8장 모수의 추정 II

2021년 봄학기

전북대학교 통계학과

Introduction

- 랜덤샘플: $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim f(\boldsymbol{x}|\theta)$, $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$
- 관측된 자료를 이용하여 θ에 대하여 추론
- 통계량 (statistic): 랜덤샘플 $X_1, X_2, \ldots, X_n$의 함수
- 통계량은 자료를 요약: $\overline{X}_n, S_n^2, (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$, 등등

통계적 추론 (statistical inference) : 주어진 자료 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$로부터 모수 θ에 대한 정보를 얻어냄

Question: 표본이 가지고 있는 θ에 대한 모든 정보를 포함하는 통계량 $T(\boldsymbol{X})$가 존재하는가?

Answer: Yes, there is. It is called 충분통계량(sufficient statistic)

충분통계량 (sufficient statistics)

Data reduction (자료축약): 주어진 자료에서 모수에 대한 정보를 가진 부분만을 간추려 전체 자료 대신에 축약된 정보만을 이용하여 모수를 추론

Sufficient statistic (충분통계량)의 의미 이해를 위한 예문

- 서로 독립인 $X, Y \sim N(\theta, 1)$
- X, Y를 이용하여 θ에 대한 통계적 추론

$$(X, Y) \overset{1-1}{\rightleftarrows} (X+Y, X-Y) \xrightarrow{\text{모수에 대한 정보를 잃지 않음}} (X+Y)$$

Sufficient statistic (충분통계량)의 의미: 어떤 통계량 $T(\boldsymbol{X})$가 모수 θ에 대해 가지고 있는 정보다 원 자료 $\boldsymbol{X}$가 모수에 대해 가지고 있는 정보와 같음

정의 8.1 충분통계량
$T(\boldsymbol{X}) = t$가 주어졌을 때 $\boldsymbol{X}$의 조건부분포가 θ에 의존하지 않으면 $T(\boldsymbol{X})$를 θ에 대한 충분통계량이라고 함

$T(\boldsymbol{X})$와 θ는 벡터일 수 있음

예 8.1

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $Bernoulli(\theta)$로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$는 θ에 대한 충분통계량임

충분통계량 (sufficient statistics)

정리 8.1 인수분해정리: factorization theorem
$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f(\boldsymbol{x}|\theta)$

통계량 $T(\boldsymbol{X})$가 θ에 대한 충분통계량

$$\Leftrightarrow f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) = g(T(x_1, x_2, \ldots, x_n), \theta)h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

여기에서 $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$는 θ에 의존하지 않음

의미: $T(\boldsymbol{X})$가 θ에 대한 충분통계량일 필요충분조건은 $\boldsymbol{X}$의 확률밀도함수 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)$가 $T(\boldsymbol{X})$와 θ에 의하여 결정되는 부분과 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$만에 의하여 결정되는 부분의 곱으로 표현됨.

참고: 충분통계량의 일대일 함수는 모두 충분통계량

예 8.2∼6
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\boldsymbol{X})$는 θ에 대한 충분통계량임

- $Poisson(\theta)\,:\; T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $N(\mu, \sigma^2),\; \theta = (\mu, \sigma^2)\,:\; T(\boldsymbol{X}) = (\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \sum_{i=1}^{n} X_i)$
- $Uniform(0, \theta)\,:\; T(\boldsymbol{X}) = X_{(1)}$
- $f(x|\theta) = \exp(-(x-\theta)),\; x \geq \theta\,:\; T(\boldsymbol{X}) = X_{(n)}$
- $Uniform(\theta - 0.5, \theta + 0.5)\,:\; T(\boldsymbol{X}) = (X_{(1)}, X_{(n)})$

정의 8.2 :지수족 (exponential family)
함수 $c(\cdot), T(\cdot), d(\cdot), S(\cdot)$에 대하여 확률밀도함수 $f(x|\theta)$가 다음과 같이 나타낼 수 있을 때
$$f(x|\theta) = \exp\{c(\theta)T(x) + d(\theta) + S(x)\}I_A(x)$$

이 확률분포들의 모임을 **지수족(exponential family)**라고 함

지수족의 결합확률밀도함수

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta) =$$
$$\exp\left\{c(\theta)\sum_{i=1}^{n} T(x_i) + nd(\theta) + \sum_{i=1}^{n} S(x_i)\right\} I_A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} T(x_i)}$는 θ에 대한 충분통계량

예제
다음 분포는 지수족인가? 지수족이라면 θ에 대한 충분통계량은?

- $B(m, \theta)$
- $N(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$
- $f(x|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{1-\frac{x}{\theta}} I(x > \theta > 0)$

13주차 과제

교재 8장 연습문제 1,2,3

정의 8.3 완비통계량
통계량 $T(\boldsymbol{X})$의 함수 $g(T(\boldsymbol{X}))$에 대하여 모든 θ에서

$E_\theta[g(T(\boldsymbol{X}))] = 0$ 이면 $P_\theta\{\boldsymbol{X} : g(T(\boldsymbol{X})) = 0\} = 1$ 이 성립할 때 $T(\boldsymbol{X})$를

완비통계량이라고 함

- 기대값(E)과 확률(P)을 구할 때 확률밀도함수의 모수값이 θ이므로 기대값 (E)과 확률(P)를 구하면 θ의 함수
- $T(\boldsymbol{X})$의 함수 $g(T(\boldsymbol{X}))$에 대하여 모든 θ에서 기댓값이 0이면 $g(T(\boldsymbol{X}))$의 값은 항상 0일 수 밖에 없을 때 $T(\boldsymbol{X})$를 완비통계량이라고 함

예제 8.9
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $Uniform(0, \theta)$ 분포로부터의 랜덤샘플일 때 $T(\boldsymbol{X}) = X_{(n)}$는 CSS

정리 8.2
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 지수족에 속하는 확률밀도함수

$$f(x|\theta) = \exp\{c(\theta)T(x) + d(\theta) + S(x)\}I_A(x)$$

으로부터의 랜덤샘플일 때 $\sum_{i=1}^{n} T(X_i)$는 θ에 대한 CSS

일반적으로 어떤 통계량이 완비통계량임을 보이는 것은 쉽지 않으나 지수족에 속하면 $\sum_{i=1}^{n} T(X_i)$ (정리 8.2)이 CSS임

예제 8.7 과 8
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플이다

- $Bernoulli(\theta)$: $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$는 CSS
- $Poisson(\theta)$: $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$는 CSS

정리 8.3 Rao-Blackwell theorem

- $S(\boldsymbol{X})$는 θ의 추정량
- $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 충분통계량
- $S^*(\boldsymbol{X}) = E[S(\boldsymbol{X})|T(\boldsymbol{X})]$

$\Rightarrow E(S^*(\boldsymbol{X})) = E(S(\boldsymbol{X})), \quad Var(S^*(\boldsymbol{X})) \leq Var(S(\boldsymbol{X}))$

- $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 충분통계량

  $\Rightarrow S^*(\boldsymbol{X})$는 θ에 의존하지 않음

  $\Rightarrow S^*(\boldsymbol{X})$ θ의 추정량
- $MSE(S^*(\boldsymbol{X})) \leq MSE(S(\boldsymbol{X}))$

  $\Rightarrow$ MSE측면에서 $S(\boldsymbol{X})$보다 더 좋은 추정량을 구할 수 있음

예제 8.11
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $Poisson(\theta)$ 분포로부터의 랜덤샘플이다

- θ의 비편향추정량 $S(\boldsymbol{X}) = X_1$의 분산을 구하시오.
- θ의 충분통계량 $T(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} X_i$를 이용하여 $S^*(\boldsymbol{X}) = E[S(\boldsymbol{X})|T(\boldsymbol{X})]$를 구하시오.
- 위에서 구한 $S^*(\boldsymbol{X})$가 비편향추정량임을 보이고 분산을 구하시오

정리 8.4 Lehmann-Scheffe theorem

- $S(\boldsymbol{X})$는 θ의 비편향추정량
- $T(\boldsymbol{X})$는 θ의 완비충분통계량

$\Rightarrow S^*(\boldsymbol{X}) = E[S(\boldsymbol{X})|T(\boldsymbol{X})]$는 θ 최소분산비편향추정량 (MVUE)

MVUE를 구하는 방법

- 방법 1: 분산이 크래머-라오 하한과 같은 비편향추정량
- 방법 2: 완비충분통계량의 함수이면서 비편향 추정량
- 방법 3: 완비충분통계량을 조건으로 하는 비편향추정량의 기대값

예제 8.12, 13, 14
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량을 구하시오

- $B(m, \theta)$
- $Poisson(\theta)$
    - θ의 최소분산비편향추정량
    - θ^2의 최소분산비편향추정량

예제 8.12, 13, 14
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량을 구하시오

- $B(m, \theta)$
- $Poisson(\theta)$
  - θ의 최소분산비편향추정량
  - θ^2의 최소분산비편향추정량

예제 8.12, 13, 14
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량을 구하시오

- $B(m, \theta)$
- $Poisson(\theta)$
  - θ의 최소분산비편향추정량
  - θ^2의 최소분산비편향추정량

예제 8.12, 13, 14
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량을 구하시오

- $B(m, \theta)$
- $Poisson(\theta)$
  - θ의 최소분산비편향추정량
  - θ^2의 최소분산비편향추정량

예제 8.12, 13, 14
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량을 구하시오

- $B(m, \theta)$
- $Poisson(\theta)$
    - θ의 최소분산비편향추정량
    - θ^2의 최소분산비편향추정량

예제 8.12, 13, 14
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량을 구하시오

- $B(m, \theta)$
- $Poisson(\theta)$
  - θ의 최소분산비편향추정량
  - θ^2의 최소분산비편향추정량

최소분산비편향추정량 (MVUE)

예제 8.12, 13, 14

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 다음 분포로부터의 랜덤샘플일 때 θ의 최소분산비편향추정량을 구하시오

- $B(m, \theta)$
- $Poisson(\theta)$
  - θ의 최소분산비편향추정량
  - θ^2의 최소분산비편향추정량
- $Uniform(0, \theta)$

예제 8.15
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $N(\mu, \sigma^2)$로부터의 랜덤샘플일 때 $\theta = (\mu, \sigma^2)$의 MVUE

예제
$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 $Bernoulli(\theta)$로부터의 랜덤샘플일 때

- θ의 MVUE
- $\theta(1-\theta)$의 MVUE

13주차 과제

교재 8장 연습문제 13, 16, 17, 19, 20