

삼성 청년 SW 아카데미

APS 응용

목차

1. 동적 계획법 기본 - 이항 계수 구하기
2. 동적 계획법 기본 - 거스름돈 구하기

동적 계획법 기본 - 이항 계수 구하기

문제 제시 : 계수 값 구하기

✓ 다음 수식의 ?의 값은?

- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + ?x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

- $(x + y)^n$ 을 전개 했을 때 x^ky^{n-k} 의 값은?

이항 계수 구하기

✓ 이항정리는

- 이항 다항식 $x + y$ 의 거듭제곱 $(x + y)^n$ 에 대해서, 전개한 각 항 $x^k y^{n-k}$ 의 계수 값을 구하는 정리이다.
- 구체적으로 $x^k y^{n-k}$ 의 계수는 n 개에서 k 개를 고르는 조합의 가짓수인 ${}_nC_k$ 이고 이를 이항계수라고 부른다.
- 예를 들어, $n = 2$, $n = 3$, 그리고 $n = 4$ 일 경우에는 다음과 같다.

$$-(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$-(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$-(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

이항 계수 구하기

✓ 이항계수 구하는 공식

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ for } 0 \leq k \leq n$$

✓ 계산량이 많은 $n!$ 이나 $k!$ 을 계산하지 않고 이항계수를 구하기 위해서 통상 다음 수식을 사용한다.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{if } 0 < k < n \\ 1 & \text{if } k = 0 \text{ or } k = n \end{cases}$$

이항 계수 구하기

- ✓ 이항계수 nCk 를 구하는 재귀 함수

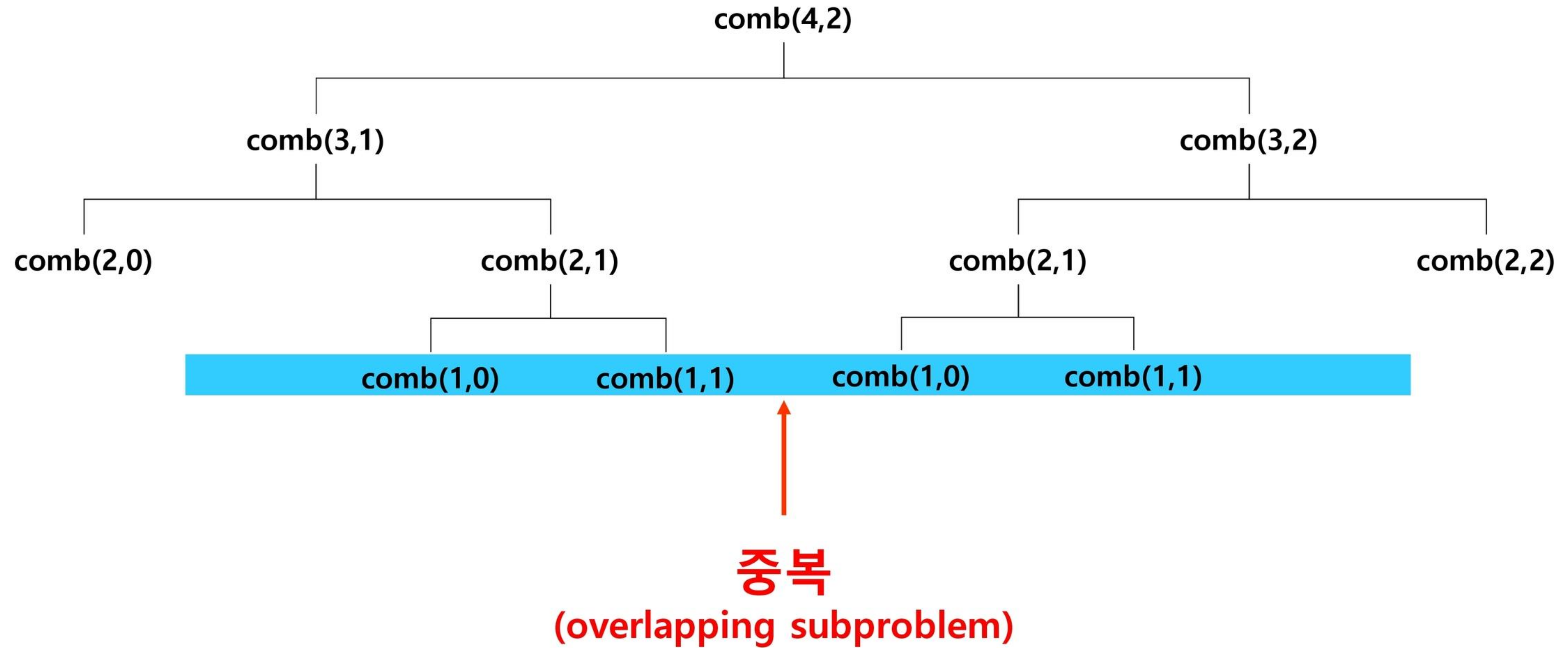
comb(n,k)

IF $n==k$ or $k==0$: **RETURN** 1

ELSE : **RETURN** $comb(n-1,k-1) + comb(n-1,k)$

이항 계수 구하기

✓ Call Tree



이항 계수 구하기

✓ 파스칼의 삼각형

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ \dots \end{array}$$
$$\begin{array}{c} c(0,0) \\ c(1,0) \quad c(1,1) \\ c(2,0) \quad c(2,1) \quad c(2,2) \\ c(3,0) \quad c(3,1) \quad c(3,2) \quad c(3,3) \\ c(4,0) \quad c(4,1) \quad c(4,2) \quad c(4,3) \quad c(4,4) \\ \dots \end{array}$$

이항 계수 구하기

✓ 동적 계획법을 적용한 이항계수 계산

✓ $O(nk)$

```
binom(n, k)
B[][]
FOR i in 0 → n
  FOR j in 0 → minimum(i, k)
    IF j = 0 OR j = i
      B[i][j] ← 1
    ELSE
      B[i][j] ← B[i-1][j-1] + B[i-1][j]
RETURN B[n][k]
```

	0	1	2	3	4	j	k
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		

$B[i-1, j-1]$ $B[i-1, j]$
↓
 $B[i, j]$

i
 n

동적 계획법 기본 - 동전 거스름돈 구하기

문제 제시 : 동전 거스름 돈 구하기

- ✓ 동전의 종류

- 1원, 4원, 6원

- ✓ 8원을 거슬러주려 한다. 최소 몇 개의 동전을 거슬러 주면 되나?

문제 제시 : 동전 거스름 돈 구하기

- ✓ 그리디 방법의 접근
 - 6원, 1원, 1원
- ✓ 최적은?
 - 4원, 4원
- ✓ 그리디 방법이 항상 최적해를 구하는 것은 아니다.
어떻게 풀어야 하나?
 - 동적 계획법으로 접근해 보자.

문제 제시 : 동전 거스름 돈 구하기

✓ 우선 재귀적인 8원 잔돈에 대한 알고리즘

- 3가지 동전 각각을 선택해서 재귀적으로 해결

1원 동전 한 개 + 7원에 대한 최적해

4원 동전 한 개 + 4원에 대한 최적해

6원 동전 한 개 + 2원에 대한 최적해

위의 3가지 해 중 최적해를 선택

7원에 대한 최적해는 다시 1원, 4원, 6원 동전을 선택하고 나머지 액수에 대한 최적해

1원 동전 한 개 + 6원에 대한 최적해

4원 동전 한 개 + 3원에 대한 최적해

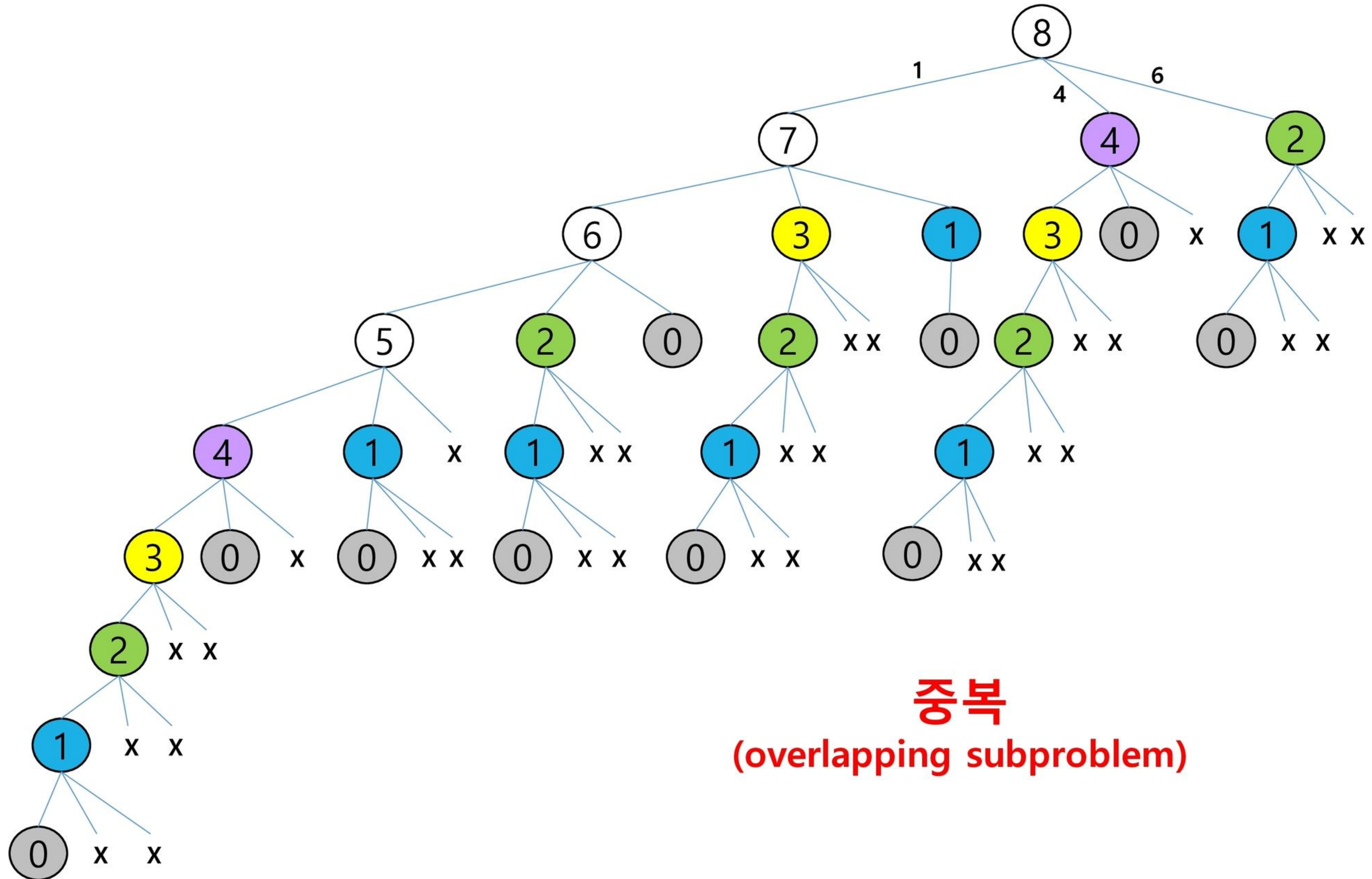
6원 동전 한 개 + 1원에 대한 최적해

위의 3가지 해 중 최적해를 선택

...

문제 제시 : 동전 거스름 돈 구하기

✓ Call tree



중복
(overlapping subproblem)

문제 제시 : 동전 거스름 돈 구하기

✓ DP 접근 : 상향식

- 1원에 대한 최적해 \rightarrow (선택) 2원에 대한 최적해 \rightarrow (선택) 3원에 대한 최적해 \rightarrow (선택) 4원에 대한 최적해 \rightarrow (선택) ...
- $C[n]$ = n원을 거슬러 줄 때의 최적
- 점화식 : $C[n] = \text{MIN} (n-1 \geq 0 \rightarrow C[n-1]+1, n-4 \geq 0 \rightarrow C[n-4]+1, n-6 \geq 0 \rightarrow C[n-6]+1)$

n	choice	C[n]
0	0	0
1	$C[n - 1] + 1 \rightarrow 1$	1
2	$C[n - 1] + 1 \rightarrow 2$	2
3	$C[n - 1] + 1 \rightarrow 3$	3
4	$C[n - 1] + 1, C[n - 4] + 1 = \text{MIN} (4, 1) \rightarrow 1$	1
5	$C[n - 1] + 1, C[n - 4] + 1 = \text{MIN} (2, 2) \rightarrow 2$	2
6	$C[n - 1] + 1, C[n - 4] + 1, C[n - 6] + 1 = \text{MIN} (3, 3, 1) \rightarrow 1$	1
7	$C[n - 1] + 1, C[n - 4] + 1, C[n - 6] + 1 = \text{MIN} (2, 4, 2) \rightarrow 2$	2
8	$C[n - 1] + 1, C[n - 4] + 1, C[n - 6] + 1 = \text{MIN} (3, 2, 3) \rightarrow 2$	2

다음 방송에서 만나요!

삼성 청년 SW 아카데미