

IFTS-ZJU

Computation Plasma Physics

The Potential Field for Two Opposite Pairs of Electric Charges

Hua-sheng XIE

huashengxie@gmail.com

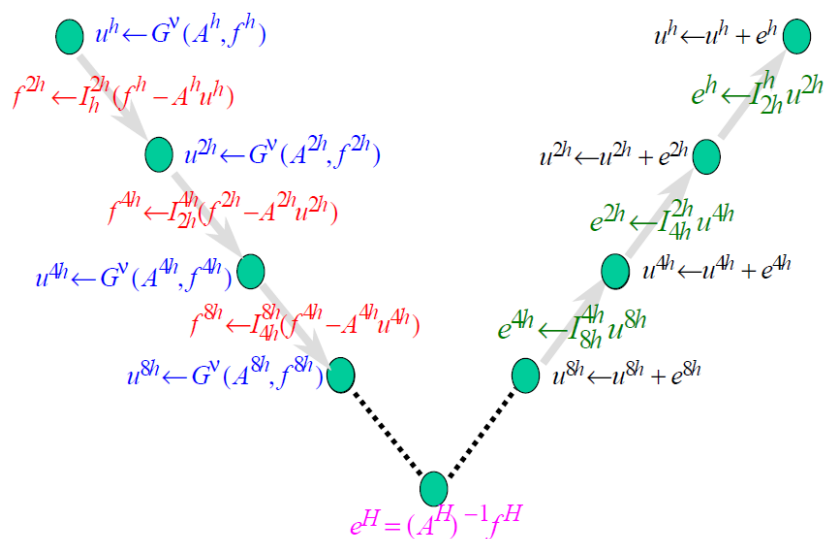
2010-9-12

1 算法选择

二维泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y)$$

采用多重网格法, V-Cycle:

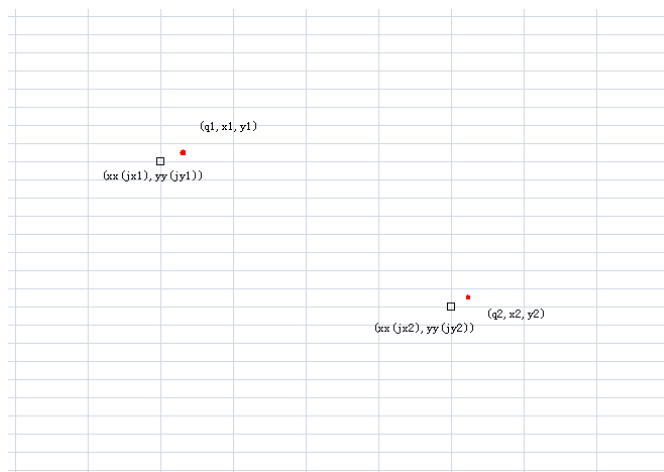


From William L. Briggs, *A Multigrid Tutorial*

2 解 Poisson 方程

求解电荷对势场。

2.1 说明

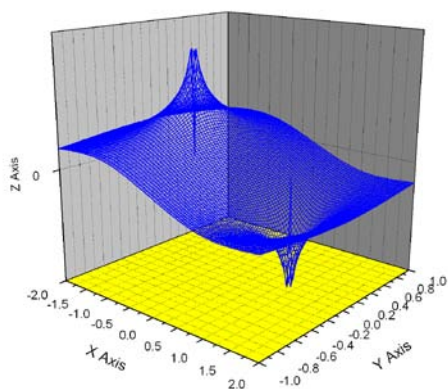


网格划分及电荷位置

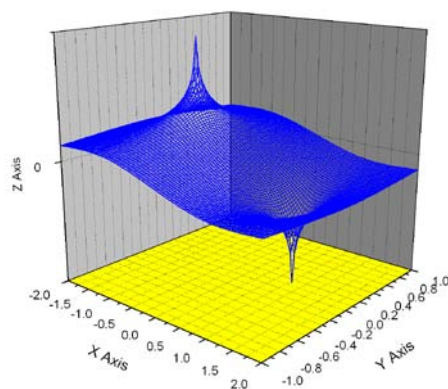
如上图，电荷量大小及位置任意给定。对于点电荷，理论上，电荷密度分布是 δ 函数，但在数值求解中，这一点是做不到的。这里采用类似 PIC 中的做法，按面积权重分配到电荷邻近的四个格点。

2.2 求解

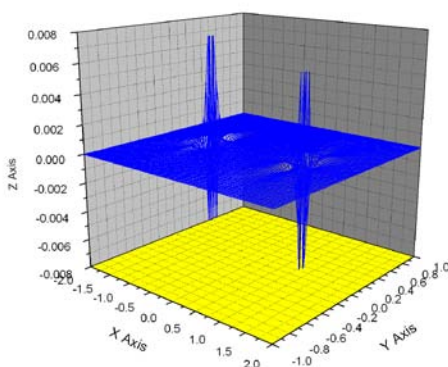
去除量纲， $\nabla^2 \Psi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ，取 $\epsilon_0 = 1$ 。固定边界条件。



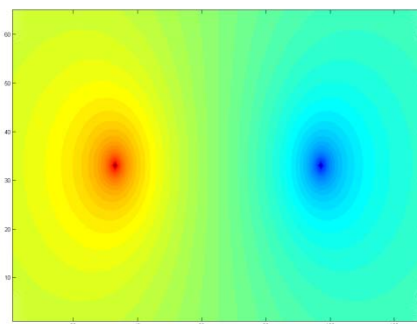
理论解



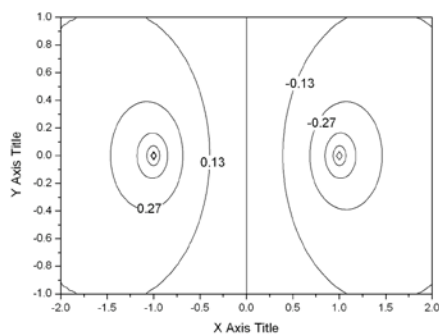
数值解



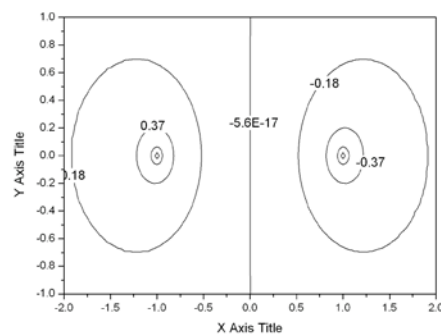
偏差



等高线图（数值解）



等高线图（理论解）



等高线图（数值解）

2.3 总结

运行正常。在电荷附近由于奇异性，偏差较大，这是数值求解难于避免的一个问题，属正常现象。

3 运行效率

同样的精度（ 128×64 , $\text{eps}=1.0\text{e-}12$ ），多重网格法和高斯-赛德勒法比较。

```

E:\phd\course\cpp\point charge\multigrid\multigrid.exe
Cycle 20.
rn=2.0268e-009
Cycle 21.
rn=6.2691e-010
Cycle 22.
rn=2.7335e-010
Cycle 23.
rn=1.1371e-010
Cycle 24.
rn=3.5021e-011
Cycle 25.
rn=1.6267e-011
Cycle 26.
rn=6.3864e-012
Cycle 27.
rn=2.0118e-012
Cycle 28.
rn=9.7234e-013
Total time used: 0.047000
Max error: -1.#INFe+000 at j=32 k=32
请按任意键继续. . .
搜狗拼音 半:

```

多重网格法，用时 0.047

```

E:\phd\course\cpp\point charge\multigrid\iterative\iterative.exe
count=4533
count=4534
count=4535
count=4536
count=4537
count=4538
count=4539
count=4540
count=4541
count=4542
count=4543
count=4544
count=4545
count=4546
count=4547
count=4548
count=4549
count=4550
count=4551
count=4552
count=4553
Total time used: 4.796000
Max error: -1.#INFe+000 at j=32 k=32
请按任意键继续. . .
搜狗拼音 半:

```

高斯-赛德勒迭代法，用时 4.796

复杂度分析有 Multigrid $\sim O(n)$, Gauss-Seidel iteration $\sim O(n^2 \log n)$ 。这里也可看到，

多重网格法时间效率确实远远优于高斯-赛德勒迭代法。

4 附件

`multigrid.c`（多重网格法求解泊松方程程序）

`iteractive.c`（高斯-赛德勒法求解泊松方程程序）

另：这两个程序中均提供了供测试的函数，可检验，数值结果与理论结果吻合。这里从略。