درس نرم افزار ریاضی

استاد: دکتر رجبعلی کامیابی گل

دستیار: فاطمه عزیزی

دانشکده علوم ریاضی

۱۱ اردیبهشت ۱۴۰۱

تعریف ۱ (پیچش خطی گسسته)

فرض کنید $x = (\cdots, x_{-۲}, x_{-۱}, x_{۰}, x_{۱}, x_{۲}, \cdots)$
و $y = (\cdots, y_{-۲}, y_{-۱}, y_{۰}, y_{۱}, y_{۲}, \cdots)$ دو دنباله (متناهی یا نامتناهی) باشند. پیچش خطی آن‌ها به صورت $z = x * y$ نشان داده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x * y(n) = \sum_k x_k y_{n-k} \qquad (۱)$$

توجه ۲ (همگرایی سری)

پیچیش خطی فقط برای زوج‌هایی از دنباله‌های x و y تعریف می‌شود که سری (۱) برای آن‌ها همگرا شود (که خوشبختانه شامل تمام دنباله‌های قابل تحقق فیزیکی می‌باشد).

مثال ۳

پیچش خطی دو دنباله x و y به طول چهار و سه که به شکل زیر تعریف شده است، را با توجه به معادله شماره (۱) محاسبه خواهیم کرد.

$$\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3, 4)$$

$$\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2) = (5, 6, 7)$$

مثال ۴

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sum_k x_k y_{-k} = x_0 y_0 = 1 \cdot 5 = 5;\\
z_1 &= \sum_k x_k y_{1-k} = x_0 y_1 + x_1 y_0 = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = 16;\\
z_2 &= \sum_k x_k y_{2-k} = x_0 y_2 + x_1 y_1 + x_2 y_0\\
&= 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 = 34;\\
z_3 &= \sum_k x_k y_{3-k} = x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_3 y_0\\
&= 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 52;\\
z_4 &= \sum_k x_k y_{4-k} = x_2 y_2 + x_3 y_1 = 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 45;\\
z_5 &= \sum_k x_k y_{5-k} = x_3 y_2 = 4 \cdot 7 = 28.
\end{aligned}
$$

تعریفی که برای پیچش دو بردار ارائه شد، در زمینه ضرب چندجمله‌ای ها نیز صدق می‌کند. فرض کنید که

$$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

به ترتیب دو چند جمله‌ای با درجه m و n باشند. همچنین فرض کنید که

$$r(x) = p(x) \cdot q(x) = c_{m+n} x^{m+n} + c_{m+n-1} x^{m+n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

حاصلضرب آنها باشد.

در واقع چنین می‌توان گفت که دنباله c، همان ضرایب چند جمله‌ای $r(x)$ می‌باشند که حاصل پیچش دنباله‌های a و b، از ضرایب چند جمله‌ای های $p(x)$ و $q(x)$ است.

مثال ۵

به عنوان مثال، حاصل ضرب دو چند جمله‌ای

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \text{ and } q(x) = 5x^2 + 6x + 7$$

به صورت زیر خواهد بود.

$$q(x) = 5x^5 + 16x^4 + 34x^3 + 52x^2 + 45x + 28,$$

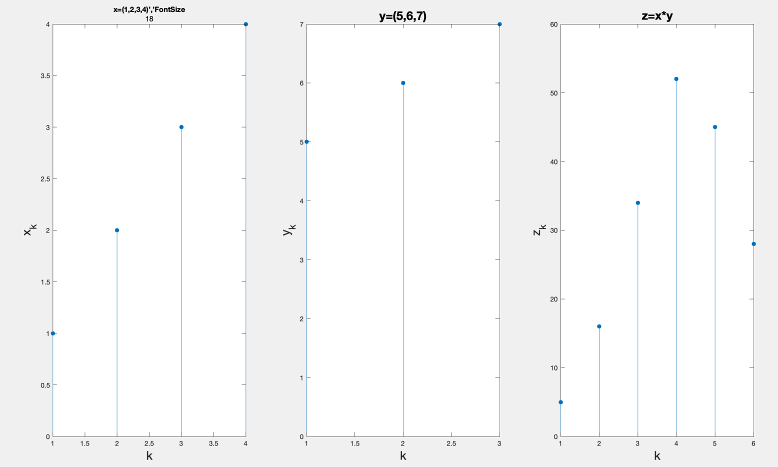
درستی این محاسبات را می‌توان در نرم افزار متلب، با استفاده از تابع conv بررسی نمود.

conv

conv(u،v)

دستور فوق، پیچش بردارهای u و v را باز می‌گرداند.
اگر u و v به عنوان بردارهای مربوط به ضرایب چند جمله‌ای در نظر گرفته شود، پیچش آن‌ها معادل ضرب دو چند جمله‌ای می‌باشد.

اکنون در نظر داریم تا مانند سایر اعمال حسابی و جبری، از نمودارها برای نشان دادن پیچش دو دنباله استفاده کنیم. شکل زیر، نتیجه محاسبات مثال فوق را نشان می‌دهد و شامل نمودارهای هر دو دنباله و پیچش خطی آنها است.


x=(1,2,3,4)','FontSize
18
y=(5,6,7)
z=x*y
x_k
y_k
z_k
k
k
k

```matlab
clc
clear
close all
x=[1,2,3,4];
y=[5,6,7];
z=conv(x,y);
subplot(1,3,1);
stem(1:4,x,'filled');
xlabel('k','FontSize',18);
ylabel('x_{k}','FontSize',18);
title('x=(1,2,3,4)’,’FontSize',18);
subplot(1,3,2);
stem(1:3,y,'filled');
xlabel('k','FontSize',18);
ylabel('y_{k}','FontSize',18);
title('y=(5,6,7)','FontSize',18);
subplot(1,3,3);
stem(1:6,z,'filled');
xlabel('k','FontSize',18);
ylabel('z_{k}','FontSize',18);
title('z=x*y','FontSize',18);
```

این موضوع، همان تکنیک فیلتر کردن تصاویر دیجیتال (که توسط ماتریس‌های دو بعدی نشان داده می‌شود) بود که انگیزه ما برای معرفی مفهوم پیچیش شد و اکنون آماده ارائه یک تعریف از پیچش دو ماتریس هستیم. با انجام این کار، به موضوع اصلی این عملیات روی تصاویر دیجیتال نزدیکتر خواهیم شد.

تعریف ۶

فرض کنید A و B دو ماتریس متناهی (یا نامتناهی) هستند. پیچش خطی آنها به عنوان ماتریس $C = A * B$ تعریف و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$C(m,n) = \sum_{k} \sum_{l} A(k,l) B(m-k, n-l)$$

برای محاسبه پیچش دوبعدی ماتریس ها در نرم افزار متلب از تابع زیر استفاده می‌شود.

conv2

conv2(A,B)

دستور فوق، پیچش دو بعدی ماتریس های A و B را برمی گرداند.

مثال ۷

فرض کنید ماتریس های A, B، به صورت زیر تعریف شده باشند، در این صورت پیچش آن ها به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
c_{m1} &= c_{1n} = 0 \quad \text{for all} \quad m, n; \\
c_{mn} &= 0 \quad \text{whenever} \quad m > 5 \quad \text{or} \quad n > 5; \\
c_{22} &= \sum_k \sum_l a_{kl} b_{2-k,2-l} = a_{11} b_{11} = 1 \cdot 1 = 1; \\
c_{23} &= \sum_k \sum_l a_{kl} b_{2-k,3-l} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{11} \\
&= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 1; \\
c_{24} &= \sum_k \sum_l a_{kl} b_{2-k,4-l} = a_{12} b_{12} + a_{13} b_{11} \\
&= 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 1; \\
c_{25} &= \sum_k \sum_l a_{kl} b_{2-k,5-l} = a_{13} b_{12} = 3 \cdot (-1) = -3; \\
\ldots \\
c_{33} &= \sum_k \sum_l a_{kl} b_{3-k,3-l} = a_{11} b_{22} + a_{12} b_{21} + a_{21} b_{12} + a_{22} b_{11} \\
&= 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 1 = 0; \\
\ldots \\
c_{55} &= \sum_k \sum_l a_{kl} b_{5-k,5-l} = a_{33} b_{22} = 3 \cdot 9 = 27.
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 9 \\ -14 & 5 & 6 & 27 \end{bmatrix}$$

مثال ۸

محاسبه مثال فوق به وسیله دستور conv2 در نرم افزار متلب.

```
clc
clear
close all

A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9];
B=[1,-1;-2,3];
C=conv2(A,B),
```

نوع دیگری از پیچش گسسته به نام پیچش دایره‌ای فقط برای دنباله‌های متناهی یا متناوب اعمال می‌شود، از این رو گاهی به آن پیچش تناوبی نیز می‌گویند. این پیچش، شباهت‌های زیادی با پیچش خطی دارد و در واقع این دو بسیار نزدیک به هم مرتبط هستند، در حالی که اساساً متفاوت هستند.

تعریف ۹

فرض کنید $x = (x_0, x_1, \cdots, x_{N-1})$ و $y = (y_0, y_1, \cdots, y_{N-1})$ دو دنباله محدود با طول یکسان N هستند. پیچش دایره‌ای آنها به شکل دنباله‌ای متناهی به شکل $z = x * y$ از طول n خواهد بود که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k y_{n-k} \quad mod \quad n$$

برای درک بهتر شباهت‌ها و تفاوت‌های بین دو نوع پیچش گسسته، به مثال بعد توجه کنید،این مثال بسیار مشابه با مثال ابتدایی این بخش می‌باشد، محاسبات نیز بسیار مشابه (هم از نظر مفهومی و هم در جزئیات) هستند.

مثال ۱۰

فرض کنید $x = (۱, ۲, ۳, ۴)$ و $y = (۵, ۶, ۷, ۸)$ دو دنباله متناهی با طول چهار، باشند. برای محاسبه پیچش دایره ای آن ها داریم:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \sum_{k=0}^{3} x_k y_{-k \ mod\ 4} = x_0y_0 + x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 \\
&= 1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 = 65, \\
z_1 &= \sum_{k=0}^{3} x_k y_{1-k \ mod\ 4} = x_0y_1 + x_1y_0 + x_2y_3 + x_3y_2 \\
&= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 68, \\
z_2 &= \sum_{k=0}^{3} x_k y_{2-k \ mod\ 4} = x_0y_2 + x_1y_1 + x_2y_0 + x_3y_3 \\
&= 1 \cdot 7 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 8 = 66, \ \ and
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_3 &= \sum_{k=0}^{3} x_k y_{3-k \ mod \ 4} = x_0y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_0 \\
&= 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = 60.
\end{aligned}
$$

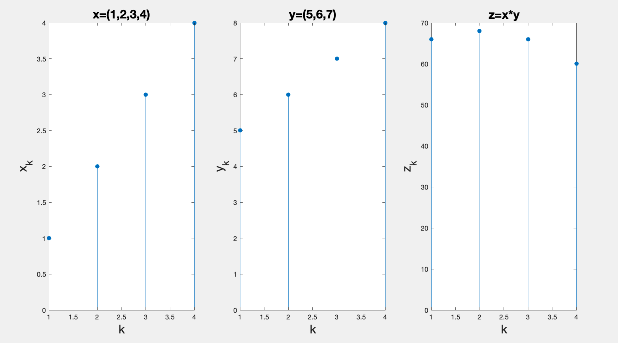
درستی این محاسبات را می‌توان در نرم افزار متلب، با استفاده از تابع cconv (که در جعبه ابزار پردازش سیگنال موجود است) بررسی نمود.

conv

cconv(u،v)

دستور فوق، بردارهای a و b را به صورت دایره‌ای پیچش می‌کند و n طول بردار به دست آمده است.

اکنون در نظر داریم تا مانند سایر اعمال حسابی و جبری، از نمودارها برای نشان دادن پیچش دو دنباله استفاده کنیم. شکل زیر، نتیجه محاسبات مثال فوق را نشان می‌دهد و شامل نمودارهای هر دو دنباله و پیچش خطی آنها است.


x=(1,2,3,4)
y=(5,6,7)
z=x*y
x_k
y_k
z_k
k
k
k

اکنون باید بتوانید سه تفاوت میان مفهوم پیچش خطی و پیچش دایره ای را بیان کنید؟(تمرین)

در ادامه روشی برای محاسبه پیچش دایره ای دو دنباله متناهی با اندازه های متفاوت ارائه میدهیم. این روش، شامل ترفندی به نام zero-pading است، یعنی با اضافه کردن تعداد لازم از جمله صفر، دنباله کوتاه‌تر را به طول مورد نیاز گسترش می‌دهیم.

به منظور محاسبه پیچش دایره‌ای دنباله‌های xو y که به صورت زیر تعریف شده اند

$$x = (x_۰ x_۱ x_۲ x_۳) = (۱, ۲, ۳, ۴)$$

و

$$y = (y_۰, y_۱, y_۲) = (۵, ۶, ۷)$$

مقدار $y_۳$ را صفر در نظر می‌گیریم:

$$ypad = (y_۰, y_۱, y_۲, y_۳) = (۵, ۶, ۷, ۰)$$

و در ادامه، به محاسبه پیچش دایره‌ای دنباله‌های x و $ypad$ با طول چهار ادامه می‌دهیم.
در واقع، اگر چه پیچش‌های خطی و دایره‌ای اساساً عملیات متفاوتی هستند، اما اشتراکاتی بیش از آنچه به نظر می‌رسد، دارند و تحت شرایط خاص، آنها حتی معادل نیز می‌شوند.(تمرین)

اکنون که نحوه محاسبه پیچش‌های خطی و دایره‌ای را فرا گرفتیم لازم است تا با برخی از ویژگی‌های اصلی آن و شباهت‌هایی که می‌توانیم بین پیچش و سایر عملیات‌های حسابی، به‌ویژه ضرب پیدا کنیم، آشنا شویم.

برای مثال چنین می‌توان گفت که هر دو پیچش خطی و دایره ای مشابه عمل ضرب هستند چراکه:

الف) دارای خاصیت جابه جایی هستند، بدین معنا که برای هر دو دنباله x و y که پیچش برای آن تعریف شده باشد، داریم:

$$x * y = y * x$$

ب) دارای خاصیت شرکت پذیری هستند، بدین معنا که برای هر سه دنباله x و y و z که پیچش برای آن تعریف شده باشد، داریم:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

ج) دارای خاصیت شرکت پذیری نسبت به جمع نیز هستند، بدین معنا که برای هر سه دنباله x و y و z که پیچش برای آن تعریف شده باشد، داریم:

$$(x+y)*z = x*z + y*z$$

د) برای هر اعداد حقیقی (یا مختلط) مانند a، عدد ۱ را عضو همانی ضربی می نامیم. اگر

$$a/1 = 1.a = a$$

اکنون این سوال مطرح می‌شود که آیا عضو همانی پیچشی نیز وجود دارد یا خیر، و پاسخ مثبت است.
دنباله δ را در نظر بگیرید که تکانه واحد نامیده شده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

و برای هر دنباله ای مانند x، داریم:

$$x*\delta = \delta*x = x$$

در پردازش تصویر پزشکی، و همچنین بسیاری از کاربردهای دیگر پردازش تصویر، شناسایی مرز بین اشیاء در تصویر و جداسازی اشیاء از یکدیگر ضروری است. برای مثال، هنگام تجزیه و تحلیل یک تصویر سلولی (گرفته شده توسط میکروسکوپ)، طراحی الگوریتم‌های پردازش تصویر برای تقسیم‌بندی تصویر و تمایز اجسام موجود در سلول از یکدیگر حیاتی است، به عنوان مثال، شناسایی خطوط یک هسته. در بسیاری از کاربردهای عملی، تکنیک‌های تقسیم‌بندی و تشخیص لبه امکان جداسازی اشیاء ساکن در یک تصویر و شناسایی مرز بین آنها را فراهم می‌کنند.

در اصل، دو رویکرد برای تشخیص لبه و تقسیم بندی وجود دارد. در رویکرد اول، از تفاوت‌ها و عدم تشابه پیکسل‌ها در دو ناحیه همسایه (اشیاء) برای تقسیم‌بندی دو ناحیه مورد سوء استفاده قرار می‌گیرد، در حالی که در رویکرد دوم، از شباهت‌های پیکسل‌های داخل هر منطقه برای جدا کردن منطقه از مناطق همسایه استفاده می‌شود. . همانطورکه مشاهده می شود، در حالی که این دو رویکرد مبتنی بر ایده های نسبتاً مرتبط هستند، معیارهای متفاوتی را اعمال می کنند. در ادامه این فصل چند نمونه از هر یک از این دو رویکرد را مورد بحث قرار می‌دهیم.

در این بخش، برخی از تکنیک‌های تشخیص لبه اصلی، که معمولاً در پردازش تصویر، علی الخصوص تصاویر پزشکی، مورد استفاده قرار می‌گیرند، بررسی و با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

تشخیص لبه SoBel

الگوریتم Sobel یکی از محبوب‌ترین تکنیک‌های تشخیص لبه است از لحاظ محاسباتی نیز بسیار ساده است. در این تکنیک، از یک ماتریس ساده ۳×۳ برای بزرگ‌نمایی تفاوت‌ها استفاده می‌شود. ماسک ساده برای بزرگنمایی تفاوت بین نقاط طرف مقابل یک مرز و حذف تغییرات صاف سطح خاکستری در پیکسل های واقع در همان سمت مرز استفاده می شود. ماسک سوبل برای بزرگنمایی لبه های افقی به شرح زیر است:

$$\begin{bmatrix} -۱ & -۲ & -۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$