CH4. 분해법

평활법과 분해법

- **평활법**
  - 시계열을 구성하는 각 성분들을 구분하지 않고 평활에 의해 불규칙성분을 제거하여 미래의 값을 예측
- **평활법**
  - 20세기 초에 경제학자들이 경기변동을 예측하려고 시도한데서 비롯된 전통적인 시계열 분석 방법
  - 시계열을 구성하는 각 성분들을 따고 구분한 후 이를 이용하여 미래를 예측
  - 계절조정 (seasonal adjustment)을 위해 사용

시계열 성분

- **불규칙성분(또는 우연성분) :** I_t
  - 시간과 관계없이 랜덤한 원인에 의해 나타나는 변동
  - 여러 가지 복합적인 원인에 의한 변동을 의미
- **추세성분 (또는 경향변동, 장기변동) :** T_t
  - 시간이 경과함에 따라 증가하거나 감소하는 등의 어떤 추세를 가지고 움직이는 장기적인 변동
  - 보통 다항식으로 설명
- **계절성분 :** S_t
  - 1년, 1개월, 1주일 등의 일정한 주기를 가지고 규칙적으로 반복되는 변동
  - 보통 1년 이내의 주기적인 변동을 의미
  - 삼각함수 또는 지시함수들의 선형결합으로 설명
- **순환성분 :** C_t
  - 계절성분과 유사하나 그 변화의 주기가 길 때의 변동(경기변동)

분해법의 기본 가정과 모형

- **기본 가정**
  - 시계열이 앞에서 설명한 4가지 성분들로 구성

- **모형**
  - 가법모형 (additive model)

$$Z_t = T_t + S_t + C_t + I_t$$

    - 계절성분의 진폭이 시계열의 수준에 상관없이 일정할 때 주로 사용

  - 승법모형 (multiplicative model)

$$Z_t = T_t \times S_t \times C_t \times I_t$$

    - 시계열의 수준에 따라 계절성분의 진폭이 달라질 때 주로 사용
    - 로그변환 : $\ln Z_t = \ln T_t + \ln S_t + \ln C_t + \ln I_t$

추세모형에 의한 분해

- **추세 성분**

$$T_t = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_k t^k$$

- **계절성분 (주기 : s)**

  - $S_t = \sum_{i=1}^{s} \delta_i \times IND_{ti}, \quad IND_{ti} = \begin{cases} 1, & t = i(mod\ s) \\ 0, & etc. \end{cases}$

  - $S_t = \sum_{i=1}^{m} A_i sin\left(\frac{2\pi i}{s} t + \phi_i\right)$

- **순환성분**

  - 순환성분에 대한 주기를 찾는 문제 때문에 모형을 이용한 분해법에서는 일반적으로 순환성분은 고려하지 않음

추세모형에 의한 분해 - 가법모형

- **가법모형** $Z_t = T_t + S_t + I_t$
- **추정단계**

1. 추세성분 추정
   - $\{Z_t\}$ 에 추세모형 적합 : $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_k t^k + \varepsilon_t$
   - 추세성분 : $\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \cdots + \hat{\beta}_k t^k$
2. 계절성분 추정
   - $\{Z_t - \hat{T}_t\}$ 에 계절추세모형 적합 :$Z_t - \hat{T}_t = \sum_{i=1}^{s} \delta_i \times IND_{ti} + \varepsilon_t$
   - 계절성분 : $\hat{S}_t = \sum_{i=1}^{s} \hat{\delta}_i \times IND_{ti}$
3. 불규칙 성분 검토 : $\hat{I}_t = Z_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t$
   - 불규칙 성분에 체계적인 정보가 남아 있는지 검토

추세모형에 의한 분해 - 승법모형

- **가법모형** $Z_t = T_t \times S_t \times I_t$
- **추정단계**

1. 추세성분 추정
   - $\{Z_t\}$ 에 추세모형 적합 : $Z_t = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_k t^k + \varepsilon_t$
   - 추세성분 : $\hat{T}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \cdots + \hat{\beta}_k t^k$
2. 계절성분 추정
   - $\{Z_t/\hat{T}_t\}$ 에 계절추세모형 적합 :$Z_t/\hat{T}_t = \sum_{i=1}^{s} \delta_i \times IND_{ti} + \varepsilon_t$
   - 계절성분 : $\hat{S}_t = \sum_{i=1}^{s} \hat{\delta}_i \times IND_{ti}$
3. 불규칙 성분 검토 : $\hat{I}_t = Z_t/(\hat{T}_t \times \hat{S}_t)$
   - 불규칙 성분에 체계적인 정보가 남아 있는지 검토

추세모형에 의한 분해

- **단점**
  - 추세성분과 계절성분이 서로 독립이 아니므로 각 성분들을 3단계에 걸쳐 추정하는 것은 옳지 않다.

- **동시추정**

$$Z_t = \beta_1 t + \cdots + \beta_k t^k + \delta_1 IND_{t1} + \cdots + \delta_s IND_{ts} + \varepsilon_t$$

- **가정**
  - 모수 $\beta_1, \dots, \beta_k, \delta_1, \dots, \delta_s$ 들이 시간에 따라서 변하지 않음
  - 만약 모수가 시간에 따라서 변한다면 평활법을 사용하는 것이 바람직

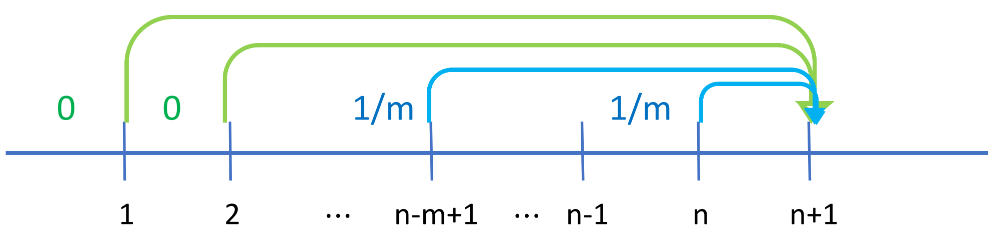
이동평균법

- **이동평균법(moving average method)**
  - 표본평균처럼 관측값 전부에 동일한 가중치를 주는 대신에 최근 m개의 값들만을 이용하여 평균을 구하는 방법
  - 장점 :
    - 지엽적인 변동을 제거하여 장기적인 추세 파악 가능
    - 시계열이 생성되는 시스템에 변화에 쉽게 대처 가능
    - 쉬운 계산법
  - 예측의 목적보다는 주로 분해법에서 계절조정을 하는데 사용

이동평균법

- **단순이동평균법(simple moving average method)**
  - 모형 : $Z_t = \beta_0 + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$
  - 모수 β_0는 시간에 따라 변할 수 있는 미지의 값

$$M_{n,1} = \frac{1}{m}(Z_{n-m+1} + \cdots + Z_n)$$



  - 기대값 : $E(M_{n,1}) = \frac{1}{m}\{E(Z_{n-m+1}) + \cdots + E(Z_n)\} = \beta_0$

이동평균법 - 예측

예측

- n시점에서 l-시차 후의 예측값 : $\hat{Z}_n(l) = M_{n,1}$

예측 갱신

- 새로운 관측값 Z_{n+1} 이 추가될 경우

$$M_{n+1,1} = \frac{1}{m}(Z_{n-m+2} + \cdots + Z_{n+1})$$

$$= \frac{1}{m}(Z_{n-m+1} + \cdots + Z_n - Z_{n-m+1} + Z_{n+1})$$

$$= M_{n,1} + \frac{1}{m}(Z_{n+1} - Z_{n-m+1})$$

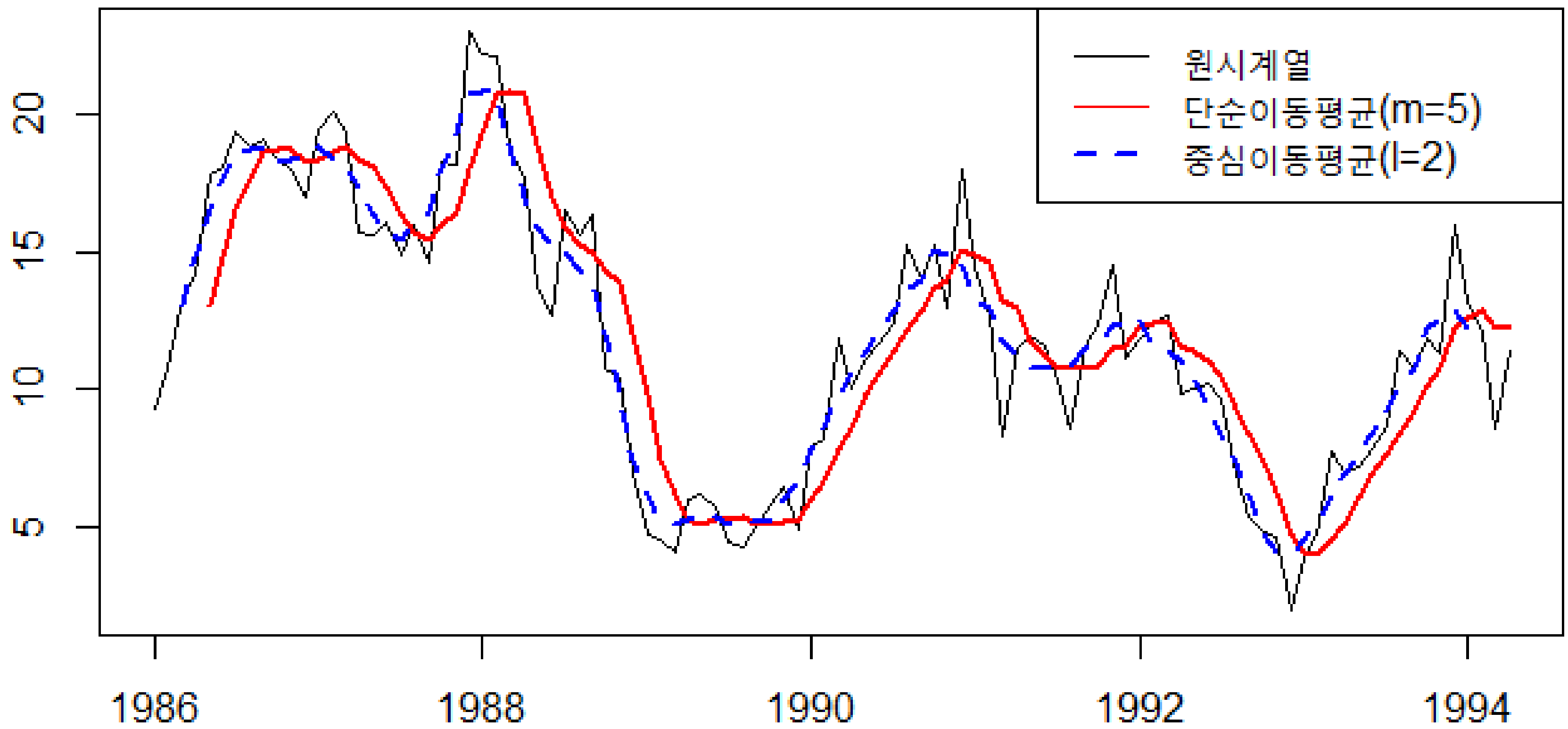
단순이동평균법에 의한 평활

- **이동평균의 목적**
  - 예측
  - 원 시계열에서 불규칙성분과 계절성분들을 동시에 평활하여 추세성분과 순환성분을 다른 성분들로부터 분리하고자 할 때 많이 사용
- **중심이동평균 (centered moving average)**
  - $M_{n,1} = \frac{1}{2l+1}(Z_{n-l} + \cdots + Z_n + \cdots + Z_{n+l})$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z_t	10	12	8	12	7	5	8	7	9	10
$MA(3)$										
$MA_c(3)$										

이동평균법 - 예제

- 단순이동평균과 중심평균이동 비교



이동평균법에 의한 분해 - 가법모형

- **가법모형** $Z_t = T_t + S_t + C_t + I_t$
- **이동평균을 이용한 분해법**

1. 추세성분/순환 성분 추정 : $\widehat{T_t + C_t}$
   - $\{Z_t\}$에 계절성분의 주기인 s항을 이용하는 이동평균을 적용
   - 계절성분과 불규칙성분이 제거
2. 계절/불규칙 성분 추정 : $\widehat{S_t + I_t} = X_t - \widehat{T_t + C_t}$
3. 계절 성분 추정 : $\widehat{S_t}$
   - $\{\widehat{S_t + I_t}\}$ 에 계절성분의 주기 s와 일치하지 않는 개수 항의 이동평균을 적용 => 불규칙성분이 제거

이동평균법에 의한 분해 - 가법모형

- **가법모형** $Z_t = T_t + S_t + C_t + I_t$
- **이동평균을 이용한 분해법**

4. 추세성분 추정 : $\widehat{T}_t$
    - $\widehat{T_t + C_t}$ 을 종속변수로 하여 추세다항식을 적합
5. 순환성분 추정 : $\widehat{C}_t = \widehat{T_t + C_t} - \widehat{T}_t$
6. 불규칙 성분 검토 : $\hat{I}_t = Z_t - \widehat{T}_t - \hat{S}_t - \widehat{C}_t$
    - 불규칙 성분에 체계적인 정보가 남아 있는지 검토

이동평균법에 의한 분해 - 가법모형

- **시점 t에서의 추정값**

$$\hat{Z}_t = \hat{T}_t + \hat{S}_t + \hat{C}_{\mathrm{t}}$$

- **시점 n에서의 l-시차 후의 예측값**

$$\hat{Z}_n(l) = \hat{T}_n(l) + \hat{S}_n(l) + \hat{C}_n(l)$$

계절조정에 사용되는 이동평균법

- **X-12 ARIMA**
  - 대칭(symmetric) (2d+1)항 이동평균

$$MA_t(2d+1) = \frac{1}{2d+1}(Z_{t-d} + \cdots + Z_t + \cdots + Z_{t+d})$$

  - 비대칭(asymmetric) (2d)항 이동평균

$$MA_{t,a}(2d) = \frac{1}{2d}(Z_{t-d+1} + \cdots + Z_t + \cdots + Z_{t+d})$$

  - 대칭(asymmetric) (2d+1)항 가중이동평균

$$MA_{t,w}(2d+1) = w_{-d}Z_{t-d} + w_{-d+1}Z_{t-d+1} + \cdots + w_0 Z_t + \\ \ldots + w_{d-1}Z_{t+d-1} + w_d Z_{t+d})$$

단 $\sum_{j=-d}^{d} w_j = 1,\ w_{-j} = w_j$

계절조정에 사용되는 이동평균법

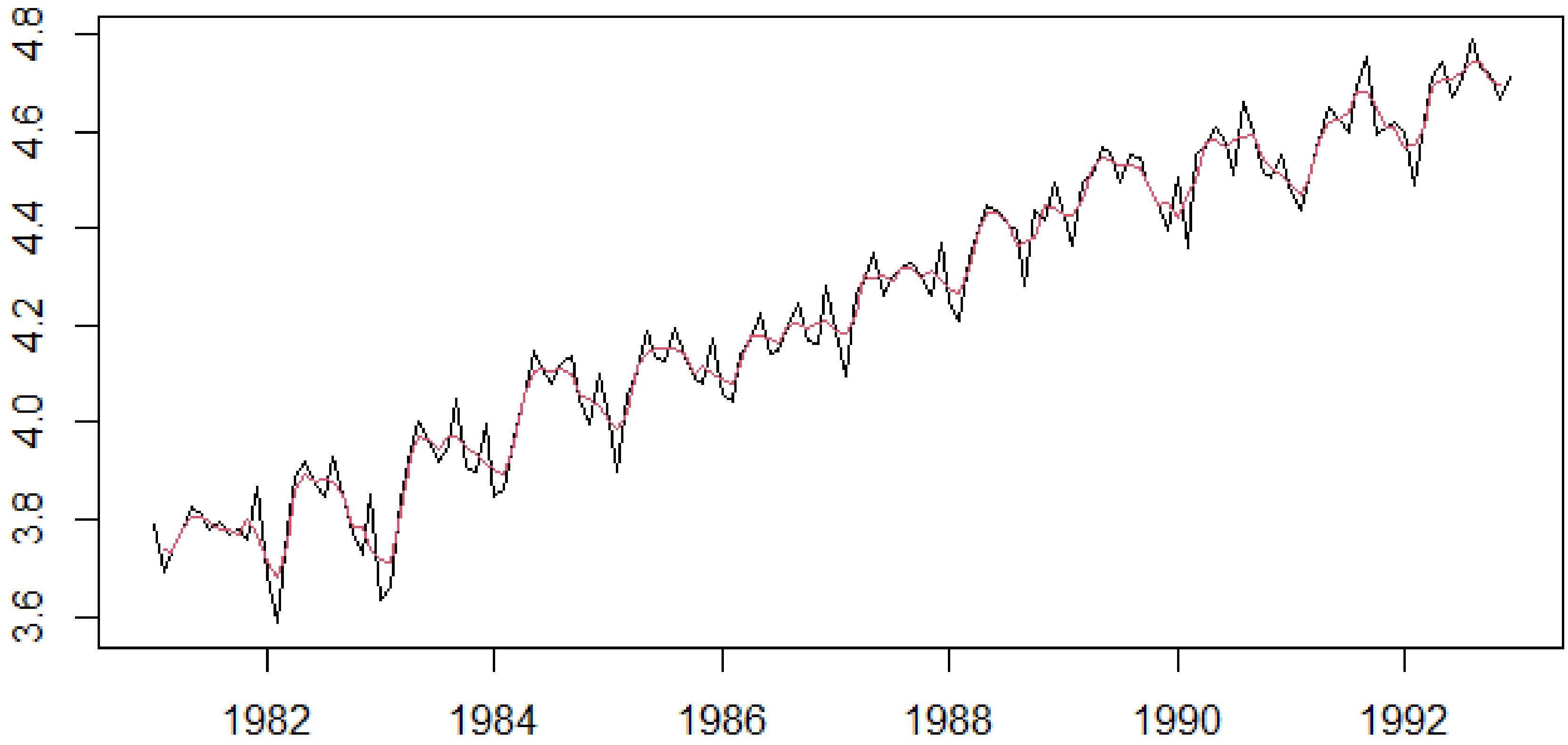
X-12 ARIMA – 주기: 1년(12개월)

t	Z_t	$MA_t(3)$	$MA_t(3\times3)$	$MA_t(3\times5)$	$MA_{t,a}(12)$	$MA_t(12\times2)$	$MA_{t,H}(5)$
1	10						
2	12	10.000					
3	8	10.667	9.889				10.279
4	12	9.000	9.222	8.867			9.865
5	7	8.000	7.889	8.200	8.083		7.736
6	5	6.667	7.111	7.667	7.917	8.000	5.813
7	8	6.667	7.111	7.600	7.250	7.583	6.824
8	7	8.000	7.778	7.467	7.333	7.292	7.809
9	9	8.667	8.000	7.400	7.333	7.333	9.217
10	10	7.333	7.444	7.200	7.417	7.375	8.159
11	3	6.333	6.444	6.800	8.000	7.708	5.137
12	6	5.667	6.000	6.467	8.417	8.208	5.560
13	8	6.000	6.222	6.667	8.583		6.528
14	4	7.000	7.111	7.333			5.916
15	9	8.333	8.333	8.333			8.558
16	12	9.667	9.556	9.333			10.526
17	8	10.667	10.444	10.200			9.914
18	12	11.000	11.000				11.337
19	13	11.333					
20	9						

계절조정에 사용되는 이동평균법 - 예제

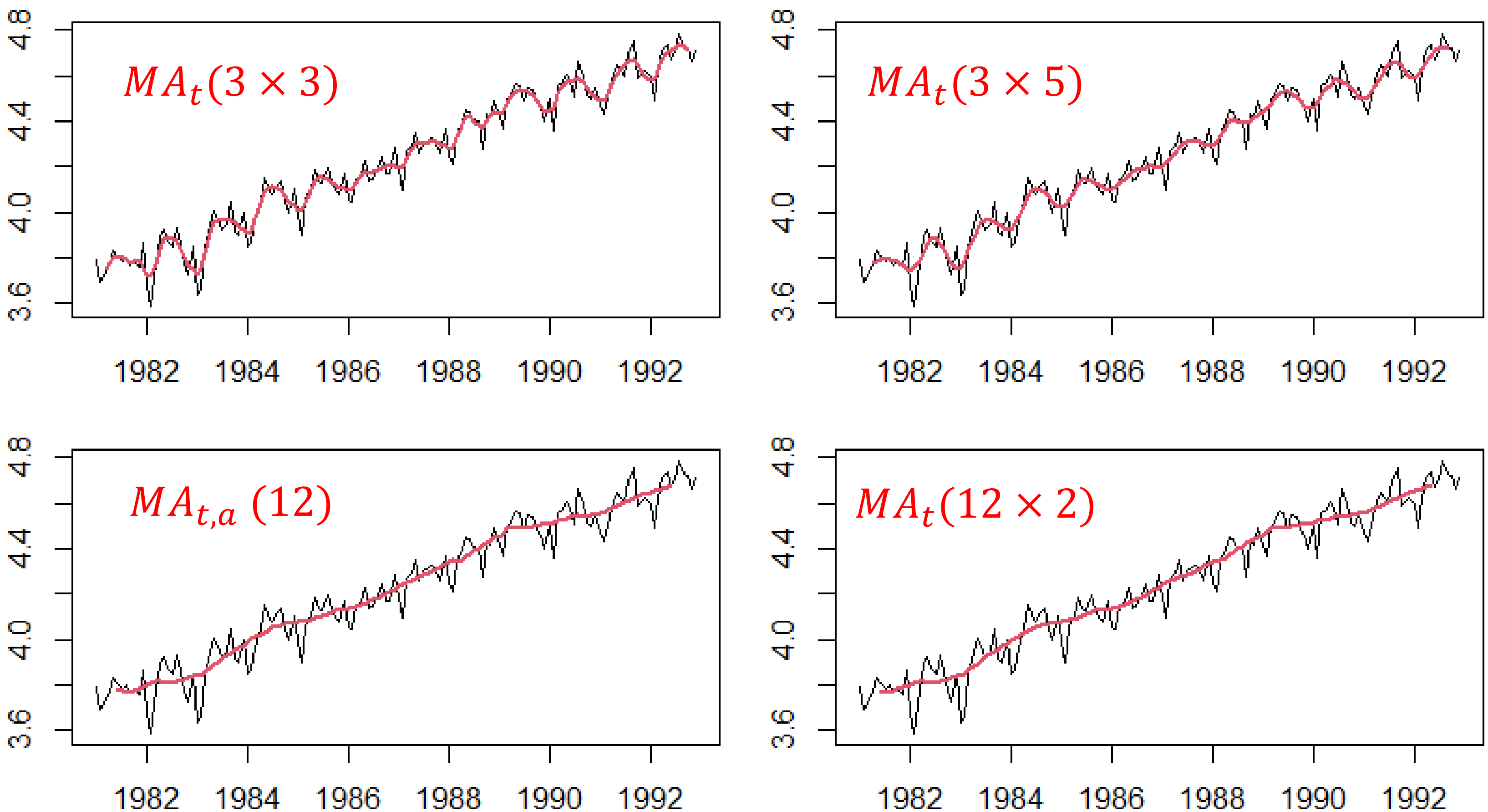
- **음식물 출하 지수**

$$MA_t(3)$$



계절조정에 사용되는 이동평균법 - 예제

- 음식물 출하 지수



End of Document