

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP CỦ NHÂN

MỘT PHƯƠNG PHÁP CHIẾU GIẢI BÀI TOÁN
BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TÁCH
VÀ ÁP DỤNG

TRƯƠNG ĐĂNG THẮNG

HÀ NỘI – 2023

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

ĐỒ ÁN TỐT NGHIỆP CỦ NHÂN

**MỘT PHƯƠNG PHÁP CHIẾU GIẢI BÀI TOÁN
BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TÁCH
VÀ ÁP DỤNG**

Chuyên ngành:

Các phương pháp tối ưu

Chương trình đào tạo:

Toán Tin

Họ và tên:

Trương Đăng Thắng

Giáo viên hướng dẫn:

PGS. TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

HÀ NỘI – 2023

NHẬN XÉT CỦA GIẢNG VIÊN HƯỚNG DẪN

1. Mục tiêu và nội dung của đồ án

- (a) Mục tiêu: Đề tài đồ án nghiên cứu về bài toán bất đẳng thức biến phân tách và một phương pháp lặp mới xấp xỉ nghiệm bài toán này trong không gian Hilbert thực. Đồng thời, đồ án áp dụng giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh.
- (b) Nội dung: Giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán chấp nhận tách và liên hệ đến bài toán bất đẳng thức biến phân tách; đề xuất phương pháp xấp xỉ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân tách và đưa ra ví dụ số minh họa trong không gian hữu hạn chiều; áp dụng giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh.

2. Kết quả đạt được

- (a) Đồ án đề xuất một thuật toán mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách trong không gian Hilbert thực (Thuật toán 2.2) và một số áp dụng giải bài toán chấp nhận tách, bài toán tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất trên tập nghiệm của bài toán chấp nhận tách và bài toán bất đẳng thức biến phân tách (Thuật toán 2.3, Thuật toán 2.4 và Thuật toán 2.5)
- (b) Chứng minh sự hội tụ mạnh của dãy lặp được xây dựng trong thuật toán (Định lý 2.1).
- (c) Đưa ra ví dụ minh họa giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách (Ví dụ 2.3). Áp dụng giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính (Ví dụ 3.1) và giải bài toán khôi phục ảnh (Ví dụ 3.2).

3. Ý thức làm việc của sinh viên:

- (a) Có ý thức, trách nhiệm cao trong quá trình học tập và làm đồ án.
- (b) Chịu khó học hỏi và tìm hiểu những kiến thức chuyên sâu liên quan đến đồ án.
- (c) Có khả năng dịch thuật, nghiên cứu tài liệu chuyên ngành, có khả năng lập trình trên ngôn ngữ Python. Hoàn thành tốt Đồ án tốt nghiệp Cử nhân theo đúng yêu cầu của giáo viên hướng dẫn.

Hà Nội, ngày 30 tháng 7 năm 2023
Giảng viên hướng dẫn

PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy

Lời cảm ơn

Có lẽ, những năm tháng đại học đối với mỗi sinh viên đều là những kỷ niệm khó quên, có thể đó là những niềm vui, cũng có thể là những sự tiếc nuối. Đối với em cũng vậy, quãng thời gian là một sinh viên Đại học Bách khoa Hà Nội là khoảng thời gian đáng nhớ đối với em. Từ lúc là cậu học trò chân ướt chân ráo bước vào trường đến hiện tại khi đã chuẩn bị ra trường, em đã cảm thấy tự tin vào bản thân hơn. Từng đánh mất động lực cũng như mục đích học tập vào năm nhất hay việc chưa tìm được những người bạn đồng hành thật sự là khoảng thời gian khó khăn đối với em. Nhưng rồi bằng sự nỗ lực, cố gắng, dù chưa tài giỏi nhưng cũng đã có thể đặt chân qua cánh cổng Parabol, vững tin trên những chặng đường tiếp theo của cuộc sống. Bách khoa không những mang lại cho em những tri thức bổ ích mà còn là những người Thầy người Cô đáng kính, nhiệt huyết, tận tâm với nghề, với sinh viên, những người bạn đáng quý đã cùng nhau đi qua những năm tháng đẹp đẽ của tuổi trẻ. Hơn thế nữa, các anh chị khóa trước cũng luôn hết sức nhiệt tình giúp đỡ em không chỉ trong việc học mà còn trong đời sống hàng ngày. Bách khoa dạy em sự kiên trì vượt qua khó khăn, mang lại cho em nhiều cơ hội mới và còn nhiều hơn thế nữa. Rất hy vọng, vào một ngày nào đó, em có thể làm điều gì đó cho Bách khoa, để tiếp bước truyền thống tốt đẹp của người Bách khoa.

Để có thể vững tin trên con đường sau này thì sự dìu dắt của các Thầy Cô có ý nghĩa rất lớn đối với sự phát triển của cá nhân em. Trước hết, em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến PGS. TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, Bộ môn Toán ứng dụng, Viện Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách khoa Hà Nội. Cô đã tận tình hướng dẫn, góp ý, chỉ bảo em trong suốt quá trình em thực hiện từ Đồ án 1 đến Đồ án 2 và Đồ án tốt nghiệp Cử nhân này. Không chỉ giới thiệu, định hướng một cách tổng quát về lĩnh vực Bất đẳng thức biến phân nói riêng và Các phương pháp tối ưu nói chung, cô còn dành thời gian để hướng dẫn em cách trình bày, các hành văn sao cho đúng, đồng thời chỉ ra những chỗ chưa được để em có thể kịp thời khắc phục. Được cô hướng dẫn, em không chỉ học được những kiến thức chuyên môn vô cùng sâu sắc mà đó còn là cả phong cách làm việc chuẩn mực, chuyên nghiệp, thái độ làm việc tập trung, nghiêm túc. Bên cạnh đó, cô còn truyền lại cho em những kinh nghiệm, những trải nghiệm quý báu mà cô đúc kết lại được sau nhiều năm nghiên cứu. Đó là niềm vinh dự và động lực rất lớn để em có thể vững chân trên con đường mình chọn. Được cô hướng dẫn, em có cơ hội được biết đến nghiên cứu là gì và có ý nghĩa như thế nào đối với sự phát triển chung của khoa học. Dù việc nghiên cứu của em cũng gặp nhiều khó khăn nhưng cô vẫn kiên nhẫn hướng dẫn em rất tận tình. Và rồi kết quả là dưới sự hướng dẫn của cô, em đã có cho mình một bài báo nhỏ, được tham gia Hội

thảo Tối ưu và Tính toán khoa học, được tham gia Hội nghị Sinh viên nghiên cứu Khoa học lần thứ 40 và có một chút thành tích. Đó là những trải nghiệm và kỷ niệm vô cùng đẹp thời sinh viên của em. Một lần nữa, em xin gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất tới cô. Em chúc cô luôn thật nhiều sức khỏe để tiếp tục dùi dắt nhiều thế hệ sinh viên tiếp theo với những tri thức sâu sắc, chúc cô có thêm nhiều hơn nữa những công trình nghiên cứu xuất sắc, đóng góp vào nền khoa học nước nhà.

Tiếp theo, em xin gửi lời cảm ơn đến các anh chị và các bạn trong nhóm seminar đồ án do cô Thủy hướng dẫn trong học kỳ này. Tham gia các buổi seminar, em đã học được nhiều kiến thức và kinh nghiệm của mọi người để có thể hoàn thành đồ án này. Ngoài ra, em cũng muốn gửi lời cảm ơn tới những người bạn đã cùng em, hỗ trợ và trao đổi những kiến thức cũng như cùng nhau đi chơi và có những khoảng thời gian đáng nhớ trong thời sinh viên. Có những người bạn đáng quý như vậy là một trong những điều em cảm thấy tự hào nhất mà em có.

Lời cuối cùng, em cũng xin cảm ơn các Thầy Cô Viện Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách khoa Hà Nội đã giảng dạy, hướng dẫn em, giúp em có nền tảng kiến thức đủ tốt để có thể hoàn thiện đồ án này. Không chỉ vậy, các thầy cô còn luôn tạo điều kiện, giới thiệu tới sinh viên chúng em nhiều cơ hội nghề nghiệp và học tập. Bách khoa thật ý nghĩa, yêu thương vì có những người thầy, người cô hết mình với sinh viên như vậy. Bách khoa Hà Nội - One Love, One Future.

Hà Nội, ngày 30 tháng 7 năm 2023
Tác giả đồ án

Trương Đăng Thành

Tóm tắt nội dung Đồ án

Đồ án trình bày một số nội dung sau:

1. Một số toán tử, định lý và bổ đề trong không gian Hilbert; bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán chấp nhận tách.
2. Bài toán bất đẳng thức biến phân tách và đề xuất một phương pháp chiếu mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách cùng ví dụ minh họa trong không gian hữu hạn chiều.
3. Áp dụng thuật toán đề xuất giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh.

Hà Nội, ngày 30 tháng 7 năm 2023

Tác giả đồ án

Trương Đăng Thắng

Mục lục

Bảng ký hiệu và chữ viết tắt	1
Danh sách bảng	2
Danh sách hình vẽ	3
Mở đầu	4
Chương 1: Bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán chấp nhận tách	6
1.1 Một số toán tử trong không gian Hilbert	6
1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán chấp nhận tách	11
1.3 Một số bổ đề bổ trợ	12
Chương 2: Phương pháp chiểu giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách	16
2.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân tách	16
2.2 Phương pháp chiểu giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách	18
2.3 Ví dụ minh họa	26
Chương 3: Áp dụng giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh	34
3.1 Bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính	34
3.2 Bài toán khôi phục ảnh	43
Kết luận	49
Tài liệu tham khảo	50

Bảng ký hiệu và chữ viết tắt

\mathbb{R}	tập các số thực
\mathbb{R}^n	không gian Euclide n chiều
\mathcal{H}	không gian Hilbert thực
∇f	vécтор gradient của hàm f
P_C	phép chiếu mêtric lên tập C
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của x và y
$\ x\ $	chuẩn của x
F^*	toán tử liên hợp của toán tử F
\rightarrow	hội tụ yếu
$\text{VIP}(A, C)$	bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá A và tập ràng buộc C
$S_{(A,C)}$	tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân với ánh xạ giá A và tập ràng buộc C
SFP	bài toán chấp nhận tách
SVIP	bài toán bất đẳng thức biến phân tách
$\text{Fix}(S)$	tập điểm bất động của ánh xạ S
$I^{\mathcal{H}}$	ánh xạ đồng nhất trên \mathcal{H}

Danh sách bảng

2.1	Kết quả của ví dụ minh họa	28
2.2	Kết quả của thuật toán với các λ khác nhau	28
2.3	Kết quả chạy thuật toán khi thay đổi dãy tham số α_k	29
2.4	Kết quả chạy thuật toán với các điểm bắt đầu khác nhau	30
2.5	Kết quả chạy thuật toán với các β_k khác nhau	31
2.6	Kết quả chạy thuật toán với các γ khác nhau	32
3.1	Kết quả với các α_k khác nhau	40
3.2	Kết quả với các β_k khác nhau	41
3.3	Kết quả với các γ khác nhau	42
3.4	Bảng số liệu kết quả chạy thuật toán	44
3.5	Bảng số liệu kết quả chạy thuật toán với các α_k khác nhau	46
3.6	Bảng số liệu kết quả chạy thuật toán với các γ khác nhau	47

Danh sách hình vẽ

2.1	Đồ thị minh họa kết quả khi thay đổi λ	29
2.2	Dáng điệu đồ thị của số vòng lặp và thời gian khi α_k thay đổi	30
2.3	Đồ thị minh họa kết quả khi thay đổi β_k	31
2.4	Đồ thị minh họa kết quả khi thay đổi γ	33
3.1	Hệ điều khiển	35
3.2	Hệ điều khiển ngược	37
3.3	Kết quả chạy thuật toán với các sai số khác nhau	40
3.5	Dáng điệu đồ thị của số vòng lặp và thời gian khi γ thay đổi	42
3.6	Kết quả chạy thuật toán	44
3.8	Kết quả của SNR với các α_k khác nhau	46
3.9	Kết quả của SNR với các γ khác nhau	47

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân được nhà toán học người Italia, Stampacchia, nghiên cứu và đưa ra đầu tiên vào cuối những năm 60 và đầu những năm 70 của thế kỷ trước. Bài toán bất đẳng thức biến phân ra đời là cơ sở để giải quyết nhiều bài toán trong thực tế bằng cách mô hình hóa và đưa nó về giải các bài toán bất đẳng thức biến phân với đa dạng các phương pháp giải khác nhau.

Phát triển từ bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán bất đẳng thức biến phân tách được đề cập lần đầu tiên bởi Censor và các cộng sự năm 2010, là trường hợp đặc biệt của bài toán chấp nhận tách với với các tập lồi đóng là các tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Bài toán bất đẳng thức biến phân tách là cơ sở để giải quyết các bài toán trong thực tế như phương pháp xạ trị điều biến cường độ, bài toán khôi phục ảnh/tín hiệu hay bài toán cân bằng,...

Đồ án nghiên cứu và đề xuất một phương pháp chiếu mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách trong không gian Hilbert. Sau đó, đồ án trình bày một ví dụ minh họa giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách bằng phương pháp trình bày trên. Cuối cùng, đồ án áp dụng thuật toán đề xuất giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh. Kết quả nghiên cứu đồ án được đăng trên Tạp chí Khoa học Đại học Tân Trào Vol.9 No.3 (2023), *Journal of Tan Trao University (SJTU)* (ISSN: 2354-1431) [22].

Nội dung chính của đồ án được trình bày trong ba chương. Trong Chương 1, tác giả trình bày bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán chấp nhận tách. Chương tiếp theo, tác giả trình bày về bài toán bất đẳng thức biến phân tách và đề xuất thuật toán mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách cùng một số hệ quả. Trong Chương 3, tác giả

đưa ra ví dụ minh họa cho sự hội tụ của thuật toán và áp dụng thuật toán giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính, bài toán khôi phục ảnh.

Chương 1

Bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán chấp nhận tách

Chương này trình bày khái niệm và tính chất của một số toán tử trong không gian Hilbert thực. Giới thiệu về bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán chấp nhận tách. Sau đó, trình bày một số bổ đề bổ trợ cho việc chứng minh sự hội tụ của thuật toán đề xuất. Nội dung của chương được viết trên cơ sở các tài liệu [1, 3–14, 16, 17, 19, 20, 23].

1.1 Một số toán tử trong không gian Hilbert

Sự hội tụ yếu và mạnh

Cho \mathcal{H} là không gian Hilbert thực với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn $\|\cdot\|$. Khi đó, ta có

$$2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 \quad (1.1)$$

và

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2, \quad (1.2)$$

với mọi $x, y \in \mathcal{H}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$ (xem [6, Bổ đề 2.13] và [13]).

Định nghĩa 1.1 (xem [1]). Cho \mathcal{H} là không gian Hilbert thực.

1. Dãy $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ được gọi là hội tụ mạnh đến $x^* \in \mathcal{H}$, ký hiệu $x^n \rightarrow x^*$, nếu

$$\|x^n - x^*\| \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

2. Dãy $\{x_n\} \subset \mathcal{H}$ được gọi là hội tụ yếu đến $x^* \in \mathcal{H}$, ký hiệu $x^n \rightharpoonup x^*$, nếu

$$\langle x^n, y \rangle \rightarrow \langle x^*, y \rangle \text{ với mọi } y \in \mathcal{H}.$$

Trong không gian Hilbert hữu hạn chiều, sự hội tụ mạnh và hội tụ yếu là trùng nhau.

Ánh xạ liên tục Lipschitz

Định nghĩa 1.2 (xem [4]). Cho C là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực \mathcal{H} . Ánh xạ $T : C \rightarrow \mathcal{H}$ được gọi là ánh xạ *liên tục Lipschitz* trên C với hằng số L nếu với mọi $x, y \in C$, tồn tại số thực $L \geq 0$ sao cho

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|.$$

Nếu $L \in [0, 1)$ thì T được gọi là *ánh xạ co*.

Nếu $L = 1$ thì T được gọi là *ánh xạ không giãn*.

Phép chiếu mêtôric

Định nghĩa 1.3 (xem [16]). Cho C là một tập con khác rỗng của không gian Hilbert thực \mathcal{H} . Với mỗi $x \in \mathcal{H}$, $P_C(x)$ là phần tử thuộc C thỏa mãn

$$\|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in C.$$

Ánh xạ $P_C : \mathcal{H} \rightarrow C$ thỏa mãn bất đẳng thức trên được gọi là phép chiếu mêtôric chiếu \mathcal{H} lên tập C .

Phép chiếu mêtôric có các tính chất sau.

Bổ đề 1.1 (xem [14]).

- (i) P_C là ánh xạ không giãn.
- (ii) $P_C(x) \in C \quad \forall x \in \mathcal{H}$ và $P_C(x) = x \quad \forall x \in C$.
- (iii) $x \in \mathcal{H}$, $y = P_C x$ khi và chỉ khi $y \in C$ và

$$\langle x - y, z - y \rangle \leq 0 \quad \forall z \in C. \quad (1.3)$$

Toán tử tuyến tính

Định nghĩa 1.4 (xem [3]). Cho \mathcal{H}_1 và \mathcal{H}_2 là hai không gian Hilbert thực. Ánh xạ $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ được gọi là *toán tử tuyến tính* nếu

- (a) $F(x^1 + x^2) = F(x^1) + F(x^2)$, $\forall x^1, x^2 \in \mathcal{H}_1$.
- (b) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$, $\forall x \in \mathcal{H}_1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.5 (xem [3]). Toán tử $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ được gọi là *bị chặn* nếu tồn tại $K > 0$ sao cho

$$\|F(x)\| \leq K\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}_1.$$

Định nghĩa 1.6 (xem [3]). Cho \mathcal{H}_1 và \mathcal{H}_2 là các không gian Hilbert thực và $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn. Ánh xạ $F^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ với tính chất $\langle Fx, y \rangle = \langle x, F^*y \rangle$ với mọi $x \in \mathcal{H}_1$ và $y \in \mathcal{H}_2$, được gọi là ánh xạ liên hợp của F .

Luôn tồn tại duy nhất ánh xạ liên hợp của ánh xạ tuyến tính bị chặn F trong không gian Hilbert. Hơn nữa, F^* cũng là ánh xạ tuyến tính bị chặn.

Ví dụ 1.1. Toán tử $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ được định nghĩa bởi

$$Fx = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

là toán tử tuyến tính bị chặn. Toán tử liên hợp của F là $F^* : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$F^*x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

Ta thấy rằng ma trận F^* là ma trận chuyển vị của F .

Toán tử đơn điệu

Định nghĩa 1.7 (xem [4]). Ánh xạ $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ được gọi là ánh xạ

(a) β -đơn điệu mạnh nếu tồn tại $\beta > 0$ thỏa mãn

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \quad (1.4)$$

(b) η -đơn điệu mạnh ngược nếu tồn tại $\eta > 0$ thỏa mãn

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \eta \|Ax - Ay\|^2 \quad \forall x, y \in \mathcal{H}. \quad (1.5)$$

Bổ đề 1.2. Ánh xạ đơn điệu mạnh ngược có ánh xạ ngược là ánh xạ đơn điệu mạnh với cùng hệ số.

Chứng minh. Từ 1.5 ta có

$$\langle A(x) - A(y), A^{-1}Ax - A^{-1}Ay \rangle \geq \eta \|A(x) - A(y)\|^2 \text{ với mọi } x, y \in C.$$

$$\langle X - Y, A^{-1}X - A^{-1}Y \rangle \geq \eta \|X - Y\|^2 \text{ với mọi } X, Y \in C.$$

$$\langle A^{-1}X - A^{-1}Y, X - Y \rangle \geq \eta \|X - Y\|^2 \text{ với mọi } X, Y \in C.$$

Theo (1.4) ta có A^{-1} là ánh xạ đơn điệu mạnh, là điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.2. Toán tử tuyến tính $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ với ma trận của toán tử A theo cơ sở chính tắc là ma trận đối xứng xác định không âm, vừa là toán tử $\frac{1}{\lambda}$ -đơn điệu mạnh ngược, vừa là toán tử λ -đơn điệu mạnh, trong đó λ là giá trị riêng lớn nhất của A .

Chứng minh. Do A là toán tử tuyến tính nên

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle = \langle A(x - y), x - y \rangle$$

Vì A đối xứng nên A có n vec tơ riêng độc lập tuyến tính và trực giao.

Suy ra $\exists \{e_i\}_{i=1}^n$ là hệ cơ sở trực giao của C . Ta có

$$x - y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad \text{với } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \langle A(x - y), x - y \rangle &= \left\langle A \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle Ae_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle Ae_i, e_i \rangle \quad (\text{do } \langle e_i, e_i \rangle = 0 \ \forall i \neq j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \langle \lambda_i e_i, e_i \rangle \quad (\lambda_i \geq 0 \text{ do } A \text{ đối xứng xác định không âm}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \|e_i\|^2 \\ &\geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_{\max}} \|Ae_i \alpha_i\|^2 = \frac{1}{\lambda_{\max}} \|A(x - y)\|. \end{aligned}$$

Suy ra A là ánh xạ $\frac{1}{\lambda_{\max}}$ -đơn điệu mạnh ngược.

Có

$$\begin{aligned} \langle A(x - y), x - y \rangle &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \|e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|\alpha_i e_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x - y\|^2 \geq \lambda_{\max} \|x - y\|. \end{aligned}$$

Suy ra A là ánh xạ λ_{\max} -đơn điệu mạnh.

Ngoài ra, nếu A là một ánh xạ η -đơn điệu mạnh ngược thì $I^{\mathcal{H}} - \lambda A$ là ánh xạ không gián với hệ số $\lambda \in (0, 2\eta]$, trong đó $I^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ đồng nhất trong \mathcal{H} .

1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán chấp nhận tách

Bài toán bất đẳng thức biến phân

Bài toán bất đẳng thức biến phân là một trong những bài toán tổng quát, bao hàm của nhiều bài toán khác như bài toán tối ưu (*Optimization problem*), bài toán bù suy rộng (*Generalized complementarity problem*) và bài toán điểm bất động (*Fixed point problem*), xem [16].

Bài toán bất đẳng thức biến phân được sử dụng để giải các bài toán cân bằng như bài toán cân bằng trong kinh tế (*Network economic equilibrium problem*, [17]) hoặc bài toán cân bằng trong vận tải (*Transportation equilibrium problem*, [20])...

Bài toán 1.1 (xem [16]). Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng trong không gian Hilbert thực \mathcal{H} , ánh xạ $A : C \rightarrow \mathcal{H}$, thường được gọi là ánh xạ giá hay ánh xạ mục tiêu. Bài toán bất đẳng thức biến phân (*Variational inequality problem*) với ánh xạ giá A và tập ràng buộc C , ký hiệu $\text{VIP}(A, C)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } \langle Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C. \quad (\text{VIP}(A, C))$$

Trong các trường hợp đặc biệt của ánh xạ giá, bài toán $(\text{VIP}(A, C))$ đưa về các bài toán con. Ví dụ, khi $A = I$ là ánh xạ đồng nhất, ta có bài toán tìm phần tử có chuẩn nhỏ nhất trên tập C ; khi $A = \nabla f$, ta có bài toán tối ưu với f là hàm mục tiêu. Ngoài ra, bài toán $(\text{VIP}(A, C))$ tương đương với bài toán điểm bất động của ánh xạ $P_C(I - \lambda A)$ với $\lambda > 0$, là bài toán tìm x^* sao cho $x^* = P_C(x^* - \lambda A(x^*))$.

Sự tồn tại và tính chất nghiệm của bài toán $(\text{VIP}(A, C))$ phụ thuộc vào tính chất của ánh xạ giá A và tập ràng buộc C . Định lý sau đây khẳng định tính tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán.

Định lý 1.1 (xem [5]). *Cho C là tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực \mathcal{H} . Nếu ánh xạ $A : C \rightarrow \mathcal{H}$ là ánh xạ β -đơn điệu mạnh và L -liên tục Lipschitz trên C thì bài toán $(\text{VIP}(A, C))$ có nghiệm duy nhất.*

Bài toán chấp nhận tách

Bài toán chấp nhận tách (*Split feasibility problem*) được đề cập lần đầu tiên bởi Censor và Elfving trong [7] năm 1994. Bài toán này được nghiên cứu sâu và được ứng dụng trong mô hình xạ trị điều biến cường độ (intensity-modulated radiation therapy), xem [8–10].

Bài toán 1.2 (xem [7]). Cho C và Q lần lượt là các tập con lồi, đóng trong không gian Hilbert \mathcal{H}_1 và \mathcal{H}_2 , ánh xạ $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn. Bài toán chấp nhận tách, ký hiệu (SFP), được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } Fx^* \in Q. \quad (\text{SFP})$$

Trong trường hợp đặc biệt, khi $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^m$, toán tử chuyển $F = I$ và $C = \cap_{i=1}^m C_i$, bài toán (SFP) trở thành bài toán chấp nhận lồi (*Convex feasible problem*, [6]). Khi các tập C và Q là các tập nghiệm của các bài toán khác, ta thu được bài toán tách tương ứng, ví dụ như bài toán bất đẳng thức biến phân tách (đề cập ở sau), bài toán cực tiểu lồi tách (*Split minimization problem*), bài toán không điểm tách (*Split zero-points problem*)... xem [11].

1.3 Một số bổ đề bổ trợ

Trong phần này, tác giả trình bày một số bổ đề dùng để chứng minh Định lý hội tụ ở Chương 2.

Bổ đề 1.3 (xem [12]). *Cho $A : C \rightarrow \mathcal{H}$ là ánh xạ η -đơn điệu mạnh ngược trên C và $\lambda > 0$ là hằng số thỏa mãn $0 < \lambda \leq 2\eta$. Ánh xạ $T : C \rightarrow C$ được định nghĩa bởi*

$$Tx = P_C(I^\mathcal{H} - \lambda A)x \quad \forall x \in C. \quad (1.6)$$

Khi đó T là ánh xạ không gián trên C , hơn nữa, $\text{Fix}(T) = S_{(A,C)}$, trong đó

$$\text{Fix}(T) := \{x \in C \mid Tx = x\}.$$

Chứng minh. Đầu tiên, do T là phép chiếu métric nên nó sẽ là ánh xạ không giãn.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh $\text{Fix}(T) = S_{(A,C)}$.

Thật vậy, theo (1.3) ta có

$$\langle (I^H - \lambda A)x - P_C(I^H - \lambda A)x, P_C(I^H - \lambda A)x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C, y \in C.$$

Với mọi $x \in \text{Fix}(T)$ ta có $Tx = P_C(I^H - \lambda A)x = x$. Suy ra

$$\begin{aligned} \langle (I - \lambda A)x - x, x - y \rangle &\geq 0 \quad \forall x \in C, y \in C \\ \langle -\lambda Ax, x - y \rangle &\geq 0 \quad \forall x \in C, y \in C. \end{aligned}$$

Do $\lambda \in (0, 2\eta]$ nên ta có

$$\langle Ax, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C, y \in C.$$

Tương đương với $x \in S_{(A,C)}$ là điều phải chứng minh.

Bố đề 1.4 (xem [14]). *Giả sử ánh xạ T là ánh xạ không giãn trên tập con lồi đóng C trong không gian Hilbert \mathcal{H} vào \mathcal{H} . Khi đó ánh xạ $I^\mathcal{H} - T$ là bán đóng trên C ; tức là, khi dãy $\{x^k\}$ trong C hội tụ yếu đến phần tử $u^* \in C$ và dãy $\{(I^\mathcal{H} - T)x^k\}$ hội tụ mạnh đến phần tử y , suy ra $(I^\mathcal{H} - T)u^* = y$.*

Từ Bố đề 1.4, nếu $x^k \rightharpoonup u^*$ và $(I^\mathcal{H} - T)x^k \rightarrow 0$, thì $u^* \in \text{Fix}(T)$.

Bố đề 1.5 (xem [19]). *Cho dãy $\{s_k\}$ là dãy số thực không giảm ở vô cùng, nghĩa là tồn tại dãy con $\{s_{k_n}\}$ thỏa mãn $s_{k_n} \leq s_{k_{n+1}} \forall n \geq 0$. Dãy số nguyên $\{v(k)\}$ được định nghĩa bởi*

$$v(k) := \max \{k_0 \leq n \leq k \mid s_k < s_{k+1}\}. \quad (1.7)$$

Khi đó $v(k) \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$ và với mọi $k \geq k_0$, ta có $\max\{s_{v(k)}, s_k\} \leq s_{v(k)+1}$.

Chứng minh. Từ $s_{k_n} \leq s_{k_{n+1}} \forall n \geq 0$, ta thấy rằng dãy $v(k)$ là dãy định nghĩa tốt và hiển nhiên là nó không tăng.

Ta sẽ chứng minh $s_k \leq s_{v(k)+1}$. Để dàng quan sát thấy $v(k) \leq k$. Theo đó, ta xem xét ba trường hợp:

- $v(k) = k$. Ta được $s_k \leq s_{v(k)+1}$.
- $v(k) = k - 1$. Hiển nhiên ta được $s_k \leq s_{v(k)+1}$.
- $v(k) < k - 1$. Từ 1.7 và với mọi $k \geq k_0$, ta thấy rằng $s_n \geq s_{n+1}$ với $v(k) + 1 \leq n \leq k - 1$, cụ thể

$$s_{v(k)+1} \geq s_{v(k)+2} \geq \dots \geq s_{k-1} \geq s_k.$$

Ta được điều phải chứng minh.

Bố đề 1.6 (xem [23]). Cho dãy $\{s_k\}$ là dãy số thực không âm thỏa mãn

$$s_{k+1} \leq (1 - b_k)s_k + b_k c_k, \quad k \geq 0, \quad (1.8)$$

trong đó $\{b_k\}$ và $\{c_k\}$ là dãy số thực sao cho

- (i) $\{b_k\} \subset (0, 1)$ với mọi $k \geq 0$ và $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$,
- (ii) $\limsup_{k \rightarrow \infty} c_k \leq 0$.

Khi đó, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$.

Chứng minh.

Giả sử điều kiện (i) và (ii) thỏa mãn. Với bất kỳ $\varepsilon > 0$, đặt $N \geq 1$ là một số nguyên đủ lớn sao cho

$$c_k < \varepsilon, \quad \text{với } k > N.$$

Từ (1.8), với $k > N$,

$$\begin{aligned} s_{k+1} &\leq (1 - b_k)s_k + \varepsilon b_k \\ &\leq (1 - b_k)(1 - b_{k-1})s_{k-1} + \varepsilon(1 - (1 - b_k)(1 - b_{k-1})). \end{aligned}$$

Từ đó ta thu được

$$s_{k+1} \leq \prod_{j=N}^n (1 - b_j)s_N + \varepsilon \left[1 - \prod_{j=N}^n (1 - b_j) \right], \quad k > N.$$

Từ điều kiện (i), sau khi lấy \limsup khi $n \rightarrow \infty$ ở bất đẳng thức cuối, ta rút gọn được

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} s_{k+1} \leq \varepsilon.$$

Tiếp theo, giả sử điều kiện (i) và (ii) được thỏa mãn. Khi đó, lặp lại sử dụng (1.8) ta được với mọi $k > m$,

$$s_{k+1} \leq \prod_{j=m}^n (1 - b_j) s_m + \sum_{j=m}^n b_j c_j.$$

Cho $n \rightarrow \infty$ sau đó cho $m \rightarrow \infty$, ta thu được

$$\limsup_k s_k \leq 0.$$

Chương 2

Phương pháp chiếu giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách

Chương này đề xuất phương pháp lặp mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách trong không gian Hilbert thực và chứng minh sự hội tụ của thuật toán. Phần thứ hai của chương trình bày một ví dụ số minh họa cho sự hội tụ của thuật toán. Nội dung của chương được viết dựa trên bài báo [22] của tác giả và tham khảo một số tài liệu [11], [12].

2.1 Bài toán bất đẳng thức biến phân tách

Bài toán bất đẳng thức biến phân tách

Bài toán bất đẳng thức biến phân tách là trường hợp đặc biệt của bài toán chấp nhận tách (SFP) khi các tập C và Q là tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân. Bài toán đã được đề cập lần đầu tiên bởi Censor và các cộng sự trong [11] vào năm 2010.

Bài toán 2.1 (xem [11]). Cho \mathcal{H}_1 và \mathcal{H}_2 là hai không gian Hilbert thực, $C \subseteq \mathcal{H}_1$ và $Q \subseteq \mathcal{H}_2$ là các tập con lồi đóng khác rỗng, các ánh xạ gồm $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$, $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ và ánh xạ tuyến tính bị chặn $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Bài toán bất đẳng thức biến phân tách là bài toán

$$\begin{aligned} & \text{Tìm phần tử } x^* \in C \text{ sao cho } \langle Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C \\ & \text{và } y^* = Fx^* \in Q \text{ sao cho } \langle By^*, y - y^* \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Q. \end{aligned} \tag{SVIP}$$

Khi $A = 0$ và $B = 0$, tức là $S_{(A,C)} = C$, $S_{(B,Q)} = Q$, bài toán (SVIP) trở thành bài toán chấp nhận tách (SFP). Ngoài ra, trong các trường hợp đặc biệt, bài toán (SVIP) cũng có thể đưa về bài toán cực tiểu lồi tách, bài toán không điểm tách,...

Năm 2012, Censor và các cộng sự [12] đã trình bày một thuật toán hội tụ yếu giải bài toán (SVIP). Cụ thể, một số điều kiện đặt lên các ánh xạ và tập nghiệm của bài toán như sau:

Giả thiết 2.1.

(A1) $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ là ánh xạ η_A -đơn điệu mạnh ngược trên \mathcal{H}_1 .

(A2) $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ là ánh xạ η_B -đơn điệu mạnh ngược trên \mathcal{H}_2 .

(A3) $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ là ánh xạ tuyến tính bị chặn.

Tập nghiệm Ω của bài toán (SVIP) khác rỗng.

Một số điều kiện của tham số như sau:

(B1) : $0 < \lambda \leq 2\eta$; $\eta = \min\{\eta_A, \eta_B\}$; (λ)

(B2) : $0 < \gamma < \frac{1}{L}$, với L là bán kính phổ của toán tử F^*F . (γ)

Thuật toán 2.1 (xem [12]).

Bước khởi tạo Chọn điểm bắt đầu $x^0 \in \mathcal{H}_1$ và $\lambda > 0$.

Bước lặp Tại bước lặp thứ k , ta tính

$$x^{k+1} = P_C(I - \lambda A)(x^k + \gamma F^*(P_Q(I - \lambda B) - I)(Fx^k)),$$

trong đó $\gamma \in (0, 1/L)$ với L là bán kính phổ của toán tử F^*F .

Censor và các cộng sự đã chứng minh dãy lặp sinh bởi Thuật toán 2.1 hội tụ yếu đến nghiệm của bài toán (SVIP) trong [12]. Ngoài ra, để tính toán cỡ bước, cần tính toán L là bán kính phổ của toán tử F^*F . Khi đó, nếu F là một toán tử phức tạp, sẽ tồn tại nhiều chi phí tính toán.

2.2 Phương pháp chiếu giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách

Ở thuật toán mới này, tác giả vẫn sử dụng một số điều kiện giống với thuật toán của Censor. Bên cạnh đó, tác giả sử dụng phương pháp xấp xỉ mềm bằng cách đưa thêm vào một ánh xạ co T . Việc sử dụng này nhằm mục đích: nghiệm sau các lần lặp sẽ hội tụ mạnh về nghiệm đúng và toán tử $I - T$ sẽ là liên tục Lipschitz và đơn điệu mạnh giúp thuật toán hội tụ đến nghiệm duy nhất của bài toán bất đẳng thức biến phân.

Ta bổ sung thêm giả thiết sau:

Giả thiết 2.2.

(A4) $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ là ánh xạ co với hệ số co $\tau \in [0, 1)$.

Ta bổ sung thêm điều kiện của tham số α_k như sau:

$$(B3): \quad \{\alpha_k\} \subset (0, 1) \text{ với mọi } k \geq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty; \quad (\alpha)$$

Dưới đây là thuật toán giải bài toán (SVIP).

Thuật toán 2.2

Bước 0. Chọn điểm bắt đầu $x^0 \in \mathcal{H}_1$ và dãy $\{\beta_k\} \subset [c, d] \subset (0, 1) \forall k \geq 0$, dãy $\{\alpha_k\}$, λ , và γ thỏa mãn các điều kiện (α) , (λ) , và (γ) . Đặt $k := 0$.

Bước 1. Tính $u^k = \beta_k x^k + (1 - \beta_k) P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A x^k)$.

Bước 2. Tính $v^k = P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k))$.

Bước 3. Tính $w^k = u^k + \gamma F^*(v^k - F u^k)$.

Bước 4. Tính $x^{k+1} = \alpha_k T(x^k) + (1 - \alpha_k) w^k$.

Bước 5. Nếu $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại đặt $k := k + 1$ và quay về **Bước 1**.

Định lý 2.1. *Giả sử các điều kiện trong Giả thiết 2.1 và 2.2 được thỏa mãn. Khi đó dãy $\{x^k\}$ được sinh bởi Thuật toán 2.2 hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất $u^* \in \Omega$ của bài toán VIP($I^{\mathcal{H}_1} - T, \Omega$).*

Chứng minh. Vì T là ánh xạ co, $P_\Omega T$ cũng là ánh xạ co. Theo nguyên lý ánh xạ co

Banach, tồn tại một điểm duy nhất $u^* \in \Omega$ sao cho $P_\Omega Tu^* = u^*$. Từ Bổ đề 1.1, ta được u^* là nghiệm duy nhất của $\text{VIP}(I^{\mathcal{H}_1} - T, \Omega)$.

1. Chứng minh dãy $\{x^k\}$ bị chặn.

Thật vậy, cho $u \in \Omega$. Vì $u \in \Omega$, $u \in S_{(A,C)}$. Từ (λ) và Bổ đề 1.3 ta có $u = P_C^{\mathcal{H}_1}(I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)u$.

Từ Bước 1 của Thuật toán 2.2, tính chất không gián của $P_C^{\mathcal{H}_1}(I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)$,

$\{\beta_k\} \subset [c, d] \subset (0, 1) \forall k \geq 0$ và (1.2), ta có

$$\begin{aligned} \|u^k - u\|^2 &= \left\| \beta_k(x^k - u) + (1 - \beta_k) \left[P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda Ax^k) - u \right] \right\|^2 \\ &= \left\| \beta_k(x^k - u) + (1 - \beta_k) \left[P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda Ax^k) - P_C^{\mathcal{H}_1}(u - \lambda Au) \right] \right\|^2 \\ &= \beta_k \|x^k - u\|^2 + (1 - \beta_k) \|x^k - u\|^2 - \beta_k(1 - \beta_k) \|x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda Ax^k)\|^2 \\ &= \|x^k - u\|^2 - \beta_k(1 - \beta_k) \|x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda Ax^k)\|^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\leq \|x^k - u\|^2. \quad (2.2)$$

Từ Bước 3 của Thuật toán 2.2, tính chất của toán tử liên hợp F^* , và (1.1) ta có

$$\begin{aligned} \|w^k - u\|^2 &= \|u^k + \gamma F^*(v^k - Fu^k) - u\|^2 \\ &= \|u^k - u\|^2 + \gamma^2 \|F^*(v^k - Fu^k)\|^2 + 2\gamma \langle u^k - u, F^*(v^k - Fu^k) \rangle \\ &= \|u^k - u\|^2 + \gamma^2 \|F\|^2 \|v^k - Fu^k\|^2 + 2\gamma \langle Fu^k - Fu, v^k - Fu^k \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sử dụng tính lồi của $\|\cdot\|^2$ và Bước 2 trong Thuật toán 2.2, ta có

$$\|v^k - Fu^k\|^2 = \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k \right\|^2. \quad (2.4)$$

Vì $u \in \Omega$, $Fu \in S_{(B,Q)}$. Từ Bổ đề 1.3 có $Fu = P_Q^{\mathcal{H}_2}(I^{\mathcal{H}_2} - \lambda B)Fu$. Từ Bước 2 trong Thuật toán 2.2, tính chất không gián của $P_Q^{\mathcal{H}_2}(I^{\mathcal{H}_2} - \lambda B)$, ta có

$$\begin{aligned} \langle Fu^k - Fu, v^k - Fu^k \rangle &= \langle Fu^k - Fu, P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu \right\|^2 - \left\| Fu^k - Fu \right\|^2 - \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu - \lambda B(Fu)) \right\|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\| F u^k - F u \right\|^2 - \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2} (F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \right\|^2 \Big) \\
& \leq - \frac{1}{2} \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2} (F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \right\|^2. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Từ (2.3)–(2.5) và (γ) có

$$\|w^k - u\|^2 \leq \|u^k - u\|^2 - \gamma(1 - \gamma\|F\|^2) \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2} (F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \right\|^2 \tag{2.6}$$

$$\leq \|u^k - u\|^2. \tag{2.7}$$

Từ tính chất lồi của hàm chuẩn $\|\cdot\|$ trong \mathcal{H}_1 , tính chất co của T với hệ số co $\tau \in [0, 1)$, (2.2), (2.7), điều kiện (α), và Bước 4 trong Thuật toán 2.2 có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - u\| &= \left\| \alpha_k(Tx^k - u) + (1 - \alpha_k)(w^k - u) \right\| \\
&\leq \alpha_k(\|Tx^k - Tu\| + \|Tu - u\|) + (1 - \alpha_k)\|w^k - u\| \\
&\leq \tau\alpha_k\|x^k - u\| + \alpha_k\|Tu - u\| + (1 - \alpha_k)\|x^k - u\| \\
&= [1 - (1 - \tau)\alpha_k]\|x^k - u\| + (1 - \tau)\alpha_k \frac{\|Tu - u\|}{1 - \tau} \\
&\leq \max \left\{ \|x^k - u\|, \frac{\|Tu - u\|}{1 - \tau} \right\} \\
&\vdots \\
&\leq \max \left\{ \|x^0 - u\|, \frac{\|Tu - u\|}{1 - \tau} \right\}.
\end{aligned}$$

Điều đó chỉ ra rằng dãy $\{x^k\}$ là bị chặn. Vì P_C và P_Q là các ánh xạ không giãn và F là toán tử tuyến tính bị chặn nên ta cũng có dãy $\{u^k\}$, $\{v^k\}$, và $\{w^k\}$ là bị chặn.

2. Chứng minh rằng, với bất kỳ $u \in \Omega$, ta có bất đẳng thức sau:

$$s_{k+1} \leq [1 - (1 - \tau)\alpha_k]s_k + \alpha_k e_k, \tag{2.8}$$

$$\text{ở đó } s_k := \|x^k - u\|^2 \text{ và } e_k := 2\langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle.$$

Thật vậy, từ tính lồi của $\|\cdot\|^2$, Bước 4 trong Thuật toán 2.2, (2.1), (2.6), và điều kiện (α), ta được

$$\|x^{k+1} - u\|^2 = \left\| \alpha_k(Tx^k - u) + (1 - \alpha_k)(w^k - u) \right\|^2 \leq \alpha_k\|Tx^k - u\|^2 + (1 - \alpha_k)\|w^k - u\|^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha_k \|Tx^k - u\|^2 + \|u^k - u\|^2 - \gamma(1 - \gamma\|F\|^2) \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k \right\|^2 \\
&\leq \alpha_k \|Tx^k - u\|^2 + \|x^k - u\|^2 - \gamma(1 - \gamma\|F\|^2) \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k \right\|^2 \\
&\quad - \beta_k(1 - \beta_k) \left\| x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A(x^k)) \right\|^2.
\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned}
&\gamma(1 - \gamma\|F\|^2) \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k \right\|^2 + \beta_k(1 - \beta_k) \left\| x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A(x^k)) \right\|^2 \\
&\leq (\|x^k - u\|^2 - \|x^{k+1} - u\|^2) + \alpha_k \|Tx^k - u\|^2. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

Tiếp theo, từ Bước 4 của Thuật toán 2.2 và tính chất co của T với hệ số co $\tau \in [0, 1)$, ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - u\|^2 &= \langle \alpha_k(Tx^k - u) + (1 - \alpha_k)(w^k - u), x^{k+1} - u \rangle \\
&= (1 - \alpha_k) \langle w^k - u, x^{k+1} - u \rangle + \alpha_k \langle Tx^k - u, x^{k+1} - u \rangle \\
&\leq \frac{1 - \alpha_k}{2} (\|w^k - u\|^2 + \|x^{k+1} - u\|^2) + \alpha_k \langle Tx^k - Tu, x^{k+1} - u \rangle \\
&\quad + \alpha_k \langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle \\
&\leq \frac{1 - \alpha_k}{2} (\|w^k - u\|^2 + \|x^{k+1} - u\|^2) \\
&\quad + \frac{\alpha_k}{2} (\tau \|x^k - u\|^2 + \|x^{k+1} - u\|^2) + \alpha_k \langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle.
\end{aligned}$$

Điều đó chỉ ra rằng

$$\|x^{k+1} - u\|^2 \leq (1 - \alpha_k) \|w^k - u\|^2 + \alpha_k \tau \|x^k - u\|^2 + 2\alpha_k \langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle.$$

Từ (2.2), (2.7), và bất phương trình trên ta thu được

$$\|x^{k+1} - u\|^2 \leq [1 - (1 - \tau)\alpha_k] \|x^k - u\|^2 + 2\alpha_k \langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle. \tag{2.10}$$

Đặt $s_k := \|x^k - u\|^2$ và $e_k := 2\langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle$, khi đó bất phương trình (2.10) có thể viết lại dưới dạng (2.8).

3. Ta sẽ chỉ ra rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^k - u^*\| = 0$, ở đó $u^* = P_\Omega Tu^*$.

Ta sẽ xét hai trường hợp có thể xảy ra.

Trường hợp 1. Tồn tại số nguyên $k_0 \geq 0$ sao cho $\|x^{k+1} - u^*\| \leq \|x^k - u^*\|$ với mọi $k \geq k_0$. Khi đó, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^*\|$ tồn tại. Vì dãy $\{x^k\}$ bị chặn, dãy $\{Tx^k\}$ cũng bị chặn. Từ tính bị chặn của dãy $\{Tx^k\}$, (α) , (λ) , và (γ) , và từ (2.9) có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| [I^{\mathcal{H}_1} - P_C^{\mathcal{H}_1}(I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)]x^k \right\| = 0 \quad (2.11)$$

và

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| [I^{\mathcal{H}_2} - P_Q^{\mathcal{H}_2}(I^{\mathcal{H}_2} - \lambda B)]Fu^k \right\| = 0. \quad (2.12)$$

Từ (2.12) và (2.4), ta được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^k - Fu^k\| = 0. \quad (2.13)$$

Từ Bước 3 của Thuật toán 2.2, tính chất của toán tử liên hợp F^* , và (2.13), ta thu được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - u^k\| = \gamma \lim_{k \rightarrow \infty} \|F^*(v^k - Fu^k)\| = 0. \quad (2.14)$$

Từ Bước 1 của Thuật toán 2.2 và (2.12), ta được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \beta_k) \left\| x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)x^k \right\| = 0. \quad (2.15)$$

Từ (2.15) và (2.14) ta có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - w^k\| = 0. \quad (2.16)$$

Sử dụng tính bị chặn của $\{w^k\}$ và $\{Tx^k\}$, Bước 4 trong Thuật toán 2.2, và điều kiện (α) , ta cũng có $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - w^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \|Tx^k - w^k\| = 0$. Khi kết hợp với (2.16), ta thu được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0. \quad (2.17)$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{k+1} - u^* \rangle \leq 0$. Thật vậy, giả sử rằng $\{x^{k_n}\}$ là một dãy con của $\{x^k\}$ sao cho

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^k - u^* \rangle = \lim_{k_n \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{k_n} - u^* \rangle. \quad (2.18)$$

Vì $\{x^{k_n}\}$ bị chặn, tồn tại một dãy con $\{x^{k_{n_l}}\}$ của $\{x^{k_n}\}$ hội tụ yếu đến điểm u^\dagger . Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $x^{k_n} \rightharpoonup u^\dagger$. Ta sẽ chứng minh rằng $u^\dagger \in \Omega$. Thật vậy, từ (2.11), Bổ đề 1.3 và 1.4, ta thu được $u^\dagger \in S_{(A,C)}$. Hơn thế nữa, vì F là toán tử tuyến tính bị chặn, $Fx^{k_n} \rightharpoonup Fu^\dagger$. Sử dụng (2.12), Bổ đề 1.3, và 1.4, ta cũng thu được $Fu^\dagger \in S_{(B,C)}$. Vì vậy, $u^\dagger \in \Omega$. Từ $u^* = P_\Omega Tu^*$, (2.18), và Bổ đề 1.1 ta được $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^k - u^* \rangle = \langle Tu^* - u^*, u^\dagger - u^* \rangle \leq 0$, kết hợp với (2.17) được

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{k+1} - u^* \rangle \leq 0. \quad (2.19)$$

Bây giờ, bất đẳng thức (2.8) với u được thay thế bởi u^* , có thể viết lại dưới dạng

$s_{k+1} \leq (1 - b_k)s_k + b_k c_k$, ở đó $b_k = (1 - \tau)\alpha_k$ và $c_k = \frac{2}{1-\tau} \langle Tu^* - u^*, x^{k+1} - u^* \rangle$. Có điều kiện (α) và $\tau \in [0, 1)$, $\{b_k\} \subset (0, 1)$ và $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$. Theo đó, từ $\tau \in [0, 1)$ và (2.19), ta có $\limsup_{k \rightarrow \infty} c_k \leq 0$. Cuối cùng, từ Bổ đề 1.6, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$. Vì vậy, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^*\| = 0$.

Trường hợp 2. Tồn tại một dãy con $\{k_n\}$ của $\{k\}$ sao cho $\|x^{k_n} - u^*\| \leq \|x^{k_n+1} - u^*\|$ với mọi $n \geq 0$. Vì vậy, từ Bổ đề 1.5, tồn tại một dãy không tăng $\{v(k)\}$ với $k \geq k_0$ (với một số k_0 đủ lớn) sao cho $v(k) \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$,

$$\|x^{v(k)} - u^*\| \leq \|x^{v(k)+1} - u^*\| \quad \text{và} \quad \|x^k - u^*\| \leq \|x^{v(k)+1} - u^*\| \quad \text{với mỗi } k \geq 0. \quad (2.20)$$

Từ (2.8) với u được thay thế bởi u^* và k được thay thế bởi $v(k)$, ta có

$$0 < \|x^{v(k)+1} - u^*\|^2 - \|x^{v(k)} - u^*\|^2 \leq 2\alpha_{v(k)} \langle Tu^* - u^*, x^{v(k)+1} - u^* \rangle.$$

Vì $\alpha_{v(k)} \rightarrow 0$ và tính bị chặn của $\{x^{v(k)}\}$, ta kết luận rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|x^{v(k)+1} - u^*\|^2 - \|x^{v(k)} - u^*\|^2) = 0. \quad (2.21)$$

Tương tự Trường hợp 1, ta thu được $\lim_{k \rightarrow \infty} \| [I^{\mathcal{H}_1} - P_C^{\mathcal{H}_1} (I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)] x^{v(k)} \| = 0$ và $\lim_{k \rightarrow \infty} \| [I^{\mathcal{H}_2} - P_Q^{\mathcal{H}_2} (I^{\mathcal{H}_2} - \lambda B)] F u^{v(k)} \| = 0$.

Ta cũng có

$$\|x^{v(k)+1} - u^*\|^2 \leq [1 - (1 - \tau)\alpha_{v(k)}] \|x^{v(k)} - u^*\|^2 + 2\alpha_{v(k)} \langle Tu^* - u^*, x^{v(k)+1} - u^* \rangle,$$

ở đó $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{v(k)+1} - u^* \rangle \leq 0$. Từ bất đẳng thức đầu tiên trong (2.20) và $\alpha_{v(k)} > 0$, ta có $(1 - \tau) \|x^{v(k)} - u^*\|^2 \leq 2 \langle Tu^* - u^*, x^{v(k)+1} - u^* \rangle$. Vì vậy, từ $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{v(k)+1} - u^* \rangle \leq 0$ và $\tau \in [0, 1)$, ta được $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{v(k)} - u^*\|^2 = 0$. Cùng với (2.21) chỉ ra rằng $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{v(k)+1} - u^*\|^2 = 0$. Cùng với bất đẳng thức thứ hai trong (2.20) chỉ ra rằng $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^*\| = 0$. Ta được điều phải chứng minh. \square

Một số hệ quả

Trong mục này, ta đưa ra một vài hệ quả của Thuật toán 2.2 và Định lý 2.1 cho bài toán chấp nhận tách.

Trong trường hợp $Ax = 0$ với mọi $x \in C$ và $By = 0$ với mọi $y \in Q$, từ Thuật toán 2.2 và Định lý 2.1, ta có kết quả sau cho (SFP).

Thuật toán 2.3 giải bài toán chấp nhận tách

Bước 0. Chọn điểm bắt đầu $x^0 \in \mathcal{H}_1$, và các dãy $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\} \subset [c, d] \subset (0, 1)$, và λ sao cho các điều kiện (α) và (γ) được thỏa mãn. Đặt $k := 0$.

Bước 1. Tính $u^k = \beta_k x^k + (1 - \beta_k) P_C^{\mathcal{H}_1} x^k$.

Bước 2. Tính $v^k = P_Q^{\mathcal{H}_2} F u^k$.

Bước 3. Tính $w^k = u^k + \gamma F^*(v^k - F u^k)$.

Bước 4. Tính $x^{k+1} = \alpha_k T(x^k) + (1 - \alpha_k) w^k$.

Bước 5. Nếu $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại đặt $k := k + 1$ và quay về **Bước 1**.

Hệ quả 2.1. Giả sử các điều kiện **(A3)** và **(A4)** được thỏa mãn. Khi đó dãy $\{x^k\}$ được sinh ra bởi Thuật toán 2.3 hội tụ mạnh đến phần tử $u^* = P_{\Omega_{\text{SFP}}} Tu^*$, nếu tập nghiệm $\Omega_{\text{SFP}} = \{u^* \in C \mid F(u^*) \in Q\}$ của (SFP) là khác rỗng.

Trong Thuật toán 2.3, nếu cho $T = 0$, ta nhận được thuật toán tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất trên Ω_{SFP} .

Thuật toán 2.4 tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất trên tập nghiệm bài toán chấp nhận tách

Bước 0. Chọn điểm bắt đầu $x^0 \in \mathcal{H}_1$, và các dãy $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\} \subset [c, d] \subset (0, 1)$, và λ sao cho các điều kiện (α) và (γ) được thỏa mãn. Đặt $k := 0$.

Bước 1. Tính $u^k = \beta_k x^k + (1 - \beta_k) P_C^{\mathcal{H}_1} x^k$.

Bước 2. Tính $v^k = P_Q^{\mathcal{H}_2} F u^k$.

Bước 3. Tính $w^k = u^k + \gamma F^*(v^k - F u^k)$.

Bước 4. Tính $x^{k+1} = (1 - \alpha_k) w^k$.

Bước 5. Nếu $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại đặt $k := k + 1$ và quay về

Bước 1.

Hệ quả 2.2. Giả sử các điều kiện **(A3)** và **(A4)** được thỏa mãn. Khi đó dãy $\{x^k\}$ được sinh ra bởi Thuật toán 2.4 hội tụ mạnh đến phần tử có chuẩn nhỏ nhất trên Ω_{SFP} , nếu tập nghiệm Ω_{SFP} của **(SFP)** là khác rỗng.

Trong trường hợp $T = 0$, từ Thuật toán 2.2 và Định lý 2.1, ta có kết quả sau.

Thuật toán 2.5 tìm nghiệm có chuẩn nhỏ nhất trên tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân tách

Bước 0. Chọn điểm bắt đầu $x^0 \in \mathcal{H}_1$ và dãy $\{\beta_k\} \subset [c, d] \subset (0, 1) \forall k \geq 0$, dãy $\{\alpha_k\}$, λ , và γ thỏa mãn các điều kiện $(\alpha), (\lambda)$, và (γ) . Đặt $k := 0$.

Bước 1. Tính $u^k = \beta_k x^k + (1 - \beta_k) P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A x^k)$.

Bước 2. Tính $v^k = P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k))$.

Bước 3. Tính $w^k = u^k + \gamma F^*(v^k - F u^k)$.

Bước 4. Tính $x^{k+1} = (1 - \alpha_k) w^k$.

Bước 5. Nếu $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại đặt $k := k + 1$ và quay về

Bước 1.

Hệ quả 2.3. Giả sử điều kiện **(A1), (A2), (A3)** được thỏa mãn. Khi đó dãy $\{x^k\}$ được sinh ra bởi Thuật toán 2.5 hội tụ mạnh đến u^* là phần tử có chuẩn nhỏ nhất trên tập nghiệm Ω của bài toán **(SVIP)**.

2.3 Ví dụ minh họa

Trong phần này, đồ án trình bày một ví dụ giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách trong không gian hữu hạn chiều. Sau đó áp dụng phương pháp chiểu mới trình bày ở trên để giải.

Kết quả thuật toán được viết bằng ngôn ngữ lập trình Python và chạy chương trình trên Laptop Dell Latitude7490 Intel Core i7 8650U, 16GB RAM.

Cho $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R}^4$ và $\mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^5$. Các ánh xạ $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ và $B : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ được định nghĩa như sau

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

$$Bx = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5,$$

là các toán tử đơn điệu mạnh ngược với hệ số là $\eta_A = \frac{1}{9}$ và $\eta_B = \frac{1}{7}$.

Toán tử $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ được định nghĩa bởi

$$Fx = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

là toán tử tuyến tính bị chặn.

Ánh xạ

$$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

là ánh xạ co với hệ số co $\tau = \frac{1}{2}$.

Các tập C và Q được định nghĩa

$$C = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + x_4 \leq 1\};$$

$$Q = \{\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mid y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 \leq 1\}.$$

Sử dụng kiến thức của Lý thuyết tối ưu, ta tìm được tập nghiệm của bài toán (SVIP) trong trường hợp này là

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (-u - v, u, 0, v) \mid 9u^2 + v^2 \leq 1; 2u + v \geq -1; u, v \in \mathbb{R}\}.$$

Khi đó, nghiệm duy nhất của VIP $(I^{\mathbb{R}^4} - T, \Omega)$ là $x^* = (-0.3 \ 0.1 \ 0 \ 0.2)^\top$.

Các tính toán được thực hiện với việc sử dụng tiêu chuẩn dừng là $\|x^k - u^*\| < \varepsilon$, trong đó, ε là sai số cho trước.

Bây giờ, chọn $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\lambda = 0.2$, $\beta_k = 0.25$, $\gamma = 0.01$ và điểm bắt đầu $x^0 = (2 \ -1 \ 0 \ 5)^\top$. Điều kiện dừng là khi $\|x^k - x^{k+1}\| < \varepsilon = 10^{-6}$. Ta được kết quả

$$x^{4963} = (-0.29430006 \ 0.10569994 \ -0.00148593 \ 0.20569994)^\top.$$

Kết quả trên đạt được trong 0.208041 giây.

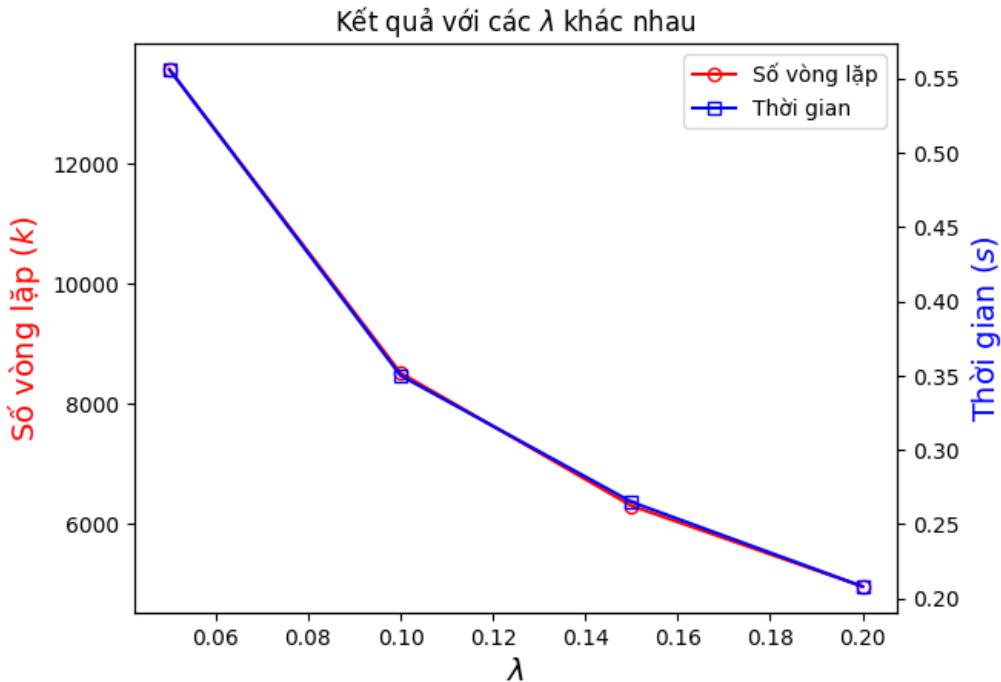
k	x^k	Sai số ε
0	$(2 \quad -1 \quad 0 \quad 5)^\top$	2.5597
1	$(1 \quad -0.3 \quad 0 \quad 2.75)^\top$	1.2227
2	$(0.34912352 \quad -0.18584219 \quad -0.12750923 \quad 1.72912354)^\top$	0.5570
...
4961	$(-0.29429891 \quad 0.10570109 \quad -0.00148622 \quad 0.20570109)^\top$	$1.0001.10^{-6}$
4962	$(-0.29429948 \quad 0.10570052 \quad -0.00148607 \quad 0.20570052)^\top$	$9.9981.10^{-7}$
4963	$(-0.29430006 \quad 0.10569994 \quad -0.00148593 \quad 0.20569994)^\top$	$9.9981.10^{-7}$

Bảng 2.1: Kết quả của ví dụ minh họa

Tiếp theo, ta thay đổi các tham số để đánh giá mức độ ảnh hưởng. Bảng dưới đây là kết quả chạy thuật toán với các λ khác nhau ($0 < \lambda \leq 2\eta \approx 0.2222$) và $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\beta_k = 0.25$, $\gamma = 0.01$ với điểm bắt đầu $x^0 = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 5)^\top$. Sai số $\varepsilon = 10^{-6}$.

λ	Nghiệm x^k	Số bước lặp	Thời gian
0.05	$(-0.28410242 \quad 0.11589758 \quad -0.00743177 \quad 0.21589758)^\top$	13557	0.5560s
0.10	$(-0.29020186 \quad 0.10979814 \quad -0.00409555 \quad 0.20979814)^\top$	8514	0.3500s
0.15	$(-0.29277108 \quad 0.10722892 \quad -0.00254209 \quad 0.20722892)^\top$	6303	0.2649s
0.20	$(-0.29430006 \quad 0.10569994 \quad -0.00148593 \quad 0.20569994)^\top$	4963	0.2080s

Bảng 2.2: Kết quả của thuật toán với các λ khác nhau



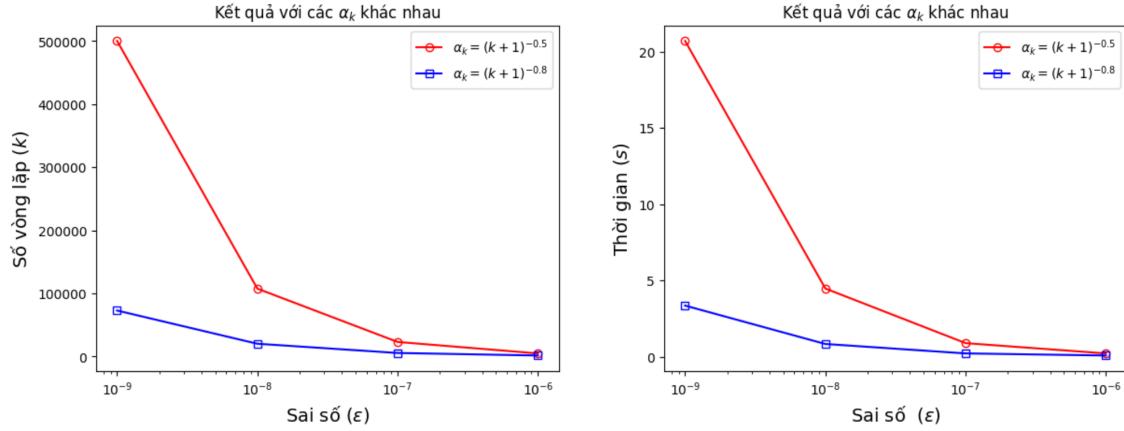
Hình 2.1: Đồ thị minh họa kết quả khi thay đổi λ

Từ bảng số liệu và đồ thị, ta có thể thấy càng tăng giá trị của λ thì cần ít lần lặp để hội tụ đến nghiệm với sai số cho trước.

Tiếp theo, ta thay đổi tham số α_k . Bảng dưới đây thể hiện kết quả của thuật toán với $\lambda = 0.20, \beta_k = 0.25, \gamma = 0.01$. và điểm bắt đầu $x^0 = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 5)^\top$. Sai số $\varepsilon = 10^{-6}$.

α_k	Sai số (ε)	Số vòng lặp (k)	Thời gian (s)
$\alpha_k = (k+1)^{-0.5}$	10^{-6}	4963	0.208041
	10^{-7}	23133	0.882029
	10^{-8}	107595	4.463039
	10^{-9}	499903	20.689995
$\alpha_k = (k+1)^{-0.8}$	10^{-6}	1693	0.07303
	10^{-7}	5658	0.209031
	10^{-8}	20287	0.826946
	10^{-9}	72908	3.344028

Bảng 2.3: Kết quả chạy thuật toán khi thay đổi dãy tham số α_k



Hình 2.2: Dáng điệu đồ thị của số vòng lặp và thời gian khi α_k thay đổi

Việc thay đổi dãy tham số $\{\alpha_k\}$ ảnh hưởng đáng kể đến số bước cần lặp cũng như tốc độ hội tụ của thuật toán.

Tiếp theo, ta thay đổi điểm bắt đầu. Bảng dưới đây là kết quả với các tham số $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \lambda = 0.2, \beta_k = 0.25, \gamma = 0.01$.

x^0	Sai số (ϵ)	Số vòng lặp (k)	Thời gian (s)
$x^0 = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 5)^\top$	10^{-6}	4963	0.208041
	10^{-7}	23133	0.882029
	10^{-8}	107595	4.463039
	10^{-9}	499903	20.689995
$x^0 = (-5 \quad 8 \quad 1 \quad 0)^\top$	10^{-6}	4963	0.242990
	10^{-7}	23133	0.902026
	10^{-8}	107595	4.649023
	10^{-9}	499903	20.259029

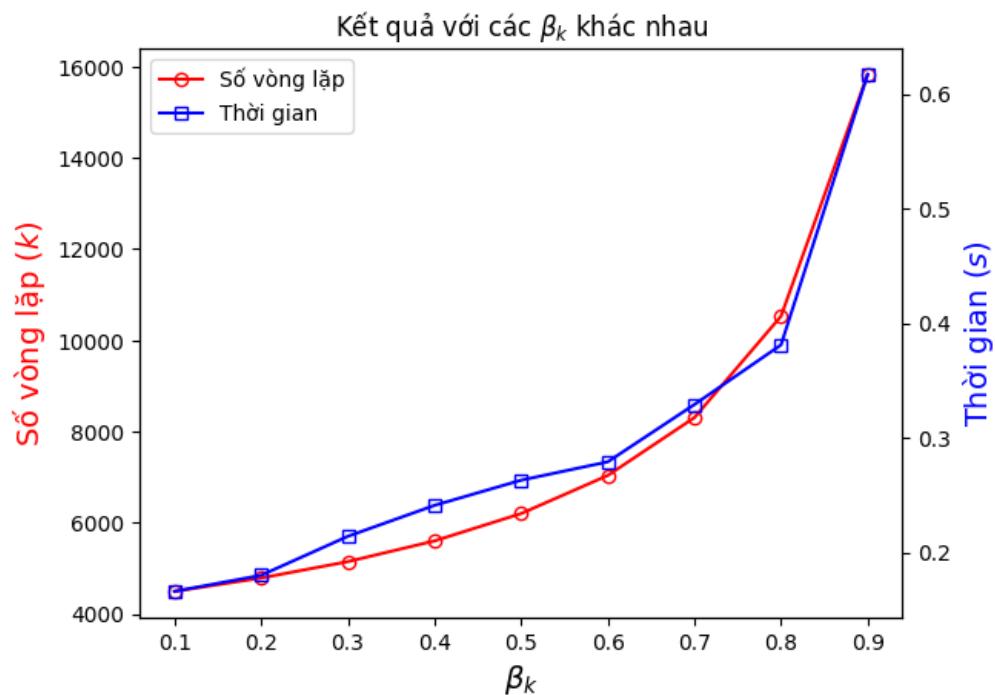
Bảng 2.4: Kết quả chạy thuật toán với các điểm bắt đầu khác nhau

Thông thường với các bài toán tối ưu, việc chọn điểm bắt đầu thường ảnh hưởng và quyết định lớn đến khả năng hội tụ cũng như tốc độ hội tụ của thuật toán. Nhưng ở đây kết quả lại khá bất ngờ khi việc chọn điểm lại không ảnh hưởng đến số lần lặp cũng như thời gian lặp.

Sau đó, ta cũng thay đổi tham số β_k , với lựa chọn các tham số còn lại giống như trên, cụ thể $\lambda = 0.20$, $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\gamma = 0.01$ với điểm bắt đầu $x^0 = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 5)^\top$. Sai số $\epsilon = 10^{-6}$.

β_k	Số bước lặp	Thời gian
0.1	4501	0.166038s
0.2	4793	0.180050s
0.3	5152	0.214039s
0.4	5606	0.241030s
0.5	6205	0.263004s
0.6	7040	0.278997s
0.7	8307	0.329004s
0.8	10529	0.381039s
0.9	15828	0.617035s

Bảng 2.5: Kết quả chạy thuật toán với các β_k khác nhau



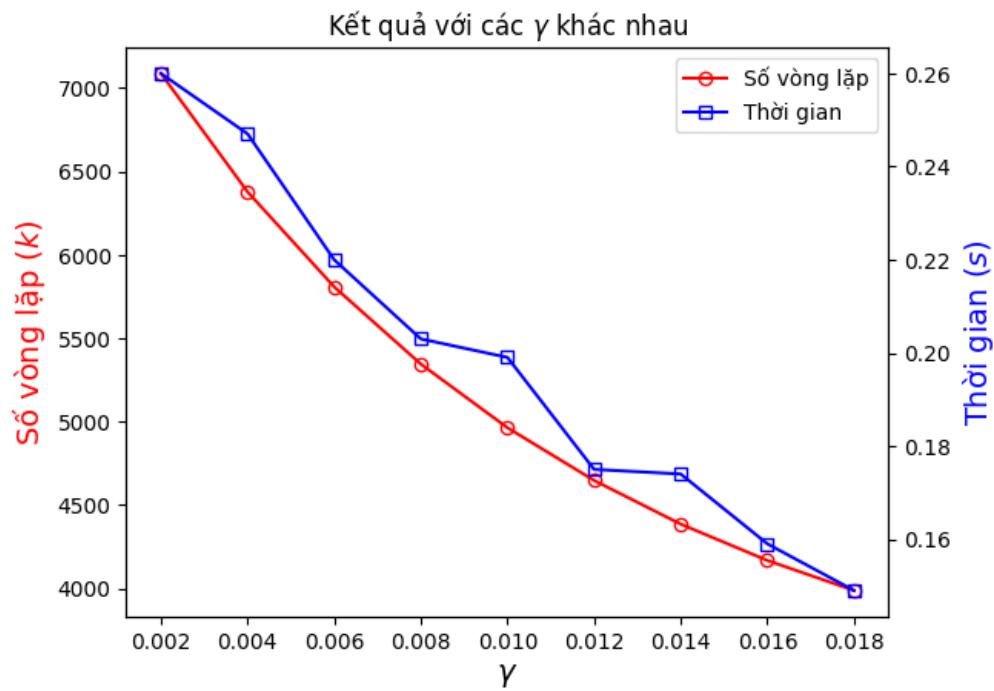
Hình 2.3: Đồ thị minh họa kết quả khi thay đổi β_k

Có thể thấy, khi càng tăng giá trị của β_k thì số bước lặp cũng như thời gian để thuật toán hội tụ cũng tăng.

Tiếp theo, ta thay đổi tham số γ với $0 < \gamma < \frac{1}{L} = \frac{1}{54} \approx 0.0185$. Các tham số còn lại giữ nguyên $\lambda = 0.20$, $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\beta_k = 0.25$ với điểm bắt đầu $x^0 = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 5)^\top$. Sai số $\varepsilon = 10^{-6}$.

γ	Số bước lặp	Thời gian
0.002	7088	0.260000s
0.004	6378	0.247037s
0.006	5808	0.219998s
0.008	5345	0.203006s
0.010	4963	0.199033s
0.012	4647	0.174994s
0.014	4385	0.174000s
0.016	4167	0.159012s
0.018	3987	0.148996s

Bảng 2.6: Kết quả chạy thuật toán với các γ khác nhau



Hình 2.4: Đồ thị minh họa kết quả khi thay đổi γ

Ngược lại với β_k , khi càng tăng giá trị của γ thì kết quả cho thấy số bước lặp và thời gian cần để thuật toán hội tụ lại giảm.

Chương 3

Áp dụng giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh

Chương này trình bày lại các kết quả chính về lý thuyết điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh. Sau đó áp dụng thuật toán đề xuất giải một bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính cụ thể bằng cách rời rạc hóa và đưa bài toán về bài toán chấp nhận tách. Tương tự với bài toán khôi phục ảnh, ta mô hình bài toán dưới dạng bài toán chấp nhận tách và giải bằng phương pháp đề xuất.

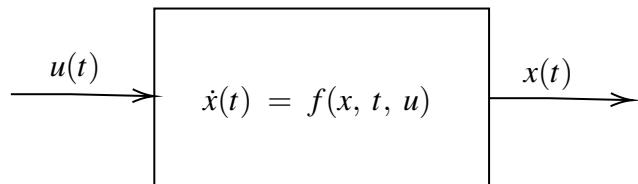
Kiến thức của chương được viết dựa trên cơ sở giáo trình [2] và một số tài liệu liên quan [15], [18], [24]. Kết quả số là do tác giả đồ án xây dựng và tính toán.

3.1 Bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính

Trong thực tiễn, nhiều bài toán đề cập các vấn đề kỹ thuật, điều khiển thường liên quan đến các hệ động lực mô tả bằng các phương trình toán học với thời gian liên tục hay rời rạc dạng

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad t \geq 0, \\ x(k+1) &= f(k, x(k), u(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

trong đó $x(\cdot)$ là biến trạng thái mô tả đối tượng đầu ra, $u(\cdot)$ là biến điều khiển mô tả đối tượng đầu vào của hệ thống. Các đối tượng điều khiển trong các mô hình điều khiển hệ thống được mô tả như những dữ liệu đầu vào có tác động quan trọng, ở mức độ này hoặc mức độ khác, có thể làm ảnh hưởng đến sự vận hành đầu ra của hệ thống. Như vậy, ta hiểu một hệ thống điều khiển là một mô hình toán học được mô tả bởi phương trình toán học biểu thị sự liên hệ vào-ra:



Hình 3.1: Hệ điều khiển

Một trong những mục đích chính của bài toán điều khiển hệ thống là tìm điều khiển (đầu vào) sao cho hệ thống (đầu ra) có những tính chất mà ta mong muốn. Thông thường, việc chuyển một hệ thống có điều khiển từ vị trí này sang vị trí khác có thể thực hiện bằng nhiều phương pháp dưới tác động bởi các điều khiển khác nhau. Căn cứ vào những mục đích cụ thể của hệ điều khiển (đầu ra), người ta xác định các bài toán điều khiển khác nhau.

Tính điều khiển được, tính ổn định và ổn định hóa

Tính điều khiển được

Tính điều khiển được nghiên cứu các lớp hàm điều khiển chấp nhận được sao cho dưới tác động của nó hệ thống được điều khiển về các vị trí mong muốn. Nói một cách cụ thể hơn: cho một hệ thống mô tả bởi phương trình điều khiển, ví dụ dạng $(0, 1)$, các vị trí mong muốn cần điều khiển của hệ thống, như trạng thái x_0, x_1 được cho trước, hãy tìm các điều khiển chấp nhận được $u(t)$ sao cho dưới tác dụng của điều khiển này, hệ thống $(0, 1)$ được điều khiển từ trạng thái x_0 tới trạng thái x_1 trong một thời gian (tùy ý hoặc cố định) nào đó, tức là, quỹ đạo của hệ thống $(0, 1)$ xuất phát từ trạng thái x_0 tại thời điểm t_0 sẽ

chuyển đến trạng thái x_1 tại thời điểm t_1 . Dựa vào mục đích điều khiển của hệ thống, người ta định nghĩa các khái niệm khác nhau của bài toán điều khiển được như: điều khiển được về 0, đạt được từ một vị trí cho trước, điều khiển được hoàn toàn, điều khiển được địa phương, ...

Tính điều khiển được hệ động lực được khởi xướng bởi những ý tưởng và kết quả quan trọng của R. Kalman [15] từ những năm 60, trong đó đã chứng minh một điều kiện đại số về tính điều khiển được của hệ tuyến tính đơn giản. Từ đó đến nay, bài toán điều khiển được đã được nghiên cứu và phát triển mạnh mẽ và trở thành một hướng quan trọng của lý thuyết điều khiển hệ động lực.

Bước đầu tiên trong các bài toán điều khiển hệ thống là xác định điều khiển chấp nhận được sao cho hệ thống chuyển một vị trí này tới một vị trí khác trong một thời gian hữu hạn nào đó. Đó chính là nội dung của bài toán điều khiển được. Tính điều khiển được là một tính chất khá quan trọng trong lý thuyết định tính các hệ động lực, đặc biệt là trong các bài toán điều khiển tối ưu.

Tính ổn định và ổn định hóa

Tính ổn định là một trong những tính chất quan trọng của lý thuyết định tính các hệ động lực và được sử dụng nhiều trong các lĩnh vực cơ hội, vật lý toán, kỹ thuật, kinh tế, ... Nói một cách hình tượng, một hệ thống được gọi là ổn định tại một trạng thái cân bằng nào đó nếu các nhiễu nhỏ của các dữ kiện hoặc cấu trúc ban đầu của hệ thống không làm cho hệ thống thay đổi nhiều so với trạng thái cân bằng đó. Sự nghiên cứu bài toán ổn định hệ thống được bắt đầu từ cuối thế kỷ XIX bởi nhà toán học Lyapunov [18] và đến nay đã trở thành một hướng nghiên cứu không thể thiếu trong lý thuyết phương trình vi phân, lý thuyết hệ thống và ứng dụng.

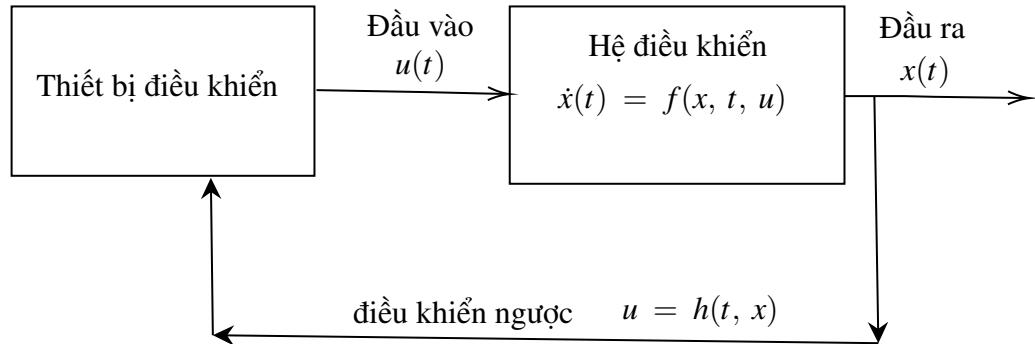
Từ những năm 60 của thế kỷ XX, song song với sự phát triển của lý thuyết điều khiển và do nhu cầu nghiên cứu các tính chất định tính của hệ thống điều khiển, người ta bắt đầu nghiên cứu tính ổn định các hệ điều khiển hay gọi là tính ổn định hóa của hệ điều khiển. Nói một cách giải thích, cho một hệ thống mô tả bởi phương trình toán học

điều khiển, ví dụ dạng $(0, 1)$, bài toán ổn định hóa của hệ là tìm hàm điều khiển (có thể phụ thuộc vào biến trạng thái mà người ta thường gọi là hàm điều khiển ngược (feedback control): $u(x) = h(t, x)$ sao cho hệ động lực

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), h(t, x(t))) = F(t, x(t))$$

là ổn định hoặc ổn định tiệm cận tại trạng thái cân bằng.

Trong các bài toán ổn định hóa tổng quát, hệ điều khiển $(0, 1)$ thường được mô hình hóa với các tác động của điều khiển ngược, của các nhiễu điều khiển, các thiết bị điều khiển và quan sát, ... Một mô hình điều khiển hệ động lực dưới tác động của điều khiển ngược thường được mô tả theo sơ đồ



Hình 3.2: Hệ điều khiển ngược

Như vậy mục đích của vấn đề ổn định hóa một hệ thống điều khiển là tìm các hàm điều khiển ngược (feedback controls) sao cho hệ thống đã cho ứng với điều khiển đó trở thành hệ thống ổn định được tại trạng thái cân bằng. Cơ sở toán học của bài toán ổn định hóa là lý thuyết ổn định Lyapunov. Dựa trên những kết quả đã biết của tính ổn định Lyapunov người ta đã nghiên cứu, phát triển và ứng dụng vào giải bài toán ổn định hóa các hệ thống điều khiển.

Điều khiển tối ưu

Bài toán điều khiển tối ưu. Cho một hệ thống chuyển động mô tả bởi một phương trình điều khiển toán học, ví dụ dạng $(0, 1)$. Việc điều khiển một phương trình điều khiển

một vị trí này tới một vị trí khác của hệ có thể được thực hiện bởi các phương pháp điều chỉnh đối tượng điều khiển khác nhau. Do đó nảy ra vấn đề thường gặp trong các bài toán thực tế là làm thế nào để chọn ra một phương pháp "tối ưu" (theo một quan điểm mong muốn quy định trước nào đó).

Cho một hệ thống $(0, 1)$ mô tả chuyển động cơ học của một vật thể (ôtô, máy bay, tên lửa, ...), bằng cách tăng hoặc giảm lực của động cơ, của nhiên liệu,... (đầu vào) người ta phải điều khiển hệ thống từ một vị trí x_0 tới một vị trí x_1 cho trước trong một thời gian ngắn nhất. Ví dụ nếu thời gian T không cố định trước thì ta muốn điều khiển lực kéo $u(t)$ sao cho toa xe chuyển từ x_0 tới x_1 trong thời gian T là ngắn nhất. Hoặc, với hệ thống $(0, 1)$ mô tả một quá trình (hay kế hoạch) sản xuất sản phẩm trong các bài toán kinh tế, bằng cách tìm các dữ kiện điều khiển (như giá thành một sản phẩm, tốc độ sản xuất một đơn vị sản phẩm trong một đơn vị thời gian, ...) người ta có thể điều khiển quá trình (hay kế hoạch) sản xuất sao cho trong một thời gian cố định cho trước sản phẩm sản xuất ra đạt được chất lượng cao nhất hoặc chi phí giá thành nhỏ nhất, ... Thông thường, đối tượng tối ưu của hệ thống được mô tả dưới dạng các hàm phụ thuộc vào biến điều khiển, gọi là phiếm hàm tối ưu như

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x, u) dt,$$

$$J(u) = \sum_{k=0}^N f^0(k, x(k), u(k)).$$

Trụ cột chính của bài toán điều khiển tối ưu là nguyên lý cực đại Pontriagin [21] - người mở đầu và có những đóng góp xuất sắc trong lý thuyết tối ưu. Nguyên lý cực đại là một biểu thức cực trị toán học mà từ đó ta có thể đoán nhận được điều khiển là tối ưu hay không. Nếu quá trình là tối ưu thì nó phải thỏa mãn một biểu thức cực đại, nói cách khác, nguyên lý cực đại đề xuất một phương pháp đoán nhận quá trình tối ưu. Nhiều công trình nổi tiếng về nguyên lý cực đại được nghiên cứu và phát triển dưới các dạng khác nhau cho nhiều loại hệ điều khiển khác nhau: các hệ động lực mô tả bằng các phương trình vi phân rời rạc, bằng các phương trình hàm, ...

Ví dụ minh họa

Xét bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2u, & t \in (0, 1), \\ x(0) = 0, x(1) = 1, \\ |u(t)| \leq 1, \\ J(x, u) := \int_0^1 u^2(t) dt \rightarrow \min_{u(t)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Bài toán trên có nghiệm điều khiển tối ưu là

$$u_{\text{opt}} = \frac{e^{-t}}{2 \sinh(1)}.$$

Chia khoảng $(0, 1)$ thành $N = 10^3$ đoạn với cỡ bước $\theta = \frac{1}{N} = 10^{-3}$ và thay $\dot{x}(t_i) \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{\theta}$. Bài toán (3.1) trở thành bài toán điều khiển tối ưu rời rạc

$$\begin{cases} x_{i+1} = (\theta + 1)x_i + 2\theta u, & t \in (0, 1), \\ x_0 = 0, x_N \in \mathbf{Q}, \\ u_i \in [-1, 1], \\ J(x, u) := \sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^2 \rightarrow \min_{u_i}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Trong đó $\mathbf{Q} = [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ với $\varepsilon = 10^{-6}$. Xây dựng ma trận \mathbf{F} kích thước $1 \times N$

$$\mathbf{F} = [F_0 \quad F_1 \quad \dots \quad F_{N-1}],$$

với $F_i = 2\theta(\theta + 1)^{N-i-1}$ ($i = 0, 1, \dots, N-2$) và $F_{N-1} = 2\theta$, và tập $\mathbf{C} = [-1, 1]^N$. Bài toán trở thành bài toán tìm phần tử có chuẩn nhỏ nhất trên tập nghiệm bài toán (SFP)

$$\text{Tìm } u^\dagger = \operatorname{argmin}\{\|u\| \mid u \in \mathbf{V}, \mathbf{F}u \in \mathbf{Q}\},$$

trong đó $u = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1})$ và $\|u\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^2$.

Hàm sai số được định nghĩa là

$$\Delta_k = \left(\sum_{i=0}^{N-1} (u_i^k - u_{\text{opt}}(t_i))^2 \right)^{1/2}.$$

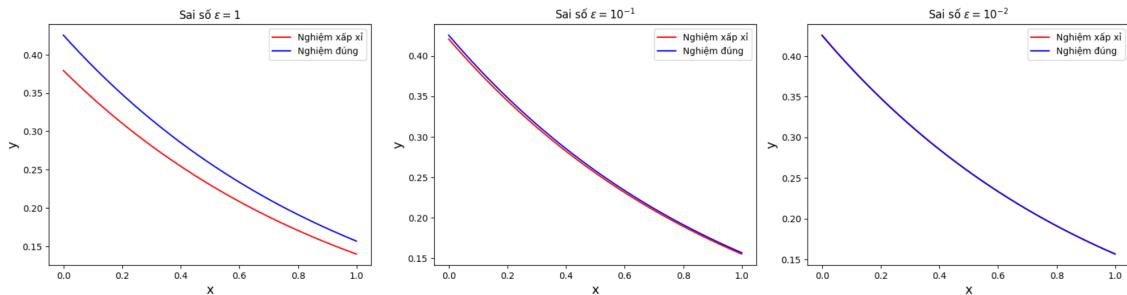
Ta tính được $\|\mathbf{F}\| \approx 0.1129$ nên ta chọn γ sao cho $0 < \gamma < 78.39$.

Ta sẽ giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính này bằng cách áp dụng Thuật toán 2.4.

Các dãy tham số được chọn lần lượt là

$$\alpha_k = \frac{1}{k+1}, \quad \beta_k = 0.5, \quad \gamma = 70.$$

Thuật toán cho kết quả hội tụ mạnh của nghiệm đúng của bài toán sau 2193 vòng lặp với sai số $\Delta_k = 2.10^{-3}$ là chấp nhận được với sai số rời rạc $O(\theta)$.

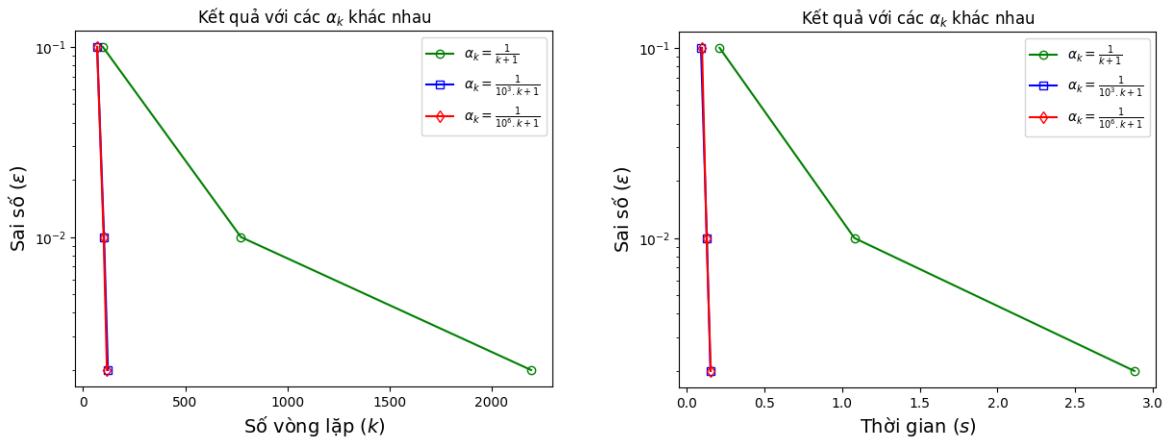


Hình 3.3: Kết quả chạy thuật toán với các sai số khác nhau

Bây giờ, ta thực hiện thay đổi α_k , các tham số còn lại không thay đổi $\beta_k = 0.5$, $\gamma = 70$.

α_k	Sai số (ϵ)	Số vòng lặp (k)	Thời gian (s)
$\alpha_k = \frac{1}{k+1}$	10^{-1}	97	0.2118
	10^{-2}	773	1.0793
	2.10^{-3}	2193	2.8810
$\alpha_k = \frac{1}{10^3 \cdot k + 1}$	10^{-1}	69	0.0920
	10^{-2}	103	0.1299
	2.10^{-3}	122	0.1529
$\alpha_k = \frac{1}{10^6 \cdot k + 1}$	10^{-1}	69	0.0989
	10^{-2}	101	0.1280
	2.10^{-3}	117	0.1549

Bảng 3.1: Kết quả với các α_k khác nhau



Tiếp tục ta thay đổi dãy tham số β_k , các tham số còn lại không thay đổi như sau
 $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$, $\gamma = 0.9$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

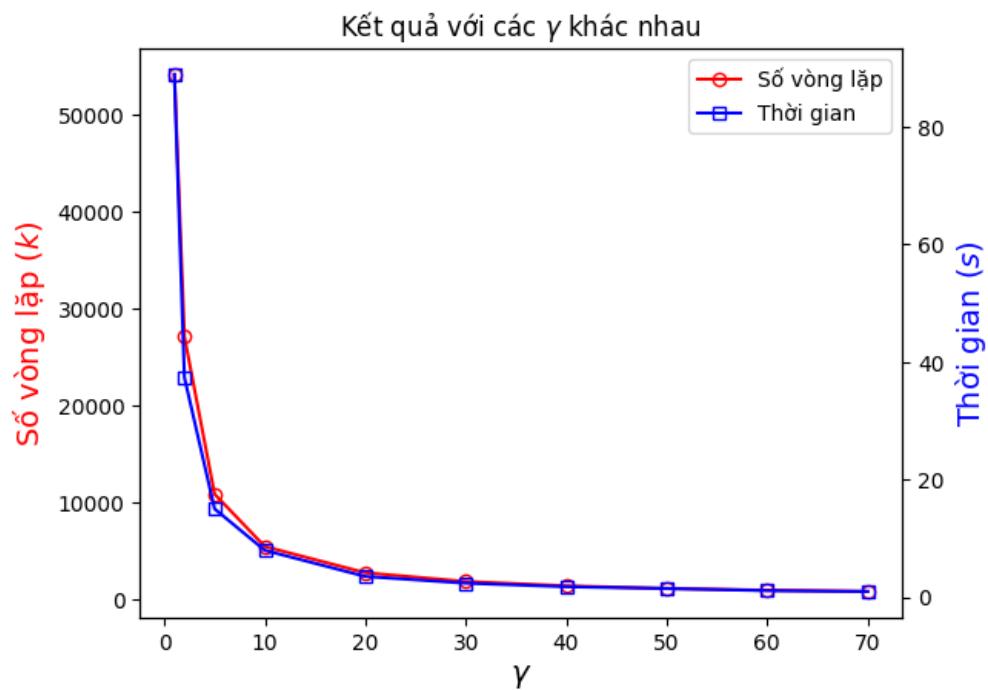
β_k	Số vòng lặp	Thời gian
0.2	773	0.9564s
0.4	598	1.0679s
0.6	598	1.3329s
0.8	598	1.0430s

Bảng 3.2: Kết quả với các β_k khác nhau

Cuối cùng, ta thay đổi tham số γ và các tham số còn lại giữ nguyên như sau
 $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$, $\beta_k = 0.5$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

γ	Số vòng lặp	Thời gian
1	54109	88.9013s
2	27055	37.3750s
5	10822	15.0415s
10	5411	7.9880s
20	2706	3.5511s
30	1804	2.4030s
40	1353	1.8030s
50	1083	1.4950s
60	902	1.1392s
70	773	0.9930s

Bảng 3.3: Kết quả với các γ khác nhau



Hình 3.5: Dáng điệu đồ thị của số vòng lặp và thời gian khi γ thay đổi

3.2 Bài toán khôi phục ảnh

Với một ảnh RGB có M điểm ảnh theo chiều rộng và N điểm ảnh theo chiều cao, mỗi điểm ảnh nhận giá trị trong khoảng từ 0 đến 255. Tất cả các điểm ảnh của ảnh gốc đầu tiên sẽ được thay đổi tỷ lệ về giữa khoảng 0 và 1. Đặt $D = M \times N$. Khi đó không gian Hilber thực \mathbb{R}^D sẽ được trang bị chuẩn Euclidean $\|\cdot\|_2$ và đặt $C = [0, 1]^D$. Để ước lượng xấp xỉ vectơ x là ảnh gốc trước khi bị làm mờ, ta xem xét bài toán cực tiểu lồi

$$\min_{x \in C} \|Fx - y\|_2, \quad (3.3)$$

trong đó, y là quan sát đã biết, F là toán tử tuyến tính phụ thuộc vào từng bài toán khôi phục ảnh. Bằng cách chọn $Q = \{y\}$, bài toán (3.3) sẽ trở thành bài toán chấp nhận tách (SFP). Từ đó, ta có thể áp dụng Thuật toán 2.3 hoặc 2.4 để giải bài toán khôi phục ảnh.

Các ảnh được làm mờ bằng mờ Gaussian với kích thước 9×9 và độ lệch chuẩn 4.

Để đánh giá chất lượng ảnh sau khi khôi phục, ta định nghĩa tỷ lệ tín hiệu nhiễu (signal-to-noise SNR) đo bằng decibel (dB) như sau

$$\text{SNR} := 20 \log_{10} \frac{\|\bar{x}\|}{\|x - \bar{x}\|_2},$$

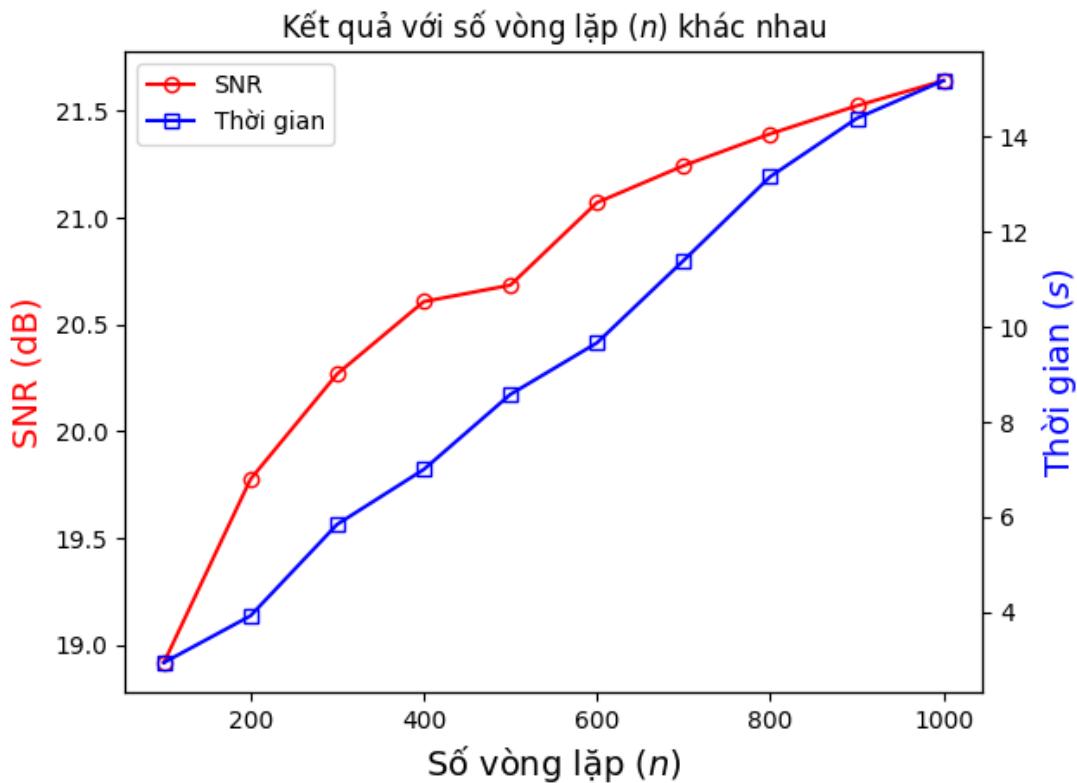
trong đó \bar{x} là ảnh gốc, và x là ảnh sau khi khôi phục. Có thể thấy, giá trị SNR lớn hơn thể hiện rằng ảnh được khôi phục là tốt hơn.

Ta sẽ thực hiện trên hai ảnh mẫu là ảnh cameraman và ảnh Lena với kích thước 256×256 được lấy từ thư viện các ảnh tiêu chuẩn cho khôi phục ảnh [24].

Đầu tiên là kết quả chạy thuật toán với hình ảnh cameraman. Chọn $\alpha_k = \frac{1}{10^6 \cdot k + 1}$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1$ và xấp xỉ đầu là vectơ chứa toàn số 1.

Số vòng lặp (n)	SNR (dB)	Thời gian (s)
100	18.9173	2.9312
200	19.7759	3.9160
300	20.2684	5.8415
400	20.6073	6.9977
500	20.6843	8.5790
600	21.0709	9.6648
700	21.2438	11.3990
800	21.3928	13.1646
900	21.5241	14.3930
1000	21.6417	15.1858

Bảng 3.4: Bảng số liệu kết quả chạy thuật toán



Hình 3.6: Kết quả chạy thuật toán



(a) Ảnh gốc



(b) Ảnh bị mờ



(c) Ảnh sau khi khôi phục
 $n = 100$



(d) Ảnh sau khi khôi phục
 $n = 500$

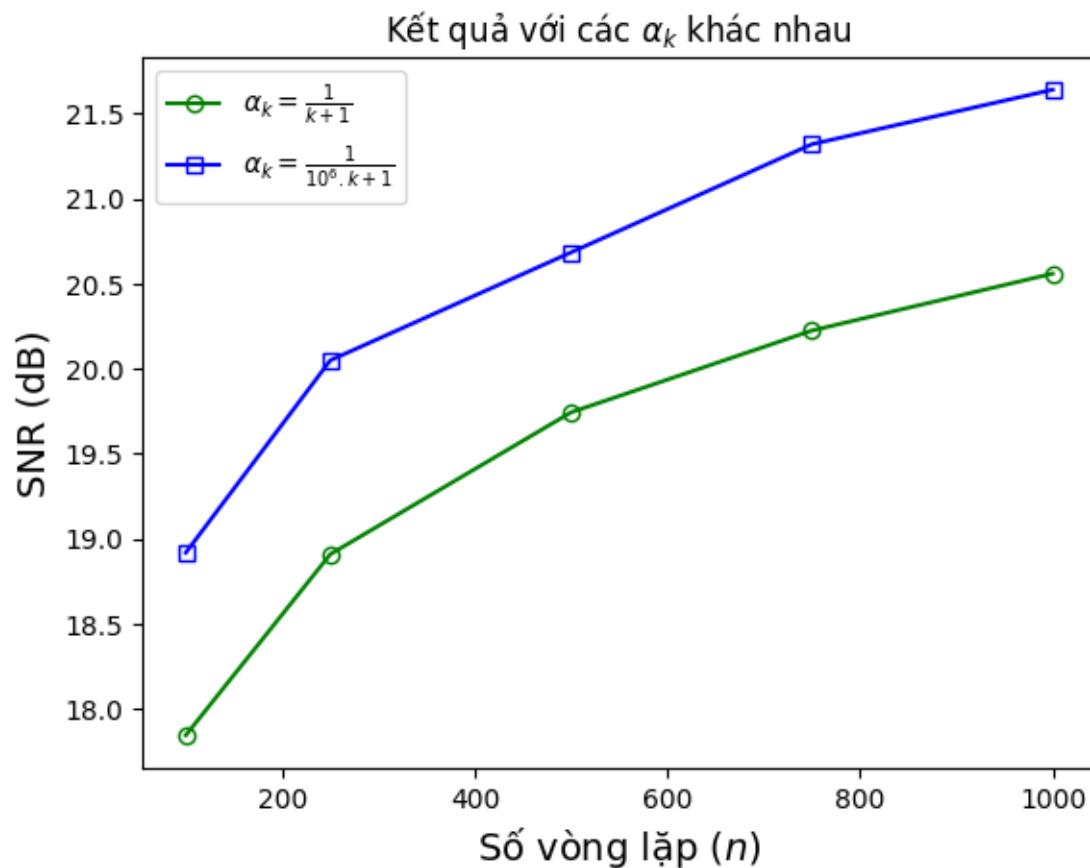


(e) Ảnh sau khi khôi phục
 $n = 1000$

Tiếp theo, ta thay đổi tham số α_k , các tham số còn lại được chọn như sau $\beta = 0.5$, $\gamma = 1$ và xấp xỉ đầu là véc tơ chứa toàn số 1.

α_k	Số vòng lặp (n)	SNR (dB)	Thời gian (s)
$\alpha_k = \frac{1}{k+1}$	100	17.8430	2.7397
	250	18.9082	4.7458
	500	19.7430	8.3375
	750	20.2243	12.2594
	1000	20.5596	16.0139
$\alpha_k = \frac{1}{10^6 \cdot k + 1}$	100	18.9173	2.9312
	250	20.0489	4.6269
	500	20.6843	8.5790
	750	21.3209	11.0955
	1000	21.6417	15.1858

Bảng 3.5: Bảng số liệu kết quả chạy thuật toán với các α_k khác nhau

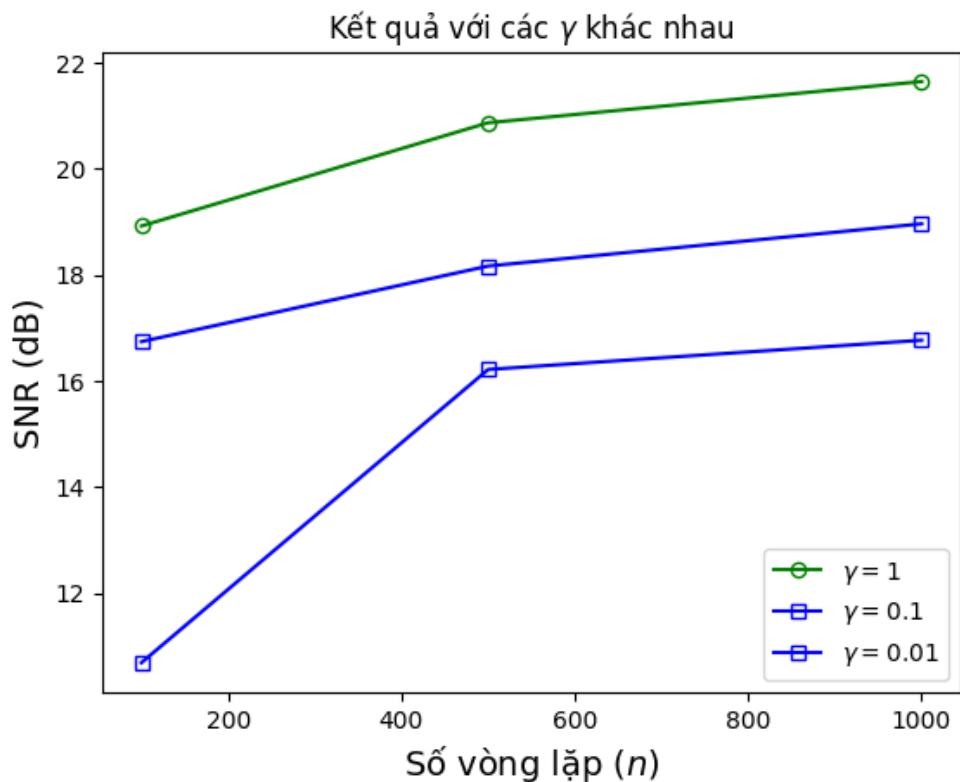


Hình 3.8: Kết quả của SNR với các α_k khác nhau

Chọn $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$, $\beta = 0.5$ và xấp xỉ đầu là véc tơ chứa toàn số 1.

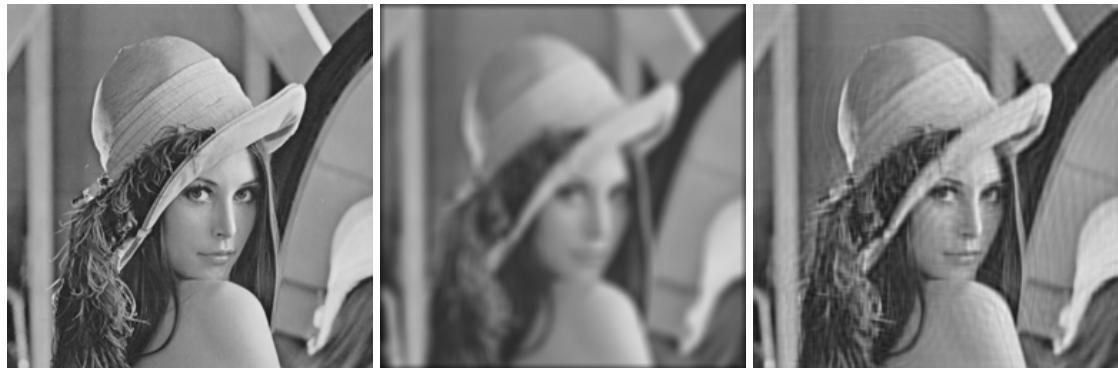
γ	Số vòng lặp (n)	SNR (dB)	Thời gian (s)
1	100	18.9173	2.8055
	500	20.8643	7.4414
	1000	21.6417	13.6212
0.1	100	16.7370	2.4890
	500	18.1622	7.2152
	1000	18.9588	13.3487
0.01	100	10.6815	2.4601
	500	16.2119	7.1979
	1000	16.7637	13.4303

Bảng 3.6: Bảng số liệu kết quả chạy thuật toán với các γ khác nhau



Hình 3.9: Kết quả của SNR với các γ khác nhau

Tương tự là kết quả chạy thuật toán với hình ảnh Lena. Chọn $\alpha_k = \frac{1}{k+1}$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 1$ và xấp xỉ đầu là véc tơ chứa toàn số 1. Thuật toán cho ra kết quả sau 15.1738 giây với chỉ số SNR = 23.3894.



(a) *Ảnh gốc*

(b) *Ảnh sau khi làm mờ*

(c) *Ảnh khôi phục*

Kết luận

1 Kết luận

Đồ án đã đạt được mục tiêu đề ra

Đồ án đã đề xuất thuật toán chiếu mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách và tính toán ví dụ số minh họa. Đồng thời, đồ án áp dụng vào việc giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh.

Kết quả của đồ án

1. Trình bày một số khái niệm cơ sở trong không gian Hilbert thực; giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán chấp nhận tách
2. Giới thiệu bài toán bất đẳng thức biến phân tách và đề xuất một thuật toán mới giải bài toán này cùng định lý chứng minh sự hội tụ.
3. Đưa ra ví dụ số minh họa trong không gian hữu hạn chiếu
4. Áp dụng giải bài toán điều khiển tối ưu tuyến tính và bài toán khôi phục ảnh.

Kỹ năng đạt được

1. Nâng cao khả năng tìm kiếm, đọc, dịch tài liệu chuyên ngành liên quan đến nội dung đồ án. Viết báo khoa học và có bài báo được đăng trên Tạp chí Khoa học Đại học Tân Trào.
2. Biết tổng hợp các kiến thức đã học và kiến thức trong tài liệu tham khảo để viết báo

cáo đồ án.

3. Chế bản đồ án bằng L^AT_EX.
4. Biết tóm tắt nội dung đồ án và biết trình bày một báo cáo khoa học.
5. Biết đưa ra ví dụ minh họa phù hợp với ý tưởng thuật toán.
6. Biết cài đặt thuật toán bằng ngôn ngữ lập trình hiện đại.

2 Hướng phát triển của đồ án trong tương lai

1. Nghiên cứu cải tiến bài toán bất đẳng thức biến phân tách đa tập hợp.
2. Nghiên cứu áp dụng giải bài toán khôi phục tín hiệu.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

- [1] Phạm Kỳ Anh, Trần Đức Long, *Hàm thực và Giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.
- [2] Vũ Ngọc Phát, *Nhập môn Lý thuyết điều khiển Toán học*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2001.
- [3] Hoàng Tụy, *Hàm thực và Giải tích hàm*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2018.

Tiếng Anh

- [4] R. P. Agarwal, D. O'Regan, D. R. Sahu, *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Springer, 2009.
- [5] T. V. Anh, L. D. Muu, *A projection-fixed point method for a class of bilevel variational inequalities with split fixed point constraints*, Optimization, 65(6), pp. 1229–1243, 2016.
- [6] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, New York: Springer, 2011.
- [7] Y. Censor, T. Elfving, *A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space*, Numer. Algorithms, 8, pp. 221–239, 1994.

- [8] Y. Censor, T. Elfving, N. Knop, T. Bortfeld, *The multiple-sets split feasibility problem and its applications for inverse problem*, Inverse Probl, 21, pp. 2071-2084, 2005.
- [9] Y. Censor, T. Bortfeld, B. Martin, A. Trofimov *A unified approach for inverse problems in intensity modulated radiation therapy*, Phys. Med. Biol, 51, pp. 2353-2365, 2006.
- [10] Y. Censor, A. Segal, *Iterative projection methods in biomedical inverse problems*, In: Y. Censor, M. Jiang, A.K. Louis, Mathematical Methods in Biomedical Imaging and Intensity-Modulated Therapy, IMRT, Edizioni della Norale, pp. 65–96, Pisa, 2008.
- [11] Y. Censor, A. Gibali, S. Reich, *The Split Variational Inequality Problem*, The Technion - Israel Institute of Technology, Haifa, Israel, 2010.
- [12] Y. Censor, A. Gibali and S. Reich, *Algorithms for the split variational inequality problem*, Numer. Algorithms, 59, pp. 301–323, 2012.
- [13] C. E. Chidume, *Geometric properties of Banach spaces and nonlinear iterations*, Springer Verlag Series, Lecture Notes in Mathematics, ISBN 978-1-84882-189-7, 2009.
- [14] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Stud. Adv. Math 28. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [15] R. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Transactions of the ASME, Journal of Basic Engineering, 82:34–45, 1960.
- [16] I. V. Konnov, E. Laitinen, *Theory and applications of variational inequalities*, Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science, University of Oulu, ISBN 951-42-6688-9, 2002.
- [17] I. V. Konnov, *Equilibrium models and variational inequalities*, Elsevier, Amsterdam, 2007.

- [18] A. M. Lyapunov, *The General Problem of the Stability of Motion* (In Russian), Doctoral dissertation, Univ. Kharkov 1892 English translations.
- [19] P. E. Maingé, *Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization*, Set-Valued Anal, 16, pp. 899–912, 2008.
- [20] A. Nagurney, *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, second and revised edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1999.
- [21] L. Pontryagin, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, K. N. Tririgoff, Transl., L. W. Neustadt, Ed., Wiley, New York, 1962.
- [22] T. D. Thang, V. T. T. Loan, *A new projection algorithm for solving the split variational inequality problem in Hilbert spaces*, Journal of Tan Trao University (SJTTU) (ISSN: 2354-1431).
- [23] H. K. Xu, *Strong convergence of an iterative method for nonexpansive and accretive operators*, J. Math. Anal. Appl, 314, pp. 631–643, 2006.
- [24] The USC-SIPI Image Database — A large collection of standard test images, <https://sipi.usc.edu/database/>.

Phụ lục

Bài báo xuất bản trên tạp chí Tạp chí Khoa học Đại học Tân Trào năm 2023



A NEW PROJECTION ALGORITHM FOR SOLVING THE SPLIT VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEM IN HILBERT SPACES

Truong Dang Thang^{1,*}, Vu Thi Thu Loan²

¹ School of Applied Mathematics and Informatics, Hanoi University of Science and Technology

² University of Agriculture and Forestry, Thai Nguyen University

*Email address: thang.tdk64@gmail.com

<https://doi.org/10.51453/2354-1431/2023/950>

Article info

Received: 6/3/2023

Revised: 10/4/2023

Accepted: 15/5/2023

Keywords:

Split variational inequality problem, split feasibility problem, Hilbert spaces, metric projection.

Abstract:

This paper proposes a new algorithm for solving the split variational inequality problem in Hilbert spaces. In order to solve this problem, we propose a new algorithm and establish a strong convergence theorem for it. Compared with the work by Censor et al. (Numer. Algor., 59:301-323, 2012), the new algorithm gives strong convergence results. It shows that the iterative method converges strongly under weaker assumptions than the ones used recently. Some numerical examples are also given to illustrate the convergence analysis of the considered algorithm.



MỘT THUẬT TOÁN CHIẾU MỚI GIẢI BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TÁCH TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Trương Đăng Thắng^{1,*}, Vũ Thị Thu Loan²

¹ Viện Toán ứng dụng và Tin học, Đại học Bách khoa Hà Nội

² Trường Đại học Nông Lâm, Đại học Thái Nguyên

*Email address: thang.tdk64@gmail.com

<https://doi.org/10.51453/2354-1431/2023/950>

Thông tin bài viết

Ngày nhận bài: 6/3/2023

Ngày sửa bài: 10/4/2023

Ngày duyệt đăng: 15/5/2023

Từ khóa:

Bài toán bất đẳng thức biến phân tách, bài toán chấp nhận tách, không gian Hilbert, phép chiếu mè-tric.

Tóm tắt:

Bài báo đề xuất một thuật toán mới giải bài toán bất đẳng thức biến phân tách trong không gian Hilbert. Để giải bài toán này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới và thiết lập sự hội tụ mạnh. So sánh với thuật toán của Censor và các cộng sự (Numer. Algor., 59:301-323, 2012), thuật toán mới này cho sự hội tụ mạnh. So với một số kết quả gần đây, thuật toán của chúng tôi cho sự hội tụ mạnh dưới các điều kiện yếu hơn. Một số ví dụ cũng được đưa ra để minh họa cho sự hội tụ giải tích của thuật toán đề xuất.

1 INTRODUCTION

The split variational inequality problem (SVIP), which was introduced first by Censor et al. [1]

$$\text{find } u^* \in \Omega := S_{(A,C)} \cap F^{-1}(S_{(B,Q)}), \quad (\text{SVIP})$$

where $C \subseteq \mathcal{H}_1$ and $Q \subseteq \mathcal{H}_2$ are nonempty closed convex subsets, $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ is a bounded linear mapping. $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ and $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ are single-valued operators, $S_{(A,C)}$ and $S_{(B,Q)}$ denote as the set of all solutions of the variational inequality problems

$$\langle Au^*, u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in C \quad (\text{VIP}(A, C))$$

and $\langle Bu^*, u - u^* \rangle \geq 0, \forall u \in Q$, respectively.

In this paper, using the viscosity approximation method [2], as well as a modification of the CQ method [3] we propose a new convergence strongly algorithm for solving the (SVIP).

2 PRELIMINARIES

In this section, we introduce some mathematical symbols, definitions, and lemmas which can be used in the proof of our main result.

Let \mathcal{H} be a real Hilbert space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and norm $\|\cdot\|$ and C be a nonempty, closed, and convex subset of \mathcal{H} . In what follows, we write $x^k \rightharpoonup x$ to indicate that the sequence $\{x^k\}$ con-

verges weakly to x while $x^k \rightarrow x$ indicates that the sequence $\{x^k\}$ converges strongly to x . It is known that in a Hilbert space \mathcal{H} ,

$$\begin{aligned} 2\langle x, y \rangle &= \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2, \end{aligned} \quad (2.1)$$

and

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 &= \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

for all $x, y \in \mathcal{H}$ and $\lambda \in [0, 1]$ (see, for example [4, Lemma 2.13], [5]). For every point $x \in \mathcal{H}$ there exists a unique nearest point in C , denoted by $P_C x$. This point satisfies $\|x - P_C x\| \leq \|x - u\|$ for all $u \in C$. The mapping $P_C : \mathcal{H} \rightarrow C$ is called the metric projection of \mathcal{H} onto C .

Lemma 2.1 (see, [6]). *For given $x \in \mathcal{H}$ and $y \in C$, $y = P_C x$ if and only if $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$ for all $z \in C$.*

Definition 2.1. An operator $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ is called a contraction operator with the contraction coefficient $\tau \in [0, 1]$ if $\|Tx - Ty\| \leq \tau\|x - y\|$ for all $x, y \in \mathcal{H}$.

It is easy to see that, if T is a contraction operator, then $P_C T$ is a contraction operator too. If $\tau \geq 0$ we have τ -Lipschitz continuous operator.

Definition 2.2. An operator $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ is called an η -inverse strongly monotone operator with constant $\eta > 0$ if $\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \eta\|Ax - Ay\|^2$ for all $x, y \in \mathcal{H}$.

It is easy to see that, if A is an η -inverse strongly monotone operator, then $I^\mathcal{H} - \lambda A$ is a nonexpansive mapping for $\lambda \in (0, 2\eta]$, where $I^\mathcal{H}$ is the identity operator on \mathcal{H} .

Lemma 2.2 (see [1]). *Let $A : C \rightarrow \mathcal{H}$ be η -inverse strongly monotone on C and $\lambda > 0$ be a constant satisfying $0 < \lambda \leq 2\eta$. Define the mapping $T : C \rightarrow C$ by taking*

$$Tx = P_C(I^\mathcal{H} - \lambda A)x \quad \text{for all } x \in C. \quad (2.3)$$

Then T is nonexpansive on C , and $\text{Fix}(T) = S_{(A, C)}$, where $\text{Fix}(T) := \{x \in C \mid Tx = x\}$ is the set of fixed points of T .

Lemma 2.3 (see, [6]). *Assume that T be a nonexpansive mapping of a closed and convex subset C of a Hilbert space \mathcal{H} into \mathcal{H} . Then the mapping $I^\mathcal{H} - T$*

is demiclosed on C ; that is, whenever $\{x^k\}$ is a sequence in C which weakly converges to some point $u^ \in C$ and the sequence $\{(I^\mathcal{H} - T)x^k\}$ strongly converges to some y , it follows that $(I^\mathcal{H} - T)u^* = y$.*

From Lemma 2.3, if $x^k \rightharpoonup u^*$ and $(I^\mathcal{H} - T)x^k \rightarrow 0$, then $u^* \in \text{Fix}(T)$.

Lemma 2.4 (Maingé, [7]). *Let $\{s_k\}$ be a real sequence which does not decrease at infinity in the sense that there exists a subsequence $\{s_{k_n}\}$ such that $s_{k_n} \leq s_{k_{n+1}}$ for all $n \geq 0$. Define an integer sequence by $\nu(k) := \max\{k_0 \leq n \leq k \mid s_n < s_{n+1}\}$, $k \geq k_0$. Then $\nu(k) \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$ and for all $k \geq k_0$, we have $\max\{s_{\nu(k)}, s_k\} \leq s_{\nu(k)+1}$.*

Lemma 2.5 (see, [8]). *Let $\{s_k\}$ be a sequence of nonnegative numbers satisfying the condition $s_{k+1} \leq (1 - b_k)s_k + b_k c_k$, $k \geq 0$, where $\{b_k\}$ and $\{c_k\}$ are sequences of real numbers such that*

- (i) $\{b_k\} \subset (0, 1)$ for all $k \geq 0$ and $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$,
- (ii) $\limsup_{k \rightarrow \infty} c_k \leq 0$.

Then, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$.

3 MAIN RESULTS

We consider the (SVIP) under the following conditions.

Assumption 3.1.

(A1) $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ is an η_A -inverse strongly monotone on \mathcal{H}_1 .

(A2) $B : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_2$ is an η_B -inverse strongly monotone on \mathcal{H}_2 .

(A3) $F : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ is a bounded linear operator.

(A4) $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ is a contraction mapping with the contraction coefficient $\tau \in [0, 1)$.

(A4) The solution set Ω of the (SVIP) is nonempty.

We also consider some conditions.

$$\{\alpha_k\} \subset (0, 1) \quad \text{for all } k \geq 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty; \quad (\alpha)$$

$$0 < \lambda \leq 2\eta; \quad \eta = \min\{\eta_A, \eta_B\}; \quad (\lambda)$$

$$0 < \gamma < \frac{1}{\|F\|^2}. \quad (\gamma)$$

We present a algorithm for solving the (SVIP). This is our new algorithm.

Algorithm 3

Step 0. Select the initial point $x^0 \in \mathcal{H}_1$ and the sequence $\{\beta_k\} \subset [c, d] \subset (0, 1) \forall k \geq 0$, the sequences $\{\alpha_k\}$, λ , and γ such that the conditions (a), (x), and (y) are satisfied. Set $k := 0$.

Step 1. Compute

$$u^k = \beta_k x^k + (1 - \beta_k) P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A x^k).$$

Step 2. Compute $v^k = P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k))$.

Step 3. Compute $w^k = u^k + \gamma F^*(v^k - F u^k)$.

Step 4. Compute $x^{k+1} = \alpha_k T(x^k) + (1 - \alpha_k) w^k$.

Step 5. Set $k := k + 1$ and go to **Step 1**.

Theorem 3.1. Suppose that all conditions in Assumption 3.1 are satisfied. Then the sequence $\{x^k\}$ generated by Algorithm 3 converges strongly to the unique solution $u^* \in \Omega$ of the VIP($I^{\mathcal{H}_1} - T, \Omega$).

Proof. Since T is a contraction mapping, $P_\Omega T$ is a contraction too. By Banach contraction mapping principle, there exists a unique point $u^* \in \Omega$ such that $P_\Omega T u^* = u^*$. By Lemma 2.1, we obtain u^* is the unique solution to the VIP($I^{\mathcal{H}_1} - T, \Omega$).

1. Claim the sequence $\{x^k\}$ is well defined.

Indeed, let $u \in \Omega$. Since $u \in \Omega$, $u \in S_{(A,C)}$. It follows from (x) and Lemma 2.2 that $u = P_C^{\mathcal{H}_1}(I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)u$. From Step 1 in Algorithm 3, the nonexpansive property of $P_C^{\mathcal{H}_1}(I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)$, $\{\beta_k\} \subset [c, d] \subset (0, 1) \forall k \geq 0$, and (2.2), we have that

$$\begin{aligned} \|u^k - u\|^2 &= \left\| \beta_k(x^k - u) + (1 - \beta_k) \right. \\ &\quad \left[P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A x^k) - u \right] \left\|^2 \right. \\ &= \left\| \beta_k(x^k - u) + (1 - \beta_k) \right. \\ &\quad \left[P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A x^k) - P_C^{\mathcal{H}_1}(u - \lambda A u) \right] \left\|^2 \right. \\ &= \beta_k \|x^k - u\|^2 + (1 - \beta_k) \|x^k - u\|^2 - \beta_k(1 - \beta_k) \\ &\quad \|x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A x^k)\|^2 \left. \right] \\ &= \|x^k - u\|^2 - \beta_k(1 - \beta_k) \|x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A x^k)\|^2 \\ &\leq \|x^k - u\|^2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

of adjoint operator F^* , and (2.1) that

$$\begin{aligned} \|w^k - u\|^2 &= \|u^k + \gamma F^*(v^k - F u^k) - u\|^2 \\ &= \|u^k - u\|^2 + \gamma^2 \|F^*(v^k - F u^k)\|^2 \\ &\quad + 2\gamma \langle u^k - u, F^*(v^k - F u^k) \rangle \\ &= \|u^k - u\|^2 + \gamma^2 \|F\|^2 \|v^k - F u^k\|^2 \\ &\quad + 2\gamma \langle F u^k - F u, v^k - F u^k \rangle. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Using the convexity of $\|\cdot\|^2$ and Step 2 in Algorithm 3, we have

$$\|v^k - F u^k\|^2 = \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \right\|^2. \tag{3.4}$$

Since $u \in \Omega$, $F u \in S_{(B,Q)}$. It follows from Lemma 2.2 that $F u = P_Q^{\mathcal{H}_2}(I^{\mathcal{H}_2} - \lambda B)F u$. From Step 2 in Algorithm 3, the nonexpansive property of $P_Q^{\mathcal{H}_2}(I^{\mathcal{H}_2} - \lambda B)$, we have

$$\begin{aligned} \langle F u^k - F u, v^k - F u^k \rangle &= \langle F u^k - F u, \\ &\quad P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u \right\|^2 - \left\| F u^k - F u \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \right\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k)) - P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u - \lambda B(F u)) \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. - \left\| F u^k - F u \right\|^2 - \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \right\|^2 \right) \\ &\leq -\frac{1}{2} \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \right\|^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

It follows from (3.3)–(3.5) and (y) that

$$\begin{aligned} \|w^k - u\|^2 &\leq \|u^k - u\|^2 - \gamma(1 - \gamma \|F\|^2) \\ &\quad \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(F u^k - \lambda B(F u^k)) - F u^k \right\|^2 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\leq \|u^k - u\|^2. \tag{3.7}$$

It follows from the convexity of the norm function $\|\cdot\|$ on \mathcal{H}_1 , the contraction property of T with the contraction coefficient $\tau \in [0, 1]$, (3.2), (3.7), the

It follows from Step 3 in Algorithm 3, the property

condition (α), and Step 4 in Algorithm 3 that

$$\begin{aligned}
 \|x^{k+1} - u\| &= \|\alpha_k(Tx^k - u) + (1 - \alpha_k)(w^k - u)\| \\
 &\leq \alpha_k(\|Tx^k - Tu\| + \|Tu - u\|) \\
 &\quad + (1 - \alpha_k)\|w^k - u\| \\
 &\leq \tau\alpha_k\|x^k - u\| + \alpha_k\|Tu - u\| \\
 &\quad + (1 - \alpha_k)\|x^k - u\| \\
 &= [1 - (1 - \tau)\alpha_k]\|x^k - u\| \\
 &\quad + (1 - \tau)\alpha_k \frac{\|Tu - u\|}{1 - \tau} \\
 &\leq \max \left\{ \|x^k - u\|, \frac{\|Tu - u\|}{1 - \tau} \right\} \\
 &\vdots \\
 &\leq \max \left\{ \|x^0 - u\|, \frac{\|Tu - u\|}{1 - \tau} \right\}.
 \end{aligned}$$

This implies that the sequence $\{x^k\}$ is bounded. Since P_C and P_Q are nonexpansive mappings and F is the bounded linear operator, we also have the sequences $\{u^k\}$, $\{v^k\}$, and $\{w^k\}$ are bounded.

2. For any $u \in \Omega$, the following inequality holds:

$$s_{k+1} \leq [1 - (1 - \tau)\alpha_k]s_k + \alpha_k e_k, \quad (3.8)$$

where $s_k := \|x^k - u\|^2$ and $e_k := 2\langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle$.

Indeed, from the convexity of $\|\cdot\|^2$, Step 4 in Algorithm 3, (3.1), (3.6), and the condition (α), we get

$$\begin{aligned}
 \|x^{k+1} - u\|^2 &= \|\alpha_k(Tx^k - u) + (1 - \alpha_k)(w^k - u)\|^2 \\
 &\leq \alpha_k\|Tx^k - u\|^2 + (1 - \alpha_k)\|w^k - u\|^2 \\
 &\leq \alpha_k\|Tx^k - u\|^2 + \|u^k - u\|^2 \\
 &\quad - \gamma(1 - \gamma\|F\|^2)\|P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k\|^2 \\
 &\leq \alpha_k\|Tx^k - u\|^2 + \|x^k - u\|^2 - \gamma(1 - \gamma\|F\|^2) \\
 &\quad \left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k \right\|^2 \\
 &\quad - \beta_k(1 - \beta_k)\left\| x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A(x^k)) \right\|^2.
 \end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
 &\gamma(1 - \gamma\|F\|^2)\left\| P_Q^{\mathcal{H}_2}(Fu^k - \lambda B(Fu^k)) - Fu^k \right\|^2 \\
 &\quad + \beta_k(1 - \beta_k)\left\| x^k - P_C^{\mathcal{H}_1}(x^k - \lambda A(x^k)) \right\|^2 \\
 &\leq (\|x^k - u\|^2 - \|x^{k+1} - u\|^2) + \alpha_k\|Tx^k - u\|^2.
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Next, from Step 4 in Algorithm 3 and the contraction property of T with the contraction coefficient

$\tau \in [0, 1]$, we have that

$$\begin{aligned}
 \|x^{k+1} - u\|^2 &= \langle \alpha_k(Tx^k - u) + (1 - \alpha_k)(w^k - u), \\
 &\quad x^{k+1} - u \rangle \\
 &= (1 - \alpha_k)\langle w^k - u, x^{k+1} - u \rangle \\
 &\quad + \alpha_k\langle Tx^k - u, x^{k+1} - u \rangle \\
 &\leq \frac{1 - \alpha_k}{2}(\|w^k - u\|^2 + \|x^{k+1} - u\|^2) \\
 &\quad + \alpha_k\langle Tx^k - Tu, x^{k+1} - u \rangle \\
 &\quad + \alpha_k\langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle \\
 &\leq \frac{1 - \alpha_k}{2}(\|w^k - u\|^2 + \|x^{k+1} - u\|^2) \\
 &\quad + \frac{\alpha_k}{2}(\tau\|x^k - u\|^2 + \|x^{k+1} - u\|^2) \\
 &\quad + \alpha_k\langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle.
 \end{aligned}$$

This implies that

$$\begin{aligned}
 \|x^{k+1} - u\|^2 &\leq (1 - \alpha_k)\|w^k - u\|^2 \\
 &\quad + \alpha_k\tau\|x^k - u\|^2 + 2\alpha_k\langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle.
 \end{aligned} \quad (3.10)$$

From (3.2), (3.7), and (3.10), we obtain

$$\begin{aligned}
 \|x^{k+1} - u\|^2 &\leq [1 - (1 - \tau)\alpha_k]\|x^k - u\|^2 \\
 &\quad + 2\alpha_k\langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle.
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Put $s_k := \|x^k - u\|^2$ and $e_k := 2\langle Tu - u, x^{k+1} - u \rangle$, then the inequality (3.11) can be rewritten as (3.8).

3. We will show $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^k - u^*\| = 0$, where $u^* = P_\Omega Tu^*$.

We consider two possible cases.

Case 1. There exists an integer $k_0 \geq 0$ such that $\|x^{k+1} - u^*\| \leq \|x^k - u^*\|$ for all $k \geq k_0$. Then, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^*\|$ exists. Since the sequence $\{x^k\}$ is bounded, the sequence $\{Tx^k\}$ is also bounded. From the boundedness of the sequence $\{Tx^k\}$, (α), (λ), and (γ), it follows from (3.9) that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|[I^{\mathcal{H}_1} - P_C^{\mathcal{H}_1}(I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)]x^k\| = 0 \quad (3.12)$$

and

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|[I^{\mathcal{H}_2} - P_Q^{\mathcal{H}_2}(I^{\mathcal{H}_2} - \lambda B)]Fu^k\| = 0. \quad (3.13)$$

From the fact that (3.13) and (3.4), we get

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v^k - Fu^k\| = 0. \quad (3.14)$$

From Step 3 in Algorithm 3, the property of adjoint operator F^* , and (3.14), we obtain

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow \infty} \|w^k - u^k\| &= \gamma \lim_{k \rightarrow \infty} \|F^*(v^k - Fu^k)\| = 0.
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

From Step 1 in Algorithm 3 and (3.13), we get

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^k\| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - \beta_k) \|x^k - P_C^{\mathcal{H}_1} (I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)x^k\| = 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

It follows from (3.16) and (3.15) that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - w^k\| = 0. \quad (3.17)$$

Using the boundedness of $\{w^k\}$ and $\{Tx^k\}$, Step 4 in Algorithm 3, and the condition (a), we also have $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - w^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k \|Tx^k - w^k\| = 0$. When combined with (3.17), this implies that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0. \quad (3.18)$$

Now we show that

$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{k+1} - u^* \rangle \leq 0$. Indeed, suppose that $\{x^{k_n}\}$ is a subsequence of $\{x^k\}$ such that

$$\begin{aligned} & \limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^k - u^* \rangle \\ &= \lim_{k_n \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{k_n} - u^* \rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Since $\{x^{k_n}\}$ is bounded, there exists a subsequence $\{x^{k_{n_l}}\}$ of $\{x^{k_n}\}$ which converges weakly to some points u^\dagger . Without loss of generality, we may assume that $x^{k_n} \rightharpoonup u^\dagger$. We will prove that $u^\dagger \in \Omega$. Indeed, from (3.12), Lemma 2.2 and Lemma 2.3, we obtain $u^\dagger \in S_{(A,C)}$. Moreover, since F is a bounded linear operator, $Fx^{k_n} \rightharpoonup Fu^\dagger$. Using (3.13), Lemma 2.2 and Lemma 2.3, we also obtain $Fu^\dagger \in S_{(B,C)}$. Hence, $u^\dagger \in \Omega$. So, from $u^* = P_\Omega Tu^*$, (3.19), and Lemma 2.1 we deduce that $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^k - u^* \rangle = \langle Tu^* - u^*, u^\dagger - u^* \rangle \leq 0$, which combined with (3.18) gives

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{k+1} - u^* \rangle \leq 0. \quad (3.20)$$

Now, the inequality (3.8) with u replaced by u^* , can be rewritten in the form $s_{k+1} \leq (1 - b_k)s_k + b_k c_k$, where $b_k = (1 - \tau)\alpha_k$ and $c_k = \frac{2}{1-\tau} \langle Tu^* - u^*, x^{k+1} - u^* \rangle$. Since the condition (a) and $\tau \in [0, 1]$, $\{b_k\} \subset (0, 1)$ and $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$. Consequently, from $\tau \in [0, 1]$ and (3.20), we have that $\limsup_{k \rightarrow \infty} c_k \leq 0$. Finally, by Lemma 2.5, $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$. Hence, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^*\| = 0$.

Case 2. There exists a subsequence $\{k_n\}$ of $\{k\}$ such that $\|x^{k_n} - u^*\| \leq \|x^{k_n+1} - u^*\|$ for all $n \geq 0$. Hence, by Lemma 2.4, there exists an integer, non-decreasing sequence $\{\nu(k)\}$ for $k \geq k_0$ (for some k_0

large enough) such that $\nu(k) \rightarrow \infty$ as $k \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} & \|x^{\nu(k)} - u^*\| \leq \|x^{\nu(k)+1} - u^*\| \quad \text{and} \\ & \|x^k - u^*\| \leq \|x^{\nu(k)+1} - u^*\| \quad \text{for each } k \geq 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

From (3.8) with u replaced by u^* and k replaced by $\nu(k)$, we have

$$\begin{aligned} 0 &< \|x^{\nu(k)+1} - u^*\|^2 - \|x^{\nu(k)} - u^*\|^2 \\ &\leq 2\alpha_{\nu(k)} \langle Tu^* - u^*, x^{\nu(k)+1} - u^* \rangle. \end{aligned}$$

Since $\alpha_{\nu(k)} \rightarrow 0$ and the boundedness of $\{x^{\nu(k)}\}$, we conclude that

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|x^{\nu(k)+1} - u^*\|^2 - \|x^{\nu(k)} - u^*\|^2) = 0. \quad (3.22)$$

By a similar argument to Case 1, we obtain $\lim_{k \rightarrow \infty} \| [I^{\mathcal{H}_1} - P_C^{\mathcal{H}_1} (I^{\mathcal{H}_1} - \lambda A)] x^{\nu(k)} \| = 0$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \| [I^{\mathcal{H}_2} - P_Q^{\mathcal{H}_2} (I^{\mathcal{H}_2} - \lambda B)] F u^{\nu(k)} \| = 0$. Also we get

$$\begin{aligned} \|x^{\nu(k)+1} - u^*\|^2 &\leq [1 - (1 - \tau)\alpha_{\nu(k)}] \|x^{\nu(k)} - u^*\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_{\nu(k)} \langle Tu^* - u^*, x^{\nu(k)+1} - u^* \rangle, \end{aligned}$$

where $\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{\nu(k)+1} - u^* \rangle \leq 0$. Since the first inequality in (3.21) and $\alpha_{\nu(k)} > 0$, we have that $(1 - \tau)\|x^{\nu(k)} - u^*\|^2 \leq 2\langle Tu^* - u^*, x^{\nu(k)+1} - u^* \rangle$. Thus, from

$\limsup_{k \rightarrow \infty} \langle Tu^* - u^*, x^{\nu(k)+1} - u^* \rangle \leq 0$ and $\tau \in [0, 1]$, we get $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\nu(k)} - u^*\|^2 = 0$. This together with (3.22) implies that $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{\nu(k)+1} - u^*\|^2 = 0$. Which together with the second inequality in (3.21) implies that $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - u^*\| = 0$.

Since T is a contraction mapping, $P_\Omega T$ is a contraction too. By Banach contraction mapping principle, there exists a unique point $u^* \in \Omega$ such that $P_\Omega Tu^* = u^*$. By Lemma 2.1, we obtain u^* is the unique solution to the VIP($I^{\mathcal{H}_1} - T, \Omega$). This completes the proof.

4 NUMERICAL EXPERIMENTS

We perform the iterative schemes in Python running on a laptop with Intel Core i7 8650U CPU, 16GB RAM.

Example 4.1. In this example, with the purpose of illustrating the convergence of the Algorithm 3, we will apply the method to solve (SVIP). Let $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R}^4$ and $\mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^5$. Operators $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

and $B : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ are defined by

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ and}$$

$$Bx = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5$$

that are inverse strongly monotone operator with constant $\eta_A = \frac{1}{9}$ and $\eta_B = \frac{1}{7}$, respectively. Bounded linear operator $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$,

$$Fx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

And $Tx : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$Tx = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4,$$

is contractive operator with constant $\tau = \frac{1}{2}$. Let C and Q are defined by $C = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 + x_4 \leq 1\}; Q = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \mid y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 \leq 1\}$. The solutions set of (SVIP) is

$$\Omega = \left\{ x = (-u - v, u, 0, v) \mid 9u^2 + v^2 \leq 1; 2u + v \geq -1; u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

The unique solution of VIP $(I^{\mathbb{R}^4} - T, \Omega)$ is $x^* = (-0.3, 0.1, 0, 0.2)^T$.

Now, choose $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\lambda = 0.2$, $\beta_k = 0.25$, $\gamma = 0.01$, tolerance $\varepsilon = 10^{-6}$ and initial point $x^0 = (2, -1, 0, 5)^T$, we get $x = (-0.2943, 0.1056, -0.0014, 0.2056)^T$. This result archived within 0.208041 seconds.

Next, we used different choices of parameters. Table shown below is the performance with different λ parameter, ($0 < \lambda \leq 2\eta \approx 0.2222$) and $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\beta_k = 0.25$, $\gamma = 0.01$ with initial point $x^0 = (2, -1, 0, 5)^T$. Tolerance $\varepsilon = 10^{-6}$.

λ	Number of iterations	Time
0.05	13557	0.5560s
0.10	8514	0.3500s
0.15	6303	0.2649s
0.20	4963	0.2080s

Bảng 4.1: Results with different λ

Then, we changed the parameter γ with $0 < \gamma < \frac{1}{L} = \frac{1}{54} \approx 0.0185$. The other parameters stay unchanged $\lambda = 0.20$, $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\beta_k = 0.25$ with initial point $x^0 = (2, -1, 0, 5)^T$. Tolerance $\varepsilon = 10^{-6}$.

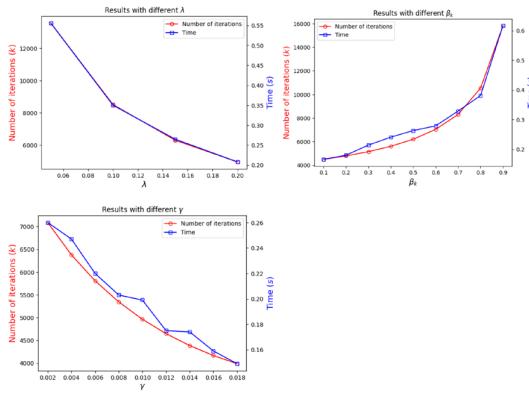
γ	Number of iterations	Time
0.002	7088	0.260000s
0.004	6378	0.247037s
0.006	5808	0.219998s
0.008	5345	0.203006s
0.010	4963	0.199033s
0.012	4647	0.174994s
0.014	4385	0.174000s
0.016	4167	0.159012s
0.018	3987	0.148996s

Bảng 4.2: Results with different γ

Following that, we changed the parameter β_k as well, with the same choice of parameters, as $\lambda = 0.20$, $\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\gamma = 0.01$ with initial point $x^0 = (2, -1, 0, 5)^T$. Tolerance $\varepsilon = 10^{-6}$.

β_k	Number of iterations	Time
0.1	4501	0.166038s
0.2	4793	0.180050s
0.3	5152	0.214039s
0.4	5606	0.241030s
0.5	6205	0.263004s
0.6	7040	0.278997s
0.7	8307	0.329004s
0.8	10529	0.381039s
0.9	15828	0.617035s

Bảng 4.3: Results with different β_k

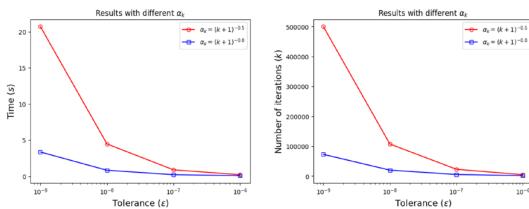


Hình 1: Results with different change in some parameters

Afterwards, we modify the parameter α_k . The table below show the results of the algorithm with $\lambda = 0.20, \beta_k = 0.25, \gamma = 0.01$. and initial point $x^0 = (2 \quad -1 \quad 0 \quad 5)^\top$. Tolerance $\varepsilon = 10^{-6}$.

α_k	ϵ	Number of iterations (k)	Time (s)
$\alpha_k = (k+1)^{-0.5}$	10^{-6}	4963	0.208041
	10^{-7}	23133	0.882029
	10^{-8}	107595	4.463039
	10^{-9}	499903	20.689995
$\alpha_k = (k+1)^{-0.8}$	10^{-6}	1693	0.07303
	10^{-7}	5658	0.209031
	10^{-8}	20287	0.826946
	10^{-9}	72908	3.344028

Bảng 4.4: Results with different α_k



Hình 2: The behavior of the number of iterations and time when α_k changed

5 CONCLUSION

In this paper, we introduced a new algorithm (Algorithm 3) and a new strong convergence theorem for solving the (SVIP) in a real Hilbert spaces. We consider a numerical example to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

REFERENCES

- [1] Y. Censor, A. Gibali and S. Reich, Algorithms for the split variational inequality problem, Numer. Algorithms, 59 (2012), 301–323.
- [2] Moudafi, A.: Viscosity approximation methods for fixed-points problems. J. Math. Anal. Appl., **241**, 46–55 (2000)
- [3] C. Byrne, Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem, Inverse Probl., 18 (2002), 441–453.
- [4] Bauschke HH, Combettes PL. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. New York: Springer. 2011.
- [5] Chidume CE. Geometric properties of Banach spaces and nonlinear iterations. Springer Verlag Series, Lecture Notes in Mathematics, ISBN 978-1-84882-189-7. 2009.
- [6] Goebel K, Kirk WA. Topics in Metric Fixed Point Theory. Cambridge Stud Adv Math. 28. Cambridge: Cambridge University Press. 1990.
- [7] Maingé PE. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and non-strictly convex minimization. Set-Valued Anal. 2008;16:899–912.
- [8] Xu HK. Strong convergence of an iterative method for nonexpansive and accretive operators. J Math Anal Appl. 2006;314(2):631–643.

