<서식6>

2022년도 후반기 외국어 및 종합시험 답안지

학과별	과정별	시험 과 목 명	수험번호	성 명	감독위원확인
통계	박사	응용통계학	5250	황성윤	

1. $X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$

(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) = \lambda^n \cdot \exp\left(-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$l(\lambda) = \log L(\lambda) = n \cdot \log \lambda - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial l(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_n^{MLE} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \frac{1}{\bar{X}}$$

(2) $\hat{\lambda}_n^{MLE}$와 다른 추정량에는 적률추정량이 있다. 이는 다음과 같다.

$$E(X) = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \left[\cancelto{0}{-xe^{-\lambda x}}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$g' \ e^{-\lambda x} \ f \ \lambda x$

$g \ -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \ f' \ \lambda$

$$\Rightarrow E(X) = \bar{X} \rightarrow \frac{1}{\hat{\lambda}_n^{MME}} = \bar{X} \quad \therefore \hat{\lambda}_n^{MME} = \frac{1}{\bar{X}}$$

일반적으로 최대가능도추정량 MLE는 표본의 개수가 증가할수록 추정하고자 하는 모수(여기에서는 λ)의 참값에 가까워지는 특징이 있다. 이러한 성질로 인하여 적률추정량 MME보다는 최대가능도추정량 MLE가 더 많이 선호된다. 본 문제의 경우는 MLE와 MME가 동일한 특수한 경우이다.

<서식7>

<서식6>

2022년도 후반기 외국어 및 종합시험 답안지

학과별	과정별	시험 과목 명	수험번호	성 명	감독위원확인
통계	박사	응용통계학	5250	황성윤	

(3) $E(\frac{1}{\bar{X}}) = ?$ ⇒ Delta method $\Gamma(1, \frac{1}{\lambda})$ $\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$

$E[g(Y)] \approx g(\mu_Y) + \frac{g''(\mu_Y)}{2}\sigma_Y^2$

여기에서 $Y = \bar{X}$ 라고 가정하면 $g(Y) = \frac{1}{Y}$ 이라고 둘 수 있고 Y^{-1} $-Y^{-2}$ $2Y^{-3}$

$\mu_Y = \frac{1}{\lambda}$, $\sigma_Y^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ 이다. 따라서 $g''(Y) = \frac{2}{Y^3}$ 임을 이용하면 $\frac{2}{Y^3}$ $\frac{\cancel{2}\lambda^3}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$

$E(\hat{\lambda}_n^{MLE}) = E(\frac{1}{\bar{X}}) \approx \lambda + \frac{\cancel{2}\lambda^{\cancel{3}}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{\lambda^2}} = 2\lambda$ 이다.

(4) Markov's Inequality를 이용하면 ($E[u(X) \geq c] \leq \frac{E(u(X))}{c}$ $(c>0)$)

$P[|\hat{\lambda}_n - \lambda| \geq t] \leq \frac{E[(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2]}{t^2}$ 이다. 여기에서

$E[(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2] = E[\{(\hat{\lambda}_n - E(\hat{\lambda}_n)) + (E(\hat{\lambda}_n) - \lambda)\}^2] = Var(\hat{\lambda}_n) + [Bias(\hat{\lambda}_n)]^2$ 이다.

(3)에 따라 $[Bias(\hat{\lambda}_n)]^2 = [E(\hat{\lambda}_n) - \lambda]^2 \approx \lambda^2$ 이고

Delta method 에 의하여 ($g'(Y) = -\frac{1}{Y^2}$ 임을 적용)

$Var[g(Y)] \approx \{g'(\mu_Y)\}^2 \sigma_Y^2$ 임을 이용하면

$Var(\hat{\lambda}_n) \fallingdotseq Var(\frac{1}{\bar{X}}) \approx \left(-\frac{1}{\frac{1}{\lambda^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^2} = \lambda^2$ 이다.

따라서 $\hat{\lambda}_n$ 의 분산과 편향이 모두 0에 수렴하지 않으므로

$\hat{\lambda}_n$은 일치추정량이 아니다.

<서식7>

<서식6>

2022년도 후반기 외국어 및 종합시험 답안지

학과별	과정별	시험 과 목 명	수험번호	성 명	감독위원확인
통계	박사	응용통계학	5250	황성윤	

(5) $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n^{MLE}-\lambda) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{I(\lambda)}\right)$ $\lambda e^{-\lambda x}$ $\frac{1}{\lambda}-x$ λ^{-1} $-\lambda^{-2}$

$I(\lambda) = -E\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}\log f(x|\lambda)\right] = -E\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}(\log\lambda - \lambda X)\right]$

$= -E\left[-\frac{1}{\lambda^2}\right] = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \therefore \sqrt{n}(\hat{\lambda}_n^{MLE}-\lambda) \xrightarrow{d} N(0, \lambda^2)$

(6) LRT Test $H_0: \lambda=1$ vs $H_1: \lambda \neq 1$

$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) = \lambda^n \cdot \exp\left(-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ $-n\cdot\bar{x}+n$

$\Rightarrow \Lambda = \frac{L(\Omega_0)}{L(\Omega)} = \frac{1^n \cdot \exp\left(-1\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^n \cdot \exp\left(-\frac{1}{\bar{x}}\cdot n\bar{x}\right)} = (\bar{x})^n \cdot \exp\left[n(1-\bar{x})\right] \leq k$

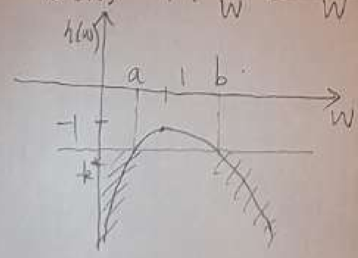
$(1-\frac{1}{n\lambda}t)^{-n}$

$n\cdot\log(\bar{x}) + n(1-\bar{x}) \leq \log k \Rightarrow$ put $\bar{x} = w\ (>0)$

$\Rightarrow n\cdot(\log w - w + 1) \leq \log k \Rightarrow (\log w) - w \leq k^*$ $M_{\bar{X}}(t) = E(e^{t\bar{X}})$

여기에서 $h(w) = -w + \log w$ 라고 하면 $h(w)$ $= E(e^{\frac{t}{n}(x_1+\cdots+x_n)})$ $\left[E(e^{\frac{t}{n}x_i})\right]^n$

$h'(w) = -1 + \frac{1}{w} = \frac{1-w}{w} = 0 \Rightarrow w=1$ 에서 기울기가 달라진다.



따라서 $\bar{X} \sim Gamma\left(n, \frac{1}{n\lambda}\right)$ 임을 적용하여 유의수준 α에 대하여 다음과 같이 기각역을 정의할 수 있다.

$P(\bar{X}<a \ \& \ \bar{X}>b) = \alpha.$

$P(w<a \ \& \ w>b) = \alpha.$

단, $a<b$ 이고 $\bar{X} \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{n\lambda}\right)$ 이며 위와 같은 식을 만족하는 a와 b를 찾으면 된다.

<서식7>

P4

<서식6>

2022년도 후반기 외국어 및 종합시험 답안지

학과별	과정별	시험 과 목 명	수험번호	성 명	감독위원확인
통계	박사	응용통계학	5250	황성윤	

2. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ⇒ 숙면이 일어날 때까지의 대기 시간 ⇒ 지수분포로 표현

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ x > 0$

$X_1, \cdots, X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$

λ에 대한 MLE는 문제 1의 (1)을 통해서 $\hat{\lambda}^{MLE} = \frac{1}{\bar{X}}$ 임을 유도하였으므로

만약 n명의 참가자 중 숙면까지의 시간이 60 미만인 경우가 $m(\leq n)$명이라면

$\hat{\lambda}^{MLE} = \frac{1}{\frac{dm + 60(n-m)}{n}} = \frac{1}{dm + 60(n-m)}$ 로 표현할 수 있다.

<서식7>