Linear Algebra for Statistics

Chapter 12

Instructor: Seokho Lee (이석호)

Hankuk University of Foreign Studies

Chapter 12 고유값과 고유벡터

정방행렬 $A_{n\times n}$ 의 선형변환 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ 에 대하여 $\mathbf{0}_n$ 이 아닌 특정 벡터 $\mathbf{x}(\neq \mathbf{0}_n)$ 는 아래와 같이 회전없이 크기만 바뀌거나, 역방향으로 주어진다.

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \qquad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n). \tag{12.1}$$

이 경우, 스카라 λ 를 행렬 A 의 고유값(eigenvalue) 이라 하고 벡터 $\mathbf{x}$ 를 해당 고유값에 대한 고유벡터(eigenvector)라고 부른다.

12.1 고유값(Eigenvalue)

Definition

정방행렬 A 에 대하여, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 가 성립할 때, λ 를 고유값(eigenvalue), $\mathbf{x}$ 를 λ에 대응되는 고유벡터(eigenvector)라고 한다. 이 때, $\mathbf{x}$ 는 영이 아닌 벡터이다.

Example

아래의 선형변환을 고려하자.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\mathbf{x}. \tag{12.2}$$

점 $\mathbf{x}' = (1,1)^T$ 에 대한 변환 결과는

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{x}' \tag{12.3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12.4}$$

이므로 $\mathbf{y}' = (1,2)^T$ 로 변환된다. 이는 $\mathbf{x}'$ 에 대하여 길이 및 회전변환을 통해 얻어진다. 반면 $\mathbf{x}'' = (0,1)^T$ 의 변환은

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12.5}$$

이 되어 다음을 만족한다.

$$\mathbf{y}'' = A\mathbf{x}'' = 1 \cdot \mathbf{x}''. \tag{12.6}$$

따라서 $\lambda = 1$ 은 행렬 A 의 고유값이고 $\mathbf{x}''$ 는 해당 고유벡터이다.

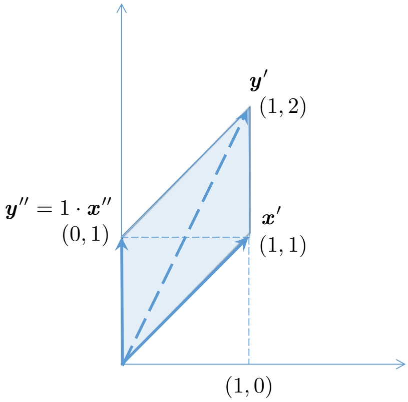

Figure 12.1: 선형변환 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ 와 고유값 1과 고유벡터 $\mathbf{x}''$ 에 대한 그림

Remark 정방행렬 A 의 고유값이 λ, 고유벡터가 $\mathbf{x}$ 라고 할 때, 임의의 상수 c에 대하여

$$A(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x}) \tag{12.7}$$

가 성립하고 $\mathbf{x}' = c\mathbf{x}$ 라고 하면 $A\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}'$ 가 여전히 성립하므로 고유값에 대한 고유벡터는 무한히 존재한다.

Remark 정방행렬 A 에 대하여 고유값이 λ 이고 고유벡터가 $\mathbf{x}$라고 할 때,

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x} \tag{12.8}$$

가 되어, 행렬 A^2 의 고유값은 λ^2 이고 고유벡터는 $\mathbf{x}$ 이다. 같은 방식으로 행렬 A^k 의 고유값은 λ^k 이며 해당 고유벡터는 여전히 $\mathbf{x}$ 가 된다.

Example

선형변환을 위한 행렬이 아래와 같을 때

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{12.9}$$

선형변환 $\mathbf{y} = M\mathbf{x}$ 는 다음 그림과 같다. 이로부터 예상되는 행렬 M 의 고유값과 고유벡터를 구하라.

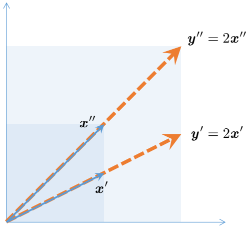

Figure 12.2: 선형변환 $\mathbf{y} = M\mathbf{x}$ 와 고유값-고유벡터에 대한 그림

Example (continue)

(풀이) 행렬 M 에 의해 변환되는 형태는

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} \tag{12.10}$$

이므로, 임의의 $(x_1, x_2)^T$ 에 대하여 $(2x_1, 2x_2)^T$ 가 된다. 즉 임의의 $\mathbf{x}$ 에 대하여 $\mathbf{y} = 2\mathbf{x}$ 이 성립한다. 따라서 $M\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$ 가 모든 $\mathbf{x}$ 에 대해 성립하므로 고유값은 $\lambda = 2$ 이고 고유벡터는 $\mathbf{0}_2$이 아닌 모든 벡터가 될 것이다.

12.2 고유값을 구하는 방법

고유값과 고유벡터가 만족하는 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 관계로부터

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{12.11}$$

의 방정식을 얻을 수 있다. 이 방정식에서 행렬 $A - \lambda I$ 가 비정칙(singular)행렬일 때 $\mathbf{0}$ 이 아닌 해 $\mathbf{x}$ 를 얻을 수 있으므로,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \tag{12.12}$$

의 조건을 만족해야 한다. 왜냐하면 $\det(A - \lambda I) \neq 0$ 이면 $(A - \lambda I)^{-1}$ 가 존재하므로,

$$\mathbf{x} = (A - \lambda I)^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{12.13}$$

이 되고, 이는 만족하는 $\mathbf{x}$ 는 영벡터만 해당하기 때문이다.

Remark 행렬 A 의 고유값은

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \tag{12.14}$$

을 만족하는 λ 를 구하면 된다. 식 $p(\lambda) = 0$ 을 행렬 A 의 특성화방정식(characteristic equation)이라 하고 $p(\lambda)$를 특성화다항식(characterstic polynomial)이라 한다.

Example

다음 행렬의 고유값을 특성화방정식을 이용하여 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{12.15}$$

(풀이) 특성화방정식은 아래와 같다.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0.$$

따라서 $\lambda = 1, 4$ 이며, 이 두 값은 행렬 A 의 고유값이다.

Example

다음 행렬의 고유값을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

12.3 고유벡터를 구하는 방법

고유값이 주어졌을 때, 고유벡터는

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{12.16}$$

혹은

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{= M}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{12.17}$$

을 만족한다. 따라서, 위 방정식 $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 해를 구하면 된다. 이를 위해 확장행렬 $(M|\mathbf{0})$ 에 대한 가우스-조단 알고리즘을 사용하여 해를 구한다.

Example

아래 행렬의 고유값이 1임을 알 때, 해당되는 고유벡터를 구하라

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{12.18}$$

(풀이) 다음 계산을 통해 얻는다.

$$(B - \lambda I|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{2,1(-1)}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

따라서 $x_1 + 2x_2 = 0$ 을 만족하는 모든 $(x_1, x_2)^T$ 가 고유벡터가 된다. 즉

$$\mathbf{x} = (-2t, t)^T, \quad t \text{ 는 0 이 아닌 실수} \tag{12.19}$$

인 벡터가 모두 고유벡터이며,

$$\mathbf{x} = (-2, 1)^T, \quad \mathbf{x} = (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})^T \tag{12.20}$$

들이 고유벡터이다.

Example

위의 행렬 B 의 또 다른 고유값은 4이다. 이 고유값에 대한 고유벡터를 가우스-조던 알고리즘을 사용해 구하라.

12.4 고유값과 고유벡터의 성질

Theorem (정리 12.1 고유값과 행렬식, 그리고 궤적)

행렬 $A_{n\times n}$ 의 고유값이 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 라고 하면 다음이 성립한다.

(1) $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

(2) $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

Proof.

정확한 증명은 강의의 범위를 벗어나므로 생략한다. 여기서는 간단한 2×2 행렬의 예를 들어 설명한다. 아래의 행렬에 대하여,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{12.21}$$

의 고유값을 구하면

Proof.

$$\det(A-\lambda I_n) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

이므로

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0$$

을 만족하는 해 λ_1, λ_2 는

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d = \mathrm{tr}(A) \tag{12.22}$$

$$\lambda_1 \times \lambda_2 = ad - bc = \det(A) \tag{12.23}$$

임을 확인할 수 있다. 동일한 결과가 일반적인 크기의 행렬에 대해서 성립한다. □

Corollary (따름정리 12.2)

만일 행렬 $A_{n \times n}$ 의 고유값 가운데 0이 존재하면 행렬 A 는 비정칙(singular) 행렬로서 역행렬이 존재하지 않는다.

Proof.

고유값 중 0이 존재한다고 가정하면, 행렬식은

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \tag{12.24}$$

이 되므로 A 는 비정칙행렬이다. □

Example

아래 행렬의 고유값을 구하고, 정칙행렬인지 비정칙행렬인지 구분하라.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}. \tag{12.25}$$

Theorem (정리 12.3 선형독립인 고유벡터)

행렬 A 의 고유값이 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 이고 대응되는 고유벡터가 각각 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ 일 때, 만일 고유값들이 서로 다른 값을 가지면 고유벡터는 선형독립이다.

Proof.

서로 다른 k 개의 고유값 ($\lambda_i \neq \lambda_j$ for all $i, j = 1, 2, \ldots, n$) 이 있고 대응하는 고유벡터 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ 가 서로 선형독립이라고 가정하자. 이제 k 개의 고유값과 다른 $k+1$번째 고유값이 있고 대응하는 고유벡터 $\mathbf{u}_{k+1}$ 가 있다고 가정하면, 고유벡터들의 선형결합

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k + c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{12.26}$$

에 대하여, 양변에 λ_{k+1} 을 곱하면 다음과 같다.

$$c_1\lambda_{k+1}\mathbf{u}_1 + c_2\lambda_{k+1}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\lambda_{k+1}\mathbf{u}_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0}. \tag{12.27}$$

식 (12.26)의 양변 왼쪽에 행렬 A 를 곱하면

$$c_1A\mathbf{u}_1 + c_2A\mathbf{u}_2 + \cdots + c_kA\mathbf{u}_k + c_{k+1}A\mathbf{u}_{k+1} = A\mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{12.28}$$

Proof.

이 되고, 고유값-고유벡터의 성질에 의해 다음을 얻는다.

$$c_1\lambda_1\mathbf{u}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{u}_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0}. \tag{12.29}$$

식 (12.29)에서 식 (12.27)을 빼면

$$c_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)\mathbf{u}_1 + c_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mathbf{u}_k = \mathbf{0} \tag{12.30}$$

이 된다. 가정에 의해 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ 는 선형독립이므로

$$c_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k \tag{12.31}$$

이어야 한다. 고유값이 서로 다른 값을 가지고 있으므로 $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ 을 만족해야 한다. 이를 식 (12.26)에 넣으면

$$c_{k+1}\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{12.32}$$

을 얻는다. 고유벡터 정의에 의해 $\mathbf{u}_{k+1} \neq \mathbf{0}$ 이므로 $c_{k+1} = 0$ 이 되어,

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = c_{k+1} = 0 \tag{12.33}$$

을 만족해야 한다. 따라서, 수학적귀납법에 의해, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$ 은 선형독립이다. □

Theorem (정리 12.4 전치행렬의 고유값)

정방행렬 A의 고유값과 전치행렬 A^T 의 고유값은 일치한다.

Proof.

행렬 A 의 고유값 λ 는 정의에 의해 $\det(A - \lambda I) = 0$ 을 만족한다. 따라서

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I) = 0 \tag{12.34}$$

이므로 λ 는 A^T 의 고유값이 된다. □

Example

아래 행렬 A의 고유값은 $1, 4$이다. 이때, 행렬 A^T의 고유값을 $\det(A^T - \lambda I_2) = 0$을 사용하여 확인하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{12.35}$$

Example

위 행렬 A^T 의 고유값 1에 대한 공유벡터를 구하여 행렬 A 의 고유값 1의 고유벡터와 비교하라.

12.5 특성화방정식 구하기

특성화방정식은 정의에 의해

$$p(\lambda) = \det(A_{n\times n} - \lambda I_n) = 0 \tag{12.36}$$

으로 주어진다. $n = 2, 3$ 인 경우, 단순한 형태로 얻을 수 있다.

Theorem (정리 12.5 2×2 행렬의 특성화방정식)

다음 행렬에 대하여

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

특성화방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0. \tag{12.37}$$

Theorem (정리 12.6 3 × 3 행렬의 특성화방정식)

다음 행렬에 대하여

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

특성화방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \mathrm{tr}(A)\lambda^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda - \det(A) = 0. \tag{12.38}$$

여기서 A_{11}, A_{22}, A_{33} 은 각각 a_{11}, a_{22}, a_{33} 의 여인수(cofactor)이다.

Example

다음 행렬의 특성화방정식을 각각 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}, \tag{12.39}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{12.40}$$

Theorem (정리 12.7 블록삼각행렬의 특성화방정식)

A_1, A_2 가 정방행렬이고 행렬 A 가 아래와 같이 이루어진 블록삼각행렬이면

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{12.41}$$

A 의 특성화방정식은

$$p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda) = 0 \tag{12.42}$$

으로 주어진다. 여기서 $p_1(\lambda), p_2(\lambda)$는 각각 A_1, A_2의 특성화다항식이다.

Theorem (정리 12.8 블록대각행렬의 특성화방정식)

A_1, A_2, A_3 가 정방행렬이고 행렬 A 가 아래와 같이 이루어진 블록삼각행렬이면

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \tag{12.43}$$

A 의 특성화방정식은

$$p(\lambda) = p_1(\lambda)p_2(\lambda)p_3(\lambda) = 0 \tag{12.44}$$

으로 주어진다. 여기서 $p_1(\lambda), p_2(\lambda), p_3(\lambda)$는 각각 A_1, A_2, A_3 의 특성화다항식이다.

Example

다음 행렬의 특성화방정식을 구하라.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{12.45}$$

12.6 직교행렬의 고유값

Theorem (정리 12.9 직교행렬의 고유값)

행렬 A 가 직교행렬(orthogonal matrix)이면, 행렬 A 의 고유값은 1 혹은 -1 값만 갖는다.

Proof.

행렬 A 의 고유값이 λ, 고유벡터가 $\mathbf{x}$ 라고 하면

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{12.46}$$

가 성립한다. 여기에 양변 좌측에 $(A\mathbf{x})^T$ 를 곱하면 다음이 성립한다.

$$(A\mathbf{x})^T A\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})^T \lambda\mathbf{x}. \tag{12.47}$$

따라서, $A^T A = I$ 이므로,

$$\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} \tag{12.48}$$

이 되어 $\lambda^2 = 1$ 을 만족한다. 따라서 $\lambda = 1$ 또는 $\lambda = -1$ 이다. □

Example

아래 직교행렬들에 대하여, 고유값은 1 혹은 -1임을 계산을 통해 보여라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.49}$$

Theorem (정리 12.10 회전변환과 고유값)

회전변환을 나타내는 행렬 A 가 다음과 같을 때,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{12.50}$$

만일 $\theta \neq k\pi$ (k 는 정수) 이면, 행렬 A의 실수값을 취하는 고유값과 고유벡터는 존재하지 않는다.

Proof.

회전각도가 $k\pi(= k \times 180^\circ)$ 가 되지 않는 한, 회전변환 전과 후의 벡터가 실수배가 되는 관계

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{12.51}$$

가 성립할 수 없으므로 자명하다. □

Remark 회전변환은 직교행렬이므로, π 의 배수의 회전인 경우는 실수의 고유값 1 또는 -1 을 갖는다. 다른 각도의 회전의 경우 허수의 고유값을 갖는다.

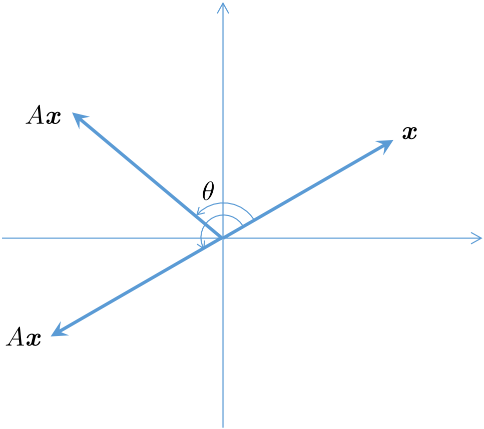

Figure 12.3: 회전변환 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ 와 고유값-고유벡터

Example

아래는 반시계방향으로 30° 회전시키는 변환행렬이다.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{12.52}$$

(1) 행렬 A 가 직교행렬임을 보여라.

(2) 행렬 A 의 특성화방정식을 구하라.

(3) 위 특성화방정식이 실근을 갖지 않음을 보여라.

(풀이)

(1) 다음을 손쉽게 보일 수 있고, 따라서 직교행렬이다.

$$AA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.53}$$

$$A^TA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{12.54}$$

Example (continue)

(풀이)

(2) 특성화방정식은 다음과 같다

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-\lambda+1=0. \tag{12.55}$$

(3) 위 특성화방정식은 실근을 갖지 않는다. 허근으로 $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$를 갖는다.

Example

아래는 반시계방향으로 180° 회전시키는 변환행렬이다.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{12.56}$$

(1) 행렬 A 가 직교행렬임을 보여라.

(2) 행렬 A 의 특성화방정식을 구하라.

(3) 위 특성화방정식이 실근 -1을 가짐을 보여라.

12.7 멱등행렬의 고유값

Theorem (정리 12.11 멱등행렬의 고유값)

행렬 A 가 멱등행렬이면, 행렬 A 의 고유값은 0 또는 1 값을 취한다.

Proof.

행렬 A 의 고유값이 λ, 고유벡터가 $\mathbf{x}$ 라고 하면 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 를 만족해야 하므로, 여기에 양변 좌측에 A 를 곱하면 좌변은 멱등행렬의 성질에 의해

$$AA\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{12.57}$$

이고, 우변은

$$\lambda A\mathbf{x} = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x} \tag{12.58}$$

이므로 $\lambda = \lambda^2$ 를 만족한다. 따라서 만족하는 해는 $\lambda = 0$ 혹은 1이다. □

Example

아래 멱등행렬의 고유값이 0 혹은 1 임을 특성화방정식의 해를 구해서 확인하라.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{12.59}$$

12.8 대칭-양정치행렬의 고유값

Theorem (정리 12.12)

행렬 $A_{n\times n}$ *가 대칭행렬이고 양정치행렬이면 이차형식*

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1 \tag{12.60}$$

은 단면이 타원인 다차원 타원체(ellipsoidal)를 형성하고, 각 축방향의 반경은 $1/\sqrt{\lambda_i}$ *가 된다. 여기서* λ_i *는* A *의 고유값을 나타낸다. (증명생략)*

Example

다음 행렬 A, B 에 대한 이차형식의 그래프는 각각 구(sphere) 및 타원체(ellipsoid)를 형성한다.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \tag{12.61}$$

이를 살펴보기 위해, 각 행렬을 이용한 이차형식을 구하기 위해 $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ 라 하면

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = 2x^2 + 4y^2 + 5z^2$$

이 된다. 이를 동일한 1값을 갖는 해에 대응하는 그래프는 Figure 12.4에 도시되어 있다. 여기서 각 축의 반경은 구의 경우 1이고, 타원의 경우는 각각 $1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{4}, 1/\sqrt{5}$이다.

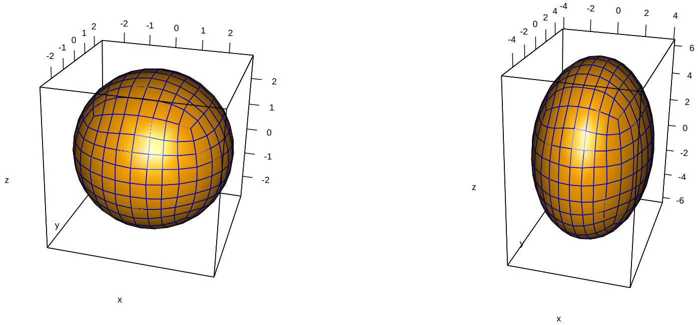

Figure 12.4: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$의 그래프(위) 및 $2x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 1$의 그래프(아래)