MLE: 모수가 여러 개인 경우

모수 두 개인 경우만 고려: θ_1, θ_2

MLE : $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$
로그가능도함수 $l(\theta_1, \theta_2)$ - 미분가능이고 concave function이면

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} l(\theta_1, \theta_2) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} l(\theta_1, \theta_2) = 0$$

를 만족하는 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$

concave function임을 확인 방법: 두 번 미분한 행렬이 음의 정부호 행렬

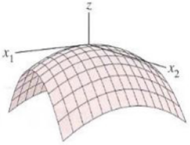
정부호 행렬 (definite matrix)

참고. Definite matrix 정부호 행렬

- 행렬 A가 0이 아닌 모든 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} < 0$를 만족할 때 A를 음의 정부호 행렬이라 함

❖ **Negative definite (음의 정부호)**

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} < 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

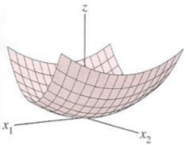


$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$z = -3x_1^2 - 7x_2^2$

❖ **Positive definite (양의 정부호)**

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top A\mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$z = 3x_1^2 + 7x_2^2$

예 7.5
$X_1, X_2, \ldots, X_n$가 정규 모집단으로부터의 랜덤표본일 때 $\theta = (\mu, \sigma^2)$의 MLE

예 7.6
$X_1, X_2, \ldots, X_n$가 다음 분포를 갖는 모집단으로부터의 랜덤표본일 때 θ의 MLE

$$f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} I(x \geq \theta)$$

θ의 함수의 MLE
$X_1, X_2, \ldots, X_n$가 $Poisson(\theta)$로부터의 랜덤샘플일 때 θ^2의 MLE

정리 7.1 Invariance property
θ의 MLE가 $\hat{\theta}$일 때 $h(\theta)$의 최대가능도 추정량은 $h(\hat{\theta})$

- $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ with known σ^2. μ^3의 MLE?
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Bernoulli(p)$ 표준편차의 MLE?(**과제**)

적률추정법 (Method of Moment Estimation)

- k차 모적률 (population moment) : $\mu_k = E(X^k)$
- k차 표본적률 (sample moment) : $\overline{X^k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

Idea

- 모적률 μ_k는 모수 θ의 함수, 즉 $\mu_k = h_k(\theta)$
- 자료의 크기 n이 증가함에 따라 $(n \to \infty)$ $\overline{X^k} \xrightarrow{P} \mu_k$ (대수의 법칙)
- 자료가 충분히 크면 $\mu_k \approx \overline{X^k}$, 즉 $h_k(\theta) \approx \overline{X^k}$

적률추정량 (MME: Method of Moment Estimator)
$\hat{\theta}$: $h_k(\theta) = \overline{X^k}$를 만족하는 θ

예제 7.7∼10
$X_1, X_2, \ldots, X_n$가 다음 분포를 갖는 모집단으로부터의 랜덤표본일 때 θ의 MME

- $Bernoulli(\theta)$
- $Poisson(\theta)$
- $Gamma(2, \theta)$ **(과제)**
- $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} I(x \geq \theta)$
- $f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-|x|/\theta}$ **(과제)**
- $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} Bernoulli(p)$ 표준편차의 MLE?**(과제)**

MME: 모수가 여러 개인 경우

추정해야할 모수 $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$

$$\mu_1 = h_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

$$\mu_2 = h_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

$$\dots$$

$$\mu_r = h_r(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

적률추정량 $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)$은

$$\overline{X_n^1} = h_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

$$\overline{X_n^2} = h_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

$$\dots$$

$$\overline{X_n^r} = h_r(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)\text{을 만족하는 } \theta$$

MME: 모수가 여러 개인 경우

예제 7.11과 12
$X_1, X_2, \ldots, X_n$가 다음 분포를 갖는 모집단으로부터의 랜덤표본일 때 θ의 MME

- $N(\mu, \sigma^2)$
- $Gamma(\alpha, \beta)$ **(과제)**

과제: 연습문제 3번

추정량의 성질

모수 θ의 여러 추정량 중 최적의 추정량은?

정의 7.1: unbiased, consistent

(i) 비편향(unbiased) estimator: $E(\hat{\theta}) = \theta$일 때

(ii) 일치(consistent) estimator: $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta$ as $n \to \infty$

- 편향(bias) 또는 편차: $Bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$
- 마코프 부등식을 이용하여 일치추정량 확인할 수도 있음

$$P(|\hat{\theta} - \theta| \geq t) \leq \frac{E(\hat{\theta} - \theta)^2}{t^2}$$

추정량의 성질

예제 7.13
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기댓값 μ, 분산 $\sigma^2 > 0$인 모집단으로부터의 랜덤표본

- X_1
- $\overline{X}_n$
- $\dfrac{n}{n+1}\overline{X}_n$

예제 7.15
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 랜덤표본

- μ의 최대가능도추정량이 일치추정량
- σ^2의 최대가능도추정량이 일치추정량

과제: 연습문제 10번