이론 통계학

6장 확률변수의 극한

2021년 봄학기

전북대학교 통계학과

수열의 수렴

임의의 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족하는 n이 존재할 때 $a_n \to a$

$$m \geq n\text{인 모든 } m\text{에 대하여 } |a_m - a| < t$$

수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_n이 a로 수렴한다는 의미은 a를 중심으로 아무리 작은 구간을 잡아도 충분히 큰 n에 대하여 a_n이후의 원소는 모두 이 구간에 들어간다는 것

- 수열의 극한 개념을 확률변수열로 확장
- 모집단에서 추출한 자료의 수가 늘어날 때 통계량이 어떠한 성질을 가지는지 알아보기 위해서
- 자료의 수 n이 증가할 때 표본평균이 가지는 성질은 확률변수열을 통해 파악

확률변수열의 수렴

확률변수열 $\{Y_n\}$에 대하여 Y_n이 Y로 수렴한다는 의미는?

almost sure convergence

$$P(\{\omega : Y_n(\omega) \to Y(\omega)\}) = 1$$

확률수렴 (convergence in probability): $Y_n \xrightarrow{P} Y$

임의의 양수 t에 대하여 $P(|Y_n - Y| > t) \to 0$

대수의 법칙

정리 6.1 대수의 법칙: $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기댓값 μ, 분산 σ^2인 확률분포로부터의 랜덤샘플일 때 임의의 양수 t에 대하여

$$P(|\overline{X}_n - \mu| > t) \to 0$$

정리 6.2

두 확률변수열 $X_n, Y_n,\ n = 1, 2, \ldots$이 각각 μ, ν로 확률수렴할 때 다음이 성립한다.

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow{P} \mu + \nu$ (b) $X_n - Y_n \xrightarrow{P} \mu - \nu$

(c) $X_n Y_n \xrightarrow{P} \mu\nu$ (d) $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{P} \frac{\mu}{\nu}$ 단 $\nu \neq 0$

분포수렴 (convergence in distribution)

누적분포함수의 수렴

분포수렴(convergence in distribution): $Y_n \xrightarrow{d} Y$

$Y_1, Y_2, \ldots$이 누적분포함수 $F_1, F_2, \ldots$를 가지는 확률변수열이고 확률변수 Y의 누적분포함수는 F라고 하자. $F(\cdot)$가 연속인 모든 점 y에서 다음이 성립할 때

$$F_n(y) \to F(y)$$

Y_n이 Y으로 분포수렴한다고 한다.

분포수렴 (convergence in distribution)

F의 연속인 점에서 수렴

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n \sim N(0,1)$인 랜덤샘플, 표본평균 $\overline{Z}_n$의 누적분포함수를 F_n라고 하자

- 표본평균 $\overline{Z}_n \sim N(0, 1/n)$
- $Var(\overline{Z}_n) \to 0$
- $\overline{Z}_n \xrightarrow{P} 0$
- $F_n(x)$의 극한은?

예 6.1과 6.2

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 Uniform$(0, \theta)$로부터의 랜덤샘플일 때

- $X_{(n)}$이 분포수렴하는 극한을 구하여라.
- $Y_n = n(\theta - X_{(n)})$이 분포수렴하는 극한을 구하여라.

X_n이 X로 분포수렴한다는 것을 보이기 위해서는

- 정의대로 X_n의 누적분포함수가 X의 누적분포함수로 수렴한다는 것을 보이거나
- X_n의 적률생성함수가 X의 적률생성함수로 수렴한다는 것을 보이면 됨

정리 6.3

$X_1, X_2, \ldots$의 적률생성함수를 $M_1(t), M_2(t), \ldots$라고 하고 X의 적률생성함수를 $M(t)$라고 하자. 모든 t에 대하여 다음이 성립할 때

$$M_n(t) \to M(t)$$

$X_n \xrightarrow{d} X$이다.

예 6.3과 6.4

- $X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_n)$이며 $\lambda_n \to \infty$라고 한다. X_n을 표준화한 Z_n이 분포수렴하는 극한을 구하여라.
- $X \sim \text{Poisson}(900)$일 때 $P(X > 950)$의 근삿값을 구하여라.