조건부 기댓값

Recall 조건부 확률변수 $Y|X = x$의 확률밀도함수

$$f_{Y|x}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) > 0$$

조건부 기댓값 (conditional expectation)
조건부 확률변수 $Y|X = x$의 기댓값

$$E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y|x) dy$$

예제
두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도 함수가

$$f_{X,Y}(x,y) = x^2 e^{-x(y+1)} I(x > 0, y > 0)$$

로 주어졌다고 하자. $E(Y|X=x)$?

조건부 기댓값 (conditional expectation)

정리
두 확률변수 X와Y가 서로 독립이면

$$E(Y|X=x)=E(Y),\ E(X|Y=y)=E(X)$$

- $E(Y|X=x)$는 x에 대한 함수, 즉 $g(x)$로 표현
- 확률변수 X를 사용하면 $g(X)=E(Y|X)$로 역시 확률변수 X의 함수

이중기댓값 정리

$$E[E(Y|X)]=E(Y)$$

- 일반화하면 $E[g(X,Y)]=E_X\{E[g(X,Y)|X]\}$

예 2.23
두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도 함수가

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2} I(0 \le x \le 2)$$

로 주어졌다고 하자. $E[E(Y|X)] = E(Y)$임을 확인하시오.

조건부 분산 (conditional variance)
$X = x$가 주어졌을 때, 확률변수 Y의 조건부분산은

$$Var(Y|X = x) = E\{[Y - E(Y|x)]^2|x\} = E(Y^2|x) - [E(Y|x)]^2$$

정리 2.13

$$Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var[E(Y|X)]$$

- 조건부 분산 $Var(Y|X = x)$ 무조건부 분산 $Var(Y)$보다 평균적으로 더 작다
- 두 확률변수 X와Y가 서로 독립이면 $Var(Y|X = x) = Var(Y)$

조건부 기댓값 (conditional expectation)

예2.25 (예2.22 이어서)
$Var(Y|X=x)$?

Problem 1

Suppose the random variables X and Y have joint probability density function $f(x, y)$ given by

$$f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} I(0 \le x \le y)$$

- Verify $E[E(X|Y)] = E(X)$
- Verify $E[E(Y|X)] = E(Y)$

이변량 정규분포 (Bivariate Normal Distribution)

이변량 정규분포:, $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right)\right]$$

- (X, Y) 이변량 정규분포를 따르는 경우, $\rho = 0 \Leftrightarrow X, Y$ 독립
- $Y|X = x \sim \mathcal{N}\left(\mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_Y}\sigma_X(x-\mu_X)\right)$