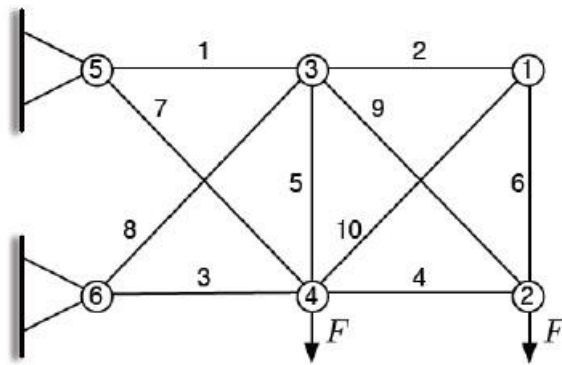


10-bar Truss Optimization

徐暘程

August 2024

1 題目說明



- 整體架構處在靜力平衡的情況下
- 所有桿件截面皆為圓形
- 材料為鋼，楊氏係數 $E = 200 \text{ GPa}$ ，密度 $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ，降伏強度 $\sigma_y = 250 \text{ MPa}$
- 平行桿件與鉛直桿件（桿件1至桿件6）長度皆為 9.14 m
- 桿件 1 至桿件 6 截面半徑相同為 r_1 ，桿件 7 至桿件 10 截面半徑相同為 r_2
- 所有桿件半徑的最佳化範圍為 0.001 至 0.5 m 之間
- 在節點 2 和節點 4 上的負載 F 皆為 $1.0 \times 10^7 \text{ N}$ 向下

2 求解過程

2.1 有限元素建立

2.1.1 基本參數定義

定義各節點座標(nod_coor)、桿長(L)、截面積(A)、楊氏係數(E)、矩陣自由度編號(ele_dof)、節點配對(ele_con)以及剛性矩陣(K)的維度。

```
function [Q,stress,R,K] = TenBarTruss(r)
nod_coor=[18.28 9.14; 18.28 0; 9.14 9.14; 9.14 0; 0 9.14; 0 0]; % node1~6 x、y座標
ele_con=[3 5; 1 3; 4 6; 2 4; 3 4; 1 2; 4 5; 3 6; 2 3; 1 4]; % elements' node connection

L(1:6) = 9.14;
L(7:10) = 12.9259;
A(1:6) = pi*r(1)^2;
A(7:10) = pi*r(2)^2;

ele_dof=[5 6 9 10; 1 2 5 6; 7 8 11 12; 3 4 7 8; 5 6 7 8; 1 2 3 4; ...
        7 8 9 10; 5 6 11 12; 3 4 5 6; 1 2 7 8]; % elements' node dof(from node1 to node10)組成10x4矩陣
E = 200*10^9;
K = zeros(12);
```

2.1.2 剛性矩陣建立

使用三層 for 迴圈依序對 12x12 的剛性矩陣(K)建立 144 個元素。

```
for e=1:10 %針對10個元素進行運算
    C=(nod_coor(ele_con(e,2),1)-nod_coor(ele_con(e,1),1))/L(e); %計算各元素cos值
    S=(nod_coor(ele_con(e,2),2)-nod_coor(ele_con(e,1),2))/L(e); %計算各元素sin值
    k=(A(e)*E/L(e)*[C*C C*S -C*C -C*S; C*S S*S -C*S -S*S; -C*C -C*S C*C C*S; ...
        -C*S -S*S C*S S*S]); %建立各元素的子矩陣

    ele_dof_vec=ele_dof(e,:); % 賦予第e列的ele_dof矩陣給列矩陣ele_dof_vec(:全部元素)
    for i=1:4
        for j=1:4
            K( ele_dof_vec(1,i), ele_dof_vec(1,j) ) = ...
                K( ele_dof_vec(1,i), ele_dof_vec(1,j) ) + k(i,j);
        end
    end
end
```

2.1.3 剛性矩陣建立

建立並設定作用力矩陣(F)的初始條件，並透過公式運算依序求解出位移矩陣(Q)、應力矩陣(stress)、反力矩陣(R)。

```
F(4)=-10^7;
F(8)=-10^7;
Q = inv(K(1:8,1:8))*F';
Q(12)=0;

for e=1:10
    C=(nod_coor(ele_con(e,2),1)-nod_coor(ele_con(e,1),1))/L(e);
    S=(nod_coor(ele_con(e,2),2)-nod_coor(ele_con(e,1),2))/L(e);
    stress(e)=(E/L(e))*[-C -S C S]*Q( (ele_dof(e,:)) );
end

R = K(9:12,1:12)*Q;
```

2.2 最佳化程式

2.2.1 主程式 main.m 建立

設定初始起點(r0)、目標值上下限(ub、lb)，並設定輸出顯示結果。

```
clc;clear;
fun = @object;
nonlcon = @nonlcon;
TenBarTruss = @TenBarTruss;

% 初始點&線性限制不等式
r0 = [0.1,0.1];
A = [];
b = [];
% 線性限制等式
Aeq = [];
beq = [];
% 目標值上下限 & 運算方式
lb = [0.001,0.001];
ub = [0.5,0.5];
options = optimoptions('fmincon','Display','final','Algorithm','sqp');

% 最佳化運算 & 結果顯示
[r,fval,exitflag] = fmincon(fun,r0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon,options);
[Q, stress,R,K] = TenBarTruss(r)
```

2.2.2 副程式 nonlcon.m 建立

設定邊界條件。

```
function [c,ceq]=nonlcon(r)
[Q,stress] = TenBarTruss(r);
c(1) = (Q(3,1)^2+Q(4,1)^2)^0.5-0.02;
c(2) = max(abs(stress))-250*10^6;
ceq = [];
```

2.2.3 副程式 object.m 建立

設定目標函數的數學式。

```
function object = fun(r)
length = 9.14;
density = 7860;
object = ( 6*r(1)^2 + 4*r(2)^2*sqrt(2) ) * pi * length * density;
```

3 最終求解

3.1 剛性矩陣(K)

K =

```
1.0e+10 *
    0.7911    0.1723         0         0   -0.6188         0   -0.1723   -0.1723         0         0         0         0
    0.1723    0.7911         0   -0.6188         0         0   -0.1723   -0.1723         0         0         0         0
         0         0    0.7911   -0.1723   -0.1723    0.1723   -0.6188         0         0         0         0         0
         0   -0.6188   -0.1723    0.7911    0.1723   -0.1723         0         0         0         0         0         0
   -0.6188         0   -0.1723    0.1723    1.5822         0         0         0   -0.6188         0   -0.1723   -0.1723
         0         0    0.1723   -0.1723         0    0.9634         0   -0.6188         0         0   -0.1723   -0.1723
   -0.1723   -0.1723   -0.6188         0         0         0    1.5822         0   -0.1723    0.1723   -0.6188         0
   -0.1723   -0.1723         0         0         0   -0.6188         0    0.9634    0.1723   -0.1723         0         0
         0         0         0         0   -0.6188         0   -0.1723    0.1723    0.7911   -0.1723         0         0
         0         0         0         0         0         0    0.1723   -0.1723   -0.1723    0.1723         0         0
         0         0         0         0   -0.1723   -0.1723   -0.6188         0         0         0    0.7911    0.1723
         0         0         0         0   -0.1723   -0.1723         0         0         0         0    0.1723    0.1723
```

3.2 位移矩陣(Q)

```
Q =  
  
    0.0038  
   -0.0189  
   -0.0042  
   -0.0195  
    0.0032  
   -0.0087  
   -0.0033  
   -0.0093  
         0  
         0  
         0  
         0
```

3.3 反力矩陣(R)

```
R =  
  
1.0e+07 *  
  
   -3.0000  
    1.0407  
    3.0000  
    0.9593
```

3.4 應力矩陣(stress)

```
stress =  
  
1.0e+07 *  
  
    6.9286    1.4647   -7.2163   -2.0715    1.3209    1.4647    6.6079   -6.0913    3.7195   -2.6301
```

3.5 最佳化結果

A	[]
Aeq	[]
b	[]
beq	[]
exitflag	1
fun	@object
fval	2.1241e+05
K	12x12 double
lb	[1.0000e-03,1....
nonlcon	@nonlcon
options	1x1 Fmincon
Q	12x1 double
r	[0.3000,0.2663]
R	[-3.0000e+07;...
r0	[0.1000,0.1000]
stress	[6.9286e+07,1....
TenBarTruss	@TenBarTruss
ub	[0.5000,0.5000]