Universidade de Brasília
Programa de Pós-Graduação em Economia
Econometria 2
2020
Prof. Victor Gomes

Lista de Exercícios 2

Dynamic Asset Pricing Model

Considere o modelo de Hansen e Singleton de precificação de ativos (veja também por exemplo em Hayashi pp. 454-455). Os autores assumem que um agente representativo escolhe uma trajetória de consumo ótima pela maximização do valor-presente descontado da função consumo:

$$\max \sum_{t=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[\beta_0^t U(C_t) \mid I_t\right]$$

sujeito à restrição orçamentária:

$$C_t + P_t Q_t \leq V_t Q_{t-1} + W_t \tag{1}$$

tal que I_t representa o conjunto informação disponível no tempo t, C_t representa o consumo real, W_t a renda real do trabalho, P_t o preço de um título livre de desconto (pure discount bond) com maturação em $t+1$ que paga V_{t+1}, Q_t representa a quantidade de títulos mantidos em t, e β_0 representa o fator de desconto intertemporal.

A condição de primeira ordem deste problema pode ser representada como uma equação de momento condicional, i.e. equação de Euler condicional

$$\mathrm{E}\left[(1+R_{t+1})\beta_0 \frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} \mid I_t\right] - 1 = 0 \tag{2}$$

tal que

$$1 + R_{t+1} = \frac{V_{t+1}}{V_t}$$

representa o retorno bruto do título em $t+1$. Assumindo que a utilidade tem a forma

$$U(C) = \frac{C^{1-\alpha_0}}{1-\alpha_0}$$

tal que α_0 representa a taxa intertemporal de substituição (aversão ao risco), então

$$\frac{U'(C_{t+1})}{U'(C_t)} = \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha_0}$$

Então a (2) pode ser escrita como

$$\mathrm{E}\left[(1+R_{t+1})\beta_0 \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha_0} \mid I_t\right] - 1 = 0 \tag{3}$$

O termo de erro não-linear pode ser definido como:

$$\varepsilon_{t+1} = a(R_{t+1}, C_{t+1}/C_t; \alpha_0, \beta_0) = (1 + R_{t+1})\beta_0 \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha_0} - 1$$

$$\varepsilon_{t+1} = a(\mathbf{z}_{t+1}; \theta_0) \tag{4}$$

tal que $\mathbf{z}_{t+1} = (R_{t+1}, C_{t+1}/C_t)'$ e $\theta_0 = (\alpha_0, \beta_0)'$

Neste caso, a equação de momento condicional (3) pode ser representada como:

$$\mathrm{E}[\varepsilon_{t+1} \mid I_t] = \mathrm{E}[a(\mathbf{z}_{t+1}; \theta_0) = 0 \mid I_t] \tag{5}$$

As séries $\{\varepsilon_{t+1}, I_{t+1}\}$ são processos sequências martingale em diferenças, instrumentos em potencial $\mathbf{x}_t$ incluem uma constante e os elementos contemporâneos e defasados de $\mathbf{z}$. Como $\mathbf{x}_t \subset I_t$, a condição de momento condicional é

$$\mathrm{E}[\mathbf{x}_t \varepsilon_{t+1} \mid I_t] = \mathrm{E}[\mathbf{x}_t a(\mathbf{z}_{t+1}; \theta_0) \mid I_t] = \mathbf{0} \tag{6}$$

e pela lei das expectativas totais se tem

$$\mathrm{E}[\mathbf{x}_t \varepsilon_{t+1}] = \mathbf{0} \tag{7}$$

Estimativa

Para a estimativa GMM, defina o resíduo como em (4), mas substituindo os coeficientes pelas estimativas, (α, β):

$$\varepsilon_{t+1} = (1 + R_{t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \tag{8}$$

e formar o vetor de momentos

$$g(\mathbf{w}_{t+1}; \theta) = \mathbf{x}_t \varepsilon_{t+1} = \tag{9}$$

$$= \mathbf{x}_t a(\mathbf{z}_{t+1}; \theta_0)$$

Se o vetor de instrumentos for $\mathbf{x}_t = (1, C_t/C_{t-1}, C_{t-1}/C_{t-2}, R_t, R_{t-1})$. Então (9) pode ser escrita como:

$$= \begin{pmatrix} (1 + R_{t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \\ (C_t/C_{t-1}) \left((1 + R_{t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \right) \\ (C_{t-1}/C_{t-2}) \left((1 + R_{t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \right) \\ R_t \left((1 + R_{t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \right) \\ R_{t-1} \left((1 + R_{t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \right) \end{pmatrix}$$

Então nas condições de momento se tem $K = 5$ para identificar $L = 2$ parâmetros dando $K - L = 3$ restrições sobre-identificadas.

Extensão

Esse modelo pode ser expandido, permitindo que o indivíduo invista em J ativos arriscados com retornos $R_{j,t+1}$ ($j = 1, ..., J$), bem como em um ativo livre de risco f com retorno $R_{f,t+1}$. Restringindo a atenção para os momentos não condicionais inicialmente, isto é $\mathbf{x}_t = 1$, o sistema de equações de Euler pode ser escrito como

$$\mathrm{E}\left[(1 + R_{f,t+1})\beta_0 \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha_0} \mid I_t\right] - 1 = 0 \quad (10)$$

$$\mathrm{E}\left[(R_{j,t+1} - R_{f,t+1})\beta_0 \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha_0} \mid I_t\right] - 1 = 0 \quad (11)$$

tal que $j = 1, ..., J$. Defina o fator de desconto estocástico como:

$$m_{t+1}(\theta_0) = \beta_0 \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha_0}.$$

Portanto, o ativo com risco satisfaz:

$$\mathrm{E}[(R_{j,t+1} - R_{f,t+1}) \times m_{t+1}(\theta_0)] = 0 \quad (12)$$

Usando a identidade $E[xy] = cov(x, y) + E[x]E[y]$, o prêmio de risco para o ativo arriscado pode ser escrito como:

$$\mathrm{E}[(R_{j,t+1} - R_{f,t+1})] = -\frac{\mathrm{Cov}(m_{t+1}(\theta_0), (R_{j,t+1} - R_{f,t+1}))}{\mathrm{E}[m_{t+1}(\theta_0)]} \quad (13)$$

Se o modelo for correto, então o lado direito deve explicar a variação cross-section no retorno esperado entre ativos.

Resolva:

1. Estime o modelo formado pelo erro da equação (10) assumindo que os instrumentos são $\mathbf{x}_t = (1, (C_t/C_{t-1} - AVG(C_t/C_{t-1})), (R_t - AVG(R_t)))'$ e estime $\theta = (\alpha, \beta)'$.[1] Faça apenas as estimativas dos parâmetros (sem cacular o desvio-padrão):

$$(10)\mathrm{E}\left[(1 + R_{f,t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} \mid I_t\right] - 1 = 0$$

   Utilize como guess inicial $\alpha = .5$ e $\beta = 0.9$.

2. Usando os instrumentos $\mathbf{x}_t = 1$, a estimativa GMM pode ser realizada usando os $J + 1$ vetor dos momentos:

$$g(\mathbf{w}_{t+1}) = \begin{pmatrix} (1 + R_{f,t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \\ (R_{1,t+1} - R_{f,t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \\ \vdots \\ (R_{J,t+1} - R_{f,t+1})\beta \left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\alpha} - 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

[1] AVG é a média.

Usando estes momentos, estime θ.

Apresente suas respostas em um arquivo PDF e o código em Matlab (.m). Os dados são os usados por Stock e Wright e a descrição (breve) está na página 1080. O prazo para a lista é um semana (22/09).

Referências

Hansen, Lars Peter and Kenneth J. Singleton. "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models," *Econometrica,* 50, 1982.

Stock, James H. e Jonathan Wright. "GMM with Weak Identification." *Econometrica,* 68, 2000.