정리 6.4: Slutsky Theorem

확률변수 $X_n,\ n = 1, 2, \ldots$이 실수 c로 확률수렴하고, $Y_n,\ n = 1, 2, \ldots$이 확률변수 Y로 분포수렴하는 경우에 다음이 성립한다. (즉, $X_n \xrightarrow{P} c, Y_n \xrightarrow{d} Y$)

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} c + Y$

(b) $X_n - Y_n \xrightarrow{d} c - Y$

(c) $X_n Y_n \xrightarrow{d} cY$

(d) $\frac{Y_n}{X_n} \xrightarrow{d} \frac{Y}{c}$, 단 $c \neq 0$

중심극한정리 (Central Limit Theorem: CLT)

모집단의 확률분포에 상관없이 랜덤샘플의 표본평균을 표준화하면 자료의 수가 증가할 때 표준정규분포에 가까워진다.

정리 6.5: 중심극한정리

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기댓값 μ, 분산 σ^2인 확률분포로부터의 랜덤샘플이다.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$라고 할 때 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

중심극한정리 (Central Limit Theorem: CLT)

모집단의 확률분포에 상관없이 랜덤샘플의 표본평균을 표준화하면 자료의 수가 증가할 때 표준정규분포에 가까워진다.

정리 6.5: 중심극한정리

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기댓값 μ, 분산 σ^2인 확률분포로부터의 랜덤샘플이다.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$라고 할 때 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

중심극한정리 (Central Limit Theorem: CLT)

모집단의 확률분포에 상관없이 랜덤샘플의 표본평균을 표준화하면 자료의 수가 증가할 때 표준정규분포에 가까워진다.

정리 6.5: 중심극한정리

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기댓값 μ, 분산 σ^2인 확률분포로부터의 랜덤샘플이다.

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$라고 할 때 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2)$$

중심극한정리 (Central Limit Theorem: CLT)

모집단의 확률분포에 상관없이 랜덤샘플의 표본평균을 표준화하면 자료의 수가 증가할 때 표준정규분포에 가까워진다.

정리 6.5: 중심극한정리

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기댓값 μ, 분산 σ^2인 확률분포로부터의 랜덤샘플이다.
$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$라고 할 때 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

즉, $\Phi(x)$를 표준정규분포의 누적분포함수라고 할 때

중심극한정리 (Central Limit Theorem: CLT)

모집단의 확률분포에 상관없이 랜덤샘플의 표본평균을 표준화하면 자료의 수가 증가할 때 표준정규분포에 가까워진다.

정리 6.5: 중심극한정리

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기댓값 μ, 분산 σ^2인 확률분포로부터의 랜덤샘플이다.

$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$라고 할 때 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2)$$

즉, $\Phi(x)$를 표준정규분포의 누적분포함수라고 할 때

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right) \to \Phi(x)$$

중심극한정리 (Central Limit Theorem: CLT)

모집단의 확률분포에 상관없이 랜덤샘플의 표본평균을 표준화하면 자료의 수가 증가할 때 표준정규분포에 가까워진다.

정리 6.5: 중심극한정리

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기댓값 μ, 분산 σ^2인 확률분포로부터의 랜덤샘플이다.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$라고 할 때 다음이 성립한다.

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2)$$

즉, $\Phi(x)$를 표준정규분포의 누적분포함수라고 할 때

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x\right) \to \Phi(x)$$

중심극한정리 (Central Limit Theorem: CLT)

이항분포의 정규 근사

$X_n \sim B(n, p)$이고 $Y_i, i = 1, \ldots, n$은 서로 독립이고 Bernoulli(p)를 따르는 확률변수일 때 $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$이므로 중심극한정리에 의하여

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

Poisson 분포의 정규 근사

$X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_n)$이고 $Y_i, i = 1, \ldots, n$은 서로 독립이고 Poisson(λ_n/n)를 따르는 확률변수일 때 $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$이라고 나타낼 수 있다. λ_n/n이 어느정도 일정한 수준을 유지하면 중심극한정리에 의하여

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

예제 6.5

$X \sim B(100, 0.5)$일 때 $P(X \geq 60)$의 근삿값을 구하여라

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

비선형함수 : $g(t)$ **(**μ **근처에서 두번 미분 가능한 함수)**

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

비선형함수 : $g(t)$ **(**μ **근처에서 두번 미분 가능한 함수)**

- $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

비선형함수 : $g(t)$ **(**μ **근처에서 두번 미분 가능한 함수)**

- $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$
- μ근처에서 $g(t) \approx g(\mu) + g'(\mu)(t - \mu)$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

비선형함수 : $g(t)$ **(**μ **근처에서 두번 미분 가능한 함수)**

- $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$
- μ근처에서 $g(t) \approx g(\mu) + g'(\mu)(t - \mu)$
- $g(\overline{X}_n) - g(\mu) \approx g'(\mu)(\overline{X}_n - \mu)$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

비선형함수 : $g(t)$ **(**μ **근처에서 두번 미분 가능한 함수)**

- $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$
- μ근처에서 $g(t) \approx g(\mu) + g'(\mu)(t - \mu)$
- $g(\overline{X}_n) - g(\mu) \approx g'(\mu)(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \approx g'(\mu)\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

비선형함수 : $g(t)$ **(**μ **근처에서 두번 미분 가능한 함수)**

- $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$
- μ근처에서 $g(t) \approx g(\mu) + g'(\mu)(t - \mu)$
- $g(\overline{X}_n) - g(\mu) \approx g'(\mu)(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \approx g'(\mu)\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, g'(\mu)^2\sigma^2)$

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

비선형함수 : $g(t)$ **(**μ **근처에서 두번 미분 가능한 함수)**

- $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$
- μ근처에서 $g(t) \approx g(\mu) + g'(\mu)(t - \mu)$
- $g(\overline{X}_n) - g(\mu) \approx g'(\mu)(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \approx g'(\mu)\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, g'(\mu)^2\sigma^2)$

What if $g'(\mu) = 0$?

Delta method

$\overline{X}_n$와 같은 k차 적률의 함수의 극한 분포

선형함수 : $g(t) = at + b$

- $E[g(\overline{X}_n)] = a\mu + b = g(\mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) = a\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, a^2\sigma^2)$

비선형함수 : $g(t)$ **(**μ **근처에서 두번 미분 가능한 함수)**

- $\overline{X}_n \xrightarrow{p} \mu$
- μ근처에서 $g(t) \approx g(\mu) + g'(\mu)(t - \mu)$
- $g(\overline{X}_n) - g(\mu) \approx g'(\mu)(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \approx g'(\mu)\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)$
- $\sqrt{n}(g(\overline{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{d} N(0, g'(\mu)^2\sigma^2)$

What if $g'(\mu) = 0$?

Delta method

Example: $g(t) = t^2$

Delta method

Example: $g(t) = t^2$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{d} N(0, 4\mu^2\sigma^2)$$

Delta method

Example: $g(t) = t^2$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{d} N(0, 4\mu^2\sigma^2)$$

If $\mu = 0$

Delta method

Example: $g(t) = t^2$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{d} N(0, 4\mu^2\sigma^2)$$

If $\mu = 0$

$$\sqrt{n}\overline{X}_n^2 \xrightarrow{p} 0$$

Delta method

Example: $g(t) = t^2$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{d} N(0, 4\mu^2\sigma^2)$$

If $\mu = 0$

$$\sqrt{n}\overline{X}_n^2 \xrightarrow{p} 0$$

$$\sqrt{n}\overline{X}_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Delta method

Example: $g(t) = t^2$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{d} N(0, 4\mu^2\sigma^2)$$

If $\mu = 0$

$$\sqrt{n}\overline{X}_n^2 \xrightarrow{p} 0$$

$$\sqrt{n}\overline{X}_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

$$\frac{n\overline{X}_n^2}{\sigma^2} \xrightarrow{d} \chi_1^2$$

Delta method

Example: $g(t) = t^2$

$$\sqrt{n}(\overline{X}_n^2 - \mu^2) \xrightarrow{d} N(0, 4\mu^2\sigma^2)$$

If $\mu = 0$

$$\sqrt{n}\overline{X}_n^2 \xrightarrow{p} 0$$

$$\sqrt{n}\overline{X}_n \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

$$\frac{n\overline{X}_n^2}{\sigma^2} \xrightarrow{d} \chi_1^2$$

Homework Week 10

1. $X_1, X_2 \ldots$은 평균이 μ이고 분산이 σ^2인 동일한 분포를 따르고 독립이다.

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\overline{X}_n} - \frac{1}{\mu}\right) \xrightarrow{d} ?$$

2. Textbook Exercises 1,2,3,9,10,11