殺手數獨的判斷方法

薛筑軒　陳瑞琳　詹翊瑄　高振綱　吳毅成　黃裕龍
國立交通大學資訊科學與工程研究所
{sunny,martian,rlixaoi,mikekao,icwu,march}@aigames.nctu.edu.tw

摘要

殺手數獨是一個從數獨衍生出的變種。遊戲起始盤面，不同於以往數獨直接給提示數，殺手數獨給的是一群格子的總和，這使得殺手數獨比起數獨較為複雜。本篇論文研究的是殺手數獨的判斷方法，藉由結合以往數獨的判斷方法，使得這判斷方法不僅可解決殺手數獨題目，也可解決傳統數獨題目。
關鍵詞：殺手數獨，數獨，判斷方法。

1. 前言

數獨是一個家喻戶曉的數字填充遊戲，是由 Harold Garns (cf. [4]) 在 1979 年發明的。規則簡單，卻讓人腦力激盪、愛不釋手。自 2005 起，常常可在報章雜誌上見到數獨的身影，其熱門程度可想而之。數獨的遊戲規則是一個在 9 格寬 x9 格高的盤面上，填入數字 1~9 使每行、每列以及 3 格寬 x3 格高的小型九宮格，都不能出現相同的數字。遊戲起始時，題目會先給定一些數字當作提示(clues)，遊戲目標就是藉由這些提示，在不違反遊戲規則的情況下，把盤面上所有格子填上數字。

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

(a)

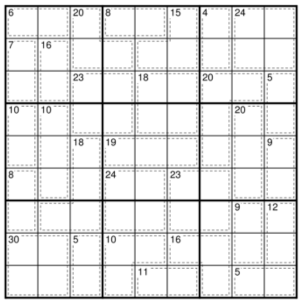
5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

(b)

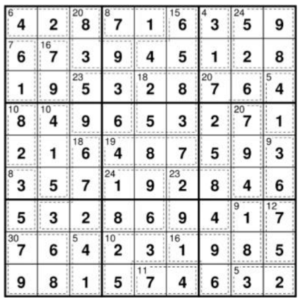
圖 1: 數獨的題目(a)與答案(b)

如圖 1(a)就是一個數獨的題目，遊戲會事先給定一些提示，經由一些邏輯判斷，我們能一步步找到格子內的數字，最終填完整個盤面的數字，如圖 1(b)所示。有關數獨的研究相當的多，Delahaye [5]介紹許多有關數獨的性質，以及類似的遊戲；Graham Kendall [10]介紹許多 NP-complete 的 puzzle，Felgenhauer [6] 提出許多解數獨的方法，並且分類，我們許多的名詞定義也是從這篇與[1]而來；Fowler [7] 於 2007 開發出 sudoku solver and generator；最近熱門研究是一個有答案的數獨題目能否只要更少的提示，最少提示數問題因應而生(the minimum Sudoku problem)([3] [8] [9])。

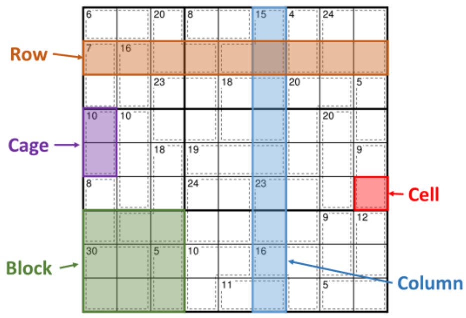
殺手數獨[2]是一種從數獨衍生出的變種，結合了數獨（Sudoku）和數和（Kakuro）的玩法。遊戲規則是在一個 9 格寬 x 9 格高的盤面上，填入數字 1~9 使每行、每列以及 3 格寬 x 3 格高的小型九宮格，都不能出現相同的數字。並且殺手數獨把整個盤面再細分出許多用虛線表示的小區塊(Cage)，每個小區塊左上角都會有個數值(clues)，用來標明這個小區塊內數字的總和。並且每個小區塊內的數字都不可以重複。



(a)



(b)



(c)

圖 2: 殺手數獨的題目(a)、答案(b)和特殊名詞(c)

圖 2(a)就是一個殺手數獨的題目，不同於數獨事先給定格子內的數字，而是給定小區塊的總和。

這使得殺手數獨比起數獨較為複雜。遊戲玩法則是在符合殺手數獨規則[2]的前提下，把盤面上所有的空格填上數字，如圖 2(b)。而圖 2(c)則是殺手數獨裡會用到的名詞。

本研究藉由結合以往數獨的判斷方法，提出延伸的方法以及新的方法，使其適用在殺手數獨的題目上。研究目的在於提出少數幾種判斷方法就可以找到殺手數獨的答案。本研究首先於第一章介紹數獨、殺手數獨的遊戲規則及確定研究問題。第二章中，定義了一些我們在研究中會用到的名詞。第三章為我們提出的判斷方法。第四章會提出結論。

2. 名詞定義

為了描述我們的方法，我們定義了以下的名詞：

- Digits (候選數)：代表數字 1~9。
- Cell：代表盤面上 1 格寬 x 1 格高的格子。
- Region：盤面上一些 cells 的集合。
- Sum-region: 是一種 Region，其內部所有數字總和為一個定值。
- Bucket：是一種 Region，其內部所有的 cell，其數字不能重複。一個 Bucket 內可以只有一個 cell。
- Cage：是一種 Bucket，也是一種 Sum-region。
- Combination (組合)：一個 Region 包括 Cell、Cage、Sum-region 等之所有可能的組合。例如：一個完全沒有受到其他數影響的 cell，其內部可能的組合是{1,2,3,4,5,6,7,8,9}。為了簡化，對一個 cell C， 我們用 C.CB 表示其所有組合。一個總和為 8 且個數為 3 的 Cage Γ，其內部可能的組合：Γ.CB = {125,134}。另外，一個總合為 8 且個數為 3 的 Sum-region S，其內部可能的組合：S.CB = {116, 125, 134, 224, 233}。
- 對於一個 Region R，|R| 代表 Region R 內 cell 的個數；SUM(R)代表 Region R 內數字的總和。

3. 判斷方法

在[1]裡，整理出了數獨的三個判斷方法，Naked、Hidden、X-wing，但是這些方法對於殺手數獨來說不夠完善，所以我們對這些方法進行一些延伸，並新增 5 個殺手數獨的判斷方法(存在法、鴿洞法、反向鴿洞法、配對法、45 規則法)，以下分別做介紹：

3.1 Naked K

原來的定義是「在行、列以及 3x3 的 9 格區域中，若某 K 個格子中就只出現 K 種候選數，則這 K 種候選數不可能出現在這區域中的其他格子」，讓我們看看下列的例子：

146 8	7	5~~7~~8 9	124 5	123 456	358 9	124 89	234 89	6~~7~~8 9

(a) Naked 1

146 8	79	124 5~~9~~	123 45	123 ~~9~~	79	124 568	234 58	126 ~~7~~8

(b) Naked 2

146 8	79	~~3~~45 ~~9~~	124 58	37	39	124 568	12~~3~~ 8	126 ~~7~~8

(c) Naked 3

圖 3: 原本定義的 Naked 系列範例

在圖 3(a)中，可觀察到左邊第 2 個的格子在 1 格中就只有 1 種候選數 7，根據定義這屬於 Naked 1，我們可把其他格子內的候選數 7 刪除；在圖 3(b)中，可觀察到藍色數字標明的格子中，那 2 個格子就只有 2 種候選數 7、9，根據定義這屬於 Naked 2，我們可把其他格子內的候選數 7、9 刪除；在圖 3(c)中，可觀察到藍色數字標明的格子中，那 3 個格子就只有 3 種候選數 3、7、9，根據定義這屬於 Naked 3，我們可把其他格子內的候選數 3、7、9 刪除。

以上傳統的 Naked 定義，只針對 Sudoku，尤其局限於 cell。對於 Killer Sudoku，Cage 是很重要的概念，上述的定義無法來解決許多 Killer Sudoku 問題，因此我們延伸 Naked 定義如下：

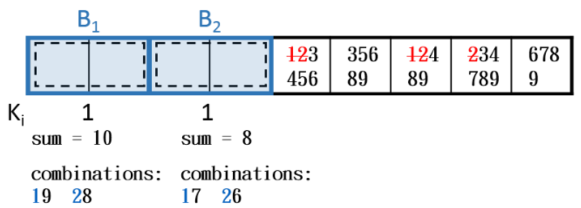
定義一：在一個 Cage 中，存在 K 個 digits $\{D_1, D_2, D_3,\ldots D_K\} = S$，存在 N 個不重疊的 Buckets $\{ B_1, B_2,\ldots,B_N \}$，其中 $N \le K$，且 Cage 完全包含 $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N$，存在 N 個數$\{ K_1,K_2,\ldots,K_N \}$使得 $K_1+K_2+\ldots+K_N = K$，使得對於每一個 Bucket B_i 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 K_i 個 digits，當有這種情況時我們稱之為「Naked K」。

依據此定義，應可很容易地獲得以下定理，在此證明部分省略。

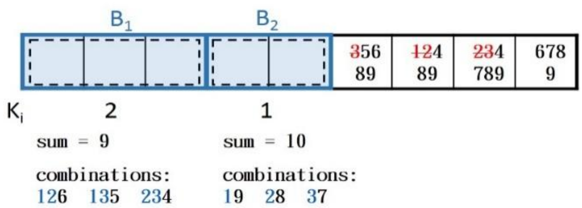
定理一：當任意 Cage 符合 Naked K 的狀況時，對於所有在 Cage 內不屬於那 N 個 Buckets 的 cells，則這些 cells 的 combinations 必不包含這 K 個 digits $\{D_1, D_2, D_3,\ldots D_K\}$。

根據定理一我們可以將那些不屬於那 N 個 Buckets 的 cells C 的 C.CB 中，刪除掉擁有這 K 個 digits 的 combinations。讓我們看回剛剛的例子，如圖 3(a)，在一個 Cage 中，存在 K=1 個 digit $\{ D_1=7 \} = S$，存在 N=1 個 Buckets $\{ B_1 \}$，其中 $N \le K$，且 Cage 完全包含 B_1，存在 N=1 個數 $\{ K_1=1 \}$，使得 $K_1=K=1$，使得對 B_1 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_1=1$ 個 digit，這是新定義的 Naked 1。根據定理

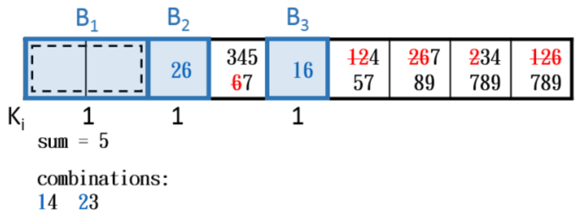
一我們可把 Cage 內所有不屬於 B_1 的 cells，其擁有 $D_1=7$ 的 combinations 都刪除掉；如圖 3(b)，在一個 Cage 中，存在 K=2 個 digits { $D_1=7, D_2=9$ } = S，存在 N=2 個 Buckets { B_1, B_2 }，其中 N≤K，且 Cage 完全包含 $B_1 \cup B_2$，存在 N=2 個數 { $K_1=1, K_2=1$ }，使得 $K_1+K_2=K=2$，使得對 B_1 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_1=1$ 個 digit、對 B_2 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_2=1$ 個 digit。這是新定義的 Naked 2。根據定理一我們可把 Cage 內所有不屬於 B_1、B_2 的 cells，其擁有 $D_1=7$, $D_2=9$ 的 combinations 都刪除掉；如圖 3(c)，在一個 Cage 中，存在 K=3 個 digits { $D_1=3, D_2=7, D_3=9$ } = S，存在 N=3 個 Buckets { B_1, B_2, B_3 }，其中 N≤K，且 Cage 完全包含 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$，存在 N=3 個數 { $K_1=1, K_2=1, K_3=1$ }，使得 $K_1+K_2+K_3=K=3$，使得對 B_1 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_1=1$ 個 digit、對 B_2 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_2=1$ 個 digit、對 B_3 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_3=1$ 個 digit。這是新定義的 Naked 3。根據定理一我們可把 Cage 內所有不屬於 B_1、B_2、B_3 的 cells，其擁有 $D_1=3$, $D_2=7$, $D_3=9$ 的 combinations 都刪除掉。接著讓我們來看看殺手數獨才會出現的狀況：



(a) Naked 2



(b) Naked 3



(c) Naked 3

圖 4: 殺手數獨的 Naked 系列範例

如圖 4(a)，在一個 Cage 中，存在 K=2 個 digits { $D_1=1, D_2=2$ } = S，存在 N=2 個 Buckets { B_1, B_2 }，其中 N≤K，且 Cage 完全包含 $B_1 \cup B_2$，存在 N=2 個數 { $K_1=1, K_2=1$ }，使得 $K_1+K_2=K=2$，使得對 B_1 中的每一組 combination (註: B_1 僅有兩組 combinations{19, 28}是因為我們假設其他組合影響造成，如直的 Cage 限制造成的)都至少擁有 S 中的 $K_1=1$ 個 digit、對 B_2 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_2=1$ 個 digit。這是新定義的 Naked 2。根據定理一我們可把 Cage 內所有不屬於 B_1、B_2 的 cells，其擁有 $D_1=1$, $D_2=2$ 的 combinations 都刪除掉；如圖 4(b)，在一個 Cage 中，存在 K=3 個 digits { $D_1=1, D_2=2, D_3=3$ } = S，存在 N=2 個 Buckets { B_1, B_2 }，其中 N≤K，且 Cage 完全包含 $B_1 \cup B_2$，存在 N=2 個數 { $K_1=2, K_2=1$ }，使得 $K_1+K_2=K=3$，使得對 B_1 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_1=2$ 個 digits、對 B_2 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_2=1$ 個 digit。這是新定義的 Naked 3。根據定理一我們可把 Cage 內所有不屬於 B_1、B_2 的 cells，其擁有 $D_1=1$, $D_2=2$, $D_3=3$ 的 combinations 都刪除掉；如圖 4(c)，在一個 Cage 中，存在 K=3 個 digits { $D_1=1, D_2=2, D_3=6$ } = S，存在 N=3 個 Buckets { B_1, B_2, B_3 }，其中 N≤K，且 Cage 完全包含 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$，存在 N=3 個數 { $K_1=1, K_2=1, K_3=1$ }，使得 $K_1+K_2+K_3=K=3$，使得對 B_1 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_1=1$ 個 digit、對 B_2 中(B_2 是由一個 cell 組成 Bucket)的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_2=1$ 個 digit、對 B_3 中的每一組 combination 都至少擁有 S 中的 $K_3=1$ 個 digit。這是新定義的 Naked 3。根據定理一我們可把 Cage 內所有不屬於 B_1、B_2、B_3 的 cells，其擁有 $D_1=1$, $D_2=2$, $D_3=6$ 的 combinations 都刪除掉。

3.2 Hidden K

原本的定義是「在行、列以及 3x3 的 9 格區域中，若某 K 種候選數就只有出現在某 K 格中，則這 K 格中不可能有其他候選數，所以其他候選數應該刪除」，參考以下範例：

246 789	346 7	~~23~~5 ~~7~~	238 9	134 689	123 68	237 89	346 7	127 89

(a) Hidden 1

246 78	346 7	235 7	235 67	1~~34~~ 9	236 78	234 78	346 7	1~~27~~ ~~8~~9

(b) Hidden 2

~~2~~4~~7~~ 8	137 9	125 79	235 7	123 59	~~12~~6 8	235 7	~~12~~4 6	123 9

(c) Hidden 3

圖 5: 原本定義的 Hidden 系列範例

在圖 5(a)中，可觀察到左邊第 3 個的格子，1 種候選數 5 只有出現在 1 格中，根據定義這屬於 Hidden 1，我們可把這 1 格內候選數 5 以外的候選數刪除；在圖 5(b)中，可觀察到藍色數字標明的格子中，2 種候選數 1、9 只有出現在 2 格中，根據定義這屬於 Hidden 2，我們可把這 2 格內候選數 1、9

以外的候選數刪除；在圖 5(c)中，可觀察到藍色數字標明的格子中，3 種候選數 4、6、8 只有出現在 3 格中，根據定義這屬於 Hidden 3，我們可把這 3 格內候選數 4、6、8 以外的候選數刪除。

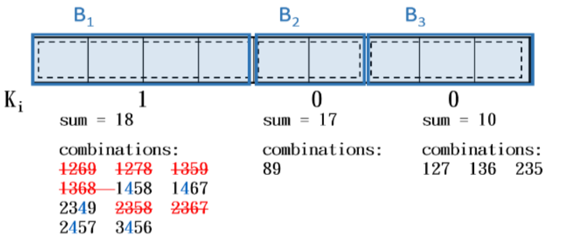
以上傳統的 Hidden 定義，只針對 Sudoku。對於 Killer Sudoku，上述的定義無法來解決許多 Killer Sudoku 問題，因此我們延伸 Hidden 定義如下：

定義二：在一個 Cage 中，存在 K 個 digits $\{D_1, D_2,\ldots, D_K\} = S$，存在 N 個互不重疊的 Buckets $\{ B_1, B_2,\ldots,B_N \}$，其中 $N \geq K$，且 $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_N$ 完全包含 Cage，且此 Cage 中確定包含 S 中的所有數，存在 N 個數$\{ K_1,K_2,\ldots,K_N \}$其中 $K_i = \max($ B_i 中的第 j 組 combination $C_{i,j}$ 擁有 S 中的 $K_{i,j}$ 個 digits $)$，使得 $K_1 + K_2 + \ldots + K_N = K$，當有這種情況時我們稱之為「Hidden K」。

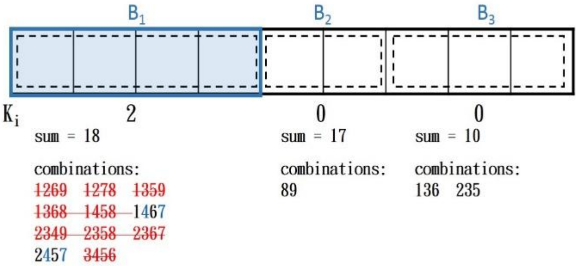
依據此定義，應可很容易地獲得以下定理，在此證明部分省略。

定理二：當任意 Cage 符合 Hidden K 的狀況時，對於所有在 Cage 內的 Buckets B_i，如果 B_i 的 K_i 不等於 0，則 B_i 只能存在擁有 K 個 digits 的 combinations。

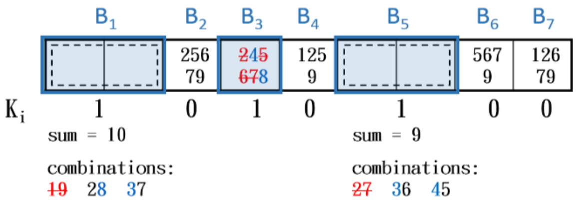
根據定理二我們可將那些 K_i 不等於 0 的 Buckets B，其 B.CB 中，刪除掉沒有這 K 個 digits 的 combinations。讓我們看回剛剛的例子，如圖 5(a)，在一個 Cage 中，存在 K=1 個 digit $\{ D_1=5 \} = S$，存在 N=9 個互不重疊的 Buckets $\{ B_1, B_2,\ldots,B_9 \}$，其中 $N \geq K$，且 $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_9$ 完全包含 Cage，且此 Cage 中確定包含 S 中的所有數，存在 N=9 個數 $\{ K_1,K_2,\ldots,K_9 \}$其中 $K_1 = \max(0, 0 , 0, 0, 0, 0) = 0$、$K_2 = \max(0, 0, 0, 0) = 0$、$K_3 = \max(0, 0, 1, 0) = 1$、$K_4\ldots$，使得 $K_1 + K_2 + \ldots + K_9 = K=1$。這是新定義的 Hidden 1。根據定理二我們可將那些 K_i 不等於 0 的 Buckets B，其 B.CB 中，刪除掉沒有$\{ D_1=5 \}$的 combinations；如圖 5(b)以原本的 Hidden 2 為例，在一個 Cage 中，存在 K=2 個 digits $\{ D_1=1, D_2=9 \} = S$，存在N=9個互不重疊的Buckets $\{ B_1, B_2,\ldots,B_9 \}$，其中 $N \geq K$，且 $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_9$ 完全包含 Cage，且此 Cage 中確定包含 S 中的所有數，存在 N=9 個數 $\{ K_1,K_2,\ldots,K_9 \}$其中 $K_1 = \max(0, 0 , 0, 0, 0) = 0$、$K_2 = \max(0, 0, 0, 0) = 0$、$K_3 = \max(0, 0, 0, 0) = 0$、$K_4\ldots$，使得 $K_1 + K_2 + \ldots + K_9 = K=2$。這是新定義的 Hidden 2。根據定理二我們可將那些 K_i 不等於 0 的 Buckets B，其 B.CB 中，刪除掉沒有$\{ D_1=1, D_2=9 \}$的 combinations；如圖 5(c) 以原本的 Hidden 3 為例，在一個 Cage 中，存在 K=3 個 digits $\{ D_1=4, D_2=6, D_3=8 \} = S$，存在 N=9 個互不重疊的 Buckets $\{ B_1, B_2,\ldots,B_9 \}$，其中 $N \geq K$，且 $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_9$ 完全包含 Cage，且此 Cage 中確定包含 S 中的所有數，存在 N=9 個數$\{ K_1,K_2,\ldots,K_9 \}$其中 $K_1 = \max(0, 1 , 0, 1) = 1$、$K_2 = \max(0, 0, 0, 0) = 0$、$K_3 = \max(0, 0, 0, 0, 0) = 0$、$K_4\ldots$，使得 $K_1 + K_2 + \ldots + K_9 = K=3$。這是新定義的 Hidden 3。根據定理二我們可將那些 K_i 不等於 0 的 Buckets B，其 B.CB 中，刪除掉沒有$\{ D_1=4, D_2=6, D_3=8 \}$的 combinations。接著讓我們來看看殺手數獨才會出現的狀況：



(a) Hidden 1



(b) Hidden 2



(c) Hidden 3

圖 6: 殺手數獨的 Hidden 系列範例

如圖 6(a)，在一個 Cage 中，存在 K=1 個 digit $\{ D_1=4 \} = S$，存在 N=3 個互不重疊的 Buckets $\{ B_1, B_2, B_3 \}$，其中 $N \geq K$，且 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 完全包含 Cage，且此 Cage 中確定包含 S 中的所有數，存在 N=3 個數$\{ K_1,K_2,K_3 \}$其中 $K_1 = \max(0, 0 , 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1) = 1$、$K_2 = \max(0) = 0$、$K_3 = \max(0, 0, 0) = 0$，使得 $K_1 + K_2 + K_3 = K=1$。這是新定義的 Hidden 1。根據定理二我們可把 B_1 內沒有$\{ D_1=4 \}$的 combinations 刪除。也就是 1269, 1278, 1359, 1368, 2358, 2367；如圖 6(b)，在一個 Cage 中，存在 K=2 個 digits $\{ D_1=4, D_2=7 \} = S$，存在 N=3 個互不重疊的 Buckets $\{ B_1,B_2,B_3 \}$，其中 $N \geq K$，且 $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ 完全包含 Cage，且此 Cage 中確定包含 S 中的所有數，存在 N=3 個數$\{ K_1, K_2, K_3 \}$，其中 $K_1 = \max(0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 0) = 2$、$K_2 = \max(0) = 0$、$K_3 = \max(0, 0) = 0$，使得 $K_1+K_2+K_3=K=2$。這是新定義的 Hidden 2。根據定理二我們可把 $B_{2,}$ B_3 內沒有$\{ D_1=4, D_2=7 \}$的 combinations 刪除。另外這例子做兩次 hidden 1 也會產生同樣的結果；如圖 6(c)，在一個 Cage 中，存在 K=3 個 digits $\{ D_1=3, D_2=4, D_3=8 \}$

= S，存在 N=7 個互不重疊的 Buckets { $B_1, B_2, \ldots, B_7$ }，其中 N≥K，且 $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_7$ 完全包含 Cage，且此 Cage 中確定包含 S 中的所有數，存在 N=7 個數{ $K_1, K_2, \ldots, K_7$ }，其中 K_1 = max (0, 1, 1) = 1、K_2 = max(0, 0, 0, 0, 0) = 0、K_3 = max(0, 1, 0, 0, 0, 1) = 1、K_4…，使得 $K_1+K_2+\ldots+K_7=K=3$。這是新定義的 Hidden 3。根據定理二我們可把 B_1, B_3, B_5 內沒有 { $D_1=3, D_2=4, D_3=8$ }的 combinations 刪除。

3.3 X-wing K

原本的定義是「若某個候選數，只出現在某 K 個橫列中相同的縱行上，則在這 K 縱行上的其他格子中，不可能有這個候選數，應該要刪除」，參考下列範例：

4	13 6	56	2	13 68	7	13 6	135 68	9	A
135 9	8	256	134 9	134 69	346 9	123 456	7	134 6	
137 9	123 69	267	134 89	134 689	5	123 46	123 468	134 68	
6	347 9	457	134 579	2	349	8	134 5	134 7	
357 89	234 79	245 78	1345 789	1345 6789	346 89	134 569	134 56	134 67	
357 89	347 9	1	345 789	3456 789	346 89	345 69	345 6	2	
18	146	3	458 9	458 9	248 9	7	124 68	146 8	
178	5	467 8	347 8	347 8	234 8	123 46	9	134 68	
2	47	9	6	34 78	1	34	34 8	5	A
				B			B		

(a) X-wing 2

23 4	1	5	24 6	24 68	7	34 6	34 68	9	A
49	48 9	6	14 59	145 89	3	14 5	7	2	A
234 79	234 789	234 78	124 569	1245 689	245 689	134 56	134 568	134 68	
1234 5679	234 679	123 47	1234 5679	1245 679	245 69	8	123 456	134 67	
1234 5679	234 679	123 47	8	1245 679	245 69	1234 5679	123 456	134 67	
8	234 679	123 47	1234 5679	1245 679	245 69	1234 5679	123 456	134 67	
123 467	234 678	245 679	245 679	2456 789	245 689	123 467	123 468	134 678	
123 467	5	123 478	246 7	246 78	246 8	123 467	9	134 678	
24 67	246 78	9	24 67	3	1	24 67	24 68	5	A
	B			B			B		

(b) X-wing 3

圖 7: 原本定義的 X-wing 系列範例

在圖 7(a)中，候選數 8 只出現在 2 個橫列中相同的縱行上，根據定義這屬於 X-wing 2，我們可把在這 2 縱行上的其他格子的候選數 8 刪除；在圖 7(b)中，候選數 8 只出現在 3 個橫列中相同的縱行上，根據定義這屬於 X-wing 3，我們可把在這 3 縱行上的其他格子的候選數 8 刪除。

以上傳統的 X-wing 定義，只針對 Sudoku。對於 Killer Sudoku，上述的定義無法來解決許多 Killer Sudoku 問題，因此我們延伸 X-wing 定義如下：

定義三：存在 K 個互不重疊的 Cages，{ $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_K$ } = A，存在 1 個 digit { D }一定會在 A 裡面，且存在另外 K 個互不重疊的 Cages，{ $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \ldots, \Gamma'_K$ } = B，A ≠ B，使得 D 只出現在 A∩B 的區域，當有這種情況時我們稱之為「X-Wing K」。

依據此定義，應可很容易地獲得以下定理，在此證明部分省略。

定理三：當 Cages A 和 Cages B 擁有 X-wing K 的狀況時，所有在 B - A∩B 區域內的 cells，不存在擁有 D 這個 digit 的 combinations。

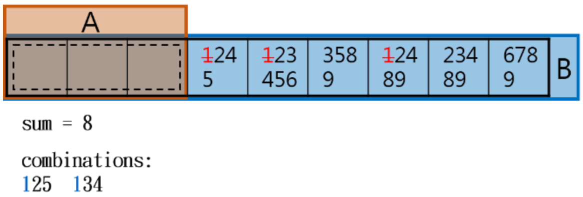
根據定理三我們可將 B - A∩B 區域內的 cells C，其 C.CB 中，刪除掉擁有 D 這個 digit 的 combinations。讓我們看回剛才的例子，如圖 7(a)，存在 K=2 個互不重疊的 Cages，{ Γ_1, Γ_2 } = A，存在 1 個 digit { D=8 }一定會在 A 裡面，且存在另外 K=2 個互不重疊的 Cages，{ Γ'_1, Γ'_2 } = B，A ≠ B，使得 D=8 只出現在 A∩B 的區域。這屬於新定義的 X-wing 2，根據定理三可把 B - A∩B 區域內的 cells，擁有候選數 8 的 combinations 刪除；如圖 7(b)，存在 K=3 個互不重疊的 Cages，{ $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ } = A，存在 1 個 digit { D=8 }一定會在 A 裡面，且存在另外 K=3 個互不重疊的 Cages，{ $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$ } = B，A ≠ B，使得 D=8 只出現在 A∩B 的區域。這屬於新定義的 X-wing 3，根據定理三可把 B - A∩B 區域內的 cells，擁有候選數 8 的 combinations 刪除。

1248	12467	12468	
1247	9	2367	B
12478	34567	34568	
1489			
12589			
12389			
6			
14589			
1489			
A			

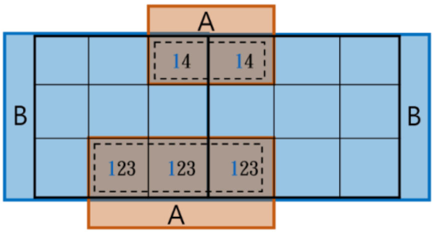
圖 8: X-wing 1

在傳統數獨，圖 8 的這種狀況另外安排一個名稱「Locked」，因為它不能用原本的 X-wing 定義去解釋它，但是在我們新定義裡面，這就是 X-wing 1。存在 K=1 個互不重疊的 Cage，{ Γ_1 } = A，存在 1 個 digit { D=7 }一定會在 A 裡面，且存在另外 K=1

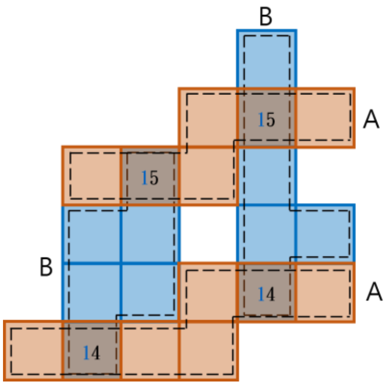
個互不重疊的 Cage，{ Γ'$_1$ } = B，A ≠ B，使得 D=7 只出現在 A∩B 的區域。根據定理三我們可把 B - A∩B 區域內的 cells，擁有候選數 7 的 combinations 刪除。接著讓我們來看看殺手數獨才會出現的狀況：



(a) X-wing 1



(b) X-wing 2



(c) X-wing 2

圖 9: 新定義的 X-wing 系列範例

如圖 9(a)，存在 K=1 個互不重疊的 Cage，{ Γ$_1$ } = A，存在 1 個 digit { D=1 }一定會在 A 裡面，且存在另外 K=1 個互不重疊的 Cage，{ Γ'$_1$ } = B，A ≠ B，使得 D=1 只出現在 A∩B 的區域，根據定理三我們可把 B - A∩B 區域內的 cells，擁有候選數 1 的 combinations 刪除。值得注意的是這例子同時也滿足 Naked 1，所以用 Naked 1 解釋也可；如圖(b)(c)，存在 K=2 個互不重疊的 Cage，{ Γ$_1$, Γ$_2$ } = A，存在 1 個 digit { D=1 }一定會在 A 裡面，且存在另外 K=2 個互不重疊的 Cage，{ Γ'$_1$, Γ'$_2$ } = B，A≠B，使得 D=1 只出現在 A∩B 的區域，根據定理三我們可把 B - A∩B 區域內的 cells，擁有候選數 1 的 combinations 刪除。

3.4 存在法(Existence method)

定理四：在一個 Cage Γ 中，對於每一個屬於Γ的 cell C，其 C.CB 中每一個 combination M (實際上也是個 digit) 必須存在於Γ.CB 中所有組合裡的 digits。

存在法是以上述定理為基礎，若 C.CB 中的一個 digit，不存在於Γ.CB 中之所有組合的 digits，則可刪除此 digit。例如圖 10，在一個 Cage Γ的Γ.CB 中不存在 digits = {9}，所以每一個屬於Γ的 cell C 必須刪除 combination M = {9}。

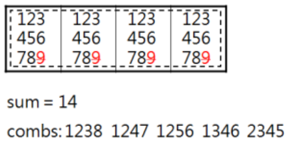
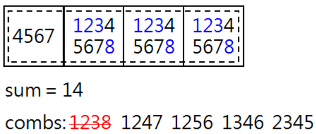


圖 10: 存在法

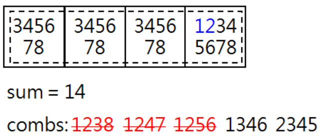
3.5 鴿洞法(Pigeon-holed method)

定理五：在一個 Cage Γ 中，對於Γ.CB 中的 combination M，存在少於 K 個 cells，K≤|Γ|，擁有 M 中的 K 個 digits。則必不存在此 combination M。

鴿洞法是以上述定理為基礎，若Γ.CB 中的 combination M，Γ內存在少於 K 個 cells，K≤|Γ|，擁有 M 中的 K 個 digits，則可刪除此 combination M。例如圖 11(a)，在一個 Cage Γ 中，對於Γ.CB 中的 combination M = {1238}，存在少於 K = 4 個 cells (只有 3 個)，K≤|Γ| = 4，擁有 M 中的 K = 4 個 digits。則刪除 combination M = {1238}；如圖 11(b)，在一個 Cage Γ 中，對於Γ.CB 中的 combination M = {1238}，存在少於 K = 2 個 cells (只有 1 個)，K≤|Γ| = 2，擁有 M 中的 K = 2 個 digits。則刪除 combination M = {1238}。同理可刪除Γ.CB 中的 combinations = {1247, 1256}。



(a)



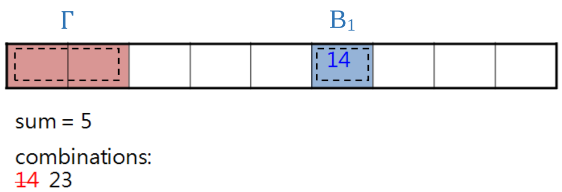
(b)

圖 11: 鴿洞法

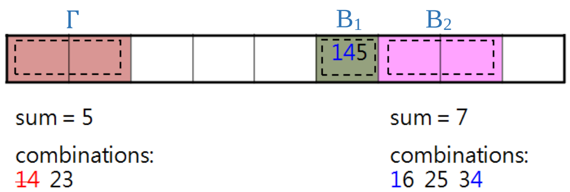
3.6 反向鴿洞法(Reverse pigeon-holed method)

定理六：在一個 Cage 中存在 Cage Γ，對於Γ.CB 中的 combination M，使得其它擁有相同 digits 的 K 組 combination 必須填入多於 K 個的 Buckets，則必不存在此 combination M。

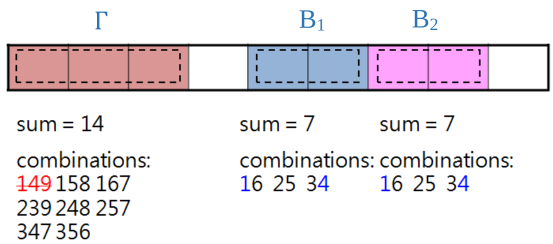
反向鴿洞法是以上述定理為基礎，若Γ.CB 中的 combination M，使得其它擁有相同 digits 的 K 組 combination 必須填入多於 K 個的 Buckets，則刪除此 combination M。例如圖 12(a)，Γ.CB 中的 combination M={14}使得 K=0 組 combination 必須填入 1>K=0 個的 Buckets B_1，則刪除此 combination M={14}；如圖 12(b)，Γ.CB 中的 combination M={14}使得 K=1 組 combination M’ = {5}必須填入 2>K=1 個的 Buckets B_1, B_2，則刪除此 combination M={14}；如圖 12(c)，Γ.CB 中的 combination M={149}使得 K=1 組 combination M’ = {25}必須填入 2>K=1 個的 Buckets B_1, B_2，則刪除此 combination M={149}。



(a)



(b)



(c)

圖 12: 反向鴿洞法

3.7 配對法(Pair match method)

定理七：在一個 Cage Γ中，cell C_1, C_2, …, C_K 屬於Γ，K = |Γ|，對於一 C_i 中的 combination M_i，在所有 C_j 中必須存在 combination M_j，$1 \leq i, j \leq K$，$j \neq i$，使得 M_i 和所有 M_j 可以組合成Γ.CB 中的 combination M。

配對法是以上述定理為基礎，若有一個 combination M_i 找不到可以配對的 combination M_j 去組成Γ.CB 中的 combination M，則刪除此 combination M_i。例如圖 13，在 Cage Γ中，cell C_2 中的 combination M_2={5}，在 C_1 中不存在 combination M_1={9}可以組合成Γ.CB 中的 combination M={59}，則我們可以刪除 cell C_2 中的 combination M_2={5}。

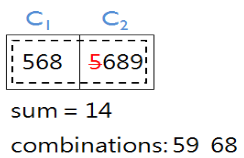
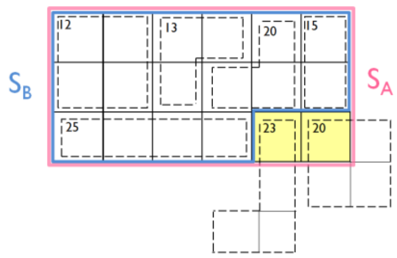


圖 13: 配對法

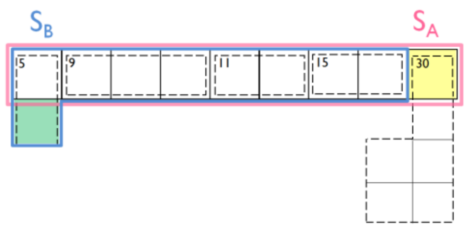
3.8 45 規則法(45’s rule method)

定理八：由一個到多個不重疊的 Sum- region (s)所組合出的 Sum- region S_A；和另一(些)由一個到多個不重疊的 Sum- region (s)所組合出的另一塊 Sum-region S_B，且 $SUM(S_A) \geq SUM(S_B)$，令$(S_A- S_A \cap S_B)$為 R_A，$(S_B-S_B \cap S_A)$為 R_B，則 $R_A – R_B = SUM(S_A) – SUM(S_B)$。

45 規則法是以上述定理為基礎，由於一個 9 格大小的 Cage，其總和一定為 45 (1~9 加總)，所以可利用這性質，計算出一些區塊間的總和關係。例如圖 14(a)，$SUM(S_A) = 90 \geq SUM(S_B) = 85$，則$(S_A-S_A \cap S_B)$ 即圖中黃色區塊，$(S_B-S_B \cap S_A)$ 即空集合，則黃色區塊－空集合 $= SUM(S_A) – SUM(S_B) =90-85=5$；如圖 14(b)，$SUM(S_A) = 45 \geq SUM(S_B) = 40$，則$(S_A-S_A \cap S_B)$ 即圖中黃色區塊，$(S_B-S_B \cap S_A)$ 即圖中綠色區塊，則黃色區塊－綠色區塊$= SUM(S_A) – SUM(S_B)=45－40=5$。



(a)



(b)

圖 14: 45 規則法

4. 結論

本章綜合研究結果，針對研究問題：(1) 對於原數獨判斷方法，提出延伸並改良判斷方法，使之適用於的殺手數獨，(2) 提出新的殺手數獨判斷方法，研究結果對於殺手數獨的判斷方法有了較完整的架構。本論文預計以本論文所提的方法，來設計資料結構及演算法，實作出一個殺手數獨的解題器 (Solver)。

參考文獻

[1] Huang, Y.-L., *The Study of Minimum Sudoku*, Master's thesis (in Chinese), Graduate Department of Compute Science, National Chiao Tung University, Taiwan, 2008

[2] Daily Killer Sudoku, from http://www.dailykillersudoku.com/main/rules/

[3] Hung-Hsuan Lin, I-Chen Wu, *An Efficient Approach to Solving the Minimum Sudoku Problem*, ICGA Journal (SCI), vol. 34(4), pp. 191-208, 2011.

[4] Mailer G., *A Guess-Free Sudoku Solver*, Master's thesis, Graduate Department of Computer Science, The University of Sheffield, 2008

[5] Delahaye, J.-P., *The Science Behind Sudoku*, Scientific American, Vol. 294(6), pp. 80–87, 2006

[6] Felgenhauer, B., and Jarvis, F., *Mathematics of Sudoku I*, Math. Spectrum, Vol. 39, pp. 15–22, 2006

[7] Fowler, G., Fowler's sudoku solver, 2007, from *http://www2.research.att.com/~gsf/sudoku/sudoku.html*.

[8] Lin, H.-H., and Wu, I.-C., *Solving the Minimum Sudoku Problem*, International Conference on Technologies and Applications of Artificial Intelligence (TAAI 2010), Hsinchu, Taiwan, November, 2010

[9] McGuire, G., Sudoku checker and the minimum number of clues problem, 2006, from *http://www.math.ie/checker.html*.

[10] Graham Kendall, Andrew Parkes, Kristian Spoerer, *A Survey Of NP-Complete Puzzles*, ICGA, 2008