con la funzione continua $\tilde{F} : I^2 \rightarrow X$ definendola come $\tilde{F}(s, t) := F(s, 1 - t)$.
- Infine, per la transitiva, supponiamo di avere 3 cammini $\gamma, \eta, \nu : [0, 1] \rightarrow X$, omotopi a coppie, i.e $\gamma \simeq \eta$ e $\eta \simeq \nu$. Per ipotesi, avremo una funzione continua F che dà l'omotopia tra γ ed η , ed una funzione continua G che dà l'omotopia tra η e ν . Per costruire un'omotopia tra γ e ν ci serviremo della seguente funzione:

$$H(s, t) := \begin{cases} F(s, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Osserviamo che: $H(s, 0) = F(s, 0) = \gamma(s)$ e $H(s, 1) = G(s, 1) = \nu(s)$. L'unica cosa che rimane da verificare è la continuità di H : osserviamo che per $t \neq \frac{1}{2}$ essa sarà evidentemente continua per la continuità di F e G data per assunto, e dunque dovremo verificare la continuità solo nel punto $t = \frac{1}{2}$.

Sia U un intorno di $H(s, \frac{1}{2})$, dove qui s è un generico punto in $[0, 1]$. Per la continuità di F , avremo che esiste un $\delta_1 > 0$ tale che:

$$|s' - s| < \delta_1 \quad e \quad |2t' - 1| < 2\delta_1 \implies F(s', 2t') \in V_1$$

dove qui V_1 è un intorno di $F(s, 1)$. Ma $F(s, 1) = H(s, \frac{1}{2})$ e dunque $F(s', 2t') \in U$. Analogamente, per la continuità di G , avremo che esiste un $\delta_2 > 0$ tale che:

$$|s' - s| < \delta_2 \quad e \quad |(2t' - 1) - 0| < 2\delta_2 \implies G(s', 2t' - 1) \in V_2$$

dove qui V_2 è un intorno di $G(s, 0)$. Ma $G(s, 0) = H(s, \frac{1}{2})$ e dunque $G(s', 2t' - 1) \in U$.

Ora ponendo $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ avremo che:

$$|s' - s| < \delta \quad e \quad |t' - \frac{1}{2}| < \delta \implies H(s', t') \in U$$

e dunque la funzione H è continua.

□

Tornando all'esempio precedente, tuttavia, ci accorgiamo che per poter fare uso di questa nozione per i nostri scopi geometrici abbiamo bisogno di "fissare" in qualche modo i punti d'inizio e di fine delle due curve e far sì che coincidano. Questo ci motiva ad introdurre la seguente nozione:

Definizione 1.20 (Omotopia rispetto agli estremi). *Siano $\gamma, \eta : [0, 1] \rightarrow X$ due cammini tale che $\gamma(0) = \eta(0) = x$ e $\gamma(1) = \eta(1) = y$. Diremo che γ ed η sono cammini omotopi rispetto agli estremi x e y se esiste una funzione continua $F : I^2 \rightarrow X$ tale che $F(s, 0) = \gamma(s)$, $F(s, 1) = \eta(s) \forall s \in [0, 1]$ e $F(0, t) = x$, $F(1, t) = y \forall t \in [0, 1]$.*

Geometricamente parlando, la nostra funzione F mapperà la retta orizzontale $s = 0$ in γ , la retta orizzontale $s = 1$ in η , e le due rette verticali $t = 0$ e $t = 1$ in x e y rispettivamente, come illustrato nella figura sottostante.

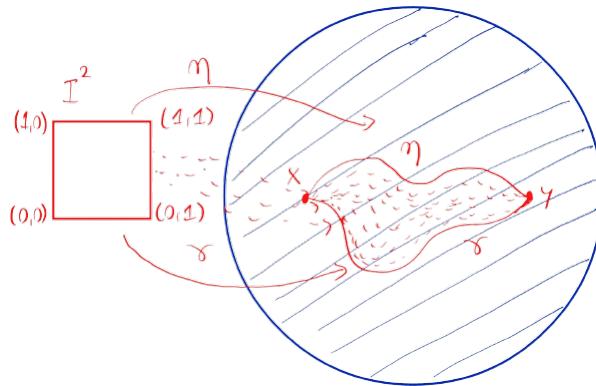


Figura 1.8: Omotopia di cammini rispetto agli estremi x e y .

Analogamente, possiamo definire omotopie di curve chiuse rispetto a un solo punto, che chiameremo "punto di base":

Definizione 1.21 (Omotopia di due curve chiuse rispetto al punto di base x_0). Siano γ ed η due curve chiuse su uno spazio X partenti entrambe da un punto $x_0 \in X$, i.e. due curve tale che $\gamma(0) = \gamma(1) = \eta(0) = \eta(1) = x_0$; chiameremo le suddette curve chiuse(o cammini chiusi) basate sul punto x_0 . Chiamiamo inoltre γ ed η curve omotope rispetto al punto di base x_0 se esiste una funzione continua $F : I^2 \rightarrow X$ tale che $F(s, 0) = \gamma(s)$ e $F(s, 1) = \eta(s) \forall s \in [0, 1]$, e $F(0, t) = F(1, t) = x_0 \forall t \in [0, 1]$.

Con un procedimento del tutto analogo a quello della proposizione 1.11 è possibile dimostrare che anche l'omotopia di cammini rispetto a un punto base x_0 e l'omotopia di cammini rispetto a due estremi x e y siano relazioni d'equivalenza. È possibile pertanto considerare classi d'equivalenza di tali relazioni: in particolare, saremo interessati alle classi d'equivalenza di cammini chiusi basati su un punto x_0 rispetto all'omotopia rispetto al punto x_0 .

Il motivo per il quale tale insieme di classi di equivalenza (che chiameremo **classi d'omotopia**) ci interessa tanto è perché ci permetterà di costruire (tramite un'operazione che andremo ora a definire) un gruppo associato ad un punto di uno spazio topologico, che chiameremo **gruppo fondamentale**.

Definizione 1.22 (Prodotto di curve chiuse basate su un punto x_0). Date due curve chiuse basate su un punto x_0 , che chiameremo γ ed η , possiamo definire una nozione di prodotto nel seguente modo:

$$\gamma\eta(s) := \begin{cases} \gamma(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \eta(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

È immediato verificare che tale prodotto sia a sua volta una curva chiusa basata su x_0 (i.e tale operazione binaria è chiusa).

L'identità rispetto a tale prodotto sarà data dalla funzione costante $i(s) = x_0 \forall s$.

Per ogni curva chiusa basata su un punto γ , avremo un suo inverso $\bar{\gamma}(s) := \gamma(1 - s)$, cioè una curva tale che $\gamma\bar{\gamma} = \bar{\gamma}\gamma = i(s) = x_0$.

Infine, tale prodotto è associativo. Essendo la dimostrazione di questi fatti non estremamente suggestiva per la fruizione di questa monografia, ed inoltre per non rendere quest'introduzione eccessivamente lunga, ne ometteremo la dimostrazione.

Utilizzando questa nozione di prodotto di cammini, definiremo quella di prodotto di classi d'omotopia di cammini nel seguente modo:

Definizione 1.23. Siano γ ed η due cammini chiusi basati su x_0 , e siano $[\gamma]$ ed $[\eta]$ le loro rispettive classi d'omotopia. Definiremo il prodotto tra

queste due nel seguente modo:

$$[\gamma][\eta] = [\gamma\eta]$$

i.e il prodotto delle classi d'equivalenza di γ ed η è la classe d'equivalenza del prodotto dei cammini in questione $\gamma\eta$. (Andrebbe verificato che tale prodotto è ben definito, ma anche qui se il lettore vuole approfondire può leggere di più sui testi citati nella bibliografia [23] [49]).

Osserviamo che, per le proprietà precedentemente osservate per il prodotto di cammini chiusi basati su un punto, avremo che anche il prodotto di classi d'omotopia sarà chiuso (in quanto la classe d'omotopia di $\gamma\eta$ è ancora la classe d'omotopia di un cammino chiuso), associativo, avrà un'identità e un inverso per ogni elemento. Da ciò segue che l'insieme delle classi d'omotopia di cammini chiusi basati su un punto x_0 forma una struttura di gruppo rispetto alla moltiplicazione appena definita. Chiameremo tale gruppo **gruppo fondamentale di X in x_0** , che denoteremo con $\pi_1(X, x_0)$.

È dimostrabile che per spazi connessi per archi (i.e uno spazio X in cui per ogni due punti $x, y \in X$ esiste un cammino che li collega) il gruppo fondamentale è indipendente dalla scelta di un punto base $x_0 \in X$, e pertanto potremo scrivere solamente $\pi_1(X)$.

Il gruppo fondamentale di spazi connessi per archi è un invariante rispetto all'equivalenza omotopica di spazi, che definiamo qui di seguito.

Definizione 1.24 (Equivalenza omotopica di spazi). *Diremo che due spazi topologici X e Y sono omotopicamente equivalenti se esistono due applicazioni continue $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tale che la composizione $f \circ g$ è omotopa all'identità id_Y su Y ($f \circ g \simeq id_Y$), e la composizione $g \circ f$ è omotopa all'identità id_X su X ($g \circ f \simeq id_X$).*

Esercizio 1.15. Dimostrare che la relazione "essere omotopicamente equivalenti" è una relazione d'equivalenza tra spazi topologici.

Esercizio 1.16. Dimostrare che due spazi topologici X e Y omeomorfi sono omotopicamente equivalenti. [Suggerimento: ricordare che si ha una funzione biettiva e bicontinua (i.e essa stessa è il suo inverso sono funzioni continue) $\varphi : X \rightarrow Y$ tra i due spazi, e ricordare la proprietà riflessiva dell'omotopia di funzioni].

Siamo ora pronti a rispondere alla domanda che ci eravamo posti all'inizio di questa sottosezione. In un corso di topologia algebrica è la prassi mostrare che il disco D^2 è uno spazio contraibile (teoricamente si definisce

uno spazio contraibile come uno "spazio che è un ritratto di deformazione di un punto"; intuitivamente si può interpretare come uno spazio "continuamente" deformabile in un punto di quest'ultimo). Gli spazi contraibili hanno un gruppo fondamentale banale ($\pi_1(X) \cong 1$). È ancora noto che il gruppo fondamentale della nostra regione anulare A sia un gruppo infinitamente ciclico (i.e isomorfo a \mathbb{Z}). Pertanto i due gruppi fondamentali non sono isomorfi, da cui segue che i due spazi non sono omotopicamente equivalenti, che a sua volta implica che i due spazi non sono omeomorfi.

1.2.2 Omologia simpliciale

In questa sottosezione introdurremo il concetto di omologia. L'omologia è uno dei 3 concetti centrali della topologia algebrica, insieme all'omotopia (vista prima) e la coomologia (che possiamo interpretare come un concetto duale a quello di omologia). Il concetto di omologia, a differenza dell'omotopia, è meno immediato da comprendere e da visualizzare geometricamente; proviamo ciononostante a spiegarne gli obiettivi e la motivazione. L'obiettivo in questo caso, come prima, è quello di associare dei gruppi topologicamente invarianti ad uno spazio che in un certo senso riescano a classificare ed individuare i "buchi" di quest'ultimo: prima di sviluppare i dettagli di come fare, facciamo una piccola digressione per motivare l'introduzione del concetto di **complesso simpliciale** (che vedremo a breve). Immaginiamo di avere una superficie facilmente visualizzabile immersa nello spazio tridimensionale, come ad esempio il 2-toro \mathbb{T}^2 , che vediamo qui sotto:

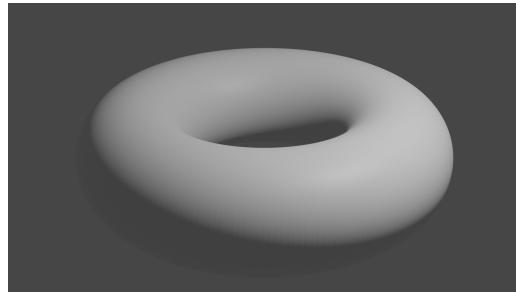


Figura 1.9: 2-toro \mathbb{T}^2 [renderizzato con Blender].

Il toro è uno spazio alquanto "complesso" da studiare, e vorremmo idealmente poter sostituirlo con qualcosa di più "semplice" che sia omeomorfo a quest'ultimo. Una soluzione è quella di "triangolarlo", ossia di

ricostruire la sua superficie "incollando" tra loro vari triangoli, come mostrato sotto (bisognerebbe dimostrare quali spazi sono triangolabili e quali no, ma essendo questa una mera introduzione preparatrice al testo non lo faremo, in quanto richiederebbe una quantità considerevole di tempo).

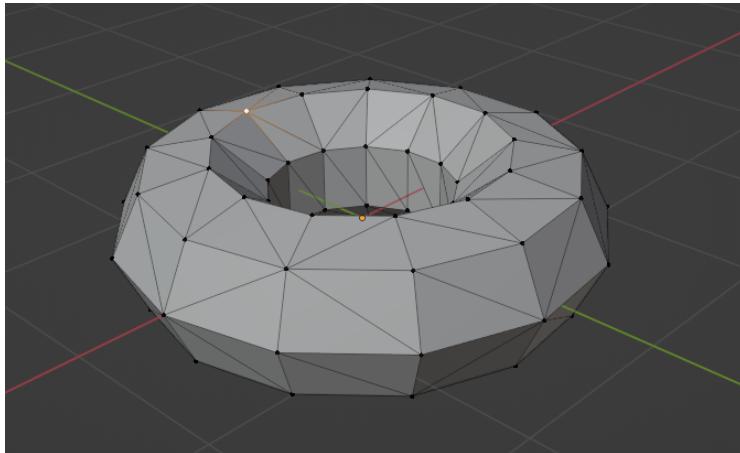


Figura 1.10: 2-toro \mathbb{T}^2 triangolato.

Per dirlo in linguaggio formale, triangolare il nostro toro vuol dire trovare uno spazio formato da triangoli incollati che sia omeomorfo a \mathbb{T}^2 : definiremo in modo rigoroso il concetto di "spazio formato da triangoli incollati" introducendo la nozione di **complesso simpliciale**.

Da qui in poi potremo studiare e costruire su questo spazio più semplice i nostri gruppi di omologia, ed in questo caso parleremo di omologia simpliciale. Detto ciò, diamo ora le definizioni necessarie allo sviluppo del concetto di complesso simpliciale:

Definizione 1.25 (Simplesso). Siano x_0, x_1, \dots, x_m ($m+1$) punti linearmente indipendenti di \mathbb{R}^n . Chiameremo m -simplesso Euclideo (che indicheremo con (x_0, x_1, \dots, x_m)) l'insieme di tutti i punti dello spazio $(y_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$y_j = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_{ij} \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \quad (1.7)$$

(dove qui x_{ij} è la j -esima coordinata di x_i). Inoltre chiameremo i coefficienti λ_i "coordinate baricentriche" di y_j nel simplesso, mentre chiameremo i punti x_0, x_1, \dots, x_m vertici del simplesso.

Il concetto di simplesso è semplicemente una generalizzazione n-dimensionale del concetto di triangolo: uno 0-simplesso è un punto, un 1-simplesso è una linea, un 2-simplesso è un triangolo, un 3-simplesso è un tetraedro e così via.

Per definire un simplesso ci siamo serviti di una combinazione lineare con pesi non negativi la cui somma è pari ad 1. Tale somma ha un nome, che adopereremo da ora in poi in quanto sarà alquanto frequente parlare di quest'ultima:

Definizione 1.26 (Combinazione convessa). *Siano $x_0, x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ ($m+1$ punti nello spazio euclideo \mathbb{R}^n). Chiamiamo combinazione convessa di x_0, x_1, \dots, x_m l'insieme di punti $y \in \mathbb{R}^n$ della forma:*

$$y = \sum_{i=0}^m \lambda_i x_i$$

dove qui

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i = 1 \quad e \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$$

È dimostrabile (ma non essendo un libro specificamente di topologia algebrica non lo dimostreremo) che ogni m-simplesso su \mathbb{R}^n è omeomorfo: da ciò segue che potremo lavorare con un simplesso arbitrario che sia più semplice da utilizzare per i nostri fini. Il simplesso in questione sarà quello che chiameremo l'm-simplesso standard Euclideo, che denoteremo con Δ^m . Definiamolo esplicitamente:

Definizione 1.27 (Simplesso standard Euclideo). *L'm-simplesso standard Euclideo in \mathbb{R}^n , Δ^m , è l'm-simplesso i cui vertici sono i punti $\bar{x}_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n$, dove qui δ_{ij} è la delta di Kronecker definita come:*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

cioè i punti \bar{x}_i hanno coordinate pari a 0 ovunque tranne che nella loro i-esima posizione, $\bar{x}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Sappiamo ora dei simplessi, tuttavia ci manca un modo per rendere rigorosa l'idea di "incollare simplessi". Per far ciò, anzitutto, definiamo il concetto di "faccia" di un simplesso:

Definizione 1.28 (Faccia di un simplesso). *Chiameremo faccia di un simplexo la combinazione convessa di un sottoinsieme non vuoto dei suoi vertici.*

Siamo ora pronti a definire cosa sia un complesso simpliciale:

Definizione 1.29 (Compleksso simpliciale). *Un complesso simpliciale K è un insieme finito di simplessi tale che:*

1. *Sia $A \in K$ un simplexo, e sia α una sua faccia, allora avremo $\alpha \in K$.*
2. *$\forall A, B \in K$, avremo che $A \cap B$ sarà o una faccia in comune ad entrambi i simplessi, oppure l'insieme vuoto, i.e:*

$$A \cap B = \emptyset \text{ oppure } A \cap B = \alpha$$

dove α è una faccia sia di A che di B .

Sarà alquanto importante dopo, per l'introduzione del concetto di bordo, l'orientazione di un simplexo. Il lettore è probabilmente a suo agio con la nozione di orientazione in altre circostanze, come ad esempio nel caso di curve. Per i simplessi il concetto è del tutto analogo; scegliere un'orientazione significa scegliere la direzione in cui attraversarlo. Possiamo indurre un'orientazione su un simplexo selezionando un ordinamento dei suoi vertici, come visto nella figura sotto:

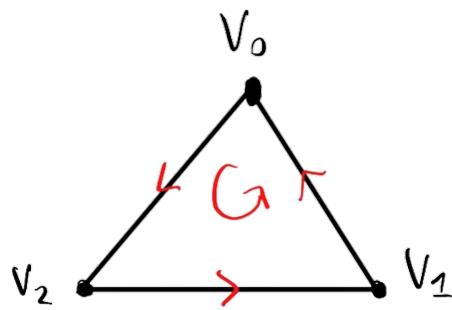


Figura 1.11: Orientazione di un simplexo.

È importante notare che un'orientazione su un simplex induce a sua volta un'orientazione sulle sue facce, come palese dalla figura di sopra. Detto ciò, immaginiamo ora di voler concatenare nello spazio vari simplexi, rappresentando la concatenazione geometrica tramite una somma formale. Introduciamo qui di seguito il gruppo abeliano delle "concatenazioni di simplexi", che chiameremo gruppo delle catene C_n :

Definizione 1.30. Siano $A_1^m, A_2^m, \dots, A_k^m$ k m -simplexi orientati di un complesso simpliciale K . Chiameremo m -catena la seguente somma formale finita a coefficienti interi:

$$\alpha = \lambda_1 A_1^m + \lambda_2 A_2^m + \cdots + \lambda_k A_k^m = \sum_{i=1}^k \lambda_i A_i^m$$

dove $\lambda_i \in \mathbb{Z} \forall i$. L'insieme delle m -catene su un simplex, che indicheremo con C_n , ha una struttura di gruppo abeliano rispetto all'addizione formale delle suddette.

Di particolare importanza per la teoria dell'omologia sarà il concetto di bordo di un m -simplex A^m , ottenuto sommando tutte le facce $m-1$ -dimensionali di A^m (con orientazione indotta dall'orientazione di A^m). Tale nozione coincide con la nostra intuizione geometrica del concetto di "bordo" di una figura geometrica.

Definizione 1.31 (Bordo di un simplex). Sia A^m un m -simplex in un complesso simpliciale K . Chiameremo bordo di A^m la seguente $(m-1)$ -catena di K data dall'equazione:

$$\partial A^m := A_0^{m-1} + A_1^{m-1} + \cdots + A_m^{m-1} \quad (1.8)$$

dove qui A_i^{m-1} sono le $(m-1)$ -facce di A^m . Tale nozione è estendibile ad una m -catena $\alpha := \sum_i \lambda_i A_i^m$ nel seguente modo:

$$\partial \alpha = \sum_i \lambda_i \partial A_i^m \quad (1.9)$$

Proposizione 1.12. L'operatore di bordo ∂ applicato due volte ad una qualsiasi m -catena α è pari a 0, i.e $\partial^2 \alpha = 0 \forall \alpha \in C_m$. Scrivereemo più sinteticamente:

$$\partial^2 = 0$$

Definizione 1.32 (Cicli su un complesso simpliciale). Sia $\alpha \in C_m$ una m -catena in un complesso simpliciale K : chiameremo quest'ultima **m -ciclo su K** se il suo bordo è pari a 0, i.e:

$$\partial \alpha = 0$$

Indicheremo l'insieme degli m -cicli su uno spazio con Z_m o con $\text{Ker}(\partial)$ [in quanto si tratta propriamente del kernel/nucleo dell'applicazione ∂]. Tale insieme, con l'operazione ereditata dal gruppo C_m forma un sottogruppo di quest'ultimo.

Definizione 1.33 (Bordi su un complesso simpliciale). *Sia $\alpha \in C_m$ una m -catena in un complesso simpliciale K , allora chiameremo α un **m -bordo su K** se quest'ultima potrà essere espressa come il bordo di una $(m+1)$ -catena β , i.e:*

$$\alpha = \partial\beta$$

Indicheremo l'insieme dei bordi su un complesso simpliciale con B_m o alternativamente con $\text{Im}(\partial)$, in quanto si tratta dell'insieme immagine dell'applicazione $\partial : C_{m+1} \rightarrow C_m$.

È verificabile che B_m sia un sottogruppo del gruppo abeliano Z_m : tuttavia, essendo ogni sottogruppo di un gruppo abeliano un sottogruppo normale, potremo definire il gruppo quoziante Z_m/B_m . Sarà questo il gruppo che chiameremo, da ora in poi, m -esimo gruppo di omologia: definiamolo ora più precisamente.

Definizione 1.34 (m -esimo gruppo di omologia su K). *Sia K un complesso simpliciale, e siano (in accordo con la notazione introdotta poc'anzi) Z_m e B_m rispettivamente i gruppi degli m -cicli e degli m -bordi su K . Allora chiameremo **m -esimo gruppo di omologia su K** , che indicheremo con H_m , il gruppo quoziante di Z_m per B_m :*

$$H_m := Z_m/B_m = \text{Ker}(\partial)/\text{Im}(\partial) \quad (1.10)$$

La sequenza di gruppi di omologia (indicizzati dal numero naturale m) appena costruita è detta **omologia simpliciale**, in quanto tale sequenza è associata a un complesso simpliciale K . Lo scopo geometrico del gruppo m -esimo di omologia di un complesso simpliciale è quello di individuare i buchi m -dimensionali del suddetto. Tale sequenza di gruppi può essere poi adoperata anche per classificare i buchi di spazi più generali (ricordiamo l'esempio del toro fatto all'inizio di questa sottosezione), costruendo quella che viene detta triangolazione di uno spazio (che ora possiamo definire rigorosamente: si tratta di un omeomorfismo tra uno spazio topologico e un complesso simpliciale).

Un'altra importante nozione è quella di catene omologhe:

Definizione 1.35 (m -catene omologhe). *Siano α, β due m -catene su un complesso simpliciale K : allora diremo che tali due catene sono omologhe,*

e scriveremo $\alpha \simeq \beta$, se la loro differenza è il bordo di una $(m+1)$ -catena γ . In simboli, potremo scrivere:

$$\alpha - \beta = \partial\gamma$$

Esercizio 1.17. Verificare che la relazione " α è omologa a β " sia una relazione d'equivalenza sull'insieme delle m -catene su K .

Definizione 1.36 (m -cicli omologhi a 0). Sia α un m -ciclo su un complesso simpliciale K : diremo allora che α è omologo a 0 se è il bordo di una $(m+1)$ -catena γ di K . In simboli:

$$\alpha = \partial\gamma$$

1.2.3 Omologia singolare

I gruppi di omologia sviluppati precedentemente erano associabili solamente a complessi simpliciali: svilupperemo ora un nuovo tipo di omologia associabile anche a spazi topologici più generali (che vedremo tra l'altro essere equivalente all'omologia simpliciale nei casi di spazi triangolabili). Definiamo anzitutto il concetto di m -simplesso su uno spazio, che per distinguere da un simplesso classico chiameremo **m -simplesso singolare**. Intuitivamente, il concetto verrà definito come quello di curva su uno spazio, ossia diremo che un simplesso su uno spazio è una funzione continua da un simplesso in \mathbb{R}^n in uno spazio topologico X .

Definizione 1.37 (m -simplesso singolare). Sia X uno spazio topologico, allora chiameremo un'applicazione continua $\sigma : \Delta^m \rightarrow X$ **m -simplesso singolare** in X , dove qui Δ^m è l' m -simplesso standard euclideo.

Utilizzando il concetto di simplesso singolare su uno spazio possiamo definire anche il concetto di catene su uno spazio:

Definizione 1.38 (m -catene su uno spazio topologico X). Chiameremo **m -catene singolari** su X , che indicheremo con $C_m(X)$, il gruppo abeliano generato dall'insieme degli m -simplessi singolari su X .

Analogamente definiremo su questa struttura appena costruita anche un concetto di operatore di bordo, che ci permetterà di definire analogamente una successione di gruppi di omologia:

Definizione 1.39 (Bordo di un m-simplex). *Sia σ un m-simplex singolare su X : definiamo il bordo di σ nel seguente modo:*

$$\partial\sigma := \sum_{k=0}^m (-1)^k \sigma|_{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_m}$$

dove qui e_0, e_1, \dots, e_m sono i vertici dell'm-simplex standard Δ^m .

Data poi una m-catena singolare $\alpha = \sum_i \lambda_i \sigma_i$, concatenante i simpletti σ_i con pesi $\lambda_i \in \mathbb{Z}$, il bordo di α , $\partial\alpha$ è, analogamente a prima, definito come la somma dei bordi dei simpletti σ_i , $\partial\sigma_i$ pesati dai loro rispettivi λ_i :

$$\partial\alpha := \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial\sigma_i$$

A questo punto siamo pronti a definire l'm-esimo gruppo di omologia singolare su uno spazio topologico X :

Definizione 1.40 (m-esimo gruppo di omologia singolare su X). *Chiameremo l'm-esimo gruppo di omologia singolare su X , che denoteremo con $H_m(x)$, il quoziente del nucleo dell'operatore di bordo m-esimo per l'immagine dell'operatore di bordo (m + 1)-esimo:*

$$H_m(x) = \text{Ker}(\partial_m) / \text{Im}(\partial_{m+1})$$

Gli ultimi fatti importanti che il lettore deciso a leggere questa monografia, nel caso in cui non abbia ancora incontrato la topologia algebrica nel suo cammino, dovrebbe sapere sull'omologia singolare è che quest'ultima è un invariante topologico, ossia dati due spazi topologici omeomorfi X e Y :

$$X \cong Y$$

avremo che a loro volta anche i loro gruppi di omologia m-esimi singolari saranno isomorfi, i.e:

$$H_m(X) \cong H_m(Y)$$

Un altro importante fatto è l'equivalenza tra l'omologia simpliciale e l'omologia singolare per spazi triangolabili: i.e dato uno spazio topologico X omeomorfo ad un complesso simpliciale K , avremo che il suo gruppo m-esimo di omologia simpliciale, che denoteremo qui con $H_m^\Delta(X)$ è isomorfo al suo gruppo m-esimo di omologia singolare, che denoteremo con $H_m^\Sigma(X)$:

$$H_m^\Delta(X) \cong H_m^\Sigma(X)$$

cioè motiva la nostra intuizione iniziale per comprendere i concetti di omologia simpliciale e di complessi simpliciali.

1.3 Elementi di Geometria Differenziale

Di grande importanza per la fruizione di questa monografia saranno poi alcuni concetti di geometria differenziale. Come già accennato prima, essendo quest'introduzione nient'altro che un "micro-bignami" per rendere questo testo accessibile a una platea più ampia, non potremo sviluppare a fondo i concetti che introdurremo, ma verrà dato semplicemente il minimo necessario per rendere comprensibile i contenuti di questa monografia anche ad un lettore senza una previa preparazione nelle discipline matematiche della topologia, della geometria differenziale e della topologia algebrica. Pertanto, come già fatto nella sezione di topologia algebrica, si salteranno alcune dimostrazioni in quanto richiederebbero una mole di tempo assai più vasta di quella a nostra disposizione per venir introdotti adeguatamente, e spesso anche un gran numero di lemmi preparatori ugualmente lunghi da dimostrare.

1.3.1 Varietà differenziabili

Cominciamo introducendo il concetto centrale della geometria differenziale, quello di **varietà differenziabile**. L'idea fondamentale dietro la nozione di varietà è la seguente: noi terrestri viviamo su quella che, approssimativamente, può essere rappresentata in un modello teorico da una sfera, S^2 . Tuttavia, nella vita di tutti i giorni, noi percepiamo la superficie su cui viviamo come piatta, i.e come una regione di un piano due dimensionale. Con questo abbiamo appena esemplificato, in parole povere, il concetto di spazio localmente euclideo, i.e uno spazio che **localmente** "assomiglia" allo spazio euclideo \mathbb{R}^n (nel caso della sfera abbiamo uno spazio euclideo di dimensione 2, i.e uno spazio localmente simile a \mathbb{R}^2). Come possiamo, tuttavia, esprimere questa nozione più rigorosamente? A tal fine introdurremo i concetti di carta e di atlante su uno spazio topologico X :

Definizione 1.41. *Sia X uno spazio topologico, sia $U \subset X$ un aperto di X e sia $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ un aperto di \mathbb{R}^n . Chiameremo un omeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ una n -carta su X .*

Definizione 1.42 (Atlante C^∞ su uno spazio topologico). *Chiameremo n -atlante C^∞ su X (o atlante liscio) una collezione di n -carte $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha ; U_\alpha \text{ aperto in } X, \tilde{U}_\alpha \text{ aperto in } \mathbb{R}^n\}$ tale che:*

1. $\{U_\alpha\}$ è una copertura aperta di X , i.e $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.

2. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora la funzione (che chiameremo funzione di transizione)

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è un'applicazione C^∞ nel senso classico dell'analisi (essendo infatti di una funzione da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^n , potremo applicare a quest'ultima le solite definizioni dell'analisi reale ad una e più variabili).

Nota 1.3. È possibile "allentare" la seconda proprietà postulata di un atlante, lasciando ad esempio che tale funzione di transizione sia semplicemente di classe C^1 (cioè differenziabile una volta): in tal caso parleremo semplicemente di atlanti differenziabili (anche se a volte tale nome è dato anche ad atlanti C^∞) o di atlanti C^1 .

Definizione 1.43 (Compatibilità di atlanti). Due n -atlanti $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ si dicono compatibili se la loro unione è a loro volta un atlante liscio.

Esercizio 1.18. Dimostrare che la relazione "essere compatibili" su un insieme di n -atlanti su uno spazio è una relazione d'equivalenza.

A questo punto siamo pronti a dare la definizione di varietà liscia:

Definizione 1.44 (Varietà liscia). Una n -varietà liscia M è uno spazio topologico di Hausdorff a base numerabile, a cui è associata una classe d'equivalenza di n -atlanti lisci rispetto alla relazione di compatibilità definita prima.

Una relazione di equivalenza di atlanti rispetto alla relazione "essere compatibili" è spesso chiamata **struttura differenziale**. Inoltre, per spazio a base numerabile si intende semplicemente uno spazio topologico la cui topologia ha una base numerabile (i.e una base finita o contabilmente infinita).

Tuttavia, il lettore potrà ora chiedersi: cosa vuol dire tutto ciò intuitivamente? Mettiamo da parte la supposizione che M sia di Hausdorff e a base denumerabile, in quanto i motivi per i quali sceglieremo di definire una varietà così dipendono da varie ragioni più tecniche che non copriremo in quest'appendice (come ad esempio dal problema dell'esistenza di partizioni dell'unità). Pertanto focalizziamoci solo sulla seconda parte della definizione. Cominciamo vedendo come possa essere interpretata geometricamente il concetto di n -carta su una varietà. Consideriamo ancora il toro \mathbb{T}^2 :

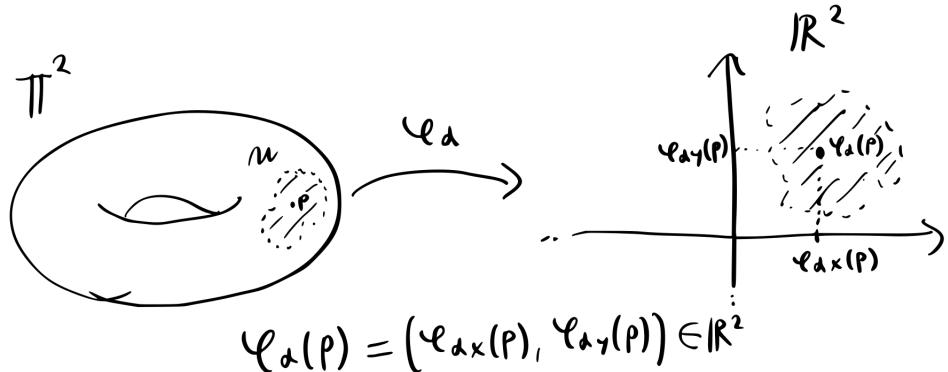


Figura 1.12: Carta su un 2-toro.

Come vediamo una carta φ_α manda un intorno aperto U di un punto p della nostra varietà (in questo caso \mathbb{T}^2) in un intorno aperto $\varphi_\alpha(U)$ di $\varphi_\alpha(p)$ in \mathbb{R}^2 . In altre parole, una carta (φ_α, U) fornisce delle coordinate ad ogni punto dell'aperto U di \mathbb{T}^2 . Supponiamo ora di avere un'altra carta sul nostro toro, $\psi : V \rightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^2$:

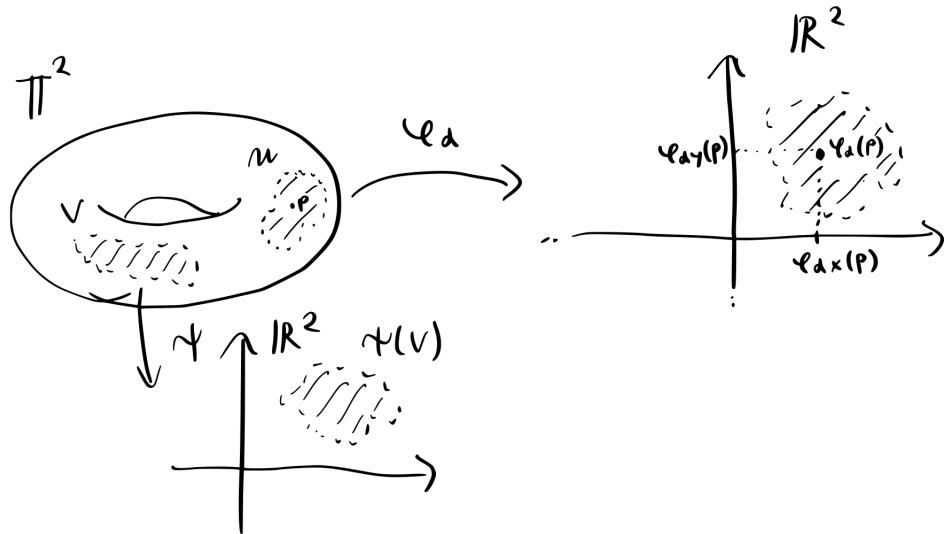


Figura 1.13: Carte su un 2-toro.

Essendo U e V disgiunti in \mathbb{T}^2 , non dovremo preoccuparci di molto in quanto le due carte mappano punti separati della nostra varietà in determinati punti dello spazio euclideo. Facciamoci ora però la seguente domanda: e se i due aperti U e V si fossero intersecati? Si palesa ora la necessità di "mettere d'accordo" le carte di una varietà, i.e di avere un modo di cambiare da un sistema di coordinate all'altro, in modo da far sì che il concetto di carta di coordinate di un intorno di un punto abbia senso. Per esemplificare vediamo ora la seguente figura:

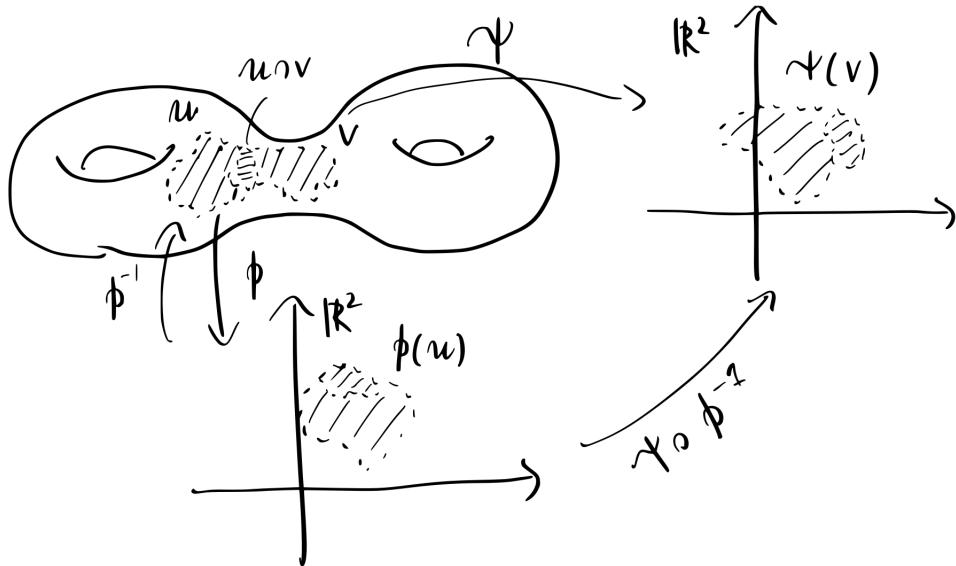


Figura 1.14: Carte su una superficie di genus 2.

Qui la mappa $\psi \circ \phi^{-1}$ è precisamente quella presentata prima, ed è la mappa che ci permetterà di cambiare coordinate nella regione in comune sia ad U che a V . La nostra supposizione per una varietà liscia è che tale funzione di transizione sia liscia e continua, affinché un eventuale cambio di coordinate "si comporti bene" in termini matematici.

Vediamo ora degli esempi di varietà lisce:

Esempio 1.7. Si consideri lo spazio complesso n -dimensionale \mathbb{C}^n : tale spazio topologico forma una $2n$ -varietà liscia rispetto all'atlante $\mathcal{A} = \{(\mathbb{C}^n, \phi)\}$ dove qui definiamo $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ essere:

$$\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = (\Re(z_1), \Im(z_1), \Re(z_2), \Im(z_2), \dots, \Re(z_n), \Im(z_n))$$

dove qui \Re e \Im indicano, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso.

Chiameremo le varietà il cui atlante è formato da un'unica carta **varietà globali**.

Esercizio 1.19. *Dimostrare che lo spazio euclideo \mathbb{R}^n sia una varietà globale.*

Esercizio 1.20. *Dimostrare che la 2-sfera S^2 , rispetto all'atlante $\mathcal{A} = \{(U_1^+, \phi_1^+), (U_2^+, \phi_2^+), (U_3^+, \phi_3^+), (U_1^-, \phi_1^-), (U_2^-, \phi_2^-), (U_3^-, \phi_3^-)\}$, forma la struttura di una 2-varietà liscia, dove qui gli insiemi U_i^\pm e le carte ϕ_i^\pm ($i = 1, 2, 3$) sono definiti come:*

$$U_i^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_i > 0\} \quad U_i^- = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \mid x_i < 0\}$$

$$\begin{cases} \phi_1^\pm = (x_2, x_3) \\ \phi_2^\pm = (x_1, x_3) \\ \phi_3^\pm = (x_1, x_2) \end{cases}$$

1.3.2 Applicazioni lisce e diffeomorfismi

Un'altra importante nozione in geometria differenziale è quella di applicazioni lisce e diffeomorfismi (in teoria delle categorie le chiameremmo i morfismi e gli isomorfismi della categoria delle varietà).

Definizione 1.45 (Applicazioni lisce). *Siano M, N due varietà lisce con atlanti $\mathcal{A}_M = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $\mathcal{A}_N = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$. Chiameremo una funzione continua $f : M \rightarrow N$ **funzione liscia** se $\forall \alpha, \beta$ tale che:*

$$f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha \neq \emptyset$$

avremo che la composizione di funzioni:

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \rightarrow \psi_\beta(V_\beta)$$

è C^∞ .

Denoteremo l'insieme di tutte le applicazioni lisce da M in N con $C^\infty(M, N)$. Se l'insieme $N = \mathbb{R}$, allora scriveremo semplicemente $C^\infty(M)$.

Esercizio 1.21. *Dimostrare che le funzioni costanti sono funzioni lisce tra varietà lisce.*

Esercizio 1.22. *Dimostrare che la definizione di funzione liscia appena data non dipende dalla scelta di due atlanti per M e N nelle loro classi d'equivalenza.*

Definizione 1.46 (Diffeomorfismo di varietà lisce). *Siano M, N , come prima, due varietà lisce. Chiameremo un omeomorfismo $f : M \rightarrow N$ liscio con inversa liscia f^{-1} **diffeomorfismo**. Se esiste un diffeomorfismo tra due varietà diremo che esse sono **diffeomorfe**.*

1.3.3 Spazi tangenti

Immaginiamo di avere una varietà, e di avere un punto p di quest'ultima: vogliamo considerare i vettori del "piano tangente" a p , che possiamo interpretare geometricamente come dei vettori che "escono fuori" dal punto p , come nella seguente figura:

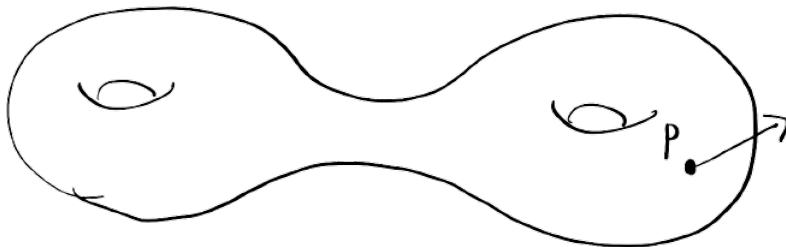


Figura 1.15: Vettore tangente ad un punto p di una superficie di genus 2.

L'idea è quella di pensare ad un vettore come ad una derivata direzionale, in quanto una derivata direzionale presenta esattamente le 2 informazioni a noi necessarie: il punto da cui il nostro vettore deve "uscire" e la sua direzione. Il concetto di derivata direzionale, tuttavia, è proprio di funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} : per estenderlo a spazi più generali, dovremo creare un'entità matematica più generale che la contenga. Ciò motiva la definizione di **vettore tangente**.

Definizione 1.47 (Vettore tangente). *Sia M una varietà liscia, e sia $p \in M$ un suo punto. Chiameremo un'applicazione \mathbb{R} -lineare $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa la cosiddetta proprietà di derivazione (o di Leibniz) **vettore tangente a M in p** . In altre parole, un vettore tangente v è un'applicazione dall'insieme delle applicazioni lisce da M in \mathbb{R} in \mathbb{R} con le seguenti proprietà: è \mathbb{R} -lineare, cioè:*

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

ed è una derivazione, cioè:

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f) \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

L'insieme dei vettori tangentи in un punto di una varietà forma uno spazio vettoriale, che chiameremo **spazio tangente in p**, indicato con $T_p M$. Nel caso di \mathbb{R}^n , una base di $T_p \mathbb{R}^n$ è data dall'insieme $\{\frac{\partial}{\partial x_i}|_p ; i \in \mathbb{N} \cap [1, n]\}$, in accordo con la nostra intuizione iniziale circa le derivate direzionali e il concetto di vettore tangente. Pertanto $\dim(T_p \mathbb{R}^n) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$. Per una varietà più generale M , invece, data una carta $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, che scriveremo come $\varphi = (r_1 \circ \varphi, r_2 \circ \varphi, \dots, r_n \circ \varphi)$, dove qui r_i è la i-esima funzione coordinata, la base di $T_p M$ sarà data dai seguenti vettori tangentи indotti dalle coordinate locali di un punto:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|_p(f) := \frac{\partial}{\partial r_i}|_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})$$

1.3.4 Differenziali e spazi cotangenti

Definizione 1.48 (Differenziale di un'applicazione liscia). *Sia $f : M \rightarrow N$ un'applicazione liscia tra due varietà, e sia $p \in M$ un punto di M . Chiameremo differenziale di f in p la seguente mappa:*

$$df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

definita da:

$$df_p(v)(h) := v(h \circ f) \quad \forall v \in T_p M \quad \forall h \in C^\infty(N)$$

Nel caso di un'applicazione da M in \mathbb{R} , avremo che il suo differenziale

$$df_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

sarà, per la definizione di spazio duale di uno spazio vettoriale, un elemento di $T_p^* M$, lo spazio duale di $T_p M$, definito come:

$$T_p^* M := \text{Hom}(T_p M; \mathbb{R})$$

Chiameremo tale spazio **spazio cotangente di M in p**. Il differenziale di una funzione del tipo $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ vista prima, per un $v \in T_p M$, sarà pari a:

$$df_p(v) = v(f)$$

1.3.5 Fibrati tangenti, campi vettoriali e fibrati cotangenti

Abbiamo introdotto, 2 sotto-sezioni fa, il concetto di spazio tangente in un punto p di una varietà M . Il fibrato tangente di una varietà M è l'unione disgiunta degli spazi tangenti in ogni punto di M :

Definizione 1.49 (Fibrato tangente). *Definiamo il fibrato tangente TM di una varietà M come:*

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \quad (1.11)$$

Pertanto potremo vedere un elemento del fibrato tangente come una coppia (p, v) , dove $p \in M$ è un punto della varietà M e $v \in T_p M$ è un vettore tangente di M in p .

È legata a tale struttura una mappa naturale che chiameremo **proiezione del fibrato tangente** $\pi : TM \rightarrow M$, che mappa un punto del fibrato tangente (p, v) nel punto "base" $p \in M$, $\pi : (p, v) \rightarrow p \in M$. È possibile dare a questo insieme una topologia ed una struttura di varietà liscia indotta dalla struttura di varietà liscia di M . La costruzione prosegue nel seguente modo: data una carta $\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ su M definiamo una carta su TU , che chiameremo $\bar{\varphi}$ come:

$$\bar{\varphi} := (x_1 \circ \pi, x_2 \circ \pi, \dots, x_n \circ \pi, dx_1, \dots, dx_n) : TU \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (1.12)$$

dove qui $x_i \circ \pi$ è la composizione della i -esima funzione coordinata di \mathbb{R}^n e la proiezione del fibrato tangente, e dove $dx_i : TU \rightarrow \mathbb{R}$ è un'applicazione che mappa $(p, v) \in TU$ in $(dx_i)_p(v)$.

Definiamo una topologia su TM in cui dichiariamo aperti gli insiemi $V \subset TM$ tale che per ogni carta su M , $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\varphi}(V \cap TU) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ è aperto.

Rispetto a tale topologia, le carte $(TU, \bar{\varphi})$ su TM indotte dalle carte (U, φ) su M formano un atlante, e rispetto a tale struttura differenziale il fibrato tangente forma una varietà liscia di dimensione doppia rispetto a quella di M , $\dim(TM) = 2n$, dove n è la dimensione della varietà M .

Analogamente definiremo il concetto di **fibrato cotangente**:

Definizione 1.50 (Fibrato cotangente di una varietà liscia M). *Sia M una varietà liscia, allora definiremo il fibrato cotangente T^*M come l'unione disgiunta degli spazi cotangenti in ogni punto p di M , i.e:*

$$T^*M = \bigsqcup_{p \in M} T_p^* M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^* M \quad (1.13)$$

In maniera di poco dissimile è possibile indurre anche sul fibrato cotangente T^*M una struttura di varietà liscia di dimensione doppia rispetto a M indotta dalla struttura di varietà liscia su M .

L'ultimo importante concetto che introdurremo in questa sottosezione è quello di campo vettoriale. L'intuizione dietro l'idea è precisamente quella spesso appresa in un corso elementare di analisi multi-variabile; un campo vettoriale è una funzione che associa ad ogni punto dello spazio un vettore che "esce fuori da quel punto".

Possiamo formalizzare tale idea con la seguente definizione:

Definizione 1.51 (Campo vettoriale liscio). *Sia M una varietà liscia, un campo vettoriale X è un'applicazione liscia da M in TM , $X : M \rightarrow TM$ tale che la composizione:*

$$\pi \circ X = id$$

è l'identità. In altre parole, $\forall p \in M$, $X(p) \in T_p M$.

1.3.6 Prodotto tensoriale di spazi vettoriali

In questa sottosezione daremo la definizione di prodotto tensoriale e dimostreremo alcune sue proprietà.

Definizione 1.52 (Prodotto tensoriale). *Dati due spazi vettoriali V e W , chiameremo **prodotto tensoriale di V e W** uno spazio vettoriale $V \otimes W$ insieme ad un'applicazione bilineare $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ (di cui denoteremo l'immagine di un elemento di $V \times W$ come $\otimes(v, w) = v \otimes w$) tale che per ogni applicazione bilineare $b : V \times W \rightarrow U$ esiste un'unica applicazione lineare $\bar{b} : V \otimes W \rightarrow U$ tale che $\bar{b}(v \otimes w) = b(v, w)$ ($v \in V, w \in W$). Tale proprietà è chiamata **proprietà universale del prodotto tensoriale**.*

Graficamente stiamo dicendo che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b} & U \\ \downarrow \otimes & \nearrow \bar{b} & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

Proposizione 1.13 (Unicità del prodotto tensoriale). *Se esistono due prodotti tensoriali di V e W , allora essi sono isomorfi.*

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che tali prodotti tensoriali esistano, che denoteremo con $V \otimes_1 W$ e $V \otimes_2 W$. I due prodotti tensoriali, per ipotesi, avranno due applicazioni bilineari $\otimes_1 : V \times W \rightarrow V \otimes_1 W$ e $\otimes_2 : V \times W \rightarrow V \otimes_2 W$, e rispetteranno la proprietà universale. Rappresentando tutto ciò con dei diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b_1} & U_1 \\ \downarrow \otimes_1 & \nearrow \overline{b_1} & \\ V \otimes_1 W & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{b_2} & U_2 \\ \downarrow \otimes_2 & \nearrow \overline{b_2} & \\ V \otimes_2 W & & \end{array}$$

Poniamo ora $U_2 = V \otimes_1 W$, $b_2 = \otimes_1$ e $U_1 = V \otimes_2 W$, $b_1 = \otimes_2$. Otterremo i seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes_2} & V \otimes_2 W \\ \downarrow \otimes_1 & \nearrow \overline{\otimes_2} & \\ V \otimes_1 W & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes_1} & V \otimes_1 W \\ \downarrow \otimes_2 & \nearrow \overline{\otimes_1} & \\ V \otimes_2 W & & \end{array}$$

Poniamo ora $T_1 = \overline{\otimes_1} \circ \overline{\otimes_2} : V \otimes_1 W \rightarrow V \otimes_1 W$, $T_2 = \overline{\otimes_2} \circ \overline{\otimes_1} : V \otimes_2 W \rightarrow V \otimes_2 W$. Per la proprietà fondamentale del prodotto tensoriale otterremo i seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes_1} & V \otimes_1 W \\ \downarrow \otimes_1 & \nearrow T_1 & \\ V \otimes_1 W & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes_2} & V \otimes_2 W \\ \downarrow \otimes_2 & \nearrow T_2 & \\ V \otimes_2 W & & \end{array}$$

Osserviamo che le applicazioni identità $id_1 : V \otimes_1 W \rightarrow V \otimes_1 W$, $id_2 : V \otimes_2 W \rightarrow V \otimes_2 W$ fanno commutare i medesimi diagrammi:

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes_1} & V \otimes_1 W \\ \downarrow \otimes_1 & \nearrow id_1 & \\ V \otimes_1 W & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\otimes_2} & V \otimes_2 W \\ \downarrow \otimes_2 & \nearrow id_2 & \\ V \otimes_2 W & & \end{array}$$

Da cui, per l'unicità assunta nella definizione di prodotto tensoriale, avremo $T_1 = id_1$ e $T_2 = id_2$. In altre parole

$$\overline{\otimes_1} \circ \overline{\otimes_2} = id_1 \quad \overline{\otimes_2} \circ \overline{\otimes_1} = id_2$$

Pertanto le mappe lineari $\overline{\otimes_1}$ e $\overline{\otimes_2}$ sono gli inversi l'uno dell'altro. Abbiamo dunque costruito un isomorfismo da $V \otimes_1 W$ a $V \otimes_2 W$, dimostrando l'asserto. \square

Forniamo ora una dimostrazione costruttiva dell'esistenza del prodotto tensoriale (possiamo ora propriamente dire "del" e non "di un" in quanto abbiamo dimostrato l'unicità di tale costruzione rispetto ad isomorfismi di spazi vettoriali).

Teorema 1.6. *Il prodotto tensoriale tra due spazi vettoriali V e W , $V \otimes W$, esiste.*

Dimostrazione. Cominciamo considerando quello che chiameremo **spazio del prodotto formale di V e W**, che definiamo come:

$$V * W := \text{span}_{\mathbb{R}}\{v * w ; v \in V, w \in W\}$$

Consideriamo inoltre il sotto-spazio I di $V * W$ definito come:

$$I := \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{array}{l} (v_1 + v_2) * w - v_1 * w - v_2 * w \\ v * (w_1 + w_2) - v * w_1 - v * w_2 \\ \lambda(v * w) - (\lambda v) * w \\ \lambda(v * w) - v * (\lambda w) \end{array} ; v, v_1, v_2 \in V, w, w_1, w_2 \in W, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad (1.14)$$

Asseriamo che lo spazio quoziante di $V * W$ per il sottospazio I sia il nostro prodotto tensoriale, cioè:

$$V \otimes W = V * W / I$$

Definiamo la mappa $\otimes : V \times W \rightarrow V \otimes W$ come la composizione dell'inclusione $i : V \times W \rightarrow V * W$ e la mappa quoziante $q : V * W \rightarrow V * W / I$. Avendo "quozientato" il sottospazio I dallo spazio più grande $V * W$ avremo che tutto I collasserà nell'identità in $V * W / I$, pertanto l'applicazione \otimes appena definita mapperà tutte le espressioni del tipo (1.14) nell'identità, e sarà pertanto bilineare.

Verifichiamo ora che sia soddisfatta la proprietà universale: sia $b : V \times W \rightarrow U$ un'applicazione bilineare, allora tale applicazione indurrà un'altra applicazione lineare (e unica) $\bar{b} : V * W \rightarrow U$ data da $\bar{b}(v * w) = b(v, w)$. Essendo b bilineare, \bar{b} si riduce all'identità su tutto il nostro sottospazio I precedentemente definito nell'equazione (1.14). Pertanto otterremo un'applicazione lineare $\tilde{b} : V \otimes W \rightarrow U$ con $\tilde{b}(v \otimes w) = \bar{b}(v * w) = b(v, w)$. Siccome i vettori della forma $v \otimes w$, con $v \in V$ e $w \in W$ coprono $V \otimes W$, avremo che \tilde{b} sarà unica. Pertanto la proprietà universale è soddisfatta e l'asserto è stato dimostrato. \square

Il prodotto tensoriale ha molte altre importanti proprietà che elencheremo qui di seguito, di cui non forniremo la dimostrazione per questioni di tempo (ciononostante il lettore può comunque provare a dimostrarle, in quanto esse richiedono solo la conoscenza di alcuni fatti di algebra lineare).

Proposizione 1.14 (Proprietà del prodotto tensoriale). *Il prodotto tensoriale soddisfa le seguenti proprietà:*

- $\text{Hom}(V \otimes W, \mathbb{R}) \cong \text{Mult}(V \times W, \mathbb{R})$, dove qui $\text{Mult}(V \times W, \mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale delle applicazioni bilineari da $V \times W$ in \mathbb{R} .

- $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$ (*corollario immediato del primo fatto*).
- $V \otimes W \cong W \otimes V$ (*commutativa*).
- $V \otimes (U \otimes W) \cong (V \otimes U) \otimes W$ (*associativa*).

Introduciamo ora l'importante definizione di algebra tensoriale, ma prima definiamo cosa voglia dire elevare alla "n-esima potenza tensoriale" uno spazio vettoriale.

Definizione 1.53 (Potenza tensoriale). *Sia V uno spazio vettoriale. Allora definiremo l'n-esima potenza tensoriale di V , che denoteremo con V^{\otimes_n} , come:*

$$V^{\otimes_n} := \bigotimes_{i=0}^n V \quad (1.15)$$

Definiamo a partire dalla definizione di potenza tensoriale **l'algebra tensoriale di uno spazio vettoriale V** nel seguente modo:

Definizione 1.54 (Algebra tensoriale di uno spazio vettoriale V). *Sia V uno spazio vettoriale. Chiameremo **algebra tensoriale** di V , che denoteremo con $\mathfrak{T}(V)$, il seguente spazio vettoriale:*

$$\mathfrak{T}(V) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes_i} \quad (1.16)$$

Definizione 1.55 (Algebra gradata). *Diremo che un'algebra \mathbb{A} è gradata se e solo se:*

$$\mathbb{A} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n \quad (1.17)$$

e se $\forall a \in A_i, \forall b \in A_j$ avremo:

$$a \cdot b \in A_{i+j}$$

Dove qui \cdot è il prodotto rispetto a cui \mathbb{A} forma un'algebra. Chiameremo gli elementi $a \in A_i$ **elementi i-esimi di \mathbb{A}** o **elementi di grado i**.

Esercizio 1.23. Dimostrare che l'algebra tensoriale $\mathfrak{T}(V)$ di uno spazio vettoriale V è un'algebra gradata rispetto al prodotto tensoriale \otimes .

1.3.7 Forme differenziali e l'algebra esterna di Grassmann

Siamo ora pronti a definire l'algebra esterna di Grassmann di uno spazio vettoriale, che ci servirà a definire rigorosamente gli enti matematici chiamati "forme differenziali" che saranno di fondamentale importanza per la comprensione di questa monografia. La definizione di algebra esterna può essere data in termini di una proprietà universale categorica, similmente a come fatto con il prodotto tensoriale. In questo testo, tuttavia, opteremo per una definizione diretta in termini di un quoziente di algebre, di gran lunga più comune.

Definizione 1.56 (Algebra esterna di Grassmann di uno spazio vettoriale). *Chiameremo **algebra esterna di Grassmann di V** , che indicheremo con $\wedge^*(V)$, la seguente algebra:*

$$\wedge^*(V) := \mathfrak{T}(V)/I \quad (1.18)$$

dove qui I è l'ideale dell'algebra tensoriale $\mathfrak{T}(V)$ generato dall'insieme $\{x \otimes x : x \in V\}$.

Tale algebra eredita dall'algebra tensoriale $\mathfrak{T}(V)$ un prodotto, che chiameremo **prodotto esterno**, e che indicheremo con \wedge . Per ogni $v \in V$, avremo che $v \wedge v = 0$ nell'algebra esterna $\wedge^*(V)$ (segue immediatamente dalla definizione: prendendo un quoziente di algebre stiamo "intuitivamente" riducendo I all'identità). Da tale proprietà segue immediatamente che, dati $v_1, v_2 \in V$:

$$(v_1 + v_2) \wedge (v_1 + v_2) = v_1 \wedge v_1 + v_1 \wedge v_2 + v_2 \wedge v_1 + v_2 \wedge v_2 = 0$$

da cui $v_1 = v_2 = -v_2 \wedge v_1$, i.e il prodotto esterno è anti-commutativo. L'algebra esterna è essa stessa un'algebra gradata, in quanto è il quoziente di un'algebra gradata ($\mathfrak{T}(V)$) per un suo ideale gradato (I). Per ciò che concerne $\mathfrak{T}(V)$, è banalmente vero che sia un'algebra gradata, come visto nell'esercizio 1.23. Per l'ideale I , invece, notiamo che potremo scriverlo come la somma diretta:

$$I = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I \cap \mathfrak{T}^n(V)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I \cap V^{\otimes n}) = \bigoplus_{n=2}^{\infty} (I \cap V^{\otimes n})$$

(l'ultima uguaglianza della serie è vera in quanto $V \cap I = V^{\otimes 1} \cap I = 0$ e $\mathbb{R} \cap I = V^{\otimes 0} \cap I = 0$).

Ponendo $\wedge^n(V) = \mathfrak{T}^n(V)/(I \cap \mathfrak{T}^n(V))$ (dove qui $\mathfrak{T}^n(V)$ sono gli elementi di

grado n dell'algebra tensoriale $\mathfrak{I}(V)$, i.e $V^{\otimes n}$), potremo scrivere la nostra algebra esterna di Grassmann come:

$$\bigwedge^*(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigwedge^n(V) \quad (1.19)$$

Chiameremo lo spazio $\bigwedge^n(V)$ spazio dell' n -esimo prodotto esterno di Grassmann di V . La dimensione dei componenti della "scomposizione in somma diretta" dell'algebra gradata $\bigwedge^*(V)$ è pari a:

$$\dim \bigwedge^n(V) = \binom{\dim V}{n} = \frac{(\dim V)!}{n!(\dim V - n)!} \quad (1.20)$$

Dato infatti uno spazio vettoriale V m -dimensionale con base $\{v_1, \dots, v_m\}$ avremo che l'insieme $\{v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_n}; 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n \leq m\}$ è una base di $\bigwedge^n(V)$. La cardinalità di tale insieme è precisamente $\binom{\dim V}{n}$, in accordo con quanto detto prima.

A questo punto siamo pronti a definire il concetto di forma differenziale:

Definizione 1.57 (Forma differenziale su una varietà M). *Chiameremo **forma differenziale** su una varietà M (o a volte *forma liscia*) un'applicazione liscia $\omega : M \rightarrow \bigwedge^n(T^*M)$ tale che $\pi \circ \omega : M \rightarrow M$ è l'identità (dove qui π è la proiezione del fibrato cotangente introdotto due sottosezioni fa). Tale condizione è esprimibile anche come:*

$$\omega_p \in \bigwedge^n(T_p^*M) \quad \forall p \in M$$

dove qui ω_p è l'immagine di p sotto l'applicazione ω .

Denoteremo lo spazio delle n -forme su M con $\Omega^n(M)$, e denoteremo lo spazio di tutte le forme differenziali su M come:

$$\Omega(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n(M)$$

È possibile moltiplicare forme differenziali su M grazie al prodotto esterno presente sullo spazio $\bigwedge^n(T^*M)$. Siano $\omega \in \Omega^n(M)$ e $\eta \in \Omega^l(M)$ due forme differenziali su M . Definiamo la loro $(n+l)$ -forma prodotto come:

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p \quad (1.21)$$

cioè come la forma che associa ad ogni punto $p \in M$ il prodotto esterno dell'immagine di ω e η : $\omega_p \wedge \eta_p$.

1.3.8 Pullback e integrazione

Concludiamo questa introduzione con una trattazione sull'integrazione di forme differenziali. Prima di poter parlare di integrali di forme differenziali dobbiamo però fare una digressione sul concetto di **pullback**.

Definizione 1.58 (Pullback di funzioni lisce). *Sia $F : M \rightarrow N$ un'applicazione liscia tra due varietà M e N , e sia $f \in C^\infty(N)$ una funzione liscia da N in \mathbb{R} . La mappa F induce quella che chiameremo **applicazione pullback**, $F^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M)$, definita come:*

$$F^*f := f \circ F \quad (1.22)$$

Data una funzione liscia $F : M \rightarrow N$, possiamo estendere la definizione di pullback alle forme differenziali: sia ω una n -forma, $p \in M$ e $v_1, \dots, v_n \in T_p M$, allora:

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_n) := \omega_{F(p)}(dF_p v_1, \dots, dF_p v_n) \quad (1.23)$$

Riportiamo qui di seguito alcune importanti proprietà dei pullback che ci risulteranno essere molto utili in seguito:

Proposizione 1.15 (Proprietà dei pullback). *Siano $F : M \rightarrow N$ e $G : N \rightarrow Z$ due funzioni lisce e siano $\omega \in \Omega^n(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$ due forme su M , allora le seguenti espressioni sono valide:*

1. $(G \circ F)^* \omega = F^*(G^* \omega)$.
2. $(F^*\omega) \wedge (F^*\eta) = F^*(\omega \wedge \eta)$ (*I pullback "preservano" il prodotto esterno*).
3. $F^*df = d(f \circ F) \quad \forall f \in C^\infty(N)$.

Parliamo ora finalmente dell'integrazione di forme differenziali su una varietà. Per questioni di tempo (un'introduzione è troppo piccola per contenere una trattazione adeguata e rigorosa di tutti questi fatti) non dimostreremo i dettagli necessari (quali ad esempio la "ben-definitezza" della nozione di tale integrale, le sue proprietà o l'intuizione dietro l'idea). Introduciamo prima il concetto di supporto di una forma:

Definizione 1.59 (Supporto di una n -forma). *Sia $\omega \in \Omega^n(M)$ una n -forma su M : chiameremo **supporto di ω** la chiusura dell'insieme di punti ove ω è non zero, i.e.:*

$$\text{supp } \omega := \overline{\{p \in M ; \omega_p \neq 0\}} \quad (1.24)$$

*Diremo che una forma è a **supporto compatto** se il suo supporto $\text{supp } \omega$ è compatto.*

Altra definizione preliminare di cui avremo bisogno è quella di **varietà orientata**:

Definizione 1.60. Sia M una m -varietà e sia $\{\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m\}$ un suo atlante. Diremo che M è orientabile se $\forall \alpha, \beta$ avremo:

$$\det(d(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})) > 0 \quad (1.25)$$

$\forall p \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. La scelta di un tale atlante è detta *orientazione di M* .

Proposizione 1.16. Una m -varietà M è orientabile se e solo se presenta una m -forma ovunque non nulla, che chiameremo **forma di volume**, indicata spesso con v .

Siamo ora finalmente pronti a definire il concetto di **integrale di una m -forma su una m -varietà**.

Definizione 1.61. Sia M una varietà orientata m -dimensionale, e sia $\omega \in \Omega^m(M)$ una m -forma a supporto compatto. Sia infine $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una carta di M (in un'orientazione di M), allora chiameremo *integrale di ω su M* la seguente espressione:

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega \quad (1.26)$$

È possibile definire una teoria sull'integrazione anche su catene lisce (per catene lisce intenderemo semplicemente catene su uno spazio i cui simplessi da cui sono costituite sono tutte funzioni lisce).

Sia M una m -varietà liscia orientata, sia $\alpha := \sum_i a_i \sigma_i$ una m -catena liscia su M e sia ω una n -forma liscia. Definiremo allora l'integrale di ω su α come:

$$\int_\alpha \omega = \sum_i a_i \int_{\Delta^m} \sigma_i^* \omega \quad (1.27)$$

dove qui $\sigma_i^* \omega$ è il pullback di ω rispetto alla funzione liscia $\sigma_i : \Delta^m \rightarrow M$, e Δ^m indica l' m -simplesso standard euclideo.

1.3.9 Differenziazione esterna

Teorema 1.7. Esiste un'unica applicazione \mathbb{R} -lineare da $\Omega^n(M)$ in $\Omega^{n+1}(M)$, $d : \Omega^n(M) \rightarrow \Omega^{n+1}(M)$ con le seguenti proprietà:

1. df è il differenziale di f per una 0-forma f .

2. $d^2 = 0$, i.e $d(df) = 0 \forall 0\text{-forma } f$.
3. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^m(\omega \wedge d\eta)$, dove $\omega \in \Omega^m(M)$.

chiamiamo tale applicazione **differenziale esterno**.

Sia dato un sistema di coordinate locali in una m-varietà, (x_1, \dots, x_m) , e sia data una n-forma $\omega \in \Omega^n(M)$:

$$\omega = w dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} = w dx_I$$

Allora, la derivata esterna di ω sarà esplicitamente computabile secondo la seguente espressione:

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial w}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \quad (1.28)$$

dove qui $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$.

1.3.10 Teorema di Stokes e proprietà degli integrali

Concludiamo questa sezione preparatoria con un elenco di alcuni importanti teoremi con soggetto gli integrali di forme su varietà (o catene) appena definiti. Cominciamo con il più importante, il teorema di Stokes:

Teorema 1.8 (Teorema di Stokes su varietà con bordo). *Sia M una m-varietà orientata con bordo, in cui è stata data alla $(m-1)$ varietà ∂M l'orientazione indotta da M , e sia ω una $(m-1)$ -forma con supporto compatto. Allora:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \quad (1.29)$$

Per varietà con bordo intendiamo uno spazio topologico in cui ogni punto ha un intorno omeomorfo ad un aperto del semispazio $\mathbb{R}^{n+} = \{(x_i)_{i=1}^n; x_1 \geq 0\}$. Esiste una versione del teorema anche per l'integrazione di forme su catene, che viene detto per l'appunto "teorema di Stokes su catene":

Teorema 1.9 (Teorema di Stokes su catene). *Sia γ una m-catena liscia in una varietà M , e sia ω una $(m-1)$ -forma su M . Allora:*

$$\int_{\partial\gamma} \omega = \int_{\gamma} d\omega \quad (1.30)$$

Come corollario immediato del teorema di Stokes su catene vi è il seguente fatto:

Proposizione 1.17. *Sia ω una m -forma chiusa (i.e una forma il cui differenziale esterno è pari a 0, $d\omega = 0$), e siano γ, η due m -catene omologhe ($\gamma \simeq \eta$), allora:*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\eta} \omega$$

Possiamo esprimere concisamente il contenuto di questa proposizione con la seguente affermazione: "Gli integrali di forme chiuse su catene omologhe sono uguali".

Dimostrazione. Per la definizione di catene omologhe, avremo $\gamma - \eta = \partial\nu$ per una certa $(m+1)$ -catena ν . Pertanto avremo:

$$\int_{\gamma} \omega - \int_{\eta} \omega = \int_{\partial\nu} \omega = \int_{\nu} d\omega = 0$$

□

Capitolo 2

Algebra dei quaternioni

In questo capitolo andremo a studiare i quaternioni dal punto di vista algebrico. Anzitutto li costruiremo, e dopodichè osserveremo e dimostreremo le proprietà più importanti della suddetta struttura.

2.1 Costruzione dell'Algebra dei quaternioni

2.1.1 La costruzione di Cayley-Dickson di \mathbb{C}

Per prima cosa costruiamo la nostra algebra dei quaternioni. Per fare ciò ci avvarremo della costruzione di Cayley-Dickson, che ci permette di generare iterativamente algebre sui reali via via "più grandi" (la cui dimensione è la doppia della precedente), definendo un prodotto sul prodotto cartesiano dell'algebra precedente per sè stessa. Riportiamo prima alla mente la costruzione di Cayley-Dickson dell' \mathbb{R} -Algebra associativa unitaria 2-dimensionale dei numeri Complessi \mathbb{C} :

Definiamo un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ come una doppietta di numeri reali (a, b) , con $a, b \in \mathbb{R}$. Definiamo inoltre cosa voglia dire per due numeri complessi "essere uguali":

Definizione 2.1. Due numeri complessi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; $z_1 := (\alpha_1, \beta_1), z_2 := (\alpha_2, \beta_2)$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2$ si dicono uguali se e solo se $\alpha_1 =_{\mathbb{R}} \alpha_2$ e $\beta_1 =_{\mathbb{R}} \beta_2$, dove qui $=_{\mathbb{R}}$ indica la relazione d'equivalenza canonica su \mathbb{R} . Se due numeri complessi sono uguali, scriveremo: $z_1 =_{\mathbb{C}} z_2$.

Tale relazione è una relazione di equivalenza su \mathbb{C} . Le proprietà che la rendono tale (transitiva, simmetrica e riflessiva) seguono banalmente dal fatto che la relazione d'equivalenza sui reali, su cui questa relazione appena introdotta è formata, le rispetta essa stessa. Ometteremo dunque

la dimostrazione per non rendere il testo prolioso.

Per alleggerire la notazione, da ora in poi raffigureremo la relazione d'equivalenza canonica appena definita sui numeri complessi semplicemente con il simbolo “=”.

Andiamo a definire ora delle operazioni algebriche su questa struttura:

- Definiamo l'addizione per componenti di due numeri complessi $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ come:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad (2.1)$$

- Definiamo la moltiplicazione di un numero complesso z per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ come:

$$\lambda z = (\lambda a, \lambda b) \quad (2.2)$$

- Definiamo la moltiplicazione di due numeri complessi z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$ come:

$$(a, b) * (c, d) = (ac - db, ad + cb) \quad (2.3)$$

- Ed infine definiamo la coniugazione di un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ come:

$$(a, b)^* = (a, -b) \quad (2.4)$$

È immediato verificare che \mathbb{C} forma uno spazio vettoriale isomorfo a \mathbb{R}^2 con le operazioni di addizione per componenti e moltiplicazione per scalare.

Siamo ora dunque dotati di uno spazio vettoriale 2-dimensionale su \mathbb{R} con una sovrastruttura moltiplicativa definita dalla formula di sopra ed un'involuzione 1-aria che abbiamo chiamato “coniugazione”. Non ci resta che verificare che tale sovrastruttura moltiplicativa soddisfi gli assiomi necessari affinchè possa essere chiamata una \mathbb{R} -Algebra associativa.

Proposizione 2.1. *Il prodotto precedentemente definito sull'insieme di doppiette (a,b) con $a,b \in \mathbb{R}$ soddisfa le seguenti proprietà: siano $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora:*

1. $z_1(z_2z_3) = (z_1z_2)z_3$ (*Associativa*).
2. $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (*Distributiva destra*).
3. $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ (*Distributiva sinistra*).
4. $\lambda(z_1z_2) = (\lambda z_1)(z_2) = (z_1)(\lambda z_2)$ (*Proprietà associativa del prodotto per scalare*).

Inoltre, la struttura presenta un'identità moltiplicativa, la doppietta $(1,0) = 1_{\mathbb{C}}$. Sia $\mathbb{C} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ l'insieme delle doppiette di numeri reali. In altre parole lo spazio vettoriale che \mathbb{C} forma con le operazioni di addizione per componenti e moltiplicazione per scalare forma una \mathbb{R} -Algebra associativa unitaria se considerato con la sovrastruttura moltiplicativa definita prima.

Dimostrazione. Poniamo $z_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $z_2 = (\alpha_2, \beta_2)$, $z_3 = (\alpha_3, \beta_3)$ con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

$$1. z_2 z_3 = (\alpha_2 \alpha_3 - \beta_2 \beta_3, \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) \implies$$

$$z_1(z_2 z_3) = (\alpha_1(\alpha_2 \alpha_3 - \beta_2 \beta_3) - \beta_1(\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2), \alpha_1(\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) + \beta_1(\alpha_2 \alpha_3 - \beta_2 \beta_3)) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \beta_2 \beta_3 - \beta_1 \alpha_2 \beta_3 - \beta_1 \alpha_3 \beta_2, \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 - \beta_1 \beta_2 \beta_3)$$

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2, \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \implies$$

$$(z_1 z_2) z_3 = ((\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) \alpha_3 - (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \beta_3, (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) \beta_3 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \alpha_3) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1 \beta_2 \beta_3 - \beta_1 \alpha_2 \beta_3 - \beta_1 \alpha_3 \beta_2, \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_1 \alpha_3 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 - \beta_1 \beta_2 \beta_3)$$

$$\implies (z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$$

$$2. z_1(z_2 + z_3) = (\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 + \beta_3) = (\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_1(\beta_2 + \beta_3), \beta_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_1(\beta_2 + \beta_3)) = (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 - \beta_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_3, \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3)$$

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2, \beta_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2)$$

$$z_1 z_3 = (\alpha_1 \alpha_3 - \beta_1 \beta_3, \beta_1 \alpha_3 + \alpha_1 \beta_3)$$

$$\implies z_1 z_2 + z_1 z_3 = (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 - \beta_1 \beta_2 - \beta_1 \beta_3, \beta_1 \alpha_2 + \beta_1 \alpha_3 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_3) = z_1(z_2 + z_3)$$

3. Del tutto analogo al secondo, lasciato come esercizio al lettore.

$$4. \lambda(z_1 z_2) = \lambda(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2, \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) = (\lambda \alpha_1 \alpha_2 - \lambda \beta_1 \beta_2, \lambda \alpha_1 \beta_2 + \lambda \beta_1 \alpha_2)$$

$$(\lambda z_1)(z_2) = (\lambda \alpha_1, \lambda \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) = (\lambda \alpha_1 \alpha_2 - \lambda \beta_1 \beta_2, \lambda \alpha_1 \beta_2 + \lambda \beta_1 \alpha_2) = \lambda(z_1 z_2)$$

$$(z_1)(\lambda z_2) = (\alpha_1, \beta_1)(\lambda \alpha_2, \lambda \beta_2) = (\lambda \alpha_1 \alpha_2 - \lambda \beta_1 \beta_2, \lambda \alpha_1 \beta_2 + \lambda \beta_1 \alpha_2) = \lambda(z_1 z_2)$$

$$\implies \lambda(z_1 z_2) = (\lambda z_1)(z_2) = (z_1)(\lambda z_2)$$

□

L'algebra appena considerata, tuttavia, presenta alcune proprietà extra che la rendono un campo. Infatti, essa è commutativa, ed ogni numero complesso diverso da zero $z = (\alpha, \beta)$ ha un inverso moltiplicativo $z^{-1} = (\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2})$.

Infine, definiamo il concetto di norma di un numero complesso:

$$|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (2.5)$$

Che coincide con la norma euclidea 2-dimensionale. Tale norma ci permette di indurre una metrica:

$$\delta(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2} \quad (2.6)$$

fornendo dunque i complessi anche di una sovrastruttura topologica di spazio metrico, con cui andremo a studiare la classica analisi complessa. Ora non ci resta che ripetere una procedura non di molto dissimile per costruire il corpo dei quaternioni, e dotarlo di una metrica che ci permetterà di dotarlo di una struttura topologica che ci permetterà di studiare l'analisi sul suddetto.

2.1.2 La costruzione di Cayley-Dickson dei quaternioni

Definiamo ora i quaternioni $\mathbb{H} = \{(u, v) ; u, v \in \mathbb{C}\}$ come una doppietta di numeri complessi. Definiamo ora quella che chiameremo relazione d'equivalenza canonica sui quaternioni.

Definizione 2.2. Due quaternioni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$; $q_1 = (\alpha_1, \beta_1), q_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ con $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ si dicono uguali se e solo se $\alpha_1 =_{\mathbb{C}} \alpha_2$ e $\beta_1 =_{\mathbb{C}} \beta_2$, dove qui $=_{\mathbb{C}}$ indica la relazione d'equivalenza canonica definita prima sui numeri complessi. Se due quaternioni sono uguali, scriveremo: $q_1 =_{\mathbb{H}} q_2$.

È elementare la dimostrazione del fatto che tale relazione sia una relazione d'equivalenza sull'insieme dei quaternioni, pertanto lasceremo la verifica al lettore.

Per alleggerire la notazione, scriveremo tale relazione d'equivalenza appena introdotta come semplicemente $=$. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, con $q_1 = (u_1, v_1), q_2 = (u_2, v_2)$, $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{C}$. Definiremo analogamente a come fatto prima l'addizione per componenti e la moltiplicazione per scalari come:

$$q_1 + q_2 = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \quad (2.7)$$

$$\lambda q_1 = (\lambda u_1, \lambda v_1) \quad (2.8)$$

Sotto tali operazioni \mathbb{H} forma uno spazio vettoriale reale 4-dimensionale. Ci tocca ora munirli, tramite la costruzione di Cayley-Dickson, di una sovrastruttura moltiplicativa e di un'involuzione che chiameremo coniugazione quaternionica:

$$(u_1, v_1) * (u_2, v_2) = (u_1 u_2 - v_2 v_1^*, u_1^* v_2 + u_2 v_1) \quad (2.9)$$

$$(u, v)^* = (u^*, -v) \quad (2.10)$$

Proposizione 2.2. \mathbb{H} , dotato delle operazioni di addizione per componenti $+$, moltiplicazione per uno scalare e della moltiplicazione $*$ definita previa-mente forma una \mathbb{R} -Algebra associativa. In altre parole, la moltiplicazione $*$ soddisfa i seguenti assiomi:

Sia $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $q_1(q_2q_3) = (q_1q_2)q_3$ (*Associativa*).
2. $q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3$ (*Distributiva destra*).
3. $(q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3$ (*Distributiva sinistra*).
4. $\lambda(q_1q_2) = (\lambda q_1)(q_2) = (q_1)(\lambda q_2)$ (*Proprietà associativa del prodotto per scalare*).

Dimostrazione. Siano $q_1 = (\alpha_1, \beta_1)$, $q_2 = (\alpha_2, \beta_2)$, $q_3 = (\alpha_3, \beta_3)$, con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}; i = 1, 2, 3$.

1. $q_1q_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_2\beta_1^*, \alpha_1^*\beta_2 + \alpha_2\beta_1) \implies$
 $(q_1q_2)q_3 = ((\alpha_1\alpha_2 - \beta_2\beta_1^*)\alpha_3 - (\alpha_1^*\beta_2 + \alpha_2\beta_1)^*\beta_3, (\alpha_1\alpha_2 - \beta_2\beta_1^*)^*\beta_3 + \alpha_3(\alpha_1^*\beta_2 + \alpha_2\beta_1)) = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_2\beta_1^*\alpha_3 - \alpha_1\beta_2^*\beta_3 - \alpha_2^*\beta_1^*\beta_3, \alpha_1^*\alpha_2^*\beta_3 - \beta_2^*\beta_1\beta_3 + \alpha_3\alpha_1^*\beta_2 + \alpha_3\alpha_2\beta_1)$
 $q_2q_3 = (\alpha_2\alpha_3 - \beta_3\beta_2^*, \alpha_2^*\beta_3 + \beta_2\alpha_3) \implies$
 $q_1(q_2q_3) = (\alpha_1(\alpha_2\alpha_3 - \beta_3\beta_2^*) - \beta_1^*(\alpha_2^*\beta_3 + \beta_2\alpha_3), \alpha_1^*(\alpha_2^*\beta_3 + \beta_2\alpha_3) + \beta_1(\alpha_2\alpha_3 - \beta_3\beta_2^*)) = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\beta_3\beta_2^* - \beta_1^*\alpha_2^*\beta_3 - \beta_1^*\beta_2\alpha_3, \alpha_1^*\alpha_2^*\beta_3 + \alpha_1^*\beta_2\alpha_3 + \beta_1\alpha_2\alpha_3 - \beta_1\beta_3\beta_2^*) \implies$
 $(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3)$
2. $q_2 + q_3 = (\alpha_2 + \alpha_3, \beta_2 + \beta_3) \implies$
 $q_1(q_2 + q_3) = (\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) - \beta_1^*(\beta_2 + \beta_3), \alpha_1^*(\beta_2 + \beta_3) + \beta_1(\alpha_2 + \alpha_3)) = (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 - \beta_1^*\beta_2 - \beta_1^*\beta_3, \alpha_1^*\beta_2 + \alpha_1^*\beta_3 + \beta_1\alpha_2 + \beta_1\alpha_3)$
 $q_1q_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1^*\beta_2, \alpha_1^*\beta_2 + \beta_1\alpha_2) \wedge q_1q_3 = (\alpha_1\alpha_3 - \beta_1^*\beta_3, \alpha_1^*\beta_3 + \beta_1\alpha_3) \implies$
 $q_1q_2 + q_1q_3 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1^*\beta_2 + \alpha_1\alpha_3 - \beta_1^*\beta_3, \alpha_1^*\beta_2 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_1^*\beta_3 + \beta_1\alpha_3) = q_1(q_2 + q_3)$
3. Dimostrazione analoga alla precedente, lasciata come esercizio al lettore.
4. $\lambda(q_1q_2) = \lambda(\alpha_1\alpha_2 - \beta_2\beta_1^*, \alpha_1^*\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = (\lambda\alpha_1\alpha_2 - \lambda\beta_2\beta_1^*, \lambda\alpha_1^*\beta_2 + \lambda\alpha_2\beta_1)$
 $(\lambda q_1)(q_2) = (\lambda\alpha_1, \lambda\beta_1)(\alpha_2, \beta_2) = ((\lambda\alpha_1)\alpha_2 - (\lambda\beta_1)^*\beta_2, (\lambda\alpha_1)^*\beta_2 + \alpha_2(\lambda\beta_1)) = (\lambda\alpha_1\alpha_2 - \lambda\beta_2\beta_1^*, \lambda\alpha_1^*\beta_2 + \lambda\alpha_2\beta_1) = \lambda(q_1q_2)$
 $q_1(\lambda q_2) = (\alpha_1, \beta_1)(\lambda\alpha_2, \lambda\beta_2) = (\alpha_1(\lambda\alpha_2) - \beta_1^*(\lambda\beta_2), \alpha_1^*(\lambda\beta_2) + (\lambda\alpha_2)\beta_1) = (\lambda\alpha_1\alpha_2 - \lambda\beta_2\beta_1^*, \lambda\alpha_1^*\beta_2 + \lambda\alpha_2\beta_1) \implies$
 $\lambda(q_1q_2) = (\lambda q_1)(q_2) = q_1(\lambda q_2)$

□

I quaternioni presentano inoltre un'identità moltiplicativa, $1_{\mathbb{H}} = (1, 0)$. Per alleggerire la notazione la chiameremo d'ora in poi semplicemente 1. I quaternioni sono dunque una \mathbb{R} -Algebra associativa unitaria.

Essendo un quaternione definito come una doppietta di numeri complessi, ed essendo a loro volta i numeri complessi una doppietta di reali, segue che potremo rappresentare un quaternione come una quaterna di numeri reali; $q = (a, b, c, d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

D'ora in poi, inoltre, adopereremo la seguente notazione: indicheremo un quaternione $q = (a, b, c, d) \in \mathbb{H}$ come $q = a + bi + cj + dk$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e dove $i = (i, 0)$, $j = (0, 1)$ e $k = (0, i)$.

Teorema 2.1 (Regola di Hamilton). *Siano i, j, k definiti come prima. Allora vale la seguente equazione:*

- $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

Dimostrazione. $i^2 = (i, 0)(i, 0) = (-1 - 0, (-i)(0) + (0)(i)) = (-1, 0) = -1$

$$j^2 = (0, 1)(0, 1) = ((0)(0) - (1)^*(1), 0 + 0) = (-1, 0) = -1$$

$$k^2 = (0, i)(0, i) = (0 - (-i)(i), 0) = (-1, 0) = -1$$

$$ijk = (i, 0)(0, 1)(0, i) = (0, -i)(0, i) = (-1, 0) = -1$$

□

Corollario. *Siano i, j, k definiti come prima. Allora valgono le seguenti equazioni:*

- $ij = k = -ji$
- $jk = i = -kj$
- $ki = j = -ik$

Dimostrazione. L'asserto segue come corollario immediato del teorema di prima, con una semplice manipolazione algebrica delle equazioni. □

Possiamo racchiudere i risultati appena ottenuti con il seguente diagramma:

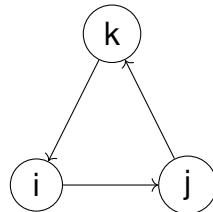


Figura 2.1: Grafico moltiplicativo delle unità immaginarie dei quaternioni.

La chiave di lettura del grafico è la seguente: ci muoviamo tra due unità (che abbiamo raffigurato come dei vertici) muovendoci sulle frecce che le collegano. Se seguiamo la direzione della freccia, allora otteniamo l'elemento successivo, se invece ci muoviamo in direzione contraria rispetto a quella della freccia otteniamo l'elemento successivo negato (cioè con segno opposto).

2.1.3 Operazioni algebriche di base dei quaternioni in termini delle loro 4 componenti

Una volta espressi i quaternioni in questa forma "operativa", di certo più agevole rispetto a quella vista in precedenza nella costruzione algebrica dei suddetti, deriviamo delle formule per le varie operazioni algebriche dei quaternioni che abbiamo visto in termini delle loro 4 componenti a, b, c, d , cominciando dalle operazioni binarie:

Siano $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ due quaternioni con $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$ con $i = 1, 2$. L'addizione è immediata:

- $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$

La sottrazione tra q_1 e q_2 è semplicemente l'addizione a q_1 dell'inverso additivo di q_2 , esistente grazie alla struttura sottostante di spazio vettoriale:

- $q_1 - q_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)k$

La moltiplicazione invece:

- $q_1q_2 = (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) = a_1a_2 + a_1b_2i + a_1c_2j + a_1d_2k + b_1a_2i + b_1b_2i^2 + b_1c_2ij + b_1d_2ik + c_1a_2j + c_1b_2ji + c_1c_2j^2 + c_1d_2jk + d_1a_2k + d_1b_2ki + d_1c_2kj + d_1d_2k^2$

Che semplificando diventa:

- $q_1 q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 - d_1 c_2 + c_1 d_2)i + (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k$

Per l'operazione 1-aria della coniugazione quaternionica invece, banalmente:

- $q_1^* = a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k$

Esercizio 2.1. Siano q_1, q_2 due quaternioni. Calcolare il loro commutatore $[q_1, q_2] = q_1 q_2 - q_2 q_1$.

Esercizio 2.2. Siano $q_1 = 2j - 3k$, $q_2 = 3 - i - j + k$ e $q_3 = i$ dei quaternioni; calcolare:

- a $q_1 - 5q_2$
- b $q_1 q_2$
- c $q_2 q_1$
- d $q_1 q_3 - q_2$
- e $(q_3 q_2)^*$
- f $q_2^* q_3^*$

Gli ultimi due quesiti dell'esercizio precedente avrebbero dovuto far notare qualcosa al lettore: sono uguali. Ciò è vero in generale? La risposta è affermativa. Motivati da questa osservazione, vediamo ora alcune delle proprietà della coniugazione quaternionica.

Proposizione 2.3. Siano q_1 e q_2 due quaternioni e λ un numero reale, allora:

- $(q_1 \pm q_2)^* = q_1^* \pm q_2^*$ (linearità additiva).
- $(q_1^*)^* = q_1$ (* è un'involuzione).
- $(q_1 q_2)^* = q_2^* q_1^*$.
- $(\lambda q_1)^* = \lambda q_1^*$ (linearità rispetto alla moltiplicazione per scalare).
- $q_1^* q_1 = q_1 q_1^* = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \in \mathbb{R}^+$, diversa da zero per ogni $q_1 \neq 0$.
- $q_1 + q_1^* = 2a_1 \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. • $q_1 \pm q_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i + (c_1 \pm c_2)j + (d_1 \pm d_2)k$
 $\Rightarrow (q_1 \pm q_2)^* = (a_1 \pm a_2) - (b_1 \pm b_2)i - (c_1 \pm c_2)j - (d_1 \pm d_2)k = (a_1 \pm a_2) +$

$$(-b_1 \mp b_2)i + (-c_1 \mp c_2)j + (-d_1 \mp d_2)k = q_1^* \pm q_2^*.$$

- $q_1^* = a_1 - b_1i - c_1j - d_1k \Rightarrow (q_1^*)^* = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k.$
- $(q_1q_2)^* = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1a_2 - d_1c_2 + c_1d_2)i - (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k$
 $q_2^*q_1^* = (a_2 - b_2i - c_2j - d_2k)(a_1 - b_1i - c_1j - d_1k) = a_2a_1 - a_2b_1i - a_2c_1j - a_2d_1k - b_2a_1i - b_1b_2 + b_2c_1ij + b_2d_1ik - c_2a_1j + c_2b_1ji - c_2c_1 + c_2d_1jk - d_2a_1k + d_2b_1ki + d_2c_1kj - d_2d_1 = a_2a_1 - a_2b_1i - a_2c_1j - a_2d_1k - b_2a_1i - b_1b_2 + b_2c_1k - b_2d_1j - c_2a_1j - c_2b_1k - c_2c_1 + c_2d_1i - d_2a_1k + d_2b_1j - d_2c_1i - d_2d_1 = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1a_2 - d_1c_2 + c_1d_2)i - (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j - (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k = (q_1q_2)^*.$
- $(\lambda q_1)^* = (\lambda a_1 + \lambda b_1i + \lambda c_1j + \lambda d_1k)^* = \lambda a_1 - \lambda b_1i - \lambda c_1j - \lambda d_1k = \lambda q_1^*.$
- Per alleggerire la notazione chiamiamo qui q_1 semplicemente $q = a + bi + cj + dk$.
 $qq^* = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 - abi - acj - adk + abi + b^2 - bcij - bdik + caj - cbji + c^2 - cdjk + dak - dbki - dckj + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bck + bdj + cbk - cdi - dbj + dici = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, che è un numero reale non negativo.
 $q^*q = (a - bi - cj - dk)(a + bi + cj + dk) = a^2 + abi + acj + adk - abi + b^2 - bcij - bdik - caj - cbji + c^2 - cdjk - dak - dbki - dckj + d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - bck + bdj + cbk - cdi - dbj + dici = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = qq^*.$
- $q + q^* = a + bi + cj + dk + a - bi - cj - dk = 2a.$

□

Notiamo che la coniugazione quaternionica è un antiautomorfismo di corpo, i.e è una funzione bigettiva che preserva l'addizione ma inverte l'ordine della moltiplicazione.

Definizione 2.3. Diciamo che un'Algebra \mathbb{A} sui reali dotata di un'applicazione lineare involutiva $* : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tale che $\forall a, b \in \mathbb{A}, (ab)^* = b^*a^*$, è ben normata se $\forall a \in \mathbb{A}$ diverso dall'identità additiva:

1. $aa^* = a^*a$ è un numero reale > 0 .
2. $a + a^* \in \mathbb{R}$.

Segue come corollario immediato della proposizione 2.3 che l'algebra dei quaternioni è un'algebra ben normata.

Esercizio 2.3. Dimostra i seguenti fatti:

- La \mathbb{R} -Algebra associativa unitaria dei complessi è ben normata.
- La coniugazione complessa è un automorfismo del campo \mathbb{C} .

La coniugazione quaternionica ci permette dunque di definire un concetto di lunghezza e di distanza sui quaternioni (una norma e una metrica indotta da quest'ultima), che coincide esattamente con la lunghezza e la distanza euclidea 4-dimensionale.

Definizione 2.4 (Norma di un quaternione). Sia $q = a + bi + cj + dk$ un quaternione.

Chiamiamo $\|q\| = \sqrt{qq^*} = \sqrt{q^*q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ la norma del quaternione q .

È immediato verificare che essa forma una norma sullo spazio vettoriale in considerazione.

Nota Storica 2.1. Hamilton, nei suoi lavori originali definì la norma di un quaternione $\|q\|$ con il nome alternativo di "tensore" di q , utilizzando la notazione Tq [Nota 2.1]. C'è da notare che qui la parola tensore non ha nulla a che fare con ciò che intendiamo come tensore oggigiorno, ma bensì qui va a indicare semplicemente un numero reale non negativo, che Hamilton definì come un numero "senza segno".

Andiamo ora a vedere alcune delle proprietà della norma quaternionica.

Proposizione 2.4. Siano $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$; allora:

- $\|q_1q_2\| = \|q_1\|\|q_2\|$
- $\|q_1^*\| = \|-q_1\| = \|q_1\|$

Dimostrazione. Dimostriamo solo il primo in quanto il secondo è banalmente vero poiché nella coniugazione o nella negazione di un quaternione alcune componenti sono negate, e ciò non cambia il valore del loro quadrato.

Sia $\alpha = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2$

$\beta = a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2$

$\gamma = a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2$

$\delta = a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 \implies \|q_1q_2\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$

Notiamo ora che:

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 + d_1^2 d_2^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 - 2a_1 a_2 c_1 c_2 - 2a_1 a_2 d_1 d_2 + 2b_1 b_2 c_1 c_2 + \\
 &\quad 2b_1 b_2 d_1 d_2 + 2c_1 c_2 d_1 d_2 \\
 \beta^2 &= -2a_2 b_1 c_2 d_1 + 2a_2 b_1 c_1 d_2 - 2a_1 b_2 c_2 d_1 + 2a_1 b_2 c_1 d_2 + a_2^2 b_1^2 + 2a_1 a_2 b_2 b_1 + a_1^2 b_2^2 + \\
 &\quad c_2^2 d_1^2 + c_1^2 d_2^2 - 2c_1 c_2 d_1 d_2 \\
 \gamma^2 &= 2a_2 b_2 c_1 d_1 - 2a_2 b_1 c_1 d_2 + 2a_1 b_2 c_2 d_1 - 2a_1 b_1 c_2 d_2 + a_2^2 c_1^2 + 2a_1 a_2 c_2 c_1 + a_1^2 c_2^2 + \\
 &\quad b_2^2 d_1^2 + b_1^2 d_2^2 - 2b_1 b_2 d_1 d_2 \\
 \delta^2 &= -2a_2 b_2 c_1 d_1 - 2a_1 b_2 c_1 d_2 + 2a_2 b_1 c_2 d_1 + 2a_1 b_1 c_2 d_2 + a_2^2 d_1^2 + a_1^2 d_2^2 + 2a_1 a_2 d_1 d_2 + \\
 &\quad b_2^2 c_1^2 - 2b_1 b_2 c_2 c_1 + b_1^2 c_2^2 \\
 \implies \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 &= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 + c_1^2 c_2^2 + d_1^2 d_2^2 + a_1^2 b_2^2 + b_1^2 a_2^2 + c_1^2 d_2^2 + d_1^2 c_2^2 + a_1^2 c_2^2 + \\
 &\quad b_1^2 d_2^2 + c_1^2 a_2^2 + d_1^2 b_2^2 + a_1^2 d_2^2 + b_1^2 c_2^2 + c_1^2 b_2^2 + d_1^2 a_2^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) \\
 \implies \|q_1 q_2\| &= \sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)} = \\
 &\quad \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2} = \|q_1\| \|q_2\|
 \end{aligned}$$

□

Nota Storica 2.2. La prima parte dell'asserto della proposizione 2.4 ha un interessante collegamento alla geometria e alla teoria dei numeri, e fu scoperta molto prima della scoperta dei quaternioni (quasi 100 anni prima) da Euler. Essa infatti prende il nome di "Identità dei quattro quadrati di Euler", che Euler scoprì mentre stava indagando sulle proprietà dei numeri naturali esprimibili come somma di 4 quadrati (di numeri naturali). Euler era interessato a tale classe di numeri in quanto voleva dimostrare che ogni numero naturale si potesse scrivere come somma dei quadrati di 4 numeri naturali; tale risultato fu dimostrato solo in seguito da Lagrange [Nota 2.2]. Il risultato in questione, che è ora noto con il nome di "teorema dei quattro quadrati", era già presente in forma congetturale nell'importante opera "Arithmetica" di Diofanto di Alessandria (purtroppo non tutta pervenutaci) [Nota 2.3].

Proposizione 2.5. Sia $q \in \mathbb{H}$ diverso da 0. Allora esiste un quaternione $q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$ tale che $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$.

Esercizio 2.4. Dimostrare la Proposizione 2.5.

Quest'ultima proprietà dei quaternioni ci conferma che essi sono un corpo, ossia un campo meno l'assioma di commutatività moltiplicativa.

Definizione 2.5. Siano $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Allora chiameremo $q_1 q_2^{-1}$ quoziante destro e $q_2^{-1} q_1$ quoziante sinistro.

Ritornando alla norma che abbiamo appena definito sui quaternioni, essa ci permette di definire una metrica, i.e un concetto di distanza tra 2

quaternioni.

$$\delta(q_1, q_2) = \|q_1 - q_2\| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2} \quad (2.11)$$

Proposizione 2.6. *La funzione $\delta : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ appena definita forma una metrica su \mathbb{H} , cioè soddisfa i seguenti assiomi $\forall q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$:*

- a) $\delta(q_1, q_2) \geq 0$.
- b) $\delta(q_1, q_2) = 0 \iff q_1 = q_2$.
- c) $\delta(q_1, q_2) = \delta(q_2, q_1)$ (*Simmetrica*).
- d) $\delta(q_1, q_2) \leq \delta(q_1, q_3) + \delta(q_3, q_2)$ (*Disuguaglianza del triangolo*).

Dimostrazione. Le prime due seguono come corollario immediato del fatto che \mathbb{H} è un'algebra ben normata. La terza è altrettanto immediata. La disuguaglianza del triangolo, invece, segue dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nel seguente modo: siano r, s due quaternioni, espandibili in componenti rispettivamente come $r = r_1 + r_2i + r_3j + r_4k$ e $s = s_1 + s_2i + s_3j + s_4k$, tale che $\|r + s\| \neq 0$. Osserviamo che:

$$\|r + s\|^2 = |r_1 + s_1|^2 + |r_2 + s_2|^2 + |r_3 + s_3|^2 + |r_4 + s_4|^2 = \sum_{i=1}^4 |r_i + s_i|^2$$

ma per le proprietà della norma canonica sui numeri reali $|| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sappiamo che $|r_i + s_i| \leq |r_i| + |s_i| \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, pertanto:

$$\|r + s\|^2 \leq \sum_{i=1}^4 |r_i + s_i|(|r_i| + |s_i|) = \sum_{i=1}^4 |r_i + s_i|r_i + \sum_{i=1}^4 |r_i + s_i|s_i$$

ma per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz avremo:

$$\sum_{i=1}^4 |r_i + s_i|r_i \leq \|r + s\| \cdot \|r\| \quad e \quad \sum_{i=1}^4 |r_i + s_i|s_i \leq \|r + s\| \cdot \|s\|$$

da cui:

$$\|r + s\|^2 \leq \|r + s\| \cdot \|r\| + \|r + s\| \cdot \|s\| = \|r + s\| \cdot (\|r\| + \|s\|) \implies \|r + s\| \leq \|r\| + \|s\|$$

Per ottenere la parte d della proposizione basta porre $r = q_1 - q_3$ e $s = q_3 - q_2$. \square

Nota Storica 2.3. Un quaternione con una lunghezza pari a 1, i.e un quaternione $q \in \mathbb{H}$ con $\|q\| = 1$, venne chiamato da Hamilton con il nome di versore [Nota 2.4]. Sono sicuro che tale denominazione non è nuova al lettore: l'avrà sicuramente incontrata in un corso introduttivo di algebra lineare. Ebbene, l'uso moderno di tale parola nell'ambito dell'algebra vettoriale è dovuto proprio a Hamilton e nacque proprio durante la stesura dei suoi testi circa la neonata algebra quaternionica.

2.2 Parte vettoriale e parte scalare di un quaternione

Considerando la sottostruttura di spazio vettoriale dei quaternioni analizzati finora, notiamo che essa è una somma diretta di 2 spazi vettoriali:

$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R} \oplus P \quad (2.12)$$

Dove P è uno spazio vettoriale reale 3-dimensionale euclideo. Scelta la base positivamente orientata e ortonormale $\{i, j, k\}$ possiamo scrivere un elemento $v \in P$ come $v = xi + yj + zk$ dove $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Quanto osservato previamente ci suggerisce di vedere un quaternione come un oggetto formato da un numero reale e da un vettore di \mathbb{R}^3 ; composto cioè di quelle che chiameremo una "parte scalare" e una "parte vettoriale".

Nota Storica 2.4. Come accennato prima, nei lavori di Hamilton sarà la prima istanza documentata dell'uso della parola "scalare" e "vettoriale" in lingua inglese nella letteratura matematica accademica [Nota 2.5]. Oggi giorno utilizziamo la parola vettore per indicare un elemento di uno spazio vettoriale. D'altro canto Hamilton, quando utilizzò tale parola, aveva un'idea strettamente geometrica in mente; un vettore era inteso come semplicemente una tripletta, visualizzabile geometricamente come una "freccia" nello spazio. In particolar modo, notò di poter scrivere un quaternione q come $q = Sq + Vq$, dove S e V indicano, rispettivamente, la sua parte scalare e vettoriale. Notò anche che un quaternione poteva essere scritto come un prodotto, $q = TqUq$, dove Tq denota il tensore di q e Uq il suo versore (la sua versione normalizzata).

Definizione 2.6. Sia $q = a + bi + cj + dk$ un quaternione. Allora diremo che $Sc(q) = \Re(q) = a = \frac{1}{2}(q + q^*)$ è la sua parte scalare (o reale), mentre diremo che $Vec(q) = \Im(q) = bi + cj + dk = \frac{1}{2}(q - q^*)$ è la sua parte vettoriale (o immaginaria).

Motivati dalla fisica, possiamo interpretare la parte scalare di un quaternione come la sua parte "temporale", e la sua parte immaginaria come la sua parte "spaziale", scrivendo dunque:

$$q = t + xi + yj + zk \quad (2.13)$$

con $t, x, y, z \in \mathbb{R}$.

Abbiamo visto nella scorsa sezione quanto fossero laboriose le operazioni algebriche con i quaternioni. Alle volte avremo bisogno di scrivere i quaternioni e le loro operazioni algebriche in una forma più compatta e breve; questa necessità ci motiva ad adoperare per la dimensione "spaziale" dei quaternioni la convenzione di Einstein, utilizzata massicciamente in analisi tensoriale per un motivo analogo (le espressioni tensoriali divengono rapidamente piene di sommatorie, che con questa convenzione decidiamo di omettere riportando solo gli indici ripetuti due volte, che diremo "indici muti"). Possiamo dunque scrivere un quaternione $q \in \mathbb{H}$ come:

$$q = t + xi + yj + zk = t + \sum_{i=1}^3 x_i e_i = t + x_i e_i \quad (2.14)$$

dove $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ e $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$.

Questa convenzione semplifica molte equazioni. Possiamo scrivere il coniugato quaternionico di q come:

$$q^* = t - x_i e_i \quad (2.15)$$

la somma (o sottrazione) come:

$$q_1 \pm q_2 = t_1 \pm t_2 + (x_{1i} \pm x_{2i}) e_i \quad (2.16)$$

la regola di Hamilton diventa:

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k \quad (2.17)$$

dove δ_{ij} è il delta di Kronecker e ϵ_{ijk} è il simbolo di Levi-Civita.

Ed infine il prodotto:

$$q_1 q_2 = t_1 t_2 + t_1 x_{2j} e_j + t_2 x_{1i} e_i + x_{1i} x_{2j} \epsilon_{ijk} e_k - x_{1i} x_{2j} \delta_{ij} \quad (2.18)$$

dove qui, come prima, $q_1 = t_1 + x_{1i} e_i = t_1 + x_{11} i + x_{12} j + x_{13} k$ e $q_2 = t_2 + x_{21} i + x_{22} j + x_{23} k$.

2.2.1 Operazioni vettoriali con i quaternioni

Definiamo ora, in termini quaternionici, alcune importanti operazioni effettuabili con i vettori:

Definizione 2.7 (Prodotto scalare di quaternioni). *Definiamo il prodotto scalare di 2 quaternioni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ come: $\langle q_1 | q_2 \rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 = \text{Sc}(q_1) \text{Sc}(q_2) + \langle \text{Vec}(q_1) | \text{Vec}(q_2) \rangle$, dove nella seconda espressione $\langle \bullet | \bullet \rangle$ denota il prodotto scalare canonico su \mathbb{R}^3 .*

Esercizio 2.5. Dimostrare che $\langle q_1 | q_2 \rangle = \text{Sc}(q_1 q_2^*) = \text{Sc}(q_2 q_1^*)$.

Utilizzando la convenzione di Einstein, possiamo scrivere il prodotto scalare come:

$$\langle q_1 | q_2 \rangle = t_1 t_2 + x_{1i} x_{2i} \quad (2.19)$$

Definizione 2.8 (Prodotto vettoriale di due quaternioni puri). *Siano q_1, q_2 due quaternioni puri, cioè due quaternioni la cui parte reale è uguale a 0, della forma $q_1 = x_1 i + y_1 j + z_1 k, q_2 = x_2 i + y_2 j + z_2 k$. Definiamo il prodotto vettoriale come:*

$$q_1 \times q_2 = \text{Vec}(q_1 q_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1)i + (x_2 z_1 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)k \quad (2.20)$$

Talvolta, compiendo un abuso di notazione, ci rammentiamo della formula di un prodotto vettoriale di due quaternioni puri q_1 e q_2 con il determinante della seguente matrice formale:

$$q_1 \times q_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

Usando la convenzione di Einstein, possiamo scrivere il prodotto vettoriale in maniera più compatta utilizzando il simbolo di Levi-Civita:

$$q_1 \times q_2 = \epsilon_{ijk} x_{1j} x_{2k} e_i \quad (2.22)$$

Dove qui $x_{11} = x_1, x_{12} = y_1, x_{13} = z_1, x_{21} = x_2, x_{22} = y_2, x_{23} = z_2$.

Geometricamente, il prodotto vettoriale di 2 quaternioni puri è un altro quaternione puro, con modulo uguale all'area del parallelogramma individuato dai 2 quaternioni in questione, direzione perpendicolare al piano individuato dalla coppia di quaternioni e verso uscente o entrante dal piano dei 2 quaternioni.

Proposizione 2.7. Siano $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{P}^3$ quaternioni puri, allora:

$$q_1 \times (q_2 \times q_3) = \langle q_1 | q_3 \rangle q_2 - \langle q_1 | q_2 \rangle q_3 \quad (2.23)$$

Dimostrazione. $q_1 \times (q_2 \times q_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ y_2 z_3 - z_2 y_3 & z_2 x_3 - x_2 z_3 & x_2 y_3 - y_2 x_3 \end{vmatrix} =$

$(x_2 y_3 y_1 - y_2 x_3 y_1 - z_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 z_3)i + (z_1 y_2 z_3 - z_2 y_3 z_1 - x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3)j +$
 $(x_1 z_2 x_3 - x_1 x_2 z_3 - y_1 y_2 z_3 + z_2 y_3 y_1)k$

$\langle q_1 | q_3 \rangle q_2 = (x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3)(x_2 i + y_2 j + z_2 k) = x_1 x_3 x_2 i + x_1 x_3 y_2 j + x_1 x_3 z_2 k +$
 $y_1 y_3 x_2 i + y_1 y_2 y_3 j + y_1 y_3 z_2 k + z_1 z_3 x_2 i + z_1 z_3 y_2 j + z_1 z_3 z_2 k$

$\langle q_1 | q_2 \rangle q_3 = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)(x_3 i + y_3 j + z_3 k) = x_1 x_2 x_3 i + x_1 x_2 y_3 j + x_1 x_2 z_3 k +$
 $y_1 y_2 x_3 i + y_1 y_2 y_3 j + y_1 y_2 z_3 k + z_1 z_2 x_3 i + z_1 z_2 y_3 j + z_1 z_2 z_3 k \implies$

$\langle q_1 | q_3 \rangle q_2 - \langle q_1 | q_2 \rangle q_3 = (x_2 y_3 y_1 - y_2 x_3 y_1 - z_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 z_3)i + (z_1 y_2 z_3 - z_2 y_3 z_1 -$
 $x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3)j + (x_1 z_2 x_3 - x_1 x_2 z_3 - y_1 y_2 z_3 + z_2 y_3 y_1)k = q_1 \times (q_2 \times q_3) \quad \square$

Essendo del tutto analogo a quello su \mathbb{R}^3 , esso ha le stesse proprietà probabilmente già note al lettore, che riportiamo di seguito:

Proposizione 2.8. Sia \times il prodotto vettoriale di 2 quaternioni puri appena definito. Allora esso ha le seguenti proprietà:

- $q_1 \times q_1 = 0$ (*Idempotenza*).
- $q_1 \times q_2 = -q_2 \times q_1$ (*Anticommutatività*).
- $q_1 \times (q_2 + q_3) = q_1 \times q_2 + q_1 \times q_3$ (*Distributiva*).
- $q_1 \times (q_2 \times q_3) + q_2 \times (q_3 \times q_1) + q_3 \times (q_1 \times q_2) = 0$ (*Identità di Jacobi*).

Dimostrazione. • $q \times q = (yz - yz)i + (xz - xz)j + (xy - xy)k = 0$.

• $q_1 \times q_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)i + (x_2 z_1 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)k$.
 $q_2 \times q_1 = (y_2 z_1 - y_1 z_2)i + (x_1 z_2 - x_2 z_1)j + (x_2 y_1 - x_1 y_2)k = -q_1 \times q_2$.

• $q_1 \times q_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_1 z_3 - y_3 z_1)i + (x_3 z_1 - x_1 z_3)j + (x_1 y_3 - x_3 y_1)k$

$q_1 \times q_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1)i + (x_2 z_1 - x_1 z_2)j + (x_1 y_2 - x_2 y_1)k$

$q_1 \times (q_2 + q_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 + y_1 z_3 - z_1 y_2 - z_1 y_3)i +$
 $(z_1 x_2 + z_1 x_3 - x_1 z_2 - x_1 z_3)j + (x_1 y_2 + x_1 y_3 - y_1 x_2 - y_1 x_3)k = q_1 \times q_2 + q_1 \times q_3$.

- Utilizzando tre volte il risultato della proposizione 2.7: $q_1 \times (q_2 \times q_3) + q_2 \times (q_3 \times q_1) + q_3 \times (q_1 \times q_2) = \langle q_1 | q_3 \rangle q_2 - \langle q_1 | q_2 \rangle q_3 + \langle q_2 | q_1 \rangle q_3 - \langle q_2 | q_3 \rangle q_1 + \langle q_3 | q_2 \rangle q_1 - \langle q_3 | q_1 \rangle q_2 = 0$.

□

Proposizione 2.9. Sia \times il prodotto vettoriale di 2 quaternioni puri appena definito. Allora:

- $i \times j = k$.
- $j \times k = i$.
- $k \times i = j$.

Dimostrazione. • $i \times j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0(0) - 0(1))i - (1(0) - 0(0))j + (1(0) - 0(0))k = k$.

• $j \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 0)i - (0(1) - 0(0))j + (0(0) - 1(0))k = i$.

• $k \times i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0(0) - 1(0))i - (0(0) - 1(0))j + (0(0) - 1(0))k = j$.

□

Esercizio 2.6. Sia $q_1 = j - k$, $q_2 = -i + k$, $q_3 = -2k$:

- Calcolare: $q_1 \times q_2$
- Calcolare $q_3 \times q_2$
- Calcolare $\langle q_1 | q_3 \rangle$
- Verificare l'identità di Jacobi per q_1, q_2 e q_3

Le nozioni algebriche appena introdotte ci permettono anche di riesprimere le operazioni algebriche elementari dei quaternioni in termine di operazioni sulle loro parti scalari e vettoriali. Sia q un quaternione $q \in \mathbb{H}$; possiamo vederlo come una doppietta, stavolta composta da, come chiamati originariamente da Hamilton, uno scalare $\text{Sc}(q)$, e un vettore $\text{Vec}(q) \in P$: $q = (\text{Sc}(q), \text{Vec}(q))$.

Possiamo in questa forma, riscrivere la moltiplicazione di due quaternioni $q_1 = (a_1, v_1)$, $q_2 = (a_2, v_2)$ come:

$$q_1 q_2 = (a_1 a_2 - \langle v_1 | v_2 \rangle, a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \times v_2) \quad (2.24)$$

e la loro somma, banalmente, come:

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2, v_1 + v_2) \quad (2.25)$$

Definiamo ora altre operazioni sui quaternioni:

Definizione 2.9. Siano q_1 e q_2 due quaternioni. Chiameremo allora:

$$(q_1, q_2)_\varepsilon = \frac{q_1^* q_2 + q_2^* q_1}{2} \quad (2.26)$$

il prodotto esterno euclideo di 2 quaternioni.

Proposizione 2.10. Siano q_1 e q_2 due quaternioni, allora:

$$(q_1, q_2)_\varepsilon = \text{Sc}(q_1) \text{Vec}(q_2) - \text{Sc}(q_2) \text{Vec}(q_1) - \text{Vec}(q_1) \times \text{Vec}(q_2) \quad (2.27)$$

Dimostrazione. Calcolo diretto, lasciato come esercizio al lettore. \square

L'ultima proposizione ci fa notare un fatto: il prodotto esterno euclideo di 2 quaternioni vive nello spazio dei quaternioni puri P .

Definizione 2.10. Siano q_1 e q_2 due quaternioni. Chiamiamo:

$$(q_1, q_2)_{pari} = \frac{q_1 q_2 + q_2 q_1}{2} \quad (2.28)$$

il prodotto pari di due quaternioni o, alternativamente, il prodotto interno di Grassman.

Il prodotto appena definito può essere alternativamente definito come la metà dell'anti-commutatore $\{q_1, q_2\}$ di due quaternioni, i.e:

$$(q_1, q_2)_{pari} = \frac{1}{2} \{q_1, q_2\}$$

2.3 Forma polare di un quaternione

Analogamente al caso complesso, possiamo esprimere i quaternioni in una forma polare, cioè in una forma che espliciti la loro norma, il loro argomento e, per i quaternioni, anche il loro segno (che definiremo di qui a breve). [Nota: d'ora in poi, essendo venuta a mancare l'ambiguità presente all'inizio di questo capitolo tra il valore assoluto di \mathbb{R} e la norma quaternionica $\| \cdot \|$, utilizzeremo intercambiabilmente i simboli $\| \cdot \|$ e $| \cdot |$ per indicare la norma di un quaternione, prediligendo l'ultimo per rendere le nostre espressioni più "pulite"].

Sia q un quaternione con parte vettoriale diversa da 0; $q = \text{Sc}(q) + \text{Vec}(q) = |q| \left(\frac{\text{Sc}(q)}{|q|} + \frac{|\text{Vec}(q)|}{|q|} \frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|} \right)$.

Siccome $|q| = |q| \cdot \left| \frac{\text{Sc}(q)}{|q|} + \frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|} \right|$, segue che $\left| \frac{\text{Sc}(q)}{|q|} + \frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|} \right| = 1$, dunque:

$$\left(\frac{\text{Sc}(q)}{|q|} \right)^2 + \left(\frac{|\text{Vec}(q)|}{|q|} \right)^2 = 1 \quad (2.29)$$

Inoltre:

$$\frac{\text{Sc}(q)}{|q|} \leq 1 \quad (2.30)$$

$$\frac{|\text{Vec}(q)|}{|q|} \leq 1 \quad (2.31)$$

Esiste dunque un angolo θ tale che:

$$\cos(\theta) = \frac{\text{Sc}(q)}{|q|}$$

e

$$\sin(\theta) = \frac{|\text{Vec}(q)|}{|q|}$$

Da cui segue che potremo scrivere un quaternione con parte vettoriale non pari a zero come:

$$q = |q| \left(\cos(\theta) + \frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|} \sin(\theta) \right) \quad (2.32)$$

Chiamiamo questa la **forma polare di un quaternione**.

Introduciamo ora un po' di notazione; chiamiamo l'angolo θ l'argomento di q , scritto $\theta = \arg(q)$, chiamiamo inoltre $\frac{q}{|q|}$ il segno di q , o alternativamente il versore di q , scritto come $\text{sgn}(q) = Uq = \frac{q}{|q|}$.

Possiamo riscrivere quindi l'equazione (2.32) come:

$$q = |q|(\cos(\arg(q)) + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin(\arg(q))) \quad (2.33)$$

Analogamente a come fatto per i numeri complessi, chiameremo la restrizione dell'argomento tra 0 e π l'argomento principale di q , che denoteremo con il simbolo $\text{Arg}(q)$.

Esercizio 2.7. Trovare l'argomento e scrivere la rappresentazione polare dei seguenti quaternioni:

1. $1 + 4j - 2k$
2. $i - j$
3. $1 + i + j + k$
4. $-1 - i - j$

Ricordiamo che per i numeri complessi è valida la seguente relazione:

$$zw = |z||w|(\cos(\arg(z) + \arg(w)) + i \sin(\arg(z) + \arg(w)))$$

i.e il prodotto di numeri complessi z e w ha come norma (geometricamente la componente radiale) il prodotto delle norme di z e w , e come argomento la somma degli argomenti. Ciò è valido anche per i quaternioni, con un'eccezione: i quaternioni che moltiplichiamo devono avere parti vettoriali proporzionali, i.e le loro parti vettoriali devono avere la stessa direzione. Nella forma polare di un quaternione, infatti, avremo che $\sin(\arg(q))$ scalerà un'unità vettoriale arbitraria vivente sulla sfera S^2 (il versore $\text{sgn}(\text{Vec}(q))$, esso vive sulla sfera $S^2 \subset \mathbf{P}$ in quanto è un vettore normale dello spazio vettoriale tridimensionale dei quaternioni puri), e pertanto ci dovremo preoccupare anche della direzione di quest'ultima. Dimostriamo ora il fatto in questione: siano $r = |r|(\cos \theta + \vec{u} \sin \theta)$ e $s = |s|(\cos \phi + \vec{u} \sin \phi)$ due quaternioni con medesimo segno (cioè due quaternioni con parti vettoriali proporzionali), allora:

$$rs = |r||s|(\cos \theta + \vec{u} \sin \theta)(\cos \phi + \vec{u} \sin \phi) =$$

$$|r||s|(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi + (\sin \theta \cos \phi + \sin \phi \cos \theta)\vec{u})$$

che per le formule di somma del seno e del coseno diventa:

$$rs = |r||s|(\cos(\theta + \phi) + \vec{u} \sin(\theta + \phi))$$

Come corollario immediato di questa relazione, dimostrabile tramite induzione matematica, vi è un analogo quaternionico del teorema di de Moivre, che enunciamo qui di seguito:

Corollario (Teorema di de Moivre). *Sia q un quaternione con parte vettoriale non nulla e con $\arg(q) = \theta$, allora, per $n \in \mathbb{Z}$ avremo:*

$$(\cos \theta + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin(n\theta) \quad (2.34)$$

Detto ciò possiamo ora passare ad una trattazione dei polinomi e delle equazioni polinomiali in \mathbb{H} .

2.4 Polinomi a coefficienti quaternionici

L'obiettivo di questa sezione è quello di definire un concetto che assomigli a quello di polinomio reale/complesso per il corpo dei quaternioni.

Il principale problema che incontriamo per il caso dei quaternioni è il seguente: i quaternioni non sono un anello commutativo, dunque non potremo costruire l'anello dei polinomi a coefficienti nell'insieme suddetto nel modo canonico. Ciònonostante, ci gioverà rammentare la costruzione del sopracennato per il campo dei complessi, per poi vedere in che modo potremo affrontare il problema nel caso dei quaternioni.

2.4.1 Costruzione dell'anello dei polinomi $\mathbb{C}[x]$

Come dimostrato all'inizio di questo capitolo, $(\mathbb{C}, +, *)$ è un campo.

Chiamiamo \mathbb{C}^ω l'insieme di tutte le successioni a elementi in \mathbb{C} . Definiamo su di esso una relazione d'equivalenza canonica

Definizione 2.11 (Relazione di equivalenza canonica per successioni in \mathbb{C}). *Due successioni $(z_i)_{i=0}^\infty$ e $(w_i)_{i=0}^\infty$ di numeri complessi si dicono uguali se e solo se $z_i = w_i \forall i$.*

Definiamo infine due operazioni binarie: siano $(z_i)_{i=0}^\infty$ e $(w_i)_{i=0}^\infty$ due successioni, allora:

$$(z_i)_{i=0}^\infty + (w_i)_{i=0}^\infty = (z_i + w_i)_{i=0}^\infty \quad (2.35)$$

La moltiplicazione invece:

$$(z_i)_{i=0}^\infty (w_i)_{i=0}^\infty = \left(\sum_{i+j=k} z_i w_j \right)_{k=0}^\infty \quad (2.36)$$

\mathbb{C}^ω forma un anello commutativo unitario rispetto a queste due operazioni binarie. Una dimostrazione di tale fatto è generalmente fornita, per il caso più generale di un'insieme di successioni a valori in un anello commutativo unitario, in corsi di algebra e teoria degli anelli.

Definizione 2.12. Sia $(z_i)_{i=0}^{\infty}$ una successione. Diremo che essa è quasi ovunque nulla se esiste un numero naturale n tale che $z_i = 0 \forall i \geq n$.

Chiameremo l'insieme delle successioni quasi ovunque nulle a valori nei complessi polinomi a valori complessi. Estendendo su quest'ultimo le operazioni definite sopra, osserveremo che sia chiuso rispetto alle sommazioni. Dunque, i polinomi a valori in \mathbb{C} sono un sotto-anello dell'anello delle successioni a valori in \mathbb{C} . Potremo esprimere elementi di questo sotto-anello nella forma più congeniale al lettore come:

$$p(z) = \zeta_0 + \zeta_1 z + \cdots + \zeta_n z^n = \sum_{i=0}^n \zeta_i z^i$$

dove qui $z = (0, 1, 0, \dots)$ è la successione di tutti zeri tranne che nella posizione $i = 1$.

2.4.2 Costruzione dell'anello dei polinomi $R[x]$ per un anello unitario R

Fin qui tutto liscio, ci potremmo domandare a questo punto quali potrebbero essere i problemi incontrati definendo una struttura analoga su un anello non necessariamente commutativo. Non incontreremo infatti problemi a definire una nozione del tutto analoga, ma ci accorgeremo che tale struttura avrà delle implicazioni indesiderate.

Sia R un anello (non necessariamente commutativo) con un'unità moltiplicativa 1_R . Chiamiamo R^ω l'insieme delle successioni a valori in R , indicate con $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ con $a_i \in R \forall i \in \mathbb{N}$. Definiamo su quest'insieme una relazione d'equivalenza canonica:

Definizione 2.13 (Relazione d'equivalenza canonica per successioni in R). Due successioni $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ e $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ a valori in R si dicono uguali se e solo se $a_i = b_i \forall i$.

Siano $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ due successioni in R^ω . Dotiamo questo insieme di 2 operazioni binarie; un'addizione e una moltiplicazione:

$$(a_i)_{i=0}^{\infty} + (b_i)_{i=0}^{\infty} = (a_i + b_i)_{i=0}^{\infty} \quad (2.37)$$

$$(a_i)_{i=0}^{\infty} (b_i)_{i=0}^{\infty} = \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right)_{k=0}^{\infty} \quad (2.38)$$

Proposizione 2.11. L'insieme R^ω forma un anello unitario sotto le operazioni appena definite.

Dimostrazione. • R^ω è chiuso rispetto ad entrambe le operazioni. Ciò segue dalla chiusura di R , essendo un anello esso stesso (i.e $a + b \in R$, $ab \in R \forall a, b \in R$).

- L'identità additiva è $0_{R^\omega} = (0, 0, 0, \dots)$.
- L'associatività e la commutatività dell'addizione seguono dalle medesime proprietà valide nell'anello di base R . Infatti, siano $(a_i), (b_i), (c_i)$ 3 successioni a valori in R :
 $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$, ma $a_i + b_i = b_i + a_i \forall i$ in quanto l'addizione di R è commutativa, dunque; $(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) = (b_i + a_i) = (b_i) + (a_i)$. Analogamente, per l'associativa:
 $((a_i) + (b_i)) + (c_i) = ((a_i + b_i) + c_i)$, ma $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i) \forall i$ in quanto l'addizione di R è associativa. Dunque:
 $((a_i) + (b_i)) + (c_i) = ((a_i + b_i) + c_i) = (a_i + (b_i + c_i)) = a_i + ((b_i) + (c_i))$.
- Sia $a = (a_i)_{i=0}^\infty \in R$. Il suo inverso additivo è $-a = (-a_i)$, definito grazie all'esistenza di inversi additivi per ogni elemento della successione, garantita dalla struttura di anello di R .
- L'identità moltiplicativa dell'anello è $1_R = (1, 0, 0, 0, \dots)$.
- Ora l'associativa della moltiplicazione: $((a_i)(b_i))(c_i) = (\sum_{i+j=k} a_i b_j)(c_i) = (\sum_{r+s=l} (\sum_{i+j=r} a_i b_j)c_s)$, che per la proprietà distributiva della moltiplicazione sull'anello di base, $(\sum_{r+s=l} \sum_{i+j=r} a_i b_j c_s)$ e
 $(a_i)((b_i)(c_i)) = (a_i)(\sum_{i+j=k} b_i c_j) = (\sum_{r+s=l} a_r (\sum_{i+j=s} b_i c_j)) =$
 $(\sum_{r+s=l} \sum_{i+j=s} a_r b_i c_j)$, che reindicizzando possiamo mostrare essere uguale a $((a_i)(b_i))(c_i)$.
- Infine la distributiva, a destra:
 $((a_i) + (b_i))(c_i) = (\sum_{i+j=k} (a_i + b_i)c_j) = (\sum_{i+j=k} a_i c_j + \sum_{i+j=k} b_i c_j) = (\sum_{i+j=k} a_i c_j) +$
 $(\sum_{i+j=k} b_i c_j) = (a_i)(c_i) + (b_i)(c_i)$.
E a sinistra:
 $(c_i)((a_i) + (b_i)) = (\sum_{i+j=k} c_i(a_j + b_j)) = (\sum_{i+j=k} c_i a_j + \sum_{i+j=k} c_i b_j) = (\sum_{i+j=k} c_i a_j) +$
 $(\sum_{i+j=k} c_i b_j) = (c_i)(a_i) + (c_i)(b_i)$.

□

Chiamiamo l'insieme delle successioni quasi ovunque nulle a valori in R insieme dei polinomi a valori in R . Tale insieme, con le operazioni ereditate sopra, forma un sottoanello unitario di R^ω . Inoltre, per alleggerire la notazione denoteremo da oggi in poi le successioni quasi ovunque nulle del tipo $(a, 0, 0, \dots)$, dunque con solo $a_0 \neq 0$ e con tutti gli altri pari a 0, come semplicemente $a = (a, 0, 0, \dots)$.

Chiamiamo X la successione $(0, 1, 0, \dots)$. Si dimostra facilmente che $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$X^n = (\delta_{in})_{i=0}^{\infty} \quad (2.39)$$

Dove qui, come al solito, δ_{in} indica la delta di Kronecker. Chiamiamo questa successione indeterminata su R . Fino a qui, la costruzione è stata del tutto analoga a quella per i polinomi a coefficienti su un campo o su un anello commutativo (al netto della commutatività della moltiplicazione dei polinomi ovviamente).

Tuttavia è a questo punto che incontriamo la prima difficoltà: $\forall n \in \mathbb{N}$, X^n commuta con R (dove qui con R intendiamo l'insieme delle successioni $(a, 0, 0, \dots)$ al variare di a , munito delle operazioni definite precedentemente, che è isomorfo ad R). Cioè, sia $a \in R$, per $n = 1$:

$$aX = (a, 0, 0, \dots)(0, 1, 0, \dots) = (0, a, 0, \dots) = (0, 1, 0, \dots)(a, 0, 0, \dots) = Xa$$

e per un n qualsiasi:

$$aX^n = (a, 0, \dots)(\delta_{in}) = (a\delta_{in}) = X^n a \quad (2.40)$$

Da ciò segue che possiamo scrivere un polinomio $\phi(X) \in R[X]$ come:

$$\phi(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i = \sum_{i=0}^n X^i a_i \quad (2.41)$$

Questo ci arreca non pochi problemi; crolla infatti la nostra interpretazione che idealmente avremmo voluto avere di un'indeterminata su R . Formalmente, infatti, avremmo voluto che essa si comportasse algebricamente come un generico elemento di un anello non commutativo, per poi definire le nozioni classiche di valore di polinomio, funzione valutazione, zeri ecc. Facendo un esempio nel corpo dei quaternioni; in $\mathbb{H}[X]$ tale identità è vera: $iX = Xi$, immaginando di voler sostituire alla X un quaternione, come ad esempio j , verifichiamo subito una discrepanza: $ji \neq ij$.

Proposizione 2.12. *Sia $a \in \mathbb{H}$. Allora: $qa = aq \ \forall q \in \mathbb{H} \iff a \in \mathbb{R}$, o in altre parole: $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, il centro (Z dal tedesco zentrum) di \mathbb{H} è \mathbb{R} .*

Dunque sarebbe stato accettabile lasciare l'indeterminata commutare con i coefficienti solo se i tali fossero stati numeri reali. Ma ciò è molto restrittivo.

Per poter studiare adeguatamente polinomi a coefficienti dobbiamo dividerli in 3 categorie:

1. Polinomi sinistri: che indicheremo formalmente come $f(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$ con $a_i \in \mathbb{H} \forall i$.
2. Polinomi destri: che indicheremo formalmente come $f(q) = \sum_{i=0}^n q^i a_i$ con $a_i \in \mathbb{H} \forall i$.
3. Polinomi generali: la forma generale di un polinomio quaternionico è alquanto difficile da fornire. In questo testo ci interesseremo solo ad una sottoclasse di questo tipo di polinomi, detti **polinomi generali lineari**, della forma $f(q) = a_0 q a_1 q \dots q a_n + \phi(q)$, dove $\phi(q)$ è una somma finita di monomi simili $a_0 q a_1 q \dots q a_k$ con $k < n$.

Utilizzeremo l'anello dei polinomi appena costruito per lo sviluppo della teoria dei polinomi destri e dei polinomi sinistri, definendoli a partire da elementi di $\mathbb{H}[X]$. Diamo anzitutto la definizione di **valore di un polinomio quaternionico**.

Definizione 2.14 (Valore sinistro di un polinomio). *Sia $\phi(q) \in \mathbb{H}[X]$ un polinomio a coefficienti quaternionici, $\phi(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$, e sia $\alpha \in \mathbb{H}$ un quaternione. Chiamiamo **valore sinistro** di ϕ in α , scritto $\phi^\leftarrow(\alpha)$, il quaternione:*

$$\phi^\leftarrow(\alpha) = \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \quad (2.42)$$

chiamiamo inoltre la funzione $\text{ev}_\phi^\leftarrow : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definita come:

$$\text{ev}_\phi^\leftarrow(\alpha) := \sum_{i=0}^n a_i \alpha^i$$

la **funzione valutazione sinistra** di ϕ .

La definizione di valore destro di un polinomio è del tutto analoga, la riportiamo solo per completezza anche se può sembrar ridondante:

Definizione 2.15 (Valore destro di un polinomio quaternionico). *Sia $\phi(q) \in \mathbb{H}[X]$ un polinomio a coefficienti quaternionici, $\phi(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$, e sia $\alpha \in \mathbb{H}$ un quaternione. Chiamiamo **valore destro** di ϕ in α , scritto $\phi^\rightarrow(\alpha)$, il quaternione:*

$$\phi^\rightarrow(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha^i a_i \quad (2.43)$$

chiamiamo inoltre la funzione $\text{ev}_\phi^\rightarrow : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definita come:

$$\text{ev}_\phi^\rightarrow(\alpha) := \sum_{i=0}^n \alpha^i a_i$$

la **funzione valutazione destra** di ϕ .

Date queste due definizioni, siamo ora pronti a definire con maggior rigore il concetto di polinomio destro e polinomio sinistro sui quaternioni.

Definizione 2.16 (Polinomio sinistro a coefficienti quaternionici). *Chiameremo **polinomio sinistro a coefficienti quaternionici** l'associazione di una funzione valutazione sinistra ad un polinomio a coefficienti quaternionici $\phi \in \mathbb{H}[X]$, che indicheremo con la seguente doppietta:*

$$(\phi(q), \text{ev}_\phi^\leftarrow)$$

Definizione 2.17 (Polinomio destro a coefficienti quaternionici). *Chiameremo **polinomio destro a coefficienti quaternionici** l'associazione di una funzione valutazione destra ad un polinomio a coefficienti quaternionici $\phi \in \mathbb{H}[X]$, che indicheremo con la seguente doppietta:*

$$(\phi(q), \text{ev}_\phi^\rightarrow)$$

Da ora in poi, per semplificare la notazione e renderla più suggestiva, denoteremo formalmente i polinomi quaternionici sinistri come:

$$\phi(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$$

e i polinomi quaternionici destri come:

$$\phi(q) = \sum_{i=0}^n q^i a_i$$

e, eliminata così l'ambiguità nel modo di computarli, ci riferiremo alle loro funzioni valutazione come semplicemente ev_ϕ .

Estendiamo ora l'importante concetto di **zero di un polinomio** ai neodifiniti polinomi sinistri/destri a coefficienti quaternionici.

Definizione 2.18 (Zero/radice di un polinomio quaternionico sinistro/destro). *Sia $\phi(q) \in \mathbb{H}[x]$ un polinomio quaternionico sinistro/destro. Sia $\zeta \in \mathbb{H}$, allora diremo che ζ è uno zero/radice di $\phi(q)$ se il valore di ϕ a ζ è pari a 0, o in termini simbolici:*

$$\phi(\zeta) = 0 \tag{2.44}$$

In altre parole, gli zeri di un polinomio sono gli elementi del nucleo della funzione valutazione di quest'ultimo, $\zeta \in \ker(\text{ev}_\phi)$.

Introduciamo ora il primo importante risultato della teoria dei polinomi a coefficienti in \mathbb{H} :

Teorema 2.2 (Teorema fondamentale dell'algebra per un polinomio sx/dx quaternionico). *Ogni polinomio quaternionico sinistro/destro con grado positivo presenta una radice quaternionica.*

Dimostrazione. Sia f un polinomio sinistro a coefficienti quaternionici, scriviamolo esplicitando le sue componenti; $f(q) = a(q) + ib(q) + jc(q) + kd(q)$. Moltiplicando quest'ultimo per il suo coniugato quaternionico otteniamo: $ff^* = a(q)^2 + b(q)^2 + c(q)^2 + d(q)^2$, un polinomio a coefficienti reali. Sia r una radice complessa di ff^* e sia: $a(r) = a_1 + ia_2$, $b(r) = b_1 + ib_2$, $c(r) = c_1 + ic_2$, $d(r) = d_1 + id_2$:

$$ff^*(r) = 0 = (a_1 + ia_2)^2 + (b_1 + ib_2)^2 + (c_1 + ic_2)^2 + (d_1 + id_2)^2 = a_1^2 - a_2^2 + 2a_1a_2i + b_1^2 - b_2^2 + 2b_1b_2i + c_1^2 - c_2^2 + 2c_1c_2i + d_1^2 - d_2^2 + 2d_1d_2i = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 - d_2^2) + 2(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)i$$

Dalla definizione di uguaglianza di due numeri complessi segue che:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2 = 0 \text{ e}$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 - a_2^2 - b_2^2 - c_2^2 - d_2^2 = 0$$

Vogliamo ora trovare un quaternione diverso da 0 $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2i + \gamma_3j + \gamma_4k$ tale che $\Phi(q) = f(q)\gamma$ abbia r come radice. Facendo i calcoli, $\Phi(q)$ diventa: $\Phi(q) = \gamma_1a(q) - \gamma - 2b(q) - \gamma_3c(q) - \gamma_4d(q) + i(\gamma_2a(q) + \gamma_1b(q) + \gamma_4c(q) - \gamma_3d(q)) + j(\gamma_3a(q) + \gamma_1c(q) + \gamma_2d(q) - \gamma_4b(q)) + k(\gamma_4a(q)\gamma_1d(q) + \gamma_3b(q) - \gamma_2c(q))$. Affinché r sia una radice di Φ , γ deve essere una soluzione del seguente sistema lineare:

$$\begin{bmatrix} a_1 - b_2 & -a_2 - b_1 & d_2 - c_1 & -c_2 - d_1 \\ a_2 + b_1 & a_1 - b_2 & -d_1 - c_2 & c_1 - d_2 \\ c_1 + d_2 & d_1 - c_2 & a_1 + b_2 & -b_1 + a_2 \\ c_2 - d_1 & d_2 + c_1 & a_2 - b_1 & -b_2 - a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4} \quad (2.45)$$

Un calcolo diretto mostra che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema sia uguale a 0, e che dunque esista una soluzione non uguale a 0. Il teorema del resto ci garantisce che $\Phi(q) = g(q)(q - r)$.

Quindi, $f(q) = g(q)\gamma^{-1}\gamma(q - r)\gamma^{-1}$. Chiamiamo $G(q) = g(q)\gamma^{-1}$, allora, a causa delle proprietà delle rotazioni quaternioniche (funzioni del tipo $\rho_q(p) = qpq^{-1}$) che dimostreremo dopo, $f(q) = G(q)(q - \zeta_r)$, dove $\zeta_r = \gamma r \gamma^{-1}$. Ciò dimostra l'asserto. \square

La dimostrazione per un polinomio quaternionico destro è del tutto analoga.

Tuttavia, a differenza del caso complesso e del caso reale, i polinomi sinistri/destri a coefficienti quaternionici possono avere più soluzioni del loro grado, e potenzialmente anche infinite soluzioni.

Esempio 2.1 (Radici quadrate quaternioniche di -1). Consideriamo l'equazione di secondo grado:

$$q^2 + 1 = 0 \quad (2.46)$$

Risolviamo quest'equazione direttamente; sostituendo $q = a + bi + cj + dk$ nell'equazione (2.46) otteniamo:

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2abi + 2acj + 2adk = -1 \quad (2.47)$$

Applicando la definizione di uguaglianza di quaternioni:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = -1 \\ 2ab = 0 \\ 2ac = 0 \\ 2ad = 0 \end{cases} . \quad (2.48)$$

Le ultime 3 equazioni del sistema richiedono che o a sia uguale a 0, o che alternativamente $b, c, d = 0$. L'ultima strada non è praticabile, in quanto implicherebbe che a , un numero reale, abbia un quadrato pari a -1 $a^2 = -1$. Dunque $a = 0$.

Risulta allora che la forma generale di una soluzione dell'equazione (2.48) sia un quaternione $q = xi + yj + zk$ con:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (2.49)$$

Le soluzioni dell'equazione vivono dunque sulla sfera $S^2 \in \mathbb{R}^3 \cong \mathbf{P}$.

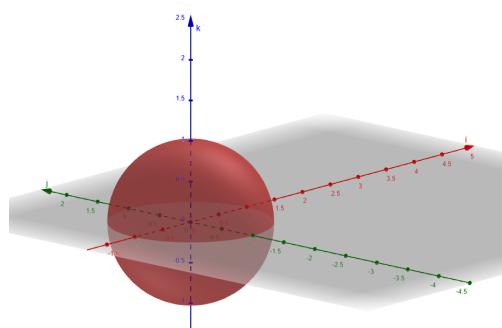


Figura 2.2: Visualizzazione dell'insieme delle radici quadrate quaternioniche di -1.

Non ci troviamo, dunque, di fronte ad insiemi di zeri finiti, come nel caso di equazioni polinomiali in \mathbb{R} o \mathbb{C} , e neppure infinitamente contabili, ma bensì a dei continuum di soluzioni. A questo punto, il nostro obiettivo è quello di classificare tali insiemi da un punto di vista topologico. Nel caso precedente, l'insieme degli zeri era omeomorfo ad S^2 ; vogliamo sondare le proprietà topologiche degli insiemi degli zeri di polinomi destri/sinistri in casi più generali. Prima di cominciare, tuttavia, diamo un altro esempio:

Esempio 2.2. Consideriamo ora l'equazione $q^2 - 1 = 0$; analogamente a come fatto prima, sostituiamo $q = a + bi + cj + dk$ e risolviamo per le componenti del quaternione:

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2abi + 2acj + 2adk = 1 \quad (2.50)$$

quindi:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1 \\ 2ab = 0 \\ 2ac = 0 \\ 2ad = 0 \end{cases} . \quad (2.51)$$

In questo caso invece, avremo che necessariamente $b = c = d = 0$, in quanto se al contrario avremo $a = 0$, risulterà che $-b^2 - c^2 - d^2$, una quantità reale negativa, sia uguale a 1.

Le uniche due radici quaternioniche di 1 saranno dunque: $q = \pm 1$. In questo caso, invece, l'insieme delle soluzioni è un insieme di due punti, dunque un insieme discreto.

2.4.3 Proprietà topologiche di $\ker(\text{ev}_\phi)$

Andiamo adesso, come accenato prima, a investigare le proprietà topologiche degli insiemi degli zeri di polinomi sinistri/destri quaternionici, cioè del kernel (in italiano spesso detto nucleo) delle funzioni valutazioni dei polinomi dx/sx quaternionici.

Prima di investigare le proprietà topologiche degli insiemi degli zeri di un'e-quazione quaternionica, introduciamo prima alcune definizioni preliminari:

Definizione 2.19 (Centralizzatore di un quaternione). Chiameremo il centralizzatore di un quaternione $q \in \mathbb{H}$ l'insieme:

$$Z(q) = \{p \in \mathbb{H}; qp = pq\} \quad (2.52)$$

Proposizione 2.13. $\forall q \in \mathbb{H}, q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$

$$Z(q) = \left\{ p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k ; \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2} \right\} \quad (2.53)$$

Dimostrazione. $qp = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k = pq = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_2b_1 + b_2a_1 + c_2d_1 - d_2c_1)i + (a_2c_1 - b_2d_1 + c_2a_1 + d_2b_1)j + (a_2d_1 + b_2c_1 + d_2a_1 - c_2b_1)k$

Utilizzando la definizione di uguaglianza di quaternioni, tutto questo diventa:

$$\begin{cases} a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 = a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \\ a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2 = a_2b_1 + b_2a_1 + c_2d_1 - d_2c_1 \\ a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2 = a_2c_1 - b_2d_1 + c_2a_1 + d_2b_1 \\ a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2 = a_2d_1 + b_2c_1 + d_2a_1 - c_2b_1 \end{cases} \quad (2.54)$$

La prima è banalmente sempre verificata. Manipolando le altre 3, invece, otteniamo:

$$\begin{cases} d_2c_1 = c_2d_1 \\ d_1b_2 = d_2b_1 \\ b_1c_2 = b_2c_1 \end{cases} \quad (2.55)$$

Dalla terza otteniamo $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ma dalla prima otteniamo: $\frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$, e quindi $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$. \square

È un fatto ben noto che il centralizzatore di un sottoinsieme di un'algebra su un campo (come i quaternioni) sia una sottoalgebra sul medesimo campo.

Definiamo ora il concetto di centralizzatore di un polinomio:

Definizione 2.20 (Centralizzatore di un polinomio quaternionico). *Sia $\phi(q)$ un polinomio sinistro a coefficienti quaternionici, espresso come $\phi(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$, con $a_n = 1$. Chiamiamo il centralizzatore di ϕ l'insieme:*

$$Z(\phi(q)) = \bigcap_{i=0}^{n-1} Z(a_i) \quad (2.56)$$

detto a parole, l'intersezione dei centralizzatori dei coefficienti.

La definizione è del tutto analoga per un polinomio destro.

Inoltre, visto che da ora in poi lavoreremo esclusivamente con polinomi con coefficiente direttore (cioè con coefficiente del monomio di grado

massimo) pari a 1, daremo ai suddetti un nome; li chiameremo **polinomi canonici** su \mathbb{H} . Introduciamo ora un risultato operativo:

Proposizione 2.14. *Sia q_0 una radice del polinomio $\phi(q) \in \mathbb{H}[X]$, allora $\forall \eta \in Z(\phi)$, il quaternione $\eta q_0 \eta^{-1}$ è una radice di ϕ .*

Dimostrazione. La dimostrazione è molto semplice a patto che si conoscano le proprietà di quelle applicazioni quaternioniche che chiamiamo "rotazioni" (per motivi che vedremo dopo), cioè applicazioni del tipo $\rho_\eta(q) = \eta q \eta^{-1}$. Per questioni di organizzazione tematica dei capitoli dimostreremo i fatti che useremo qui un po' più in là nel testo; il lettore può tuttavia già ora verificarle da sé con un calcolo diretto.

$$\text{Il valore di } \phi \text{ in } \eta q_0 \eta^{-1} \text{ è: } \phi(\eta q_0 \eta^{-1}) = \sum_{i=0}^n a_i (\eta q_0 \eta^{-1})^i = \sum_{i=0}^n a_i (\eta q_0^i \eta^{-1}) = \sum_{i=0}^n \eta a_i q_0^i \eta^{-1} = \eta \left(\sum_{i=0}^n a_i q_0^i \right) \eta^{-1} = \eta \phi(q_0) \eta^{-1} = 0, \text{ che dimostra l'asserto. } \square$$

Sarà proficuo per noi a questo punto dividere la nostra indagine in vari casi:

- Quando la dimensione del centralizzatore del nostro polinomio è 4, in altre parole esso è isomorfo ad \mathbb{H} stesso. A questo caso corrisponderanno polinomi con coefficienti nel centro di \mathbb{H} (che sappiamo essere \mathbb{R}), in quanto il centralizzatore del centro di un anello non commutativo è l'anello stesso.
- Quando la dimensione del centralizzatore del nostro polinomio è 2 (isomorfo a \mathbb{C}).
- Quando essa è pari a 1, il caso più generale.

Partiamo dal primo caso:

Polinomi quaternionici a coefficienti reali ($\dim(Z(\phi)) = 4$)

Un polinomio sinistro quaternionico il cui centralizzatore ha una dimensione pari a 4 è un polinomio a coefficienti reali, della forma:

$$\Phi(q) = \sum_{i=0}^n r_i q^i \tag{2.57}$$

con $r_i \in \mathbb{R}, \forall i$. Introduciamo ora un primo risultato riguardante le radici di un polinomio quaternionico a coefficienti reali:

Proposizione 2.15. *Sia $\Phi(q) = \sum_{i=0}^n r_i q^i$ un polinomio quaternionico a coefficienti reali. Se esso ha almeno una radice non reale, $\zeta \in \ker(\text{ev}_\Phi)$, $\zeta \notin \mathbb{R}$, allora esso ha infinite radici quaternioniche.*

Dimostrazione. Utilizziamo il risultato dimostrato poc' anzi (la proposizione 2.14): sia $\zeta \in \ker(\text{ev}_\Phi)$ la nostra radice non reale, allora $\forall \eta \in Z(\Phi)$, anche $\eta \zeta \eta^{-1}$ è una radice. Ma qui, essendo ζ non reale, avremo che $\forall \eta$ otterremo una soluzione diversa, e pertanto avremo infinite soluzioni. \square

Proposizione 2.16. *Sia $\Phi(q) = \sum_{i=0}^n r_i q^i$ un polinomio quaternionico a coefficienti reali. Allora $\ker(\text{ev}_\Phi)$ consiste di t punti, dove t è il numero di radici reali del polinomio Φ , e di s sfere $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Inoltre, è soddisfatta la seguente diseguaglianza:*

$$t + 2s \leq n \quad (2.58)$$

Dimostrazione. Essendo Φ un polinomio a coefficienti reali, sappiamo che può essere fattorizzato nel seguente modo:

$$\Phi(q) = \prod_{k=1}^m \varphi_k(q) \quad (2.59)$$

dove $\varphi_k(q)$ è un polinomio di primo grado o un polinomio di secondo grado irriducibile.

Supponiamo di avere t polinomi di primo grado, i.e. t radici reali del polinomio. Indichiamo con s il numero di polinomi di secondo grado irriducibili nella fattorizzazione, allora non potremo averne più di $\frac{n-t}{2}$. Ma questi presentano come soluzioni delle sfere; possiamo dunque chiamare s anche il numero di sfere. Da ciò segue la disequazione dell'asserto: $t + 2s \leq n$ \square

Corollario 2.1. *Sia $\Phi(q)$ un polinomio quaternionico a coefficienti reali. Allora l'insieme dei suoi zeri ($\ker(\text{ev}_\Phi)$) è finito se e solo se tutte le radici di Φ sono reali.*

Proposizione 2.17. *La soluzione all'equazione $q^n = b$ dove $b \in \mathbb{R}/\{0\}$ consiste di:*

- *2 punti ed $m - 1$ sfere per $n = 2m$ e $b > 0$.*
- *m sfere per $n = 2m$ e $b < 0$.*
- *Un punto e $m - 1$ sfere per $n = 2m - 1$.*

Dimostrazione. Ricordiamo anzitutto che possiamo fattorizzare un polinomio a coefficienti reali del tipo $q^n - b$ su \mathbb{C} come $q^n - b = \prod_{k=0}^n (q - \zeta_k)$, dove ζ_k sono le radici complesse di b .

- Per il primo caso, ($n = 2m, b > 0$), avremo $\zeta_k = \sqrt[n]{b}(\cos(\frac{2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{2k\pi}{n}))$ con $0 \leq k \leq n - 1$. Essendo b un numero reale positivo, ζ_0 sarà banalmente un numero reale, conseguenza delle restrizioni imposte su b ($b \in \mathbb{R}^+$). Tuttavia, la parità del grado del nostro polinomio ci impone inoltre che per $k = m$ avremo un'altra radice reale. Queste due sono le uniche radici reali che otterremo. Per un'altra importante proprietà dei polinomi a coefficienti reali, sappiamo che le radici complesse vanno a "coppie coniugate" (se ζ è radice allora lo è anche ζ^*). Sapendo che $(q - \zeta)(q - \zeta^*)$ è un polinomio reale di secondo grado irriducibile, apprendiamo che possiamo scrivere il nostro polinomio come un prodotto di 2 polinomi di primo grado a coefficienti reali, ed $(m - 1)$ polinomi a coefficienti reali irriducibili di secondo grado. Ricordando che le soluzioni dei primi in \mathbb{H} sono punti isolati, e le soluzioni dei secondi sono soluzioni sferiche, segue che avremo 2 punti isolati ed $m - 1$ sfere.
- Il secondo caso è del tutto analogo al primo, ad eccezione del fatto che, non avendo soluzioni reali, potremo fattorizzare su $\mathbb{R}[x]$ il nostro polinomio scrivendolo come prodotto di m polinomi irriducibili di secondo grado a coefficienti reali, che rappresentano tutte delle soluzioni sferiche in \mathbb{H} .
- Per il terzo caso, infine, ricordiamo che un polinomio a coefficienti reali del tipo $q^n = b$ con n dispari avrà solo una soluzione reale, sia se $b > 0$ che se $b < 0$, e potremo dunque fattorizzare $q^n - b$ su $\mathbb{R}[x]$ come prodotto di un polinomio a coefficienti reali di primo grado e di $m - 1$ polinomi di secondo grado irriducibili a coefficienti reali.

□

Andiamo ora ad analizzare polinomi quaternionici con centralizzatore bidimensionale.

Polinomi quaternionici con $\dim(Z(\Phi)) = 2$

La prima domanda che sorge a questo punto è: che condizioni devono rispettare i coefficienti di un polinomio sinistro affinché il suo centralizzatore abbia dimensione 2? Introduciamo alcuni risultati preparatori:

Lemma 2.1. *Ogni quaternione $p = a + bi + cj + dk$ soddisfa la seguente equazione a coefficienti reali:*

$$q^2 - 2aq + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = q^2 - 2\text{Sc}(p) + |p|^2 = 0$$

chiameremo il polinomio $f_p(q) = q^2 - 2\text{Sc}(p) + |p|^2$ **polinomio caratteristico del quaternione p .**

Esercizio 2.8. Dimostrare il lemma 2.1.

Lemma 2.2. Chiamiamo \mathbb{K}_α un insieme di elementi del tipo $m + n\alpha$ con $m, n \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{H} - \mathbb{R}$, allora esso forma una sottoalgebra isomorfa all'algebra dei complessi.

Dimostrazione. L'insieme è banalmente chiuso rispetto all'addizione ereditata da \mathbb{H} . Per quanto riguarda la moltiplicazione, osserviamo che ogni quaternione $\alpha \in \mathbb{H}$ soddisfa un'equazione quadratica con discriminante negativo, sia

$$q^2 + sq + t = 0 \quad (2.60)$$

la suddetta. Allora: $\alpha^2 = -s\alpha - t \implies \mathbb{K}_\alpha$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione, i.e. \mathbb{K}_α è una sottoalgebra di dimensione 2 di \mathbb{H} .

Dunque \mathbb{K}_α è una \mathbb{R} -Algebra associativa unitaria di dimensione 2, abbiamo 3 possibilità:

- Essa è isomorfa a \mathbb{C} (i numeri complessi), se $\frac{s^2}{4} - t < 0$.
- Essa è isomorfa a $\mathbb{R}[\epsilon]$ (i numeri duali di Clifford), se $\frac{s^2}{4} - t = 0$.
- Essa è isomorfa a $\mathbb{R}[j]$ (i numeri pseudocomplessi, anche detti numeri split-complex), se $\frac{s^2}{4} - t > 0$.

Avendo un discriminante negativo ($\frac{s^2}{4} - t < 0$), essa è isomorfa a \mathbb{C} . □

Dimostriamo ora una condizione sufficiente e necessaria affinché il centralizzatore di un polinomio quaternionico sinistro sia di dimensione 2.

Proposizione 2.18. La dimensione del centralizzatore $Z(\Phi)$ di un polinomio $\Phi(q) = \sum_{i=0}^n \alpha_i q^i$ è uguale a 2 $\iff \alpha_s \alpha_t = \alpha_t \alpha_s \ \forall t, s$, in altre parole se i coefficienti commutano tra loro.

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'implicazione diretta (\Rightarrow).

Sia $\dim(Z(\Phi)) = 2$. Essendo $Z(\Phi) = \bigcap_{i=0}^{n-1} Z(\alpha_i)$ abbiamo che $\forall \zeta \in Z(\Phi)$, $\zeta \alpha_t = \alpha_t \zeta$, $\forall t \in \mathbb{N} \cap [0, n-1]$, o in altre parole $\zeta \in Z(\alpha_t)$, $\forall t \in \mathbb{N} \cap [0, n-1]$. Sia $\zeta = a + bi + cj + dk$. Ricordando ora un fatto dimostrato poco prima, possiamo interpretare questo fatto come:

$$\frac{b_s}{b} = \frac{c_s}{c} = \frac{d_s}{d} \quad (2.61)$$

e

$$\frac{b_t}{b} = \frac{c_t}{c} = \frac{d_t}{d} \quad (2.62)$$

Dove s e t sono due indici non uguali provenienti dall'insieme $\mathbb{N} \cap [0, n-1]$. Una semplice manipolazione algebrica ci mostra che:

$$\frac{b_t}{b_s} = \frac{c_t}{c_s} = \frac{d_t}{d_s} \quad (2.63)$$

il che vuol dire, alla luce della proposizione 2.13, che $\alpha_t \alpha_s = \alpha_s \alpha_t$.

Dimostriamo ora la direzione opposta (\Leftarrow). Dire che α_t commuta con α_s , per due indici non uguali t ed s appartenenti a $\mathbb{N} \cap [0, n-1]$, equivale a dire che (sempre alla luce della proposizione 2.13):

$$\frac{b_t}{b_s} = \frac{c_t}{c_s} = \frac{d_t}{d_s} = \gamma \in \mathbb{R} \quad (2.64)$$

quindi:

$$\begin{cases} b_t = \gamma b_s \\ c_t = \gamma c_s \\ d_t = \gamma d_s \end{cases} \quad (2.65)$$

Da ciò segue che possiamo scrivere α_t come $\alpha_t = a_t + \gamma b_s i + \gamma c_s j + \gamma d_s k = (a_t - \gamma a_s) + \gamma(a_s + b_s i + c_s j + d_s k) = \rho + \gamma \alpha_s$, dove qui $\rho = a_t - \gamma a_s$, e $\alpha_s \in \mathbb{H} - \mathbb{R}$. Segue dunque che i coefficienti del polinomio appartengono \mathbb{K}_{α_s} , sottoalgebra di \mathbb{H} che abbiamo dimostrato essere isomorfa ai numeri complessi. Essendo i numeri complessi un campo, essi sono il loro stesso centro, ed il centralizzatore di ogni elemento è l'insieme intero \mathbb{C} . Da ciò segue che il centralizzatore di un polinomio con tali coefficienti debba essere 2 dimensionale. \square

Corollario 2.2. Il centralizzatore $Z(\Phi)$ di un polinomio sinistro a coefficienti quaternionici Φ è di dimensione 2 se e solo se è isomorfo all'algebra dei numeri complessi \mathbb{C} .

Dimostrazione. Segue direttamente dalle considerazioni fatte nella dimostrazione della precedente proposizione. \square

Da quanto detto nelle ultime proposizioni deduciamo che potremo scrivere un polinomio sinistro a coefficienti quaternionici Φ con $\dim(Z(\Phi)) = 2$ come:

$$\Phi(q) = \prod_{k=1}^n (q - \zeta_k) \quad (2.66)$$

con $\zeta_k \in \ker(\text{ev } \Phi) \forall k \in \mathbb{N} \cap [1, n]$, cioè dove $\zeta_k \in \mathbb{C}$ sono gli zeri del polinomio in questione.

Da questo modo di esprimere un polinomio sinistro appartenente a tale classe segue naturalmente la seguente proposizione:

Proposizione 2.19 (Struttura degli zeri di un polinomio quaternionico sinistro con $\dim(Z(\Phi)) = 2$). *L'insieme degli zeri $\ker(\text{ev } \Phi)$ di un polinomio quaternionico sinistro $\Phi(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$ con $\dim(Z(\Phi)) = 2$ consiste di t punti e s sfere, che soddisfano la seguente diseguaglianza:*

$$t + 2s \leq n \quad (2.67)$$

dove n è il grado del polinomio.

Dimostrazione. Utilizzando il fatto appena dimostrato, scriviamo Φ come:

$$\Phi(q) = \prod_{k=1}^n (q - \zeta_k) \quad (2.68)$$

Tra le radici ζ_i , chiamiamo s il numero di coppie di radici (ζ, ζ^*) , ossia il numero di radici che presentano anche il loro coniugato tra le radici. Potremo combinarle per ottenere un trinomio irriducibile a coefficienti reali, il polinomio caratteristico P_ζ . Ma tale polinomio ha come insieme di radici esattamente S^2 . Le rimanenti radici, che chiameremo t , saranno invece punti isolati. Dunque:

$$t + 2s \leq n \quad (2.69)$$

\square

Polinomi quaternionici con $\dim(Z(\Phi)) = 1$

Lavoriamo ora sul caso più generale, ossia quando la dimensione del centralizzatore del nostro polinomio è pari ad 1. Prima di dimostrare alcuni risultati, introduciamo delle nozioni preliminari:

Definizione 2.21 (Polinomio coniugato). Sia $\Phi(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$ un polinomio quaternionico sinistro: chiamiamo $\Phi^*(q)$ il suo polinomio coniugato, definito come:

$$\Phi^*(q) := \sum_{i=0}^n a_i^* q^i \quad (2.70)$$

Definizione 2.22 (Pseudo-norma di un polinomio quaternionico). Sia $\Phi(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$ un polinomio quaternionico sinistro: chiamiamo $N(\Phi(q))$ la sua pseudonorma, definita come:

$$N(\Phi(q)) := \Phi(q)\Phi^*(q) \quad (2.71)$$

ossia il prodotto del polinomio Φ con il suo polinomio coniugato.

Esercizio 2.9. Siano $\Phi(q) = (1 + j + k)q - 2jq^2 + (i - k)q^4$ e $\Psi(q) = k + 2kq - 2iq^2 - 3jq^3$ due polinomi quaternionici sinistri. Calcolare:

1. $\Phi^*(q)$
2. $\Psi^*(q)$
3. $N(\Phi(q))$
4. $N(\Psi(q))$

Proposizione 2.20. Sia $\Phi(q) = \sum_{k=0}^n \alpha_k q^k$ un polinomio canonico sinistro a coefficienti quaternionici. Allora la sua pseudonorma $N(\Phi(q)) = \Phi(q)\Phi^*(q)$ è un polinomio a coefficienti reali di grado $\deg(N(\Phi(q))) = 2\deg(\Phi(q))$.

Dimostrazione. Per come abbiamo definito la moltiplicazione sull'anello dei polinomi sinistri a coefficienti quaternionici:

$$\Phi(q)\Phi^*(q) = \sum_{i=0}^{2n} \beta_i q^i$$

dove

$$\beta_i = \sum_{j=0}^i \alpha_j \alpha_{m-j}^*$$

Dobbiamo dimostrare che β_i è un numero reale $\forall i$, che vedremo essere alquanto semplice. Basta infatti notare che i termini di grado pari avranno somme di termini del tipo $\alpha_j\alpha_j^*$ e del tipo $\alpha_j\alpha_k^* + \alpha_k\alpha_j^*$, mentre quelli di grado dispari avranno somme di termini solo del secondo tipo. Noi sappiamo tuttavia che l'algebra dei quaternioni è ben normata, e che dunque tali termini sono tutti numeri reali. Espandiamo alcuni dei coefficienti in questione per dare un'idea migliore della dimostrazione al lettore:

$$\beta_0 = \alpha_0\alpha_0^*$$

$$\beta_1 = \alpha_0\alpha_1^* + \alpha_1\alpha_0^*$$

$$\vdots$$

$$\beta_{2n-1} = \alpha_0\alpha_{2n-1}^* + \alpha_1\alpha_{2n-2}^* + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n^* + \alpha_n\alpha_{n-1}^* + \cdots + \alpha_{2n-2}\alpha_1^* + \alpha_{2n-1}\alpha_0^*$$

$$\beta_{2n} = \alpha_0\alpha_{2n}^* + \alpha_1\alpha_{2n-1}^* + \cdots + \alpha_n\alpha_n^* + \cdots + \alpha_{2n-1}\alpha_1^* + \alpha_{2n}\alpha_0^*$$

Segue da ciò l'asserto. \square

Definizione 2.23 (Quaternioni simili). *Siano $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ due quaternioni; diremo che q_1 e q_2 sono **simili**, e scriveremo $q_1 \sim q_2$, se esiste un quaternione non nullo $h \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tale che $hq_1 = q_2h$.*

Esercizio 2.10. *Dimostrare che la relazione "essere simili" sui quaternioni sia una relazione di equivalenza su \mathbb{H} .*

Esercizio 2.11. *Dimostrare che i e k sono simili, e trovare un quaternione h che li rende tali.*

Esercizio 2.12. *Dati due quaternioni $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$, dimostrare che se*

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 & b_2 - b_1 & c_2 - c_1 & d_2 - d_1 \\ b_1 - b_2 & a_1 - a_2 & d_2 - d_1 & -c_1 - c_2 \\ c_1 - c_2 & -d_1 - d_2 & a_1 - a_2 & b_1 + b_2 \\ d_1 - d_2 & c_1 + c_2 & -b_1 - b_2 & a_1 - a_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.72)$$

allora $q_1 \sim q_2$.

Corollario 2.3. *Sia $q = a + bi + cj + dk$ un quaternione, dove $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $a + \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \sim q$.*

Dimostrazione. Segue come corollario immediato dell'esercizio 2.12. Infatti, basta notare che il determinante della matrice:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} - b & -c & -d \\ b - \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} & 0 & -d & -c \\ c & -d & 0 & b + \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \\ d & c & -b - \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

□

Prima di continuare con la trattazione iniziata sui polinomi quaternionici, dimostriamo un lemma che ci sarà utile a breve:

Lemma 2.3. *Siano q_1 e q_2 due quaternioni, allora essi sono simili se e solo se le loro parti scalari e le loro norme sono uguali, i.e.:*

$$q_1 \sim q_2 \iff \text{Sc}(q_1) = \text{Sc}(q_2) \text{ e } |q_1| = |q_2|$$

Dimostrazione. Cominciamo dall'implicazione diretta; supponiamo che $q_1 \sim q_2$, allora avremo che esiste un quaternione $h \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tale che:

$$hq_1 = q_2h \quad (2.73)$$

il che implica che $|hq_1| = |q_2h|$. Ma per le proprietà della norma quaternionica, avremo che $|hq_1| = |h| \cdot |q_1| = |q_2| \cdot |h| = |q_2h|$ e dunque $|q_1| = |q_2|$ in quanto potremo dividere ambo i lati per $|h|$ essendo h non nullo. Inoltre, sempre come conseguenza dell'equazione (2.73), avremo che $q_1 = h^{-1}q_2h$, da cui $\text{Sc}(q_1) = \text{Sc}((h^{-1}q_2)h) = \text{Sc}(h(h^{-1}q_2)) = \text{Sc}(q_2)$.

Per la direzione inversa, invece, supponiamo che q_1 e q_2 siano due quaternioni con parte scalare e norma uguale, $\text{Sc}(q_1) = \text{Sc}(q_2)$ e $|q_1| = |q_2|$. Sia $q_1 = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ e $q_2 = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$. Per il corollario 2.3, avremo che:

$$a_1 + \sqrt{b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}i \sim q_1$$

e

$$a_2 + \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + d_2^2}i \sim q_2$$

ma siccome $\text{Sc}(q_1) = \text{Sc}(q_2) = a_1$ avremo che $b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = b_2^2 + c_2^2 + d_2^2$ e $a_2 = a_1$ e dunque:

$$q_1 \sim a_1 + \sqrt{b_1^2 + c_1^2 + d_1^2}i = a_2 + \sqrt{b_2^2 + c_2^2 + d_2^2}i \sim q_2$$

pertanto $q_1 \sim q_2$ per la proprietà transitiva della somiglianza di quaternioni.

□

Lemma 2.4. *Sia Φ un polinomio sinistro a coefficienti quaternionici e sia $\zeta \in \mathbb{H}$. Se il polinomio caratteristico di ζ , P_ζ divide Φ , allora l'intera classe di somiglianza del quaternione ζ , $[\zeta]$ (i.e la classe d'equivalenza di ζ sotto la relazione "essere simili") consiste di radici del polinomio Φ .*

Se invece P_ζ non divide Φ , i.e avremo un resto non uguale a 0, allora se c'è, non c'è più di una radice in $[\zeta]$.

Dimostrazione. Se $P_\zeta | \Phi(q)$, allora $\Phi(q) = Q(q)P_\zeta(q)$. Quindi tutte le radici di P_ζ sono anche radici di Φ . Ricordiamo che $P_\zeta = q^2 - 2\text{Sc}(\zeta) + |\zeta|^2$, da cui segue che $\forall z \in [\zeta]$, essendo $|z| = |\zeta|$ e $\text{Sc}(z) = \text{Sc}(\zeta)$ per il lemma precedente, $P_\zeta(z) = P_\zeta(\zeta) = 0$, da cui otteniamo che $\Phi(z) = 0$.

Vediamo ora il secondo caso:

Se P_ζ non divide Φ , allora avremo che la divisione di Φ per P_ζ avrà un resto non pari a 0. Scriviamo:

$$\Phi(q) = Q(q)P_\zeta(q) + R(q) \quad (2.74)$$

Dove $R(q)$ è un polinomio di primo grado della forma $\alpha q + \beta$. Se $\alpha = 0, \beta \neq 0$, non avremo soluzioni in $[\zeta]$. Nel caso in cui $\alpha, \beta \neq 0$, invece:

Sia $z \sim \zeta$, tale che $\Phi(z) = 0$. Allora avremo:

$$\Phi(z) = Q(z)P_\zeta(z) + \alpha z + \beta \quad (2.75)$$

ma essendo z nella classe d'equivalenza di ζ sotto la relazione di somiglianza dei quaternioni definita in questo capitolo, sappiamo che è una radice di P_ζ . Avremo dunque $0 = 0 + \alpha z + \beta$, cioè $z = -\alpha^{-1}\beta$. Dunque se abbiamo una radice appartenente alla classe d'equivalenza di ζ nel caso in cui P_ζ non divide Φ , possiamo avere un'unica radice pari a $-\alpha^{-1}\beta$. \square

Da questa proposizione segue come corollario immediato il seguente fatto:

Corollario 2.4. *L'insieme degli zeri $\ker(\text{ev}_\Phi)$ di un polinomio sinistro quaternionico Φ è infinito se e solo se $\exists \zeta \in \mathbb{H}$ tale che $P_\zeta | \Phi(q)$.*

Proposizione 2.21. *Se ζ è una radice del polinomio $\Phi(q)$, allora il polinomio caratteristico di quest'ultima, P_ζ divide la pseudonorma di Φ , $N(\Phi(q))$.*

Dimostrazione. Sia $\zeta \in \ker(\text{ev}_\Phi)$, dividiamo con resto Φ per P_ζ :

$$\Phi(q) = Q(q)P_\zeta(q) + R(q) \quad (2.76)$$

il suo coniugato, utilizzando le proprietà della coniugazione quaternionica, è:

$$\Phi^*(q) = Q^*(q)P_\zeta(q) + R^*(q) \quad (2.77)$$

La pseudonorma, che è data dal prodotto di Φ per Φ^* , sarà:

$$N(\Phi) = \Phi\Phi^* = Q(q)Q^*(q)P_\zeta^2(q) + (R(q)Q^*(q) + Q(q)R^*(q))P_\zeta(q) + R(q)R^*(q) \quad (2.78)$$

l'asserto è banalmente vero se il resto è pari a 0 (cioè se P_ζ divide Φ). Supponiamo perciò che esso non sia pari a 0, e dimostriamo che P_ζ lo divide, e che dunque anche in questo caso P_ζ divide Φ .

Ricordando che $R(q) = \alpha q + \beta$, calcoliamo la sua pseudonorma:

$$N(R) = RR^* = \alpha\alpha^*q^2 + (\alpha\beta^* + \beta\alpha^*)q + \beta\beta^* \quad (2.79)$$

che possiamo riscrivere come

$$N(R) = \alpha\alpha^*\left(q^2 + \frac{\alpha\beta^* + \beta\alpha^*}{\alpha\alpha^*}q + \frac{\beta\beta^*}{\alpha\alpha^*}\right) \quad (2.80)$$

Sappiamo che ζ è uno zero appartenente a $[\zeta]$. Sapendo che il resto, per l'assunzione fatta prima, non è pari a 0, per il lemma 2.4 sappiamo che ζ è della forma $\zeta = -\alpha^{-1}\beta$. Calcolando il polinomio caratteristico di ζ , vedremo che esso è precisamente $q^2 + \frac{\alpha\beta^* + \beta\alpha^*}{\alpha\alpha^*}q + \frac{\beta\beta^*}{\alpha\alpha^*}$; dimostriamolo:

$$-2Sc(\zeta) = 2Sc(\alpha^{-1}\beta) = \alpha^{-1}\beta + (\alpha^{-1}\beta)^* \quad (2.81)$$

essendo $\alpha^{-1}\beta = \frac{\alpha^*\beta}{\|\alpha\|^2}$, abbiamo $-2Sc(\zeta) = \frac{\alpha^*\beta}{\|\alpha\|^2} + \frac{\beta^*\alpha}{\|\alpha\|^2} = \frac{\alpha^*\beta + \beta^*\alpha}{\|\alpha\|^2}$

Per quanto concerne $|\zeta|^2$, avremo invece:

$$|\zeta|^2 = (\alpha^{-1}\beta)(\alpha^{-1}\beta)^* = \alpha^{-1}\beta\beta^*(\alpha^{-1})^* \quad (2.82)$$

utilizzando le proprietà della coniugazione quaternionica. Con un'ultima manipolazione algebrica, otterremo:

$$|\zeta|^2 = \frac{\alpha^*}{\|\alpha\|^2}\beta\beta^*\frac{\alpha}{\|\alpha\|^2} = \frac{\beta\beta^*}{\alpha\alpha^*} \quad (2.83)$$

Orbene, P_ζ divide RR^* , e con questo abbiamo dimostrato l'asserto, ossia abbiamo dimostrato che P_ζ divide la pseudonorma del polinomio Φ . \square

Chiudiamo questa sezione con un'estensione di un risultato già dimostrato prima (per polinomi sinistri con centralizzatore di dimensione rispettivamente 4 e 2) a polinomi sinistri più generali (con coefficienti in \mathbb{H} , i.e $\dim(Z(\Phi)) = 1$):

Teorema 2.3. *L'insieme degli zeri di un polinomio canonico sinistro quaternionico $\Phi(q) = \sum_{i=0}^n a_i q^i$ consiste di t punti ed s sfere 2-dimensionali S^2 ; inoltre la seguente diseguaglianza è valida:*

$$t + 2s \leq n \quad (2.84)$$

Dimostrazione. Sia $\zeta \in \mathbb{H}$. Se P_ζ divide il nostro polinomio Φ , allora $[\zeta] \cong S^2 \subset \ker(\text{ev}_\Phi)$ e $P_\zeta^2 \mid N(\Phi)$. Tuttavia, se P_ζ non divide Φ , allora il polinomio Φ non avrà più di una radice dalla classe di somiglianza di ζ , e se tale radice esiste, $N(\Phi)$ sarà divisibile per P_ζ .

Chiamiamo t il numero di radici isolate ζ (cioè con P_ζ che non divide Φ) e chiamiamo s il numero di radici ζ' tale che $P_{\zeta'} \mid \Phi$. Applicando l'induzione matematica alla pseudo-norma di Φ , $N(\Phi)$, otterremo:

$$2t + 4s \leq 2n \implies t + 2s \leq n$$

□

Nota: tutti i risultati previamente ottenuti, in cui per semplicità abbiamo supposto che si trattasse esclusivamente con polinomi sinistri, sono ugualmente ottenibili con dimostrazioni del tutto analoghe per polinomi destrì quaternionici.

Con questo risultato, siamo riusciti a classificare dunque i tipi di componenti connesse dell'insieme degli zeri di un polinomio sinistro/destro quaternionico. Abbiamo visto che si tratta di componenti omeomorfe a sferre 2-dimensionali S^2 o a punti. Abbiamo inoltre visto che il numero degli anzidetti non eccede il grado del nostro polinomio. Rimane, tuttavia, in sospeso una trattazione adeguata di una classe di polinomi a coefficienti quaternionici, quelli che all'inizio della sezione abbiamo chiamato "polinomi generali". Le cose si complicano molto per questi ultimi, per questo non daremo in questo testo una trattazione estensiva dei loro zeri e della teoria concernente i suddetti. Ciononostante, tra 2 capitoli estenderemo il teorema fondamentale dell'algebra anche ai polinomi generali lineari a coefficienti quaternionici.

2.5 Rappresentazioni matriciali di \mathbb{H}

2.5.1 Rappresentazione matriciale complessa dei quaternioni

Esiste un omomorfismo iniettivo da \mathbb{H} all'anello delle matrici $M_{2x2}(\mathbb{C})$, cioè le matrici 2x2 complesse. Diciamo quindi che possiamo rappresentare un quaternione con una matrice complessa appartenente all'insieme $M_{2x2}(\mathbb{C})$. In particolar modo, al quaternione $q = a + bi + cj + dk$ corrisponde la matrice

$$M_q = \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix} = a\sigma_0 + b\sigma_1 + c\sigma_2 + d\sigma_3 \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \text{ dove qui:}$$

$$\sigma_0 = I_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \sigma_1 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i\sigma_z$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = i\sigma_y, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = i\sigma_x$$

Dove $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sono le matrici di Pauli .

Proposizione 2.22. *L'algebra dei quaternioni \mathbb{H} è isomorfa all'algebra delle matrici rappresentabili come combinazione lineare di σ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, in simboli:*

$$\mathbb{H} \cong \text{span}\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \text{span}\{I_{2x2}, i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z\}$$

Dimostrazione. Sia φ l'applicazione che mappa $1 \rightarrow \sigma_0, i \rightarrow \sigma_1, j \rightarrow \sigma_2, k \rightarrow \sigma_3$, e il quaternione $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & \gamma + \delta i \\ -\gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{bmatrix}$.

L'applicazione è ben definita e iniettiva: supponiamo infatti che $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, siano uguali, allora, per la definizione di equivalenza canonica sui quaternioni avremo $x_{1j} = x_{2j} \forall j \in [1, 4] \cap \mathbb{N}$. Da ciò segue banalmente che:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12}i = x_{21} + x_{22}i \\ x_{13} + x_{14}i = x_{23} + x_{24}i \\ -x_{13} + x_{14}i = -x_{23} + x_{24}i \\ x_{11} - x_{12}i = x_{21} - x_{22}i \end{cases}$$

e che dunque anche $\varphi(q_1) = \varphi(q_2)$. Il converso $\varphi(q_1) = \varphi(q_2) \implies q_1 = q_2$ è a sua volta banale da dimostrare: partiremo stavolta dal sistema di equazioni qui sopra, e usando la definizione di uguaglianza di numeri complessi, dedurremo che $x_{1j} = x_{2j} \forall j \in [1, 4] \cap \mathbb{N}$, allora $q_1 = q_2$.

$$\text{Calcoliamo } \varphi(q_1 + q_2) = \begin{bmatrix} (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i & (\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2)i \\ -(\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2)i & (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)i \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 i & \gamma_1 + \delta_1 i \\ -\gamma_1 + \delta_1 i & \alpha_1 - \beta_1 i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 + \beta_2 i & \gamma_2 + \delta_2 i \\ -\gamma_2 + \delta_2 i & \alpha_2 - \beta_2 i \end{bmatrix} = \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$$

$$\varphi(q_1 q_2) = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}i & \tilde{\gamma} + \tilde{\delta}i \\ -\tilde{\gamma} + \tilde{\delta}i & \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}i \end{bmatrix}$$

dove $\tilde{\alpha} = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2 - \delta_1 \delta_2)$, $\tilde{\beta} = (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2 - \delta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \delta_2)$,
 $\tilde{\gamma} = (\alpha_1 \gamma_2 - \beta_1 \delta_2 + \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \beta_2)$, $\tilde{\delta} = (\alpha_1 \delta_2 + \beta_1 \gamma_2 - \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \alpha_2)$.

$$\varphi(q_1) \varphi(q_2) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 i & \gamma_1 + \delta_1 i \\ -\gamma_1 + \delta_1 i & \alpha_1 - \beta_1 i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 + \beta_2 i & \gamma_2 + \delta_2 i \\ -\gamma_2 + \delta_2 i & \alpha_2 - \beta_2 i \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) + (\gamma_1 + \delta_1 i)(-\gamma_2 + \delta_2 i) & (\alpha_1 + \beta_1 i)(\gamma_2 + \delta_2 i) + (\gamma_1 + \delta_1 i)(\alpha_2 - \beta_2 i) \\ (-\gamma_1 + \delta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) + (\alpha_1 - \beta_1 i)(-\gamma_2 + \delta_2 i) & (-\gamma_1 + \delta_1 i)(\gamma_2 + \delta_2 i) + (\alpha_1 - \beta_1 i)(\alpha_2 - \beta_2 i) \end{bmatrix}$$

Svolgendo i calcoli, ci accorgeremo che è esattamente uguale a $\varphi(q_1 q_2)$.

La suriettiva segue banalmente dalla restrizione dell'immagine dell'omomorfismo iniettivo di algebre in questione, φ , da $M_{2x2}(\mathbb{C})$ a semplicemente $\text{span}\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ \square

Nota 2.1. La norma al quadrato di un quaternione $|q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ è uguale al determinante della sua matrice corrisposta $\det(M_q)$. La verifica è immediata:

$$\det(M_q) = (a + bi)(a - bi) - (-c + di)(c + di) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Nota 2.2. Il quaternione coniugato q^* corrisponde alla trasposta hermitiana della matrice corrispondente a q , $M_q^\dagger = (M_q^T)^*$. Lasciamo la verifica di questo fatto al lettore, in quanto si tratta di un semplice calcolo diretto.

Abbiamo dunque visto che esiste un sottile collegamento tra i quaternioni e le matrici di Pauli, che per chi ha dei rudimenti di meccanica quantistica o teoria dell'informazione quantistica saprà che, insieme alla matrice identità I_{2x2} , formano una base per le matrici hermitiane (spesso chiamate osservabili in contesti inerenti la meccanica quantistica) che agiscono su spazi di Hilbert 2-dimensional (ad esempio lo spazio degli spinori per particelle di spin $\frac{1}{2}$ o lo spazio degli stati di un qubit).

2.5.2 Scrivere quaternioni come matrici reali 4x4

Un'altra rappresentazione matriciale dell'algebra dei quaternioni è la seguente:

$$q = a + bi + cj + dk \longrightarrow^{\varphi^1} M_q^{\mathbb{R}^4} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

Le rappresentazioni dei quaternioni come matrici reali 4x4, tuttavia, sono molteplici. Elenchiamo qui altre rappresentazioni:

$$q = a + bi + cj + dk \xrightarrow{\varphi^2} M_q^{\mathbb{R}2} = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

$$q = a + bi + cj + dk \xrightarrow{\varphi^3} M_q^{\mathbb{R}3} = \begin{bmatrix} a & d & -b & -c \\ -d & a & c & -b \\ b & -c & a & -d \\ c & b & d & a \end{bmatrix}$$

$$q = a + bi + cj + dk \xrightarrow{\varphi^4} M_q^{\mathbb{R}4} = \begin{bmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{bmatrix}$$

Capitolo 3

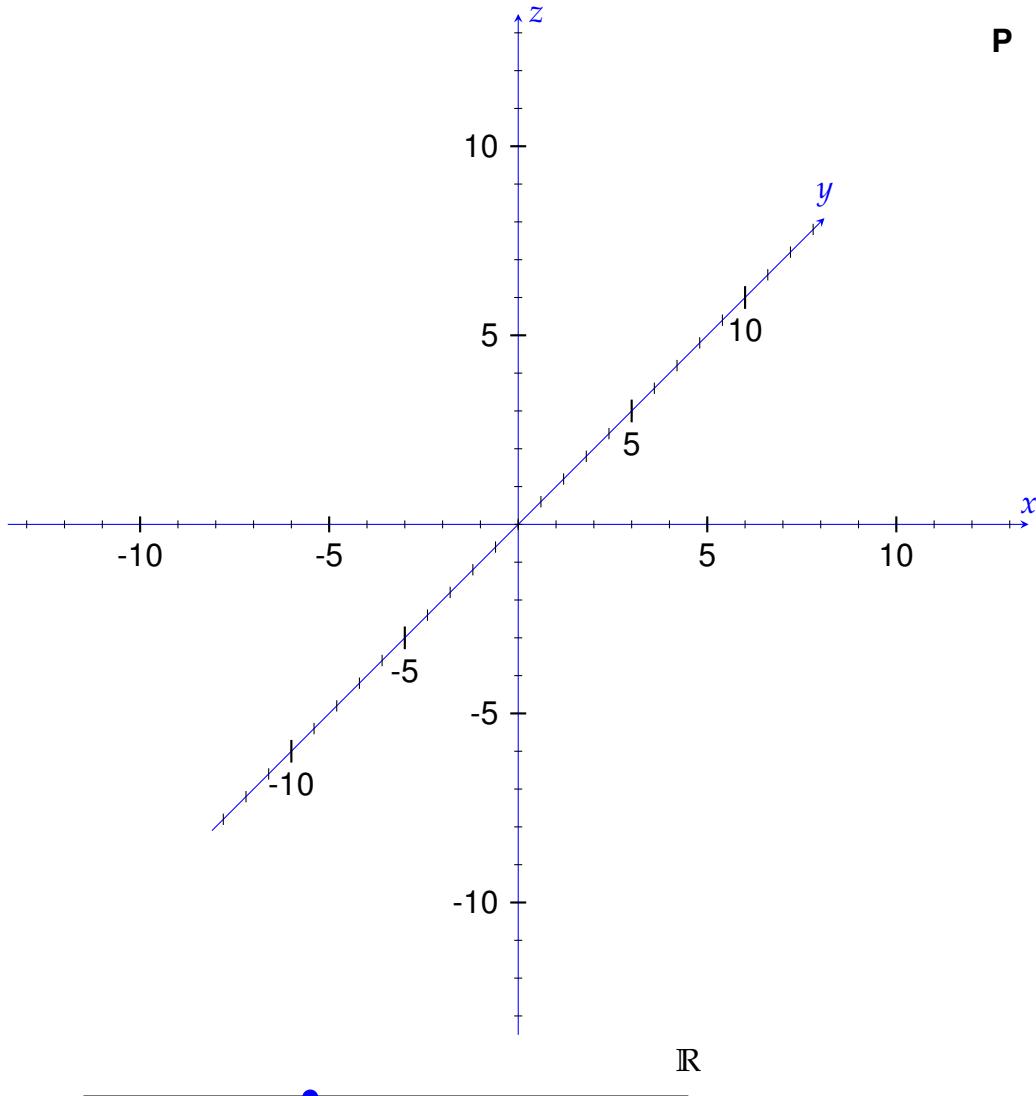
Geometria dei quaternioni

Una delle più importanti applicazioni dei quaternioni è senz’ombra di dubbio quella alla teoria delle rotazioni nello spazio tridimensionale. Di primo acchito, alla persona che si avvicina per la prima volta ai quaternioni risulta difficile comprendere come si possa generare delle rotazioni tridimensionali con i quaternioni e quali benefici comporti rispetto alle matrici di Eulero. In questo capitolo parleremo esattamente di ciò, i.e spiegheremo per quale motivo i quaternioni riescono a rappresentare rotazioni ed inoltre tratteremo molti altri importanti temi, quali tecniche di visualizzazione di sottoinsiemi dell’iperspazio \mathbb{H} e vedremo come interpolare rotazioni tramite la SLERP. Il tema dell’interpolazione di rotazioni è infatti un’importantissima procedura facilmente realizzabile con le rotazioni quaternioniche, ed è una delle ragioni per le quali tale modo di rappresentare le rotazioni sia così potente.

3.1 Visualizzare luoghi geometrici quaternionici

In questa sezione sarà di fondamentale importanza avere una buona intuizione geometrica, pertanto cominceremo sviluppando alcuni modi di visualizzare vari luoghi geometrici viventi in \mathbb{H} . I quaternioni, come visto nel capitolo precedente, possono essere scritti come $\mathbb{H} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbf{P}$, dove qui chiameremo $\{xi + yj + zk ; x, y, z \in \mathbb{R}\} =: \mathbf{P} \cong \mathbb{R}^3$ lo spazio dei quaternioni puri. Potremo interpretare la parte vettoriale del quaternione come la sua parte “spaziale”, e la sua parte reale come la parte “temporale” e pertanto potremo visualizzare i quaternioni come una linea cronologica continua in cui a ogni punto è associato uno spazio tridimensionale, come illustrato

nell'immagine seguente:



I quaternioni puri, pertanto, vivranno nello spazio tridimensionale \mathbb{R}^3 e saranno facilmente visualizzabili (in questo caso è come se avessimo fissato il nostro istante temporale in $t = 0$). I quaternioni puri normali vivono sulla sfera S^2 , e tali quaternioni sono le soluzioni dell'equazione quaternionica $q^2 = -1$, come visto nel capitolo precedente. I quaternioni normali, invece, vivono sulla sfera $S^3 \subset \mathbb{H}$ nello spazio 4-dimensionale. Come possiamo visualizzarli più agevolmente, e "aggirare" la loro 4-dimensionalità? Un modo sarebbe tramite una proiezione stereografica della 3-sfera S^3 su \mathbb{R}^3 , ma potremo anche visualizzarli dividendo la 3-sfera S^3 in 2 emisferi e un equatore, tutti e 3 visualizzabili in \mathbb{R}^3 . Costruiamo tale visualizzazione "in-

duttivamente" partendo dalle sfere di dimensione minore:
Consideriamo la 1-sfera (cerchio) S^1 :

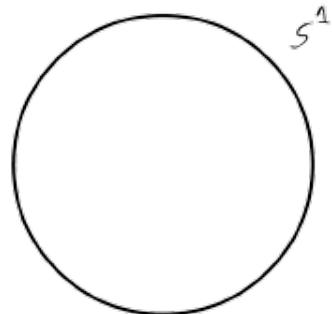


Figura 3.1: Cerchio S^1 visualizzato bi-dimensionalmente.

Possiamo dividere il nostro cerchio in 3 regioni: l'emisfero del nord, l'emisfero del sud e l'equatore nel seguente modo:

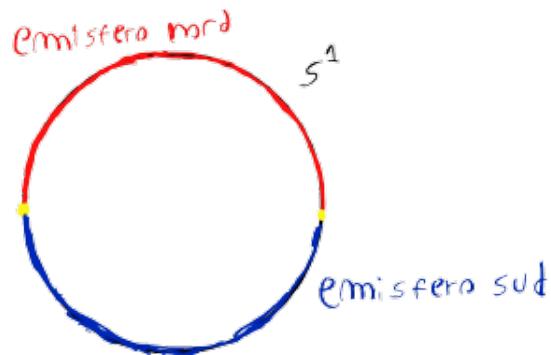


Figura 3.2: Emisfero nord, emisfero sud ed equatore del cerchio S^1 .

dove qui abbiamo indicato in rosso l'emisfero nord, in blu l'emisfero sud e in giallo l'equatore. A questo punto possiamo mappare l'equatore in 2 punti, e l'emisfero nord e sud in due segmenti, ottenendo una visualizzazione 1-dimensionale di S^1 su \mathbb{R} :

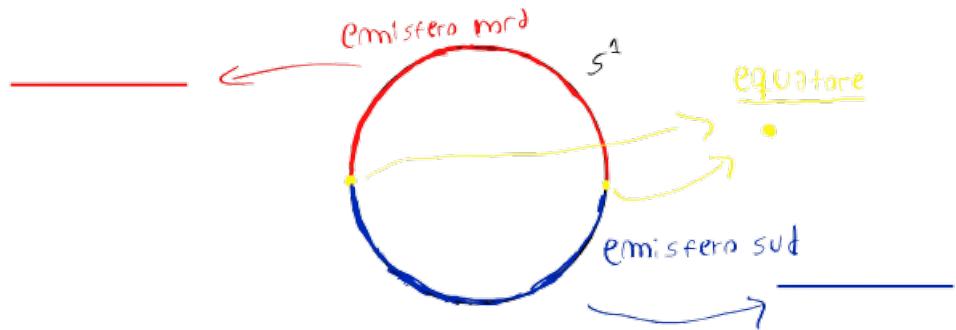


Figura 3.3: Visualizzazione uno-dimensionale del cerchio S^1 .

Analogamente è possibile far ciò con una 2-sfera S^2 :

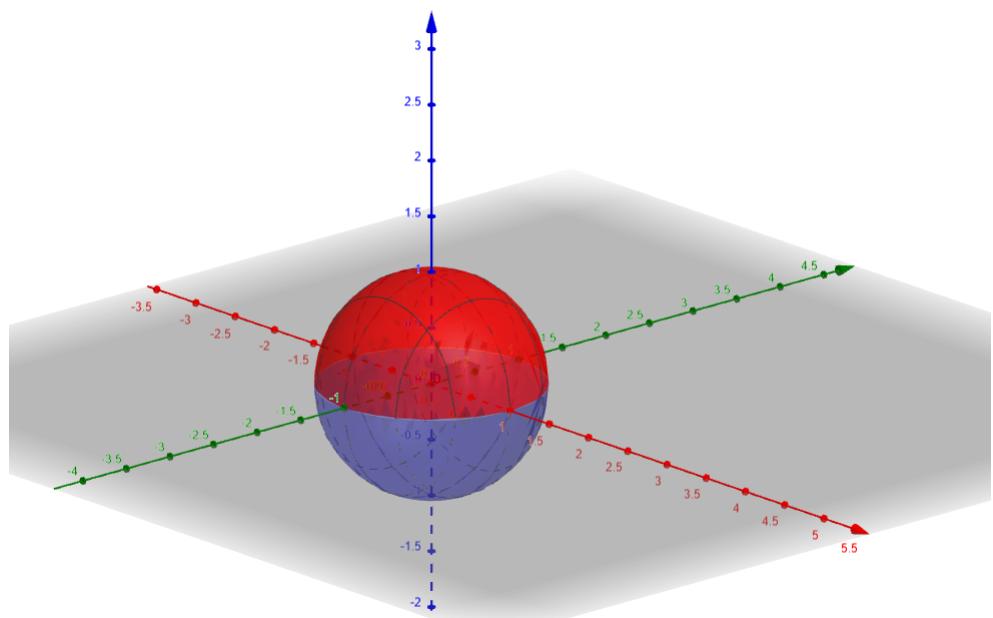


Figura 3.4: Visualizzazione della sfera S^2 immersa in \mathbb{R}^3 : con il rosso è indicato il suo emisfero nord, mentre con il blu è indicato l'emisfero sud.

dove come prima qui abbiamo delineato l'emisfero nord con il rosso e l'emisfero sud con il blu, e l'equatore con il giallo (poco visibile nell'immagine). Tali regioni della sfera possono essere trasformate in regioni 2-dimensionali facilmente visualizzabili: 2 palle piene(dischi) e 1 cerchio vuoto.

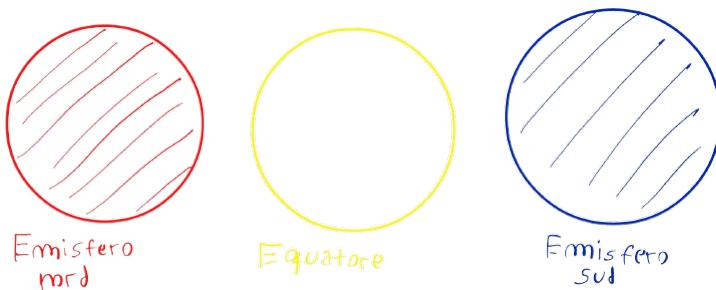


Figura 3.5: Visualizzazione 2-dimensionale della sfera S^2 .

Possiamo ripetere la stessa procedura per visualizzare la 3-sfera S^3 con 3 regioni 3-dimensional. Il risultato sarà, come il lettore si sarà potuto aspettare, 2 palle piene e una sfera:

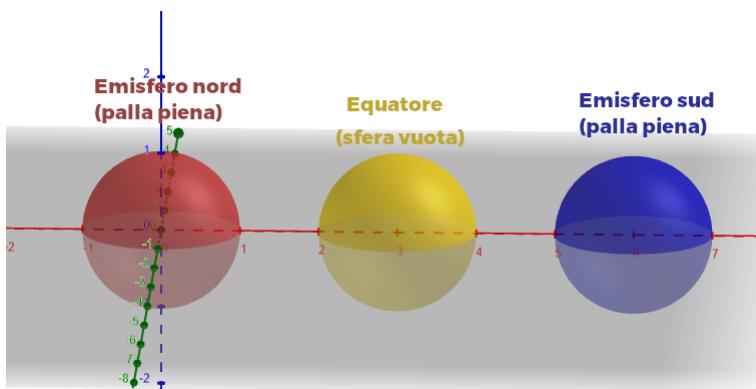


Figura 3.6: Visualizzazione 3-dimensionale dell'ipersfera S^3 .

3.2 Quaternioni e rotazioni

In questa sezione vedremo per quale motivo e come i quaternioni normali producono rotazioni tridimensionali, costruendo (quasi) un isomorfismo

tra i suddetti e il gruppo speciale ortogonale $SO(3)$ (che è il gruppo delle matrici di rotazione 3-dimensionali). Prima di dimostrare questi fatti per i quaternioni, facciamo una breve digressione su alcuni fatti analoghi per i numeri complessi. Sappiamo che la moltiplicazione di un numero complesso per un numero complesso normale (cioè con norma pari a 1) esprime geometricamente una rotazione; infatti, dato un numero complesso $z = r_1 e^{i\phi}$ e dato un numero complesso normale $w = e^{i\psi}$ avremo che:

$$zw = r_1 e^{i(\phi+\psi)}$$

la moltiplicazione di z per w ha dunque rotato z di un angolo ψ . Nel caso della moltiplicazione di un numero complesso per un numero complesso non normale otterremo semplicemente una composizione di una rotazione e di una dilatazione/rimpicciolimento.

Matematicamente tale fatto è dovuto all'isomorfismo di gruppi (di Lie) costruibile tra il gruppo $SO(2)$ delle matrici ortogonali con determinante 1 (che chiameremo gruppo ortogonale speciale di grado 2) e il gruppo dei numeri complessi normali $U(1) := \{e^{i\theta} ; \theta \in \mathbb{R}\}$.

Nota 3.1. *Un gruppo di Lie è semplicemente un gruppo che presenta al contempo una struttura di varietà liscia.*

L'isomorfismo in questione ci è dato dalla seguente considerazione: sappiamo che possiamo identificare un numero complesso con una matrice nel seguente modo:

$$a + ib = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Come conseguenza di ciò avremo che un numero complesso normale del tipo $z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ avrà una rappresentazione matriciale del tipo:

$$z = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

ma l'identificazione appena presentata di un numero complesso con una matrice (rappresentazione matriciale) è un isomorfismo con l'immagine. Pertanto avremo che il gruppo dei numeri complessi normali $U(1)$ sarà isomorfo al gruppo delle matrici $\left\{ \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

Ma tale gruppo è precisamente $SO(2)$, e pertanto avremo:

$$U(1) \cong SO(2)$$

Vorremmo ora dimostrare un risultato analogo per i quaternioni \mathbb{H} ; vedremo tuttavia che il caso dei quaternioni sarà leggermente diverso: al posto di $U(1)$ avremo $SU(2)$, al posto di $SO(2)$ avremo $SO(3)$ e al posto di un isomorfismo avremo una copertura doppia, che definiremo precisamente dopo.

Cominciamo definendo il nostro "candidato" per una rotazione nello spazio: dato un quaternione normale $q \in S^3 = \{p \in \mathbb{H} ; |p| = 1\}$, che scriveremo in forma polare come:

$$q = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (3.1)$$

e dato un quaternione puro $v \in \mathbf{P} \cong \mathbb{R}^3$, vogliamo dimostrare che l'applicazione definita come:

$$\rho_q(v) = qvq^{-1} \quad (3.2)$$

produce una rotazione di un angolo θ rispetto all'asse di rotazione dato da $\text{sgn}(\text{Vec}(q))$. Prima di dimostrare ciò, tuttavia, dimostriamo alcune proprietà di quest'applicazione:

Proposizione 3.1 (Proprietà della rotazione quaternionica). *Sia $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ (dimostreremo tali proprietà per un q più generale, possibilmente non normale, anche se lavoreremo solo con quaternioni normali per rotazioni tridimensionali), sia $p \in \mathbb{H}$ e sia $\rho_q(p)$ definita come prima da:*

$$\rho_q(p) = qpq^{-1}$$

*allora tale applicazione, che chiameremo **rotazione**, ha le seguenti proprietà:*

1. *L'applicazione è \mathbb{R} -lineare, i.e.:*

$$\rho_q(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \lambda_1 \rho_q(p_1) + \lambda_2 \rho_q(p_2) \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbb{H}, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

2. *Preservazione della moltiplicazione quaternionica:*

$$\rho_q(p_1 p_2) = \rho_q(p_1) \rho_q(p_2) \quad \forall p_1, p_2 \in \mathbb{H}$$

3. $(\rho_{q_1} \circ \rho_{q_2})(p) = \rho_{q_1 q_2}(p)$. $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$.

4. ρ_q è un automorfismo isometrico (un automorfismo che preserva la funzione norma, i.e. $|\rho_q(p)| = |p|$) di \mathbb{H} .

Esercizio 3.1. Dimostrare le proprietà delle rotazioni quaternioniche enunciate nella proposizione 3.1.

Dimostriamo ora che, per $q \in S^3$ e $p \in \mathbb{R}^3$, tale applicazione sia effettivamente una rotazione. Cominciamo dimostrando che il gruppo speciale unitario $SU(2)$, composto dalle matrici del tipo:

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix} ; a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, , a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.3)$$

sia isomorfo ai quaternioni normali viventi sulla 3-sfera $S^3 \subset \mathbb{H}$.

Ricordando la rappresentazione matriciale vista nella sottosezione 2.5.1, notiamo che tale gruppo presenta precisamente le rappresentazioni matriciali di quaternioni unitari, e pertanto il gruppo dei quaternioni unitari, geometricamente visualizzabile come S^3 , è isomorfo al gruppo $SU(2)$.

Purtroppo nel caso quaternionico il gruppo di Lie $SU(2)$ non sarà globalmente isomorfo a $SO(3)$, ma solo localmente. Ciò vuol dire, più specificamente, che non avremo un isomorfismo di gruppi di Lie ma piuttosto una copertura doppia, ossia avremo un omomorfismo suriettivo $\varphi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ che mappa ogni quaternione unitario $q \in SU(2)$ in una rotazione ρ_q ; tale omomorfismo, tuttavia, non è iniettivo, in quanto mappa punti antipodali della sfera S^3 , q e $-q$, nella stessa rotazione ρ_q .

Costruiamo ora l'omomorfismo in questione dimostrando i seguenti teoremi:

Teorema 3.1. *Sia $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ un quaternione, e sia $p \in \mathbb{H}$ un altro quaternione; l'applicazione ρ_q definita come:*

$$\rho_q : p \rightarrow qpq^{-1}$$

è una rotazione in $SO(4)$, la cui restrizione all'insieme $\mathbf{P} \subset \mathbb{H}$ dei quaternioni puri è una rotazione in $SO(3)$. Inoltre, ogni rotazione R in $SO(3)$ è della forma:

$$\rho_q : p \rightarrow qpq^{-1}$$

per un quaternione q non pari a 0 e per un quaternione puro $p \in \mathbf{P}$. Inoltre, se due quaternioni $q_1, q_2 \neq 0$ rappresentano la stessa rotazione, allora avremo $q_1 = \lambda q_2$ per $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che ogni rotazione di $SO(3)$ sia effettivamente della forma ρ_q annunciata nell'asserto. Per il teorema di Cartan-Dieudonne avremo che ogni rotazione non pari all'identità è la composizione di un numero pari di riflessioni. Pertanto, ci basterà mostrare che per ogni riflessione σ di $\mathbf{P} \cong \mathbb{R}^3$ attorno ad un piano $H \subset \mathbf{P}$, esiste un quaternione $q \neq 0$ tale che $\sigma(p) = -qpq^{-1} \forall p \in \mathbf{P}$.

Supponendo che q sia un quaternione puro ortogonale a H , sapremo che l'espressione matematica per la nostra riflessione σ attorno a H sarà del tipo:

$$\sigma(p) = p - 2 \frac{p \cdot q}{q \cdot q} q \quad \forall p \in \mathbf{P} \quad (3.4)$$

(dove qui \cdot è il prodotto scalare, onde evitare confusione). Ma abbiamo visto in un problema affrontato nel capitolo 2 che, per due quaternioni puri $r, s \in \mathbf{P}$ avremo $2(r \cdot s) = -(rs + sr)$. Pertanto potremo riscrivere l'equazione (3.4) come:

$$\sigma(p) = p + 2(p \cdot q)q^{-1} = p - (pq + qp)q^{-1} = -qpq^{-1} \quad (3.5)$$

ottenendo il risultato sperato. Per dimostrare invece che un'applicazione del tipo $\rho_q : p \rightarrow qpq^{-1}$ sia effettivamente una rotazione di $SO(4)$ (per un generico p) dovremo ricavare esplicitamente la sua forma matriciale.

Un calcolo diretto ci consegna la seguente espressione per $\rho_q(p)$:

$$\begin{aligned} \rho_q(p) = \frac{1}{\|q\|^2} & \{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)p_0 + [(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)p_1 + 2(bc - ad)p_2 + 2(ac + bd)p_3]i + \\ & [2(ad + bc)p_1 + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)p_2 + 2(cd - ab)p_3]j + \\ & [2(bd - ac)p_1 + 2(cd + ab)p_2 + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)p_3]k\} \end{aligned}$$

Dove qui $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ e $q = a + bi + cj + dk$.

Identificando, tramite un isomorfismo, $\rho_q(p)$ e p con dei vettori colonna di \mathbb{R}^4 , potremo riscrivere $\rho_q(p)$ come il vettore p moltiplicato per una matrice M_ρ che rappresenta l'operazione $q \square q^{-1} : p \rightarrow qpq^{-1}$. La matrice in questione (anch'essa ottenibile tramite un calcolo diretto) è:

$$M_\rho = \frac{1}{\|q\|^2} \begin{bmatrix} \|q\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 0 & 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 0 & 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$\rho_q(p) = \frac{1}{\|q\|^2} \begin{bmatrix} \|q\|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 0 & 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(cd - ab) \\ 0 & 2(bd - ac) & 2(ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

La matrice M_ρ così ottenuta è una matrice ortogonale appartenente al gruppo speciale ortogonale $SO(4)$. Nel caso in cui il quaternione p dovesse essere un quaternione puro, allora la matrice sarebbe un elemento di

$SO(3)$.

Per dimostrare l'ultimo punto, invece, assumiamo che dati due quaternioni $q_1, q_2 \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, $\rho_{q_1}(p) = \rho_{q_2}(p) \forall p \in \mathbb{H}$. In altre parole, avremo:

$$q_1 p q_1^{-1} = q_2 p q_2^{-1}$$

Moltiplicando da sinistra per q_2^{-1} otteniamo:

$$q_2^{-1} q_1 p = p q_2^{-1} q_1$$

i.e. $q_2^{-1} q_1 \in Z(\mathbb{H})$ (il centro dei quaternioni). Cioè il quaternione $q_2^{-1} q_1$ commuta con $p \forall p \in \mathbb{H}$, pertanto è un elemento del centro. Ma nel capitolo 2 abbiamo visto che il centro dell'algebra dei quaternioni sono i numeri reali, e pertanto avremo che $q_2^{-1} q_1 \in \mathbb{R}$. Chiameremo tale numero $\frac{1}{\lambda}$. Infatti, moltiplicando ambo i lati per q_2 da sinistra, otterremo:

$$q_2 = \lambda q_1$$

come desideravamo dimostrare. \square

La proposizione 3.1 e il teorema 3.1 ci permettono di costruire la doppia copertura di $SO(3)$ da parte di $SU(2)$, come preannunciato all'inizio della sezione. Il nostro omomorfismo continuo suriettivo sarà $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3)$, che mappa un quaternione normale $q \rightarrow \rho_q := q \square q^{-1}$. L'applicazione è ovviamente suriettiva in quanto, come visto nel teorema 3.1, ogni rotazione di $SO(3)$ può essere rappresentata come $q \square q^{-1}$ per un quaternione puro $q \in \mathbf{P}$. L'applicazione è anche un omomorfismo di gruppi, come conseguenza della proposizione 3.1. Infine, notiamo che l'applicazione $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3)$ mappa punti antipodali della sfera $SU(2)$ nella stessa rotazione $SO(3)$: infatti, per due quaternioni normali $q, -q \in SU(2)$, avremo $\rho_q(p) = qpq^{-1} = \rho_{-q}(p) = (-q)p(-q)^{-1}$. Per verificare che tali punti siano gli unici casi in cui due punti vengono mappati nella stessa rotazione dovremo utilizzare la parte finale del teorema 3.1, che afferma che se due quaternioni $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ rappresentano la stessa rotazione allora avremo $q_1 = \lambda q_2$ per $\lambda \in \mathbb{R}$. Ma avendo ristretto il dominio di ρ da $\mathbb{H} \setminus \{0\}$ a $SU(2)$, avremo che necessariamente $|q_1| = |q_2| = 1$. Ma allora λ può essere solamente -1 . Pertanto due quaternioni diversi che rappresentano la stessa rotazione dovranno necessariamente essere punti antipodali di $SU(2)$, i.e uno la negazione dell'altro.

Questo risultato ci permette anche di interrogarci sulla struttura topologico-geometrica di $SO(3)$. Ricordiamo che $SU(2)$ è topologicamente la sfera S^3 . Identificando i punti antipodali della sfera S^3 come equivalenti, e costruendo lo spazio quoziante sotto tale identificazione, otterremo uno spazio omeomorfo a $SO(3)$. Ma lo spazio così costruito, i.e la sfera S^3 in cui i

punti antipodali sono identificati, è precisamente lo spazio proiettivo reale \mathbb{RP}^3 .

La struttura topologica e differenziale del gruppo di Lie $SO(3)$ sarà pertanto diffeomorfa a quella dello spazio proiettivo reale \mathbb{RP}^3 . Ricapitoliamo ora velocemente i risultati ottenuti in questa sezione:

- Sia $q = \cos \frac{\theta}{2} + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin \frac{\theta}{2}$ un quaternione normale (i.e un quaternione con $|q| = 1$), e sia $v \in \mathbf{P}$ un quaternione puro. Allora l'applicazione $\rho_q : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ definita come:

$$\rho_q(v) = qvq^{-1}$$

rappresenta la rotazione del vettore $v \in \mathbf{P} \cong \mathbb{R}^3$ di un angolo θ attorno all'asse di rotazione di $\text{sgn}(\text{Vec}(q))$.

- I quaternioni normali, geometricamente $S^3 \subset \mathbb{H}$, sono un gruppo di Lie isomorfo a $SU(2)$.
- Tale possibilità di effettuare rotazioni tridimensionali con quaternioni normali è spiegata dall'esistenza di un omomorfismo continuo suriettivo $\rho : SU(2) \rightarrow SO(3)$ che mappa un quaternione normale q nella sua funzione rotazione associata $\rho_q(p) = qpq^{-1}$. Tale omomorfismo, tuttavia, mappa punti antipodali di $SU(2)$ nella stessa rotazione, e pertanto verrà detto **copertura doppia** di $SO(3)$.
- $SO(3)$ è geometricamente interpretabile come una sfera S^3 dove i punti antipodali sono stati identificati tra loro, o più precisamente, come il quoziente dello spazio topologico S^3 sotto la relazione d'equivalenza che identifica punti antipodali come equivalenti. Tale spazio è \mathbb{RP}^3 .

Esercizio 3.2. Ruotare il vettore $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}}i + 2j - k$ di un angolo di 45° rispetto all'asse di rotazione dato da $\vec{u} = \sqrt{3}i - \pi j + k$.

Esercizio 3.3. Dimostrare che, per un quaternione $p \in \mathbb{H}$, se esso ha la stessa direzione di q allora l'applicazione $\rho_q(p)$ non cambierà la sua direzione.

3.3 Problemi con le matrici euleriane

Il lettore si sarà potuto chiedere a questo punto per quale motivo sia giovevole utilizzare i quaternioni al posto delle matrici euleriane per rappresentare rotazioni tridimensionali. Come già accennato nell'introduzione,

il più grande problema delle matrici euleriane è quello del **blocco cardanico**, più comunemente noto come "gimbal lock" in inglese. Cominciamo ricordando brevemente la teoria delle matrici euleriane; dato un vettore \vec{v} di \mathbb{R}^3 , è possibile ruotare quest'ultimo attorno agli assi x , y o z tramite le seguenti matrici di rotazione:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chiamiamo l'angolo ϕ di cui ruotiamo il nostro vettore \vec{v} attorno all'asse x angolo "roll", l'angolo θ di cui ruotiamo il nostro vettore attorno all'asse y angolo "pitch" ed infine l'angolo ψ angolo "yaw".

L'idea è poi quella di esprimere ogni rotazione tridimensionale come una composizione di queste matrici. Tuttavia vi è un problema: vi sarà sicuramente capitato di vedere online, magari in qualche video-compilation di bugs, delle animazioni 3d bizzarre in cui nel prosieguo di una rotazione di un corpo si ha un subitaneo movimento brusco e irrealistico. Ancora, molto famoso è l'episodio dell'Apollo 11, in cui fu utilizzata un IMU ("Inertial measurement unit", i.e. unità di misura inerziale) con 3 assi rotanti apparentemente indipendenti. La scelta di non includerne un quarto comportò agli ingegneri di dover trovare altri modi per evitare il problema del blocco cardanico, e la soluzione fu quella di includere un indicatore sulla console che avvertisse dell'avvicinamento a degli angoli "critici". Che cosa si intende tuttavia per angoli critici? Cos'è esattamente e quando avviene un blocco cardanico? Perché è un problema così importante? Anzitutto facciamo un po' di chiarezza linguistica, in quanto quando parleremo di "blocco cardanico" non intenderemo un vero e proprio blocco, ma piuttosto una "perdita di un grado di libertà" (per perdita di un grado di libertà qui intendiamo perdita di una possibilità di ruotare attorno ad un asse).

La domanda da farsi a questo punto è: come si può perdere un grado di libertà? Vedremo che ciò accade quando due degli anelli di rotazione di una sospensione cardanica si allineano. Confermiamo ora questo fatto matematicamente: supponiamo di avere una sequenza xyz di rotazioni $R_{xyz}(\phi, \theta, \psi)$ definita come:

$$R_{xyz}(\phi, \theta, \psi) = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi)$$

poniamo l'angolo "pitch" θ pari a $\frac{\pi}{2}$, ossia allineiamolo all'anello x . A questo punto, sostituendo le matrici di rotazione introdotte all'inizio della sezione al posto di R_x, R_y e R_z , e ponendo $\theta = \frac{\pi}{2}$ otteniamo:

$$R_{xyz}(\phi, \frac{\pi}{2}, \psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sviluppando la moltiplicazione otteniamo:

$$R_{xyz}(\phi, \frac{\pi}{2}, \psi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & 0 \\ -\cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \psi + \sin \phi \cos \psi & 0 \end{bmatrix}$$

ed infine, utilizzando le identità trigonometriche di somma otteniamo:

$$R_{xyz}(\phi, \frac{\pi}{2}, \psi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\phi + \psi) & \cos(\phi + \psi) & 0 \\ -\cos(\phi + \psi) & \sin(\phi + \psi) & 0 \end{bmatrix}$$

Osserviamo che la forma algebrica ottenuta conferma la nostra intuizione geometrica: allineando due assi di rotazione perdiamo un grado di libertà. Infatti ora, cambiando ϕ e ψ , potremo ruotare solo attorno all'asse z . Ciò è visualizzabile geometricamente con la seguente immagine:

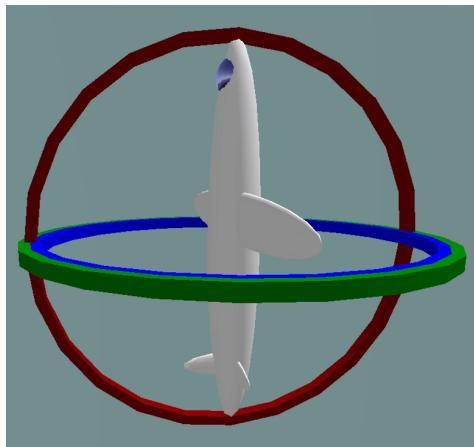


Figura 3.7: Visualizzazione del blocco cardanico di un modello 3d. [la foto nella figura è tratta da Wikipedia, caricata dall'user "MathsPoetry": https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/38/Gimbal_lock.png licenza CC BY-SA 3.0].

Nella figura, infatti, due degli anelli della sospensione cardanica sono allineati, e pertanto il nostro oggetto perderà una direzione di possibile rotazione e diremo che ha perso un grado di libertà.

Durante l'atterraggio della navicella della missione Apollo 11 si fu molto vicini al raggiungimento del blocco cardanico dell'IMU della navicella. Da questo nacque la storica frase di Michael Collins: «How about sending me a fourth gimbal for Christmas?», riferendosi alla possibilità di aver potuto evitare tale inconveniente se si fosse incluso un quarto anello. Rappresentare rotazioni tridimensionali tramite i quaternioni presenta pertanto un argine al problema del blocco cardanico, ed è per questo che i suddetti sono tanto in voga in tutte quelle situazioni in cui si lavora con rotazioni nello spazio tridimensionale.

3.4 Interpolazione di rotazioni

In questa sezione ci interrogheremo sulla seguente questione: se abbiamo due rotazioni (che alla luce della scorsa sezione sappiamo essere rappresentate da due quaternioni normali sulla sfera S^3) come potremo trovare una serie continua di rotazioni "intermedie"? Tale processo è di grande importanza per la computer grafica ed altri campi della scienza applicata in cui si utilizzano rotazioni tridimensionali, in quanto ci permetterà di rappresentare rotazioni di enti fluidamente e realisticamente. Chiameremo questo processo **interpolazione di rotazioni**. Il lettore ha probabilmente già sentito questa parola, con maggior eventualità nelle seguenti istanze: "interpolazione lineare", "interpolazione polinomiale". L'interpolazione di rotazioni, infatti, proprio come l'interpolazione lineare o l'interpolazione polinomiale si prefiggono il compito di congiungere un numero finito di punti tramite segmenti e, rispettivamente, tramite un polinomio (di grado pari al numero di punti meno 1), si prefigge il compito di congiungere due rotazioni tra loro.

Ricordiamo ora la formula di interpolazione lineare (che abbrevieremo spesso con l'acronimo "LERP") di due punti nello spazio x_1 e x_2 :

$$x(t) = (1 - t)x_1 + tx_2 \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.6)$$

tale metodo di interpolazione è visualizzabile geometricamente come un segmento che congiunge i due punti x_1, x_2 . Le posizioni intermedie tra i due vivono su questo segmento, come mostrato nella figura sottostante:



Ritorniamo ora alla nostra situazione iniziale: abbiamo due quaternioni normali q_1, q_2 viventi sulla 3-sfera S^3 . Idealmente vorremo poterli interpolare in un continuum di quaternioni intermedi, viventi anch'essi sulla 3-sfera S^3 , che siano tra loro ugualmente spaziati angolarmente (più suggestivamente, vorremo che tale interpolazione abbia "velocità angolare costante").

Vediamo che interpolandoli linearmente avremo che i quaternioni "intermedi" non si troveranno su S^3 , come viene suggerito anche dalla figura sottostante (ridotta al caso due dimensionale per semplicità):

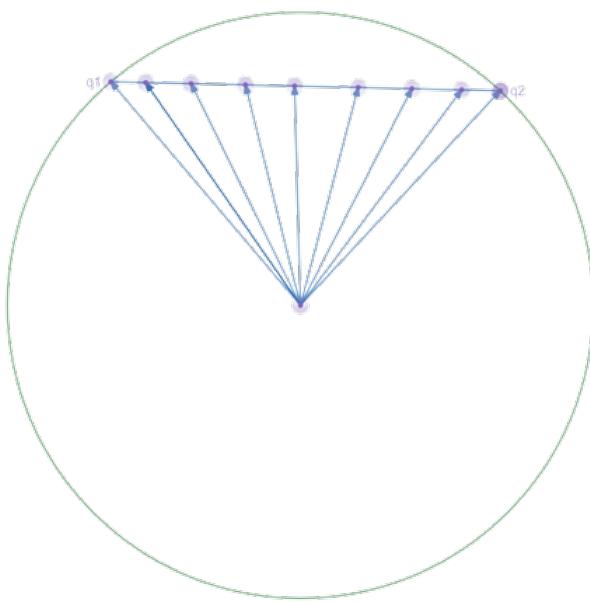


Figura 3.8: Visualizzazione dell'interpolazione lineare di punti su una sfera.

Possiamo verificare matematicamente ciò calcolando la norma di un quaternione intermedio $q(t) = (1 - t)q_1 + tq_2$ ad un istante t :

$$|q(t)|^2 = q(t) \cdot q(t) = (1 - t)^2 q_1 \cdot q_1 + t(1 - t) q_1 \cdot q_2 + t(1 - t) q_2 \cdot q_1 + t^2 q_2 \cdot q_2$$

dove qui \cdot è il prodotto scalare di quaternioni. Essendo per ipotesi q_1 e q_2 dei quaternioni normali, avremo che $|q_1| = 1 = q_1 \cdot q_1$ e $|q_2| = 1 = q_2 \cdot q_2$. Inoltre, chiamando ϕ l'angolo tra i due, tale che $q_1 \cdot q_2 = \cos \phi$, otteniamo:

$$|q(t)|^2 = 1 + 2t^2 - 2t + 2t(1 - t) \cos \phi$$

cioè conferma la nostra asserzione iniziale. Potremo pensare, a questo punto, di proiettare $q(t)$ su S^3 , e sebbene far ciò ci darà un quaternione normale vivente sull'ipersfera, non otterremo un'interpolazione di quaternioni ugualmente angolarmente spaziata, come possiamo vedere nel grafico sottostante.

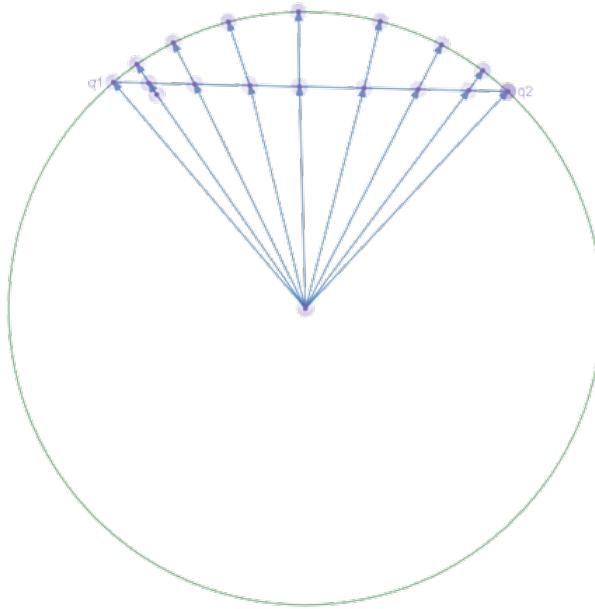


Figura 3.9: Proiezione dei "quaternioni intermedi" tra q_1 e q_2 ottenuti tramite l'interpolazione lineare di quaternioni sulla sfera S^3 .

Per ottenere il nostro obiettivo dovremo ricorrere alla tecnica dell'interpolazione sferica (che chiameremo spesso per antonomasia "SLERP"); la deriveremo con la procedura di Gram-Schmidt, che il lettore ha probabilmente già incontrato in un corso di algebra lineare. Siano come prima q_1 e q_2 due quaternioni normali; cominciamo trovando, con il metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, un quaternione normale ortogonale a q_1 , che chiameremo q' :

$$q' = \frac{q_2 - q_1(q_1 \cdot q_2)}{|q_2 - q_1(q_1 \cdot q_2)|}$$

Osserviamo che il denominatore dell'espressione soprastante ha la seguente proprietà:

$$|q_2 - q_1(q_1 \cdot q_2)|^2 = -2 \cos^2 \phi + \cos^2 \phi = \sin^2 \phi$$

dove qui ϕ è l'angolo tra q_1 e q_2 . Da ciò segue che $|q_2 - q_1(q_1 \cdot q_2)| = |\sin \phi|$. Per semplicità, richiederemo che $0 \leq \phi < \pi$, dimodoché avremo $\sin \phi = |\sin \phi|$. Il sistema di due vettori ortonormali $\{q_1, q'\}$ ci permetterà di ruotare il nostro quaternione ortonormale iniziale q_1 in un range di valori tra q_1 e q_2 mantenendo una "velocità angolare" costante; possiamo visualizzare la situazione tramite la seguente illustrazione (semplificata):

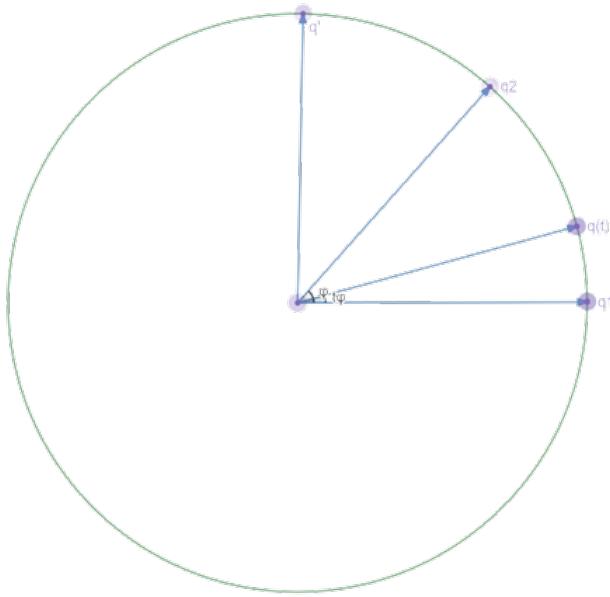


Figura 3.10: Visualizzazione del procedimento di interpolazione sferica di quaternioni su S^3 .

Poniamo il nostro quaternione intermedio $q(t)$ funzione di t pari a:

$$q(t) = q_1 \cos(t\phi) + q' \sin(t\phi) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.7)$$

ricordando che $q' = \frac{q_2 - q_1(q_1 \cdot q_2)}{|q_2 - q_1(q_1 \cdot q_2)|} = \frac{q_2 - q_1 \cos \phi}{\sin \phi}$, potremo sostituire ciò nell'equazione (3.7), e sviluppando i calcoli otterremo:

$$q(t) = q_1 \frac{\cos(t\phi) \sin \phi - \sin(t\phi) \cos \phi}{\sin \phi} + q_2 \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi}$$

Utilizzando infine le formule di somma del seno giungiamo alla forma finale dell'equazione (3.7):

$$q(t) = q_1 \frac{\sin(\phi - t\phi)}{\sin \phi} + q_2 \frac{\sin(t\phi)}{\sin \phi} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.8)$$

L'equazione soprastante è la formula di interpolazione sferica di due quaternioni normali q_1, q_2 .

Esercizio 3.4. *Sia $q(t)$ definito come nell'equazione (3.8): verificare che $|q(t)| = 1 \forall t \in [0, 1]$.*

Capitolo 4

Topologia dei quaternioni

In questo quarto capitolo studieremo i quaternioni dal punto di vista topologico. Come vedremo, a differenza del loro comportamento algebrico che è alquanto bizzarro, i quaternioni avranno una struttura topologica canonica (cioè quella indotta dalla metrica naturalmente assegnabile ad un'algebra ben normata) con molte proprietà desiderabili. La topologia canonica dei quaternioni è infatti uno spazio metrico completo, omeomorfo a $(\mathbb{R}^4, \mathcal{U})$, e la definizione di analoghi quaternionici di limite di una successione, limite di una funzione, funzione continua ecc. sarà facilmente realizzabile, e obbedirà a quasi tutte le proprietà ritrovabili nella controparte reale e complessa.

4.1 Costruzione di $(\mathbb{H}, \mathcal{U})$

Cominciamo dunque costruendo la topologia canonica sull'insieme dei quaternioni. Abbiamo dimostrato nel secondo capitolo che la funzione $\delta(q_1, q_2) = |q_1 - q_2|$, $\delta : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ fosse una metrica su \mathbb{H} , cioè che soddisfacesse i seguenti assiomi:

1. $\delta(q_1, q_2) \geq 0$.
2. $\delta(q_1, q_2) = \delta(q_2, q_1)$.
3. $\delta(q_1, q_3) \leq \delta(q_1, q_2) + \delta(q_2, q_3)$.
4. $\delta(q_1, q_2) = 0 \iff q_1 = q_2$.

$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$.

I lettori con dei rudimenti di topologia ricorderanno sicuramente ora la costruzione di una topologia su un'insieme data una metrica, noi tuttavia la

ripeteremo qui di seguito.

Cominciamo definendo la nozione di palla aperta e palla chiusa in \mathbb{H} rispetto alla metrica canonica δ .

Definizione 4.1 (Palla aperta e palla chiusa in \mathbb{H}). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione ed $r > 0$ un numero reale positivo. Allora chiameremo i seguenti insiemi palla aperta e palla chiusa di centro q e raggio r :*

$$B(q, r) = \{p \in \mathbb{H} \mid \delta(q, p) < r\} = \{p \in \mathbb{H} \mid (t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 < r^2\}$$

$$\bar{B}(q, r) = \{p \in \mathbb{H} \mid \delta(q, p) \leq r\} = \{p \in \mathbb{H} \mid (t_1 - t_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leq r^2\}$$

Geometricamente, come esPLICITATO tra l'altro anche dalla condizione imposta sulle componenti t, x, y, z di un quaternione appartenente a una palla aperta/chiusa, esse rappresentano rispettivamente l'interno di una ipersfera (3-sfera), e l'interno con bordo di un'ipersfera.

Dimostriamo ora alcune proprietà delle palle aperte in \mathbb{H} , tuttavia valide in generale anche per palle aperte su insiemi più generali dotati di una metrica.

Proposizione 4.1. *Sia $B(p, \epsilon)$ una palla aperta con centro p e raggio ϵ . Allora $\forall q \in B(p, \epsilon)$, esiste una palla aperta $C(q, \rho)$ con centro in q contenuta in $B(p, \epsilon)$, $C(q, \rho) \subset B(p, \epsilon)$.*

Dimostrazione. Sia $q \in B(p, \epsilon)$, allora per la definizione che abbiamo dato di palla aperta, avremo $\delta(q, p) < \epsilon \implies \epsilon - \delta(q, p) > 0$.

Chiamiamo questo numero reale positivo ρ , $\rho = \epsilon - \delta(q, p)$. Dimostriamo ora che $C(q, \rho)$ sia un sottoinsieme di $B(p, \epsilon)$. Sia $x \in C(q, \rho)$, allora richiederemo che $\delta(x, q) < \rho = \epsilon - \delta(q, p)$.

Utilizzando la disegualanza del triangolo avremo:

$$\delta(x, p) \leq \delta(x, q) + \delta(q, p) < (\epsilon - \delta(q, p)) + \delta(q, p) = \epsilon$$

quindi $x \in B(p, \epsilon)$, i.e $C(q, \rho) \subset B(p, \epsilon)$. □

Lemma 4.1. *Siano $B_1(q, \epsilon)$ e $B_2(q, \rho)$ due palle aperte quaternioniche centrate nello stesso punto $q \in \mathbb{H}$. Avremo allora che o $B_1 \subset B_2$ o $B_2 \subset B_1$.*

Dimostrazione. Essendo ϵ e ρ due numeri reali positivi, avremo che $\epsilon \leq \rho$ oppure $\rho \leq \epsilon$, alla luce del fatto che \mathbb{R} è un insieme totalmente ordinato (rispetto all'ordinazione canonica \leq). Da ciò segue immediatamente che una delle due palle deve essere contenuta nell'altra. □

Lemma 4.2. Siano B_1, B_2 due palle aperte quaternioniche, e sia $q \in B_1 \cap B_2$. Allora esiste una palla aperta con centro q , $B_3(q, \rho)$, tale che $q \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Dimostrazione. Sia $q \in B_1 \cap B_2$, allora $q \in B_1$ e $q \in B_2$. Per la proposizione 4.1, sappiamo che esistono in entrambi i casi delle palle centrate in q P_1 , P_2 contenute in B_1 e B_2 rispettivamente. Avendo tuttavia lo stesso centro, come dimostrato in precedenza, avremo che $P_1 \subset P_2 \subset B_2$ o $P_2 \subset P_1 \subset B_1$. Nel primo caso avremo $B_3 = P_1 \subset B_1 \cap B_2$, mentre nel secondo $B_3 = P_2 \subset B_1 \cap B_2$. \square

Graficamente, possiamo visualizzare il lemma appena dimostrato nel seguente modo:

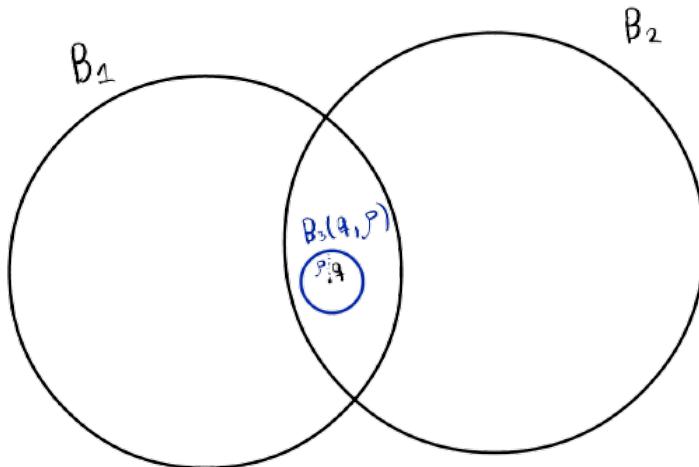


Figura 4.1: Visualizzazione del lemma 4.2.

Queste due proposizioni preparatorie ci permettono di dimostrare molto velocemente il seguente fatto:

Teorema 4.1. L'insieme delle palle aperte in \mathbb{H} $\Sigma_{\mathbb{H}} = \{B(q, \epsilon) | q \in \mathbb{H}, \epsilon > 0\}$ rispetto alla metrica δ forma una base per una topologia su \mathbb{H} . Tale topologia è la topologia metrica di \mathbb{H} , che chiameremo topologia canonica sui quaternioni, e denoteremo $(\mathbb{H}, \mathcal{U})$.

La topologia i cui insiemi aperti sono dati da unioni delle palle aperte rispetto a una metrica è inducibile generalmente su tutti gli insiemi dotati

di una metrica δ ; chiameremo questi spazi spazi metrici, e li denoteremo come (X, τ, δ) . Essere uno spazio metrico è la proprietà "ideale" per poter impostare un'analisi su uno spazio, in quanto ci permette di definire le nozioni dell'analisi in maniera molto simile alle controparti reali e complesse. Gli spazi metrici sono inoltre considerabili all'apice della "gerarchia" degli spazi, se li ordiniamo in una gerarchia secondo i vari assiomi di separazione (Classificazione di Kolmogorov).

Nota esplicativa: gli assiomi di separazione sono assiomi che "danno struttura" ad uno spazio topologico, i.e richiedono che siano soddisfatte alcune proprietà extra che rendono la struttura più interessante. Alcuni esempi importanti sono l'assioma T_2 ; gli spazi che lo rispettano sono detti di Hausdorff, di grande importanza per lo studio delle varietà lisce come abbiamo visto nell'introduzione. Ce ne sono molti altri, ad esempio l'assioma T_0 , T_1 , T_3 ecc. Perché vengono denominati utilizzando un numero naturale crescente? La risposta risiede in delle proposizioni dimostrate in genere in un corso introduttivo di topologia generale; ogni spazio T_6 è T_5 , e a sua volta ogni spazio T_5 è T_4 , e a sua volta ogni spazio T_4 è T_3 e così via. Gli spazi vengono poi "gerarchizzati" in base agli assiomi rispettati alla luce di questa "catena di relazioni", secondo quella che viene detta "Classificazione di Kolmogorov", illustrata qui sotto:

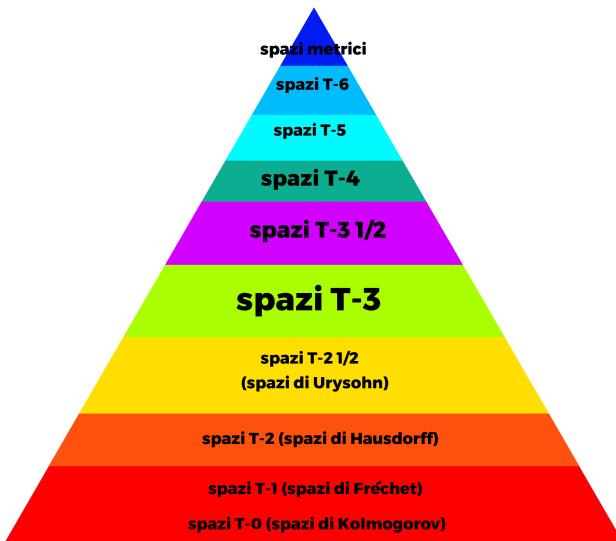


Figura 4.2: "Gerarchia" degli spazi topologici visualizzata tramite una piramide.

All'apice come vediamo ci sono gli spazi metrici. Essi rispettano infatti tutte le proprietà sottostanti, più quelle extra esclusive alla loro struttura.

Da ora in poi denoteremo la topologia appena costruita su \mathbb{H} , $(\mathbb{H}, \mathcal{U}, \delta)$ come semplicemente \mathbb{H} , e quando ci riferiremo ad aperti/chiusi in \mathbb{H} , intenderemo sempre rispetto alla topologia metrica in questione, a meno di una previa specificazione.

Andiamo ora a dimostrare un altro fatto riguardo la topologia canonica dei quaternioni appena costruita. Nonostante sia molto semplice da dimostrare, riporteremo qui di seguito una dimostrazione.

Teorema 4.2. *Sia $(\mathbb{H}, \mathcal{U})$ la topologia canonica metrica dei quaternioni e $(\mathbb{R}^4, \mathcal{U})$ la topologia metrica indotta dalla metrica 4-euclidea su \mathbb{R}^4 . Allora la funzione $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita nel seguente modo:*

$$\varphi(a + bi + cj + dk) = [a, b, c, d] \in \mathbb{R}^4$$

è un omeomorfismo isometrico di spazi metrici. Dunque $(\mathbb{H}, \mathcal{U}) \cong (\mathbb{R}^4, \mathcal{U})$.

Dimostrazione. Cominciamo la dimostrazione mostrando che φ è bigettiva: supponiamo di avere due quaternioni uguali $q_1 = q_2$, allora le loro componenti sono uguali $a_1 = a_2, b_1 = b_2$ e così via; abbiamo $\varphi(q_1) = [a_1, b_1, c_1, d_1]$ e $\varphi(q_2) = [a_2, b_2, c_2, d_2]$, ed essendo le componenti dei quaternioni uguali, avremo che gli elementi delle quaterne immagine di \mathbb{R}^4 avranno i componenti ordinatamente uguali, cioè $\varphi(q_1) = \varphi(q_2)$. L'inverso è altrettanto vero: $\varphi(q_1) = \varphi(q_2) \implies a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$, e dunque $q_1 = q_2$. Abbiamo dimostrato che φ è ben definita (condizione necessaria affinché sia una funzione) e iniettiva. Supponiamo ora di avere un punto di \mathbb{R}^4 , $[a, b, c, d], a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Esiste allora un $q \in \mathbb{H}$, espandibile in componenti come $q = a + bi + cj + dk$, tale che $\varphi(q) = [a, b, c, d]$, dunque φ è anche suriettiva.

Rimane da mostrare che φ è bicontinua, cioè che φ e φ^{-1} siano entrambe funzioni continue, o alternativamente che φ sia continua e aperta.

Sia $B(q, \epsilon)$ una palla aperta quaternionica (un elemento della base di $(\mathbb{H}, \mathcal{U})$). La sua immagine $\varphi(B)$ è una palla aperta di \mathbb{R}^4 , $P(\varphi(q), \epsilon)$, dunque un elemento della base di $(\mathbb{R}^4, \mathcal{U})$. Analogamente, data una palla aperta di \mathbb{R}^4 , avremo che la sua immagine sotto φ^{-1} (i.e la sua pre-immagine sotto φ) è una palla aperta quaternionica, cioè un elemento della base di \mathbb{H} , e dunque φ è un omeomorfismo. Lasciamo al lettore il semplice compito di verificare che sia anche un isometria, cioè un'applicazione che preserva le distanze tra 2 spazi metrici. \square

4.2 Successioni quaternioniche

Andiamo ora a studiare le successioni quaternioniche, che definiremo in modo del tutto analogo a quelle complesse e reali.

Definizione 4.2. Una **successione quaternionica** è una funzione $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{H}$; per $n \in \mathbb{N}$, chiameremo $\varphi(n) = q_n$, il suo valore calcolato ad n , ed indicheremo successioni semplicemente con la loro immagine, $Im(\varphi) = \{q_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Esempio 4.1. Forniamo qui alcuni esempi di successioni quaternioniche:

- $\{j^n\}_{n=1}^{\infty} = \{j, -1, -j, 1, j, -1, \dots\}$
- $\{\frac{n+1}{2}(i+j)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{i+j, -3, -4i-4j, \dots\}$
- $\{n + ni - nj\}_{n=1}^{\infty} = \{1+i-j, 2+2i-2j, \dots\}$
- $\{\text{Vec}((2+j+k)^n)\}_{n=1}^{\infty} = \{j+k, 4j+4k, 10j+10k, \dots\}$

Notazione: da ora in poi scriveremo una successione quaternionica $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ come semplicemente $\{q_n\}$, per alleggerire la notazione.

Notiamo che possiamo scrivere una successione quaternionica $\{q_n\}$ come $\{q_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}i + \{c_n\}j + \{d_n\}k$, dove $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}, \{d_n\}$ sono successioni reali.

Esempio 4.2. Nell'esempio presentato prima $\{j^n\}$, avremo $\{j^n\} = \{\alpha_n\} + \{\beta_n\}j$, con $\alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \equiv 1 \pmod{2}, \\ 1 & \text{se } n \equiv 0 \pmod{4}, \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$ e $\beta_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \equiv 0 \pmod{2}, \\ -1 & \text{se } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Esercizio 4.1. Scrivi la successione $\{q_n\} = \{(2nk+1)(i+nj-nk)(Sc((n-j)(n+k)))\}$ nella forma $\{q_n\} = \{a_n\} + \{b_n\}i + \{c_n\}j + \{d_n\}k$

Esercizio 4.2. Scrivi i primi 5 termini della successione $\{(nj+nk) \times \text{Vec}((i+j)^n)\}$

4.2.1 Operazioni 1-arie e binarie di successioni quaternioniche

Definiamo le seguenti operazioni 1-arie e binarie per successioni quaternioniche:

- Addizione e sottrazione:

$$\{q_n\} \pm \{r_n\} = \{q_n \pm r_n\}$$

- Moltiplicazione:

$$\{q_n\}\{r_n\} = \{q_n r_n\}$$

- Coniugazione:

$$\{q_n\}^* = \{q_n^*\}$$

- Norma:

$$|\{q_n\}| = \{|q_n|\}$$

Esercizio 4.3. Dimostrare che, sotto queste operazioni, l'insieme delle successioni quaternioniche formi un corpo.

Esercizio 4.4. Sia $\{q_n\} = \{(n^2 j - j + k) \times (n^2 k - i)\}$, $\{r_n\} = \{(ni - nk)((i - nj) \times (k + ni))\}$, calcolare:

- $\{q_n\}^* + \{r_n\} - \{1 + nj\}$
- $\{r_n\}^* + \{q_n\}$
- $|\{q_n\}|$
- $|\{r_n\}|$
- $\{q_n\}\{r_n\}$

4.2.2 Convergenza di successioni quaternioniche

Introduciamo ora per le successioni quaternioniche una nozione di convergenza.

Definizione 4.3. Sia $\{q_n\}$ una successione quaternionica; diremo che tale successione converge al quaternione $q \in \mathbb{H}$, scrivendo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = q$$

se $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ intero tale che $|q_n - q| < \epsilon \ \forall n \geq N$.

La definizione è del tutto analoga alla sua controparte reale e complessa; sono infatti tutti casi particolari della nozione di limite di una successione in uno spazio metrico.

Una volta introdotta la nozione di limite di una successione convergente in \mathbb{H} , procediamo dimostrando alcune proprietà algebriche riguardo i limiti:

Proposizione 4.2. *Ogni successione quaternionica convergente è limitata*

Dimostrazione. Richiediamo che q_n sia convergente, e che converga in q ; avremo allora che $\forall \epsilon > 0, \exists N$ intero tale che $\forall n \geq N |q_n - q| < \epsilon$.

Essendo ϵ un arbitrario numero reale positivo, scegliamo $\epsilon = 1$, esisterà un \bar{N} intero tale che:

$$| |q_n| - |q| | \leq |q_n - q| < 1, \forall n \geq \bar{N}$$

Manipolando la diseguaglianza utilizzando proprietà del valore assoluto, avremo:

$$|q| - 1 < |q_n| < 1 + |q|$$

Abbiamo dimostrato che la norma di ogni membro della successione con n maggiore o uguale a N è minore del numero reale $|q| + 1$. Per gli indici compresi tra 1 ed N , invece:

$$|q_n| \leq \max\{|q_1|, |q_2|, |q_3|, \dots, |q_N|, |q| + 1\}$$

Ergo, q_n è limitata. □

Teorema 4.3. *Siano $\{q_n\}$ e $\{r_n\}$ due successioni quaternioniche con $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = q$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r$. Allora valgono le seguenti proprietà algebriche:*

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n \pm r_n = q \pm r$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n r_n = qr$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^* = r^*$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} |r_n| = |r|$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n^{-1} = r^{-1}$.

Dimostrazione. • Stiamo dando per assunto che q_n ed r_n convergano.

Sia $\epsilon > 0$ un numero reale positivo; siccome q_n ed r_n convergono, possiamo rendere $|q_n - q|$ e $|r_n - r|$ minori di $\frac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq N_1$ e $\forall n \geq N_2$ rispettivamente, scegliendo due interi che chiameremo N_1 ed N_2 .

Sia $\bar{N} = \max\{N_1, N_2\}$, pertanto avremo $\forall n \geq \bar{N}$:

$$|(q_n \pm r_n) - (q \pm r)| = |(q_n - q) \pm (r_n - r)| \leq |q_n - q| + |r_n - r| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

- Essendo r_n e q_n per ipotesi successioni convergenti potremo selezionare 3 numeri naturali N_1, N_2, N_3 tale che:

$$|q_n - q| < \frac{\epsilon}{2(1 + |r|)} \quad \forall n \geq N_1$$

$$|r_n - r| < \frac{\epsilon}{2(1 + |q|)} \quad \forall n \geq N_2$$

$$|r_n - r| < 1 \quad \forall n \geq N_3$$

dove qui $\epsilon > 0$. Per l'ultima delle tre equazioni, avremo che:

$$|r_n| = |r_n - r + r| \leq |r_n - r| + |r| < 1 + |r| \quad \forall n \geq N_3$$

Sia $\bar{N} := \max\{N_1, N_2, N_3\}$, osserviamo che, $\forall n \geq \bar{N}$:

$$|q_n r_n - qr| = |q_n r_n - qr_n + qr_n - qr| \leq |q_n r_n - qr_n| + |qr_n - qr|$$

applicando le proprietà della norma quaternionica, otteniamo:

$$\begin{aligned} |q_n r_n - qr_n| + |qr_n - qr| &= |q_n - q||r_n| + |q||r_n - r| \\ &< (1 + |r|) \frac{\epsilon}{2(1 + |r|)} + (1 + |q|) \frac{\epsilon}{2(1 + |q|)} = \epsilon \end{aligned}$$

- Scriviamo r come $r = a + bi + cj + dk$ e $r_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$. Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$, allora avremo che $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, tale che $\forall n \geq N$:

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} = |r_n - r| < \epsilon$$

Notiamo che $|r_n^* - r^*| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (-b_n + b)^2 + (-c_n + c)^2 + (-d_n + d)^2} = |r_n - r|$, ed è dunque minore di ϵ per ogni n maggiore dell' N selezionato prima grazie alla convergenza data per assunto di r_n .

- $\forall \epsilon > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$, $|r_n - r| < \epsilon$. Ma essendo $\|r_n\| - \|r\| \leq |r_n - r|$, avremo che $\lim_{n \rightarrow \infty} |r_n| = \|r\|$
- Ricordiamo che $\forall q \in \mathbb{H} - \{0\}$, $q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$. Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$. Allora anche r_n^* e $|r_n|$ saranno successioni convergenti, precisamente convergeranno in r^* e $\|r\|$. Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n^*}{|r_n|} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|r_n|} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^* \right) = \frac{r^*}{\|r\|} = r^{-1} \quad (4.1)$$

□

Se una successione quaternionica non converge, allora diremo che è divergente.

Esercizio 4.5. Determinare se le seguenti successioni quaternioniche siano convergenti o meno:

- $q_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n+1}}(j - k) + \frac{i}{n^2}$
- $q_n = n - n^3i - n^6j - n^9k$

Teorema 4.4. Sia $q_n = a_n + b_ni + c_nj + d_nk$ una successione quaternionica e $q = a + bi + cj + dk$ un quaternione. Allora,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q \quad (4.2)$$

se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d$$

Dimostrazione. Cominciamo con l'implicazione diretta (\implies); supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$, allora, $\forall \epsilon > 0$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} < \epsilon$$

Osserviamo che:

$$\begin{cases} |a_n - a| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} < \epsilon \\ |b_n - b| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} < \epsilon \\ |c_n - c| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} < \epsilon \\ |d_n - d| \leq \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} < \epsilon \end{cases}$$

Cioè le successioni a_n, b_n, c_n, d_n sono successioni reali convergenti in a, b, c, d rispettivamente.

Dimostriamo ora l'inversa (\Leftarrow). Sia $\epsilon > 0$; avendo supposto la convergenza delle 4 successioni reali a_n, b_n, c_n, d_n in a, b, c, d , potremo trovare 4 numeri naturali N_1, N_2, N_3, N_4 tale che:

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall n \geq N_1 ; \quad |b_n - b| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall n \geq N_2$$

$$|c_n - c| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall n \geq N_3 ; \quad |d_n - d| < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall n \geq N_4$$

Fissiamo $N = \max\{N_1, N_2, N_3, N_4\}$. $\forall n \geq N$ avremo:

$$\sqrt{(a_n - a)^2} + \sqrt{(b_n - b)^2} + \sqrt{(c_n - c)^2} + \sqrt{(d_n - d)^2} = |a_n - a| + |b_n - b| + |c_n - c| + |d_n - d| < \epsilon$$

Ma

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} \leq \sqrt{(a_n - a)^2} + \sqrt{(b_n - b)^2} + \sqrt{(c_n - c)^2} + \sqrt{(d_n - d)^2}$$

E dunque $\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2 + (c_n - c)^2 + (d_n - d)^2} < \epsilon$, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q.$$

□

Corollario 4.1. *Sia q_n una successione quaternionica, allora essa converge a $q = a + bi + cj + dk$ se e solo se $\text{Sc}(q_n)$ converge a $\text{Sc}(q) = a$ e $\text{Vec}(q_n)$ converge a $\text{Vec}(q) = v = bi + cj + dk$.*

Abbiamo ora uno strumento per determinare più facilmente i limiti di successioni quaternioniche, riconducendolo a un problema in termini di successioni reali.

Esempio 4.3. *Abbiamo la successione $q_n = (1 + \frac{1}{n})^n [(\frac{j}{n} + \frac{k}{n^2}) \times (\frac{i}{n^3} - \frac{k}{n})]$. Riconduciamola anzitutto nella forma più agevole del tipo $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$.*

$$q_n = (1 + \frac{1}{n})^n (\frac{j}{n^5} - \frac{i}{n^2} - \frac{k}{n^4})$$

Da qui possiamo banalmente dedurre che essa converga a 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$.

Forniamo di seguito un esempio leggermente meno banale.

Esempio 4.4. *Abbiamo la successione $q_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} (i + j + \frac{k}{n})(i + \frac{j}{n} + k)$. Svolgendo il prodotto, otteniamo:*

$$q_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \left(-1 - \frac{2}{n} + i \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) + j \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + k \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \right)$$

Ricordando che $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$, avremo che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = -e + ei - ej - ek$$

Esercizio 4.6. *Determinare se le seguenti successioni convergono, e se convergono, determinarne il limite*

1. $q_n = \arctan(n)i - \frac{\arctan(n)^2}{2}k$
2. $q_n = (1 + \frac{1}{n})^n (i - j)(\frac{i}{n} + k)$
3. $q_n = (i + j + k)^n$

4.2.3 Sottosuccessioni di una successione quaternionica

La definizione è del tutto analoga alla controparte reale e complessa.

Definizione 4.4. *Sia $\{q_n\}$ una successione quaternionica. Diremo che $\{q_{m(n)}\}$ è una sottosuccessione di $\{q_n\}$ se $\{m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di numeri naturali strettamente crescente.*

Esercizio 4.7. *Dimostrare che, data una successione quaternionica $\{q_n\}$ convergente a q ($\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$), ogni sottosuccessione di quest'ultima converge a sua volta a q .*

4.3 Successioni di Cauchy quaternioniche

Definizione 4.5 (Successione di Cauchy quaternionica). *Sia q_n una successione quaternionica, diremo che si tratta di una successione di Cauchy se $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$|q_n - q_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

Proposizione 4.3. *Ogni successione quaternionica convergente è una successione di Cauchy*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$; sappiamo che esiste un numero naturale N , tale che $\forall n \geq N, |q_n - q| < \frac{\epsilon}{2}$.

Siano $m, n \in \mathbb{N}, m, n \geq N$. Avremo

$$|q_m - q| < \frac{\epsilon}{2} \quad e \quad |q_n - q| < \frac{\epsilon}{2}$$

Ma per la diseguaglianza del triangolo:

$$|q_m - q_n| = |q_n - q - q_m + q| \leq |q_n - q| + |q_m - q| < \epsilon$$

Quindi q_n è una successione di Cauchy. □

La proposizione appena dimostrata è generalmente valida per gli spazi metrici. Tuttavia, vedremo che lo spazio metrico dei quaternioni è un tipo speciale di spazio metrico, detto spazio metrico completo, in cui è vero anche l'inverso della proposizione, ovvero ogni successione di Cauchy è convergente.

Definizione 4.6 (Spazio metrico completo). *Sia (X, τ, δ) uno spazio metrico. Esso è detto spazio metrico completo se tutte le successioni di Cauchy del suddetto spazio sono convergenti.*

Vogliamo dimostrare che i quaternioni sono uno spazio metrico completo. Per fare ciò però necessitiamo prima di un lemma preparatorio:

Lemma 4.3. *Sia $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ una successione di Cauchy quaternionica, allora a_n, b_n, c_n, d_n sono successioni reali di Cauchy.*

Dimostrazione. Sapendo che q_n è di Cauchy, sappiamo che $\forall \epsilon > 0, \exists N$ naturale tale che $\forall n, m \geq N$:

$$|q_n - q_m|^2 = |a_n - a_m|^2 + |b_n - b_m|^2 + |c_n - c_m|^2 + |d_n - d_m|^2 < \epsilon^2$$

E dunque, $\forall n, m \geq N$:

$$\begin{cases} |a_n - a_m|^2 < \epsilon^2 \\ |b_n - b_m|^2 < \epsilon^2 \\ |c_n - c_m|^2 < \epsilon^2 \\ |d_n - d_m|^2 < \epsilon^2 \end{cases}$$

cioè a_n, b_n, c_n, d_n sono tutte successioni di Cauchy reali. \square

Teorema 4.5 (I quaternioni sono uno spazio metrico completo). *I quaternioni, dotati della loro topologia canonica, sono uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia q_n una successione di Cauchy quaternionica. Come abbiamo visto prima, essa può essere espressa come $q_n = a_n + b_n i + c_n j + d_n k$ dove a_n, b_n, c_n, d_n sono successioni reali. Come ci assicura la proposizione dimostrata poco prima, esse sono tutte successioni di Cauchy reali, dunque esse convergono in quanto \mathbb{R} è uno spazio metrico completo, e abbiamo visto che una successione q_n converge se e solo se tutte le sue "successioni componenti reali" convergono a loro volta. Dunque deduciamo che q_n converge. \square

Cioè per le successioni quaternioniche essere una successione di Cauchy è una condizione sufficiente e necessaria affinché esse siano convergenti.

Corollario 4.2. *Sia (q_n) una successione quaternionica. Allora essa è una successione convergente se e solo se è una successione di Cauchy.*

I quaternioni, dunque, come i reali e i complessi, sono uno spazio metrico completo. Ciò apporta alla nostra struttura parecchie buone proprietà aggiuntive che ci saranno d'aiuto per lo studio dell'analisi su questo spazio. Ad esempio, è valido anche sui quaternioni il teorema di Heine-Borel, in altre parole limitatezza e totale limitatezza coincidono come nozioni. Il nostro obiettivo attuale è difatti dimostrare proprio questo risultato, per poi continuare con la nostra dissertazione introducendo nuovi enti di interesse.

4.4 Il teorema di Heine-Borel per i quaternioni

Volendo potremmo introdurre direttamente la dimostrazione del teorema di Heine-Borel, dando per scontati alcuni risultati tipicamente dimostrati in un corso introattivo di Topologia generale. Tuttavia, per rendere il testo più accessibile e meno dispersivo, riporteremo qui di seguito le dimostrazioni di tutte le proposizioni preparative e le definizioni che utilizzeremo nella dimostrazione del teorema di Heine-Borel.

Definizione 4.7 (Diametro di uno spazio metrico). *Sia (X, τ, δ) uno spazio metrico. Chiameremo diametro di X :*

$$\text{diam}(X) = \sup_{a,b \in X} \delta(a, b)$$

Nota 4.1. La parola *diametro* deriva etimologicamente dal greco, *dia*(traverso) + *metron* (misura), che letteralmente è traducibile con "misura di traverso". La quantità appena definita è esattamente una generalizzazione a spazi astratti (con una visualizzazione geometrica in molti casi non possibile) del concetto di *diametro classico* di una circonferenza o di una sfera, che è esattamente la corda con la lunghezza maggiore; il diametro di una circonferenza o di una sfera, infatti, misura la distanza tra i 2 punti più distanti sulla superficie di quest'ultima rispetto alla metrica euclidea. Inoltre, nella topologia canonica di uno spazio euclideo esso coincide precisamente con la definizione geometrica classica. Inducendo la proprietà del diametro di una circonferenza di essere la misura della distanza tra i due punti più distanti sulla sua superficie, e scegliendo come distanza non la metrica euclidea, ma una metrica generale, siamo riusciti a dare una definizione per insiemi più generali dotati di metriche più generali.

È facilmente verificabile che il diametro della topologia canonica su \mathbb{H} è ∞ .

Definizione 4.8 (Spazio/insieme limitato). *Sia (X, τ, δ) , allora diremo che X è uno spazio metrico limitato se il suo diametro è un numero finito:*

$$\text{diam}(X) < \infty$$

Nota 4.2. Anche questo ha un significato intuitivo alquanto semplice:

Vediamo che l'insieme delle distanze tra due punti di spazi come \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 non ha un supremum, ed è dunque illimitato da sopra. La nostra intuizione geometrica ci suggerisce che spazi come \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 non debbano essere limitati, ma che spazi come la palla $B(0,1) \in \mathbb{R}^3$ si. Definiamo come spazi limitati allora quegli spazi il cui insieme delle distanze tra 2 punti ha un supremum, cioè è limitato.

Definizione 4.9 (Ricoprimento e sottoricoprimento di uno spazio). *Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{A} = \{R_i\}_{i \in I}$ un insieme di sottoinsiemi di X . Diremo che \mathcal{A} è un ricoprimento di un sottoinsieme $Y \subset X$ se:*

$$Y \subset \bigcup_{i \in I} R_i$$

Diremo che tale ricoprimento è aperto se gli insiemi R_i sono tutti aperti $\forall i$ e diremo che esso è riducibile a un sottoricoprimento finito se esiste una sottoclasse di \mathcal{A} , $\mathcal{A}^* = \{R_{i_k}\}_{k=1}^m$, finita, tale che sia ancora un ricoprimento di Y , cioè:

$$Y \subset \bigcup_{k=1}^m R_{i_k}$$

Definizione 4.10 (Spazio compatto). *Sia X uno spazio topologico. Diremo allora che X è **compatto** se possiamo ridurre ogni ricoprimento aperto del suddetto a un sottoricoprimento aperto finito.*

Nota 4.3. La motivazione intuitiva dietro il concetto di spazio compatto potrebbe invece sembrare di primo acchito meno immediata. La parola "compatto" fu introdotta per la prima volta da Fréchet, nel contesto dello studio degli spazi metrici. La definizione che abbiamo dato qui sopra, tuttavia, differisce da quella data da Fréchet (che ora è chiamata compattezza sequenziale), e fu fornita per la prima volta da Alexandrov e Urysohn, due importanti matematici russi, tra i "leader" della scuola di topologia russa (difatti molti risultati o enti matematici studiati in topologia prendono il loro nome). Come l'etimologia dell'aggettivo suggerisce, "essere compatto" vuol dire essere coeso/ristretto, e deriva dal latino "compactus". Il motivo per la scelta di tale parola è dovuto al fatto che il concetto di "spazio compatto" non è altro che una generalizzazione del concetto di spazio finito: infatti gli spazi compatti, oltre a rispettare alcune proprietà comuni anche agli spazi finiti, sono definiti proprio nella seguente ottica: "tappezzare" un insieme potenzialmente infinito di aperti, e ridurre il tappazzamento a un numero finito.

Teorema 4.6 (Teorema di Heine-Borel). *Sia $K \subset \mathbb{H}$, allora K è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Cominciamo dalla direzione diretta (\Rightarrow).

Sia $K \subset \mathbb{H}$ un compatto, sappiamo cioè che ogni ricoprimento aperto di quest'ultimo ammette un sottoricoprimento finito. Scegliamo il seguente ricoprimento specifico di palle aperte $\mathcal{A} = \{B(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$. Essendo K per assunzione un compatto, sappiamo che esiste un sottoricoprimento finito \mathcal{A}^* , ed essendo finito (essendo i naturali totalmente ordinati) esiste una palla con raggio massimo $B(0, m)$, all'interno della quale, secondo un teorema dimostrato prima, sono contenute tutte le altre palle del ricoprimento (perché hanno lo stesso centro).

Quindi $K \subset B(0, m)$, e dunque $\text{diam}(K) \leq m$, che è la definizione di insieme limitato. Inoltre, sappiamo che i compatti sono chiusi negli spazi di Hausdorff, ma come spiegato prima \mathbb{H} è di Hausdorff perché essendo uno spazio metrico eredita gli assiomi di separazione precedenti "a cascata". Dunque K è chiuso e limitato.

Al contrario, supponiamo che K sia chiuso e limitato, cioè chiuso e con un diametro finito. Allora avremo che K è contenuto in una palla chiusa quaternionica $K \subset \bar{B}(0, \rho)$. Ma la palla chiusa $\bar{B}(0, \rho)$ è un compatto, e dunque K è un sottoinsieme chiuso di un compatto, dunque K è compatto. \square

4.5 Limiti di funzioni di una variabile quaternionica

Introduciamo ora le nozioni di continuità ed altre nozioni topologiche sulle funzioni a una variabile quaternionica.

Definizione 4.11 (Limite di una funzione quaternionica). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione a una variabile quaternionica, che indicheremo con $f(q)$. Scriviamo che il limite di $f(q)$ per $q \rightarrow \alpha$ è uguale a λ , in simboli:*

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda$$

se $\forall \epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $0 < |q - \alpha| < \delta \implies |f(q) - \lambda| < \epsilon$.

Sappiamo che il limite di una funzione tra spazi metrici è unico, e dunque questa definizione ha senso. Qui di seguito forniamo una dimostrazione per il caso particolare dello spazio dei quaternioni.

Proposizione 4.4. *Sia $f(q)$ una funzione a una variabile quaternionica. Allora se $\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda$, λ è unico.*

Dimostrazione. Sia $\epsilon > 0$ un numero reale positivo; supponiamo che $f(q)$ abbia due limiti per q che tende ad α : $\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda$ e $\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \tilde{\lambda}$, $\lambda \neq \tilde{\lambda}$.

Allora $\exists \delta > 0$ tale che $|q - \alpha| < \delta \implies |f(q) - \lambda| < \frac{\epsilon}{2}$ e $\exists \tilde{\delta} > 0$ tale che $|q - \alpha| < \tilde{\delta} \implies |f(q) - \tilde{\lambda}| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sia $\Delta := \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$, allora:

$$|q - \alpha| < \Delta \implies |f(q) - \lambda| < \frac{\epsilon}{2} \quad e \quad |q - \alpha| < \Delta \implies |f(q) - \tilde{\lambda}| < \frac{\epsilon}{2}$$

Quindi:

$$|q - \alpha| < \Delta \implies |\lambda - f(q)| + |f(q) - \tilde{\lambda}| < \epsilon$$

Ma per la diseguaglianza del triangolo avremo $|\lambda - \tilde{\lambda}| \leq |\lambda - f(q)| + |f(q) - \tilde{\lambda}| < \epsilon$, ma essendo ϵ arbitrario, stiamo dicendo che $|\lambda - \tilde{\lambda}| = 0$.

Ma sappiamo che $|\lambda - \tilde{\lambda}| = 0$ se e solo se $\lambda = \tilde{\lambda}$ per gli assiomi che una metrica deve rispettare, e dunque siamo giunti al risultato che volevamo dimostrare, cioè il limite è unico. \square

Teorema 4.7 (Proprietà algebriche dei limiti). *Siano $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ e $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ due funzioni a una variabile quaternionica e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{H}$ due quaternioni, allora se:*

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda_1 \quad e \quad \lim_{q \rightarrow \alpha} g(q) = \lambda_2$$

avremo che:

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) \pm g(q) = \lambda_1 \pm \lambda_2$$

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q)g(q) = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q)^* = \lambda_1^*$$

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} |f(q)| = |\lambda_1|$$

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q)^{-1} = \lambda_1^{-1} \quad se \quad \lambda_1 \neq 0$$

Dimostrazione. La dimostrazione è molto simile a quella data per le medesime proprietà valide per le successioni quaternioniche.

- Cominciando dalla prima, essendo per assunto il limite per q che tende ad α di f e g pari a λ_1 e λ_2 , rispettivamente, sappiamo che dato un numero reale $\epsilon > 0$, esiste un $\delta_1 > 0$ e un $\delta_2 > 0$ tale che:

$$0 < |q - \alpha| < \delta_1 \implies |f(q) - \lambda_1| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$0 < |q - \alpha| < \delta_2 \implies |g(q) - \lambda_2| < \frac{\epsilon}{2}$$

Sia $\Delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, e utilizzando la disegualanza del triangolo:

$$0 < |q - \alpha| < \Delta \implies |f(q) + g(q) - (\lambda_1 + \lambda_2)| \leq |f(q) - \lambda_1| + |g(q) - \lambda_2| < \epsilon$$

La dimostrazione per il - è del tutto analoga.

- Sia $\epsilon > 0$ un numero reale positivo; siccome $\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda_1$ e $\lim_{q \rightarrow \alpha} g(q) = \lambda_2$, sappiamo che esistono 3 numeri reali positivi, δ_1, δ_2 e δ_3 tale che:

$$0 < |q - \alpha| < \delta_1 \implies |f(q) - \lambda_1| < \frac{\epsilon}{2(1 + |\lambda_2|)}$$

$$0 < |q - \alpha| < \delta_2 \implies |g(q) - \lambda_2| < \frac{\epsilon}{2(1 + |\lambda_1|)}$$

$$0 < |q - \alpha| < \delta_3 \implies |g(q) - \lambda_2| < 1$$

Utilizzando la disegualanza del triangolo, vediamo che:

$$|g(q)| \leq |g(q) - \lambda_2| + |\lambda_2| < 1 + |\lambda_2|$$

Adesso, osservando che:

$$|f(q)g(q) - \lambda_1\lambda_2| = |f(q)g(q) - \lambda_1g(q) + \lambda_1g(q) - \lambda_1\lambda_2|$$

per la disegualanza del triangolo

$$\begin{aligned} &\leq |f(q)g(q) - \lambda_1g(q)| + |\lambda_1g(q) - \lambda_1\lambda_2| = |g(q)||f(q) - \lambda_1| + |\lambda_1||g(q) - \lambda_2| \\ &< (1 + |\lambda_2|) \frac{\epsilon}{2(1 + |\lambda_2|)} + (1 + |\lambda_1|) \frac{\epsilon}{2(1 + |\lambda_1|)} = \epsilon \end{aligned}$$

e dunque $\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q)g(q) = \lambda_1\lambda_2$.

- Sia $f(q) = x + yi + zj + wk$, allora $f(q)^* = x - yi - zj - wk$, analogamente sia $\lambda_1 = a + bi + cj + dk$ allora $\lambda_1^* = a - bi - cj - dk$. Osservando che:

$$|f(q)^* - \lambda_1^*| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + (w - d)^2} =$$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 + (w - d)^2} = |f(q) - \lambda_1|$$

Essendo $\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda_1$, avremo che $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che:

$$0 < |q - \alpha| < \delta \implies |f(q) - \lambda_1| = |f(q)^* - \lambda_1^*| < \epsilon$$

Come volevasi dimostrare.

- $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che:

$$0 < |q - \alpha| < \delta \implies |f(q) - \lambda_1| < \epsilon$$

ma $\|f(q) - \lambda_1\| \leq |f(q) - \lambda_1|$, e dunque segue che $\lim_{q \rightarrow \alpha} |f(q)| = |\lambda_1|$.

- Segue come corollario delle 3 parti del teorema appena dimostrato; basta ricordare che $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2} \forall q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, e a questo punto possiamo applicare le proprietà 2,3 e 4 dimostrate prima.

□

Teorema 4.8 (Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza di un limite). *Sia $f(q) = t(q) + x(q)i + y(q)j + z(q)k$ una funzione a una variabile quaternionica e $\lambda = a + bi + cj + dk$ un quaternione, allora:*

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda \iff \begin{cases} \lim_{q \rightarrow \alpha} t(q) = a \\ \lim_{q \rightarrow \alpha} x(q) = b \\ \lim_{q \rightarrow \alpha} y(q) = c \\ \lim_{q \rightarrow \alpha} z(q) = d \end{cases}$$

Dimostrazione. Partendo dalla direzione diretta (\implies):

Sia $\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda$, allora $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, tale che $0 < |q - \alpha| < \delta \implies |f(q) - \lambda| < \epsilon$, cioè:

$$\sqrt{(t - a)^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2 + (z - d)^2} < \epsilon$$

banalmente

$$\begin{cases} |t - a| \leq \sqrt{(t - a)^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2 + (z - d)^2} < \epsilon \\ |x - b| \leq \sqrt{(t - a)^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2 + (z - d)^2} < \epsilon \\ |y - c| \leq \sqrt{(t - a)^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2 + (z - d)^2} < \epsilon \\ |z - d| \leq \sqrt{(t - a)^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2 + (z - d)^2} < \epsilon \end{cases}$$

Dimostriamo ora l'implicazione inversa (\iff):

Sia $\epsilon > 0$ un numero reale positivo, allora possiamo trovare quattro numeri reali positivi $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ tale che:

$$|q - \alpha| < \delta_1 \implies |t - a| < \frac{\epsilon}{4} ; \quad |q - \alpha| < \delta_2 \implies |x - b| < \frac{\epsilon}{4}$$

$$|q - \alpha| < \delta_3 \implies |y - c| < \frac{\epsilon}{4} ; \quad |q - \alpha| < \delta_4 \implies |z - d| < \frac{\epsilon}{4}$$

Sia $\Delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$, allora:

$$|q - \alpha| < \Delta \implies |t - a| + |x - b| + |y - c| + |z - d| < \epsilon$$

Ma $\sqrt{(t-a)^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2 + (z-d)^2} \leq |t-a| + |x-b| + |y-c| + |z-d| < \epsilon$, e dunque $\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda$. \square

Corollario 4.3. Sia $f(q) = t(q)i + x(q)j + y(q)k$ una funzione a una variabile quaternionica e $\lambda = a + bi + cj + dk$ un quaternione, allora:

$$\lim_{q \rightarrow \alpha} f(q) = \lambda \iff \begin{cases} \lim_{q \rightarrow \alpha} \text{Sc}(f(q)) = \text{Sc}(\lambda) = a \\ \lim_{q \rightarrow \alpha} \text{Vec}(f(q)) = \text{Vec}(\lambda) = bi + cj + dk \end{cases}$$

Affrontiamo ora degli esempi operativi di calcoli di limiti di funzioni a una variabile quaternionica per aumentare la nostra familiarità con le definizioni e i teoremi appena dati.

Esempio 4.5. Si consideri la funzione $f(q) = q^2$, vogliamo calcolare il limite di quest'ultima per $q \rightarrow k$. Scriviamo q come $q = t + xi + yj + zk$, e sostituendolo nella nostra espressione otteniamo:

$$f(q) = (t + xi + yj + zk)^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2txi + 2tyj + 2tzk$$

Abbiamo "scomposto" la funzione nelle sue varie componenti, quella reale e quelle immaginarie (i, j, k); le chiameremo $f_1(t, x, y, z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$, $f_2(t, x, y, z) = 2tx$, $f_3(t, x, y, z) = 2ty$, $f_4(t, x, y, z) = 2tz$. Queste funzioni "componenti" sono funzioni $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3, 4$, e sappiamo bene come calcolare i loro limiti:

$$\begin{cases} \lim_{q \rightarrow k} t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = -1 \\ \lim_{q \rightarrow k} 2tx = 0 \\ \lim_{q \rightarrow k} 2ty = 0 \\ \lim_{q \rightarrow k} 2tz = 0 \end{cases}$$

Quindi: $\lim_{q \rightarrow k} q^2 = -1$.

Notiamo che esso coincide con il valore di f a k , $f(k) = \lim_{q \rightarrow k} f(q)$, e chiameremo questa proprietà per le funzioni di una variabile quaternionica (proprio come nel caso reale e complesso) continuità.

Esempio 4.6. Alla luce del risultato appena dimostrato, troviamo il limite per q che tende a $1 + i - j$ della funzione $f(q) = 2kqiq$. Scriviamo q come $q = t + xi + yj + zk$, allora $f(q)$ diventa:

$$f(q) = 4xz + 4xyi + (2t^2 - 2x^2 + 2y^2)j - 4txk$$

Consideriamo separatamente i limiti delle componenti della funzione: $f_1(t, x, y, z) = 4xz$, $f_2(t, x, y, z) = 4xy$, $f_3(t, x, y, z) = 2t^2 - 2x^2 + 2y^2$, $f_4(t, x, y, z) = -4tx$.

Notando tuttavia che si tratta di funzioni continue da \mathbb{R}^4 in \mathbb{R} , avremo:

$$\begin{cases} \lim_{q \rightarrow (1+i-j)} 4xz = 0 \\ \lim_{q \rightarrow (1+i-j)} 4xy = -4 \\ \lim_{q \rightarrow (1+i-j)} 2t^2 - 2x^2 + 2y^2 = 2 \\ \lim_{q \rightarrow (1+i-j)} -4tx = -4 \end{cases}$$

Dunque:

$$\lim_{q \rightarrow (1+i-j)} f(q) = -4i + 2j - 4k$$

4.6 Funzioni continue

Definizione 4.12 (Funzione continua). Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione di una variabile quaternionica, diremo che essa è continua in un punto $p \in \mathbb{H}$ se:

$$f(p) = \lim_{q \rightarrow p} f(q)$$

diremo invece che è continua in un insieme $U \subset \mathbb{H}$ se è continua per ogni punto di U , cioè se $\forall p \in U$:

$$f(p) = \lim_{q \rightarrow p} f(q)$$

se una funzione è continua in tutto \mathbb{H} , allora diremo semplicemente che è continua.

Il significato intuitivo dietro la definizione è sempre lo stesso: essa è una generalizzazione della continuità di funzioni reali, che è intuitivamente la proprietà del grafico di una funzione di "non avere buchi", e al contempo una particolarizzazione della definizione topologica di continuità, in cui si vedono le funzioni continue come morfismi di spazi topologici, cioè come

applicazioni tra i precedentemente citati che ne preservano alcune caratteristiche strutturali.

Secondo la seconda, le funzioni continue sono funzioni tra 2 spazi topologici tale che la pre-immagine di ogni insieme aperto del secondo è aperto nel primo, come visto nella sezione dedicata alla topologia dell'introduzione.

Proposizione 4.5. *Sia $f(q) = f_1(t, x, y, z) + f_2(t, x, y, z)i + f_3(t, x, y, z)j + f_4(t, x, y, z)k$ una funzione a una variabile quaternionica, allora $f(q)$ è continua in $\alpha \in \mathbb{H}$, $\alpha := a + bi + cj + dk$ se e solo se le sue funzioni componenti $f_i(t, x, y, z)$, $i = 1, 2, 3, 4$ sono continue in $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}^4$.*

Dimostrazione. Segue come corollario immediato della definizione di continuità e del teorema 4.8 precedentemente dimostrato. \square

Proposizione 4.6. *Siano $f(q)$ e $g(q)$ due funzioni continue a una variabile quaternionica, allora anche $f(q) \pm g(q)$, $f(q)g(q)$ e $g(q)f(q)$ sono continue. La funzione $f(q)^{-1}$ è invece continua per ogni punto $r \in \mathbb{H}$ tale che $f(r) \neq 0$.*

Dimostrazione. Banale, segue dalle proprietà dei limiti e dalla definizione di continuità. \square

Proposizione 4.7. *Siano $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ e $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ due funzioni continue quaternioniche, allora $g \circ f = g(f(q))$ è continua.*

Dimostrazione. Questa dimostrazione è un fatto valido più generalmente per 2 funzioni continue tra spazi topologici, ed è dimostrabile a partire dalla seguente semplice osservazione:

Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ funzioni continue tra spazi topologici: per la definizione di continuità, avremo che se A è un aperto in Z , allora $g^{-1}[A]$ è un aperto in Y , ed essendo a sua volta f continua, avremo che $(g \circ f)^{-1} = f^{-1}[g^{-1}[A]]$ è aperto in X , quindi $g \circ f : X \rightarrow Z$ è continua. \square

Proposizione 4.8. *Le funzioni quaternioniche costanti, del tipo $f(q) = \gamma$, $\gamma \in \mathbb{H}$ sono continue.*

Dimostrazione. Anche questo è un fatto valido più generalmente per funzioni costanti tra spazi topologici. Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra spazi topologici, definita come $f(x) = k \in Y$, $\forall x \in X$, cioè una funzione costante. Sia $A \subset Y$ un aperto di Y , allora la sua preimmagine sotto f sarà:

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} \emptyset & \text{se } k \notin A \\ X & \text{se } k \in A \end{cases}$$

in ambedue i casi si tratta di aperti in X , e dunque f è continua. \square

Abbiamo introdotto una nozione operativa di continuità sullo spazio dei quaternioni; orbene apprestiamoci a collaudarla per mezzo di una serie di esempi esplicativi.

Esempio 4.7. Abbiamo la funzione identità $f(q) = q$; scrivendo $q = t + xi + yj + zk$, possiamo scriverla come $f(q) = t + xi + yj + zk = f_1(x, y, z, t) + f_2(x, y, z, t)i + f_3(x, y, z, t)j + f_4(x, y, z, t)k$, con $f_1(x, y, z, t) = t$, $f_2(x, y, z, t) = x$, $f_3(x, y, z, t) = y$, $f_4(x, y, z, t) = z$. Essendo le funzioni componenti continue, concludiamo che anche $f(q) = q$ è continua.

Esempio 4.8. Anche la funzione analizzata nella scorsa sezione, $f(q) = 2kqiq$ è continua, in quanto come accennato nell'esempio in cui l'abbiamo menzionata, le sue funzioni componenti sono continue.

Esempio 4.9. Vediamo ora la funzione $f(q) = q^2$. Possiamo riscriverla, esplicitando le funzioni componenti, come:

$$f(q) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2txi + 2tyj + 2tzk$$

anche qui, le funzioni componenti sono tutte funzioni continue $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, e dunque $f(q) = q^2$ è continua.

Proposizione 4.9. La funzione a una variabile quaternionica $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definita come $f(q) = q^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è continua.

Dimostrazione. Dimostriamo questo fatto per induzione: abbiamo già coperto i casi $n = 1$ e $n = 2$ negli esempi, dunque abbiamo già dimostrato il caso base.

Per lo step induttivo supponiamo che per $n = k$ l'asserto sia soddisfatto, ossia $f(q) = q^k$ sia continua, dimostriamo ora che è vero anche per $n = k + 1$: $f(q) = q^{k+1} = q^k q$, ma q è continua (esempio 4.7) e anche q^k lo è per lo step induttivo, ma noi sappiamo che il prodotto di due funzioni continue è continuo, e dunque $f(q) = q^{k+1}$ è continua. \square

Corollario 4.4. Le funzioni associate a polinomi destri e sinistri quaternionici, cioè funzioni del tipo $f(q) = \sum_{m=0}^n \alpha_m q^m$ e del tipo $f(q) = \sum_{m=0}^n q^m \alpha_m$ sono continue.

Dimostrazione. Segue come corollario immediato della proposizione precedente e del fatto che le somme di funzioni continue siano continue. \square

Corollario 4.5. I polinomi generali lineari quaternionici, cioè funzioni del tipo $\Phi(q) = a_0 qa_1 q \dots qa_n q + \phi(q)$ dove $\phi(q)$ è una somma finita di monomi simili $a_0 qa_1 q \dots qa_k$ con $k < n$ sono funzioni continue.

Dimostrazione. Segue come corollario della legge del prodotto e della somma dei limiti di funzioni quaternioniche e del fatto che $f(q) = q$ è una funzione continua. Notiamo infatti che si tratta della somma di prodotti di funzioni costanti con la funzione identità $f(q) = q$. Ma i prodotti di funzioni continue sono continue, e la somma di funzioni continue è una funzione continua, e dunque i polinomi lineari generali quaternionici sono continui. \square

Corollario 4.6. *I polinomi generali quaternionici (la cui forma generale è difficile da esprimere) sono funzioni continue.*

Dimostrazione. La dimostrazione è anche qui un corollario immediato dei risultati presentati precedentemente per un ragionamento molto simile; si tratta di somme di prodotti di funzioni continue, e dunque di funzioni continue. \square

Proposizione 4.10. *La funzione $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definita come $f(q) := q^*$, cioè che associa a ogni quaternione il suo coniugato, è una funzione continua.*

Dimostrazione. La funzione identità $f(q) = q$ è continua, quindi $\lim_{q \rightarrow \alpha} q = \alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{H}$, e per una proprietà dei limiti dimostrata nel teorema 4.7, possiamo dire che $\lim_{q \rightarrow \alpha} q^* = \alpha^* \forall \alpha \in \mathbb{H}$, dunque $f(q) = q^*$ è continua. \square

Esercizio 4.8. *Dimostrare che la funzione norma $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(q) = |q|$ di un quaternione è una funzione continua.*

Esercizio 4.9. *Dimostrare che le funzioni $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{P}$ definite come $f(q) := \text{Sc}(q)$ e $g(q) := \text{Vec}(q)$ sono funzioni continue.*

Esercizio 4.10. *Dimostrare che se $f(q)$ e $g(q)$ sono due funzioni continue di una variabile quaternionica, allora il loro prodotto scalare $\sigma(q) = \langle f(q)|g(q) \rangle$ è una funzione continua.*

Non avendo ancora introdotto l'analogo quaternionico di alcune importanti funzioni elementari come l'esponenziale, le funzioni trigonometriche o le funzioni iperboliche l'argomento della nostra dissertazione è per ora alquanto ridotto. Tratteremo i valori per i quali queste funzioni sono continue a tempo debito quando le definiremo.

Esercizio 4.11. *Determinare i sottoinsiemi di \mathbb{H} all'interno dei quali le seguenti funzioni sono continue:*

- $f(q) = (q^3 + 1)^{-1}$

- $g(q) = q^{-1}|q|^2(q - 3)^{-3}$
- $h(q) = \text{Vec}(q) \times (j - \text{Sc}(q)^2k)$
- $\phi(q) = (q^8 + 1)^{-1}$
- $\text{sgn}(q) = \frac{q}{|q|}$

4.7 Compattificazione di Alexandroff di \mathbb{H}

Nell'analisi reale e nell'analisi complessa lavoriamo spesso con compattificazioni degli spazi di \mathbb{R} e \mathbb{C} , come ad esempio compattificazione di Alexandroff dei numeri complessi, meglio nota come sfera di Riemann, oppure una compattificazione dei reali nota come linea reale estesa, ottenuta aggiungendo a \mathbb{R} due nuovi punti $+\infty$ e $-\infty$.

Cominciamo ricordando la compattificazione dei complessi, e la proiezione stereografica di una sfera su un piano (l'inverso dell'omeomorfismo che mappa il piano complesso nella sfera S^2 senza il polo nord).

4.7.1 Proiezione stereografica e sfera di Riemann

Come si può "appiattire" una sfera? La domanda appena posta è stata un'area di grande interesse per un lungo periodo di tempo di cartografi ma anche di matematici, ed è in parte anche uno dei motivi per il quale fu sviluppata la geometria differenziale come la conosciamo ora.

Nonostante numerosi precursori, storicamente è dovuto a Gauss lo sviluppo della geometria differenziale come area di studio come la conosciamo ora.

Cosa motivò Gauss? Esattamente la faccenda di cui abbiamo parlato prima; infatti Gauss, nei primi anni del 1800, si interessò molto a problemi di topografia e cartografia: compì un agrimensura per il regno di Hannover nel 1818, ed inoltre ricevette numerosi incarichi anche dal regno di Danimarca per questioni di tipo cartografico/topografico.

In particolar modo, l'agrimensura di Hannover acuì il suo interesse nei confronti dello studio di superfici e del loro "appiattimento", portandolo a concentrarsi negli anni successivi su quest'area di studi, conclusasi con un importante conclusione dal punto di vista "pratico": è impossibile rappresentare la superficie terrestre su una superficie piana (come una carta) senza distorsione (questo fatto è un corollario del cosiddetto "Theorema Egregium").

Che cos'è la proiezione stereografica di una sfera? (ci concentreremo sul caso $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ per ora) È semplicemente un modo di appiattire una sfera, non il prediletto dai cartografi tuttavia, che preferiscono invece la proiezione di Mercatore (che è comunque molto interessante dal punto di vista matematico, specialmente per la sua relazione con la funzione Gudermaniana).

La domanda che sorge spontanea è, tuttavia, come realizzare tale appiattimento? Il nostro obiettivo è di identificare ogni punto del piano con un unico punto sulla sfera; la strategia che utilizzeremo è la seguente: selezioniamo un punto sulla nostra sfera $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, $N = (0, 0, 1) \in S^2$, sia $p \in \mathbb{R}^2$ un punto del piano, sia \overline{Np} la retta che congiunge p ed N ; allora identifichiamo ogni punto del piano $p \in \mathbb{R}^2$ con l'intersezione della retta \overline{Np} con la sfera S^2 : tale intersezione è unica. Visualizziamolo graficamente:

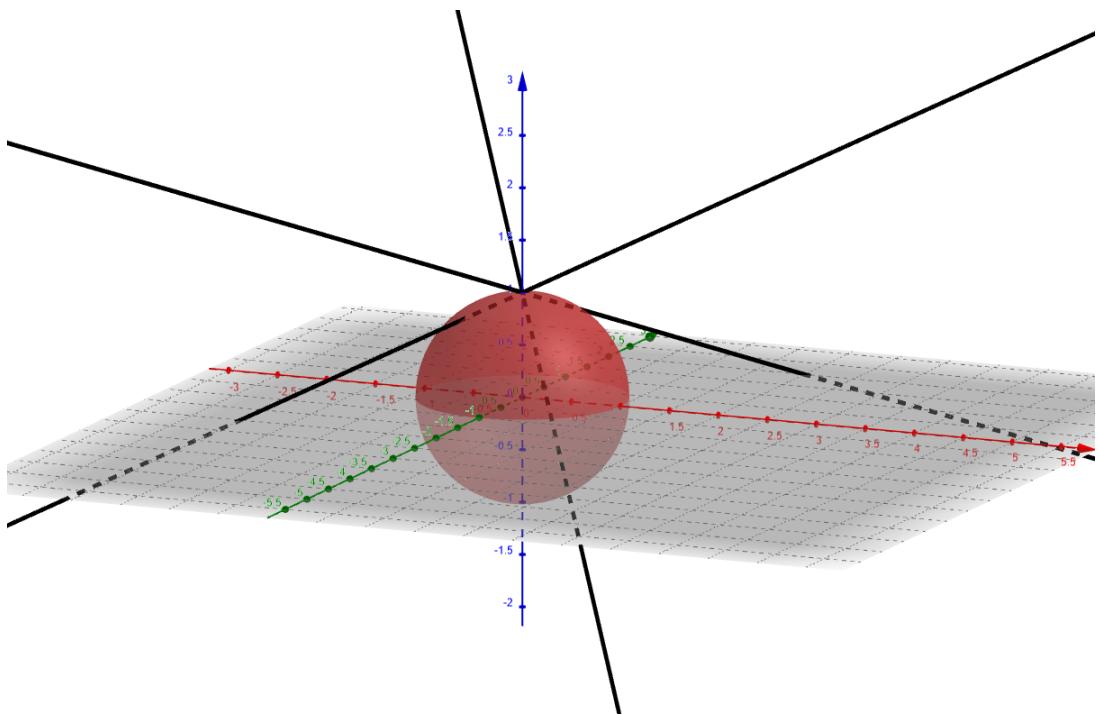


Figura 4.3: Visualizzazione dell'intersezione tra la retta \overline{Np} con la sfera S^2 .

La sfera, intersecata con il piano, forma una circonferenza. I punti di questa circonferenza, sotto la proiezione stereografica, rimangono invariati;

inoltre, i punti esterni alla circonferenza verranno mappati sull'emisfero nord, mentre quelli interni sull'emisfero sud, come possiamo vedere anche dall'immagine di sopra.

Ricaviamo ora un'espressione analitica per tale applicazione:

Sia $P = (x, y)$ un punto del piano, $P^* = (x_1, x_2, x_3)$ la sua immagine sulla sfera ed N il polo nord (o punto all'infinito) appena definito, l'equazione della retta tra i due sarà data, nella sua forma vettoriale, da:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x \\ y \\ -1 \end{bmatrix}$$

esprimibile con equazioni parametriche come:

$$\begin{cases} x_1 = tx \\ x_2 = ty \\ x_3 = 1 - t \end{cases} \quad (4.3)$$

Noi sappiamo tuttavia che $r(t)$, oltre ad appartenere alla retta, appartiene anche alla sfera S^2 , e dunque:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1 = t^2 x^2 + t^2 y^2 + (1 - t)^2 = t^2(x^2 + y^2 + 1) + 1 - 2t$$

questa equazione ha due radici, $t = 0$ e $t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$. Scartando la prima, in quanto vogliamo mappare un punto del piano in un punto della sfera $S^2 \setminus \{N\}$, prendiamo la seconda, e sostituendola nel sistema di equazioni ricavato prima, otteniamo:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \\ x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \\ x_3 = 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \end{cases}$$

Dunque dato $P = (x, y)$, avremo che $P^* = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \in S^2$.

Per l'inversa di questa applicazione, ricavando x ed y dall'equazione (4.3), avremo che dato un punto $P = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$, la sua proiezione stereografica sul piano sarà uguale a $P^* = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right)$.

Abbiamo dunque ora un modo per mappare ogni punto di un piano in un punto di una sfera meno il "punto all'infinito". Prima di proseguire, ricordiamo alcune definizioni topologiche:

Definizione 4.13 (Compattificazione). *Siano (X, τ) e $(Y, \tilde{\tau})$ due spazi topologici, allora se X è omeomorfo a un sottoinsieme di Y e Y è uno spazio compatto, diremo che Y è una compattificazione di X .*

Definizione 4.14 (Compattificazione di Alexandroff). *Sia (X, τ) uno spazio topologico, definiamo lo spazio topologico $(X_{\mathcal{A}}, \tau_{\mathcal{A}})$ nel seguente modo:*

1. *Definiamo l'insieme $X_{\mathcal{A}}$ come X più un nuovo punto che chiameremo punto all'infinito; $X_{\mathcal{A}} = X \cup \{\infty\}$.*
2. *La topologia $\tau_{\mathcal{A}}$ sotto la quale tale insieme formerà una compattificazione, invece, sarà data da tutti gli aperti di X più tutti i complementi in $X_{\mathcal{A}}$ degli insiemi chiusi e compatti di X .*

Si dimostra nei corsi introduttori di Topologia Generale che tale spazio topologico è una compattificazione di X , e dunque chiamiamo questo spazio topologico compattificazione di Alexandroff, o compattificazione ad un punto.

La sfera S^2 è una compattificazione del piano \mathbb{R}^2 ; possiamo dimostrare ciò dimostrando che la proiezione stereografica inversa $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$ è un omeomorfismo. Cominciamo osservando che la funzione proiezione stereografica inversa definita come:

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right) \subset \mathbb{R}^3$$

è anzitutto iniettiva se consideriamo $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : z = -1\}$ come suo codominio, in quanto ha un inverso $\forall x_3 \neq -1$:

$$\varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) \in \mathbb{R}^2$$

La nostra funzione φ è inoltre bicontinua, in quanto sia φ che φ^{-1} sono funzioni continue rispetto ai corrispettivi insiemi di partenza e di arrivo (in quanto le componenti di entrambi sono funzioni continue). Infine, componendo φ con l'inclusione $\iota : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : z = -1\} \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$, ed osservando che $\varphi(x, y) \in S^2 \setminus \{N\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$ (i.e. φ è suriettiva) deduciamo che φ è un omeomorfismo tra \mathbb{R}^2 e $S^2 \setminus \{N\}$. Possiamo formalizzare il risultato appena ottenuto tramite la seguente proposizione:

Proposizione 4.11. *S^2 sotto la topologia sottospazio ereditata da \mathbb{R}^3 è una compattificazione di \mathbb{R}^2 .*

Avremmo potuto alternativamente dimostrare la bi-continuità di φ in una maniera più geometrica: bastava osservare che cerchi in \mathbb{R}^2 vengono mappati in cerchi di S^2 non contenenti il punto all'infinito, mentre linee di \mathbb{R}^2 vengono mappate in cerchi di S^2 contenenti il punto all'infinito. Inversamente, ogni cerchio su S^2 è l'immagine sotto la proiezione stereografica inversa di una linea o di un cerchio in \mathbb{R}^2 . Escludendo il punto all'infinito, avremo che cerchi su S^2 vengono mappati in cerchi su \mathbb{R}^2 e viceversa: analogamente, palle aperte di S^2 vengono mappate in palle aperte di \mathbb{R}^2 e viceversa; da ciò segue la bi-continuità di $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{N\}$. Come il piano \mathbb{R}^2 , anche \mathbb{C} , essendo omeomorfo allo spazio 2-euclideo, può essere compattificato nel medesimo modo: chiamiamo la compattificazione dei numeri complessi **Sfera di Riemann**.

Proposizione 4.12. *La sfera di Riemann (la compattificazione di \mathbb{C} appena mostrata) è omeomorfa alla compattificazione di Alexandrov di \mathbb{C} .*

Per questo motivo, chiamiamo spesso il polo nord della sfera di Riemann punto all'infinito, indicato con ∞ .

4.7.2 Compattificazione di Alexandroff dei Quaternioni

Desideriamo ora realizzare una compattificazione dei quaternioni simile a quella del piano complesso, aggiungendo un "punto all'infinito".

Fare ciò non è difficile, come vedremo, in quanto è possibile estendere la procedura fatta prima con \mathbb{R}^2 per spazi euclidei più generali \mathbb{R}^n nel seguente modo:

Definizione 4.15. *Sia $N \in S^n$ un punto della circonferenza $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ che chiamiamo "punto all'infinito" e sia $E \subset \mathbb{R}^n$ l'iperpiano individuato ponendo la $(n+1)$ -esima coordinata di \mathbb{R}^{n+1} pari a 0. La proiezione stereografica di $P \in S^n \setminus \{N\}$ è il punto \tilde{P} d'intersezione tra la linea \overline{QP} e l'iperpiano E .*

Le coordinate di $\tilde{P} = (X_i)_{i=1}^n$, proiezione stereografica di $P = (x_i)_{i=0}^n$ sono date da:

$$X_i = \frac{x_i}{1 - x_0} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.4)$$

Chiamiamo la funzione $\varphi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ proiezione stereografica, definita come:

$$\varphi(P) = \tilde{P} = \left(\frac{x_i}{1 - x_0} \right)_{i=1}^n = \left(\frac{x_1}{1 - x_0}, \frac{x_2}{1 - x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_0} \right) \quad (4.5)$$

L'idea dietro è la stessa: vogliamo identificare ogni punto del piano \mathbb{R}^n con un punto sull'ipersfera S^n .

L'espressione per la proiezione stereografica inversa φ^{-1} è data da:

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - 1}{\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1} \quad x_j = \frac{2X_j}{\sum_{i=1}^n X_i^2 + 1} \quad (4.6)$$

per $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

$$\varphi^{-1}(\tilde{P}) = (x_j)_{j=0}^n \in S^n \setminus \{N\}$$

L'esistenza di un'inversa ci conferma che la funzione è bigettiva: rimane da mostrare la bicontinuità, la cui dimostrazione decorre tuttavia in una maniera molto simile a quella di prima.

Corollario 4.7. *L'ipersfera S^n è una compattificazione di \mathbb{R}^n .*

Proposizione 4.13. *L'ipersfera S^n è omeomorfa alla compattificazione di Alexandroff di \mathbb{R}^n , $(\mathbb{R}_{\mathcal{A}}^n, \tau_{\mathcal{A}})$.*

Anche questo risultato, come quello visto prima per il caso complesso, segue dall'unicità rispetto ad omeomorfismi di una compattificazione ad un punto di uno spazio di Hausdorff (quale \mathbb{R}^n).

Da ciò segue che possiamo realizzare una compattificazione ad un punto dei quaternioni \mathbb{H} in modo del tutto analogo a quella realizzata per i numeri complessi, ossia "richiudendoli" in una sfera S^4 e aggiungendo un punto all'infinito. Quanto appena detto era esattamente ciò che volevamo; ricercavamo infatti un "punto all'infinito" al netto del segno, vista la mancanza di un ordine totale sui Quaternioni (e in generale per tutte le \mathbb{R} -Algebre della "catena di Cayley-Dickson" dai numeri complessi in poi). Tale punto ci permette di esprimere alcuni concetti di interesse per la teoria di funzioni, quale ad esempio quello di palla di centro ∞ :

$$B(\infty, r) = \left\{ q \in \mathbb{H} : \frac{1}{|q|} < r \right\}$$

dove qui $r > 0$. Ancora, avendo ora ben definito un punto all'infinito per i quaternioni, potremo analizzare l'andamento "all'infinito" di funzioni quaternioniche con l'introduzione delle seguenti definizioni:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(q) = \infty \iff \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{f(q)} = 0$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(q) = \lambda \iff \lim_{q \rightarrow 0} f(q^{-1}) = \lambda$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} f(q) = \infty \iff \lim_{q \rightarrow 0} \frac{1}{f(q^{-1})} = 0$$

Chiamiamo $\mathbb{H}_\infty = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ lo spazio dei "quaternioni estesi", e chiameremo la compattificazione di Alexandroff dei quaternioni ipersfera di Riemann.

4.8 Teorema di Eilenberg-Niven

In questa sezione tratteremo dell'estensione del teorema fondamentale dell'algebra ai quaternioni generali lineari (che avevamo accennato già nel capitolo 2), meglio noto come teorema di Eilenberg-Niven. Enunciamolo qui di seguito:

Teorema 4.9 (Teorema di Eilenberg-Niven, 1944). *Sia f un polinomio generale lineare quaternionico di grado n , esprimibile come:*

$$f(q) = a_0 q a_1 q \dots q a_n + \phi(q)$$

dove qui $a_i \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ e $\phi(q)$ è una somma di monomi $b_0 q b_1 q \dots q b_k$, dove $k < n$. Allora, l'equazione $f(q) = 0$ ha almeno una soluzione in \mathbb{H} .

Per dimostrare questo teorema avremo bisogno del concetto di **grado di Brouwer di una funzione continua tra sfere**. Definiamolo qui di seguito.

Definizione 4.16 (Grado di Brouwer di una funzione continua). *Sia data una funzione continua $f : S^n \rightarrow S^n$; tale funzione induce un omomorfismo di gruppi $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ dall' n -esimo gruppo di omologia di S^n , $H_n(S^n)$ in $H_n(S^n)$. È noto che $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, e pertanto l'omomorfismo indotto diventa una funzione da \mathbb{Z} in \mathbb{Z} . Chiamiamo il **grado di Brouwer di f** il valore:*

$$\deg(f) = f_*(1) \tag{4.7}$$

All'interno di questo capitolo chiameremo, in numero istanze, il grado di Brouwer semplicemente "grado". Sarà intuitivo dal contesto quando staremo parlando del grado topologico di una funzione e quando staremo invece parlando del grado algebrico di un polinomio.

Uno dei primi risultati che si dimostra circa questa nozione in un corso di topologia è che funzioni omotope hanno il medesimo grado di Brouwer.

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema di Eilenberg-Niven in un linguaggio topologico dimostrando la seguente proposizione da cui segue il suddetto teorema.

Proposizione 4.14. *Sia S^4 la 4-sfera, i.e la compattificazione di Alexanderoff dei quaternioni. Estendiamo il polinomio generale lineare della forma del teorema 4.9 alla suddetta ponendo $f(\infty) = \infty$. Il polinomio generale lineare quaternionico $f : S^4 \rightarrow S^4$ così esteso è una funzione di grado di Brouwer pari a n (il suo grado come polinomio).*

Dimostrazione. Definiamo una funzione $g : S^4 \rightarrow S^4$ come:

$$g(q) = \begin{cases} q^n & \text{se } q \in \mathbb{H} \\ \infty & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

La strategia per dimostrare questo teorema è la seguente: dimostreremo anzitutto che f è omotopa a g , e dopodiché dimostreremo che $g(q)$ ha grado n : da ciò seguirà che anche f avrà grado n (i.e l'asserto) in quanto funzioni omotope hanno il medesimo grado di Brouwer.

Cominciamo costruendo l'omotopia tra f e g procedendo in due step: osserviamo che la funzione definita come:

$$F(q, t) := \begin{cases} a_0 qa_1 qa_2 \dots qa_n + (1-t)\phi(q) & \text{se } q \in \mathbb{H} \\ \infty & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

è una funzione continua tale che $F(q, 0) = f(q)$ e

$$F(q, 1) = \begin{cases} a_0 qa_1 qa_2 \dots qa_n & \text{se } q \in \mathbb{H} \\ \infty & \text{se } q = \infty \end{cases}$$

Scegliamo ora per ogni $i \in \mathbb{N} \cap [0, n]$ un cammino continuo $a_i(t)$ in $\mathbb{H} \setminus \{0\}$, con $1 \leq t \leq 2$, e tale che $a_i(1) = a_i$ e $a_i(2) = 1$. Per tali valori di t ($1 \leq t \leq 2$) definiamo una funzione:

$$G(q, t) := \begin{cases} a_0(t)qa_1(t)qa_2(t) \dots qa_n(t) & \text{se } q \in \mathbb{H} \\ \infty & \text{se } q = \infty \end{cases} \quad (4.8)$$

La funzione G così definita è una funzione continua tale che $G(q, 1) = F(q, 1)$ e $G(q, 2) = g(q)$; abbiamo così ottenuto l'omotopia desiderata tra f e g . Dimostriamo ora che g ha grado di Brouwer pari ad n .

Alla luce di quanto visto nel capitolo 2 (nella sezione 2.4 per l'esattezza) sappiamo che l'equazione

$$g(q) = q^n = i$$

ha n soluzioni, e le sue n soluzioni sono le radici complesse di i . Dimostremo che g ha un grado di Brouwer pari ad n mostrando che il determinante della sua Jacobiana è positivo in ogni radice di i [Nota 4.1]. Scriviamo il

nostro quaternione $q = t + xi + yj + zk$ nella sua forma polare:

$$q = |q|(\cos \theta + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin \theta)$$

dal teorema di De Moivre quaternionico segue che $q^n = |q|^n(\cos(n\theta) + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin(n\theta))$.

Scrivendo

$$g(q) = q^n = g_1(t, x, y, z) + ig_2(t, x, y, z) + jg_3(t, x, y, z) + kg_4(t, x, y, z)$$

otterremo che, ponendolo uguale alla forma polare di q^n :

$$\begin{cases} g_1(q) = |q|^n \cos(n\theta) \\ g_2(q) = \frac{x|q|^n \sin(n\theta)}{\pm |\text{Vec}(q)|} \\ g_3(q) = \frac{y|q|^n \sin(n\theta)}{\pm |\text{Vec}(q)|} \\ g_4(q) = \frac{z|q|^n \sin(n\theta)}{\pm |\text{Vec}(q)|} \end{cases}$$

Calcolando le derivate parziali di ogni componente della funzione g , g_i , rispetto a t, x, y e z otterremo la seguente espressione per la matrice Jacobiana di $g(q)$:

$$J = \begin{bmatrix} nx & -nt & 0 & 0 \\ nt & nx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0\frac{1}{x} & \end{bmatrix}$$

da cui, tramite un semplice calcolo diretto, avremo che $\det(J) = n^2 \left(\frac{t^2}{x^2} + 1 \right)$.

Ma siccome $t^2 + x^2 = 1$ e $x \neq 0$, avremo che il determinante sarà pari a $\frac{n^2}{x^2}$, un numero positivo. Ciò completa la dimostrazione. \square

4.9 Serie quaternioniche

Concludiamo il capitolo con l'ultimo importante argomento rimanente da trattare prima di passare alle funzioni elementari e alle varie formulazioni del calcolo differenziale su \mathbb{H} : le serie infinite quaternioniche.

Definizione 4.17 (Serie infinita quaternionica). *Sia $\{q_n\}$ una successione a valori in \mathbb{H} . Chiamiamo $S_n = q_1 + q_2 + \dots + q_n$ la n -esima somma parziale. Chiameremo la successione $\{S_n\}$ la serie associata a $\{q_n\}$.*

Notazionalmente indicheremo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \quad (4.9)$$

Se tale limite converge a un quaternione $S \in \mathbb{H}$, allora diremo che la serie infinita converge ad S scrivendo $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = S$; in caso contrario, diremo che essa diverge.

Dimostriamo ora alcune proprietà delle serie infinite quaternioniche:

Proposizione 4.15. Siano $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ due serie quaternioniche convergenti, e $\lambda \in \mathbb{H}$ un quaternione, allora valgono le seguenti proprietà:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (q_n + r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n + \sum_{n=1}^{\infty} r_n.$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda q_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$

Dimostrazione. • $\sum_{n=1}^{\infty} (q_n + r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{q_n+r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{q_n} + S_{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{q_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} S_{r_n} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n + \sum_{n=1}^{\infty} r_n.$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\lambda q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda S_{q_n} = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} S_{q_n} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} q_n.$

□

Esempio 4.10. Abbiamo la successione $q_n = 1 + \frac{i}{n} + \frac{j}{n} + k$. Vogliamo investigare la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$.

Vediamo che la somma parziale m -esima sarà data da:

$$S_m = \sum_{n=1}^m \left(1 + \frac{i}{n} + \frac{j}{n} + k\right) = m + mk + \sum_{n=1}^m \frac{i}{n} + \sum_{n=1}^m \frac{j}{n}$$

lasciando andare $m \rightarrow \infty$, vediamo che sia i coefficienti di 1 e k , che quelli di i e j divergono, e dunque la serie è divergente.

Esempio 4.11. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ la serie geometrica quaternionica. La m -esima somma parziale è pari a:

$$S_m = 1 + q + \cdots + q^{m-1}$$

moltiplicando ambo i lati dell'uguaglianza per q da destra otteniamo:

$$S_m q = q + q^2 + \cdots + q^m$$

Sottraiamo ora $S_m q$ a S_m :

$$S_m - S_m q = 1 - q^m$$

da cui $S_m(1 - q) = (1 - q^m)$, i.e. $S_m = (1 - q^m)(1 - q)^{-1}$. Prendendo il limite di tale successione per $m \rightarrow \infty$, supponendo che $|q| < 1$ otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = (1 - q)^{-1}$$

pertanto, come nel caso reale e complesso, tale serie converge a $(1 - q)^{-1}$ per $|q| < 1$.

Immaginiamo ora di voler invece investigare la convergenza di una serie come $\sum_{n=1}^{\infty} (i + j)^n$:

Esempio 4.12. Abbiamo $q_n = (i + j)^n$. Osserviamo che:

$$(i + j)^n = \begin{cases} i + j & n = 1 \\ -2 & n = 2 \\ -2i - 2j & n = 3 \\ 4 & n = 4 \\ 4i + 4j & n = 5 \\ -8 & n = 6 \\ -8i - 8j & n = 7 \\ 16 & n = 8 \\ \dots \end{cases}$$

Dividiamo la successione in 2 sottosuccessioni, $q_{n1} = \{i + j, -2i - 2j, 4i + 4j, \dots\}$ e $q_{n2} = \{-2, 4, -8, 16, \dots\}$; esse possono essere scritte in una forma chiusa come $q_{n1} = (-1)^{n+1} 2^{n-1}(i + j)$ e $q_{n2} = (-1)^n 2^n$.

Osserviamo poi che l' m -esima somma parziale di q_n , $\Sigma_m = \sum_{n=1}^m q_n$ può essere scritta come $\Sigma_m = \sum_{n=1}^m q_{n1} + \sum_{n=1}^m q_{n2} = S_{m1} + S_{m2}$.

Per determinare la convergenza di Σ_m consideriamo separatamente S_{m1} e S_{m2} :

$$S_{m1} = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} 2^{n-1} (i + j) ; \quad S_{m2} = \sum_{n=1}^m (-1)^n 2^n$$

Possiamo scrivere la prima in una forma più suggestiva, esplicitando le successioni componenti reali della successione associata alla serie come:

$$S_{m1} = \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} 2^{n-1} i + \sum_{n=1}^m (-1)^{n+1} 2^{n-1} j = \sum_{n=1}^m \sigma_1(n) i + \sum_{n=1}^m \sigma_2(n) j$$

per la seconda invece non è necessario in quanto è una serie reale.

$$\Sigma_m = \sum_{n=1}^m (-1)^n 2^n + \sum_{n=1}^m \sigma_1(n) i + \sum_{n=1}^m \sigma_2(n) j$$

Abbiamo esplicitato le serie reali componenti della nostra serie quaternionica Σ_m , e abbiamo dunque ridotto un problema "quaternionico" in un problema reale, e ora utilizzando risultati a noi noti dell'analisi reale possiamo facilmente determinare che Σ_m è divergente, in quanto le sue successioni componenti $\sum_{n=1}^m (-1)^n 2^n$, $\sum_{n=1}^m \sigma_1(n)$ e $\sum_{n=1}^m \sigma_2(n)$ sono divergenti (per un teorema dimostrato nella sezione sulle successioni quaternioniche).

Notiamo velocemente che verificarlo direttamente diventa tedioso, e che abbiamo dovuto trasformare il problema in un problema reale per far ricorso a risultati riguardo le serie reali che ci permettono di determinare la convergenza o meno immediatamente. Abbiamo 2 problemi: ciò non è sempre possibile, ed inoltre se è possibile può essere un processo lungo, come quello dell'esempio di prima.

Sorge spontanea una domanda: possiamo estendere ai quaternioni dei "test" per la convergenza delle serie? La risposta è affermativa; cominciamo con una proposizione riguardo una condizione necessaria ma non sufficiente affinché una serie converga.

Proposizione 4.16. Sia q_n una successione, allora se $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ converge, necessariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$.

Dimostrazione. Possiamo dimostrare questo fatto in 2 modi; o notando che $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ può essere scritta come $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n i + \sum_{n=1}^{\infty} c_n j + \sum_{n=1}^{\infty} d_n k$, e che, come corollario del medesimo fatto per le successioni reali, segue che $a_n, b_n, c_n, d_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e dunque $q_n \rightarrow 0$, o alternativamente notando che $S_n - S_{n-1} = q_n$, ma per $n \rightarrow \infty$, $S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ e quindi $q_n \rightarrow 0$. \square

Con questo teorema avremmo potuto immediatamente determinare il comportamento della serie dell'esempio precedente, in quanto sapevamo già che la successione $(i + j)^n$ fosse divergente.

Tuttavia, quella che abbiamo appena ricavato è una condizione necessaria ma non sufficiente, dunque possiamo solo dedurre che se q_n diverge o non converge a 0 la serie associata a quest'ultima è divergente, ma non possiamo concludere nulla se sappiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0$. Desideriamo ottenere dei risultati più forti.

Definizione 4.18. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ una serie quaternionica, allora diremo che è assolutamente convergente se la serie reale $\sum_{n=1}^{\infty} |q_n|$ converge.

Diremo al contrario che è convergente condizionatamente se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ converge, ma la serie associata alla norma della successione $\sum_{n=1}^{\infty} |q_n|$ no.

Teorema 4.10. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ una serie quaternionica. Allora se la serie è assolutamente convergente, essa è convergente.

Dimostrazione. Supponiamo che la serie sia assolutamente convergente, per dimostrare che anche $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ converga, dobbiamo dimostrare la convergenza della successione delle somme parziali. Prima di tutto osserviamo che, siccome $\sum_{n=1}^{\infty} |q_n|$ è una serie convergente, seguirà che la successione delle somme parziali associata sarà una successione di Cauchy.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q_n| = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m, l \geq N,$$

$$\sum_{n=l+1}^m |q_n| = \left| \sum_{n=l+1}^m |q_n| \right| = |\Sigma_m - \Sigma_l| < \epsilon$$

Sia $\{\tilde{\Sigma}_m\}$ la successione delle somme parziali della serie $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$. Siano $m, l \geq N$, dove N è il numero naturale esistente per ipotesi scelto prima; per la diseguaglianza del triangolo avremo:

$$|\tilde{\Sigma}_m - \tilde{\Sigma}_l| = \left| \sum_{n=l+1}^m q_n \right| \leq \sum_{n=l+1}^m |q_n| < \epsilon$$

Ergo la successione $\{\tilde{\Sigma}_m\}$ è una successione di Cauchy, cioè una successione convergente. Dunque anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ converge. \square

Questa è al contrario una condizione sufficiente ma non necessaria, e dunque sarà fruttifera solo nel caso in cui riusciamo a mostrare che la serie della norma della successione associata è convergente.

Esempio 4.13. Abbiamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. È ben noto che questa serie converge, tuttavia, la serie associata alla sua norma: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ è divergente (è la famosa serie armonica). L'inverso della proposizione appena dimostrata è dunque generalmente falso.

Proposizione 4.17 (Criterio della radice di Cauchy). *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ una serie quaternionica; chiamiamo:*

$$C = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|q_n|} \tag{4.10}$$

Allora:

1. Se $C < 1$, la serie converge assolutamente.
2. Se $C > 1$, la serie diverge.
3. Se $C = 1$, il test è inconclusivo.

Dimostrazione. Partendo dalla prima, supponiamo che $C < 1$, allora per ogni $n \geq N$, $\exists k$ tale che $\sqrt[n]{|q_n|} \leq k < 1 \implies |q_n| \leq k^n < 1$. Siccome la serie geometrica reale $\sum_{n=1}^{\infty} k^n$ converge per $|k| < 1$, avremo che, per il criterio di comparazione delle serie, anche $\sum_{n=1}^{\infty} |q_n|$ converge, e dunque $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ converge assolutamente.

Per il secondo punto invece, supponendo di avere $C > 1$, ci ritroveremmo ad avere $\forall \epsilon > 0$, $|q_n| > C - \epsilon$ per un numero infinito di indici. Essendo ϵ arbitrario, scegliamolo in maniera tale da rendere $C - \epsilon > 1$, e dunque $|q_n| > 1$ per un numero infinito di indici, da cui segue che la serie sarà divergente. \square

Proposizione 4.18 (Criterio del rapporto di D'Alembert). *Sia $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ una serie quaternionica di termini non pari a zero; chiamiamo:*

$$C = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|q_{n+1}|}{|q_n|} \quad (4.11)$$

Allora:

1. Se $C < 1$, la serie converge assolutamente.
2. Se $C > 1$, la serie diverge.
3. Se $C = 1$, il test è inconclusivo.

Dimostrazione. Cominciando dalla prima, scegliamo un numero reale r , $C < r < 1$; esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq N$ abbiamo:

$$|q_{n+1}| < r|q_n|$$

più generalmente, $\forall i > 0$:

$$|q_{n+i}| < r^i|q_n|$$

e dunque:

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |q_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |q_{N+i}| < |q_n| \sum_{i=1}^{\infty} r^i$$

e per il criterio di comparazione, avremo che la serie associata a q_n converge assolutamente.

Per il secondo caso, invece, avremo che per un infinito numero di indici $|q_{n+1}| > |q_n|$, e dunque la serie diverge. \square

Concludiamo questa sezione con una generalizzazione del teorema di Cauchy-Hadamard per i quaternioni, che ci sarà utile per trovare il raggio di convergenza delle serie di potenze quaternioniche che analizzeremo. Introduciamo però prima il concetto di serie di funzioni e serie di potenze quaternioniche.

Definizione 4.19 (Successione di funzioni quaternioniche convergente). *Diremo che la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, dove $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, converge a $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ se $\forall q \in \mathbb{H}$ e $\forall \epsilon > 0$ esiste un numero naturale $N(\epsilon, q)$ tale che $\forall n \geq N$*

$$|f_n(q) - f(q)| < \epsilon$$

se ciò è il caso, scriveremo $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(q) = f(q)$.

Definizione 4.20 (Successione di funzioni quaternioniche uniformemente convergente). *Diremo che una successione di funzioni quaternioniche $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ se $\forall \epsilon > 0$, esiste un numero naturale $N(\epsilon)$ tale che:*

$$|f_n(q) - f(q)| < \epsilon \quad \forall n \geq N \text{ e } \forall q \in \mathbb{H}$$

Possiamo definire, una volta definito il concetto di successioni di funzioni quaternioniche, il concetto di serie di funzioni quaternioniche.

Definizione 4.21 (Serie di funzioni quaternioniche). *Sia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di funzioni quaternioniche, i.e una successione dove $\forall n, f_n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Chiameremo la somma puntuale di funzioni $S_m = f_1(q) + f_2(q) + \dots + f_m(q)$ m-esima somma parziale di f_n . Chiameremo la successione $\{S_m\}_{m=1}^{\infty}$ la serie di funzioni associata alla successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Se tale serie di funzioni converge ad una funzione $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, scriveremo formalmente:*

$$\phi(q) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(q) \tag{4.12}$$

Se la successione di somme parziali di una successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente, allora diremo che la serie associata $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(q)$ è una serie uniformemente convergente.

Potremo definire, come caso particolare di serie di funzioni quaternioniche, il concetto di serie di potenze quaternioniche.

Definizione 4.22 (Serie di potenze quaternioniche sinistre/destre). *Chiamiamo serie di funzioni quaternioniche del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(q - q_0)^n$ serie di potenze quaternioniche sinistre; inoltre, chiamiamo il quaternione q_0 il centro*

della serie.

In modo del tutto analogo, chiamiamo serie di funzioni del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} (q-q_0)^n a_n$ serie di potenze quaternioniche destre, e chiamiamo sempre il quaternione q_0 il centro della serie.

Teorema 4.11 (Teorema di Cauchy-Hadamard). Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (q-q_0)^n$ una serie di potenze quaternionica sinistra, allora esiste un numero reale esteso positivo $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ chiamato il raggio di convergenza della serie, per il quale la serie converge assolutamente per tutti i valori di q tale che $|q - q_0| < R$ e diverge per tutti i valori tale che $|q - q_0| > R$. Possiamo esprimere il raggio di convergenza R con la seguente formula in termini della successione dei coefficienti della serie di potenze:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \quad (4.13)$$

Dimostrazione. Assumiamo che $q_0 = 0$ senza perdita di generalità. Nel caso in cui $R = 0$ ($\frac{1}{R} = \infty$) avremo banalmente che la serie diverge ovunque.

Supponiamo dunque che $0 \leq \frac{1}{R} < \infty$ e che $|q| < R$; allora $\exists r \in \mathbb{R}$ tale che $|q| < r < R$.

Essendo $\frac{1}{r} > \frac{1}{R}$, sappiamo dalla definizione di \limsup che esiste un numero naturale N tale che $\forall n \geq N |a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{r}$. Da quest'ultima diseguaglianza segue che:

$$|a_n| < \frac{1}{r^n} \implies |a_n q^n| < \left(\frac{|q|}{r}\right)^n$$

Ma noi sappiamo che $|q| < r$, e dunque $\frac{|q|}{r} < 1$. Da ciò segue che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|q|}{r}\right)^n$ converge, ergo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ converge assolutamente.

Supponiamo al contrario che $|q| > R$. Analogamente, troveremo un numero reale $r \in \mathbb{R}$, tale che $|q| > r > R$. Siccome $\frac{1}{r} < \frac{1}{R}$ qui avremo al contrario, sempre per la definizione di \limsup , che $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{r}$ per infiniti valori di n . Da cui segue, con una manipolazione algebrica del tutto analoga quella fatta prima, che $|a_n q^n| > \left(\frac{|q|}{r}\right)^n$ per infiniti valori di n . Siccome qui abbiamo che $|q| > r$, deduciamo che $\frac{|q|}{r} > 1$, i.e i termini della serie di funzioni sono maggiori di 1 per infiniti valori di n , e che dunque la serie diverge. \square

È valido per i quaternioni anche l'M-test di Weierstrass, adoperato per verificare se una serie infinita di funzioni converge uniformemente. La

dimostrazione è del tutto analoga (al netto di pochi accorgimenti) a quella che si fornisce in un corso di teoria delle funzioni classico, riportiamola qui di seguito.

Teorema 4.12 (M-test di Weierstrass). *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni quaternioniche $f_n : U \rightarrow \mathbb{H}$. Se esiste una successione di numeri reali positivi $\{M_n\}$ tale che:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = M \in \mathbb{R} \quad (\text{i.e. } \sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ converge})$$

$$|f_n(q)| \leq M_n \quad \forall n \geq 1 \quad \forall q \in U$$

allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(q)$$

converge uniformemente su U .

Dimostrazione. Sia Σ_m la m-esima somma parziale definita come:

$$\Sigma_m = \sum_{k=1}^m f_k(q)$$

Siccome la serie associata alla successione reale $\{M_n\}$ converge, avremo che, per il criterio di Cauchy, $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$ tale che $\forall m > n > N$:

$$\sum_{k=n+1}^m M_k < \epsilon$$

Scegliendo ora una N , avremo che $\forall q \in U$, $\forall m > n > N$

$$|\Sigma_m - \Sigma_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m f_k(q) \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |f_k(q)| \leq \sum_{k=n+1}^m M_k < \epsilon \quad (4.14)$$

La successione di somme parziali $\{\Sigma_n\}$ è pertanto una successione di Cauchy quaternionica, e ciò implica, per la completezza dello spazio metrico dei quaternioni, che è una successione convergente. Sia $\Sigma(q)$ la funzione a cui tale successione converge: prendendo il limite $m \rightarrow \infty$ dell'equazione (4.14) otterremo che:

$$|\Sigma(q) - \Sigma_n(q)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |\Sigma_m(q) - \Sigma_n(q)| \leq \epsilon$$

da cui segue che la funzione è uniformemente convergente in U . □

Il teorema appena dimostrato ci permetterà di dimostrare il seguente altrettanto importante risultato.

Proposizione 4.19. *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(q-q_0)^n$ una serie di potenze quaternionica sinistra, e sia R il suo raggio di convergenza definito prima. Allora, dato un numero reale positivo $r > 0$ tale che $0 < r < R$, avremo che la serie converge assolutamente nella palla chiusa $\overline{B}(q_0, r)$.*

Dimostrazione. Anche in questo caso porremo $q_0 = 0$; sia $r \in \mathbb{R}^+$ tale che $0 < r < R$, dove $R \neq 0$ è il raggio di convergenza della nostra serie. Sia ρ un numero reale positivo tale che $0 < r < \rho < R$. Da tale diseguaglianza segue che $\frac{1}{\rho} > \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Dalla relazione appena ottenuta avremo la garanzia dell'esistenza di un N tale che $\forall n \geq N$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho} \implies |a_n| < \frac{1}{\rho^n}$$

Sia ora $q \in \overline{B}(0, r)$, dalla diseguaglianza di sopra segue che $\forall n \geq N$:

$$|a_n q^n| < \left(\frac{|q|}{\rho}\right)^n \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

Questa condizione, assieme al fatto che $\sum_n^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ converge, forma precisamente l'insieme di presupposti per l'M-test di Weierstrass; pertanto la nostra serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ è una serie uniformemente convergente in $\overline{B}(0, r)$. \square

Teorema 4.13 (Criterio del rapporto). *Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(q - q_0)^n$ una serie di potenze quaternionica (sinistra) con raggio di convergenza pari a R . Allora avremo che:*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \tag{4.15}$$

se tale limite esiste.

Dimostrazione. Sia anche qui posto $q_0 = 0$ senza perdita di generalità. Supponiamo che la successione $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ sia convergente, e sia $r \in \mathbb{R}$ un numero reale positivo tale che:

$$|q| < r < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Essendo $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ convergente, potremo trovare un numero naturale N tale che, $\forall n \geq N$:

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > r$$

Sia $A = |a_N|r^N$. Osserviamo che, come conseguenza della disequazione di sopra:

$$|a_{N+k}|r^{N+k} = |a_{N+k-1}|r^{N+k-1} \frac{|a_{N+k}|}{|a_{N+k-1}|} r < |a_{N+k-1}|r^{N+k-1}$$

dove qui $k \in \mathbb{N}$. Da ciò segue che $|a_n|r^n \leq A \ \forall n \geq N$. Manipolando la disequazione appena ottenuta otteniamo:

$$|a_n q^n| = a_n q^n \left(\frac{|q|}{r} \right)^n \leq A \left(\frac{|q|}{r} \right)^n \quad \forall n \geq N$$

Ma siccome $|q| < r$, allora $\frac{|q|}{r} < 1$ e la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|q|}{r} \right)^n$ converge,

e come conseguenza di ciò, per il criterio del confronto, avremo che anche

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n q^n|$ converge, i.e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ converge assolutamente per $|q| < r$. Essendo tuttavia r un numero reale arbitrario, ed essendo ciò vero per ogni $|q| < r < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, dovremo avere necessariamente che il raggio di convergenza R della nostra serie sia maggiore del limite della successione $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, $R \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Sia ora $r \in \mathbb{R}^+$ tale che:

$$|q| > r > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

(supponendo sempre la convergenza della successione $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$). Per la convergenza della suddetta, avremo che esisterà un numero naturale N tale che, $\forall n \geq N$, $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} < r$. Chiamiamo di nuovo $A = |a_N|r^N$, e con un procedimento analogo a quello di prima otterremo che:

$$|a_{N+k}|r^{N+k} > |a_{N+k-1}|r^{N+k-1} \quad k \in \mathbb{N}$$

Da ciò segue che $|a_n|r^n \geq A \ \forall n \geq N$. Si ottiene come conseguenza di questa disequazione che:

$$|a_n q^n| = |a_n|r^n \left(\frac{|q|}{r} \right)^n \geq A \left(\frac{|q|}{r} \right)^n \quad \forall n \geq N$$

Ma essendo stavolta $|q| > r$, avremo che $\frac{|q|}{r} > 1$ e che dunque la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|q|}{r}\right)^n$ diverge. Da ciò segue, per il criterio del confronto, che anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ diverge per $|q| > r$. Pertanto, per considerazione del tutto analoghe a quelle fatte prima, dovremo necessariamente avere $R \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

In questi due "step" dimostrativi del teorema abbiamo pertanto ottenuto le seguenti disequazioni:

$$R \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad e \quad R \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

da cui segue che $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, dimostrando l'asserto.

□

Esercizio 4.12. *Dimostrare che, data $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni quaternioniche continue $f_n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \forall n$, se essa converge uniformemente a $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, allora f è continua.*

Capitolo 5

Funzioni elementari

In questo capitolo parleremo delle estensioni al corpo dei quaternioni di tutte le più importanti funzioni elementari sui reali (esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche, funzioni iperboliche), ricavando delle espressioni operative per le anzidette.

5.1 Esponenziale quaternionico

Cominciamo la sezione estendendo ai quaternioni la funzione esponenziale $\exp(x)$ di cui conosciamo già la sua versione reale e complessa. Analogamente al caso complesso, per ricavare un'espressione di quest'ultima ricorreremo alla sua espansione in serie di Taylor, che nel caso reale e complesso è:

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

All'interno del capitolo utilizzeremo intercambiabilmente e^x e $\exp(x)$, le due notazioni più standard per la funzione esponenziale, in base a quale delle due risulta più suggestiva a giudicare dalle circostanze.

Consideriamo ora la medesima serie infinita sul corpo dei quaternioni, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$. Osservando che $|q^n| \leq |q|^n \forall q \in \mathbb{H}$, avremo che, per il criterio del confronto, la successione reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|q^n|}{n!}$$

converge, in quanto ogni termine è minore di quello dell'altra successione reale (che è convergente) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|q|^n}{n!}$, che è precisamente pari a $e^{|q|}$. Alternativamente, avremmo potuto osservare che la serie così definita è una serie quaternionica ovunque assolutamente convergente utilizzando il criterio del rapporto (vedi teorema 4.13 del capitolo 4) calcolando il suo raggio di convergenza:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty$$

Con ciò abbiamo dimostrato che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$ è assolutamente convergente $\forall q \in \mathbb{H}$.

A questo punto sappiamo che sul corpo dei quaternioni una funzione definita come

$$\exp(q) = e^q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \quad (5.1)$$

è ben definita ed assume un valore finito $\forall q \in \mathbb{H}$. Ora non ci resta che ottenere una forma algebrica di quest'ultima più facile da utilizzare.

Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione, sia $\text{Sc}(q) = q_0$ la sua parte scalare e $\text{Vec}(q)$ la sua parte vettoriale. Consideriamo le due serie quaternioniche:

$$e^{q_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_0^n}{n!} \quad e^{\text{Vec}(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^n}{n!}$$

allora entrambe convergono, la prima in quanto è precisamente la funzione reale e^{q_0} , e la seconda per un'argomentazione simile a quella citata prima. Prendendo il prodotto di Cauchy delle due serie otteniamo:

$$\begin{aligned} e^{q_0} e^{\text{Vec}(q)} &= \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^l \frac{q_0^n \text{Vec}(q)^{l-n}}{n! (l-n)!} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} q_0^n \text{Vec}(q)^{l-n} \\ &\implies e^{q_0} e^{\text{Vec}(q)} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q_0 + \text{Vec}(q))^l}{l!} = e^{q_0 + \text{Vec}(q)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Infine, per ottenere un'espressione per la funzione quaternionica e^q , dimostriamo ed utilizziamo il seguente risultato:

Lemma 5.1. *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione e $\text{Vec}(q)$ la sua parte vettoriale. Allora:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^n}{n!} = \cos |\text{Vec}(q)| + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin |\text{Vec}(q)|$$

dove qui $\text{sgn}(\text{Vec}(q)) = \frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|}$.

Dimostrazione. Per dimostrare il fatto, cominciamo dimostrando che per un quaternione puro $p \in \mathbf{P}$, $p^{2n} = (-1)^n |p|^{2n}$.

Procediamo per induzione, considerando il caso base $n = 2$. Osserviamo che, esplicitando le coordinate di $p = xi + yj + zk$, con $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$p^2 = (xi + yj + zk)^2 = -x^2 - y^2 - z^2 = -|p|^2$$

per il passo induttivo, supponiamo che sia vero per $n = k$, i.e:

$$p^{2k} = (-1)^k |p|^{2k}$$

allora per $n = k + 1$ avremo:

$$p^{2k+2} = p^2(p^{2k}) = (-x^2 - y^2 - z^2)(-1)^k |p|^{2k} = (-1)^{k+1} |p|^{2k+2}$$

Adesso, separiamo la serie dell'enunciato in una parte con potenze pari e una con potenze dispari:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

per la prima, possiamo direttamente sostituire $\text{Vec}(q)^{2n}$ con $(-1)^n |\text{Vec}(q)|^{2n}$, mentre per la seconda:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^{2n+1}}{(2n+1)!} &= \text{Vec}(q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^{2n}}{(2n+1)!} = \text{Vec}(q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |\text{Vec}(q)|^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |\text{Vec}(q)|^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

da cui:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{|\text{Vec}(q)|^{2n}}{(2n)!} + \frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |\text{Vec}(q)|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ma la prima serie del lato destro dell'uguaglianza di sopra è precisamente $\cos(|\text{Vec}(q)|)$, mentre la seconda è $\sin(|\text{Vec}(q)|)$, moltiplicata per $\frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|} = \text{sgn}(\text{Vec}(q))$, da cui segue l'asserto:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{Vec}(q)^n}{n!} = \cos |\text{Vec}(q)| + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin |\text{Vec}(q)|$$

□

Combinando il risultato appena ottenuto con l'equazione (5.2), otteniamo la seguente espressione per l'esponenziale quaternionico $\exp(q) = e^q$:

Definizione 5.1 (Esponenziale quaternionico). *Chiameremo funzione esponenziale quaternionica, esponenziale quaternionico o esponenziale naturale quaternionico la seguente funzione:*

$$\exp(q) = e^q = e^{\text{Sc}(q)} (\cos |\text{Vec}(q)| + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin |\text{Vec}(q)|)$$

dove qui, come al solito $\text{Sc}(q)$ e $\text{Vec}(q)$ indicano la parte scalare e vettoriale del quaternione $q \in \mathbb{H}$, e $\text{sgn}(\text{Vec}(q)) = \frac{\text{Vec}(q)}{|\text{Vec}(q)|}$. Se $|\text{Vec}(q)| = 0$ (i.e. $q \in \mathbb{R}$), allora $\text{sgn}(\text{Vec}(q))$ non è ben definito, ed in tal caso definiamo la funzione esponenziale come la classica funzione esponenziale reale.

La funzione introdotta è definita $\forall q \in \mathbb{H}$.

La relazione appena ottenuta è spesso chiamata "formula di Euler quaternionica", vista la grande somiglianza con la formula di Euler valida per i numeri complessi:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Per la non commutatività dei quaternioni, tuttavia, avremo che l'esponenziale quaternionico perderà alcune proprietà, come ad esempio, generalmente:

$$e^{q_1+q_2} \neq e^{q_1} e^{q_2} ; \quad q_1, q_2 \in \mathbb{H}$$

Il lettore potrà convincersi di questo fatto con il prossimo esercizio:

Esercizio 5.1. Calcolare:

- e^{i+j+k}
- $e^{\pi i} e^{\pi j}$
- $e^{\pi i+\pi j}$

- $e^{\sqrt{2}j-5k}$

- $e^{\frac{\pi}{2}j}$

Trascurata quest'ultima, l'esponenziale ha comunque molte proprietà "desiderabili", in comune all'esponenziale reale e complesso. Enunciamole e dimostriamole:

Proposizione 5.1 (Proprietà dell'esponenziale quaternionico). *Sia $e^q : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ l'esponenziale quaternionico appena definito. Allora le seguenti proprietà sono valide:*

- Se $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ sono due quaternioni che commutano fra loro, i.e. $q_1 q_2 = q_2 q_1$, allora $e^{q_1+q_2} = e^{q_1} e^{q_2}$.
- $e^{\operatorname{sgn}(q)\pi} = -1 \quad \forall q \in \mathbb{H}$.
- $e^{-q} e^q = e^q e^{-q} = 1 \quad \forall q \in \mathbb{H}$.
- $(e^q)^n = e^{nq}$ per $n \in \mathbb{N}$, $\forall q \in \mathbb{H}$.
- $\overline{e^q} = e^{\bar{q}}$.

Dimostrazione: Dimostriamo come al solito tutte le affermazioni in ordine:

- Cominciamo dimostrando la prima parte della proposizione: supponiamo che $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ siano due quaternioni che commutano tra loro.

Le serie infinite $e^{q_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_1^n}{n!}$ e $e^{q_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_2^n}{n!}$ sono uniformemente convergenti, e il loro prodotto di Cauchy è pari a:

$$e^{q_1} e^{q_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_1^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_2^m}{m!} = \sum_{l=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^l \frac{q_1^n}{n!} \frac{q_2^{l-n}}{(l-n)!} \right] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} q_1^n q_2^{l-n}$$

ma siccome $q_1 q_2 = q_2 q_1$, allora $(q_1 + q_2)^l = \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} q_1^n q_2^{l-n}$ e quindi:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{n=0}^l \binom{l}{n} q_1^n q_2^{l-n} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q_1 + q_2)^l}{l!} = e^{q_1+q_2}$$

- $e^{\operatorname{sgn}(q)\pi} = \cos(\pi) + \operatorname{sgn}(q) \sin(\pi) = \cos(\pi) = -1$

- Segue come corollario immediato del punto 1. Infatti, osserviamo che q e $-q$ commutano fra loro:

$$q(-q) = -q^2 = (-q)q$$

e dunque $e^{-q}e^q = e^{-q+q} = e^0 = 1, \forall q \in \mathbb{H}$.

- Anche questo è un corollario immediato del primo punto. In questo caso, però, procediamo per induzione. Per il caso base ($n = 2$), osserviamo che q commuta banalmente con sé stesso e dunque:

$$(e^q)^2 = e^q e^q = e^{q+q} = e^{2q}$$

Per lo step induttivo, supponiamo che tale identità sia vera per un $n = k$ qualsiasi:

$$(e^q)^k = e^{kq}$$

allora, per $n = k + 1$:

$$(e^q)^{k+1} = e^q (e^q)^k = e^q e^{kq}$$

ma osservando che q e kq commutano fra loro (essendo $k \in \mathbb{N}$) allora:

$$(e^q)^{k+1} = e^q e^{kq} = e^{(k+1)q}$$

- $\overline{e^q} = e^{q_0}(\cos |\text{Vec}(q)| - \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin |\text{Vec}(q)|) = e^{q_0}(\cos |-\text{Vec}(q)| - \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin |-\text{Vec}(q)|)$.

Ma $\text{sgn}(-\text{Vec}(q)) = -\text{sgn}(\text{Vec}(q))$ e quindi:

$$\begin{aligned} \overline{e^q} &= e^{q_0}(\cos |-\text{Vec}(q)| + \text{sgn}(-\text{Vec}(q)) \sin |-\text{Vec}(q)|) = \\ &= e^{\text{Sc}(\bar{q})}(\cos |\text{Vec}(\bar{q})| + \text{sgn}(\text{Vec}(\bar{q})) \sin |\text{Vec}(\bar{q})|) = e^{\bar{q}} \end{aligned}$$

□

Inoltre, in accordo con la funzione esponenziale reale e complessa, anche la funzione esponenziale quaternionica non è, se calcolata in un punto del suo dominio, mai pari a 0, i.e $e^q \neq 0, \forall q \in \mathbb{H}$.

La seguente definizione di funzione esponenziale per \mathbb{H} è dunque di certo conveniente per queste proprietà, ma vogliamo verificarne di altre: ad esempio, per i reali e per i complessi sappiamo essere valida la seguente identità:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Ci domandiamo se tale identità sia valida anche per l'esponenziale quaternionico; la risposta è affermativa, dimostriamolo nella seguente proposizione:

Proposizione 5.2. *Sia $q \in \mathbb{H}$, e denoti e^q , come al solito, la funzione esponenziale naturale quaternionica. Allora:*

$$e^q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n \quad (5.3)$$

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione, dovremo anzitutto ottenerne un'espressione per la successione quaternionica $\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n$. Sia $q := a + bi + cj + dk$, allora la successione $1 + \frac{q}{n}$ è pari a $1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n}i + \frac{c}{n}j + \frac{d}{n}k$. Esprimiamo ora il quaternione appena ottenuto in forma polare, e sfruttando la formula di De Moivre (capitolo 2 sezione 3) avremo:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \left[\cos\left(n \arccos\left(\frac{1 + \frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{n^2}}}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{bi + cj + dk}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \sin\left(n \arccos\left(\frac{1 + \frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{n^2}}}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

adesso, osservando che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arccos\left(\frac{1 + \frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{n^2}}}\right) = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = |\text{Vec}(q)|$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^a = e^{\text{Sc}(q)}$$

avremo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^{\text{Sc}(q)} (\cos|\text{Vec}(q)| + \text{sgn}(\text{Vec}(q)) \sin|\text{Vec}(q)|) = e^q$$

□

L'esponenziale quaternionico ha anche altre proprietà in comune con quello complesso. Il lettore potrà ricordare la famosa identità:

$$e^{i\pi} = -1$$

Osserviamo che, tramite un calcolo diretto, otteniamo:

$$\begin{cases} e^{\pi i} = -1 \\ e^{\pi j} = -1 \\ e^{\pi k} = -1 \end{cases}$$

da cui segue che potremo scrivere un analogo quaternionico della famosa identità $e^{i\pi} + 1 = 0$, chiamata spesso la "formula più bella della matematica" come:

$$e^{\pi i} + e^{\pi j} + e^{\pi k} + 3 = 0 \quad (5.4)$$

Quest'identità è un corollario immediato della seconda relazione dimostrata nella proposizione 5.1 che afferma che e elevato ad un qualsiasi quaternione puro normale è pari a -1 .

Esercizio 5.2. *Dimostrare che la funzione esponenziale quaternionica e^q è una funzione continua su tutto \mathbb{H} .*

5.2 Logaritmo naturale quaternionico

Andiamo ora a ricavare un'espressione per il logaritmo naturale quaternionico, definendolo a partire dalla seguente relazione:

$$w = \log(q) \quad \text{se} \quad q = e^w$$

da cui, scrivendo q in forma polare otteniamo:

$$|q|(\cos \theta + \operatorname{sgn}(\operatorname{Vec}(q)) \sin \theta) = e^{w_0}(\cos |\operatorname{Vec}(w)| + \operatorname{sgn}(\operatorname{Vec}(w)) \sin |\operatorname{Vec}(w)|)$$

da cui, uguagliando modulo, argomento e segno otteniamo:

$$\begin{cases} e^{w_0} = |q| \implies w_0 = \ln |q| \\ \operatorname{sgn}(\operatorname{Vec}(q)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Vec}(w)) \\ |\operatorname{Vec}(w)| = \theta + 2\pi n = \arg(q) \quad n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

da cui otteniamo la seguente espressione per il logaritmo naturale quaternionico:

$$\log(q) = \ln |q| + \operatorname{sgn}(\operatorname{Vec}(q)) \arg(q) \quad (5.5)$$

È possibile, come per il logaritmo complesso, definire il valore principale di $\log(q)$, restringendo l'argomento $\arg(q) = \theta + 2\pi n$ all'argomento principale $\operatorname{Arg}(q) = \theta$, con $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Definizione 5.2 (Valore principale del logaritmo quaternionico). *Chiamiamo **valore principale del logaritmo quaternionico**, che denoteremo con $\operatorname{Log}(q)$, la seguente espressione:*

$$\operatorname{Log}(q) = \ln |q| + \operatorname{Arg}(q) \operatorname{sgn}(\operatorname{Vec}(q)) = \ln |q| + \theta \operatorname{sgn}(\operatorname{Vec}(q)) \quad (5.6)$$

$$\theta \in (-\pi, \pi].$$

Come nel caso complesso, è possibile selezionare delle linee di diramazione e considerare i rami di $\log(q)$ il cui dominio sono i quaternioni al netto della suddetta linea di diramazione; i rami così ottenuti sono effettivamente delle funzioni.

Esempio 5.1. Risolviamo la seguente equazione quaternionica:

$$e^q = i \implies q = \log(i) = \ln|i| + \operatorname{sgn}(i) \arg(i)$$

ma essendo $|i| = 1$, $\ln|i| = 0$, $\operatorname{sgn}(i) = i$ e $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $n \in \mathbb{Z}$, avremo:

$$q = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)i = \frac{(4n+1)\pi}{2}i \quad n \in \mathbb{Z}$$

Le soluzioni sono precisamente le soluzioni della medesima equazione nel campo dei complessi.

Esempio 5.2. Risolviamo ora

$$e^q = j$$

vediamo che anche per le altre unità immaginarie di \mathbb{H} avremo dei risultati del tutto analoghi a quelli ottenuti con l'unità i . Come prima:

$$q = \log(j) = \ln|j| + \operatorname{sgn}(j) \arg(j)$$

e come prima, avremo $\ln|j| = 0$ e $\operatorname{sgn}(j) = j$. Inoltre, $\arg(j) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ e dunque:

$$q = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)j = \frac{(4n+1)\pi}{2}j \quad n \in \mathbb{Z}$$

In un modo del tutto analogo, anche $e^q = k \implies q = \frac{(4n+1)\pi}{2}k$. Possiamo riscrivere queste identità in maniera più compatta come:

$$e^{\frac{(4n+1)}{2}\pi e_i} = e_i \quad i = 1, 2, 3$$

Esercizio 5.3. Calcolare $\log(q)$ per i seguenti valori di q :

- $\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi}i + ej$.
- $i - j$.

5.3 Potenze di quaternioni

Tramite le nozioni di esponenziale e logaritmo quaternionico, è possibile definire per cosa voglia dire "elevare q_1 alla potenza di q_2 ", dove $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ sono due quaternioni.

Per definire la "funzione" (assume più valori per ogni quaternione, pertanto non sarà una funzione in senso stretto ma una funzione polidroma) potenza per il corpo dei quaternioni, procediamo esattamente come nel caso complesso, i.e definiamo $q_1^{q_2}$ essere:

Definizione 5.3 (q_1 elevato alla potenza di q_2). *Siano q_1, q_2 due quaternioni. Allora, definiamo $q_1^{q_2}$ tramite la seguente equazione:*

$$q_1^{q_2} := e^{\log(q_1)q_2} \quad (5.7)$$

Proposizione 5.3 (Proprietà della funzione potenza quaternionica). *Siano $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{H}$, allora:*

- $(q_1^{q_2})^n = q_1^{nq_2}$.
- Se $\log(q_1)q_2$ e $\log(q_1)q_3$ commutano, allora $q_1^{q_2}q_1^{q_3} = q_1^{q_2+q_3}$.

Dimostrazione. Segue come corollario immediato delle proprietà dell'esponenziale e^q dimostrate nella sezione 1 di questo capitolo. □

Possiamo anche in questo caso selezionare un valore principale della funzione polidroma potenza, definiamolo formalmente qui di seguito:

Definizione 5.4 (Valore principale della funzione potenza quaternionica). *Siano q_1, q_2 due quaternioni; chiamiamo valore principale della funzione potenza quaternionica il quaternione:*

$$q_1^{q_2} = e^{\text{Log}(q_1)q_2}$$

cioè il valore ottenuto restringendo il logaritmo quaternionico al suo valore principale $\text{Log}(q) = \ln|q| + \text{sgn}(q)\text{Arg}(q)$.

Esempio 5.3. Consideriamo potenze quaternioniche del tipo $e_i^{e_j}$, dove $i, j = 1, 2, 3$ e, come al solito, e_i, e_j sono le unità immaginarie quaternioniche. Cominciamo con il primo caso, i^i . Osserviamo che, per la definizione di un quaternione elevato alla potenza di un altro quaternione:

$$i^i = e^{\log(i)i}$$

ma, come visto nella sezione precedente, $\log(i) = \frac{(4n+1)\pi}{2}i$, da cui :

$$i^i = e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Il suo valore principale vale

$$i^i = e^{\text{Log}(i)i} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Il risultato è congruo con il medesimo risultato che spesso si dimostra nei corsi di analisi complessa. Vediamo che, con dei calcoli pressoché uguali, tale risultato vale anche per le altre unità immaginarie, i.e:

$$j^j = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$k^k = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Facendo un sunto di questi 3 risultati in una sola proposizione, potremo dire che le unità immaginarie quaternioniche (i, j, k) elevate alla potenza di loro stesse danno come risultato un numero reale, precisamente $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Non ci resta ora che controllare i casi di $e_i^{e_j}$ in cui $i \neq j$. Partiamo da i^j : per la definizione di potenza di quaternioni data poc' anzi abbiamo:

$$i^j = e^{\log(i)j} = e^{\frac{(4n+1)\pi}{2}ij} = e^{\frac{(4n+1)\pi}{2}k} = k$$

Analogamente per j^i, i^k, k^i, j^k, k^j avremo:

$$j^i = e^{\log(j)i} = e^{\frac{(4n+1)\pi}{2}ji} = -k$$

$$i^k = -j$$

$$k^i = j$$

$$k^j = -i$$

$$j^k = i$$

Possiamo unire tutti i risultati appena ottenuti per potenze di unità immaginarie quaternioniche ad altre unità immaginarie non uguali a sé stesse con l'equazione:

$$e_i^{e_j} = e_i e_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad i \neq j \tag{5.8}$$

Ammettendo anche che i e j siano uguali, possiamo scrivere i risultati di questo esempio nell'unica seguente identità:

$$e_i^{e_j} = \begin{cases} e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}} & \text{se } i = j \\ e_i e_j & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Può essere alternativamente riscritta in una forma più compatta utilizzando il delta di Kronecker:

$$e_i^{e_j} = e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}} \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) e_i e_j \quad (5.9)$$

Corollario 5.1. Siano $i, j \in \{1, 2, 3\}$, e siano e_i, e_j unità immaginarie quaternioniche ($e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$), allora la seguente identità è verificata:

$$\sum_{i \neq j} e_i^{e_j} = i^j + j^k + i^k + k^j + k^i + j^i = 0 \quad (5.10)$$

Esempio 5.4. Lavoriamo sul seguente esempio, leggermente più laborioso:

$$(i + j)^k = e^{\log(i+j)k}$$

Con un calcolo diretto, vediamo che (utilizzando la definizione di logaritmo quaternionico):

$$\log(i + j) = \frac{1}{2} \ln 2 + \left(\frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \right) \frac{(4n+1)\pi}{2}$$

da cui

$$(i + j)^k = e^{\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{(4n+1)\pi i}{2\sqrt{2}} + \frac{(4n+1)\pi j}{2\sqrt{2}} \right)k}$$

Sviluppando la moltiplicazione all'esponente, e utilizzando la definizione di esponenziale quaternionico otteniamo infine:

$$(i + j)^k =$$

$$\cos \left(\sqrt{\frac{\ln^2 2}{4} + \frac{(4n+1)^2 \pi^2}{4}} \right) + \frac{\frac{k \ln 2}{2} - \frac{(4n+1)\pi j}{2\sqrt{2}} + \frac{(4n+1)\pi i}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\ln^2 2}{4} + \frac{(4n+1)^2 \pi^2}{4}}} \sin \left(\sqrt{\frac{\ln^2 2}{4} + \frac{(4n+1)^2 \pi^2}{4}} \right)$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ è un numero intero.

Il valore principale di $(i + j)^k$, invece, vale:

$$(i + j)^k = \cos \left(\sqrt{\frac{\ln^2 2}{4} + \frac{\pi^2}{4}} \right) + \frac{\frac{k \ln 2}{2} - \frac{\pi j}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi i}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{\ln^2 2}{4} + \frac{\pi^2}{4}}} \sin \left(\sqrt{\frac{\ln^2 2}{4} + \frac{\pi^2}{4}} \right)$$

5.4 Seno e coseno quaternionici

Non poteva mancare, in una disquisizione completa su un'estensione delle funzioni elementari al corpo dei quaternioni, una trattazione delle funzioni trigonometriche su \mathbb{H} .

Per estendere le funzioni in questione procederemo analogamente a come fatto per l'esponenziale quaternionico, i.e le definiremo a partire dalle loro serie infinite, nel seguente modo:

$$\sin(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} q^{2n+1} \quad q \in \mathbb{H} \quad (5.11)$$

$$\cos(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} q^{2n} \quad q \in \mathbb{H} \quad (5.12)$$

Per far sì che tale definizione sia sensata, tuttavia, bisogna prima controllare che tali serie siano convergenti $\forall q \in \mathbb{H}$. La strategia non è tanto dissimile da quella testé adottata per la funzione esponenziale: basta notare che, siccome $\forall q \in \mathbb{H}, |q^n| \leq |q|^n$, e le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} |q|^{2n+1} = \sin(|q|) \in \mathbb{R} \quad e \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} |q|^{2n} = \cos(|q|) \in \mathbb{R}$$

convergono (precisamente convergono ai valori reali $\sin(|q|)$ e $\cos(|q|)$ rispettivamente), avremo che (per il criterio del confronto) le serie (5.11) e (5.12) convergono assolutamente $\forall q \in \mathbb{H}$.

A questo punto, il successivo passo da compiere è quello di derivare una forma operativa delle funzioni trigonometriche appena definite, che renda i calcoli più semplici e che possibilmente espliciti la parte scalare e vettoriale della funzione.

Cominciamo scrivendo le serie infinite per $e^{\pm q \operatorname{sgn}(\operatorname{Vec}(q))}$. Per semplificare la notazione, dato un quaternione $q \in \mathbb{H}$, chiamiamo $\vec{v} \in \mathbf{P}$ la sua parte vettoriale e q_0 la sua parte scalare. Utilizzando la definizione di esponenziale quaternionico data nella sezione 1, avremo:

$$e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q \operatorname{sgn}(\vec{v}))^n}{n!}$$

$$e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q \operatorname{sgn}(\vec{v}))^n}{n!}$$

Ricordando che, come visto nel capitolo 2, i quaternioni puri normali sono radici quadrate di -1 , i.e. $\forall \vec{v} \in \{q \in \mathbb{H} ; |q| = 1, Sc(q) = 0\} \cong S_2, \vec{v}^2 = -1$, avremo che:

$$e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!} + \operatorname{sgn}(\vec{v}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(q) + \operatorname{sgn}(\vec{v}) \sin(q)$$

$$e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}}{(2n)!} - \operatorname{sgn}(\vec{v}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(q) - \operatorname{sgn}(\vec{v}) \sin(q)$$

Da cui:

$$\cos(q) = \frac{1}{2}(e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} + e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})})$$

$$\sin(q) = \frac{-\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}(e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} - e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})})$$

Il risultato appena ottenuto ci permette di dare una definizione equivalente a quella data prima di seno e coseno quaternionico che ci risulti più utile e suggestiva:

Definizione 5.5 (Seno e coseno quaternionico). *Chiamiamo seno e coseno quaternionico le seguenti funzioni di una variabile quaternionica:*

$$\sin(q) = \begin{cases} \frac{-\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}(e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} - e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})}) & \text{se } |\vec{v}| \neq 0 \\ \sin(q_0) & \text{se } |\vec{v}| = 0 \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\cos(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} + e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})}) & \text{se } |\vec{v}| \neq 0 \\ \cos(q_0) & \text{se } |\vec{v}| = 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

Proposizione 5.4 (Proprietà delle funzioni seno e coseno quaternioniche). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione, sia t la sua parte reale e $\vec{v} := xi + yj + zk \in \mathbf{P}$ la sua parte vettoriale, allora:*

- $\sin(-q) = -\sin(q)$.
- $\cos(-q) = \cos(q)$.
- $\sin(q) = \sin(t) \cos(\vec{v}) + \cos(t) \sin(\vec{v})$.
- $\cos(q) = \cos(t) \cos(\vec{v}) - \sin(t) \sin(\vec{v})$.
- $\cos^2(q) + \sin^2(q) = 1$.

Dimostrazione. Dimostriamo i fatti ordinatamente:

- Calcoliamo direttamente $\sin(-q)$:

$$\sin(-q) = -\frac{\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}(e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})} - e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})}) = \frac{\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}(e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} - e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})}) = -\sin(q)$$

nel caso in cui q dovesse essere un numero reale, tale identità è già ben nota e dunque ci è necessario dimostrarla solo per un quaternione con parte vettoriale non uguale a 0.

- Analogamente, per $\cos(-q)$:

$$\cos(-q) = \frac{1}{2}(e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})} + e^{-(-q) \operatorname{sgn}(\vec{v})}) = \cos(q)$$

- Per dimostrare questo fatto dobbiamo ricavare prima alcune relazioni preliminari; osserviamo anzitutto che:

$$q \operatorname{sgn}(\vec{v}) = q_0 \operatorname{sgn}(\vec{v}) + \vec{v} \operatorname{sgn}(\vec{v}) = q_0 \operatorname{sgn}(\vec{v}) + \frac{\vec{v}^2}{|\vec{v}|} = q_0 \operatorname{sgn}(\vec{v}) - |\vec{v}|$$

in quanto, per un fatto dimostrato prima, $\vec{v}^2 = -|\vec{v}|^2$. Inoltre:

$$\operatorname{sgn}(q_0 \vec{v}) = \frac{q_0 \operatorname{sgn}(\vec{v})}{|q_0|} = \operatorname{sgn}(q_0) \operatorname{sgn}(\vec{v})$$

Grazie a questi due fatti, e ricordando che, siccome $-|q|$ (un numero reale) e $q_0 \operatorname{sgn}(\vec{v})$ commutano, avremo:

$$e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} = e^{-|\vec{v}|} e^{q_0 \operatorname{sgn}(\vec{v})} = e^{-|\vec{v}|} (\cos(q_0) + \operatorname{sgn}(\vec{v}) \sin(q_0))$$

La dimostrazione dell'identità diventa ora molto semplice; dalla definizione di seno quaternionico abbiamo:

$$\sin(q) = \frac{-\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}(e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} - e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})})$$

sostituendo le relazioni ottenute per $e^{\pm q \operatorname{sgn}(\vec{v})}$:

$$\begin{aligned} \sin(q) &= \frac{-\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}(e^{-|\vec{v}|} \cos(q_0) + e^{-|\vec{v}|} \sin(q_0) \operatorname{sgn}(\vec{v}) - e^{|\vec{v}|} \cos(q_0)) \\ &\quad + e^{|\vec{v}|} \sin(q_0) \operatorname{sgn}(\vec{v})) = \frac{-\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}(\cos(q_0)(e^{-|\vec{v}|} - e^{|\vec{v}|}) + \sin(q_0) \operatorname{sgn}(\vec{v})(e^{-|\vec{v}|} + e^{|\vec{v}|})) \end{aligned}$$

Notiamo che, sostituendo le relazioni ottenute per $e^{\pm q \operatorname{sgn}(\vec{v})}$ nelle espressioni per il seno e per il coseno, e ponendo $q_0 = 0$, otteniamo:

$$\sin(\vec{v}) = -\frac{\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}(e^{-|\vec{v}|} - e^{|\vec{v}|}) \quad (5.15)$$

e

$$\cos(\vec{v}) = \frac{1}{2}(e^{-|\vec{v}|} + e^{|\vec{v}|}) \quad (5.16)$$

distribuendo il termine $-\frac{\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2}$ nell'espressione per $\sin(q)$ otteniamo:

$$\sin(q) = \frac{1}{2} \sin(q_0)(e^{|\vec{v}|} + e^{-|\vec{v}|}) - \frac{\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2} \cos(q_0)(e^{-|\vec{v}|} - e^{|\vec{v}|})$$

che è precisamente pari a, tenendo conto delle equazioni (5.15) e (5.16):

$$\sin(q) = \sin(q_0) \cos(\vec{v}) + \cos(q_0) \sin(\vec{v}) \quad (5.17)$$

- Il procedimento è pressoché il medesimo; partiamo dall'equazione:

$$\cos(q) = \frac{1}{2}(e^{q \operatorname{sgn}(\vec{v})} + e^{-q \operatorname{sgn}(\vec{v})})$$

dopodiché sostituiamo le identità ricavate nel punto precedente per $e^{\pm q \operatorname{sgn}(\vec{v})}$ ottenendo:

$$\begin{aligned} \cos(q) &= \frac{1}{2}(e^{-|\vec{v}|} \cos(q_0) + e^{|\vec{v}|} \operatorname{sgn}(\vec{v}) \sin(q_0) + e^{|\vec{v}|} \cos(q_0)) \\ &- e^{-|\vec{v}|} \operatorname{sgn}(\vec{v}) \sin(q_0)) = \frac{1}{2} \cos(q_0)(e^{|\vec{v}|} + e^{-|\vec{v}|}) + \frac{\operatorname{sgn}(\vec{v})}{2} \sin(q_0)(e^{-|\vec{v}|} - e^{|\vec{v}|}) \\ &\implies \cos(q) = \cos(q_0) \cos(\vec{v}) - \sin(q_0) \sin(\vec{v}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

- Prima di tutto, vediamo che, alla luce delle equazioni (5.16) e (5.15) avremo che:

$$\sin^2(\vec{v}) + \cos^2(\vec{v}) = -\frac{1}{4}(e^{-|\vec{v}|} - e^{|\vec{v}|})^2 + \frac{1}{4}(e^{-|\vec{v}|} + e^{|\vec{v}|})^2$$

espandendo i quadrati otteniamo:

$$\sin^2(\vec{v}) + \cos^2(\vec{v}) = -\frac{1}{4}e^{-2|\vec{v}|} - \frac{1}{4}e^{2|\vec{v}|} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2|\vec{v}|} + \frac{1}{4}e^{2|\vec{v}|} + \frac{1}{2} = 1$$

Questo fatto ci sarà utile a momenti: ricaviamo ora, invece, un'espressione esplicita per $\sin^2(q)$ e $\cos^2(q)$, utilizzando le equazioni (5.17) e (5.18)

$$\begin{aligned}\sin^2(q) &= (\sin(q_0) \cos(\vec{v}) + \cos(q_0) \sin(\vec{v}))^2 = \sin^2(q_0) \cos^2(\vec{v}) \\ &\quad + \sin(q_0) \cos(q_0) \cos(\vec{v}) \sin(\vec{v}) + \cos^2(q_0) \sin^2(\vec{v}) + \cos(q_0) \sin(q_0) \sin(\vec{v}) \cos(\vec{v}) \\ \cos^2(q) &= (\cos(q_0) \cos(\vec{v}) - \sin(q_0) \sin(\vec{v}))^2 = \cos^2(q_0) \cos^2(\vec{v}) + \sin^2(q_0) \sin^2(\vec{v}) \\ &\quad - \sin(q_0) \cos(q_0) \sin(\vec{v}) \cos(\vec{v}) - \cos(q_0) \sin(q_0) \cos(\vec{v}) \sin(\vec{v})\end{aligned}$$

Da cui, con un semplice calcolo, otterremo che:

$$\begin{aligned}\sin^2(q) + \cos^2(q) &= \sin^2(q_0) \cos^2(\vec{v}) + \sin^2(q_0) \sin^2(\vec{v}) + \cos^2(q_0) \sin^2(\vec{v}) + \cos^2(q_0) \cos^2(\vec{v}) \\ &= \sin^2(q_0)(\cos^2(\vec{v}) + \sin^2(\vec{v})) + \cos^2(q_0)(\sin^2(\vec{v}) + \cos^2(\vec{v})) = 1\end{aligned}$$

da cui:

$$\sin^2(q) + \cos^2(q) = 1 \quad \forall q \in \mathbb{H} \tag{5.19}$$

□

Le espressioni ricavate all'inizio della sezione per il seno e il coseno di un quaternione sono di certo più utili delle loro espansioni in serie se abbiamo bisogno di usare le suddette funzioni, e ci hanno anche permesso di dimostrare alcune importanti proprietà del seno e del coseno quaternionario; tuttavia, se il nostro scopo è puramente quello di calcolare il valore delle funzioni in questione in un quaternione $q \in \mathbb{H}$, o, alternativamente, quello di esplicitarne la componente reale e i coefficienti di i, j, k , sarà nella maggior parte dei casi una strategia migliore quella di utilizzare l'espressione (equivalente) che andremo a derivare tra poco.

Prima di tutto, richiamiamo un risultato già dimostrato nella prima sezione, ed enunciamolo in un lemma:

Lemma 5.2. *Sia $\vec{q} \in \mathbb{H}$ un quaternione puro, i.e un quaternione con parte scalare pari a 0, $\text{Sc}(\vec{q}) = 0$. Allora:*

$$\begin{cases} \vec{q}^{2n} = (-1)^n |\vec{q}|^{2n} \\ \vec{q}^{2n+1} = (-1)^n |\vec{q}|^{2n} \vec{q} \end{cases} \tag{5.20}$$

Sia ora, come prima, $q \in \mathbb{H}$ un quaternione con parte scalare $q_0 \in \mathbb{R}$ e parte vettoriale $\vec{v} \in \mathbf{P}$. Alla luce del Lemma 5.2, e adoperando la

definizione di seno quaternionico (in termini della sua espansione in serie infinita):

$$\sin(\vec{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \vec{v}^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{v}|^{2n} \vec{v}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{v}|^{2n+1}}{(2n+1)!} \operatorname{sgn}(\vec{v}) = \sinh(|\vec{v}|) \operatorname{sgn}(\vec{v})$$

analogamente, per la funzione coseno:

$$\cos(\vec{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \vec{v}^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\vec{v}|^{2n}}{(2n)!} = \cosh(|\vec{v}|)$$

Infine, utilizzando le formule di somma derivate prima, avremo che per un quaternione $q := q_0 + \vec{v} \in \mathbb{H}$:

$$\sin(q) = \sin(q_0) \cosh(|\vec{v}|) + \cos(q_0) \sinh(|\vec{v}|) \operatorname{sgn}(\vec{v}) \quad (5.21)$$

$$\cos(q) = \cos(q_0) \cosh(|\vec{v}|) - \sin(q_0) \sinh(|\vec{v}|) \operatorname{sgn}(\vec{v}) \quad (5.22)$$

Proposizione 5.5. *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione, allora:*

- $\overline{\sin(q)} = \sin(\bar{q})$
- $\overline{\cos(q)} = -\cos(\bar{q})$

Dimostrazione. • Per il primo punto:

$$\begin{aligned} \overline{\sin(q)} &= \overline{\sin(q_0) \cosh(|\vec{v}|) + \cos(q_0) \sinh(|\vec{v}|) \operatorname{sgn}(\vec{v})} = \\ &= \overline{\sin(q_0) \cosh(|-\vec{v}|) + \cos(q_0) \sinh(|-\vec{v}|) \operatorname{sgn}(-\vec{v})} = \sin(\bar{q}) \end{aligned}$$

- Analogamente, per il secondo:

$$\begin{aligned} \overline{\cos(q)} &= \overline{\cos(q_0) \cosh(|\vec{v}|) + \sin(q_0) \sinh(|\vec{v}|) \operatorname{sgn}(\vec{v})} = \\ &= \overline{-(-\cos(q_0) \cosh(|-\vec{v}|) + \sin(q_0) \sinh(|-\vec{v}|) \operatorname{sgn}(-\vec{v}))} = -\cos(\bar{q}) \end{aligned}$$

□

Esercizio 5.4. Utilizzando le espressioni (5.21) e (5.22) per la funzione seno e coseno, dimostrare che le 2 commutano fra loro, i.e

$$\sin(q) \cos(q) = \cos(q) \sin(q) \quad \forall q \in \mathbb{H}$$

Esercizio 5.5. Dimostrare che, per un quaternione puro non pari a 0, i.e un quaternione $\vec{q} \in \mathbf{P}$, $\vec{q} \neq 0$, $\text{Sc}(\vec{q}) = 0$, si ha:

$$\sin(\vec{q}) = \text{sgn}(\vec{q}) \sinh(|\vec{q}|)$$

$$\cos(\vec{q}) = \cosh(|\vec{q}|)$$

Esercizio 5.6. Trovare tutti gli zeri delle funzioni seno e coseno quaternionico, $\sin(q)$ e $\cos(q)$, e dimostrare che essi sono i medesimi zeri noti sui reali e sui complessi, i.e:

$$\sin(q) = 0 \iff q = n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(q) = 0 \iff q = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 5.7. Calcolare la funzione seno e la funzione coseno per i seguenti valori quaternionici:

- $q_1 = -\sqrt{2}i + j \quad ; \quad q_2 = i \quad ; \quad q_3 = j \quad ; \quad q_4 = k$
- $q_5 = -3j - 2k \quad ; \quad q_6 = \sqrt{2}(1 - k)$

5.5 Tangente e cotangente

Come abbiamo visto negli esercizi della sezione precedente, la funzione seno e la funzione coseno commutano, da cui segue che potremo definire in maniera non ambigua un analogo quaternionico della tangente e della cotangente.

Partiamo definendo l'analogo quaternionico della funzione secante e cosecante:

Definizione 5.6 (Funzione secante quaternionica). Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; definiamo la funzione $\sec(q)$ come:

$$\sec(q) := (\cos(q))^{-1} = \frac{1}{\cos(q)} \tag{5.23}$$

Definizione 5.7 (Funzione cosecante quaternionica). Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; definiamo la funzione $\csc(q)$ come:

$$\csc(q) := (\sin(q))^{-1} = \frac{1}{\sin(q)} \tag{5.24}$$

Definiamo adesso le funzioni tangente e cotangente:

Definizione 5.8 (Funzione tangente quaternionica). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; definiamo la funzione $\tan(q)$ come:*

$$\tan(q) := \sin(q)(\cos(q))^{-1} = (\cos(q))^{-1} \sin(q) \quad (5.25)$$

Definizione 5.9 (Funzione cotangente quaternionica). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; definiamo la funzione $\cot(q)$ come:*

$$\cot(q) := \cos(q)(\sin(q))^{-1} = (\sin(q))^{-1} \cos(q) \quad (5.26)$$

5.6 Funzioni iperboliche

Possiamo estendere ai quaternioni anche le funzioni iperboliche, \sinh e \cosh , definendole a partire dalle famose relazioni che le legano alla funzione esponenziale ricavate nel caso reale:

Definizione 5.10 (Seno iperbolico quaternionico). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; chiamiamo seno iperbolico la seguente funzione:*

$$\sinh(q) := \frac{e^q - e^{-q}}{2} \quad (5.27)$$

Definizione 5.11 (Coseno iperbolico quaternionico). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; chiamiamo coseno iperbolico la seguente funzione:*

$$\cosh(q) := \frac{e^q + e^{-q}}{2} \quad (5.28)$$

Si può, altresì, definire tali funzioni partendo dalle loro espansioni in serie ben note al lettore:

$$\sinh(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \cosh(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n}}{(2n)!}$$

È facile verificare, tuttavia, che le due definizioni sono equivalenti; lasciamo la verifica del semplice fatto al lettore, che può esser semplificata ancora di più tenendo in mente che essa è un corollario immediato della concordanza dell'esponenziale quaternionico e^q con la sua serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!}$ per i quaternioni.

Proposizione 5.6 (Proprietà del seno e del coseno iperbolico). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione, allora sono valide le seguenti identità:*

- $\sinh(-q) = -\sinh(q)$
- $\cosh(-q) = \cosh(q)$
- $\cosh^2(q) - \sinh^2(q) = 1$

Dimostrazione. La dimostrazione dei primi due fatti è elementare, e il risultato è ottenibile tramite una sostituzione diretta di $-q$ nelle espressioni per $\sinh(q)$ e $\cosh(q)$.

Per il secondo fatto, invece, basta calcolare esplicitamente $\cosh^2(q)$ e $\sinh^2(q)$, rispettivamente pari a:

$$\cosh^2(q) = \frac{e^{2q} + 2 + e^{-2q}}{2}$$

$$\sinh^2(q) = \frac{e^{2q} - 2 + e^{-2q}}{2}$$

da cui:

$$\cosh^2(q) - \sinh^2(q) = 1 \quad (5.29)$$

□

Esercizio 5.8. Calcolare le funzioni $\sinh(q)$ e $\cosh(q)$ nei seguenti valori quaternionici:

- $q_1 = i \quad ; \quad q_2 = j \quad ; \quad q_3 = k \quad ; \quad q_4 = -i + \sqrt{2}j - \pi k$
- $q_5 = \pi - i$

Esercizio 5.9. Dimostrare che, ispirati da teoremi simili dimostrati nelle sezioni precedenti, le formule di somma e di sottrazione per il seno iperbolico e il coseno iperbolico quaternionico valgono solo per 2 quaternioni che commutano fra loro, i.e:

$$\cosh(q_1 + q_2) = \cosh(q_1)\cosh(q_2) + \sinh(q_1)\sinh(q_2) \iff q_1q_2 = q_2q_1$$

$$\sinh(q_1 + q_2) = \sinh(q_1)\cosh(q_2) + \sinh(q_2)\cosh(q_1) \iff q_1q_2 = q_2q_1$$

Deriviamo adesso una nuova espressione per le due funzioni appena introdotte, che le leggi alle funzioni trigonometriche classiche e che ci permetta di effettuare calcoli e dimostrare fatti con le suddette funzioni in modo più agevole.

Vediamo anzitutto che

$$e^{\pm\vec{v}} = \cos|\vec{v}| \pm \operatorname{sgn}(\vec{v})\sin|\vec{v}|$$

dove qui \vec{v} è un quaternione puro. Utilizzando le definizioni di seno e coseno iperbolico, infine, otteniamo le seguenti espressioni per il seno/coseno iperbolico di un quaternione puro:

$$\cosh(\vec{v}) = \cos|\vec{v}|$$

$$\sinh(\vec{v}) = \operatorname{sgn}(\vec{v})\sin|\vec{v}|$$

Infine, combinando questo risultato con le formule dell'esercizio 5.9, otteniamo che per un generale quaternione $q \in \mathbb{H}$, con parte reale q_0 e parte vettoriale \vec{v} , i.e $q = q_0 + \vec{v}$ avremo:

$$\sinh(q) = \sinh(q_0)\cos|\vec{v}| + \cosh(q_0)\operatorname{sgn}(\vec{v})\sin|\vec{v}| \quad (5.30)$$

$$\cosh(q) = \cosh(q_0)\cos|\vec{v}| + \sinh(q_0)\operatorname{sgn}(\vec{v})\sin|\vec{v}| \quad (5.31)$$

Enunciamo ora altre proprietà delle funzioni iperboliche che ci saranno utili nel resto di questo capitolo:

Proposizione 5.7 (Ulteriori proprietà del seno e del coseno iperbolico).
Sia $q \in \mathbb{H}$, allora le seguenti identità sono valide:

- $\overline{\cosh(q)} = \cosh(\bar{q})$.

- $\overline{\sinh(q)} = \sinh(\bar{q})$.

Dimostrazione. Per il primo punto:

- $\overline{\cosh(q)} = \overline{\frac{e^q + e^{-q}}{2}} = \frac{\overline{e^q} + \overline{e^{-q}}}{2} = \cosh(\bar{q})$.

- Analogamente, per il secondo punto:

$$\overline{\sinh(q)} = \overline{\frac{e^q - e^{-q}}{2}} = \sinh(\bar{q})$$

□

È possibile, infine, come per le funzioni trigonometriche, definire in modo disambiguo un analogo quaternionico della tangente iperbolica e della cotangente iperbolica, \tanh e \coth . Prima, però, definiamo un analogo quaternionico della secante iperbolica e della cosecante iperbolica:

Definizione 5.12 (Secante iperbolica). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; chiamiamo la funzione $\operatorname{sech}(q)$ secante iperbolica, definita come:*

$$\operatorname{sech}(q) := (\cosh(q))^{-1} = \frac{1}{\cosh(q)} \quad (5.32)$$

Definizione 5.13 (Cosecante iperbolica). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; chiamiamo la funzione $\operatorname{csch}(q)$ cosecante iperbolica, definita come:*

$$\operatorname{csch}(q) := (\sinh(q))^{-1} = \frac{1}{\sinh(q)} \quad (5.33)$$

Per l'identità sull'inverso moltiplicativo di un quaternione, ricavata nel capitolo 2, possiamo scrivere le due funzioni appena introdotte anche come:

$$\operatorname{sech}(q) = \frac{\cosh(\bar{q})}{|\cosh(q)|^2}$$

$$\operatorname{csch}(q) = \frac{\sinh(\bar{q})}{|\sinh(q)|^2}$$

Per poter definire in maniera disambigua un concetto di tangente iperbolica quaternionica, vorremmo idealmente che queste due funzioni commutassero con il seno e con il coseno iperbolico quaternionico rispettivamente, i.e.:

$$\operatorname{sech}(q) \sinh(q) = \sinh(q) \operatorname{sech}(q) \quad e \quad \operatorname{csch}(q) \cosh(q) = \cosh(q) \operatorname{csch}(q)$$

Questo fatto segue come corollario del seguente lemma:

Lemma 5.3. *La funzione seno iperbolico e la funzione coseno iperbolico commutano fra loro, i.e.:*

$$\sinh(q) \cosh(q) = \cosh(q) \sinh(q)$$

Dimostrazione. Basta osservare che $(e^q - e^{-q})(e^q + e^{-q}) = e^{2q} - e^{-2q} = (e^q + e^{-q})(e^q - e^{-q})$ da cui:

$$\sinh(q) \cosh(q) = \cosh(q) \sinh(q) = \frac{\sinh(2q)}{2}$$

□

A questo punto siamo pronti a dare una definizione di tangente iperbolica quaternionica e cotangente iperbolica quaternionica.

Definizione 5.14 (Tangente iperbolica). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; chiamiamo tangente iperbolica la funzione $\tanh(q)$, definita come:*

$$\tanh(q) := \sinh(q) \operatorname{sech}(q) = \operatorname{sech}(q) \sinh(q) = \frac{\sinh(q)}{\cosh(q)} \quad (5.34)$$

Definizione 5.15 (Cotangente iperbolica). *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione; chiamiamo cotangente iperbolica la funzione $\coth(q)$, definita come:*

$$\coth(q) := \cosh(q) \operatorname{csch}(q) = \operatorname{csch}(q) \sinh(q) = \frac{\cosh(q)}{\sinh(q)} \quad (5.35)$$

Esercizio 5.10. *Calcolare la funzione tangente iperbolica e cotangente iperbolica nei seguenti valori quaternionici:*

- $q_1 = i \quad ; \quad q_2 = j \quad ; \quad q_3 = k \quad ; \quad q_4 = -\ln 2 + \sqrt{3}i - k$

Esercizio 5.11. *Dimostrare le seguenti identità iperboliche:*

- $\tanh^2(q) = 1 - \operatorname{sech}^2(q)$
- $\coth^2(q) = 1 + \operatorname{csch}^2(q)$
- $\tanh(-q) = -\tanh(q)$
- $\coth(-q) = -\coth(q)$
- $\operatorname{sech}(-q) = \operatorname{sech}(q)$
- $\operatorname{csch}(-q) = -\operatorname{csch}(q)$

5.7 Visualizzare funzioni quaternioniche

Un grande problema dell’analisi quaternionica è il seguente: la 4-dimensionalità dei quaternioni rende molto difficile la visualizzazione di funzioni di una variabile quaternionica $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Ci troviamo infatti dinanzi a funzioni che mappano quaterne di reali in quaterne di reali, i.e funzioni che per essere visualizzate agevolmente necessiterebbero di ben 8 dimensioni. Non è il caso tuttavia di darsi per vinti: è possibile infatti “aggirare” questo problema in vari modi, noi in questa sezione ne proporremo uno. Come abbiamo già visto nelle parti precedenti della monografia, potremo scrivere una funzione di una variabile quaternionica $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ esplicitando le sue componenti nel seguente modo:

$$f(q) = f_1(q) + f_2(q)i + f_3(q)j + f_4(q)k$$

in cui f_i è una funzione dai quaternioni ai reali, $f_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, 2, 3, 4$.

Decidendo di visualizzare le 4 funzioni componenti di una funzione quaternionica anziché la funzione stessa già semplifica il problema notevolmente: ci troviamo ora a dover visualizzare funzioni che mappano quaterne di numeri reali in numeri reali, e che dunque necessitano solo di 5 dimensioni e non più di 8. Persiste tuttavia la nostra incapacità di poter visualizzare direttamente 5 dimensioni, vista la nostra innata tridimensionalità.

Il problema è tuttavia solo apparente, e può essere aggirato; per visualizzare le restanti due dimensioni utilizzeremo il tempo, i.e fisseremo due parametri della funzione $f_i(t, x, y, z)$ e li lasceremo evolvere nel tempo, visualizzando così la nostra funzione tramite tre coordinate spaziali in senso stretto e 2 coordinate “temporali spazializzate”.

Il processo è facilmente realizzabile con le librerie "matplotlib" e "numpy" di Python, utilizzando la classe PillowWriter di matplotlib. Riportiamo qui sotto alcuni "snapshot" temporali delle evoluzioni dei grafici di alcune funzioni quaternioniche. Per visualizzare tutta l'evoluzione dei grafici, lascerò dei link nella sezione delle note a dei video da me realizzati con matplotlib [Nota 5.1]. Cominciamo visualizzando la funzione esponenziale $\exp(q) = f_1(q) + f_2(q)i + f_3(q)j + f_4(q)k$; riporteremo i grafici delle sue 4 funzioni componenti visualizzati in degli "snapshot".

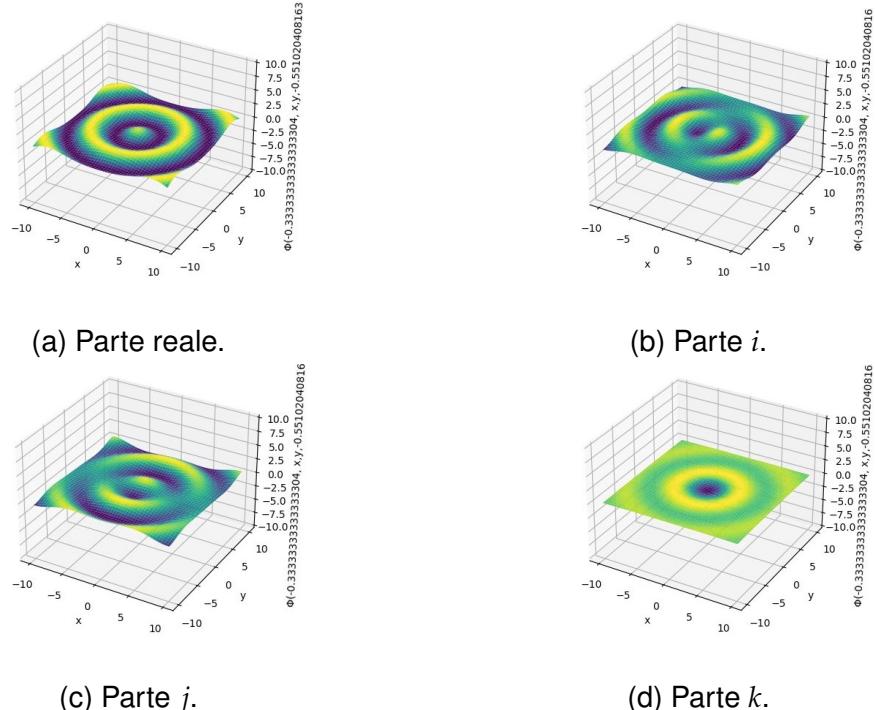


Figura 5.1: Funzione esponenziale quaternionica $\exp(q)$ visualizzata nell'istante $(-0.33, x, y, -0.551)$. Sull'asse x è riportata la x , sull'asse y è riportata la y e sull'asse z è riportato il valore di $f_i(t, x, y, z)$.

Qui per "parte reale" intendiamo $f_1(q)$, per "parte i " $f_2(q)$, per "parte j " $f_3(q)$ e per "parte k " $f_4(q)$, i.e le funzioni coefficienti delle rispettive unità immaginarie.

La sotto-regione del dominio scelta per la visualizzazione è la regione quaternionica iper-cuboidale $[-3, 3] \times [-10, 10] \times [-10, 10] \times [-3, 3]$.

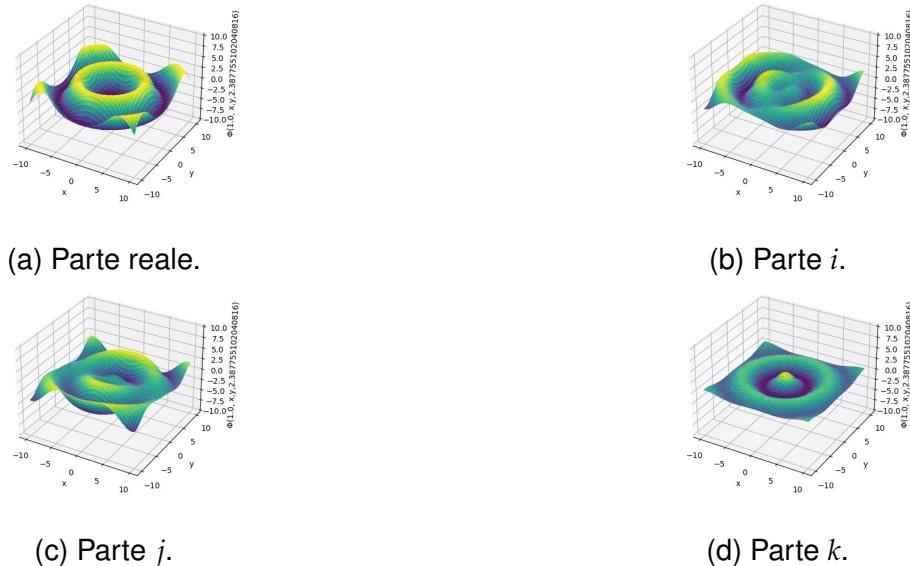


Figura 5.2: Funzione esponenziale quaternionica $\exp(q)$ visualizzata nell'istante $(1, x, y, 2.38)$.

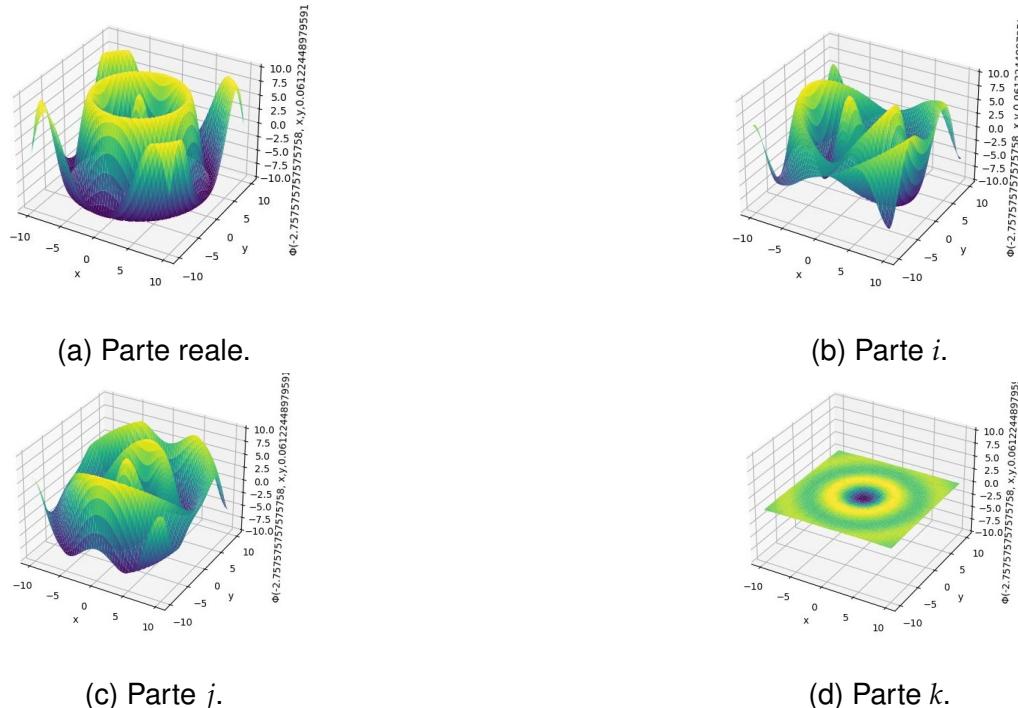


Figura 5.3: Funzione coseno iperbolico quaternionico $\cosh(q)$ visualizzata nell'istante $(-2.7575, x, y, 0.06122)$.

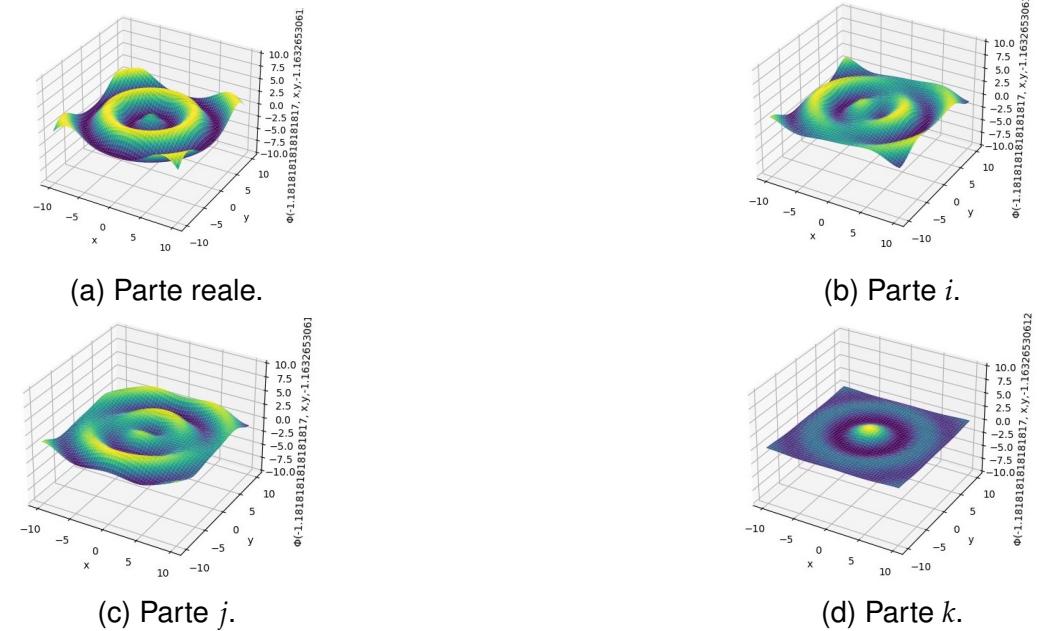


Figura 5.4: Funzione coseno iperbolico quaternionico $\cosh(q)$ visualizzata nell'istante $(-1.181818, x, y, -1.163265)$.

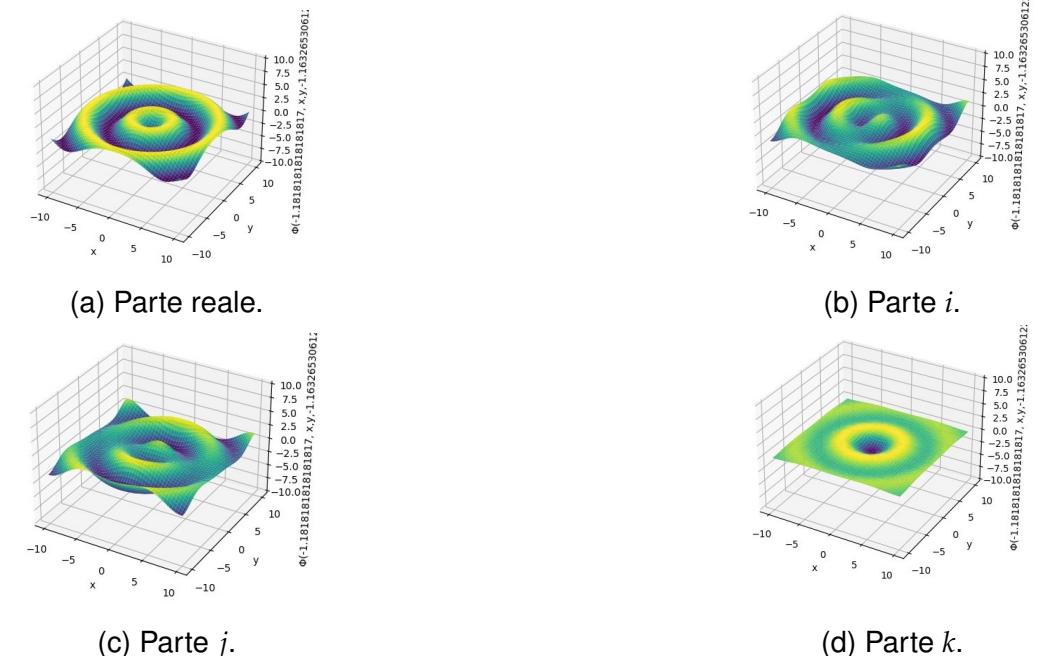


Figura 5.5: Funzione seno iperbolico quaternionico $\sinh(q)$ visualizzata nell'istante $(-1.181818, x, y, -1.163265)$.

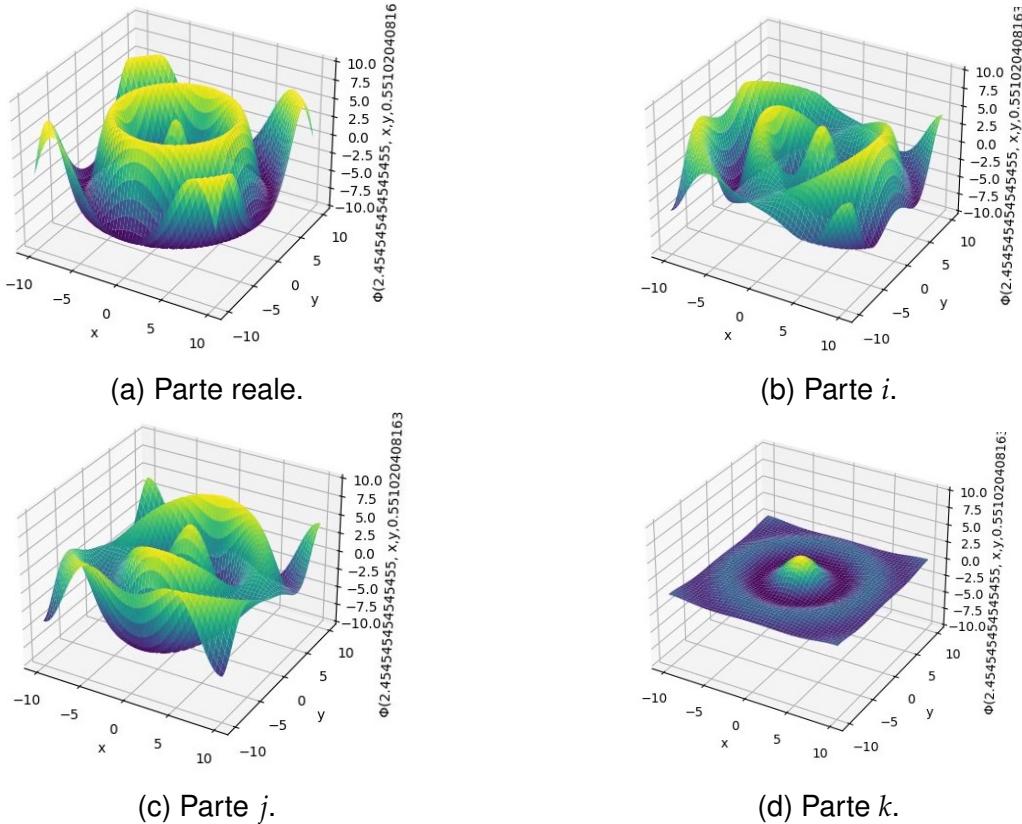
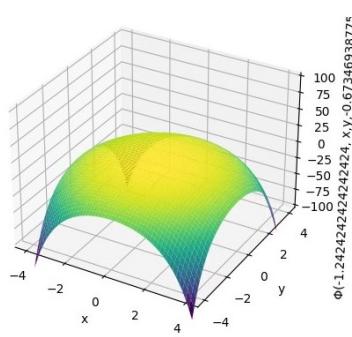


Figura 5.6: Funzione seno iperbolico quaternionico $\sinh(q)$ visualizzata nell'istante $(2.4545, x, y, 0.5510)$.

Anche per la visualizzazione delle funzioni iperboliche quaternioniche abbiamo tenuto in considerazione l'iper-dominio $[-3, 3] \times [-10, 10] \times [-10, 10] \times [-3, 3]$.

Per la visualizzazione della funzione seno $\sin(q)$ opteremo per un cambiamento della regione ipercuboidale di visualizzazione per rendere tale rappresentazione grafica più suggestiva: in particolare restringeremo i valori possibili di x e y all'insieme $[-4, 4]$ al posto di $[-10, 10]$. Inoltre, raffigureremo graficamente sull'asse z i valori delle funzioni componenti in un range che va da -100 a 100 . I range su cui lasciamo variare t e z rimarranno invece i medesimi.

Come sempre, per la visualizzazione "in movimento" di tali grafici (i.e la visualizzazione completa) rimando il lettore al link presente nelle note, precisamente il link della [Nota 5.1].



(a) Parte reale.

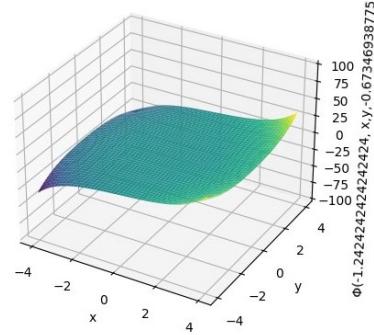
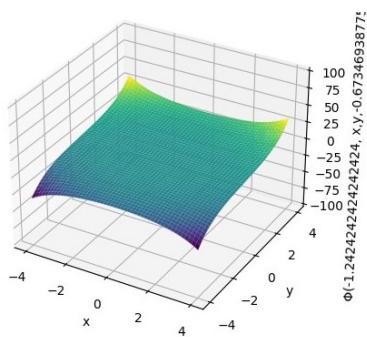
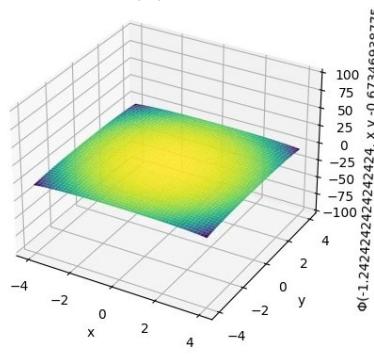
(b) Parte i .(c) Parte j .(d) Parte k .

Figura 5.7: Funzione seno quaternionico $\sin(q)$ visualizzata nell'istante $(-1.2424, x, y, -0.6734)$.

Capitolo 6

Calcolo differenziale e integrale su \mathbb{H}

Una volta dimostrati alcuni risultati fondamentali sulla struttura algebrica e topologica dei quaternioni, rimane aperta un'importante faccenda: come possiamo sviluppare una teoria delle funzioni regolari a una variabile quaternionica e calcolare derivate di funzioni quaternioniche, analogamente al caso reale e al caso complesso?

La risposta è più difficile del previsto; come già accennato nell'introduzione del testo, la maggior parte dei problemi sono causati dalla non commutatività della struttura, e dunque un approccio "standard" analogo al caso reale e complesso non è possibile. Nelle prime sezioni vedremo, provando a sviluppare una nozione di differenziabilità in maniera analoga al caso reale e al caso complesso cosa sarà ad "andare storto".

Detto questo, come anticipato anche nell'introduzione, vari matematici sono riusciti ad aggirare questo serio problema dando delle definizioni alternative di regolarità, e in questo capitolo vedremo uno dei vari approcci che sono stati utilizzati (vedremo degli approcci alternativi nel capitolo successivo).

6.1 Alcuni enti preliminari

Prima di partire con una disquisizione sul calcolo differenziale per funzioni di una variabile quaternionica, facciamo qui alcuni appunti circa delle convenzioni che saranno in vigore per la durata di questo capitolo.

Ritrovandoci a dover utilizzare qui alcuni strumenti della geometria differenziale su varietà lisce, specifichiamo anzitutto rispetto a quale struttura differenziabile stiamo considerando la 4-varietà dei quaternioni.

Nel capitolo 4 abbiamo definito la topologia canonica \mathcal{U} su \mathbb{H} , indotta dalla sua metrica $\delta(q_1, q_2) = |q_1 - q_2|$, ottenendo lo spazio topologico $(\mathbb{H}, \mathcal{U})$. Come corollario immediato di quanto detto nel capitolo 4, concludiamo che tale spazio è di Hausdorff e rispetta il secondo assioma di denumerabilità. Ricordando inoltre l'omeomorfismo del teorema 4.2, notiamo che sarà possibile dotare $(\mathbb{H}, \mathcal{U})$ di un atlante liscio composto da una sola carta, $\mathcal{A} = \{(\varphi, \mathbb{H})\}$ (dove $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$ è l'omeomorfismo in questione) ottenendo dunque una varietà reale 4-dimensionale.

Osserviamo che tale struttura differenziabile fornisce \mathbb{H} di coordinate globali. Da ora in poi, a meno di previa specificazione, considereremo i quaternioni come varietà liscia $(\mathbb{H}, \mathcal{U}, \mathcal{A})$ rispetto a questa struttura differenziabile.

Definiamo ora un'applicazione \mathbb{R} -lineare, $\Gamma : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{H}$, da \mathbb{H}^* , lo spazio duale dei quaternioni, in \mathbb{H} come:

$$\langle \Gamma(\alpha), q \rangle = \alpha(q) \quad (6.1)$$

con $\alpha \in \mathbb{H}^*$ e $q = t + xi + yj + zk \in \mathbb{H}$, e dove \langle , \rangle denota il prodotto scalare quaternionico introdotto nel capitolo 2. Manipolando l'espressione (6.1) sfruttando la linearità dei funzionali di \mathbb{H}^* , otteniamo:

$$\Gamma(\alpha)_t t + \Gamma(\alpha)_x x + \Gamma(\alpha)_y y + \Gamma(\alpha)_z z = t\alpha(1) + x\alpha(i) + y\alpha(j) + z\alpha(k) \quad (6.2)$$

da cui:

$$\Gamma(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k)$$

Possiamo estendere quest'applicazione ad applicazioni \mathbb{R} -lineari da \mathbb{H} in \mathbb{H} , $\text{hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H})$, tuttavia facendo attenzione alla non commutatività dei quaternioni. Tale insieme di applicazioni, infatti, formerà un \mathbb{H} -modulo, che chiameremo F , coperto linearmente da funzionali lineari $\lambda \in \mathbb{H}^*$.

Definiamo l'estensione \mathbb{H} -destro lineare, Γ_r , di Γ come:

$$\Gamma_r(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k) \quad (6.3)$$

e la sua estensione \mathbb{H} -sinistro lineare Γ_l :

$$\Gamma_l(\alpha) = \alpha(1) + \alpha(i)i + \alpha(j)j + \alpha(k)k \quad (6.4)$$

dove qui α è un'applicazione \mathbb{R} -lineare da \mathbb{H} in \mathbb{H} , $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) = F$.

6.2 Forme differenziali quaternioniche

Definiamo ora le forme differenziali sulla struttura di varietà canonica definita su \mathbb{H} che utilizzeremo nel nostro sviluppo di un calcolo differenziale

su \mathbb{H} .

Sia $p \in \mathbb{H}$, allora sappiamo per un risultato ben noto di geometria differenziale che lo spazio tangente di \mathbb{H} in p , $T_p\mathbb{H}$ è di dimensione 4, così come il suo spazio duale, lo spazio cotangente $T_p^*\mathbb{H}$. Costruendo un isomorfismo, possiamo trattare perciò gli spazi tangenti in punti dell'iperspazio quaternionico come punti in \mathbb{H} . Definiamo nella maniera classica il fibrato tangente e il fibrato cotangente di \mathbb{H} :

$$T\mathbb{H} = \coprod_{p \in \mathbb{H}} T_p\mathbb{H} \quad (6.5)$$

$$T^*\mathbb{H} = \coprod_{p \in \mathbb{H}} T_p^*\mathbb{H} \quad (6.6)$$

e li rendiamo nella maniera "naturale" delle 8-varietà reali. Fatto ciò, possiamo parlare di campi vettoriali e n-forme quaternioniche, adattando banalmente al caso specifico dei quaternioni le nozioni di campo vettoriale e n-forme differenziali di varietà che abbiamo sviluppato nella parte finale dell'introduzione. Definiamo inoltre le operazioni di differenziazione esterna e prodotto esterno nel modo usuale.

Finita questa breve digressione, siamo pronti ad introdurre alcuni oggetti importanti per la nostra trattazione.

Il differenziale di una funzione quaternionica f sarà indicato con la seguente 1-forma:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

o, in maniera più compatta, utilizzando la convenzione di Einstein:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Di particolare importanza è il differenziale della funzione identità, la 1-forma:

$$dq = dt + idx + jdy + kdz = dt + e_idx_i$$

Lo sarà anche il prodotto esterno di dq con sé stessa:

$$dq \wedge dq = 2(idy \wedge dz + jdz \wedge dx + kdx \wedge dy)$$

Sui quaternioni, inoltre, essendo una varietà orientata, avremo una 4-forma di volume ovunque non nulla, che chiameremo v :

$$v = dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

Definiamo infine la 3-forma Dq nel seguente modo:

$$Dq = dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy \quad (6.7)$$

Potremo riscrivere la suddetta in un modo più compatto utilizzando la convenzione di Einstein e il simbolo di Levi-Civita come:

$$Dq = dx \wedge dy \wedge dz - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} e_i dt \wedge dx_j \wedge dx_k$$

Osserviamo che per la definizione appena data sarà valida la seguente uguaglianza $\forall h_1, h_2, h_3, h_4 \in \mathbb{H}$:

$$\langle h_1, Dq(h_2, h_3, h_4) \rangle = v(h_1, h_2, h_3, h_4)$$

dove qui \langle , \rangle indica il prodotto scalare di quaternioni introdotto nel capitolo 2. Potremo facilmente verificare tale identità notando che, partendo dal lato destro dell'equazione:

$$v(h_1, h_2, h_3, h_4) = \begin{vmatrix} t_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ t_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ t_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ t_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

Tramite un'espansione cofattoriale (meglio noto come sviluppo di Laplace), otterremo:

$$\begin{vmatrix} t_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ t_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ t_3 & x_3 & y_3 & z_3 \\ t_4 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = t_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} - x_1 \begin{vmatrix} t_2 & y_2 & z_2 \\ t_3 & y_3 & z_3 \\ t_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} t_2 & x_2 & z_2 \\ t_3 & x_3 & z_3 \\ t_4 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} - z_1 \begin{vmatrix} t_2 & x_2 & y_2 \\ t_3 & x_3 & y_3 \\ t_4 & x_4 & y_4 \end{vmatrix}$$

Ma osservando che:

$$\left\{ \begin{array}{l} dx \wedge dy \wedge dz = Dq_t(h_2, h_3, h_4) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ -dt \wedge dy \wedge dz = Dq_x(h_2, h_3, h_4) = - \begin{vmatrix} t_2 & y_2 & z_2 \\ t_3 & y_3 & z_3 \\ t_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ -dt \wedge dz \wedge dx = dt \wedge dx \wedge dz = Dq_y(h_2, h_3, h_4) = \begin{vmatrix} t_2 & x_2 & z_2 \\ t_3 & x_3 & z_3 \\ t_4 & x_4 & z_4 \end{vmatrix} \\ -dt \wedge dx \wedge dy = Dq_z(h_2, h_3, h_4) = - \begin{vmatrix} t_2 & x_2 & y_2 \\ t_3 & x_3 & y_3 \\ t_4 & x_4 & y_4 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

avremo che l'espansione cofattoriale dell'espressione per $v(h_1, h_2, h_3, h_4)$ sarà semplicemente il prodotto scalare di h_1 per $Dq(h_2, h_3, h_4)$, i.e:

$$\langle h_1, Dq(h_2, h_3, h_4) \rangle = v(h_1, h_2, h_3, h_4)$$

Geometricamente, dati 3 quaternioni q_1, q_2, q_3 , la 3-forma appena introdotta calcolata in questa terna, $Dq(q_1, q_2, q_3)$ sarà un quaternione perpendicolare a q_1, q_2 e q_3 , con norma pari al volume del parallelepipedo individuato dai 3 quaternioni q_1, q_2 e q_3 .

Esercizio 6.1. Determinare, tramite un calcolo diretto, il valore di:

1. $Dq(i, j, k)$
2. $Dq(1, i, j)$
3. $Dq(1, j, k)$
4. $Dq(1, i, k)$
5. $Dq(1 - \sqrt{2}i + 5j - k, i - j + k, \sqrt{5} + \sqrt{3}i - j - k)$

Esercizio 6.2. Dimostrare, motivati dal precedente esercizio, che:

$$Dq(1, e_i, e_j) = \frac{1}{2}(e_j e_i - e_i e_j)$$

Lemma 6.1. Siano $q, p \in \mathbb{H}$ due quaternioni, allora:

$$Dq(1, q, p) = \frac{1}{2}(pq - qp)$$

Dimostrazione. Scriviamo q come $q = t_1 + x_1i + y_1j + z_1k = t_1 + x_{1i}e_i$ e p come $p = t_2 + x_2i + y_2j + z_2k = t_2 + x_{2i}e_i$. Sfruttando la \mathbb{R} -trilinearità di Dq :

$$\begin{aligned} Dq(1, q, p) &= Dq(1, t_1 + x_{1i}e_i, t_2 + x_{2i}e_j) = Dq(1, t_1, t_2 + x_{2j}e_j) + Dq(1, x_{1i}e_i, t_2 + x_{2j}e_j) \\ &= Dq(1, t_1, t_2) + Dq(1, t_1, x_{2j}e_j) + Dq(1, x_{1i}e_i, t_2) + Dq(1, x_{1i}e_i, x_{2j}e_j) \\ &= t_1 t_2 Dq(1, 1, 1) + t_1 x_{2j} Dq(1, 1, e_j) + x_{1i} t_2 Dq(1, e_i, 1) + x_{1i} x_{2j} Dq(1, e_i, e_j) \end{aligned}$$

Ma sappiamo che $Dq(1, e_i, e_j) = \frac{1}{2}(e_j e_i - e_i e_j)$, $Dq(1, 1, 1) = 0$, $Dq(1, 1, e_j) = Dq(1, e_j, 1) = 0$ e quindi l'espressione diventa semplicemente:

$$Dq(1, q, p) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{x_{1i} x_{2j}}{2} (e_j e_i - e_i e_j) = \sum_{i \neq j} \sum_{i,j=1,2,3} \frac{x_{1i} x_{2j}}{2} (e_j e_i - e_i e_j)$$

Per semplicità di notazione poniamo $x_{11} = x_1, x_{12} = y_1, x_{13} = z_1, x_{21} = x_2, x_{22} = y_2, x_{23} = z_2$.

Espandendo la somma sulla destra:

$$\frac{x_1y_2}{2}(ji-ij) + \frac{x_1z_2}{2}(ki-ik) + \frac{y_1z_2}{2}(kj-jk) + \frac{y_1x_2}{2}(ij-ji) + \frac{z_1x_2}{2}(ik-ki) + \frac{z_1y_2}{2}(jk-kj)$$

Semplificando otteniamo:

$$(z_1y_2 - y_1z_2)i + (x_1z_2 - z_1x_2)j + (y_1x_2 - x_1y_2)k = Dq(1, p, q)$$

Quest'espressione non dovrebbe risultare nuova al lettore; non è altro che la metà del commutatore di p e q , $[p, q] = pq - qp = (2z_1y_2 - 2y_1z_2)i + (2x_1z_2 - 2z_1x_2)j + (2y_1x_2 - 2x_1y_2)k$, formula ricavata negli esercizi del secondo capitolo. Con questa osservazione giungiamo alla dimostrazione del fatto desiderato, cioè:

$$Dq(1, q, p) = \frac{1}{2}[p, q] = \frac{1}{2}(pq - qp)$$

□

Dimostriamo ora una proposizione che ci permetterà di calcolare il valore della nostra 3-forma Dq in modo alternativo.

Proposizione 6.1. *Siano q_1, q_2, q_3 3 quaternioni, allora:*

$$Dq(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{2}(q_3q_1^*q_2 - q_2q_1^*q_3)$$

Dimostrazione. Sia $u \in S^3 \subset \mathbb{H}$ un versore (quaternione con norma 1), allora l'applicazione $l : q \rightarrow uq$ è un applicazione lineare ortogonale con determinante pari a 1, e dunque avremo:

$$Dq(uq_1, uq_2, uq_3) = uDq(q_1, q_2, q_3)$$

Più specificamente, selezioniamo u essere $u = |q_1|q_1^{-1}$, allora:

$$Dq(|q_1|, |q_1|q_1^{-1}q_2, |q_1|q_1^{-1}q_3) = |q_1|q_1^{-1}Dq(q_1, q_2, q_3)$$

Da cui segue che, usando la \mathbb{R} -trilinearità della forma Dq :

$$Dq(q_1, q_2, q_3) = \frac{|q_1|^3}{|q_1|}q_1Dq(1, q_1^{-1}q_2, q_1^{-1}q_3) = |q_1|^2q_1Dq(1, q_1^{-1}q_2, q_1^{-1}q_3)$$

Ora, per il lemma precedente, sappiamo che $\forall q, p \in \mathbb{H}, Dq(1, q, p) = \frac{1}{2}(pq - qp)$. Essendo $Dq(1, q_1^{-1}q_2, q_1^{-1}q_3)$ precisamente un'espressione di questa forma, riscriviamo l'equazione di sopra come:

$$Dq(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{2}|q_1|^2q_1(q_1^{-1}q_3q_1^{-1}q_2 - q_1^{-1}q_2q_1^{-1}q_3) = \frac{1}{2}(q_3q_1^*q_2 - q_2q_1^*q_3)$$

□

Proposizione 6.2. Siano $q_1, q_2, q_3, a, b \in \mathbb{H}$ 5 quaternioni, allora:

$$Dq(aq_1b, aq_2b, aq_3b) = |a|^2|b|^2aDq(q_1, q_2, q_3)b$$

Dimostrazione. Siano $u, v \in S^3 \subset \mathbb{H}$ due quaternioni normali (versori). Osserviamo che l'applicazione lineare $q \rightarrow uqv$ è una rotazione, e dunque un'applicazione ortogonale con determinante 1. Ergo:

$$Dq(uq_1v, uq_2v, uq_3v) = uDq(q_1, q_2, q_3)v$$

Scegliendo $u = a|a|^{-1}$ e $v = b|b|^{-1}$ otteniamo:

$$Dq(a|a|^{-1}q_1b|b|^{-1}, a|a|^{-1}q_2b|b|^{-1}, a|a|^{-1}q_3b|b|^{-1}) = |a|^{-1}|b|^{-1}aDq(q_1, q_2, q_3)b$$

Utilizzando la \mathbb{R} -trilinearità di Dq alla parte sinistra dell'uguaglianza, otteniamo:

$$|a|^{-3}|b|^{-3}Dq(aq_1b, aq_2b, aq_3b) = |a|^{-1}|b|^{-1}aDq(q_1, q_2, q_3)b$$

Da cui segue l'asserto:

$$Dq(aq_1b, aq_2b, aq_3b) = |a|^2|b|^2aDq(q_1, q_2, q_3)b$$

□

6.3 Operatori differenziali quaternionici

Introduciamo ora alcuni importanti operatori quaternionici che utilizzeremo successivamente nella nostra trattazione. Notiamo anzitutto che il differenziale di una funzione quaternionica $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è un'applicazione \mathbb{R} -lineare da \mathbb{H} in \mathbb{H} , i.e $df \in \text{hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) = F$. Riportiamo alla mente le applicazioni Γ_r e Γ_l , rispettivamente destro e sinistro lineare da F in \mathbb{H} :

$$\Gamma_r(\alpha) = \alpha(1) + i\alpha(i) + j\alpha(j) + k\alpha(k)$$

$$\Gamma_l(\alpha) = \alpha(1) + \alpha(i)i + \alpha(j)j + \alpha(k)k$$

$$\Gamma_r : F = \text{hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{H} ; \quad \Gamma_l : F = \text{hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}, \mathbb{H}) \rightarrow \mathbb{H}$$

Calcoliamo ora l'immagine sotto Γ_r e Γ_l del differenziale di una funzione quaternionica:

$$\Gamma_r(df) = \frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\Gamma_l(df) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

Alla luce di questi sviluppi, definiamo ora i seguenti nuovi enti:

Definizione 6.1. Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione quaternionica (differenziabile nel senso classico della geometria differenziale), allora definiamo i seguenti operatori agenti su quest'ultima con i seguenti simboli:

$$\begin{cases} \bar{\partial}_l f = \frac{1}{2} \Gamma_r(df) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ \partial_l f = \frac{1}{2} \Gamma_r^*(df) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - i \frac{\partial f}{\partial x} - j \frac{\partial f}{\partial y} - k \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ \bar{\partial}_r f = \frac{1}{2} \Gamma_l(df) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \right) \\ \partial_r f = \frac{1}{2} \Gamma_l^*(df) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x} i - \frac{\partial f}{\partial y} j - \frac{\partial f}{\partial z} k \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial x_i} e_i \right) \end{cases} \quad (6.8)$$

Definizione 6.2. Definiamo il laplaciano di una funzione quaternionica (differenziabile nel senso classico della geometria differenziale) come:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Osserviamo che l'operatore laplaciano può essere scritto come:

$$\Delta = 4\partial_l \bar{\partial}_l = 4\bar{\partial}_l \partial_l = 4\partial_r \bar{\partial}_r = 4\bar{\partial}_r \partial_r \quad (6.9)$$

Una volta messe a punto le convenzioni notazionali che utilizzeremo nel corso del capitolo, andiamo ora a definire operativamente un concetto di derivata di una funzione quaternionica.

6.4 L'approccio classico

Siamo giunti ora al momento di definire cosa voglia dire per una funzione di una variabile quaternionica essere differenziabile, e di dare un significato alla parola "derivata di f". Il primo approccio che adopereremo, sarà quello "classico" (nel senso che la definiremo in modo del tutto analogo al caso complesso e al caso reale). Vogliamo dunque definire la derivata di una funzione quaternionica come il limite del rapporto incrementale di quest'ultima. L'unica accortezza che dovremo prendere è la seguente: siccome i quaternioni non sono un campo, dovremo necessariamente definire una derivata di destra e una di sinistra.

Definizione 6.3 (Derivata sinistra/differenziabilità sinistra). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione quaternionica. Diremo che f sarà sinistro-differenziabile o differenziabile sulla sinistra nel punto $q_0 \in \mathbb{H}$, se esiste il seguente limite:*

$$\frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(q_0 + h) - f(q_0)) \quad (6.10)$$

se esiste, chiameremo quest'ultimo "derivata sinistra di f calcolata nel punto q_0 ".

Definizione 6.4 (Derivata destra/differenziabilità destra). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione quaternionica. Diremo che f sarà destro-differenziabile o differenziabile sulla destra nel punto $q_0 \in \mathbb{H}$, se esiste il seguente limite:*

$$\frac{\triangleright f}{\triangleleft q} = \lim_{h \rightarrow 0} (f(q_0 + h) - f(q_0))h^{-1} \quad (6.11)$$

se esiste, chiameremo quest'ultimo "derivata destra di f calcolata nel punto q_0 ".

Dimostriamo ora alcune proprietà elementare di queste derivate appena introdotte:

Proposizione 6.3 (Proprietà della derivata sinistra). *Siano $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ e $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ funzioni differenziabili sinistre in $q_0 \in \mathbb{H}$, e sia $\lambda \in \mathbb{H}$ una costante, allora:*

- $f + g$ è sinistro-differenziabile in q_0 , e la sua derivata sinistra vale:

$$\frac{\triangleleft(f + g)}{\triangleleft q} = \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} + \frac{\triangleleft g}{\triangleleft q}$$

- $f\lambda$ è sinistro-differenziabile in q_0 e la sua derivata sinistra vale:

$$\frac{\triangleleft(f\lambda)}{\triangleleft q} = \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q}\lambda$$

Dimostrazione. Per ipotesi, i limiti $\frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(q_0 + h) - f(q_0))$ e $\frac{\triangleleft g}{\triangleleft q} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(g(q_0 + h) - g(q_0))$ esistono. Scriviamo la derivata sinistra di $f + g$:

$$\frac{\triangleleft(f + g)}{\triangleleft q} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}((f(q_0 + h) + g(q_0 + h)) - (f(q_0) + g(q_0)))$$

Osserviamo che, per le proprietà algebriche e le proprietà dei limiti quaternionici dimostrate nel capitolo 4:

$$\frac{\not{d}(f+g)}{\not{d}q} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(q_0 + h) - f(q_0)) + \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(g(q_0 + h) - g(q_0))$$

e dunque:

$$\frac{\not{d}(f+g)}{\not{d}q} = \frac{\not{d}f}{\not{d}q} + \frac{\not{d}g}{\not{d}q}$$

Per il secondo punto invece, ricordando le proprietà dei limiti quaternionici:

$$\frac{\not{d}(f\lambda)}{\not{d}q} = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(q_0 + h)\lambda - f(q_0)\lambda) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(f(q_0 + h) - f(q_0))\lambda = \frac{\not{d}f}{\not{d}q}\lambda$$

□

Anche le derivate destre di funzioni quaternioniche godono delle medesime proprietà:

Proposizione 6.4 (Linearità della derivata destra). *Siano $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ e $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ funzioni differenziabili destre in $q_0 \in \mathbb{H}$, e sia $\lambda \in \mathbb{H}$ una costante, allora:*

- $f + g$ è destro-differenziabile in q_0 , e la sua derivata destra vale:

$$\frac{\not{d}(f+g)}{\not{d}q} = \frac{\not{d}f}{\not{d}q} + \frac{\not{d}g}{\not{d}q}$$

- λf è destro-differenziabile in q_0 e la sua derivata destra vale:

$$\frac{\not{d}(\lambda f)}{\not{d}q} = \lambda \frac{\not{d}f}{\not{d}q}$$

Lasciamo la leggera incombenza di dimostrare questa proposizione al lettore, in luce del fatto che si tratti di una dimostrazione quasi identica a quella presentata prima.

Esercizio 6.3. Sia $f(q) = \gamma$, con $\gamma \in \mathbb{H}$ una funzione costante. Dimostrare che la funzione è sia sinistro che destro differenziabile, e che entrambe le derivate valgono 0, i.e.:

$$\frac{\not{d}f}{\not{d}q} = \frac{\not{d}f}{\not{d}q} = 0$$

Esercizio 6.4. Sia $f(q) = q$ la funzione identità. Dimostrare che la funzione è sia sinistro che destro differenziabile, e dimostrare che ambo le derivate valgono 1:

$$\frac{\leftarrow f}{\leftarrow q} = \frac{\rightarrow f}{\rightarrow q} = 1$$

Come anche nel caso reale e complesso, diremo invece che una funzione sarà differenziabile (destro/sinistro) in un dominio (che è la prassi definire come un aperto connesso di \mathbb{H}) se essa è differenziabile(destro/sinistro) in ogni punto di quest'ultimo.

Nonostante questa definizione di derivata abbia effettivamente delle proprietà desiderabili (come la linearità additiva, e una linearità moltiplicativa per "un solo lato"), ne sono presenti altrettante alquanto spiacevoli.

Notiamo anzitutto che non è generalmente valida la regola del prodotto classica dell'analisi reale e complessa:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Dunque date due funzioni quaternioniche destro/sinistro differenziabili, non possiamo concludere nulla sulla differenziabilità del loro prodotto, e non abbiamo alla mano una formula veloce per computarlo.

Ma se ciò già non fosse abbastanza, questa definizione di derivata ha una proprietà ancora peggiore, già accennata prima nell'introduzione del testo: essere una funzione sinistro/destro differenziabile implica essere una funzione sinistro/destro lineare. Tale risultato fu già dimostrato verso la fine degli anni 30' da V.C.A Ferraro (vedi [12]), noi tuttavia forniremo qui di seguito la dimostrazione fornita da A.Sudbery [43].

Teorema 6.1 (Sudbery, 1979). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione quaternionica sinistro-differenziabile in un dominio aperto e connesso $U \subset \mathbb{H}$. Allora, in U , essa avrà la seguente forma:*

$$f(q) = a + qb$$

con $a, b \in \mathbb{H}$.

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che la differenziabilità sinistra quaternionica in un punto q è una condizione più forte della differenziabilità canonica di f , intesa nel senso classico (ridotta alla nozione di differenziabilità di funzioni da \mathbb{R}^4 in \mathbb{R}^4). Inoltre, il differenziale di f in q è dato da:

$$df_q = dq \frac{\leftarrow f}{\leftarrow q}$$

Espandendo la parte sinistra e destra dell'equivalenza otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} dt + idx \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} + jdy \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} + kdz \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q}$$

Eguagliando i coefficienti di dt, dx, dy e dz otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} = \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} = -i \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} = -j \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\triangleleft f}{\triangleleft q} = -k \frac{\partial f}{\partial z} \end{cases} \quad (6.12)$$

Ricordiamo tuttavia che possiamo generalmente scrivere un quaternione $q = t + xi + yj + zk$ come $q = v + jw$, dove $v, w \in \mathbb{C}$ sono numeri complessi, $v = t + ix, w = y - iz$. Scriviamo inoltre la nostra funzione $f(q)$ come $f(q) = g(v, w) + jh(v, w)$, dove g e h sono funzioni nelle due variabili complesse v e w . Possiamo allora convertire le equazioni di (6.12) in due sistemi di equazioni complesse:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -i \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = i \frac{\partial h}{\partial z}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = i \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = i \frac{\partial g}{\partial z}$$

Possiamo riscrivere le sopracitate in termini di equazioni differenziali parziali complesse come:

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial h}{\partial w} \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial w} = 0$$

Da quest'ultima equazione in particolare deduciamo che g è una funzione analitica di v e \bar{w} , mentre h è una funzione analitica di \bar{v} e w . Per il teorema di Hartogs [Nota 6.1], g ed h sono funzioni \mathbb{C} -continue ed hanno derivate parziali continue di ogni ordine e dunque:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial h}{\partial w} \right) = \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right) = 0$$

Supponiamo per ora che U sia convesso (vedremo dopo come applicare a aperti connessi le argomentazioni che presenteremo qui di seguito); allora g è lineare in \bar{w} e v , mentre h è lineare in w e \bar{v} :

$$g(v, w) = \alpha + \beta v + \gamma \bar{w} + \delta v \bar{w}$$

$$h(v, w) = \epsilon + \zeta \bar{v} + \eta w + \theta \bar{v} w$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta \in \mathbb{C}$. Le equazioni (6.13) e (6.14), calcolate esplicitamente, diventano:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v} &= \beta + \delta \bar{w} = \frac{\partial h}{\partial w} = \eta + \theta \bar{v} \\ \frac{\partial h}{\partial \bar{v}} &= \zeta + \theta w = -\frac{\partial g}{\partial \bar{w}} = -\gamma - \delta v\end{aligned}$$

Sostituendo v e w con $v = t + ix$ e $w = y - iz$:

$$\beta + \delta y + \delta zi = \eta + \theta t - \theta xi$$

$$\zeta + \theta y - \theta zi = -\gamma - \delta t - \delta xi$$

Da cui, per la definizione di uguaglianza di numeri complessi, otteniamo il seguente sistema di uguaglianze:

$$\begin{cases} \beta + \delta y = \eta + \theta t \\ \delta z = -\theta x \\ \zeta + \theta y = -\gamma - \delta t \\ \theta z = \delta x \end{cases}$$

$\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}$. Essendo il valore di queste 4 costanti reali arbitrario, possiamo supporre che siano tutte pari ad 1. Così facendo otteniamo:

$$\begin{cases} \beta + \delta = \eta + \theta \\ \delta = -\theta \\ \zeta + \theta = -\gamma - \delta \\ \theta = \delta \end{cases}$$

Maneggiando la seconda e la quarta equazione del sistema, otteniamo che:

$$\delta = -\theta = -\delta \implies 2\delta = 0 \implies \theta = \delta = 0$$

Sostituendo i valori di θ e δ appena ottenuti nel primo sistema, otteniamo le altre relazioni tra le costanti:

$$\beta = \eta \quad \zeta = -\gamma$$

Da cui:

$$g(v, w) = \alpha + \beta v + \gamma \bar{w}$$

$$h(v, w) = \epsilon - \gamma \bar{v} + \beta w$$

Ed essendo $f = g + jh$, otteniamo un'espressione per f su un insieme convesso U :

$$f(q) = \alpha + j\epsilon + (v + jw)(\beta - j\gamma) = a + qb \quad (6.15)$$

dove $a = \alpha + j\epsilon$ e $b = \beta - j\gamma$. Per estendere questo argomento a domini aperti e connessi, basta notare che i precedentemente citati possono essere coperti da insiemi convessi, due qualsiasi dei quali possono essere collegati da una catena di insiemi convessi che si sovrappongono a coppie; da ciò segue che la forma di f sull'intero dominio U sarà $f(q) = a + qb$. \square

Un teorema del tutto analogo è valido per le funzioni destro-differenziabili.

Teorema 6.2 (Sudbery, 1979). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione quaternionica destro-differenziabile in un dominio aperto e connesso $U \subset \mathbb{H}$. Allora, in U , essa avrà la seguente forma:*

$$f(q) = a + bq$$

con $a, b \in \mathbb{H}$.

La dimostrazione di questo fatto è del tutto analoga a quella fornita precedentemente, salvo alcune piccole accortezze.

I teoremi appena dimostrati ci convincono del fatto che sviluppare una teoria del calcolo differenziale sulle funzioni di una variabile quaternionica prendendo come definizioni di derivate quelle date poc'anzi non può essere fruttifera: la classe di funzioni differenziabili è infatti troppo ristretta al punto da essere compresa solo di funzioni destro e sinistro-affini. Dobbiamo, di conseguenza, trovare un modo alternativo di definire il concetto di differenziabilità e di derivata sui quaternioni, in modo da non rendere la teoria a riguardo banale.

6.5 Funzioni regolari e l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter

Definizione 6.5 (Funzione regolare sinistra di una variabile quaternionica). *Diremo che una funzione di una variabile quaternionica $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è regolare a sinistra in $q \in \mathbb{H}$ se è differenziabile nel senso classico della*

geometria differenziale (che si riduce alla nozione di differenziabilità tra funzioni da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^4) in q e se esiste un quaternione $f'_l(q)$, che chiameremo la derivata sinistra di f in q , tale che:

$$d(dq \wedge d\bar{q}f) = D\bar{q}f'_l(q) \quad (6.16)$$

Definizione 6.6 (Funzione regolare destra di una variabile quaternionica). *Diremo che una funzione di una variabile quaternionica $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è regolare a destra in $q \in \mathbb{H}$ se è differenziabile nel senso classico della geometria differenziale (che si riduce alla nozione di differenziabilità tra funzioni da \mathbb{R}^4 a \mathbb{R}^4) in q e se esiste un quaternione $f'_r(q)$, che chiameremo la derivata destra di f in q , tale che:*

$$d(fdq \wedge dq) = f'_r(q)Dq \quad (6.17)$$

Le due teorie saranno del tutto analoghe, e dunque, come abbiamo fatto prima, ricaveremo i risultati solo per le funzioni regolari sinistre, facendo dopo il punto della situazione anche per quelle destre, se necessario.

In luce di quanto appena detto, per alleggerire la notazione, chiameremo $f'_l(q)$ semplicemente $f'(q)$.

Dimostriamo ora un importante teorema, l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter, un equivalente quaternionico delle equazioni di Cauchy-Riemann in analisi complessa.

Teorema 6.3 (Equazione di Cauchy-Riemann-Fueter sinistra). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione "differenziabile nel senso classico" (cioè \mathbb{R} -differenziabile). Allora f è sinistro-regolare in $q \in \mathbb{H}$ se e solo se $\bar{\partial}_l f = 0$, cioè se:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (6.18)$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima la direzione diretta (\implies). Supponiamo che f sia una funzione sinistro regolare in q , allora, per la definizione data poc'anzi:

$$d(dq \wedge d\bar{q}f) = D\bar{q}f'_l(q)$$

Osservando che $d(dq \wedge d\bar{q}f) = dq \wedge d\bar{q} \wedge df$ possiamo riscrivere l'equazione di sopra come:

$$dq \wedge d\bar{q} \wedge df = D\bar{q}f'_l(q)$$

Quest'equazione è valida per ogni terna di quaternioni in cui calcoliamo queste 3-forme. Dall'arbitrarietà di quest'ultima, segue che potremo scegliere di calcolare ambo i lati in 2 terne: $(i, j, k) \in \mathbb{H}^3$ e $(1, i, j) \in \mathbb{H}^3$. Cominciando dalla prima: per calcolare il lato sinistro, applichiamo la seguente

formula per calcolare il valore della $r + s$ -forma data dal prodotto esterno di una r -forma e una s -forma in una $r + s$ -upla:

$$\omega \wedge \alpha(h_1, h_2, \dots, h_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \dots, h_{\sigma(r)}) \alpha(h_{\sigma(r+1)}, \dots, h_{\sigma(r+s)})$$

Applicando la formula di sopra, $dq \wedge dq \wedge df$ diventa:

$$dq \wedge dq \wedge df = \frac{1}{2}(dq \wedge dq(h_1, h_2)df(h_3) - dq \wedge dq(h_1, h_3)df(h_2) + dq \wedge dq(h_3, h_1)df(h_2) - dq \wedge dq(h_3, h_2)df(h_1) + dq \wedge dq(h_2, h_3)df(h_1) - dq \wedge dq(h_2, h_1)df(h_3))$$

Ponendo $h_1 = i, h_2 = j, h_3 = k$, otteniamo: $dq \wedge dq \wedge df(i, j, k) = \frac{1}{2}(2k \frac{\partial f}{\partial z} + 2j \frac{\partial f}{\partial y} + 2j \frac{\partial f}{\partial y} + 2i \frac{\partial f}{\partial x} + 2i \frac{\partial f}{\partial x} + 2k \frac{\partial f}{\partial z}) = 2i \frac{\partial f}{\partial x} + 2j \frac{\partial f}{\partial y} + 2k \frac{\partial f}{\partial z}$
Per il lato destro, invece, sapendo che $Dq(i, j, k) = 1$, avremo semplicemente f'_l . Giungiamo dunque alla seguente uguaglianza:

$$f'_l(q) = 2i \frac{\partial f}{\partial x} + 2j \frac{\partial f}{\partial y} + 2k \frac{\partial f}{\partial z} \quad (6.19)$$

Calcoliamo ora le 3-forme in ambo i lati nella terna $(1, i, j)$; a sinistra, usando la medesima formula, otterremo:

$$dq \wedge dq \wedge df(1, i, j) = \frac{1}{2}(2k \frac{\partial f}{\partial t} + 2k \frac{\partial f}{\partial t}) = 2k \frac{\partial f}{\partial t}$$

A destra invece, ricordando l'identità $Dq(1, e_i, e_j) = \frac{1}{2}(e_j e_i - e_i e_j)$ dimostrata poco fa, otterremo $Dq(1, i, j) = \frac{1}{2}(ji - ij) = -k$ e dunque giungeremo all'uguaglianza:

$$-kf'_l(q) = 2k \frac{\partial f}{\partial t}$$

Da cui:

$$f'_l(q) = -2 \frac{\partial f}{\partial t} \quad (6.20)$$

Ricordando ora l'espressione (6.19) ricavata poco prima per la medesima quantità (i.e f'_l) e sottraendo a f'_l sé stessa, otterremo:

$$f'_l(q) - f'_l(q) = 0 = 2 \frac{\partial f}{\partial t} + 2i \frac{\partial f}{\partial x} + 2j \frac{\partial f}{\partial y} + 2k \frac{\partial f}{\partial z}$$

da cui l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter sinistra:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (6.21)$$

Per la direzione inversa, invece, avremo una dimostrazione costruttiva che ci permetterà di determinare anche un'espressione operativa per la funzione derivata sinistra $f'_l(q)$.

Supponiamo che siano vere le equazioni di Cauchy-Riemann-Fueter in q , cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Vogliamo dimostrare l'esistenza di un quaternione derivata sinistra, $f'_l(q)$ tale che:

$$dq \wedge dq \wedge df = Dq f'_l(q)$$

Espandiamo la parte sinistra dell'uguaglianza, calcolando nel modo solito il prodotto esterno:

$$\begin{aligned} dq \wedge dq \wedge df &= 2(idy \wedge dz + jdz \wedge dx + kdx \wedge dy) \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) \\ &= 2 \left(idy \wedge dz \wedge dt \frac{\partial f}{\partial t} + idy \wedge dz \wedge dx \frac{\partial f}{\partial x} + jdz \wedge dx \wedge dt \frac{\partial f}{\partial t} + jdz \wedge dx \wedge dy \frac{\partial f}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. kdx \wedge dy \wedge dt \frac{\partial f}{\partial t} + kdx \wedge dy \wedge dz \frac{\partial f}{\partial z} \right) = 2 \left(\left[i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} \right] dx \wedge dy \wedge dz + i \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz \right. \\ &\quad \left. + j \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + k \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \right) \end{aligned}$$

Ma, per ipotesi $\frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ e dunque:

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z}$$

e quindi $dq \wedge dq \wedge df$ diventa:

$$2 \left(-\frac{\partial f}{\partial t} dx \wedge dy \wedge dz + i \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dy \wedge dz + j \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dz \wedge dx + k \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx \wedge dy \right)$$

Ma ricordando che $Dq = dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy$, notiamo che l'equazione appena ottenuta non è altro che Dq moltiplicato da destra per $-2 \frac{\partial f}{\partial t} = f'_l(q)$. Quindi abbiamo trovato un quaternione per il quale, $\forall (h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{H}^3$:

$$dq \wedge dq \wedge df = Dq f'_l(q) \tag{6.22}$$

Ergo, f è regolare in q , come volevasi dimostrare. \square

Le equazioni di Cauchy-Riemann-Fueter sono un importante risultato in quanto ci permettono di verificare molto più velocemente se una funzione di una variabile quaternionica è regolare o meno. Inoltre, stabiliscono una proprietà desiderabile di questa classe di funzioni appena definite, in quanto sono una generalizzazione diretta delle equazioni di Cauchy-Riemann per funzioni quaternioniche. Per convincerci di questo fatto, riscriviamo le equazioni come un sistema di due equazioni differenziali parziali complesse; scriviamo il quaternione argomento della funzione come $q = u + vj$ e la funzione come $f(q) = g(u, v) + jh(u, v)$ dove $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ e $h : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, allora le equazioni di CRF (Cauchy-Riemann Fueter) diventano:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial h}{\partial \bar{v}}$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{v}} = -\frac{\partial h}{\partial \bar{u}}$$

Dimostriamo ora un teorema che ci permetterà di calcolare effettivamente le derivate di funzioni regolari in un punto $q_0 \in \mathbb{H}$.

Corollario 6.1. *Se $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è una funzione regolare in q , allora la sua derivata quaternionica sinistra, $f'_l(q)$ vale:*

$$f'_l(q) = -2\partial_l f = -\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} \quad (6.23)$$

Dimostrazione. Nello scorso teorema abbiamo trovato le identità:

$$f'_l(q) = -2\frac{\partial f}{\partial t}$$

e

$$f'_l(q) = 2i\frac{\partial f}{\partial x} + 2j\frac{\partial f}{\partial y} + 2k\frac{\partial f}{\partial z}$$

da cui:

$$2f'_l(q) = -2\frac{\partial f}{\partial t} + 2i\frac{\partial f}{\partial x} + 2j\frac{\partial f}{\partial y} + 2k\frac{\partial f}{\partial z} \implies f'_l(q) = -2\partial_l f = -\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z}$$

□

Come già accennato sopra, anche per le funzioni destro-regolari vale un risultato molto simile, che chiameremo equazioni di Cauchy-Riemann-Fueter destre (CRF-dx in breve). Enunciamolo formalmente:

Teorema 6.4 (Equazione di Cauchy-Riemann-Fueter destra). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione "differenziabile nel senso classico" (cioè \mathbb{R} -differenziabile). Allora f è destro-regolare in $q \in \mathbb{H}$ se e solo se $\bar{\partial}_r f = 0$, cioè se:*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k = 0 \quad (6.24)$$

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando l'implicazione diretta (\implies). Per ipotesi, essendo f destro-regolare, avremo che $d(fdq \wedge dq) = f'_r(q)Dq$ per un certo quaternione $f'_r(q)$. Per le proprietà del differenziale esterno, sappiamo che $d(fdq \wedge dq) = df \wedge dq \wedge dq$. Abbiamo ora la seguente uguaglianza di 3 forme:

$$df \wedge dq \wedge dq(h_1, h_2, h_3) = f'_r(q)Dq(h_1, h_2, h_3)$$

valida $\forall h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{H}$. Essendo valida per ogni tripletta di quaternioni, sarà anche valida per le triplette (i, j, k) e $(1, i, j)$, in simboli:

$$df \wedge dq \wedge dq(i, j, k) = f'_r(q)Dq(i, j, k) \quad ; \quad df \wedge dq \wedge dq(1, i, j) = f'_r(q)Dq(1, i, j)$$

Cominciamo dalla prima: ricordando che $df \wedge dq \wedge dq(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{2}[df(h_1)dq \wedge dq(h_2, h_3) - df(h_1)dq \wedge dq(h_3, h_2) - df(h_2)dq \wedge dq(h_1, h_3) + df(h_2)dq \wedge dq(h_3, h_1) + df(h_3)dq \wedge dq(h_1, h_2) - df(h_3)dq \wedge dq(h_2, h_1)]$, e sostituendo $h_1 = i, h_2 = j, h_3 = k$, otteniamo la seguente espressione per $df \wedge dq \wedge dq(i, j, k)$:

$$df \wedge dq \wedge dq(i, j, k) = \frac{1}{2}(2\frac{\partial f}{\partial x}i + 2\frac{\partial f}{\partial y}j + 2\frac{\partial f}{\partial z}k + 2\frac{\partial f}{\partial y}j + 2\frac{\partial f}{\partial z}k + 2\frac{\partial f}{\partial x}i) = 2\frac{\partial f}{\partial x}i + 2\frac{\partial f}{\partial y}j + 2\frac{\partial f}{\partial z}k.$$

Il lato destro dell'uguaglianza, invece, sarà semplicemente pari a $f'_r(q)$ in quanto $Dq(i, j, k) = 1$ (come dimostrato nella seconda sezione di questo capitolo). Da ciò otteniamo la seguente uguaglianza:

$$f'_r(q) = 2\frac{\partial f}{\partial x}i + 2\frac{\partial f}{\partial y}j + 2\frac{\partial f}{\partial z}k$$

Andiamo ora a computare le due 3 forme nella terna $(1, i, j)$. Per la parte sinistra, avremo, sostituendo $h_1 = 1, h_2 = i, h_3 = j$ nella medesima espressione di prima per $df \wedge dq \wedge dq(h_1, h_2, h_3)$:

$$df \wedge dq \wedge dq(1, i, j) = 2\frac{\partial f}{\partial t}k$$

Ricordando inoltre che $Dq(1, i, j) = -k$, otterremo la seguente uguaglianza:

$$2\frac{\partial f}{\partial t}k = -f'_r(q)k \implies f'_r(q) = -2\frac{\partial f}{\partial t}$$

Infine, osserviamo che con le due identità appena derivate possiamo riscrivere $f'_r(q) - f'_r(q) = 0$ come:

$$2\frac{\partial f}{\partial t} + 2\frac{\partial f}{\partial x}i + 2\frac{\partial f}{\partial y}j + 2\frac{\partial f}{\partial z}k = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k = 0$$

Dimostriamo ora l'implicazione inversa (\Leftarrow). Supponiamo che l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter destra sia soddisfatta in q , i.e:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k = 0 \quad (6.25)$$

Vogliamo dimostrare l'esistenza di un quaternione derivata destra $f'_r(q)$ per il quale varrà la seguente identità:

$$df \wedge dq \wedge dq = f'_r(q)Dq$$

Il lato destro dell'uguaglianza è pari a $f'_r(q)dx \wedge dy \wedge dz - f'_r(q)idt \wedge dy \wedge dz - f'_r(q)jdt \wedge dz \wedge dx - f'_r(q)kdt \wedge dx \wedge dy$.

Il lato sinistro dell'uguaglianza, $df \wedge dq \wedge dq$ vale:

$df \wedge dq \wedge dq = (\frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz) \wedge (2idy \wedge dz + 2jdz \wedge dx + 2kdx \wedge dy) = 2[(\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k)dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial t}idt \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial t}jdt \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial t}kdt \wedge dx \wedge dy]$. Dall'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter destra (6.25), tuttavia, deduciamo che $\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k = -\frac{\partial f}{\partial t}$ e dunque:

$$df \wedge dq \wedge dq = -2\frac{\partial f}{\partial t}(dx \wedge dy \wedge dz - idt \wedge dy \wedge dz - jdt \wedge dz \wedge dx - kdt \wedge dx \wedge dy) \quad (6.26)$$

Ma l'equazione soprastante non è altro che la nostra 3-forma Dq moltiplicata da destra per un quaternione $-2\frac{\partial f}{\partial t}$; abbiamo dunque dimostrato l'esistenza di un quaternione $f'_r(q) = -2\frac{\partial f}{\partial t}$ e dunque la funzione f è destro regolare in q . \square

Corollario 6.2. Se una funzione $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ è destro-regolare in $q \in \mathbb{H}$, allora la sua derivata destra vale:

$$f'_r(q) = -2\partial_r f = -\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k \quad (6.27)$$

Un'altra proprietà rispettata dalle funzioni \mathbb{H} -regolari sx/dx che ci aspetteremmo è quella di essere funzioni armoniche, i.e soluzioni dell'equazione di Laplace. Vediamo che è senza dubbio il caso che sia così nella seguente proposizione:

Proposizione 6.5. *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione sx/dx-regolare e differenziabile (nel senso classico) almeno due volte. Allora f è una funzione armonica, i.e $\Delta f = 0$.*

Dimostrazione. Ricordando la formula derivata nella sezione 3 di questo capitolo:

$$\Delta f = \partial_l \bar{\partial}_l f = \partial_r \bar{\partial}_r f$$

Ma vediamo che essere sx regolare $\iff \bar{\partial}_l f = 0$ ed essere dx regolare $\iff \bar{\partial}_r f = 0$, da cui segue immediatamente l'asserto. \square

Per la dimostrazione della proposizione qui sopra, tuttavia, abbiamo dovuto postulare che la funzione fosse anche di classe C^2 nel senso classico. Dimostreremo più in avanti in questo capitolo che essere una funzione regolare quaternionica sx/dx implica essere una funzione di classe C^∞ . Vediamo che è possibile ottenere nuove funzioni regolari sommando funzioni regolari o moltiplicando una funzione regolare per una costante quaternionica $\gamma \in \mathbb{H}$. Raggruppiamo queste proprietà nella seguente proposizione

Proposizione 6.6. *Sia $\gamma \in \mathbb{H}$ una costante quaternionica e siano $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ delle funzioni regolari sinistre di una variabile quaternionica. Allora:*

- $f + g$ è regolare sinistra e la sua derivata sinistra vale:

$$(f + g)'_l(q) = f'_l(q) + g'_l(q)$$

- $f\gamma$ è regolare sinistra e la sua derivata sinistra vale:

$$(f\gamma)'_l(q) = f'_l(q)\gamma$$

Dimostrazione. Per ipotesi, f e g sono regolari sinistre, e quindi:

$$\bar{\partial}_l f = 0 \quad e \quad \bar{\partial}_l g = 0$$

Sommadole:

$$0 = \bar{\partial}_l f + \bar{\partial}_l g = \frac{\partial f}{\partial t} + i \frac{\partial f}{\partial x} + j \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial t} + i \frac{\partial g}{\partial x} + j \frac{\partial g}{\partial y} + k \frac{\partial g}{\partial z}$$

Usando la linearità delle derivate parziali e le proprietà algebriche dei quaternioni otteniamo:

$$\frac{\partial(f + g)}{\partial t} + i \frac{\partial(f + g)}{\partial x} + j \frac{\partial(f + g)}{\partial y} + k \frac{\partial(f + g)}{\partial z} = 0$$

e dunque $f + g$ è una funzione regolare sinistra. Calcoliamo ora la sua derivata sinistra:

$$\begin{aligned}(f + g)'_l(q) &= -2\partial_l(f + g) = -\frac{\partial(f + g)}{\partial t} + i\frac{\partial(f + g)}{\partial x} + j\frac{\partial(f + g)}{\partial y} + k\frac{\partial(f + g)}{\partial z} \\ &= -\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial t} + i\frac{\partial g}{\partial x} + j\frac{\partial g}{\partial y} + k\frac{\partial g}{\partial z} = f'_l(q) + g'_l(q)\end{aligned}$$

Per il secondo punto, invece, basta osservare che:

$$\frac{\partial f\gamma}{\partial t} + i\frac{\partial f\gamma}{\partial x} + j\frac{\partial f\gamma}{\partial y} + k\frac{\partial f\gamma}{\partial z} = \bar{\partial}_l f\gamma = 0$$

E ugualmente, per il calcolo della sua derivata:

$$(f\gamma)'_l(q) = -2\partial_l(f\gamma) = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} + i\frac{\partial f}{\partial x} + j\frac{\partial f}{\partial y} + k\frac{\partial f}{\partial z} \right)\gamma = f'_l(q)\gamma$$

□

Come probabilmente il lettore si sarà aspettato, un risultato analogo è valido per le funzioni quaternioniche regolari destre e le loro derivate destre:

Proposizione 6.7. *Sia $\lambda \in \mathbb{H}$ una costante quaternionica e siano $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ delle funzioni regolari destre di una variabile quaternionica. Allora:*

- $f + g$ è regolare destra e la sua derivata destra vale:

$$(f + g)'_r(q) = f'_r(q) + g'_r(q)$$

- λf è regolare destra e la sua derivata destra vale:

$$(\lambda f)'_r(q) = \lambda f'_r(q)$$

Abbiamo dunque definito e dimostrato alcuni risultati di base circa le funzioni \mathbb{H} -regolari sinistre e destre, mostriamo ora alcuni esempi di funzioni regolari sinistre e destre.

Esempio 6.1. *Sia $f(q) = \gamma$, con $\gamma \in \mathbb{H}$ una funzione costante quaternionica. Banalmente, essendo $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, avremo che $\bar{\partial}_l f = \bar{\partial}_r f = 0$ e che dunque la funzione è sinistro e destro regolare $\forall q \in \mathbb{H}$. La sua derivata sinistra e la sua derivata destra valgono entrambe 0.*

Esempio 6.2. Consideriamo ora un esempio meno banale: sia $\Phi(q) = \phi_1(q) + i\phi_2(q) + j\phi_3(q) + k\phi_4(q)$ una funzione di una variabile quaternionica con $q = t + xi + yj + zk$ e con le funzioni componenti ϕ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ definite come:

$$\begin{aligned}\phi_1(q) &= t^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} ; \quad \phi_2(q) = tx \\ \phi_3(q) &= ty ; \quad \phi_4(q) = 5\end{aligned}$$

Osserviamo che $\bar{\partial}_l \Phi = 2t + xi + yj + i(-x + ti) + j(-y + tj) = 0$ e quindi Φ è sx-regolare $\forall q \in \mathbb{H}$. La sua derivata sinistra vale:

$$\Phi'_l(q) = -2\partial_l \Phi(q) = -4t - 2xi - 2yj$$

La funzione Φ , in questo caso, è anche destro-regolare, in quanto $\bar{\partial}_r \Phi = 0$, e la sua derivata destra vale:

$$\Phi'_r(q) = -2\partial_r \Phi(q) = -4t - 2xi - 2yj$$

Esempio 6.3. La funzione identità $f(q) = q = t + xi + yj + zk$ non è né sinistro né destro regolare. Infatti:

$$\bar{\partial}_l f = -2 \neq 0 \quad \forall q \in \mathbb{H}$$

$$\bar{\partial}_r f = -2 \neq 0 \quad \forall q \in \mathbb{H}$$

Esempio 6.4. Consideriamo la funzione $f(q) = q^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xti + 2yti + 2ztk$:

$$\bar{\partial}_l f = 2t + 2xi + 2yj + 2zk - 2xi - 2t - 2yj - 2t - 2zk - 2t = -4t$$

La funzione è sinistro regolare solo per quaternioni $q \in \mathbb{H}$ con $t = 0$, cioè quaternioni puri $\vec{q} \in P \cong \mathbb{R}^3$.

La sua derivata sinistra in un punto $q \in \mathbb{H}$ con $\text{Sc}(q) = 0$ vale $f'_l(q) = -2xi - 2yj - 2zk = -2q$.

Inoltre, la funzione è anche destro regolare nel medesimo sottoinsieme dei quaternioni, in quanto $\bar{\partial}_r = -4t$, e la sua derivata destra calcolata in un quaternione puro vale $f'_r(q) = -2xi - 2yj - 2zk = -2q = f'_l(q)$.

Abbiamo in questi esempi visto alcuni dei problemi di questa definizione di differenziabilità quaternionica. Infatti, seppur si tratti di una classe di funzioni molto più grande rispetto a quella vista con la definizione data nella sezione 4 (che abbiamo dovuto scartare subito per questo motivo), è sempre alquanto ristretta rispetto alle sue controparti reali e complesse. Infatti, alcune funzioni di grande importanza come l'identità q non sono differenziabili in nessun punto (né a destra né a sinistra, ed altre come q^2 solo in alcuni sottoinsiemi di \mathbb{H}).

Esercizio 6.5. Determinare i punti di \mathbb{H} in cui la funzione $f(q) = q^3$ è sinistro-differenziabile, ed i punti in cui è destro-differenziabile. Determinare inoltre un'espressione per la derivata destra e sinistra di f negli insiemi di punti in questione.

6.6 Forma vettoriale dell'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter

Nella sezione precedente abbiamo parlato dell'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter e abbiamo inoltre definito i concetti di regolarità e di derivata destra/sinistro quaternionica. Abbiamo estensivamente parlato nel capitolo 2 del profondo legame presente tra i quaternioni e vettori tridimensionali, sia geometricamente che algebricamente, ed abbiamo anche visto come era possibile scrivere operazioni quaternioniche in termini di operazioni vettoriali (come prodotti scalari o prodotti vettoriali).

In questa sezione vogliamo trasformare le condizioni imposte dall'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter (destra e sinistra) in una coppia di equazioni vettoriali, ed inoltre vogliamo introdurre alcuna nuova notazione che ci risulterà comoda in seguito.

Ricordiamo anzitutto, come visto nella sezione 2 del capitolo 2, che $\mathbb{H} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbf{P}$ e che ogni quaternione può essere scritto come la somma di una parte scalare e di una parte vettoriale; $\forall q \in \mathbb{H}, q = t + \vec{v}$. Introduciamo anzitutto i seguenti operatori quaternionici formali (si tratta di un abuso di notazione e dunque è importante comprendere che non si stia parlando letteralmente di un quaternione):

$$\square := \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.28)$$

$$\bar{\square} := \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial}{\partial x} - j \frac{\partial}{\partial y} - k \frac{\partial}{\partial z} \quad (6.29)$$

che chiameremo rispettivamente "quaternione gradiente" e il "quaternione gradiente coniugato".

Osserviamo, mediante un semplice calcolo diretto, che:

$$\begin{cases} \square f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \right) f = 2\bar{\partial}_l f \\ \bar{\square} f = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla} \right) f = 2\partial_l f \\ f\square = f \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla} \right) = 2\bar{\partial}_r f \\ f\bar{\square} = f \left(\frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla} \right) = 2\partial_r f \end{cases}$$

Da cui segue che potremo riscrivere l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter sinistra come $\square f = 0$ e l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter destra come $f\square = 0$.

Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione di una variabile quaternionica. Allora quest'ultima può essere scritta come una somma di una funzione $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, la sua parte scalare, e una funzione $\vec{\psi} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^3$, la sua parte vettoriale. In simboli scriveremo:

$$f = \phi + \vec{\psi}$$

Ricordiamo dal capitolo 2 che possiamo scrivere il prodotto di due quaternioni, $q_1 = t_1 + \vec{r}_1$ e $q_2 = t_2 + \vec{r}_2$ come:

$$q_1 q_2 = t_1 t_2 - \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 + t_1 \vec{r}_2 + t_2 \vec{r}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$$

dove \cdot denota il prodotto scalare di due vettori, mentre \times ne denota il loro prodotto vettoriale.

Da ciò segue che potremo scrivere $\square f$ come:

$$\square f = \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} + \frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi} = 0$$

Eguagliando parte reale e parte vettoriale della seguente espressione potremo riscrivere l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter sinistra come un sistema di due equazioni differenziali parziali vettoriali. Scriviamolo in maniera più esauriente qui di seguito:

Proposizione 6.8 (Forma vettoriale dell'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter sinistra). *La funzione $f = \phi + \vec{\psi}$ è regolare sinistra in $U \subset \mathbb{H}$ se e solo se $\forall q \in U \subset \mathbb{H}$:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} \\ \vec{\nabla} \phi = -\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \end{cases} \quad (6.30)$$

Dimostrazione. Come già detto prima, l'identità è derivata immediatamente da $\square f = 0$ (valida in q se e solo se la funzione f in questione è regolare sinistra in quel punto), eguagliando parte scalare e parte vettoriale dell'espressione a 0. \square

Proposizione 6.9 (Forma vettoriale dell'equazione di Cauchy-Riemann–Fueter destra). *La funzione $f = \phi + \vec{\psi}$ è regolare destra in $U \subset \mathbb{H}$ se e solo se $\forall q \in U$:*

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\psi} \\ \vec{\nabla} \phi = -\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\psi} \end{cases} \quad (6.31)$$

Esercizio 6.6. *Dimostrare che per una funzione quaternionica $f = \phi + \vec{\psi}$ regolare sia a destra che a sinistra è vero che:*

$$\vec{\nabla} \times \vec{\psi} = 0$$

6.7 Teoremi integrali quaternionici

Esistono degli analoghi quaternionici di molti importanti teoremi integrali dell'analisi complessa, come il teorema integrale di Cauchy, il teorema di Morera, la formula integrale di Cauchy ed altri risultati. Ovviamente, nel caso dei quaternioni, anziché avere integrali di 1-forme su contorni nel piano complesso, avremo integrali di 3-forme su 3-catene nell'iperspazio quaternionico. In questa sezione presenteremo questi risultati e ne forniremo una dimostrazione, ma prima di far ciò necessitiamo di alcune definizioni preliminari.

Definizione 6.7 (k -parallelepipedo quaternionico). *Un k -parallelepipedo orientato quaternionico è un'applicazione $C : I^k \rightarrow \mathbb{H}$ (dove qui $\mathbb{R}^k \supset I^k = \prod_{i=1}^k [0, 1]$ indica il k -cubo unitario) della forma:*

$$C(t_1, t_2, \dots, t_k) = q_0 + t_1 h_1 + \dots + t_k h_k = q_0 + \sum_{i=1}^k t_i h_i \quad (6.32)$$

Denoteremo spesso l'immagine dell'applicazione C , $\text{Im}(C) = C(I^k)$ come semplicemente $C \subset \mathbb{H}$. Inoltre, chiameremo il quaternione q_0 il vertice di C , mentre chiameremo i quaternioni $\{h_i\}_{i=1}^k$ spigoli di C . Un k -parallelepipedo sarà detto non-degenero se i suoi spigoli sono \mathbb{R} -linearmente indipendenti.

Infine, per un 4-parallelepipedo non degenere, diremo che è positivamente orientato se $dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz(h_1, h_2, h_3, h_4) > 0$, (i.e se la forma di volume calcolata nei suoi 4 spigoli è positiva) mentre diremo che è negativamente orientato se $dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz(h_1, h_2, h_3, h_4) < 0$ (i.e se la forma di volume calcolata nei suoi 4 spigoli è negativa).

Esercizio 6.7. Date due funzioni quaternioniche f, g \mathbb{R} -differenziali (i.e differenziali nel senso classico), dimostrare che:

$$d(gDqf) = ((\bar{\partial}_r g)f + g(\bar{\partial}_l f))dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz \quad (6.33)$$

Lemma 6.2. Una funzione quaternionica \mathbb{R} -differenziabile f è regolare sinistra in $q \in \mathbb{H}$ se e solo se:

$$Dq \wedge df_q = 0$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia regolare sinistra in q , allora in q $\bar{\partial}_l f = 0$. Utilizzando la formula di prima, e sostituendo $g(q) = 1$, avremo:

$$-Dq \wedge df_q = (\bar{\partial}_r 1)fdt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

ma $\bar{\partial}_r 1 = 0$ e quindi $Dq \wedge df_q = 0$.

Al contrario, supponiamo che $Dq \wedge df_q = 0$. Per l'identità dell'esercizio di prima, avremo

$$Dq \wedge df_q = -\bar{\partial}_l f dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

da cui necessariamente $\bar{\partial}_l f = 0$, i.e f è sinistro regolare. \square

Siamo ora pronti per dimostrare l'analogo del teorema di Cauchy quaternionico per un 4-parallelepipedo.

Teorema 6.5 (Teorema di Cauchy-Fueter per un 4-parallelepipedo). Se f è sinistro-regolare in ogni punto del 4-parallelepipedo C , allora:

$$\iiint_{\partial C} Dqf = 0 \quad (6.34)$$

Dimostrazione. La dimostrazione procede in maniera molto simile al teorema di Goursat in analisi complessa, tuttavia dissezionando un 4-parallelepipedo piuttosto che un triangolo.

Scriviamo il nostro 4-parallelepipedo come $C(t_1, t_2, t_3, t_4) = q_0 + \sum_{i=1}^4 t_i h_i$, i.e un 4-parallelepipedo con vertice q_0 e spigoli h_1, h_2, h_3, h_4 . Dissezioniamo ora il nostro 4-parallelepipedo in 16 sotto-4-parallelepipedi definiti come:

$$C_S(t_1, t_2, t_3, t_4) = q_0 + \frac{1}{2} \sum_{i \in S} h_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 t_i h_i$$

dove qui $S \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ è un elemento dell'insieme potenza di $\{1, 2, 3, 4\}$, i.e S è un sottoinsieme dell'insieme $\{1, 2, 3, 4\}$ (vediamo infatti che ce ne sono esattamente 16, in quanto la cardinalità di $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ è pari a $2^4 = 16$). Vediamo che

$$\iiint_{\partial C} Dqf(q) = \sum_{S \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})} \iiint_{\partial C_S} Dqf(q)$$

Prendendo il valore assoluto di ambo i lati dell'equazione e conseguentemente applicando la diseguaglianza del triangolo otteniamo:

$$\left| \iiint_{\partial C} Dqf(q) \right| = \left| \sum_{S \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})} \iiint_{\partial C_S} Dqf(q) \right| \leq \sum_{S \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})} \left| \iiint_{\partial C_S} Dqf(q) \right|$$

Esisterà tuttavia tra i sotto-parallelepipedi ottenuti un sotto-parallelepipedo "massimale", i.e un sotto-parallelepipedo che chiameremo $C^{(1)}$ tale che:

$$\sum_{S \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})} \left| \iiint_{\partial C_S} Dqf(q) \right| \leq \sum_{S \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})} \left| \iiint_{\partial C^{(1)}} Dqf(q) \right| = 16 \left| \iiint_{\partial C^{(1)}} Dqf(q) \right|$$

Da ciò segue, tramite una successione di \leq che:

$$\left| \iiint_{\partial C} Dqf(q) \right| \leq 16 \left| \iiint_{\partial C^{(1)}} Dqf(q) \right|$$

Ripetiamo ora su $C^{(1)}$ il processo di dissezione appena compiuto su C n volte, ottenendo una successione di sotto-parallelepipedi massimali $\{C^{(n)}\}_n$; per tale successione avremo $C \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_{n-1} \supset C_n \supset \dots$. Per l' n -esimo sottoparallelepipedo così ottenuto otterremo inoltre:

$$\left| \iiint_{\partial C} Dqf(q) \right| \leq 16^n \left| \iiint_{\partial C^{(n)}} Dqf(q) \right| \quad (6.35)$$

Osserviamo che l'intersezione su \mathbb{N} di questi parallelepipedi convergerà ad un punto, che chiameremo q_0 , $q_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^{(n)}$, ed esisterà una successione quaternionica $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $q_n \in C^{(n)}$ $\forall n$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q_0$. Per ipotesi f è regolare in q_0 e dunque:

$$f(q) = f(q_0) + df_{q_0}(q - q_0) + r(q)(q - q_0) \quad (6.36)$$

con $r(q) \rightarrow 0$ per $q \rightarrow q_0$. Definendo il valore di r a q_0 come $r(q_0) = 0$, avremo che r sarà una funzione continua di una variabile quaternionica sui

nostri parallelepipedi, ed in particolare la sua norma $|r(q)|$ avrà un valore massimo $\rho_n \in C^{(n)} \forall n$. Ma osservando che la nostra successione di sottoparallelepipedi massimali $\{C^{(n)}\}_n$, alla luce di quanto detto prima, converge al punto q_0 , avremo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$.

Come conseguenza delle considerazioni appena fatte, e in particolare dell'equazione (6.36), potremo scrivere $\iiint_{C^{(n)}} Dqf(q)$ come:

$$\iiint_{C^{(n)}} Dqf(q) = \iiint_{C^{(n)}} Dq(f(q_0) + df_{q_0}(q - q_0) + r(q)(q - q_0))$$

Osservando ora che $\iiint_{\partial C^{(n)}} Dqf(q_0) = 0$ e che $\iiint_{\partial C^{(n)}} Dqdf_{q_0}(q - q_0) = \iiint_{C^{(n)}} Dq \wedge df_{q_0} = 0$ (per il lemma precedente, in quanto per ipotesi f è regolare in q_0 e dunque $Dq \wedge df_{q_0} = 0$). Giungiamo infine alla seguente equazione:

$$\iiint_{\partial C^{(n)}} Dqf(q) = \iiint_{\partial C^{(n)}} Dq(q - q_0)r(q)$$

Sia $F : I^3 \rightarrow \mathbb{H}$ ora uno dei 3-parallelepipedi che forma la faccia di C_n : allora $F \subset \partial C^{(n)}$, e gli spigoli di F sono 3 degli spigoli di $C^{(n)}$, $2^{-n}h_a, 2^{-n}h_b, 2^{-n}h_c$. $\forall q \in F$ avremo $|r(q)| \leq \rho_n$ e $|q - q_0| \leq 2^{-n}(|h_1| + |h_2| + |h_3| + |h_4|)$. Da ciò segue che:

$$\iiint_F Dq(q - q_0)r(q) \leq 8^{-n}|Dq(h_a, h_b, h_c)|2^{-n}(|h_1| + |h_2| + |h_3| + |h_4|)\rho_n$$

Ma osservando che l'integrale $\iiint_{\partial C^{(n)}} Dq(q - q_0)r(q)$ è dato dalla somma degli integrali quaternionici della medesima forma integranda sulle 8 facce F di C^n :

$$\iiint_{\partial C^{(n)}} Dq(q - q_0)r(q) = \sum_{F \text{ faccia}} \iiint_F Dq(q - q_0)r(q)$$

concludiamo che:

$$\left| \iiint_{\partial C^{(n)}} Dq(q - q_0)r(q) \right| \leq 8(16^{-n} \max_{a,b,c} \{|Dq(h_a, h_b, h_c)|\}(|h_1| + |h_2| + |h_3| + |h_4|)\rho_n) \quad (6.37)$$

Ma ricordando che $\iiint_{\partial C^{(n)}} Dqf(q) = \iiint_{\partial C^{(n)}} Dq(q - q_0)r(q)$ e, combinando l'equazione (6.37) appena ottenuta con l'equazione (6.35) otteniamo:

$$\left| \iiint_{\partial C} Dqf(q) \right| \leq 8 \max_{a,b,c} \{|Dq(h_a, h_b, h_c)|\} (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)\rho_n \quad (6.38)$$

Ma $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$, e dunque $\iiint_{\partial C} Dqf(q) = 0$, concludendo la dimostrazione del teorema. \square

Con una strategia similare dimostreremo ora un analogo quaternionico della formula integrale di Cauchy per 4-parallelepipedi, convenzionalmente chiamata nella letteratura "Formula integrale di Cauchy-Fueter". Il teorema in questione nell'analisi quaternionica assume la stessa importanza della sua controparte complessa, in quanto si potrà dedurre come corollario di quest'ultimo che le funzioni sinistro regolari sono anche di classe C^∞ nel senso classico della geometria differenziale (i.e infinitamente \mathbb{R} -differenziabili).

Teorema 6.6 (Formula integrale di Cauchy-Fueter su un 4-parallelepipedo). *Sia f una funzione regolare (sinistra) in ogni punto di un 4-parallelepipedo C orientato positivamente, e sia $q_0 \in \text{int}(C)$ un punto dell'interno di C , allora:*

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) \quad (6.39)$$

Dimostrazione. Ricordiamo il risultato di un esercizio presentato poc' anzi:

$$d(gDqf) = [(\bar{\partial}_r g)f + g\bar{\partial}_l f]dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz$$

Sia $f(q)$ una funzione regolare sinistra, e sia $g(q)$ la funzione definita come:

$$g(q) = \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} = -\partial_r \left(\frac{1}{|q - q_0|^2} \right)$$

Inoltre sia il nostro 4-parallelepipedo C definito esplicitamente come $C(t_1, t_2, t_3, t_4) = q_0 + \sum_i h_i t_i$. La funzione g è differenziabile ovunque fuorché nel punto q_0 , ed è nello stesso insieme di punti destro regolare, in quanto $\forall q \in \mathbb{H} \setminus \{q_0\}$, $\bar{\partial}_r g(q) = 0$. Da ciò segue, per il lemma, riportato anche sopra che $d\left(\frac{(q-q_0)^{-1}}{|q-q_0|^2} Dqf(q)\right) = 0$ ovunque tranne che in q_0 . Osserviamo che, seguendo un ragionamento del tutto analogo a quello del teorema 6.5, otteniamo che per ogni sotto-4-parallelepipedo C' di C che non contiene il punto q_0 , l'integrale

$$\iiint_{\partial C'} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = 0 \quad (6.40)$$

è pari a 0.

Dissezioniamo il 4-parallelepipedo in 81 sotto-parallelepiedi con spigoli

parallelî agli spigoli di C , $\{C_j\}_j$. Dall'equazione (6.40) potremo dedurre che

$$\iiint_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = \iiint_{\partial C_0} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q)$$

dove C_0 è un membro della suddetta partizione (i.e un 4-parallelepipedo con spigoli paralleli a C) tale che $q_0 \in \text{int}(C_0)$.

Sia δ un numero reale positivo: denotiamo esplicitamente il nostro 4-parallelepipedo C_0 come

$C_0(t_1, t_2, t_3, t_4) = q_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \delta h_j + \sum_{k=1}^4 \delta t_k h_k$, dove q_0 è il vertice di C , come definito prima, e h_i $i = 1, 2, 3, 4$ sono gli spigoli di C ; allora:

$$\min_{q \in \partial C_0} |q - q_0| = \min_{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 4} \left| \frac{dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz(\delta h_1, \delta h_2, \delta h_3, \delta h_4)}{Dq(\delta h_{i_1}, \delta h_{i_2}, \delta h_{i_3})} \right| = \delta W(h_1, h_2, h_3, h_4) \quad (6.41)$$

dove qui $W(h_1, h_2, h_3, h_4) = \min_{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 4} \left| \frac{dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz(h_1, h_2, h_3, h_4)}{Dq(h_{i_1}, h_{i_2}, h_{i_3})} \right|$. Siccome $f(q)$ per ipotesi è continua a q_0 , possiamo scegliere un $\delta > 0$ tale che $q \in C_0 \implies |f(q) - f(q_0)| \leq \epsilon \forall \epsilon > 0$. Quindi:

$$\left| \iiint_{\partial C_0} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dq[f(q) - f(q_0)] \right| \leq \frac{\max_{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 4} \{|Dq(h_{i_1}, h_{i_2}, h_{i_3})|\}}{W^3} \epsilon \quad (6.42)$$

Sia S^3 , come prima, la 3-sfera con elemento di volume $dS = r^3 \sin^2 \theta \sin \phi d\theta \wedge d\phi \wedge d\psi$. Notando che su S $Dq = (q - q_0)dS$, avremo che:

$$\iiint_{S^3} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dq = \iiint_{S^3} dS = 2\pi^2$$

Ma osserviamo che la 3-forma $\frac{q - q_0}{|q - q_0|^2} Dq$ è chiusa (cioè la sua derivata esterna è pari a 0) ed è continuamente differenziabile in $\mathbb{H} \setminus \{q_0\}$, avremo che per la proposizione 1.17 dell'introduzione:

$$\iiint_{\partial C_0} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dq = \iiint_{S^3} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dq = \iiint_{S^3} dS = 2\pi^2$$

sostituendo questo fatto nell'equazione (6.42), otteniamo la disegualanza:

$$\left| \iiint_{\partial C_0} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) - 2\pi^2 f(q_0) \right| \leq \frac{\max_{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 4} \{|Dq(h_{i_1}, h_{i_2}, h_{i_3})|\}}{W^3} \epsilon$$

Da cui, per l'arbitrarietà di ϵ , otterremo:

$$\iiint_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = \iiint_{\partial C_0} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = 2\pi^2 f(q_0)$$

e dividendo ambo i lati per $2\pi^2$ giungiamo alla dimostrazione dell'asserto:

$$f(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) \quad (6.43)$$

□

Ricordiamo che la funzione $G(q - q_0) = \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2}$ presente nell'integrale è una funzione \mathbb{R} -analitica eccetto che nel punto $q = q_0$. Da ciò segue che la funzione integranda sul lato destro dell'uguaglianza dell'enunciato del teorema appena dimostrato è una funzione continua di $(q, q_0) \in \partial C \times \text{int}(C)$ e, fissato un $q \in \partial C$, una funzione \mathbb{R} -analitica (i.e C^∞ nel senso classico) di q_0 in $\text{int}(C)$. Da ciò segue che l'integrale di tale funzione è una funzione \mathbb{R} -analitica di q_0 in $\text{int}(C)$ [Nota 6.2].

Enunciamo tale fatto più esaustivamente nel seguente corollario.

Corollario 6.3. *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione sinistro regolare in una regione $\Omega \subset \mathbb{H}$. Allora avremo che f sarà anche \mathbb{R} -analitica in Ω .*

Tutti i teoremi integrali per funzioni quaternioniche sinistro regolari valgono anche per funzioni destro-regolari, ovviamente moltiplicando f per Dq da destra anziché da sinistra. Seguirà dunque che il corollario appena enunciato è valido anche per funzioni destro regolari, i.e:

Corollario 6.4. *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione destro regolare in una regione $\Omega \subset \mathbb{H}$. Allora avremo che f sarà anche \mathbb{R} -analitica in Ω .*

Questo fatto ha 2 conseguenze molto importanti: la prima è che ogni funzione destro/sinistro regolare è una funzione armonica, in quanto la condizione necessaria di essere differenziabile "nel senso classico" almeno 2 volte può essere inglobata nella nozione di funzione regolare per il fatto appena dimostrato.

Corollario 6.5. *Ogni funzione $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ sinistro/destro regolare è armonica.*

La seconda, invece, è che potremo estendere il teorema di Cauchy-Fueter per ora dimostrato solo su bordi di 4-parallelepipedi (teorema 6.5) a bordi di 4-catene lisce.

Teorema 6.7 (Teorema di Cauchy-Fueter). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione sinistro regolare in un aperto $U \subset \mathbb{H}$, e sia C una 3-catena liscia in U omologa a 0 nell'omologia singolare differenziabile di U , cioè $C = \partial C'$ è il bordo di una 4-catena liscia singolare in U ; allora:*

$$\iiint_C Dqf(q) = \iiint_{\partial C'} Dqf(q) = 0 \quad (6.44)$$

Dimostrazione. Sappiamo che, per il lemma 6.2, $d(Dqf(q)) = 0$. Inoltre, per il corollario poc'anzi dimostrato avremo che la 3-forma $Dqf(q)$ è una forma liscia su U , pertanto potremo applicare il teorema di Stokes su catene lisce (teorema 1.9 dell'introduzione), ottenendo:

$$\iiint_C Dqf(q) = \iiint_{\partial C'} Dqf(q) = \iiint_{C'} d(Dqf(q)) = 0$$

□

Analogamente, utilizzando il teorema di Stokes per catene lisce, possiamo estendere anche la formula integrale di Cauchy-Fueter a contorni più generali. Necessiteremo, tuttavia, di introdurre la seguente nozione preliminare:

Definizione 6.8 (Indice di avvolgimento). *Sia $q \in \mathbb{H}$ e sia C un 3-ciclo liscio in $\mathbb{H} \setminus \{q\}$. Allora C è omologa ad una 3-catena $C' : \partial I^4 \rightarrow S_q^3$, dove qui S_q^3 è la sfera di raggio 1 con centro in q . L'**indice d'avvolgimento** di C attorno a q è il grado di Brouwer dell'applicazione C' (per la definizione di grado di Brouwer vedere la sezione 8 del capitolo 4).*

Teorema 6.8 (Formula integrale di Cauchy-Fueter per catene lisce). *Sia f una funzione regolare sinistra in un aperto $U \subset \mathbb{H}$. Sia $q_0 \in U$, e sia C una 3-catena liscia in $U \setminus \{q_0\}$ che è omologa, nell'omologia singolare differenziabile di $U \setminus \{q_0\}$, ad una 3-catena la cui immagine è ∂B per una palla quaternionica $B \subset U$; allora:*

$$nf(q_0) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) \quad (6.45)$$

where qui n è l'indice d'avvolgimento di C attorno a q_0 .

Dimostrazione. Per il caso $n = 0$ avremo che C sarà omologa a 0 in $U \setminus \{q_0\}$, i.e. sarà il bordo di una 4-catena liscia C_0 , $C = \partial C_0$. Essendo la 3-forma

$\frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q)$ chiusa e liscia in $U \setminus \{q_0\}$, avremo come conseguenza del teorema di Stokes che:

$$\frac{1}{2\pi^2} \iiint_C \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{C_0} d\left(\frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q)\right) = 0$$

Per il caso $n = 1$, C sarà omologa ad una 3-catena liscia $C' : \partial I^4 \rightarrow \partial B$, con $q_0 \in B \subset U$. La mappa C' ha inoltre grado di Brouwer pari ad 1; tenendo conto di questi fatti, avremo che C è omologa al bordo di un 4-parallelepipedo C_0 , $C \simeq \partial C_0$, tale che $q_0 \in \text{int } C_0$ e $C_0 \subset U$. Utilizzando ancora il fatto che la 3-forma $\frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q)$ è chiusa e liscia in $U \setminus \{q_0\}$, avremo:

$$\frac{1}{2\pi^2} \iiint_C \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{C_0} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = f(q_0)$$

per la formula integrale di Cauchy-Fueter per 4-parallelepipedi.

Per un generale $n \in \mathbb{N}$ avremo che C sarà omologa ad una 3-catena $C'' = \rho \circ C'$, dove $C' : \partial I^4 \rightarrow \partial B$ ha le stesse caratteristiche della mappa C' di prima, e l'applicazione $\rho : \partial B \rightarrow \partial B$ è un'applicazione di grado di Brouwer pari ad n della forma:

$$\rho(q_0 + r(v + jw)) = q_0 + r(v^n + jw)$$

Dissezioniamo ora la nostra catena C' come:

$$C' = \sum_{l=1}^n C'_l$$

dove l'immagine della sotto-catena C'_l è l'insieme:

$$\text{Im } C'_l = \left\{ q = q_0 + r(v + jw) \in \partial B ; \frac{2\pi(l-1)}{n} \leq \arg(v) \leq \frac{2\pi l}{n} \right\}$$

Ogni composizione $\rho \circ C'_l$ ha come immagine $\text{Im}(\rho \circ C'_l) = \partial B$ e indice d'avvolgimento pari ad 1 attorno a q_0 : pertanto, per il caso di prima avremo:

$$\frac{1}{2\pi^2} \iiint_C \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l=1}^n \iiint_{\rho \circ C'_l} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = nf(q_0)$$

Per il caso $n = -1$, la catena C è omologa ad una 3-catena C'' della forma $C'' = C' \circ K$, dove qui $C' : \partial I^4 \rightarrow \partial B$ ha grado di Brouwer pari ad 1, e

$K : \partial I^4 \rightarrow \partial I^4$ ha grado pari a -1 . Allora, per argomentazioni simili a prima, e prendendo la riflessione $(t_1, t_2, t_3, t_4) \rightarrow (1 - t_1, t_2, t_3, t_4)$ come il nostro K avremo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) &= \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{C'} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \iiint_{C'} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = -f(q_0) \end{aligned}$$

Infine, per un generico $n \in \mathbb{Z}^-$ (un intero negativo), basterà comporre l'argomento di sopra per $n = -1$ con la dissezione attuata per il caso di un $n \in \mathbb{N}$ generico. \square

Come corollario della formula integrale di Cauchy-Fueter avremo il teorema di Liouville quaternionico, che enunciamo qui di seguito:

Teorema 6.9 (Teorema di Liouville). *Sia f una funzione $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ regolare sinistra $\forall q \in \mathbb{H}$; allora se f è limitata (i.e esiste un numero reale positivo M tale che $|f(q)| \leq M \forall q \in \mathbb{H}$), f è costante.*

Dimostrazione. Per ipotesi, esiste un $M \in \mathbb{R}^+$ tale che $|f(q)| \leq M \forall q \in \mathbb{H}$. Sia C la 3-sfera centrata all'origine con raggio R tale che $R > \max\{|q_1|, |q_2|\}$, e siano q_1, q_2 due arbitrari quaternioni; allora per la formula integrale di Cauchy-Fueter su catene lisce avremo:

$$f(q_1) - f(q_2) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C \left[\frac{(q - q_1)^{-1}}{n|q - q_1|^2} - \frac{(q - q_2)^{-1}}{m|q - q_2|^2} \right] Dqf(q)$$

dove qui n ed m indicano gli indici d'avvolgimento di C attorno a q_1 e q_2 rispettivamente. Consideriamo ora $|f(q_1) - f(q_2)|$:

$$\begin{aligned} |f(q_1) - f(q_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C \left[\frac{(q - q_1)^{-1}}{n|q - q_1|^2} - \frac{(q - q_2)^{-1}}{m|q - q_2|^2} \right] Dqf(q) \right| \\ &\leq \gamma V(C) M \left| \frac{(q - q_1)^{-1}}{n|R - q_1|^2} - \frac{(q - q_2)^{-1}}{m|R - q_2|^2} \right| \end{aligned}$$

dove qui $\gamma \in \mathbb{R}$ e $V(C)$ è l'iper-volume di C in \mathbb{H} . Per $R \rightarrow \infty$, osserviamo che l'ultima espressione della catena di diseguaglianze di sopra tende a 0 per q nella palla B con centro 0 e raggio R (i.e per $|q| < R$), e pertanto avremo che $f(q_1) = f(q_2) \forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Ma ciò è equivalente a dire che la funzione $f(q)$ è costante, dimostrando così l'asserto. \square

Concludiamo questa sezione con una dimostrazione di un analogo quaternionico del teorema di Morera, altro analogo quaternionico di un importante teorema integrale dell'analisi complessa.

Teorema 6.10 (Teorema di Morera quaternionico, A.Sudbery, 1979). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione continua in un aperto $U \subset \mathbb{H}$ tale che:*

$$\iiint_{\partial C} Dqf(q) = 0$$

per ogni 4-parallelepipedo C contenuto in U . Allora f è sinistro-regolare in U .

Dimostrazione. La strategia dimostrativa sarà la seguente: dimostreremo anzitutto che le ipotesi assunte basteranno per rendere valida la formula integrale di Cauchy-Fueter per f , dopodiché dimostreremo che tale funzione è effettivamente sinistro-regolare.

Dimostriamo anzitutto che $\iiint_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = 0$ se $q_0 \notin C$, utilizzando la medesima argomentazione utilizzata per la dimostrazione della formula integrale di Cauchy-Fueter.

Come nel teorema 6.6 dissezioniamo il 4-parallelepipedo in una successione di sotto-parallelepipedi $\{C_n\}_n$ convergenti in un punto che chiameremo q_∞ in maniera da tale da far rispettare, come prima, la seguente disequazione:

$$\left| \iiint_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) \right| \leq 16^n \left| \iiint_{\partial C^n} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) \right| \quad (6.46)$$

Chiamiamo da ora in poi, per semplicità, la funzione $\frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} = G(q - q_0)$. Siccome per ipotesi abbiamo supposto che $q_0 \notin C$, avremo che $G(q - q_0)$ sarà in tale regione una funzione destro-regolare di q , e pertanto avremo (per un analogo del lemma 6.2 per funzioni destro-regolari quaternioniche) che:

$$dG_{q-q_0} \wedge Dq = 0$$

Inoltre, sarà valida anche la seguente espressione:

$$G(q - q_0) = G(q_\infty - q_0) + dG_{q_\infty - q_0}(q - q_\infty) + (q - q_\infty)r(q) \quad (6.47)$$

dove qui $r(q)$ tende a 0 per $q \rightarrow q_\infty$. Scriveremo inoltre:

$$f(q) = f(q_\infty) + s(q) \quad (6.48)$$

dove qui $s(q) \rightarrow 0$ per $q \rightarrow q_\infty$. Potremo a questo punto scrivere l'integrale

$$\iiint_{\partial C^n} G(q - q_0) Dqf(q), \text{ utilizzando le equazioni (6.47) e (6.48), come:}$$

$$\iiint_{\partial C^n} G(q - q_0) Dqf(q) = G(q_\infty - q_0) \iiint_{\partial C^n} Dqf(q) + \iiint_{\partial C^n} dG_{q_\infty - q_0}(q - q_\infty) Dqf(q_0)$$

$$+ \iiint_{\partial C^n} dG_{q_\infty - q_0}(q - q_\infty) Dqs(q) + \iiint_{\partial C^n} (q - q_\infty) r(q) Dqf(q)$$

Il primo dei quattro integrali è nullo in quanto, per ipotesi, abbiamo supposto che per ogni 4-parallelepipedo C $\iiint_{\partial C} Dqf(q) = 0$. Il secondo, a sua volta, si annulla in quanto $dG_{q_\infty - q_0} \wedge Dq = 0$, per la destro-regolarità di G . Ora, per $q \in \partial C^n$ avremo $|q - q_\infty| \leq \frac{1}{2^n}L$, dove qui L è la somma delle lunghezze degli spigoli di C . Siccome $dG_{q_\infty - q_0}$ è lineare, esisterà un numero reale M tale che:

$$|dG_{q_\infty - q_0}(q - q_\infty)| \leq M|q - q_\infty|$$

Il volume di ogni faccia del parallelepipedo C^n è al massimo $8^{-n}V$, dove qui V è il volume della faccia più grande di C . Pertanto:

$$\left| \iiint_{\partial C^n} G(q - q_0) Dqf(q) \right| \leq \frac{1}{16^n} [LMV\sigma_n + L\rho_n V(|f(q_\infty)| + \sigma_n)]$$

dove qui ρ_n e σ_n sono i valori massimi delle funzioni $r(q)$ e $s(q)$ rispettivamente su ∂C^n . Siccome ambedue tendono a 0 per $n \rightarrow \infty$, $\rho_n \rightarrow 0$ e $\sigma_n \rightarrow 0$, avremo che:

$$\left| \iiint_{\partial C^n} G(q - q_0) Dqf(q) \right| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty \implies$$

$$16^n \left| \iiint_{\partial C^n} G(q - q_0) Dqf(q) \right| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

e pertanto, per la disequazione (6.46), avremo che $\iiint_{\partial C} \frac{(q - q_0)^{-1}}{|q - q_0|^2} Dqf(q) = 0$. Consideriamo ora il caso in cui $q_0 \in C$: per ciò che abbiamo appena dimostrato, avremo che potremo sostituire il parallelepipedo C con un più piccolo contenente a sua volta q ; da questo momento in poi le argomentazioni fatte per la dimostrazione della formula integrale di Cauchy-Fueter possono essere adattate in maniera medesima alle ipotesi attuali in quanto dipendono solo dalla continuità di f . La seguente espressione è pertanto valida:

$$f(q) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{\partial C} G(q' - q) Dq' f(q')$$

per ogni 4-parallelepipedo C con $q_0 \in \text{int } C \subset U$. Per argomentazioni simili a quelle del corollario 6.3 avremo che f è una funzione differenziabile (nel senso classico). Calcolando direttamente $\bar{\partial}_l f(q)$ otteniamo:

$$\bar{\partial}_l f(q) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{\partial C} \bar{\partial}_l [G(q' - q)] Dq' f(q') = 0 \quad (6.49)$$

che è pari a 0 in quanto la funzione G è regolare. Da ciò segue che f è una funzione regolare sinistra. \square

È precisamente a partire dal teorema di Morera quaternionico che C.A Deavours [”The Quaternion Calculus”, Amer. Math. Monthly 80 (1973), pagine 995-1008] [6] definisce il concetto di funzione regolare di una variabile quaternionica. Vista l’impossibilità di poter definire una derivata di una funzione quaternionica come limite di un rapporto incrementale (destro o sinistro), come visto nella sezione 4 di questo capitolo, si può scegliere di definire il concetto di funzione regolare proprio come quella classe di funzioni che rispetta un analogo ipercomplesso del teorema di Cauchy. Da codesto punto di partenza, poi, nel paper in questione vengono ottenuti molti risultati circa le funzioni Fueter-regolari che abbiamo esposto in questo capitolo.

6.8 Costruire funzioni regolari da funzioni armoniche

Abbiamo visto prima che possiamo scrivere l’operatore laplaciano in termini degli operatori definiti nella sezione 3 come:

$$\Delta f = 4\bar{\partial}_l \partial_l f = 4\partial_l f \bar{\partial}_l f \quad (6.50)$$

Supponiamo di avere una funzione armonica f ; essendo $\Delta f = 0$, avremo che $4\bar{\partial}_l \partial_l f = 0$, i.e. $\partial_l f$ soddisfa l’equazione di Cauchy-Riemann-Fueter e dunque è sinistro-regolare. Da questa osservazione segue che potremo costruire funzioni regolari quaternioniche a partire da soluzioni dell’equazione di Laplace in 4 dimensioni:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 0 \quad (6.51)$$

Un'espressione integrale per (quasi) tutte le soluzioni della seguente equazione ci perviene da Whittaker (1903) [50]:

$$f(t, x, y, z) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(t \cos(u_1) \cos(u_2) + x \cos(u_1) \sin(u_2) + y \sin(u_1) + iz, u_1, u_2) du_1 du_2 \quad (6.52)$$

Una semplificazione di quest'ultima a un solo integrale è invece dovuta a Bateman (Solution of Partial Differential Equations, 1904, pp.457) [3]:

$$f(t, x, y, z) = \int_0^{2\pi} \Phi(t \cos(u) + x \sin(u) + iy, t \sin(u) - y \cos(u) + iz, u) du \quad (6.53)$$

dove qui $\Phi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ è una funzione in 3 variabili complesse.

Ci sarebbero non poche precisazioni da fare su questa faccenda, ma essendo questo testo una monografia incentrata prettamente sui quaternioni e le loro proprietà, ci limiteremo a indirizzare il lettore curioso alle varie risorse presenti nella bibliografia (in particolare [50], [3] e [10]).

Detto ciò, utilizzando le espressioni appena introdotte e il fatto presentato all'inizio della sezione, andiamo ora a fornire alcuni esempi pratici di costruzione di funzioni regolari a partire da funzioni armoniche:

Esempio 6.5. Si consideri la funzione $\Phi : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ definita come $\Phi(z_1, z_2, z_3) = z_1^2$. L'integrale (6.53) si riduce a:

$$f(t, x, y, z) = \int_0^{2\pi} (t \cos(u) + x \sin(u) + iy)^2 du$$

espandendo il quadrato, e utilizzando semplici regole del calcolo integrale reale otteniamo:

$$f(t, x, y, z) = \pi t^2 + \pi x^2 - 2\pi y^2$$

Calcoliamo ora $\partial_I f = \frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial t} - e_i \frac{\partial f}{\partial x_i})$:

$$\partial_I f = \frac{1}{2}(2\pi t - 2\pi xi + 4\pi yj) = \pi t - \pi xi + 2\pi yj$$

chiamiamo la funzione appena ottenuta $\tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Verifichiamo che \tilde{f} sia effettivamente una funzione regolare:

$$\bar{\partial}_I \tilde{f} = \pi + i(-\pi i) + j(2\pi j) = 0$$

Esempio 6.6. Sia $\Phi(z_1, z_2, z_3) = z_2 z_1 + z_2^2 + z_3$. L'integrale (6.53) diventa:

$$f = \int_0^{2\pi} [(t \sin(u) - y \cos(u) + iz)(t \cos(u) + x \sin(u) + iy) + (t \sin(u) - y \cos(u) + iz)^2 + u] du$$

Espandendo il tutto, otteniamo che l'integrando è pari a $t^2 \sin(u) \cos(u) + xt \sin^2(u) + yti \sin(u) - ty \cos^2(u) - xy \cos(u) \sin(u) - y^2 i \cos(u) + tiz \cos(u) + zxi \sin(u) - yz + u + t^2 \sin^2(u) + y^2 \cos^2(u) - z^2 + 2zit \sin(u) - 2ziy \cos(u) - 2yt \cos(u) \sin(u)$. Svolgendo l'integrale otteniamo un'espressione per la funzione $f(t, x, y, z)$:

$$f = \pi xt - \pi yt - 2\pi yz + 2\pi^2 + \pi t^2 - 2\pi z^2 + \pi y^2$$

Chiamiamo come prima $\tilde{f} = \partial_l f = \frac{1}{2}(\pi x - \pi y + 2\pi t - \pi ti - 2\pi yj + 2\pi zj + \pi tj + 2\pi yk + 4\pi zk)$. La funzione ottenuta è sinistro regolare. La sua derivata sinistra vale:

$$\tilde{f}'_l(q) = -2\pi j - 4\pi + 2\pi i$$

Esercizio 6.8. Calcolare la derivata sinistra $\tilde{f}'_l(q)$ della funzione dell'esempio 6.5.

Ci sono altri modi per costruire funzioni regolari a partire da funzioni armoniche, vediamo il seguente:

Teorema 6.11. Sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita su un sottoinsieme stellato dei quaternioni, $U \subset \mathbb{H}$. Se u è armonica e ha derivate parziali seconde continue, allora esiste una funzione regolare f definita su U tale che la sua parte scalare è pari a u , i.e:

$$\text{Sc}(f) = u$$

Dimostrazione. Supponiamo, senza perdita di generalità, che l'insieme U sia stellato rispetto all'origine; se così non fosse, infatti, dovremo semplicemente applicare una traslazione, cambiando di poco la dimostrazione che andremo a presentare.

Procederemo impostando la seguente dimostrazione costruttiva: vogliamo dimostrare che la funzione f definita come:

$$f(q) = u(q) + 2 \operatorname{Vec} \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q ds \quad (6.54)$$

è una funzione regolare.

Cominciamo lavorando sulla parte scalare dell'integrale $\int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q ds$:

Osserviamo anzitutto che $\text{Sc} \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q ds = \text{Sc} \int_0^1 s^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}(sq) - e_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(sq) \right) q ds$,

e svolgendo una moltiplicazione quaternionica avremo $\text{Sc} \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q =$

$\frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \left(t \frac{\partial u}{\partial t}(sq) + x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(sq) \right) ds$. Avendo $t \frac{\partial u}{\partial t}(sq) + x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(sq) = \frac{du(sq)}{ds}$, otterremo $\text{Sc} \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q = \frac{1}{2} \int_0^1 s^2 \frac{du(sq)}{ds} ds$. Integrando per parti l'integrale appena ottenuto, infine, avremo:

$$\text{Sc} \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q = \frac{1}{2} u(q) - \int_0^1 s u(sq) ds$$

da cui ricaviamo $u(q) = 2 \text{Sc} \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q ds + 2 \int_0^1 s u(sq) ds$. Sostituendo questa espressione nell'equazione (6.54), otteniamo

$$f(q) = 2 \int_0^1 s^2 \partial_l u(sq) q ds + 2 \int_0^1 s u(sq) ds$$

Verifichiamo che f è regolare calcolando $\bar{\partial}_f$. Applicando l'operatore $\bar{\partial}_l$ ad f e differenziando sotto il segno di integrale (possiamo farlo in quanto le funzioni integrande sono differenziabili e hanno derivate parziali continue) otteniamo:

$$\bar{\partial}_l f = 2 \int_0^1 s^2 \bar{\partial}_l [\partial_l u(sq)] q ds + \int_0^1 s^2 (\partial_l u(sq) + e_i \partial_l u(sq) e_i) ds + 2 \int_0^1 s^2 \bar{\partial}_l u(sq) ds$$

Essendo u armonica, avremo che $\bar{\partial}_l \partial_l u(sq) = \Delta u(sq) = 0$, ed inoltre, manipolando la funzione integranda del secondo integrale:

$$\partial_l u(sq) + e_i \partial_l u(sq) e_i = -2 \overline{(\partial_l u(sq))} = -2 \bar{\partial}_l u(sq)$$

i.e il secondo integrale è uguale ma opposto in segno al terzo, e otterremo dunque il risultato sperato:

$$\bar{\partial}_l f = 0$$

dunque f è regolare. □

Nel caso in cui la regione stellata presa in considerazione non dovesse essere stellata rispetto all'origine, ma bensì rispetto ad un altro punto q_0 , l'espressione (6.54) per f ricavata nel teorema appena dimostrato diventa:

$$f(q) = u(q) + 2 \text{Vec} \int_0^1 s^2 \partial_l u((1-s)q_0 + sq)(q - q_0) ds \quad (6.55)$$

Esempio 6.7. Siano U i quaternioni meno l'origine e la retta reale negativa, $U = \mathbb{H} \setminus \{x \in \mathbb{R} ; x \leq 0\}$; quest'insieme è un'insieme stellato rispetto a $1 \in \mathbb{H}$. Consideriamo su quest'insieme la funzione $u : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $u(q) := \frac{1}{|q|^2}$. La funzione è armonica su U , e dunque possiamo applicare il risultato appena derivato per trovare una funzione regolare $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ la cui parte reale è $\frac{1}{|q|^2}$. Calcoliamo le derivate parziali di u rispetto a t, x, y, z :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-2t}{(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-2x}{(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2y}{(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-2z}{(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} \end{cases}$$

Da cui, sostituendo in $\partial_t u(q) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - i \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ e ricordando che $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$ avremo che $\partial_t u(q) = -\frac{q^{-1}}{|q|^2}$, e sostituendo tutto ciò nella formula (6.55) otteniamo un'espressione per f :

$$f(q) = \begin{cases} -(q \operatorname{Vec}(q))^{-1} - \frac{\operatorname{Vec}(q)}{|\operatorname{Vec}(q)|^3} \arctan \left(\frac{|\operatorname{Vec}(q)|}{\operatorname{Sc}(q)} \right) & \text{se } \operatorname{Vec}(q) \neq 0 \\ \frac{1}{|q|^2} & \text{se } q \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Chiameremo la funzione f riportata qui sopra $-2\mathcal{L}(q)$, da cui:

$$\mathcal{L}(q) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left((q \operatorname{Vec}(q))^{-1} + \frac{\operatorname{Vec}(q)}{|\operatorname{Vec}(q)|^3} \arctan \left(\frac{|\operatorname{Vec}(q)|}{\operatorname{Sc}(q)} \right) \right) & \text{se } \operatorname{Vec}(q) \neq 0 \\ \frac{-1}{2|q|^2} & \text{se } q \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Possiamo scrivere $\mathcal{L}(q)$ più esplicitamente come :

$$\mathcal{L}(q) = \begin{cases} -\frac{|\operatorname{Vec}(q)|^2 + te_i x_i}{2|\operatorname{Vec}(q)|^2(|\operatorname{Vec}(q)|^2 + t^2)} + \frac{e_i x_i}{2|\operatorname{Vec}(q)|^3} \arctan \left(\frac{|\operatorname{Vec}(q)|}{t} \right) & \text{se } \operatorname{Vec}(q) \neq 0 \\ \frac{-1}{2|q|^2} & \text{se } q \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Dove qui $t = \text{Sc}(q)$.

Abbiamo riscritto ora \mathcal{L} in modo da poter computare la sua derivata sinistra più agevolmente; andiamola a computare utilizzando la formula derivata prima ormai ben nota al lettore:

$$\mathcal{L}'(q) = -2\partial_l \mathcal{L} = \frac{q^{-1}}{|q|^2} = G(q)$$

Possiamo notare un'interessante parallelo con la funzione logaritmo in analisi complessa: in analisi quaternionica, la funzione logaritmo derivata nel capitolo 5 non è regolare nel senso presentato in questo capitolo (nel senso di Fueter), ma ciò nonostante esisterà una funzione regolare che faccia da primitiva alla funzione che compare nella formula integrale di Cauchy-Fueter, $G(q - q_0)$, così come in \mathbb{C} $\log(z)$ fa da primitiva alla funzione $\frac{1}{z}$ che compare nella formula integrale di Cauchy complessa.

Conclusa questa discussione, passiamo ora in rassegna ad altri metodi per costruire funzioni regolari di una variabile quaternionica.

Nella prossima sezione, in particolare, vedremo come costruire funzioni regolari a partire da funzioni olomorfe nel piano complesso, e vedremo inoltre altre proprietà che accomunano la funzione regolare $\mathcal{L}(q)$ con la funzione logaritmo complessa.

6.9 Costruire funzioni regolari da funzioni \mathbb{C} -olomorfe

Prima di dare un metodo per costruire funzioni regolari a partire da funzioni \mathbb{C} -olomorfe, diamo alcune definizioni preliminari:

Definizione 6.9 (Inclusione dei numeri complessi nei quaternioni). $\forall q \in \mathbb{H}$ chiameremo $\eta_q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$ l'inclusione dei numeri complessi nei quaternioni tale che q sia l'immagine di un numero complesso $\zeta(q)$ nella metà superiore del piano complesso; in simboli:

$$\eta_q(x + iy) = x + \text{sgn}(\text{Vec}(q))y \quad (6.56)$$

$$\zeta(q) = \text{Sc}(q) + i|\text{Vec}(q)| \quad (6.57)$$

Andiamo adesso a dimostrare il risultato che ci permetterà di costruire funzioni regolari a partire da funzioni olomorfe:

Teorema 6.12. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f = u(x, y) + iv(x, y)$ una funzione olomorfa in un dominio $U \subset \mathbb{C}$ e definiamo $\tilde{f}(q)$ essere:

$$\tilde{f}(q) = \eta_q \circ f \circ \zeta(q) \quad (6.58)$$

Allora il laplaciano di \tilde{f} , $\Delta \tilde{f}$ è una funzione regolare nell'insieme $\zeta^{-1}(U) \subset \mathbb{H}$.

Dimostrazione. Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ la nostra funzione olomorfa di una variabile complessa $z = x + iy$ in U . Per semplificare la notazione di (6.56) e (6.57), chiameremo $|\text{Vec}(q)| = r$, $\text{Sc}(q) = t$ e $\text{sgn}(\text{Vec}(q)) = \vec{r}$. La funzione quaternionica $\tilde{f}(q)$ indotta da $f(z)$ sarà allora pari a:

$$\tilde{f}(q) = u(t, r) + \vec{r}v(t, r)$$

La funzione appena indotta non sarà in generale una funzione regolare; convinciamoci di ciò calcolandone il laplaciano:

$$\Delta \tilde{f} = \Delta u + \Delta(\vec{r}v) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v\right)\vec{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\vec{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\vec{r}$$

Essendo la funzione f olomorfa, per ipotesi avremo come conseguenza immediata delle equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0$$

Segue da ciò che potremo ridurre il laplaciano di \tilde{f} a semplicemente:

$$\Delta \tilde{f} = \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + 2\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} v\right)\vec{r} \quad (6.59)$$

Sfruttando ancora l'assunzione che f sia olomorfa, avremo che per le equazioni di Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial v}{\partial t}$, e sostituendo ciò in (6.59) otteniamo:

$$\Delta \tilde{f} = 2\left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v}{r}\right) + \vec{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right] \quad (6.60)$$

L'espressione appena ottenuta non è altro che la negazione dell'operatore ∂_t applicato su $\frac{v}{r}$, il tutto moltiplicato per 4.

Ricordiamo quanto detto nella sezione in cui abbiamo affrontato una formulazione vettoriale delle equazioni di Cauchy-Riemann-Fueter, in questo caso ci converrà scrivere l'equazione (6.60) utilizzando i quaternioni formali definiti come $\square = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}$ e $\bar{\square} = \frac{\partial}{\partial t} - \vec{\nabla}$. In questo caso avremo:

$$\Delta \tilde{f} = -2\bar{\square}\left(\frac{v}{r}\right)$$

Ma il laplaciano, come visto nella sezione 3, è pari a $\square\bar{\square} = \bar{\square}\square$, e dunque avremo $-2\bar{\square}\left(\frac{v}{r}\right) = \square\bar{\square}\tilde{f}$ da cui:

$$\square\tilde{f} = -2\frac{v}{r} \quad (6.61)$$

e

$$\bar{\square}\tilde{f} = 2\frac{v}{r} \quad (6.62)$$

Abbiamo appena visto che, in generale, funzioni del tipo \tilde{f} generate da funzioni olomorfe $f = u(x, y) + iv(x, y)$ non sono regolari: tuttavia, osservando che $\Delta\left(\frac{v}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) = 0$, e applicando l'operatore laplaciano ad ambo i lati dell'equazione (6.61) avremo che $\square(\Delta\tilde{f}) = 0 \iff \bar{\partial}_l(\Delta\tilde{f}) = 0$, cioè la funzione $\Delta\tilde{f}$ è regolare $\forall q \in \zeta^{-1}(U)$.

□

Questo risultato è di grande importanza per un gran numero di ragioni. Prima di parlarne, tuttavia, introduciamo questo corollario immediato.

Corollario 6.6. *Le funzioni quaternioniche indotte da funzioni olomorfe soddisfano l'equazione biarmonica, in simboli:*

$$\Delta\Delta\tilde{f} = 0$$

Tornando al punto di prima; il lettore potrà ricordare come menzionammo già nella sezione sull'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter che alcune importanti funzioni, come $f(q) = q$ e $f(q) = q^2$ non sono generalmente regolari (una non lo è in nessun punto, l'altra solo in una sottoregione di \mathbb{H}). Avremo come corollario che generalmente funzioni esprimibili come serie di potenze quaternioniche convergenti del tipo:

$$\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(q - q_0)^n$$

(dove a_n è una costante quaternionica) non sono regolari. Tuttavia, è possibile dimostrare che lo sono serie quaternioniche del tipo

$$\tilde{\phi}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta (q - q_0)^n$$

Ed è precisamente ciò che andremo a fare ora:

Proposizione 6.10. *Sia $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione quaternionica esprimibile come serie di Δ -potenze:*

$$\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta (q - q_0)^n$$

allora $\phi(q)$ è regolare.

Dimostrazione. La strategia è la seguente: dimostreremo anzitutto che funzioni del tipo $(q - q_0)^n$ sono indotte dalle funzioni olomorfe $(z - z_0)^n$ in \mathbb{C} , e dopodiché come corollario del teorema 6.12 avremo che i laplaciani di queste funzioni saranno funzioni regolari. Infine, sfruttando il fatto che le funzioni regolari quaternioniche sono chiuse rispetto all'addizione, seguirà che queste serie sono funzioni regolari.

Senza perdita di generalità, supponiamo che la serie in questione sia centrata nell'origine, i.e. $q_0 = 0$. Dimostriamo ora per induzione che funzioni del tipo $f(z) = z^n$ inducono funzioni quaternioniche del tipo $\tilde{f} = q^n$.

Per il caso base, selezioniamo $n = 1$, i.e. $f(z) = z = x + iy$. Allora la funzione indotta sarà pari a $\tilde{f}(q) = t + \frac{xi + yj + zk}{|xi + yj + zk|}(|xi + yj + zk|) = t + xi + yj + zk = q$. Supponiamo che tale relazione sia valida anche per un certo $n = k$, vogliamo ora dimostrare che è valida per $n = k + 1$. La funzione $f(z) = z^{k+1}$ si può scrivere come $f(z) = zz^k$; decomponiamo z^k nelle sue parti immaginarie e reali, che chiameremo $z^k = \phi_1(z) + i\phi_2(z)$. Allora possiamo scrivere $f(z)$ in termini delle sue parti reali e immaginarie come:

$$f(z) = x\phi_1 - y\phi_2 + i(\phi_1 y + x\phi_2)$$

La sua funzione indotta, quindi, sarà pari a $\tilde{f}(q) = t\phi_1(t, r) - r\phi_2(t, r) + \vec{r}\left(r\phi_1(t, r) + t\phi_2(t, r)\right) = t\phi_1(t, r) - r\phi_2(t, r) + \vec{r}\vec{r}\phi_1(t, r) + \vec{r}t\phi_2(t, r)$.

Ricordando tuttavia che per il passo induttivo abbiamo supposto che q^k fosse pari a $\phi_1(t, r) + \vec{r}\phi_2(t, r)$ (la funzione indotta da z^k) e scrivendo $q = t + xi + yj + zk$ come $q = t + rr\vec{r}$ (in quanto $r = |xi + yj + zk|$ e $\vec{r} = \text{sgn}(\text{Vec}(q)) = \frac{xi + yj + zk}{|xi + yj + zk|}$) avremo:

$$q^{k+1} = (t + rr\vec{r})(\phi_1(t, r) + \vec{r}\phi_2(t, r)) = t\phi_1 + tr\vec{r}\phi_2 + rr\vec{r}\phi_1 - r\phi_2 = \tilde{f}(q)$$

abbiamo dunque dimostrato per induzione che le funzioni olomorfe del tipo $f(z) = z^n$ inducono i monomi quaternionici $\tilde{f}(q) = q^n$; da ciò segue che i loro laplaciani siano regolari e le somme dei suddetti anche. \square

Chiameremo serie di potenze di laplaciani di monomi quaternionici del tipo $(q - q_0)^n$ Δ -serie di potenze, e diremo che una funzione $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ esprimibile come una Δ -serie di potenze sia Δ -analitica.

Osserviamo che per il teorema appena dimostrato, avremo che tutte le funzioni Δ -analitiche sono anche funzioni regolari.

Infine, chiameremo somme pesate di laplaciani di monomi del tipo $(q - q_0)$

$$\text{"}\Delta\text{-polinomi", } \eta(q) = \sum_{m=0}^n \Delta(q - q_0)^m.$$

Lemma 6.3. *Sia \tilde{f} una funzione quaternionica indotta da una funzione olomorfa di \mathbb{C} , f . Allora:*

$$\bar{\square} \tilde{f} = 2 \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \frac{v}{r} \right) \quad (6.63)$$

Esercizio 6.9. *Dimostrare il lemma 6.3.*

Dimostriamo ora un risultato che ci permetterà di computare più agevolmente i laplaciani di funzioni indotte da funzioni olomorfe:

Proposizione 6.11. *Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa; sia $\tilde{f} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ la sua funzione indotta, allora avremo:*

$$\Delta \tilde{f} = \frac{2}{r} \vec{r} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} - \frac{v}{r} \right)$$

Dimostrazione. Abbiamo derivato nella dimostrazione del teorema 6.12 l'equazione (6.61), $\square \tilde{f} = -2 \frac{v}{r}$. Applicando l'operatore $\bar{\square}$ ad ambo i lati di questa identità otterremo:

$$\bar{\square} \square \tilde{f} = \Delta \tilde{f} = -2 \bar{\square} \left(\frac{v}{r} \right) = -\frac{2}{r} (\bar{\square} v + \frac{v}{r} \vec{r})$$

Ma v è la parte scalare della funzione indotta \tilde{f} , e dunque avremo:

$$v = \frac{1}{2} (\vec{r} \tilde{f}^* - \vec{r} \tilde{f})$$

Applicando l'operatore gradiente coniugato $\bar{\square}$ ad ambo i lati dell'equazione otterremo:

$$\bar{\square} v = \frac{1}{2} (\bar{\square} (\vec{r} \tilde{f}^*) - \bar{\square} (\vec{r} \tilde{f}))$$

Si dimostra celermente che le funzioni $\vec{r} \tilde{f}^*$ e $\vec{r} \tilde{f}$ sono le funzioni indotte dalle funzioni complesse $i\bar{f}$ e if . Allora, utilizzando le equazioni (6.62) e (6.61), avremo:

$$\bar{\square} v = \frac{1}{2} \left(2 \frac{u}{r} \right) - \frac{1}{2} \left(2 \vec{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \frac{u}{r} \right) = -\vec{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$$

Da cui, sostituendo $\square v$ nell'espressione iniziale per $\Delta \tilde{f}$, otteniamo l'asserto. \square

L'identità appena dimostrata, applicata nel caso particolare di laplaciani di Δ -polinomi, ci permette di ricavare le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \Delta(q^n) = -4((n-1)q^{n-2} + (n-2)q^{n-3}\bar{q} + (n-3)q^{n-4}\bar{q}^2 + \dots) \\ \Delta(q^{-n}) = -4(nq^{-n-1}\bar{q}^{-1} + (n-1)q^{-n}\bar{q}^{-2} + \dots + q^{-2}\bar{q}^{-n}) \end{cases} \quad (6.64)$$

Esercizio 6.10. Sia \tilde{f} la funzione quaternionica indotta dalla funzione olomorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dimostrare che la derivata sinistra di $\Delta \tilde{f}$ è pari al laplaciano della funzione indotta dalla derivata complessa di f , in simboli:

$$(\Delta \tilde{f})'_l = \Delta \tilde{f}' \quad (6.65)$$

Il seguente esempio è alquanto interessante e rafforza l'intuizione già costruita in precedenza sul legame tra $\mathcal{L}(q), G(q)$ e $\log(z), \frac{1}{z}$. Infatti per $f(z) = \log(z)$ avremo $\Delta \tilde{f} = -4\mathcal{L}(q)$, mentre per $g(z) = \frac{1}{z}$ avremo $\Delta \tilde{g} = -4G(q)$; in altre parole, la funzione \mathcal{L} primitiva di $G(q)$ (la funzione che compare nella formula integrale di Cauchy-Fueter) è indotta dal logaritmo naturale complesso $\log(z)$, primitiva della funzione z^{-1} che compare nella formula integrale di Cauchy complessa.

Esercizio 6.11. Calcolare la funzione quaternionica indotta \tilde{f} per le seguenti funzioni olomorfe in \mathbb{C} :

- $f(z) = \sin(z)$
- $f(z) = e^z$
- $f(z) = z^4 - \cos(z)\sin(z)$

Per ognuna di queste, calcolare il laplaciano della funzione indotta per ottenere una funzione regolare, e calcolare per ciascuna di queste la sua derivata sinistra.

6.10 Altri metodi per costruire funzioni regolari

Introduciamo qui di seguito alcuni metodi ulteriori per costruire funzioni regolari; nella proposizione precedente, in particolare, vedremo come costruire funzioni regolari in un punto $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ data una funzione regolare nel suo inverso moltiplicativo q^{-1} .

Proposizione 6.12. *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione quaternionica. Definiamo $If : \mathbb{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}$ come:*

$$If(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2} f(q^{-1})$$

Allora, se f è regolare in q^{-1} , If è regolare in q .

Dimostrazione. Ci basta dimostrare che $Dq \wedge d(IF(q)) = 0$. La nostra funzione $If(q)$ è data dal prodotto della funzione $G(q) = \frac{q^{-1}}{|q|^2}$ definita prima per la funzione calcolata nell'inverso moltiplicativo di $q \in \mathbb{H}$, $q \neq 0$. Sia ora $\mathfrak{I} : \mathbb{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}$ la mappa inversione definita come $\mathfrak{I}(q) = q^{-1}$, segue che potremo scrivere If come:

$$If(q) = G(q)(f \circ \mathfrak{I})$$

Calcoliamo prima il differenziale esterno di quest'ultima: applicando la regola del prodotto per il differenziale esterno otteniamo:

$$d(IF) = dG_q f(q^{-1}) + G(q)d(f \circ \mathfrak{I})$$

ma vediamo che $d(f \circ \mathfrak{I})$, per un risultato ben noto di geometria differenziale (vedi introduzione) è semplicemente il pullback del differenziale di f rispetto a \mathfrak{I} in q^{-1} , $d(f \circ \mathfrak{I}) = \mathfrak{I}^* df_{q^{-1}}$.

Dalle considerazioni appena fatte segue che potremo scrivere $Dq \wedge d(IF)$ come:

$$Dq \wedge d(IF) = Dq \wedge dG_q f(q^{-1}) + Dq \wedge G(q)\mathfrak{I}^* df_{q^{-1}} = Dq \wedge G(q)\mathfrak{I}^* df_{q^{-1}}$$

in quanto G è una forma chiusa e dunque $dG_q = 0$. Osserviamo ora che, per le proprietà della 3-forma Dq dimostrate nella sezione 2 di questo capitolo avremo:

$$\mathfrak{I}^* Dq(h_1, h_2, h_3) = Dq(-q^{-1}h_1q^{-1}, -q^{-1}h_2q^{-1}, -q^{-1}h_3q^{-1}) = -\frac{q^{-1}}{|q|^4} Dq(h_1, h_2, h_3)q^{-1}$$

Da cui segue che $DqG(q) = -|q|^2 q \mathfrak{I}^* Dq$. Ma i pullback mantengono il prodotto esterno, e inserendo quest'identità appena trovata nella nostra equazione di sopra otteniamo:

$$Dq \wedge d(IF) = -|q|^2 q \mathfrak{I}^*(Dq \wedge df_{q^{-1}})$$

Osserviamo che se f è regolare a q^{-1} , allora per il lemma 6.2 avremo che $Dq \wedge df_{q^{-1}} = 0$, e dunque $Dq \wedge d(IF) = 0$, i.e. If è regolare in q . \square

Proposizione 6.13. *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione di una variabile quaternionica e $a, b \in \mathbb{H}$ due quaternioni. Definiamo $M(a, b)f(q)$ come:*

$$M(a, b)f(q) := bf(aqb)$$

Allora se f è regolare in aqb , $M(a, b)f$ è regolare in q .

Dimostrazione. Sia $\mu : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definita come $\mu(q) := aqb$ dove a, b sono due quaternioni costanti. Allora il pullback di Dq rispetto a μ è pari a :

$$\mu^*Dq = Dq(ah_1b, ah_2b, ah_3b) = |a|^2|b|^2aDq(h_1, h_2, h_3)b$$

Da cui otteniamo un'espressione per $Dq(h_1, h_2, h_3)$ in termini del suo pullback rispetto a μ , che ci sarà utile più tardi:

$$Dq(h_1, h_2, h_3) = |a|^{-2}|b|^{-2}a^{-1}\mu^*Dq(h_1, h_2, h_3)b^{-1}$$

Per dimostrare ora che $M(a, b)f$ è regolare in q se f è regolare in $\mu(q)$ non ci resta che computare il prodotto esterno di Dq per il differenziale esterno di $M(a, b)f$, e verificare che sia pari a 0.

Vediamo che $d(M(a, b)f)_q = bd(f \circ \mu)_q = b\mu_q^*df_{\mu(q)}$ (per un'applicazione del medesimo risultato applicato anche prima), da cui segue che:

$$Dq \wedge d(M(a, b)f)_q = |a|^{-2}|b|^{-2}a^{-1}\mu_q^*Dq(h_1, h_2, h_3)b^{-1} \wedge b\mu_q^*df_{\mu(q)}$$

Utilizzando ora le proprietà del prodotto esterno \wedge e ricordando che i pullback conservano i prodotti esterni, avremo:

$$Dq \wedge d(M(a, b)f)_q = |a|^{-2}|b|^{-2}a^{-1}\mu^*(Dq \wedge df_{\mu(q)}) = 0 \quad (6.66)$$

nel caso in cui f è regolare in $\mu(q) = aqb$, in quanto $Dq \wedge df_{\mu(q)} = 0$

□

È possibile infine costruire funzioni regolari anche a partire da omografie quaternioniche. Dimostriamo anzitutto il seguente risultato, che ci fornirà la forma algebrica generale di un'omografia quaternionica.

Proposizione 6.14. *Sia $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \{\infty\} \cong S^4$ la compattificazione di Alexanderoff dei quaternioni, vista nel capitolo 4. Allora una funzione $f : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{H}^*$ è un'omografia (i.e una funzione conforme che preserva l'orientamento) se e solo se f è della forma:*

$$f(q) = (aq + b)(cq + d)^{-1} \quad (6.67)$$

per $a, b, c, d \in \mathbb{H}$.

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando la direzione \Leftarrow : supponiamo che f sia della forma $f(q) = (aq + b)(cq + d)^{-1}$. Allora, f avrà differenziale pari a:

$$df_q = (ac^{-1}d - b)(cq + d)^{-1}cdq(cq + d)^{-1}$$

osserviamo che il differenziale è della forma $adq\beta$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$, che è una combinazione di rotazioni e dilatazioni, e dunque f è un'applicazione conforme e che preserva l'orientamento.

Supponiamo ora invece che f sia un'applicazione conforme che preserva l'orientamento; l'insieme di tali applicazioni è generato da applicazioni del tipo $q \rightarrow \alpha q\beta$, $q \rightarrow q + \gamma$ e $q \rightarrow q^{-1}$. Osserviamo che componendo una funzione del tipo (6.67) con una di queste applicazioni ci restituisce un'altra funzione del tipo (6.67), da cui deduciamo che, chiamando D l'insieme di funzioni del tipo (6.67) e C l'insieme delle funzioni conformi che preservano l'orientamento: $CD \subset D$, da cui $C \subset D$ e dunque, unito al punto precedente $C = D$, i.e una funzione dalla compattificazione dei quaternioni in sé stessa è un'applicazione conforme che preserva l'orientamento se e solo se è del tipo (6.67). \square

Una volta ottenuta una forma per funzioni conformi quaternioniche, andiamo a dimostrare il risultato già accennato prima:

Proposizione 6.15. *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione di una variabile quaternionica e sia $v(q) = (aq + b)(cq + d)^{-1}$ un'applicazione conforme. Definiamo $M(v)f$ come:*

$$[M(v)f](q) = \frac{1}{|b - ac^{-1}d|^2} \frac{(cq + d)^{-1}}{|cq + d|^2} f(v(q))$$

Allora, se f è regolare in $v(q)$, $M(v)f(q)$ è regolare in q .

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema segue come corollario immediato degli altri due risultati dimostrati in questa sezione una volta presa coscienza del seguente fatto:

Date le funzioni:

$$\begin{cases} v_1(q) = cq(b - ac^{-1}d)^{-1} \\ v_2(q) = q + d(b - ac^{-1}d)^{-1} \\ v_3(q) = q^{-1} \\ v_4(q) = q + ac^{-1} \end{cases}$$

Avremo che $v(q) = v_4 \circ v_3 \circ v_2 \circ v_1$, i.e la funzione v è data dalla composizione delle sopracitate. Ora, osserviamo che la funzione $v_1(q)$ preserva la regolarità per la proposizione 6.13, così come la funzione v_3 per la proposizione 6.12. Osservando infine che anche le traslazioni preservano la regolarità, avremo che $M(v)f$ è regolare in q se f è regolare in $v(q)$. \square

6.11 Funzioni quaternioniche omogenee

In questa sezione introdurremo alcuni fatti circa funzioni regolari e funzioni armoniche omogenee di una variabile quaternionica, preparandoci per costruire un analogo quaternionico delle espansioni in serie di Taylor e di Laurent.

Diamo anzitutto la definizione di funzione quaternionica omogenea di grado n (rispetto ad \mathbb{R}).

Definizione 6.10 (Funzione quaternionica \mathbb{R} -omogenea di grado n). *Diciamo che una funzione di una variabile quaternionica $f : \mathbb{H} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{H}$ è regolare in \mathbb{R} di grado n , se $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:*

$$f(\alpha q) = \alpha^n f(q)$$

(abbiamo rimosso l'origine dal dominio per poter considerare anche n negative).

A questo punto introduciamo un po' di convenzioni denominative che utilizzeremo d'ora in poi: chiamiamo U_n l'insieme delle funzioni quaternioniche $f : \mathbb{H} \setminus \{0\}$ regolari omogenee di grado n , mentre chiamiamo W_n l'insieme delle funzioni quaternioniche $f : \mathbb{H} \setminus \{0\}$ armoniche e omogenee di grado n .

Per il corollario 6.5, sappiamo che ogni funzione regolare è armonica, e dunque $U_n \subset W_n$.

Inoltre, possiamo osservare che gli insiemi appena costruiti formano, con le operazioni di somma puntuale e moltiplicazione per uno scalare quaternionico, degli pseudo-spazi vettoriali su \mathbb{H} destri (cioè dei moduli su un corpo, che possiedono alcune proprietà extra rispetto ai moduli e pertanto li chiameremo pseudo-spazi vettoriali).

Possiamo considerare le restrizioni di U_n e W_n alla 3-sfera $S^3 = \{q \in \mathbb{H} ; |q| = 1\}$, che indicheremo con \tilde{U}_n e \tilde{W}_n :

$$\tilde{U}_n := \{f|_{S^3} ; f \in U_n\} ; \quad \tilde{W}_n := \{f|_{S^3} ; f \in W_n\}$$

Osserviamo che:

$$\tilde{U}_n \cong U_n ; \quad \tilde{W}_n \cong W_n$$

i.e U_n e W_n sono isomorfi alla loro restrizione sulla 3-sfera S^3 , \tilde{U}_n , \tilde{W}_n , sotto la seguente corrispondenza:

$$f \in U_n \Leftrightarrow \tilde{f} \in \tilde{U}_n \quad \text{con} \quad f(q) = r^n \tilde{f}(u)$$

$$f \in W_n \Leftrightarrow \tilde{f} \in \tilde{W}_n \quad \text{con} \quad f(q) = r^n \tilde{f}(u)$$

dove qui $r = |q| \in \mathbb{R}$ e $u = \text{sgn}(q) = \frac{q}{|q|} \in S^3$.

Andiamo ora a definire i seguenti campi vettoriali quaternionici in maniera tale da poter riesprimere l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter in forma "polare":

$$X_0 f = \frac{d}{d\theta} [f(qe^\theta)]_{\theta=0} \quad (6.68)$$

$$X_i f = \frac{d}{d\theta} f[qe^{e_i\theta}]_{\theta=0} = \frac{d}{d\theta} f[q(\cos \theta + e_i \sin \theta)]_{\theta=0} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.69)$$

La loro relazione con i campi vettoriali cartesiani $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}$ è data da:

$$\begin{cases} X_0 = t \frac{\partial}{\partial t} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \\ X_i = -x_i \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_i} - \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{r^2} (t X_0 - x_i X_i) \\ \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{r^2} (\epsilon_{ijk} x_j X_k + t X_i + x_i X_0) \end{cases} \quad (6.70)$$

dove qui come al solito ϵ_{ijk} indica il simbolo di Levi-Civita, e dove inoltre stiamo omettendo le sommatorie sugli indici muti utilizzando la convenzione di Einstein.

Utilizzando le ultime 2 relazioni dell'equazione (6.70), possiamo scrivere l'operatore laplaciano Δ e l'operatore $\bar{\partial}_l$ in termini dei campi vettoriali appena introdotti nel seguente modo:

$$\begin{cases} \bar{\partial}_l = \frac{1}{2} \bar{q}^{-1} (X_0 + e_i X_i) \\ \Delta = \frac{1}{r^2} (X_i X_i + X_0 (X_0 + 2)) \end{cases} \quad (6.71)$$

Detto ciò, siamo pronti per introdurre alcuni importanti risultati sugli spazi U_n e W_n appena introdotti.

Teorema 6.13 (Proprietà dello \mathbb{H} -pseudospazio vettoriale delle funzioni armoniche omogenee di grado n). *Sia W_n lo \mathbb{H} -pseudospazio vettoriale delle funzioni armoniche omogenee di grado n introdotto prima e sia \tilde{W}_n la sua riduzione alla 3-sfera S^3 . Allora esso ha le seguenti proprietà:*

- $\tilde{W}_n \cong \tilde{W}_{-n-2}$.
- $\dim(\tilde{W}_n) = (n+1)^2$.

- Gli elementi di W_n sono polinomi in q .

Dimostrazione. Dimostriamo i fatti punto per punto, partendo dal primo:

- Cominciamo la dimostrazione dalla seguente osservazione: le funzioni $f \in W_n$, essendo omogenee, sono autofunzioni del campo vettoriale X_0 con autovalore n ; per convincersi di ciò basta notare che, essendo omogenea di grado n , la seguente identità sarà valida:

$$f(qe^\theta) = e^{n\theta} f(q)$$

da cui poi, computando $X_0 f$ con le formule presentate prima, otteremo $X_0 f = nf$, i.e. f è un'autovalore di X_0 con autovalore n .

Osserviamo però che la nostra funzione f , per ipotesi (essendo in W_n) è anche armonica, e dunque soddisfa l'equazione di Laplace:

$$\Delta f = \frac{1}{r^2}(X_i X_i + X_0(X_0 + 2))f = 0$$

Da cui, sapendo che $X_0 f = nf$:

$$\Delta f = 0 = X_i X_i f + n^2 f + 2nf \implies X_i X_i f = -n(n+2)f$$

cioè f è anche un'autovalore di $X_i X_i$ con autovalore $-n(n+2)$.

Osserviamo ora che i campi vettoriali X_i , $i = 1, 2, 3$ sono tangentи alla 3-sfera S^3 , e dunque le loro restrizioni su quest'ultima, $\tilde{X}_i = X_i|_{S^3}$, sono campi vettoriali su S^3 .

Dunque, se $\tilde{f} \in \tilde{W}_n$, allora $\tilde{f} = f|_{S^3}$ per un $f \in W_n$, e quindi essendo f un'autovalore di $X_i X_i$ con autovalore $-n(n+2)$, \tilde{f} sarà un'autovalore di $\tilde{X}_i \tilde{X}_i$ con autovalore $-n(n+2)$. Al contrario, supponendo che una funzione $\tilde{f} \in \tilde{W}_n$ sia un'autovalore di $\tilde{X}_i \tilde{X}_i$ con autovalore $-n(n+2)$, allora:

$$\Delta[r^n \tilde{f}(u)] = \frac{1}{r^2}[r^n \tilde{X}_i \tilde{X}_i \tilde{f} + (X_0(X_0 + 2)r^n)\tilde{f}] = 0$$

dove $r = |q|$ e $u = \operatorname{sgn}(q)$ come al solito.

E dunque, \tilde{W}_n è alternativamente caratterizzabile come lo spazio delle autofunzioni di $\tilde{X}_i \tilde{X}_i$ con autovalore $-n(n+2)$. Da ciò segue l'asserto:

$$\tilde{W}_n \cong \tilde{W}_{-n-2}$$

- La dimostrazione di questo fatto, necessitando dell'utilizzo di risultati che per essere sviluppati adeguatamente richiederebbero una significativa quantità di tempo, verrà solo accennata e verranno accennati

alcuni testi presenti nella bibliografia per consultarne una dimostrazione più accurata.

Notiamo anzitutto che lo spazio \tilde{W}_n è la quaternionificazione dello spazio vettoriale $W_n^{\mathbb{C}}$ complesso delle autofunzioni complesse su S di $\tilde{X}_i \tilde{X}_i$ con autovalore $-n(n+2)$. Ma tale spazio è $(n+1)^2$ dimensionale, e dunque:

$$\dim_{\mathbb{H}} \tilde{W}_n = \dim_{\mathbb{C}} W_n^{\mathbb{C}} = (n+1)^2$$

Per la dimostrazione accurata di quanto detto prima, vedere [44] (p.71) nella bibliografia.

- Dalla definizione di W_n e di funzione omogenea data sopra, avremo che W_0 sarà composta solamente da funzioni costanti.

Basta ora notare che, data una funzione $f \in W_n$, le sue derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$) sono membri di W_{n-1} ; per convincersi di ciò, basta notare che:

$$\alpha^n \frac{\partial f(q)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \rho_q) = \alpha \frac{\partial f(\alpha q)}{\partial t}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\rho_q := \alpha q$.

Ripetendo questo ragionamento, giungiamo alla conclusione che la derivata n -esima di $f \in W_n$ sarà un membro di W_0 (e dunque una funzione costante) e la sua derivata $(n+1)$ -esima sarà pari a 0, da cui segue il risultato che volevamo dimostrare.

□

Esercizio 6.12. *Dimostrare che:*

$$[X_0, X_i] = 0 \quad ; \quad [X_i, X_j] = 2\epsilon_{ijk}X_k$$

dove qui X_0, X_1, X_2, X_3 sono i campi vettoriali introdotti nelle equazioni (6.68) e (6.69), e dove $[\cdot]$ indica il prodotto di Lie.

Concludiamo il capitolo con altri risultati, questa volta sullo spazio delle funzioni regolari omogenee U_n .

Teorema 6.14 (Proprietà dell' \mathbb{H} -pseudospazio vettoriale delle funzioni regolari omogenee di grado n). *Sia U_n l' \mathbb{H} -pseudospazio vettoriale delle funzioni regolari omogenee di grado n introdotto prima e W_n , come prima, lo spazio delle funzioni armoniche omogenee di grado n ; allora:*

- $\tilde{W}_n \cong U_n \oplus \tilde{U}_{-n-2}$.

- $\tilde{U}_n \cong \tilde{U}_{-n-3}$.
- $\dim U_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

dove qui, come prima, \tilde{U}_n e \tilde{W}_n rappresentano le restrizioni di tali spazi alla 3-sfera S^3 .

Dimostrazione: • Sia f una funzione regolare e omogenea di grado n , i.e. $f \in U_n$, allora, come già detto in precedenza, f sarà una autofunzione di X_0 con autovalore n , ed inoltre f soddisferà l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter, $\bar{\partial}_l f = 0$. Da ciò segue che:

$$\bar{\partial}_l f = 0 = X_0 f + e_i X_i f \implies e_i X_i f = -n f$$

cioè f è un autofunzione di $e_i X_i$ con autovalore $-n$. Analogamente, se f è un autofunzione di $e_i X_i$ con autovalore $-n$, $f \in U_n$, e dunque U_n è alternativamente caratterizzabile come lo spazio delle autofunzioni di $e_i X_i$ con autovalore $-n$.

Tramite calcoli diretti, ed utilizzando i risultati dell'esercizio 6.12, vediamo che:

$$(e_i X_i)^2 - 2e_i X_i + X_i X_i = 0 \implies (e_i \tilde{X}_i)^2 - 2e_i \tilde{X}_i + \tilde{X}_i \tilde{X}_i = 0$$

Sia $\tilde{f} \in \tilde{W}_n$: allora sappiamo, alla luce di quanto detto prima che $\tilde{X}_i \tilde{X}_i f = -n(n+2)f$, i.e. f è un'autofunzione di $\tilde{X}_i \tilde{X}_i$ di autovalore $-n(n+2)$. Da ciò segue che \tilde{W}_n è la somma diretta degli autospazi di $e_i X_i$ con autovalori n e $-n-2$ rispettivamente, i.e.:

$$\tilde{W}_n = \tilde{U}_n \oplus \tilde{U}_{-n-2}$$

- Può essere dimostrato costruendo esplicitamente un isomorfismo tra i due spazi: in particolare, notiamo che l'isomorfismo in questione è dato dall'applicazione If introdotta nella proposizione 6.12.
- Dal primo punto di questo teorema, per un fatto ben noto circa le dimensioni di spazi somma diretta, avremo:

$$\dim W_n = \dim U_n + \dim U_{-n-2}$$

ma, per la proposizione 6.13, $\dim W_n = (n+1)^2$, e dunque:

$$(n+1)^2 = \dim U_n + \dim U_{-n-2} \tag{6.72}$$

adesso per il secondo punto di questo teorema avremo che la dimensione di U_{-n-2} sarà pari alla dimensione di U_{n-1} , e sostituendo nell'equazione (6.72), avremo la seguente relazione ricorsiva:

$$\dim U_n + \dim U_{n-1} = (n+1)^2$$

la cui soluzione, con valore iniziale $\dim U_0 = 1$, è pari a

$$\dim U_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

abbiamo dunque dimostrato quanto enunciato nel teorema. \square

Detto ciò, siamo ora pronti ad estendere alle funzioni regolari di una variabile quaternionica i concetti di espansioni in serie di Taylor e di Laurent, a cui il lettore è probabilmente già familiare se ha affrontato un corso introduttivo all'analisi complessa.

6.12 Serie di Taylor e di Laurent quaternioniche

Il lettore, a questo punto, vista la grande mole di analogie tra la teoria di funzioni \mathbb{C} -olomorfe e quella delle funzioni \mathbb{H} -regolari, si sarà potuto chiedere se anche le funzioni regolari quaternioniche in delle palle possono essere espanso in un analogo quaternionico delle serie di Taylor, e analogamente se le funzioni regolari analitiche in regioni anulari possano essere espanso in serie di Laurent.

A questo punto abbiamo tutto il macchinario necessario per estendere alle funzioni \mathbb{H} -regolari (in certi domini) le espansioni in serie di Taylor e di Laurent, non ci resta che cominciare introducendo alcune nozioni preliminari.

Sia $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ un'insieme di interi non ordinato e con ripetizione tale che $1 \leq i_j \leq 3 \forall j \in [1, n] \cap \mathbb{N}$. Chiamiamo tale insieme ν : osserviamo che tale insieme può essere anche specificato dal numero di istanze di 1, 2 e 3, che chiameremo $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$; scriveremo dunque $\nu = [n_1; n_2; n_3]$.

Il numero totale di possibilità per un insieme ν di questo tipo con lunghezza totale pari a $n = n_1 + n_2 + n_3$ è pari a $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$; inoltre chiameremo σ_n l'insieme di tutti gli insiemi del tipo ν di lunghezza n .

Esercizio 6.13. Il lettore scriva tutti i possibili insiemi $\nu = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ per i seguenti valori di n :

- $n = 2$

- $n = 3$

Introduciamo ora della notazione e delle definizioni che ci risulteranno utili all'interno del paragrafo:

Definizione 6.11 (Operatore differenziale misto ν -esimo). *Chiamiamo operatore differenziale misto ν -esimo, indicato con ∂_ν , il seguente operatore differenziale:*

$$\partial_\nu = \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial^n}{\partial x^{n_1} \partial y^{n_2} \partial z^{n_3}} \quad (6.73)$$

dove qui, in accordo con la nomenclatura introdotta poc'anzi, $\nu = [n_1; n_2; n_3]$, $n = n_1 + n_2 + n_3$.

In aggiunta utilizzeremo assiduamente le seguenti convenzioni:

$$G_\nu(q) = \partial_\nu G(q) \quad (6.74)$$

$$P_\nu(q) = \frac{1}{n!} \sum (te_{i_1} - x_{i_1}) \dots (te_{i_n} - x_{i_n}) \quad (6.75)$$

dove nella seconda espressione la somma è su tutti i possibili riordinamenti di 1, 2 e 3 pari a $\frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$.

Osserviamo inoltre che $G_\nu(q)$ sarà una funzione omogenea di grado $-n-3$.

Esercizio 6.14. Dimostrare che data una $\nu = [n_1; n_2; n_3]$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$, allora la funzione $P_\nu(q)$ è una funzione omogenea su \mathbb{R} di grado n , i.e:

$$P_\nu(\alpha q) = \alpha^n P_\nu(q) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Teorema 6.15. I polinomi P_ν ($\nu \in \sigma_n$) sono regolari e formano una base per l' \mathbb{H} pseudo-spazio vettoriale U_n .

Dimostrazione: Sia $f \in U_n$, i.e sia f una funzione regolare omogenea di grado n . Siccome f è regolare, allora soddisfa l'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter:

$$\bar{\partial}_l f = \frac{\partial f}{\partial t} + e_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (6.76)$$

e siccome è omogenea, è un autofunzione di X_0 con autovalore n , i.e:

$$X_0 f = t \frac{\partial f}{\partial t} + x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = n f(q) \quad (6.77)$$

Adesso, moltiplicando (6.76) per t e sottraendolo a (6.77), otteniamo:

$$nf(q) = \sum_i (x_i - te_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Ricordiamo che, per considerazioni fatte nella sezione precedente, sappiamo che la funzione f in questione è una funzione polinomiale quaternionica, ed inoltre che $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in U_{n-1}$ (teorema 6.13). Dunque possiamo riapplicare lo stesso ragionamento a quest'ultima n volte ottenendo:

$$\begin{aligned} f(q) &= \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} (x_{i_1} - te_{i_1})(x_{i_2} - te_{i_2}) \dots (x_{i_n} - te_{i_n}) \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} \\ &\implies f(q) = \sum_{v \in \sigma_n} (-1)^n P_v(q) \partial_v f(q) \end{aligned}$$

Essendo f un polinomio per il terzo punto del teorema 6.13, come già accennato prima, avremo che la derivata $\partial_v f(q)$ sarà una costante quaternionica, e siamo giunti alla conclusione che l'insieme $\{P_v ; v \in \sigma_n\}$ è una copertura lineare dello spazio U_n , i.e ogni elemento di U_n può essere scritto come combinazione lineare di elementi di $\{P_v ; v \in \sigma_n\}$.

Definiamo l' \mathbb{H} -pseudospazio vettoriale destro come $Y_n := \text{span}_{\mathbb{H}}^r \{P_v ; v \in \sigma_n\}$ (dove qui la r denota lo span da destra). Osserviamo che, siccome gli elementi di $U_n \subset W_n$ sono polinomi (terzo punto del teorema 6.13), allora $U_n \subset Y_n$. Ma, al contempo, sappiamo che $\dim Y_n \leq \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, che è il numero totale di polinomi del tipo P_v . Ma vediamo che $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ è precisamente $\dim U_n$, e quindi $\dim Y_n \leq \dim U_n$, da cui $Y_n = U_n$. \square

Teorema 6.16. *Le espansioni*

$$G(p - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in \sigma_n} P_v(q) G_v(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in \sigma_n} G_v(p) P_v(q) \quad (6.78)$$

sono valide per $|q| < |p|$, e la serie converge uniformemente in tutte le regioni del tipo $\{(p, q) ; |q| \leq r|p|\}$, con $r < 1$.

Dimostrazione: Abbiamo dimostrato nel capitolo 4 (esempio 4.11) che

$$(1 - q)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

per quaternioni con norma minore di 1, ed inoltre abbiamo visto che per ogni palla $|q| \leq r$, con $r \in \mathbb{R}$, $r < 1$, la serie converge uniformemente. Da

cioè segue che possiamo espandere $G(1 - q) = (1 - q)^{-2}(1 - \bar{q})$ in serie di potenze in q e \bar{q} , che converge uniformemente in ogni palla con raggio minore di 1. Siccome G ha la proprietà moltiplicativa:

$$G(q_1 q_2) = G(q_2)G(q_1)$$

segue che la funzione $G(p - q)$ può essere espansa in serie di potenze della variabile $p^{-1}q$, moltiplicata da $G(p)$, e che la serie convergerà uniformemente per $|p^{-1}q| \leq r$ con $r < 1$.

L'espansione in serie di Taylor multivariabile di G attorno a p è data da:

$$G(p - q) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \sum_{i_1 \dots i_s} \frac{(-1)^{r+s}}{(r+s)!} \frac{\partial^{r+s} G}{\partial t^r \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}(p) t^r x_{i_1} \dots x_{i_s}$$

Essendo G regolare, possiamo sostituire nell'espansione le derivate rispetto a t di quest'ultima con $-\sum_i e_i \frac{\partial G}{\partial x_i}$ ottenendo:

$$G(p - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{r+s=n} \sum_{i_1 \dots i_s \ j_1 \dots j_r} (te_{j_1}) \dots (te_{j_r})(-x_{i_1}) \dots (-x_{i_s}) \frac{\partial^n G}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_r} \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_s}}(p)$$

Ma l'espressione appena ottenuta è $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_{\nu}(q) G_{\nu}(q)$ e quindi:

$$G(p - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_{\nu}(q) G_{\nu}(q) \tag{6.79}$$

Infine, per dimostrare la validità dell'identità $G(p - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} G_{\nu}(q) P_{\nu}(q)$, bisogna ripetere la medesima procedura ricordando che la funzione G è anche destro-regolare: dall'equazione di Cauchy-Riemann-Fueter destra $\bar{\partial}_r G = 0$, va ricavata la derivata di G rispetto a t :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} e_i$$

e sostituire quest'ultima nella formula di prima.

□

Siamo ora pronti a dimostrare l'analogo del teorema di Taylor per i quaternioni:

Teorema 6.17 (Teorema di Taylor quaternionico, Sudbery 1979). *Sia f una funzione regolare in un intorno di 0. Allora, esiste una palla con centro 0 in cui la funzione è rappresentata dalla seguente serie uniformemente convergente:*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) a_\nu \quad (6.80)$$

dove i coefficienti sono dati da:

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{\partial B} G_\nu(q) Dq f(q) = (-1)^n \partial_\nu f(0)$$

Dimostrazione: Sia S la sfera con centro 0 contenuta nel dominio di regolarità di f , e sia B una palla chiusa con centro 0 all'interno di S . Allora $\forall q \in B$, per la formula integrale di Cauchy-Fueter:

$$f(q) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_S G(q' - q) Dq' f(q') \quad (6.81)$$

ma per il teorema precedente, per $|q| < |q'|$ possiamo espandere la funzione $G(q' - q)$ nella serie uniformemente convergente

$$G(q' - q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) G_\nu(q')$$

Ma vediamo che se $q \in B$ e $q' \in S$, allora necessariamente $|q| < |q'|$, e dunque l'espansione sarà valida nella regione presa in considerazione nell'equazione (6.81) sostituendo questa serie in (6.81), otteniamo:

$$f(q) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_S \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) G_\nu(q') Dq' f(q')$$

Adesso, sapendo che la serie converge uniformemente su $B \times S$, potremo invertire il segno di somma e di integrazione, ottenendo:

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) \left(\frac{1}{2\pi^2} \iiint_S G_\nu(q') Dq' f(q') \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} P_\nu(q) a_\nu$$

$$\text{dove } a_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_S G_\nu(q') Dq' f(q').$$

Per concludere la dimostrazione basta osservare che, per un'argomentazione già utilizzata in precedenza (proposizione 1.17 del capitolo 1), essendo $G_\nu Dq f$ una forma chiusa, i.e $d(G_\nu Dq f) = 0$, allora potremo sostituire

il contorno S con ∂B .

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{\partial B} G_\nu(q') Dq' f(q')$$

Osserviamo inoltre che applicando l'operatore differenziale ∂_ν alla funzione f otteniamo:

$$\partial_\nu f(q) = \partial_\nu \left[\frac{1}{2\pi^2} \iiint_{\partial B} G(q' - q) Dq' f(q') \right] = \frac{(-1)^n}{2\pi^2} \iiint_{\partial B} G_\nu(q' - q) Dq' f(q')$$

Ponendo $q = 0$ avremo che $\partial_\nu f(0)$ è precisamente $(-1)^n a_\nu$:

$$\partial_\nu f(0) = \frac{(-1)^n}{2\pi^2} \iiint_{\partial B} G_\nu(q') Dq' f(q') = (-1)^n a_\nu$$

potremo pertanto scrivere a_ν anche come:

$$a_\nu = (-1)^n \partial_\nu f(0)$$

□

Corollario 6.7. *Siano μ e ν due insiemi del tipo $\{i_1, \dots, i_m\}$ e $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$, il cui numero di 1, 2 e 3 che li genera è rispettivamente $[m_1; m_2; m_3]$ e $[n_1; n_2; n_3]$. Allora:*

$$\frac{1}{2\pi^2} \iiint_S G_\mu(q) Dq P_\nu(q) = \delta_{\mu\nu}$$

dove $\delta_{\mu\nu}$ indica, come al solito, la delta di Kronecker, S è una sfera che contiene l'origine e le funzioni $G_\mu(q)$ e $P_\nu(q)$ sono quelle introdotte poco fa nella sezione.

Concludiamo questo capitolo con una dimostrazione dell'analogo quaternionico del teorema di Laurent per funzioni regolari di una variabile quaternionica.

Teorema 6.18 (Teorema di Laurent quaternionico, Sudbery 1979). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione regolare quaternionica in un aperto $U \subset \mathbb{H}$, tranne che possibilmente in un punto $q_0 \in U$. Allora esiste un intorno N di q_0 tale che se $q \in N$ e $q \neq q_0$ allora per $f(q)$ vale la seguente espansione in serie infinita:*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} [P_\nu(q - q_0) a_\nu + G_\nu(q - q_0) b_\nu] \quad (6.82)$$

che chiamiamo *sviluppo in serie di Laurent di $f(q)$* . Tale serie converge uniformemente in ogni regione iper-anulare:

$$\{q \in \mathbb{H} ; r \leq |q - q_0| \leq R\} \text{ con } r > 0, \text{ all'interno di } N$$

Inoltre, i coefficienti a_v e b_v sono dati da:

$$a_v = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C G_v(q - q_0) Dq f(q)$$

$$b_v = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C P_v(q - q_0) Dq f(q)$$

dove qui C è una qualsiasi 3-catena chiusa in $U \setminus \{q_0\}$, omologa al bordo ∂B di una palla B contenuta in U tale che $q_0 \in B \subset U$ (tale che C ha indice d'avvolgimento attorno q_0 pari a 1).

Dimostrazione: Sia $R_1 > 0$ un numero reale scelto in maniera tale che $B_1 = \{q ; |q - q_0| \leq R_1\}$ sia contenuta in U ; chiamiamo $N = \text{int}(B_1)$, e sia S_1 il bordo della palla B_1 , $S_1 = \partial B_1$. Dato un quaternione $q \in N \setminus \{q_0\}$, scegliamo un altro numero reale positivo $R_2 > 0$ tale che $0 < R_2 < |q - q_0| < R_1$, ed inoltre sia S_2 la sfera $\{q ; |q - q_0| = R_2\}$. Allora, applicando la formula integrale di Cauchy-Fueter:

$$f(q) = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{S_1} G(q' - q) Dq' f(q') - \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{S_2} G(q' - q) Dq' f(q') \quad (6.83)$$

Osserviamo che per $q' \in S_1$, abbiamo $|q' - q_0| < |q - q_0|$ e dunque, per un ragionamento del tutto analogo a quello del teorema precedente, espandiamo $G(q' - q)$ nella serie $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in \sigma_n} P_v(q - q_0) G_v(q' - q_0)$, e sfruttando la convergenza uniforme della serie, portando il \sum fuori dall'integrale, otteniamo:

$$\frac{1}{2\pi^2} \iiint_{S_1} G(q' - q) Dq' f(q') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v \in \sigma_n} P_v(q - q_0) a_v$$

dove qui a_v è pari a:

$$a_v = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{S_1} G_v(q' - q_0) Dq' f(q')$$

La serie ottenuta converge uniformemente in ogni palla $|q - q_0| \leq R$ con $R < R_1$. Infine, essendo $G_v Dq f$ una 3-forma chiusa in $U \setminus \{q_0\}$ (i.e una 3-forma con differenziale esterno pari a 0), possiamo sostituire il contorno

di integrazione S_1 con una 3-catena chiusa C omologa a S_1 (proposizione 1.17 del capitolo 1) e dunque:

$$a_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C G_\nu(q' - q_0) Dq' f(q')$$

Per il secondo termine dell'equazione (6.83), seguiremo un procedimento simile al netto di un dettaglio (che vedremo a breve). Ancora, come prima, per $q' \in S_2$ avremo $|q' - q_0| < |q - q_0|$ e dunque possiamo espandere la serie $G(q' - q)$ come prima. Tuttavia, questa volta, la espanderemo come

$$G(q' - q) = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} G_\nu(q - q_0) P_\nu(q' - q_0)$$

sfruttando la proprietà moltiplicativa della funzione $G(q)$ nel caso particolare $G(-q) = -G(q) \forall q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Sostituendo quest'espansione nel secondo termine dell'equazione (6.83) otteniamo:

$$-\frac{1}{2\pi^2} \iiint_{S_2} G(q' - q) Dq' f(q') = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{S_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} G_\nu(q - q_0) P_\nu(q' - q_0) Dq' f(q')$$

ora come prima, sfruttando la convergenza uniforme della serie potremo portare la sommatoria fuori dall'integrale ottenendo:

$$\frac{1}{2\pi^2} \iiint_{S_2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} G_\nu(q - q_0) P_\nu(q' - q_0) Dq' f(q') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} G_\nu(q - q_0) b_\nu$$

dove qui b_ν è pari a:

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{S_2} P_\nu(q' - q_0) Dq' f(q')$$

Infine, utilizzando ancora il fatto che $G_\nu Dq f$ è una 3-forma chiusa in $U \setminus \{q_0\}$ e che $C \simeq S_2$ potremo riscrivere b_ν come:

$$b_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_C P_\nu(q' - q_0) Dq' f(q')$$

Sostituendo il tutto in (6.83), otteniamo la seguente espansione per $f(q)$:

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} [P_\nu(q - q_0) a_\nu + G_\nu(q - q_0) b_\nu]$$

La seguente serie, inoltre, per quanto visto nella dimostrazione, converge nel seguente dominio anulare contenuto in N :

$$\{q \in \mathbb{H} ; r \leq |q - q_0| \leq R\}$$

con $r, R > 0$.

□

6.13 Considerazioni finali

In questo capitolo abbiamo visto che per le funzioni regolari quaternioniche nel senso di Fueter esistono degli analoghi di tutti i teoremi più importanti per le funzioni olomorfe su \mathbb{C} : le equazioni di Cauchy-Riemann, il teorema di Cauchy, il teorema di Morera, la formula integrale di Cauchy, le espansioni di Taylor e di Laurent, il teorema di Liouville et cetera.

La teoria ha dunque molti punti di forza, ma ha anche dei punti di debolezza; in particolar modo, come il lettore ha potuto vedere leggendo il capitolo, la classe delle funzioni \mathbb{H} -regolari definite in questo modo non contiene generalmente i polinomi quaternionici, e neppure molte altre funzioni elementari.

La soluzione parziale a questo problema è che siamo riusciti a definire degli analoghi quaternionici dei polinomi classici, come i polinomi del tipo $P_\nu(q)$ per degli insiemi non ordinati di interi $1, 2, 3 \dots \nu$, con i quali siamo riusciti ad espandere funzioni regolari in serie infinite. Analogamente, per funzioni non \mathbb{H} -regolari come il logaritmo quaternionico $\log(q)$, abbiamo considerato la più naturale generalizzazione di quest'ultimo che fosse una funzione regolare, $\mathcal{L}(q)$, un multiplo del laplaciano della funzione indotta dal logaritmo complesso (che è una funzione \mathbb{C} -olomorfa) [sezione 9 di questo capitolo].

Seppur la teoria esposta in questo capitolo è generalmente considerata l'estensione dell'analisi ai quaternioni più "fedele" alla sua controparte complessa, ne esistono di molte altre altrettanto valide che compensano alcuni dei difetti della teoria di Fueter.

Una fra queste, che vedremo nel prossimo capitolo, riesce ad allargare notevolmente la classe di funzioni \mathbb{H} -regolari tramite una definizione basata sul concetto di olomorficità complessa [19].

Un'altra ancora, d'altro canto, definirà un'analisi differenziale sui quaternioni costruendo una versione più generale di derivata di Fréchet classica (per la differenziazione di funzioni tra spazi di Banach) a moduli normali completi (che chiameremo moduli di Banach) [8] [7] [29] [28]. Prima di trattare tale teoria, tuttavia, ho voluto introdurre una breve sezione che presentasse i risultati fondamentali dell'analisi su spazi di Banach, motivando questa generalizzazione gradualmente.

Capitolo 7

Analisi alternative su \mathbb{H}

È possibile, come accennato nella sezione finale dello scorso capitolo, costruire delle teorie che trattino il calcolo differenziale e integrale sui quaternioni in modo alternativo (rispetto a quello sviluppato da Fueter, Moisil, Haefeli e vari altri matematici tra l'inizio e la metà del Novecento).

Infatti, la teoria trattata nel precedente capitolo presenta alcune problematiche, che le teorie che presenteremo brevemente ambiranno a risolvere; sfortunatamente, come vedremo, seppur alcune di queste riusciranno a risolvere alcuni dei problemi menzionati, perderanno talune proprietà alquanto desiderabili.

7.1 Calcolo differenziale su spazi di Banach

Cominciamo vedendo come possiamo costruire una teoria del calcolo differenziale sui quaternioni sfruttando le loro proprietà algebriche. Prima di proseguire, tuttavia, diamo una definizione di spazio di Banach, in quanto, per rendere il testo quanto più accessibile possibile, non si presuppone una familiarità del lettore con l'analisi funzionale:

Definizione 7.1 (Spazio di Banach). *Sia V uno spazio vettoriale normato, i.e uno spazio vettoriale dotato di una norma $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, allora chiameremo tale spazio **Spazio di Banach** se quest'ultimo è uno spazio metrico completo rispetto alla topologia metrica indotta dalla norma $\|\cdot\|$.*

Ma, come visto nei capitoli 2 e 4, i quaternioni sono uno spazio metrico completo rispetto alla norma indotta dalla loro involuzione $*$, da cui segue che rispetto a quest'ultima sono uno spazio di Banach.

È ben sviluppata [20] una teoria del calcolo differenziale su spazi di Ba-

nach, che introdurremo ora qui; come sempre, prima di dare le definizioni salienti, introduciamo alcune definizioni preliminari:

Definizione 7.2 (Applicazioni tangenziali, Cartan). *Siano \mathcal{B} e \mathcal{B}' due spazi di Banach, e sia $U \subset \mathcal{B}$ un aperto. Diremo che due funzioni $\varphi_1 : U \rightarrow \mathcal{B}'$ e $\varphi_2 : U \rightarrow \mathcal{B}'$ sono tangenziali in $a \in U$ se la funzione:*

$$m(r) := \sup_{\|x-a\| \leq r} \|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\|$$

soddisfa la seguente equazione:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(r)}{r} = 0 \quad (7.1)$$

i.e $m(r)$ è *o-piccolo di r* , $m(r) = o(r)$.

È immediato verificare che tale relazione formi una relazione d'equivalenza sull'insieme delle funzioni $\{\varphi : U \rightarrow \mathcal{B}'\}$.

Grazie alla definizione di applicazioni tangenziali appena introdotta, siamo pronti a definire cosa voglia dire per un'applicazione tra spazi di Banach essere differenziabile:

Definizione 7.3 (Applicazione differenziabile). *Una funzione tra spazi di Banach $\varphi : U \rightarrow \mathcal{B}'$ è differenziabile nel punto $a \in U$ se le seguenti due proprietà sono soddisfatte:*

- φ è continua in a
- esiste un'applicazione lineare $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ tale che le applicazioni $x \rightarrow \varphi(x) - \varphi(a)$ e $x \rightarrow g(x - a)$ sono tangenziali nel punto $a \in U$

Il tutto è riscrivibile, utilizzando la definizione di applicazioni tangenziali data prima, come:

$$\|\varphi(x) - \varphi(a) - g(x - a)\| = o(\|x - a\|)$$

Diremo, inoltre, che una funzione $\varphi : U \rightarrow \mathcal{B}'$ definita nel medesimo modo di prima è differenziabile in U se è differenziabile in ogni punto a di U .

La definizione di differenziabilità di un'applicazione tra spazi di Banach può essere equivalentemente descritta dalla seguente equazione:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - g(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0$$

o, ponendo $\|x - a\| = \|h\|$:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - g(h)\|}{\|h\|} = 0 \quad (7.2)$$

Le funzioni appartenenti alla classe di funzioni differenziabili in questo senso sono comunemente chiamate "funzioni Fréchet-differenziabili", e l'applicazione lineare g è detta "derivata di Fréchet di f in x ", spesso scritta come $g = df_x(x)$.

Dimostriamo ora alcune importanti proprietà delle derivate di Fréchet, partendo dal notare che sono una generalizzazione diretta delle derivate di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} :

Proposizione 7.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile reale; allora f è differenziabile nel senso classico se e solo se è differenziabile nel senso di Fréchet, e la sua derivata di Fréchet $df_x(h)$ vale $f'(x)h$.*

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando la direzione diretta, i.e supponiamo che f sia Fréchet differenziabile.

Anzitutto, osserviamo che essendo $df_x(h)$ una funzione lineare, avremo $df_x(h) = hdf_x(1)$. Sostituendo quest'identità nell'espressione (7.2) otteniamo:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - df_x(h)\|}{\|h\|} = 0 = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - df_x(1) \right|$$

ma il termine $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, per $h \rightarrow 0$ è precisamente la derivata di f , $f'(x)$, da cui $df_x(1) = f'(x)$. Ma ancora, utilizzando la linearità di df_x , e moltiplicando per h ambo i lati otteniamo:

$$df_x(h) = f'(x)h$$

Per la direzione inversa, invece, supporremo per ipotesi l'esistenza della derivata di f , $f'(x)$; per concludere basta porre $df_x(h) = f'(x)h$ e notare che il limite (7.2) è pari a 0. \square

Lavoriamo ora su qualche esempio per solidificare l'intuizione delle entità matematiche appena definite, così come per impraticchirci a lavorare computazionalmente con esse.

Esempio 7.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $f(x) = x^2$. Vogliamo trovare un operatore lineare df_x tale che il seguente limite valga per $x \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|(x + h)^2 - x^2 - df_x(h)\|}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|2xh + h^2 - df_x(h)\|}{\|h\|} = 0$$

da cui segue che la derivata di Fréchet di x^2 è pari a $df_x(h) = 2xh$.

Esercizio 7.1. Trovare la derivata di Fréchet della funzione $f(x) = x^3$.

Dimostriamo ora alcune proprietà valide in generale per la derivata di Fréchet, che la rendono un buon candidato per un'estensione della derivata a spazi più generali:

Proposizione 7.2 (Linearità della derivata di Fréchet). *Siano $f : U \rightarrow \mathcal{B}'$ e $g : U \rightarrow \mathcal{B}'$ due funzioni tra spazi di Banach (reali) derivabili in $x \in U$, e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ uno scalare reale. Allora:*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad ; \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

Dimostrazione. Utilizzando la disegualanza del triangolo, avremo:

$$\begin{aligned} & \frac{|f(x+h) - f(x) - df_x(h) + g(x+h) - g(x) - dg_x(h)|}{|h|} \\ & \leq \frac{|f(x+h) - f(x) - df_x(h)|}{|h|} + \frac{|g(x+h) - g(x) - dg_x(h)|}{|h|} \end{aligned}$$

Ma il limite per $|h| \rightarrow 0$ a destra è pari a 0, e dunque:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x)) - (df_x(h) + dg_x(h))|}{|h|} = 0$$

Per il secondo punto, invece, basta osservare che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\lambda f(x+h) - \lambda f(x) - d(\lambda f)_x|}{|h|} = \frac{|\lambda| |f(x+h) - f(x) - df_x|}{|h|} = 0$$

dunque λf è differenziabile: inoltre, sfruttando la linearità della derivata di Fréchet, avremo $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$. \square

Esercizio 7.2. Dimostrare che per una funzione costante $f : U \rightarrow \mathcal{B}'$ definita come $f(x) := k \in \mathcal{B}'$ si avrà:

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in U$$

È generalmente valida per la derivata di Fréchet di funzioni Fréchet-differenziabili anche un'estensione della regola della catena.

Proposizione 7.3 (Regola della catena per la derivata di Fréchet). *Siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ e \mathcal{B}'' tre spazi di Banach, e siano $U \subset \mathcal{B}$ e $V \subset \mathcal{B}'$ due aperti di \mathcal{B} e \mathcal{B}' rispettivamente. Siano $f : U \rightarrow \mathcal{B}'$ e $g : V \rightarrow \mathcal{B}''$ due funzioni continue tale che f è Fréchet-differenziabile in un punto $a \in U \subset \mathcal{B}$ e g è Fréchet-differenziabile in $f(a)$, allora la funzione composta $g \circ f$ è Fréchet-differenziabile in a e la sua derivata di Fréchet vale:*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a) \tag{7.3}$$

Dimostrazione. Essendo f differenziabile (nel senso di Fréchet) in a avremo:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a) \quad (7.4)$$

ed analogamente, essendo g Fréchet-differenziabile in $f(a)$ avremo:

$$g(x) = g(f(a)) + g'(f(a))(x - f(a)) + o(x - f(a))$$

Calcoliamo ora $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)$:

$$g(f(x)) - g(f(a)) = g'(f(a))(f(x) - f(a)) + o(f(x) - f(a))$$

da cui, sostituendo al posto di $f(x)$ l'equazione (7.4)

$$g(f(x)) - g(f(a)) = (g'(f(a)) \circ f'(a))(x - a) + g'(f(a))o(x - a) + o(f(x) - f(a))$$

Da questa forma segue che, essendo gli ultimi due termini dell'equazione tangenziali a 0, la derivata di Fréchet di $g \circ f$ è precisamente $g'(f(a)) \circ f'(a)$. \square

Vediamo ora un'ulteriore importante proprietà delle funzioni Fréchet-differenziabili e delle loro corrispettive derivate che ci permetterà di dimostrare più agevolmente alcuni risultati.

Prima di tutto riportiamo alla mente la definizione di "metriche equivalenti": si dice che due metriche su uno spazio topologico sono equivalenti se inducono la stessa topologia su quest'ultimo. Analogamente diremo che due norme su uno spazio vettoriale sono equivalenti se inducono due metriche equivalenti.

Enunciamo ora il seguente risultato:

Proposizione 7.4. *Se una funzione tra spazi di Banach, $f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ è differenziabile in un punto $a \in \mathcal{B}$ rispetto a una norma $\|\cdot\|_1$, allora sarà differenziabile nel medesimo punto a per ogni altra norma appartenente alla classe di equivalenza di $\|\cdot\|_1$, $[\|\cdot\|_1]$, i.e rispetto ad ogni altra norma equivalente a $\|\cdot\|_1$.*

Inoltre, la derivata rimane la stessa rispetto ad ogni norma di tale classe d'equivalenza.

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo che la funzione f è differenziabile in un certo $a \in \mathcal{B}$ rispetto a $\|\cdot\|_1$. Sia $\|\cdot\|_2$ una norma equivalente a $\|\cdot\|_1$: allora per un fatto noto circa spazi metrici con norme equivalenti (vedi [20] p.27) avremo che:

$$\frac{1}{\|x - a\|_2} \leq M \frac{1}{\|x - a\|_1}$$

dove M è una costante maggiore di 0, $M > 0$. Analogamente, avremo:

$$\|f(x) - f(a) - df_x(x - a)\|_2 \leq M' \|f(x) - f(a) - df_x(x - a)\|_1$$

per un'altra costante positiva reale M' . Combinando le due disequazioni appena ottenute, avremo:

$$\frac{\|f(x) - f(a) - df_x(x - a)\|_2}{\|x - a\|_2} \leq MM' \frac{\|f(x) - f(a) - df_x(x - a)\|_1}{\|x - a\|_1}$$

Per ipotesi, il limite per $x \rightarrow a$ del lato destro della disequazione è pari a 0, e dunque ciò sarà vero anche per il lato sinistro:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\|f(x) - f(a) - df_x(x - a)\|_2}{\|x - a\|_2} = 0$$

Ciò dimostra l'asserto della proposizione. \square

Il fatto appena dimostrato ci permette di ricavare un'espressione per la derivata di Fréchet di vari tipi di funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Cominciamo, per semplicità, dal caso più semplice $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Esempio 7.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione in una variabile reale con immagine in \mathbb{R}^m . Gli spazi \mathbb{R} e \mathbb{R}^m sono spazi di Banach rispetto alla norma euclidea canonica $|x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $x := (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, nei casi particolari $n = 1$ e $n = m$.

È un fatto ben noto che la norma $|x|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ sia equivalente a quella canonica (in generale, per lo spazio vettoriale \mathbb{R}^n è vero che ogni norma sia equivalente).

Tenendo questo fatto in mente, andiamo ora a dimostrare che la derivata di Fréchet di una funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R}^m , riscrivibile in termini delle sue funzioni componenti come $f(x) = \langle f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x) \rangle$, è pari a:

$$df_x(h) = f'(x)h$$

dove qui $f'(x)$ è la funzione vettoriale data da:

$$f'(x) = \langle f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_m(x) \rangle$$

(in parole povere la derivata di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ nel "senso classico" dell'analisi multivariabile). Dimostreremo le due direzioni, una alla volta.

Cominciamo supponendo che f sia derivabile "nel senso classico", i.e esisterà una funzione vettoriale che chiameremo derivata di f , definita come prima:

$$f'(x) = \langle f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_m(x) \rangle$$

Poniamo $df_x(h) = f'(x)h$; dimostriamo che rispetto a tale funzione, il limite

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - df_x(h)\|}{\|h\|} \quad (7.5)$$

è pari a 0:

Utilizzando la proposizione 7.4, consideriamo il limite (7.5) rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$ introdotta all'inizio dell'esempio (anche detta "norma taxi", "norma taxicab" o "norma di Manhattan"). Avremo:

$$\begin{aligned} & \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - df_x(h)\|_1}{\|h\|} \\ &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|\langle f_1(x + h) - f_1(x) - f'_1(x)h, \dots, f_m(x + h) - f_m(x) - f'_m(x)h \rangle\|_1}{\|h\|} = \\ & \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \left| \frac{f_i(x + h) - f_i(x) - f'_i(x)h}{h} \right| = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \left| \frac{f_i(x + h) - f_i(x)}{h} - f'_i(x) \right| = 0 \end{aligned}$$

in quanto $\forall i \in [1, m] \cap \mathbb{N}$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(x + h) - f_i(x)}{h}$ esiste per ipotesi ed è pari a $f'_i(x)$.

Analogamente, supponendo ora che f sia Fréchet differenziabile, avremo

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x + h) - f(x) - df_x(h)\|_1}{\|h\|} = 0$$

da cui, procedendo in modo analogo a prima:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \left| \frac{f_i(x + h) - f_i(x) - df_{xi}(h)}{h} \right| = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \left| \frac{f_i(x + h) - f_i(x)}{h} - df_{xi}(1) \right| = 0$$

e dunque $df_{xi}(1) = f'_i(x)$, e sfruttando la linearità di df_x , avremo il risultato desiderato, i.e $df_{xi}(h) = f'_i(x)h$ (Chiarificazione circa la notazione: nel limite sopra citato df_{xi} indica la i -esima componente dell'applicazione lineare df_x).

È possibile, tramite un procedimento simile, trovare delle espressioni per le derivate di Fréchet di funzioni più generali da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m . Come in questo caso, vedremo che la derivata di Fréchet è strettamente legata al concetto di matrice Jacobiana di un'applicazione del tipo esposto prima. Lasciamo la verifica di questo fatto al lettore, per lasciarlo esercitare con il concetto di derivata di Fréchet:

Esercizio 7.3. *Dimostrare che, per una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ avremo che quest'ultima è differenziabile nel senso di Fréchet se e solo se è differenziabile nel senso classico. Inoltre, la sua derivata di Fréchet vale:*

$$df_x(\vec{h}) = \vec{\nabla}f(x) \cdot \vec{h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i \quad (7.6)$$

dove qui $\vec{\nabla}f(x)$ indica il gradiente di $f(x)$,

$$\vec{\nabla}f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Esercizio 7.4. *Dimostrare che, per una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ avremo che quest'ultima è differenziabile nel senso di Fréchet se e solo se è differenziabile nel senso classico. Inoltre, la sua derivata di Fréchet vale:*

$$df_x(h) = J(f)h = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

Dunque, sapendo che $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ (dimenticando la sua sovrastruttura moltiplicativa, considerandolo dunque solo come uno spazio di Banach) avremo che le derivata nel senso di Fréchet di una funzione di una variabile quaternionica derivabile $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ in un punto $q \in \mathbb{H}$ è pari a:

$$df_q(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t}(q) & \frac{\partial f_1}{\partial x}(q) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(q) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(q) \\ \frac{\partial f_2}{\partial t}(q) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(q) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(q) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(q) \\ \frac{\partial f_3}{\partial t}(q) & \frac{\partial f_3}{\partial x}(q) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(q) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(q) \\ \frac{\partial f_4}{\partial t}(q) & \frac{\partial f_4}{\partial x}(q) & \frac{\partial f_4}{\partial y}(q) & \frac{\partial f_4}{\partial z}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

dove qui $q := t + xi + yj + zk$ e $f(q) = f_1(t, x, y, z) + f_2(t, x, y, z)i + f_3(t, x, y, z)j + f_4(t, x, y, z)k$ e $h = h_1 + h_2i + h_3j + h_4k \in \mathbb{H}$ e dove la funzione $df(q)$ che mappa ad ogni punto dei quaternioni in cui f è derivabile nella sua derivata di Fréchet in q , df_q è un'applicazione del tipo:

$$df : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{H}; \mathbb{H})$$

dove $\mathcal{L}(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ indica l'insieme delle applicazioni lineari da \mathbb{H} in sé stesso.

7.2 Derivate di Fréchet di funzioni quaternioniche

Vediamo ora come calcolare operativamente la derivata di Fréchet di una funzione quaternionica $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ in un punto q in cui è derivabile (nel senso di Fréchet). Riesprimiamo 7.8 nella seguente forma più suggestiva (svolgendo la moltiplicazione matriciale):

$$\begin{aligned} df_q(h) &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} h_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} h_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_3}{\partial x_i} h_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial f_4}{\partial x_i} h_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y} h_3 + \frac{\partial f_1}{\partial z} h_4 \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y} h_3 + \frac{\partial f_2}{\partial z} h_4 \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} h_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y} h_3 + \frac{\partial f_3}{\partial z} h_4 \\ \frac{\partial f_4}{\partial t} h_1 + \frac{\partial f_4}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f_4}{\partial y} h_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z} h_4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial t} h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y} h_3 + \frac{\partial f_1}{\partial z} h_4 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y} h_3 + \frac{\partial f_2}{\partial z} h_4 \right) i \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_3}{\partial t} h_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y} h_3 + \frac{\partial f_3}{\partial z} h_4 \right) j + \left(\frac{\partial f_4}{\partial t} h_1 + \frac{\partial f_4}{\partial x} h_2 + \frac{\partial f_4}{\partial y} h_3 + \frac{\partial f_4}{\partial z} h_4 \right) k \in \mathcal{L}(\mathbb{H}; \mathbb{H}) \end{aligned}$$

Esempio 7.3. Troviamo la derivata di Fréchet della funzione identità sui quaternioni, $f(q) = q$: un semplice calcolo diretto dà il seguente risultato:

$$df_q(h) = h_1 + h_2i + h_3j + h_4k = h \quad \forall q \in \mathbb{H}$$

dove $h = h_1 + h_2i + h_3j + h_4k \in \mathbb{H}$.

Esempio 7.4. Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ la funzione $f(q) = q^2$. Esplicitando i coefficienti della base $\{1, i, j, k\}$ per f avremo:

$$f(q) = q^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 + 2txi + 2tyj + 2tzk$$

$$\begin{cases} f_1(q) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ f_2(q) = 2tx \\ f_3(q) = 2ty \\ f_4(q) = 2tz \end{cases}$$

Tutte le funzioni componenti sono continue e derivabili $\forall t, x, y, z \in \mathbb{R}$. La sua derivata di Fréchet in un punto $q \in \mathbb{H}$ è pari a:

$$df_q(h) = 2th_1 - 2xh_2 - 2yh_3 - 2zh_4 + (2xh_1 + 2th_2)i + (2yh_1 + 2th_3)j + (2zh_1 + 2th_4)k$$

dove $h = h_1 + h_2i + h_3j + h_4k \in \mathbb{H}$.

Esempio 7.5. Vogliamo calcolare la derivata di Fréchet nel punto in un punto $q \in \mathbb{H}$, $q \neq 1$ della funzione

$$f(q) = (q - 1)^{-1} = \frac{\bar{q} - 1}{|q - 1|^2} = \frac{(t - 1) - xi - yj - zk}{(t - 1)^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

Esplicitando le "funzioni componenti":

$$\begin{cases} f_1(q) = \frac{t - 1}{(t - 1)^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ f_2(q) = \frac{-x}{(t - 1)^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ f_3(q) = \frac{-y}{(t - 1)^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ f_4(q) = \frac{-z}{(t - 1)^2 + x^2 + y^2 + z^2} \end{cases}$$

Calcoliamo la Jacobiana di f :

$$J(f) = \begin{bmatrix} \frac{-(t-1)^2+x^2+y^2+z^2}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2x(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2y(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2z(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2x(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-x^2+y^2+z^2+(t-1)^2}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2xy}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2xz}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2y(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2yx}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-y^2+x^2+z^2+(t-1)^2}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2yz}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2z(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2zx}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2zy}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{(t-1)^2+x^2+y^2-z^2}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} \end{bmatrix}$$

La derivata di Fréchet della nostra funzione è data da:

$$df_q(h) = \begin{bmatrix} \frac{-(t-1)^2+x^2+y^2+z^2}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2x(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2y(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2z(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2x(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-x^2+y^2+z^2+(t-1)^2}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2xy}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2xz}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2y(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2yx}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-y^2+x^2+z^2+(t-1)^2}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2yz}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{2z(t-1)}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2zx}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{2zy}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{(t-1)^2+x^2+y^2-z^2}{((t-1)^2+x^2+y^2+z^2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_1 + \frac{-2x(t-1)}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_2 + \frac{-2y(t-1)}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_4 + \\
&\quad \frac{-2z(t-1)}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_4 + \left(\frac{2x(t-1)}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_1 - \frac{-x^2 + y^2 + z^2 + (t-1)^2}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{2xy}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_3 + \frac{2xz}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_4 \right) i + \left(\frac{2y(t-1)}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2yx}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_2 - \frac{-y^2 + x^2 + z^2 + (t-1)^2}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_3 + \frac{2yz}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_4 \right) j + \\
&\quad \left(\frac{2z(t-1)}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_1 + \frac{2zx}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_2 + \frac{2zy}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{(t-1)^2 + x^2 + y^2 - z^2}{((t-1)^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2} h_4 \right) k
\end{aligned}$$

Esempio 7.6. Calcoliamo la derivata di Fréchet in un punto $q \in \mathbb{H}$ della funzione esponenziale e^q . Esplicitando le funzioni componenti, avremo (per $|\text{Vec}(q)| \neq 0$):

$$e^q = e^t \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + e^t \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

da cui, utilizzando la convenzione secondo la quale f_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sono le componenti di $1, i, j$ e k rispettivamente della funzione avremo:

$$\begin{cases} f_1(q) = e^t \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ f_2(q) = \frac{xe^t \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ f_3(q) = \frac{ye^t \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ f_4(q) = \frac{ze^t \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

Calcolando le derivate parziali di f_i rispetto a x_j , $j = 1, 2, 3, 4$, e utilizzando la formula ricavata per la derivata di Fréchet per funzioni da \mathbb{H} in \mathbb{H}

avremo:

$$\begin{aligned}
 df_q(h) = J(f)h &= e^t \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} h_1 - \frac{e^t x \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_2 - \\
 &\quad \frac{e^t y \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_3 - \frac{e^t z \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_4 + \\
 &\quad \left(\frac{e^t x \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_1 \right. \\
 &+ \frac{e^t (x^2 \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + y^2 \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) h_1 + z^2 \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_2 \\
 &+ \frac{e^t x (y \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - y \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_3 \\
 &+ \left. \frac{e^t x (z \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_4 \right) i + \\
 &\quad \left(\frac{e^t y \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_1 + \frac{e^t y (x \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_2 \right. \\
 &+ \frac{e^t (y^2 \cos(\sqrt{y^2 + x^2 + z^2}) \sqrt{y^2 + x^2 + z^2} + x^2 \sin(\sqrt{y^2 + x^2 + z^2}) + z^2 \sin(\sqrt{y^2 + x^2 + z^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_3 \\
 &+ \left. \frac{e^t y (z \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - z \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_4 \right) j + \\
 &\quad \left(\frac{e^t z \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_1 + \right. \\
 &\quad \frac{e^t z (x \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_2 \\
 &+ \frac{e^t z (y \cos(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - y \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_3 + \\
 &\quad \left. \frac{e^t (z^2 \cos(\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}) \sqrt{z^2 + x^2 + y^2} + x^2 \sin(\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}) + y^2 \sin(\sqrt{z^2 + x^2 + y^2}))}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} h_4 \right) k
 \end{aligned}$$

Tale espressione per la derivata di Fréchet è valida per quaternioni con parte vettoriale diversa da zero: per quaternioni con parte vettoriale pari a 0(i.e numeri reali) la derivata di Fréchet sarà quella "standard" per la funzione esponenziale reale.

Esercizio 7.5. Determinare l'insieme di punti di \mathbb{H} in cui $\sin(q)$ e $\cos(q)$ sono derivabili nel senso di Fréchet, e trovare un'espressione per le loro derivate di Fréchet in un generico punto q appartenente a tale insieme.

Esercizio 7.6. Calcolare la derivata di Fréchet della funzione $f(q) = q^3$, $df_q(h)$, per $q = 1 - i - j$.

Esercizio 7.7. Dimostrare che, date due funzioni $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ e $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ Fréchet-differenziabili in un punto $q \in \mathbb{H}$ del dominio di entrambe, si avrà:

$$\begin{aligned} d(fg)_q(h) = & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_i} f_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_i} g_2 - \frac{\partial g_2}{\partial x_i} f_2 - \frac{\partial f_3}{\partial x_i} g_3 - \frac{\partial g_3}{\partial x_i} f_3 - \frac{\partial f_4}{\partial x_i} g_4 - \frac{\partial g_4}{\partial x_i} f_4 \right) h_i + \\ & h_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} g_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x_i} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_i} f_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_i} g_4 + \frac{\partial g_4}{\partial x_i} f_3 - \frac{\partial f_4}{\partial x_i} g_3 - \frac{\partial g_3}{\partial x_i} f_4 \right) i + \\ & h_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} g_3 + \frac{\partial g_3}{\partial x_i} f_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_i} g_4 - \frac{\partial g_4}{\partial x_i} f_2 + \frac{\partial f_3}{\partial x_i} g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_i} f_3 + \frac{\partial f_4}{\partial x_i} g_2 + \frac{\partial g_2}{\partial x_i} f_4 \right) j + \\ & h_i \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} g_4 + \frac{\partial g_4}{\partial x_i} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_i} g_3 + \frac{\partial g_3}{\partial x_i} f_2 - \frac{\partial f_3}{\partial x_i} g_2 - \frac{\partial g_2}{\partial x_i} f_3 + \frac{\partial f_4}{\partial x_i} g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_i} f_4 \right) k \end{aligned}$$

Esercizio 7.8. Dimostrare che, date due funzioni $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbf{P}$, i.e due funzioni dallo spazio dei quaternioni ai quaternioni puri, definite come:

$$f(q) = f_1(t, x, y, z)i + f_2(t, x, y, z)j + f_3(t, x, y, z)k$$

$$g(q) = g_1(t, x, y, z)i + g_2(t, x, y, z)j + g_3(t, x, y, z)k$$

e differenziabili (nel senso di Fréchet) ambedue in un punto q , si avrà:

$$d_q(f \times g)(h) = d_q\varphi(h) - d_q\psi(h)$$

dove \times denota il prodotto vettoriale di due quaternioni puri, e le funzioni φ e ψ sono definite come:

$$\varphi = f_2 g_3 i + f_3 g_1 j + f_1 g_2 k \quad \psi = f_3 g_2 i + g_3 f_1 j + g_1 f_2 k$$

7.3 Funzioni \mathbb{H}_Σ derivabili

Nella precedente sezione abbiamo esposto il metodo più "standard" per sviluppare un calcolo differenziale su uno spazio di Banach. Tuttavia, come visto negli esempi e nei problemi, le derivate di Fréchet di quasi tutte le funzioni elementari più importanti non hanno una forma molto "ordinata", ed inoltre, seppur siano lineari e valga una regola della catena, non esiste un analogo della regola del prodotto che abbia una forma simile a quella delle derivate di funzioni reali e complesse.

In aggiunta, un altro problema con la teoria appena sviluppata è che i quaternioni sono stati contemplati algebricamente come spazio vettoriale reale normato completo (spazio di Banach reale), mentre vorremo idealmente considerare una struttura in cui possiamo moltiplicare i nostri vettori per scalari quaternionici, i.e un modulo.

In questo capitolo, vedremo come una definizione alternativa di differenziabilità sui quaternioni (sfruttando la loro struttura di D -modulo di Banach) ci permetterà di ottenere una nozione di derivata con molte proprietà simili a quelle del caso reale e complesso. Chiameremo la classe delle funzioni derivabili in questo senso "funzioni \mathbb{H}_Σ -derivabili", per distinguerle dalle funzioni derivabili nel senso di Fréchet e le funzioni regolari nel senso di Fueter.

Definizione 7.4 (Funzioni \mathbb{H}_Σ -derivabili , Dzagnidze). *Sia $f(q)$ una funzione di una variabile quaternionica $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, con $q = t + xi + yj + zk$, definita in un intorno G di un punto q_0 : allora diremo che f è \mathbb{H}_Σ -derivabile in $q_0 = t_0 + x_0i + y_0j + z_0k$ se esistono due successioni, $A_k(q_0)$ e $B_k(q_0)$ tale che la serie $\sum_k A_k(q_0)B_k(q_0)$ è convergente e:*

$$f(q_0 + h) - f(q_0) = \sum_k A_k(q_0)hB_k(q_0) + \omega(q_0, h) \quad (7.9)$$

dove

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\omega(q_0, h)|}{|h|} = 0 \iff |\omega(q_0, h)| = o(|h|)$$

e $q_0 + h \in G$. Infine, chiameremo derivata di f calcolata in q_0 , indicata con $f'(q_0)$ la serie:

$$f'(q_0) := \sum_k A_k(q_0)B_k(q_0)$$

Inoltre, da ora in poi, indicheremo il termine $\omega(q_0, h)$ come semplicemente $o(h)$, essendo che la sua norma è o piccolo della norma di h .

Tale nozione di derivata ha molte proprietà del calcolo differenziale sui reali e sui complessi con cui il lettore ha familiarità. Ad esempio, è generalmente valida per tale derivata una "regola della potenza" per un monomio:

Proposizione 7.5. *Sia $f(q) = q^n$, dove $q = t + xi + yj + zk \in \mathbb{H}$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora:*

$$f'(q) = (q^n)' = nq^{n-1}$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare la validità $\forall n \in \mathbb{N}$ della seguente identità:

$$(q + h)^n - q^n = q^{n-1}h + q^{n-2}hq + \cdots + qhq^{n-2} + hq^{n-1} + o(h)$$

Procediamo per induzione; l'identità è ovviamente vera per $n = 1$ in quanto:

$$q + h - q = h$$

Per il passo induttivo, supponiamo che sia vera per $n = k$. Allora avremo che, per $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} (q + h)^{k+1} - q^{k+1} &= (q + h)(q + h)^k - q^{k+1} = \\ (q + h)(q^k + q^{k-1}h + \cdots + qhq^{k-2} + hq^{k-1} + o(h)) - q^{k+1} &= \\ +q^kh + q^{k-1}hq + \cdots + qhq^{k-1} + hq^k + o(h) \end{aligned}$$

Ma vediamo che la parte destra dell'equazione è esattamente della forma (7.9), dove la somma $\sum_m A_m h B_m$ in questo caso è:

$$\sum_m A_m h B_m = \sum_m q^{k-m} h q^m$$

e dunque la derivata di f in q è:

$$(q^n)' = \sum_m A_m B_m = \sum_m q^{k-m} q^m = nq^{n-1}$$

□

Dimostriamo ora un risultato che ci sarà utile più in là per trovare espressioni di derivate di importanti funzioni elementari sui quaternioni.

Lemma 7.1. *Le seguenti identità sono valide per $|h| < 1$:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(q + h)^2 - q^2}{2!} = \frac{qh + hq}{2!} + A_2 \\ \frac{(q + h)^3 - q^3}{3!} = \frac{q^2h + qhq + hq^2}{3!} + A_3 \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

dove $A_2 = \frac{h^2}{2}$, $A_3 = \frac{1}{3!}(qh^2 + hqh + h^2q + h^3), \dots$ e così via, e dove $A_n = o(h)$ $\forall n \geq 2$.

Dimostrazione. Per dimostrare il fatto, osserviamo che:

$$\begin{aligned} |A_3| &< \frac{2^3}{3!}(|q||h|^2 + |h|^3) < \begin{cases} \frac{2^3}{3!}|h|^2(1 + |h|) < \frac{2^3}{3!}|h|^2 \frac{1}{1 - |h|} & \text{se } |q| < 1 \\ \frac{2^3}{3!}|q||h|^2(1 + |h|) < \frac{2^3}{3!}|q||h|^2 \frac{1}{1 - |h|} & \text{se } |q| \geq 1 \end{cases} \\ |A_4| &< \frac{2^4}{4!}(|q|^2|h|^2 + |q||h|^3 + |h|^4) < \begin{cases} \frac{2^4}{4!}|h|^2(1 + |h| + |h|^2) < \frac{2^4}{4!}|h|^2 \frac{1}{1 - |h|} & \text{se } |q| < 1 \\ \frac{2^4}{4!}|q|^2|h|^2(1 + |h| + |h|^2) < \frac{2^4}{4!}|q|^2|h|^2 \frac{1}{1 - |h|} & \text{se } |q| \geq 1 \end{cases} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Procedendo nel medesimo modo otteniamo per un generico n :

$$|A_n| < \begin{cases} \frac{2^n}{n!}|h|^2 \frac{1}{1 - |h|} & \text{se } |q| < 1 \\ \frac{2^n}{n!}|q|^{n-2}|h|^2 \frac{1}{1 - |h|} & \text{se } |q| \geq 1 \end{cases}$$

da cui

$$\sum_{n=3}^{\infty} |A_n| < \begin{cases} |h|^2 \frac{1}{1 - |h|} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & \text{se } |q| < 1 \\ |h|^2 \frac{1}{1 - |h|} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!} |q|^{n-2} & \text{se } |q| \geq 1 \end{cases}$$

ma le serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!} |q|^{n-2}$ e $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ convergono e dunque:

$$\sum_{n=3}^{\infty} |A_n| = o(h)$$

$\forall q \in \mathbb{H}, n \geq 2$. □

Dimostriamo il primo corollario "familiare" del lemma 7.1:

Proposizione 7.6. Sia $f(q) = e^q$ la funzione esponenziale quaternionica definita nel capitolo 5, allora:

$$f'(q) = (e^q)' = e^q$$

Dimostrazione. Utilizzando l'espansione della funzione e^q nella sua serie infinita quaternionica (i.e la sua definizione data nel capitolo 5) avremo che:

$$e^{q+h} - e^q = h + \frac{(q+h)^2 - q^2}{2!} + \frac{(q+h)^3 - q^3}{3!} + \dots$$

Applicando il lemma 7.1 alla parte destra dell'uguaglianza di sopra otteniamo:

$$e^{q+h} - e^q = h + \frac{1}{2!}(qh + hq) + \frac{1}{3!}(q^2h + qhq + hq^2) + \dots + o(h)$$

E dunque:

$$e^{q+h} - e^q = (1 + \frac{q}{2!} + \frac{q^2}{3!} + \dots)h + (\frac{1}{2!} + \frac{q}{3!} + \frac{q^2}{4!} + \dots)hq + (\frac{1}{3!} + \frac{q}{4!} + \frac{q^2}{5!} + \dots)hq^2 + \dots + o(h)$$

Da cui, per la definizione di derivata data nella definizione 7.4, e notando che:

$$1 + \frac{q}{2!} + \frac{q^2}{3!} + \dots + \frac{q}{2!} + \frac{q^2}{3!} + \frac{q^3}{4!} + \dots + \frac{q^2}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} = e^q$$

avremo che

$$(e^q)' = e^q$$

□

Sono valide in generali anche i seguenti risultati per le derivate di funzioni trigonometriche

Proposizione 7.7. *Sia $q \in \mathbb{H}$ un quaternione e siano $\sin(q)$ e $\cos(q)$ le funzioni seno e coseno quaternionico. Allora:*

$$(\sin(q))' = \cos(q)$$

$$(\cos(q))' = -\sin(q)$$

Dimostrazione. Troviamo prima la derivata della funzione seno:

$$\begin{aligned} \sin(q+h) - \sin(q) &= (q+h) - \frac{(q+h)^3}{3!} + \frac{(q+h)^5}{5!} - \dots - q + \frac{q^3}{3!} - \dots = \\ &= h - \frac{(q+h)^3 - q^3}{3!} + \frac{(q+h)^5 - q^5}{5!} - \dots \\ &= h - \frac{1}{3!}(q^2h + qhq + hq^2) + \frac{1}{5!}(q^4h + q^3hq + q^2h^2 + qhq^3 + hq^4) + \dots + o(h) = \end{aligned}$$

$$h + \left(-\frac{q^2}{3!} + \frac{q^4}{5!}\right)h + qh\left(-\frac{q}{3!} + \frac{q^3}{5!}\right) + h\left(-\frac{q^2}{3!} + \frac{q^4}{5!}\right) + \cdots + o(h)$$

Dunque la funzione $\sin(q)$ è derivabile, e la sua derivata è pari a:

$$(\sin(q))' = 1 - \frac{q^2}{3!} + \frac{q^4}{5!} - \frac{q^2}{3!} + \frac{q^4}{5!} - \frac{q^2}{3!} + \frac{q^4}{5!} + \cdots = \cos(q)$$

Per il coseno, analogamente, osserviamo che:

$$\begin{aligned} \cos(q+h) - \cos(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(q+h)^{2n}}{(2n)!} - \frac{(-1)^nq^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{(q+h)^2}{2!} + \frac{(q+h)^4}{4!} \\ &\quad - \cdots - 1 + \frac{q^2}{2!} - \frac{q^4}{4!} + \cdots = -\frac{(q+h)^2 - q^2}{2!} + \frac{(q+h)^4 - q^4}{4!} - \frac{(q+h)^6 - q^6}{6!} + \cdots = \\ &\quad -\frac{1}{2!}(qh + hq) + \frac{1}{4!}(q^3h + q^2hq + qhq^2 + hq^3) - \cdots + o(h) \end{aligned}$$

Abbiamo ricondotto la differenza $\cos(q+h) - \cos(q)$ ad una forma del tipo (7.9). Dall'espressione così ottenuta, riordinando i termini in un modo simile a come fatto prima, segue che la derivata della nostra funzione è pari a:

$$(\cos(q))' = -\sin(q)$$

□

Esercizio 7.9. Dimostrare che le "solite" relazioni sulle derivate di funzioni iperboliche sono valide per questa nuova definizione di derivata; i.e dimostrare, utilizzando le espansioni in serie infinite quaternioniche di $\sinh(q)$ e $\cosh(q)$, che:

$$(\sinh(q))' = \cosh(q) \quad e \quad (\cosh(q))' = \sinh(q)$$

Come già accennato prima, per la derivata \mathbb{H}_Σ di una funzione in una variabile quaternionica valgono tutte le proprietà più importanti delle derivate di funzioni in una variabile reale e complessa; dimostriamolo:

Teorema 7.1 (Proprietà della derivata \mathbb{H}_Σ). Siano f e g due funzioni di una variabile quaternionica definite in un intorno di $q \in \mathbb{H}$. Se entrambe le funzioni sono \mathbb{H}_Σ -differenziabili in q , allora:

- $\forall p \in \mathbb{H}, pf$ e fp sono differenziabili in q e:

$$(pf)'(q) = pf'(q) \quad (fp)'(q) = f'(q)p$$

- $f + g$ è differenziabile in q e:

$$(f + g)'(q) = f'(q) + g'(q)$$

- fg è differenziabile in q e:

$$(fg)'(q) = f'(q)g(q) + f(q)g'(q)$$

Dimostrazione. • Per il primo fatto, basta osservare che se f è differenziabile avremo che:

$$f(q + h) - f(q) = \sum_k A_k(q)hB_k(q) + o(h)$$

E moltiplicando ambo i lati da sinistra per la costante quaternionica p avremo

$$pf(q + h) - f(q) = \sum_k pA_k(q)hB_k(q) + o(h)$$

i.e pf è differenziabile e la sua derivata è pari a pf' . Otteniamo lo stesso risultato per la destra moltiplicando p da destra.

- Per il secondo risultato, osserviamo che, se per ipotesi come prima f e g sono differenziabili in q , avremo:

$$f(q + h) - f(q) = \sum_k A_k(q)hB_k(q) + o(h)$$

$$g(q + h) - g(q) = \sum_k C_k(q)hB_k(q) + o(h)$$

Da cui:

$$f(q + h) + g(q + h) - (f(q) + g(q)) = \sum_k A_k(q)hB_k(q) + \sum_k C_k(q)hB_k(q) + o(h)$$

i.e $f + g$ è differenziabile e

$$(f + g)' = f' + g'$$

- Infine, per il prodotto, osserviamo che potremo riscrivere la differenza tra $f(q + h)g(q + h)$ e $f(q)g(q)$ come:

$$f(q + h)g(q + h) - f(q)g(q) = [f(q + h) - f(q)]g(q + h) + f(q)[g(q + h) - g(q)]$$

da cui sfruttando la differenziabilità data per assunto di f e g potremo eguagliare a:

$$= \left[\sum_k A_k(q)hB_k(q) + o(h) \right] g(q+h) + f(q) \left[\sum_k C_k(q)hD_k(q) + o(h) \right] \quad (7.10)$$

ma, ancora sfruttando la differenziabilità di g , ricordiamo che $g(q+h) - g(q) = \sum_k C_k(q)hB_k(q) + o(h)$, da cui $g(q+h) = g(q) + \sum_k C_k(q)hB_k(q) + o(h)$.

Sostituendo tale relazione nell'equazione (7.10) otteniamo

$$\begin{aligned} & \left[\sum_k A_k(q)hB_k(q) + o(h) \right] \left[g(q) + \sum_k C_k(q)hD_k(q) + o(h) \right] \\ & + f(q) \left[\sum_k C_k(q)hD_k(q) + o(h) \right] \end{aligned}$$

distribuendo i prodotti e notando che i termini $o(h)g(q)$, $o(h)\sum_k C_k(q)hD_k(q)$, $\sum_k A_k(q)hB_k(q)o(h)$ e $\sum_k A_k(q)hB_k(q)\sum_{k'} C_{k'}(q)hD_{k'}(q)$ sono tutti $o(h)$, avremo che il tutto sarà uguale a:

$$= \left(\sum_k A_k(q)hB_k(q) \right) g(q) + f(q) \left(\sum_k C_k(q)hD_k(q) \right) + o(h)$$

Abbiamo così ottenuto un'equazione della forma (7.9) da cui segue che:

$$\begin{aligned} (fg)'(q) &= \left(\sum_k A_k(q)B_k(q) \right) g(q) + f(q) \left(\sum_k C_k(q)D_k(q) \right) \\ &= f'(q)g(q) + f(q)g'(q) \end{aligned}$$

□

È presente anche per le derivate \mathbb{H}_Σ di funzioni quaternionica una formula per computare la derivata del reciproco di una funzione. Dimostriamola qui di seguito, ma prima dimostriamo un lemma preparatorio.

Lemma 7.2. *Siano $q_1, q_2 \neq 0$ due quaternioni. Allora:*

$$q_1^{-1} - q_2^{-1} = q_1^{-1}(q_1 - q_2)q_2^{-1}(q_1 - q_2)q_2^{-1} - q_2^{-1}(q_1 - q_2)q_2^{-1}$$

Dimostrazione. Dimostriamolo manipolando algebricamente la parte di destra; facendo ciò otteniamo

$$\begin{aligned} (1 - q_1^{-1}q_2)q_2^{-1}(q_1q_2^{-1} - 1) - (q_2^{-1}q_1 - 1)q_2^{-1} &= (q_2^{-1} - q_1^{-1})(q_1q_2^{-1} - 1) - (q_2^{-1}q_1q_2^{-1} - q_2^{-1}) \\ &= (q_2^{-1}q_1q_2^{-1} - q_2^{-1} - q_2^{-1} + q_1^{-1}) - (q_2^{-1}q_1q_2^{-1} - q_2^{-1}) = q_1^{-1} - q_2^{-1} \end{aligned}$$

□

Proposizione 7.8. Sia f una funzione \mathbb{H}_Σ differenziabile in un punto $q \in \mathbb{H}$ e tale che $f(q) \neq 0$ in un intorno di q , allora anche f^{-1} è differenziabile in q e:

$$(f^{-1})' = \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{1}{f(q)}f'(q)\frac{1}{f(q)}$$

Dimostrazione. Anzitutto sia $f'(q) = \sum_k A_k(q)B_k(q)$ la derivata di f in q : analizziamo ora la differenza $\frac{1}{f(q+h)} - \frac{1}{f(q)}$; utilizzando il lemma 7.2 otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(q+h)} - \frac{1}{f(q)} &= \frac{1}{f(q+h)}(f(q+h) - f(q))\frac{1}{f(q)}(f(q+h) - f(q))\frac{1}{f(q)} - \\ &\quad \frac{1}{f(q)}(f(q+h) - f(q))\frac{1}{f(q)} \end{aligned}$$

Ricordiamo che $f(q+h) - f(q) = \sum_k A_k(q)hB_k(q) + o(h)$; sostituendo tale identità nella formula soprastante avremo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(q+h)}\left(\sum_k A_k(q)hB_k(q) + o(h)\right)\frac{1}{f(q)}\left(\sum_k A_k(q)hB_k(q) + o(h)\right)\frac{1}{f(q)} - \\ \frac{1}{f(q)}\left(\sum_k A_k(q)hB_k(q) + o(h)\right)\frac{1}{f(q)} \end{aligned}$$

distribuendo i vari prodotti, e badando come prima a quali siano $o(h)$, otteniamo infine che il tutto è uguale a

$$= -\frac{1}{f(q)}\left[\sum_k A_k(q)hB_k(q)\right]\frac{1}{f(q)} + o(h)$$

da cui:

$$\left(\frac{1}{f(q)}\right)' = -\frac{1}{f(q)}\left[\sum_k A_k(q)B_k(q)\right]\frac{1}{f(q)} = -\frac{1}{f(q)}f'(q)\frac{1}{f(q)}$$

□

Corollario 7.1. *Sia $q \neq 0$, e sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ la funzione $f(q) = q^m$, dove $m < 0$. Allora:*

$$(q^m)' = mq^{m-1}$$

Dimostrazione. Per dimostrare questo immediato corollario, basta applicare prima la proposizione 7.5 ("regola delle potenze" per la derivata \mathbb{H}_Σ quaternionica) e dopo la proposizione 7.8. \square

Un altro importante corollario della proposizione appena dimostrata ci permetterà di calcolare, date 2 funzioni quaternioniche \mathbb{H}_Σ -derivabili, la derivata del loro rapporto.

Corollario 7.2. *Siano $f, g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ 2 funzioni quaternioniche \mathbb{H}_Σ -derivabili in un punto $q \in \mathbb{H}$, e sia $g(q) \neq 0$ in un intorno di q . Allora, le funzioni $f \cdot \frac{1}{g}$ e $\frac{1}{g} \cdot f$ sono a loro volta \mathbb{H}_Σ -derivabili e la loro derivata vale:*

$$\begin{aligned} \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(q) &= f'(q) \frac{1}{g(q)} - f(q) \frac{1}{g(q)} g'(q) \frac{1}{g(q)} \\ \left(\frac{1}{g} \cdot f\right)'(q) &= -\frac{1}{g(q)} g'(q) \frac{1}{g(q)} f(q) + \frac{1}{g(q)} f'(q) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione, basta applicare congiuntamente la regola del prodotto per la derivata \mathbb{H}_Σ (terzo punto del teorema 7.1), e la proposizione 7.8 poc'anzi dimostrata. \square

Circa le proprietà di questa definizione di derivata alternativa sul corpo dei quaternioni rimane un'ultima domanda; è valida anche per quest'ultima una "regola della catena" simile a quella del caso reale e complesso? La risposta è affermativa, seppur con qualche modifica.

Teorema 7.2 (Regola della catena quaternionica, O. Dzagnize). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione definita in un intervallo di un punto $q_0 \in \mathbb{H}$ e sia $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ un'altra funzione definita in un intervallo del punto $f(q_0) = w_0 \in \mathbb{H}$. Allora, se f è \mathbb{H}_Σ -derivabile in q_0 , e g è \mathbb{H}_Σ derivabile in $w_0 = f(q_0)$, e le loro derivate sono date da:*

$$\begin{aligned} g'(w_0) &= \sum_k A_k(w_0) B_k(w_0) \\ f'(q_0) &= \sum_j C_j(q_0) D_j(q_0) \end{aligned}$$

avremo che la funzione composta $g \circ f$ è derivabile in q_0 , e la sua derivata è pari a:

$$(g \circ f)'(q_0) = \sum_k A_k(q_0) f'(q_0) B_k(q_0)$$

Dimostrazione. Sia $q \in G \subset \mathbb{H}$, dove G è un aperto contenente il punto q_0 . Poniamo $w = f(q)$; allora:

$$g(w) - g(w_0) = \sum_k A_k(w - w_0)B_k + \omega_1(w_0, w)$$

$$f(q) - f(q_0) = \sum_j C_j(q - q_0)D_j + \omega_2(q_0, q)$$

da cui, calcolando esplicitamente la medesima differenza per la funzione composta:

$$\begin{aligned} g(f(q)) - g(f(q_0)) &= \sum_k A_k(f(q) - f(q_0))B_k + \omega_1(f(q_0), f(q)) \\ &= \sum_k A_k \left(\sum_j C_j(q - q_0)D_j + o(h) \right) B_k + \omega_1(f(q_0), f(q)) \\ &= \sum_k A_k \left(\sum_j C_j(q - q_0)D_j \right) B_k + o(h) + \omega_1(f(q_0), f(q)) \\ &= \sum_k \sum_j A_k C_j(q - q_0) D_j B_k + o(h) + \omega_1(f(q_0), f(q)) \end{aligned}$$

Ma $\lim_{q \rightarrow q_0} \frac{|\omega_1(f(q_0), f(q))|}{|q - q_0|} = 0$, i.e. $\omega_1(f(q_0), f(q)) = o(h)$, e dunque:

$$g(f(q)) - g(f(q_0)) = \sum_k \sum_j A_k C_j(q - q_0) D_j B_k + o(h)$$

Da questa espressione deduciamo infine il risultato dell'asserto:

$$(g \circ f)'(q_0) = \sum_k A_k(q_0) \left(\sum_j C_j(q_0) D_j(q_0) \right) B_k(q_0) = \sum_k A_k(q_0) f'(q_0) B_k(q_0) \quad (7.11)$$

□

Per il caso particolare in cui la funzione $g(q) = q^n$, avremo:

Corollario 7.3. Se f è una funzione \mathbb{H}_Σ -differenziabile in un quaternione q allora:

$$(f^n)' = f^{n-1}(q)f'(q) + f^{n-2}(q)f'(q)f(q) + f^{n-3}(q)f'(q)f^2(q) + \cdots + f'(q)f^{n-1}(q) \quad (7.12)$$

7.4 Analisi differenziale su D-moduli di Banach

La teoria delle funzioni \mathbb{H}_Σ -derivabili di una funzione quaternionica sviluppata nella sezione precedente è un caso particolare della teoria del calcolo differenziale su una classe di strutture algebriche più generali (che contengono i quaternioni \mathbb{H}) note come D -moduli di Banach (dove D è un anello) [29], i.e dei D -moduli normati, la cui topologia metrica indotta dalla loro norma è completa. La definizione di funzione differenziabile e derivata di una funzione è molto simile, diamola qui di seguito:

Definizione 7.5 (Derivata di una funzione tra D-moduli di Banach, A. Kleyn). *Sia A un D -modulo di Banach con norma $\|\cdot\|_A$, e B un D -modulo di Banach con norma $\|\cdot\|_B$; allora, un'applicazione*

$$f : A \rightarrow B$$

è detta differenziabile in $x \in A$ se l'incremento di quest'ultima può essere scritto come:

$$f(x + h) - f(x) = \frac{df(x)}{dx}(h) + o(h)$$

dove

$$\frac{df(x)}{dx} : A \rightarrow B$$

è un'applicazione lineare di D -moduli, e $o : A \rightarrow B$ è una funzione continua tale che:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|o(h)\|_B}{\|h\|_A} = 0$$

L'applicazione lineare $\frac{df(x)}{dx}$ è detta derivata della funzione f .

La derivata di una funzione $f : A \rightarrow B$ può essere espansa in componenti: ricordando che le applicazioni lineari tra 2 Banach D -moduli A e B , indicate con $\mathcal{L}(D; A \rightarrow B)$, formano un $B \otimes B$ -modulo sinistro, possiamo dimostrare il seguente fatto:

Proposizione 7.9. *Data una base $\{F_k\}_k$ del $B \otimes B$ -modulo sinistro $\mathcal{L}(D; A \rightarrow B)$, possiamo rappresentare la derivata di un'applicazione $f : A \rightarrow B$ come:*

$$\frac{df(x)}{dx} = \sum_k \frac{d^k f(x)}{dx^k} \circ F_k$$

dove $\frac{d^k f(x)}{dx^k} \in B \otimes B$.

L'espressione $\frac{d^k f(x)}{dx} = \frac{d_{s_k 0}^k f(x)}{dx} \otimes \frac{d_{s_k 1}^k f(x)}{dx} \in B \otimes B$ è un tensore decomponibile ed è detta k -esima coordinata della derivata $\frac{df(x)}{dx}$ rispetto alla base $\{F_k\}_k$ del modulo $\mathcal{L}(D; A \rightarrow B)$. Inoltre, le espressioni $\frac{d_{s_k 1}^k f(x)}{dx}$ e $\frac{d_{s_k 0}^k f(x)}{dx}$ sono dette componenti della coordinata k -esima della derivata di f . In termini delle anzidette, la derivata può essere scritta come:

$$\frac{df(q)}{dq} = \sum_k \frac{d_{s_k 0}^k f(x)}{dx} \otimes \frac{d_{s_k 1}^k f(x)}{dx} \quad (7.13)$$

Vediamo che il concetto di derivata dato nella sezione precedente non è altro che la derivata di funzioni tra D-moduli di Banach introdotta qui calcolata in $h = 1$. Infatti, riscrivendo la condizione di differenziabilità \mathbb{H}_Σ di una funzione $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ notiamo che:

$$\sum_k A_k(q) h B_k(q) = \frac{df(x)}{dx}(h) = \sum_k \frac{d_{s_k 0}^k f(x)}{dx} h \frac{d_{s_k 1}^k f(x)}{dx}$$

dove qui l'applicazione sotto cui viene calcolata

$$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$a \otimes b \rightarrow ahb$$

è spesso chiamata "applicazione sandwich" o "interposizione di quaternioni". Vediamo ora alcuni esempi:

Esempio 7.7. Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ la funzione $f(q) = q^2$. Come visto già nella sezione 7.3, abbiamo:

$$(q^2 + h) - q^2 = qh + hq + h^2 = qh + hq + o(h)$$

in quanto $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2}{|h|} = 0$. Da ciò otteniamo che:

$$\frac{df(q)}{dq}(h) = qh + hq$$

i.e

$$\frac{df(q)}{dq} = q \otimes 1 + 1 \otimes q$$

cioè

$$\begin{cases} A_1 = \frac{d_{s_1 0}^1 f(q)}{dq} = q \\ B_1 = \frac{d_{s_1 1}^1 f(q)}{dq} = 1 \\ A_2 = \frac{d_{s_2 0}^2 f(q)}{dq} = 1 \\ B_2 = \frac{d_{s_2 1}^2 f(q)}{dq} = q \end{cases}$$

Esempio 7.8. Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ la funzione $f(q) = q^3$. L'incremento $f(q+h) - f(q)$ in questo caso è pari a:

$$(q+h)^3 - q^3 = q^2 h + h q^2 + q h q + h q h + h^2 q + q h^2 + h^2 q + h^3$$

ma $h q h + h^2 q + q h^2 + h^2 q + h^3 = o(h)$, e dunque:

$$(q+h)^3 - q^3 = q^2 h + h q^2 + q h q + o(h)$$

La derivata di $f(q)$ è esprimibile come

$$\frac{df(q)}{dq} = q^2 \otimes 1 + 1 \otimes q^2 + q \otimes q$$

Se calcolata in $h \in \mathbb{H}$, (interponendo h tra i termini dei prodotti tensoriali):

$$\frac{df(q)}{dq}(h) = q^2 h + h q^2 + q h q$$

La nostra derivata \mathbb{H}_Σ è quest'ultima funzione calcolata in $h = 1$:

$$(q^3)' = 3q^2$$

Esempio 7.9. Sia $f(q) = e^q$ l'esponenziale quaternionico. Come visto nella dimostrazione della proposizione 7.6, avremo:

$$e^{q+h} - e^q = \left(1 + \frac{q}{2!} + \frac{q^2}{3!} + \dots\right)h + \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{3!} + \frac{q^2}{4!} + \dots\right)h q + \left(\frac{1}{3!} + \frac{q}{4!} + \frac{q^2}{5!} + \dots\right)h q^2 + \dots + o(h)$$

da cui otterremo la seguente espressione per la derivata di e^q :

$$\frac{df(q)}{dq} = \left(1 + \frac{q}{2!} + \frac{q^2}{3!} + \dots\right) \otimes 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{3!} + \frac{q^2}{4!} + \dots\right) \otimes q + \left(\frac{1}{3!} + \frac{q}{4!} + \frac{q^2}{5!} + \dots\right) \otimes q^2 + \dots$$

O, riscrivendolo in maniera leggermente più "pulita":

$$\frac{df(q)}{dq} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{(m+n+1)!} \right) \otimes q^n \quad (7.14)$$

Esercizio 7.10. Trovare un'espressione per la derivata nella forma dell'equazione (7.13) per la funzione $f(q) = q^4$.

Esercizio 7.11. Trovare un'espressione per la derivata nella forma dell'equazione (7.13) per la funzione $f(q) = \sin(q)$ e $f(q) = \cos(q)$.

Esercizio 7.12. Trovare l'espansione in componenti della derivata delle funzioni iperboliche quaternioniche $f(q) = \sinh(q)$ e $f(q) = \cosh(q)$.

7.5 Funzioni C-regolari

In questa sezione introdurremo un approccio alternativo all'analisi quaternionica sviluppato da Cullen e in seguito ricercato ed ampliato da altri matematici [5] [19]. In particolare, prenderemo in esame in questa sezione la formulazione alternativa del concetto di "regolarità quaternionica" dovuta a G.Gentili e D.C. Struppa [19].

Definizione 7.6 (Funzione C-regolare). *Sia $\Omega \subset \mathbb{H}$ un insieme aperto e connesso, e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione "differenziabile nel senso classico della geometria differenziale/analisi multi-variabile". Allora, diremo che f è C-regolare se $\forall I \in S^2 := \{q = xi + yj + zk \in \mathbf{P} ; |q|^2 = 1\}$, la restrizione f_I di f all'insieme $L_I := \mathbb{R} + \mathbb{R}I$, passante attraverso l'origine, 1 ed I , è olomorfa (nel senso classico dell'analisi complessa) su $\Omega \cap L_I$.*

Da ora in poi chiameremo l'insieme $S^2 = \{q = xi + yj + zk \in \mathbf{P} ; |q|^2 = 1\}$ semplicemente S .

Definizione 7.7 (I-derivata di una funzione quaternionica). *Sia $\Omega \subset \mathbb{H}$, come prima, un sottoinsieme aperto e connesso dei quaternioni, e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione "differenziabile nel senso classico della geometria differenziale/analisi multi-variabile". Allora, $\forall I \in S$, e per ogni quaternione $q = x + yI \in \Omega \cap L_I$, $x, y \in \mathbb{R}$ chiameremo $\partial_I f(q)$ la I-derivata di f a q , definita come:*

$$\partial_I f(x + yI) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) f_I(x + yI) \quad (7.15)$$

Definizione 7.8. *Sia $\Omega \subset \mathbb{H}$, come prima, un sottoinsieme aperto e connesso dei quaternioni, e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione C-regolare sinistra. Allora, chiameremo derivata di Cullen di f , che scriveremo come $\partial_C f$ la seguente espressione:*

$$\partial_C f(q) = \begin{cases} \partial_I f(q) & \text{se } q = x + yI \in \Omega \cap L_I, y \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \text{se } q = x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (7.16)$$

Corollario 7.4. *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione di una variabile quaternionica. Allora f è C-regolare in Ω se e solo se $\bar{\partial}_I f(q) = 0 \ \forall q \in \Omega \cap L_I$.*

Dimostrazione. Basta ricordare la definizione classica di funzione olomorfa dell'analisi complessa, e combinarla alle definizioni 7.6 e 7.7. \square

Le funzioni C-regolari e le derivate di Cullen hanno numerose proprietà desiderabili; ad esempio sommando funzioni C-regolari otteniamo ancora funzioni C-regolari (non enunceremo tale fatto in una proposizione a sé stante in quanto è immediatamente deducibile dal corollario 7.4). Enunciamone delle altre qui di seguito:

Proposizione 7.10. *Siano $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ e $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ due funzioni C-regolari in un punto $q = x + yI \in \Omega \cap L_I$, allora:*

- $\partial_C(f + g)(q) = \partial_C f(q) + \partial_C g(q)$.
- La derivata di Cullen di una funzione C-regolare è a sua volta C-regolare, i.e $\bar{\partial}_I(\partial_C f) = 0$.

Dimostrazione. Si tratta in ambo i casi di un immediato calcolo diretto:

- Per il primo punto, osserviamo che:

$$\begin{aligned}\partial_C(f + g) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\right)(f_I(x + yI) + g_I(x + yI)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\right)f_I(x + yI) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - I\frac{\partial}{\partial y}\right)g_I(x + yI)\end{aligned}$$

- Per il secondo:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_I(\partial_C f) &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f_I}{\partial x} - I\frac{\partial f_I}{\partial y}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f_I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_I}{\partial y^2} + I\frac{\partial^2 f_I}{\partial y \partial x} - I\frac{\partial^2 f_I}{\partial x \partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

□

Esercizio 7.13. Dimostrare che polinomi del tipo $f(q) = \sum_{n=0}^m q^n a_n$ sono funzioni C-regolari.

Lemma 7.3. Siano I, J due elementi ortogonali di S , e sia $K = IJ$; allora:

- $K = IJ = -JI \in S$.
- K è ortogonale ad ambo i quaternioni I e J .
- $JK = I = -KJ ; KI = J = -IK$.

Dimostrazione. • Osserviamo che, per ipotesi, I e J sono ortogonali, e dunque $\langle I | J \rangle = 0$. Da ciò segue che (come visto nel capitolo 2):

$$IJ = \langle I | J \rangle + I \times J = I \times J$$

e dunque $I \times J = IJ = -J \times I = -JI$.

- Essendo $K = IJ = I \times J$, esso sarà, per le proprietà del prodotto vettoriale di quaternioni puri, ortogonale ad entrambi.
- $JK = J(-JI) = -J^2I = I$; $-KJ = -IJ^2 = I$; $KI = K(-KJ) = J = -IK = -(JK)K = J$.

□

Dunque, l'insieme $\{I, J, K\}$ di elementi soddisfacenti le richieste del lemma 7.3 forma una base su S .

Inoltre l'insieme $\{1, I, J, K\}$ forma anche una base per una \mathbb{R} -algebra quaternionica.

Dimostriamo ora un altro importante risultato preparatorio, noto con il nome di "lemma di separazione".

Lemma 7.4 (Lemma di separazione). *Sia f una funzione C-regolare su $B = B(0, R) \implies \forall I, J \in S$ (con J perpendicolare ad I), esistono due funzioni olomorfe $F, G : B \cap L_I \rightarrow L_I$ tale che $\forall q = x + yI$:*

$$f_I(q) = F(q) + G(q)J$$

Dimostrazione. Siano I, J un paio di vettori ortogonali in S , e sia $K = IJ = -JI$ come prima. Scriviamo la nostra funzione f come $f = f_0 + If_1 + Jf_2 + Kf_3$.

Siccome f è C-regolare, avremo $\left(\frac{\partial}{\partial x} + I\frac{\partial}{\partial y}\right)f_I(x + yI) = 0$, cioè:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + I\frac{\partial f_1}{\partial x} + J\frac{\partial f_2}{\partial x} + K\frac{\partial f_3}{\partial x} + I\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + I\frac{\partial f_1}{\partial y} + J\frac{\partial f_2}{\partial y} + K\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)$$

Utilizzando le proprietà della base adoperata dimostrate nel lemma 7.3 avremo:

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} + I\left(\frac{\partial f_0}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\right) + J\left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_3}{\partial y}\right) + K\left(\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) = 0$$

Da cui

$$\begin{cases} \frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_0}{\partial y} = -\frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} = -\frac{\partial f_2}{\partial y} \end{cases}$$

i.e le funzioni $f_0 + If_1$ e $f_2 + If_3$ sono olomorfe. Ora, ponendo $F = f_0 + If_1$ e $G = f_2 + If_3$ e notando con un calcolo diretto che $f_I(x + yI) = F(x + yI) + G(x + yI)$ otteniamo il risultato sperato. \square

Lemma 7.5. Sia $f : B \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione C-regolare. Allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, la sua derivata di Cullen n-esima è pari a:

$$\partial_C^n f(x + yI) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x + yI)$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione: per il caso base $n = 1$ vediamo che:

$$\partial_C f(x + yI) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x + yI) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - I \frac{\partial f}{\partial y} \right) (x + yI) = \frac{\partial f}{\partial x} (x + yI)$$

dove qui l'ultima uguaglianza è una conseguenza delle equazioni di Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial x} = -I \frac{\partial f}{\partial y}$.

Supponiamo ora che sia vero per un generico $n = k$, i.e:

$$\partial_C^k f(x + yI) = \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x + yI)$$

per dimostrare il caso $n = k + 1$, osserviamo che, essendo f C-regolare:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} + I \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} = \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + I \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

da cui:

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} = -I \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \quad (7.17)$$

E dunque, utilizzando quanto visto prima e l'ipotesi induttiva per il caso $n = k$:

$$\partial_C^{k+1} f = \partial_C \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - I \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} - I \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} \right) = \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}$$

(dove qui $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} - I \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^k \partial y} = 2 \frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}$ per l'equazione (7.17)).

□

Possiamo espandere le funzioni C-regolari in una serie di potenze infinita, mostriamo qui di seguito la dimostrazione di questo fatto:

Teorema 7.3 (G.Gentili D.C Struppa). *Una funzione $f : B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ è C-regolare se e solo se ha un espansione in serie del tipo:*

$$f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) \quad (7.18)$$

Dimostrazione. Sia Δ_I il disco del piano complesso L_I con raggio $a > 0$ minore di R (il raggio della palla B). Per il lemma 7.4, avremo:

$$f(q) = F(q) + G(q)J$$

dove F, G sono olomorfe su $B \cap L_I$. Inoltre, per $\zeta, q \in B \cap L_I$, $\zeta \neq q$ avremo

$$(\zeta - q)^{-1} F(q) = F(q)(\zeta - q)^{-1} = \frac{F(q)}{\zeta - q}$$

$$(\zeta - q)^{-1} G(q) = G(q)(\zeta - q)^{-1} = \frac{G(q)}{\zeta - q}$$

Per la formula integrale di Cauchy, avremo che $\forall q \in \Delta_I$:

$$f_I(q) = \frac{1}{2\pi I} \oint_{\partial \Delta_I} \frac{F(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta + \left(\frac{1}{2\pi I} \oint_{\partial \Delta_I} \frac{G(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta \right) J \quad (7.19)$$

Ora, trasformiamo i 2 integrali in serie infinite nel seguente modo:

$$\oint_{\partial \Delta_I} \frac{F(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta = \oint_{\partial \Delta_I} \frac{1}{1 - \frac{q}{\zeta}} \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{\partial \Delta_I} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{\zeta} \right)^n \frac{F(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \oint_{\partial \Delta_I} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

e, analogamente per G :

$$\oint_{\partial \Delta_I} \frac{G(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta = \oint_{\partial \Delta_I} \frac{1}{1 - \frac{q}{\zeta}} \frac{G(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \oint_{\partial \Delta_I} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q}{\zeta} \right)^n \frac{G(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \oint_{\partial \Delta_I} \frac{G(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

Ma per la formula integrale di Cauchy generalizzata, e per la definizione di derivata di Cullen avremo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \oint_{\partial\Delta_I} \frac{F(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \partial_C^n F(0)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \oint_{\partial\Delta_I} \frac{G(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \partial_C^n G(0)$$

Sostituendo tutto nell'equazione (7.19), ed applicando la linearità dell'operatore differenziale di Cullen ∂_C avremo:

$$\begin{aligned} f_I(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \partial_C^n F(0) + \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \partial_C^n G(0) J \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \partial_C^n (F + GJ)(0) = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{1}{n!} \partial_C^n f(0) \end{aligned}$$

A questo punto, utilizzando il lemma 7.5 (i.e $\partial_C^n f(0) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$) avremo:

$$f_I(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$$

Abbiamo ottenuto dunque il risultato dell'asserto. Inoltre, essendo i coefficienti $\frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0)$ indipendenti dalla scelta di $I \in S$, avremo che tale espansione varrà $\forall I \in S$. \square

È valida inoltre per le funzioni C-regolari un analogo della formula integrale di Cauchy:

Teorema 7.4 (Formula integrale di Cauchy per funzioni C-regolari, G.Gentili D.C Struppa). *Sia $f : B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione C-regolare e sia $q \in B$. Allora:*

$$f(q) = \frac{1}{2\pi I_q} \oint_{\partial\Delta_q(0, r)} \frac{d\zeta}{(\zeta - q)} f(\zeta) \quad (7.20)$$

dove qui I_q è definito come:

$$I_q := \begin{cases} \frac{\text{Im}(q)}{|\text{Im}(q)|} \in S & \text{se } \text{Im}(q) \neq 0 \\ I \in S \text{ qualsiasi} & \text{se } \text{Im}(q) = 0 \end{cases}$$

$\zeta \in L_{I_q} \cap B(0, R)$ e $r > 0$ è un numero reale positivo selezionato in maniera tale da far sì che:

$$q \in \overline{\Delta_q(0, r)} := \{x + yI_q ; x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset B(0, R)$$

i.e tale che $\overline{\Delta_q(0, r)}$, la chiusura di $\Delta(0, r)$, sia contenuta nella palla $B(0, R)$ e contenga q .

Dimostrazione. Cominciamo la dimostrazione manipolando l'espressione nella parte destra dell'uguaglianza (7.20):

$$\frac{1}{2\pi I_q} \oint_{\partial\Delta_q(0, r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} f(\zeta) = \frac{1}{2\pi I_q} \oint \frac{d\zeta}{\zeta - q} f_{I_q}(\zeta)$$

Ma per il lemma 7.4 (lemma di separazione) avremo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi I_q} \oint_{\partial\Delta_q(0, r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} f_{I_q}(\zeta) &= \frac{1}{2\pi I_q} \oint_{\partial\Delta_q(0, r)} \frac{d\zeta}{\zeta - q} (F(\zeta) + G(\zeta)) \\ &= \frac{1}{2\pi I_q} \oint_{\partial\Delta_q(0, r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta + \left(\frac{1}{2\pi I_q} \oint_{\partial\Delta_q(0, r)} \frac{G(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta \right) J \end{aligned}$$

e per la formula integrale di Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi I_q} \oint_{\partial\Delta_q(0, r)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta + \left(\frac{1}{2\pi I_q} \oint_{\partial\Delta_q(0, r)} \frac{G(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta \right) J = F(q) + G(q)J = f(q)$$

□

Teorema 7.5 (Stima di Cauchy). *Sia $f : B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione C-regolare, e sia $r < R$ un numero reale positivo minore di R , $I \in S$ e $\partial\Delta_I(0, r) = \{x + yI ; x^2 + y^2 = r^2\}$. Se $M_I = \max\{|f(q)| : q \in \partial\Delta_I(0, r)\}$ e se $M = \inf\{M_I ; I \in S\}$ allora*

$$\frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) \right| \leq \frac{M}{r^n} \quad n \in \mathbb{N}$$

Dimostrazione. Per quanto visto nella dimostrazione del teorema precedente, avremo (utilizzando congiuntamente la formula integrale di Cauchy generalizzata e il lemma 7.5)

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{1}{2\pi I} \oint_{\partial\Delta_I(0, r)} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} f(\zeta)$$

e dopodiché, tramite la seguente successione di diseguaglianze otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi I} \oint_{\partial\Delta_I(0,r)} \frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}} f(\zeta) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Delta_I(0,r)} \frac{M_I}{r^{n+1}} d\zeta \\ &= \left(\frac{M_I}{2\pi r^{n+1}} \right) (2\pi r) = \frac{M_I}{r^n} \end{aligned}$$

$\forall I \in S$, da cui segue che varrà anche per M , ottenendo il risultato sperato:

$$\frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) \right| \leq \frac{M}{r^n}$$

□

Il fatto appena dimostrato è importante in quanto ha come corollario immediato un analogo del teorema di Liouville per le funzioni C-regolari:

Corollario 7.5 (Teorema di Liouville per funzioni C-regolari). *Sia $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione C-regolare in ogni punto di \mathbb{H} . Allora, se f è limitata nel modulo (cioè esiste un numero reale positivo M tale che $\|f(q)\| \leq M \quad \forall q \in \mathbb{H}$), f è costante.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente (Stima di Cauchy), avremo che $\forall r \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{n!} \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) \right| \leq \frac{M}{r^n}$$

Per $r \rightarrow \infty$, otterremo che $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e da ciò seguirà che f sarà una funzione costante, $f(q) = f(0) \quad \forall q \in \mathbb{H}$.

□

È valido, inoltre, per le funzioni C-regolari un analogo del teorema di Morera, che sarà dimostrabile come conseguenza immediata della definizione stessa di funzione C-regolare, enunciamolo e dimostriamolo qui di seguito:

Teorema 7.6 (Teorema di Morera per funzioni C-regolari). *Sia $f : B(0, R) \rightarrow \mathbb{H}$ una funzione "differenziabile nel senso classico". Se $\forall I \in S$ la forma differenziale definita su $L_I \cap B(0, R)$, $f(z)dz$ (con $z = x + iy$ e $x, y \in \mathbb{R}$) è chiusa, allora la funzione f è C-regolare.*

Dimostrazione. Per ipotesi, avremo che $d(f(z)dz) = 0$, da cui, per il teorema di Morera classico avremo che $\forall I$ $f_I(z)$ sarà una funzione olomorfa. Da ciò segue, per la definizione di funzione C-regolare, che la funzione f è C-regolare.

□

Capitolo 8

Note

8.1 Introduzione

- **Link 1:** https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d5/Inscription_on_Broom_Bridge_%28Dublin%29 REGARDING THE DISCOVERY OF QUATERNIONS MULTIPLICATION BY SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON.jpg
- **Nota 1:** "B.O. Rodrigues, Des lois geometriques qui regissent les deplacements d'un systeme solide dans l'espace, et la variation des coordonnees provenant de ses deplacements consideres independamment des causes qui peuvent les produire, I. de Mathematiques Pures et Appliquees 5 (1840), 380-440"
- **Nota 2:** R. P. Graves, "Life of Sir William Rowan Hamilton".
- **Nota 3:** Kline, Morris. "A history of mathematical thought", volume 1. p. 253.
- **Nota 4:** A. Cauchy "Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires" (1825).
- **Nota 5:** Robert Argand, Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires dans les constructions géométriques, 2e édition, Gauthier Villars, Paris (1874).
Whittaker, E. T.; Watson, G. N. (1927). A Course in Modern Analysis (Fourth ed.). Cambridge University Press.

- **Nota 6:** "Encyclopaedia Britannica" 11esima edizione.
S.L Altmann "Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal" (1989).
- **Nota 7:** P. Molenbroek, Shunkichi Kimura "To Friends and Fellow Workers in Quaternions"(1895).

8.2 Capitolo 1: Preliminari

- **Nota 1.1:** Königsberg (oggi Kaliningrad, Russia) è percorsa dal fiume Pregel e dai suoi affluenti e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. Il problema dei sette ponti di Königsberg è il seguente: è possibile fare una passeggiata seguendo un percorso che attraversi ogni ponte una e una sola volta? Il problema fu risolto nel 1736 da Euler, che fornì a tale interrogativo una risposta negativa. La risoluzione del problema, che fu ottenuta da Euler semplificando il problema in termini astratti, fece realizzare l'importanza dello studio di proprietà geometriche qualitative degli spazi, in contrasto a proprietà quantitative.

8.3 Capitolo 2: Algebra dei quaternioni

- **Nota 2.1:** «Tensors or signless numbers, such as $2, 3, 6, \frac{1}{2}, \sqrt{2}$, which operate only metrically on the lengths of the lines which they multiply, and which are to be combined among themselves, as factors, by arithmetical multiplication, or by the laws of the composition of ratios» Lectures on quaternions (1853), W.R Hamilton.
- **Nota 2.2:** Leonhard Euler: Life, Work and Legacy, R.E. Bradley and C.E. Sandifer (eds), Elsevier, 2007, p. 193
Il teorema dimostrato da Lagrange è noto con il nome di "Teorema dei quattro quadrati" o congettura di Bachet.
- **Nota 2.3:** Il teorema dei quattro quadrati di Lagrange era già presente nell'opera "Arithmetica" di Diofanto di Alessandria, che fu tradotta nei primi anni del Seicento da Bachet (da cui il comune nome per riferirsi al teorema in questione, denominato anche "congettura di Bachet"). La prima dimostrazione di tale teorema fu fornita da Lagrange

nel 1770 sfruttando l'identità dei quattro quadrati di Euler. Qui di seguito è riportata una traduzione in lingua inglese de "l'Arithmetica":
<https://archive.org/details/diophantusofalex00heatiala>

- **Nota 2.4:** «We propose to call the quotient, or the versor, thus obtained, the versor-element, or briefly, the *versor of the quaternion* q ; and shall find it convenient to employ the same characteristic, U , to denote the operation of taking the versor of a quaternion, as that employed above to denote the operation of reducing a vector to the unit of length, without any change of its direction. On this plan, the symbol Uq will denote the versor of q »
 Hamilton, W. R. Elements of quaternions(London, Longmans Green, 1866), article 156 pg.135-136.
- **Nota 2.5:** «The positive or negative quotient, $x = \frac{\beta}{\alpha}$, which is thus obtained by the division of one of two parallel vectors by another, including zero as a limit, may also be called a scalar; because it can always be found, and in a certain sense constructed, by the comparison of positions upon one common scale (or axis) [...] Such scalars are, therefore, simply the reals (or the real quantities) of Algebra»
 Hamilton, W. R. Elements of quaternions(London, Longmans Green, 1866), Book 1, chapter 2, article 17.

8.4 Capitolo 4: Topologia dei quaternioni

- **Nota 4.1:** P.S Alexandroff e H.Hopf, Topologie, Berlin, 1935 p. 477.

8.5 Capitolo 5: Funzioni elementari

- **Nota 5.1:**
 - Esponenziale: <https://www.youtube.com/watch?v=qWsIWGOvvsM>
 - Coseno iperbolico: <https://www.youtube.com/watch?v=DYbFyoV0nJw>
 - Seno iperbolico: <https://www.youtube.com/watch?v=OPM25hpbwmU>
 - Seno: https://www.youtube.com/watch?v=sH_OmP9s_Dk

8.6 Capitolo 6: Calcolo differenziale e integrale su \mathbb{H}

- **Nota 6.1:** Ci stiamo riferendo al seguente teorema:

Teorema 8.1 (Teorema di Hartogs). *Sia $U \subset \mathbb{C}^n$ un aperto e sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione tale che, $\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}$, per delle $(n-1)$ -uple fissate $z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n$, la funzione*

$$w \rightarrow f(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, w, z_{i+1}, \dots, z_n)$$

è analitica su:

$$\{w \in \mathbb{C} ; (z_1, \dots, z_{i-1}, w, z_{i+1}, \dots, z_n) \in U\}$$

allora f è continua su U .

- **Nota 6.2:** Ci stiamo riferendo al seguente teorema:

Teorema 8.2. *Sia U un aperto di \mathbb{C}^n , K uno spazio compatto e μ una misura di Radon su K . Se $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ è una funzione continua su $U \times K$, e $x \rightarrow f(x, y)$ è una funzione olomorfa su $U \forall y \in K$ allora la funzione*

$$\phi(x) = \int_K f(x, y) d\mu(y)$$

è olomorfa in U .

Bibliografia

- [1] Simon L. Altmann. “Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal”. In: *Mathematics Magazine* 62 (1989), pp. 291–308.
- [2] Douglas B. Sweetser. “Doing Physics with Quaternions”. In: 2005.
- [3] Harry Bateman. “The Solution of Partial Differential Equations by Means of Definite Integrals”. In: *Proceedings of The London Mathematical Society* (), pp. 451–458.
- [4] Henri Paul Cartan. “Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables”. In: 1963.
- [5] Charles G. Cullen. “An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions”. In: *Duke Mathematical Journal* 32 (1965), pp. 139–148.
- [6] Cipher A. Deavours. “The Quaternion Calculus”. In: *American Mathematical Monthly* 80 (1973), pp. 995–1008.
- [7] Omar P. Dzagnidze. “On Some New Properties of Quaternion Functions”. In: *Journal of Mathematical Sciences* 235 (2018), pp. 557–603.
- [8] Omar P. Dzagnidze. “On the Differentiability of Quaternion Functions”. In: *arXiv: Complex Variables* (2012).
- [9] A.D. Snyder E.B. Saff. “Fundamentals of Complex Analysis, with Applications to Engineering and Science”. In: 1987.
- [10] Michael Eastwood. “Bateman’s formula”. In: (2002).
- [11] Samuel Eilenberg e Ivan Morton Niven. “The “fundamental theorem of algebra” for quaternions”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 50 (1944), pp. 246–248.
- [12] V. C. A. Ferraro. “On Functions of Quaternions”. In: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* 44 (1937), pp. 101–108.

- [13] Rudolf Fueter. "Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 8 (1935), pp. 371–378.
- [14] Rudolf Fueter. "Zur Theorie der Brandtschen Quaternionenalgebren". In: *Mathematische Annalen* 110 (1935), pp. 650–661.
- [15] Rudolf Fueter. "Zur Theorie der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen". In: *Monatshefte für Mathematik und Physik* 43 (1936), pp. 69–74.
- [16] Run Fueter. "Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u=0$ und $\Delta\Delta u=0$ mit vier reellen Variablen". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 7 (1934), pp. 307–330.
- [17] Stefania Gabelli. "Teoria delle Equazioni e Teoria di Galois". In: Springer, 2008.
- [18] Jean Gallier. "Geometric Methods and Applications". In: Springer, 2001.
- [19] Graziano Gentili e Daniele C. Struppa. "A New Theory of Regular Functions of a Quaternionic Variable". In: *Advances in Mathematics* 216 (2007), pp. 279–301.
- [20] H.Cartan. "Differential Calculus on Normed Spaces: A Course in Analysis". In: Kershaw Publishing Company, 1971.
- [21] Hans Georg Hafeli. "Hyperkomplexe Differentiale". In: *Commentarii Mathematici Helvetici* 20 (1947), pp. 382–420.
- [22] William Rowan Sir Hamilton. "Elements of Quaternions". In: 1969.
- [23] Allen Hatcher. "Algebraic Topology". In: Cambridge University Press, 2002.
- [24] A.S. Solodovnikov I.L Kantor. "Hypercomplex numbers". In: Nauka, 1973.
- [25] Andrew J.Hanson. "Visualizing Quaternions". In: 2005.
- [26] Yan-Bin Jia. "Quaternions and Rotations". In: 2013.
- [27] Wolfgang Sprößig João Pedro Morais Svetlin Georgiev. *Real Quaternionic Calculus Handbook*. Birkhäuser, 2014.
- [28] Aleks Kleyn. "Derivative of Map of Banach algebra". In: *arXiv: General Mathematics* (2015).
- [29] Aleks Kleyn. "Introduction into Calculus over Banach algebra". In: *arXiv: General Mathematics* (2016).

- [30] John M. Lee. "Introduction to Smooth Manifolds". In: 2002.
- [31] Eugene Lerman. "An introduction to Differential Geometry". In.
- [32] Seymour Lipschutz. "Schaum's outline of theory and problems of general topology". In: 1965.
- [33] M.Hervé. "Several Complex Variables: Local Theory". In: 1987.
- [34] John M.Howie. "Real Analysis". In: Springer, 2001.
- [35] Prerna Nadathur. "An Introduction to Homology". In: 2007.
- [36] Ivan Morton Niven. "Equations in Quaternions". In: *American Mathematical Monthly* 48 (1941), pp. 654–661.
- [37] L.S Pontryagin. "Foundations of Combinatorial Topology". In: Graylock Press, 1952.
- [38] Carlo Presilla. "Elementi di Analisi Complessa". In: Springer, 2013.
- [39] Walter Rudin. "Principles of mathematical analysis". In: 1964.
- [40] James Ward Brown Ruel V.Churchill. "Complex variables and applications". In: McGraw-Hill, 1990.
- [41] Takis Sakkalis, Kwang-mo Ko e Galam Song. "Roots of quaternion polynomials: Theory and computation". In: *Theor. Comput. Sci.* 800 (2019), pp. 173–178.
- [42] Christopher Stover. "A Survey of Quaternionic Analysis". In: 2014.
- [43] A. Sudbery. "Quaternionic analysis". In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 85.2 (1979), pp. 199–225.
DOI: 10.1017/S0305004100055638.
- [44] M. Sugiura. "Unitary Representations and Harmonic Analysis". In: 1990.
- [45] Edward Charles Titchmarsh. "The theory of functions". In: 1933.
- [46] N. S. Topuridze. "On roots of quaternion polynomials". In: *Journal of Mathematical Sciences* 160 (2009), pp. 843–855.
- [47] N. S. Topuridze. "On the Roots of Polynomials over Division Algebras". In: 2003.
- [48] Alan Pollack Victor Guillemin. "Differential Topology". In: AMS Chelsea Publishing, 1974.
- [49] Andrew H. Wallace. "An introduction to Algebraic Topology". In: Pergamon Press, 1957.

- [50] Edmund Taylor Whittaker. "On the partial differential equations of mathematical physics". In: *Mathematische Annalen* 57 (1903), pp. 333–355.