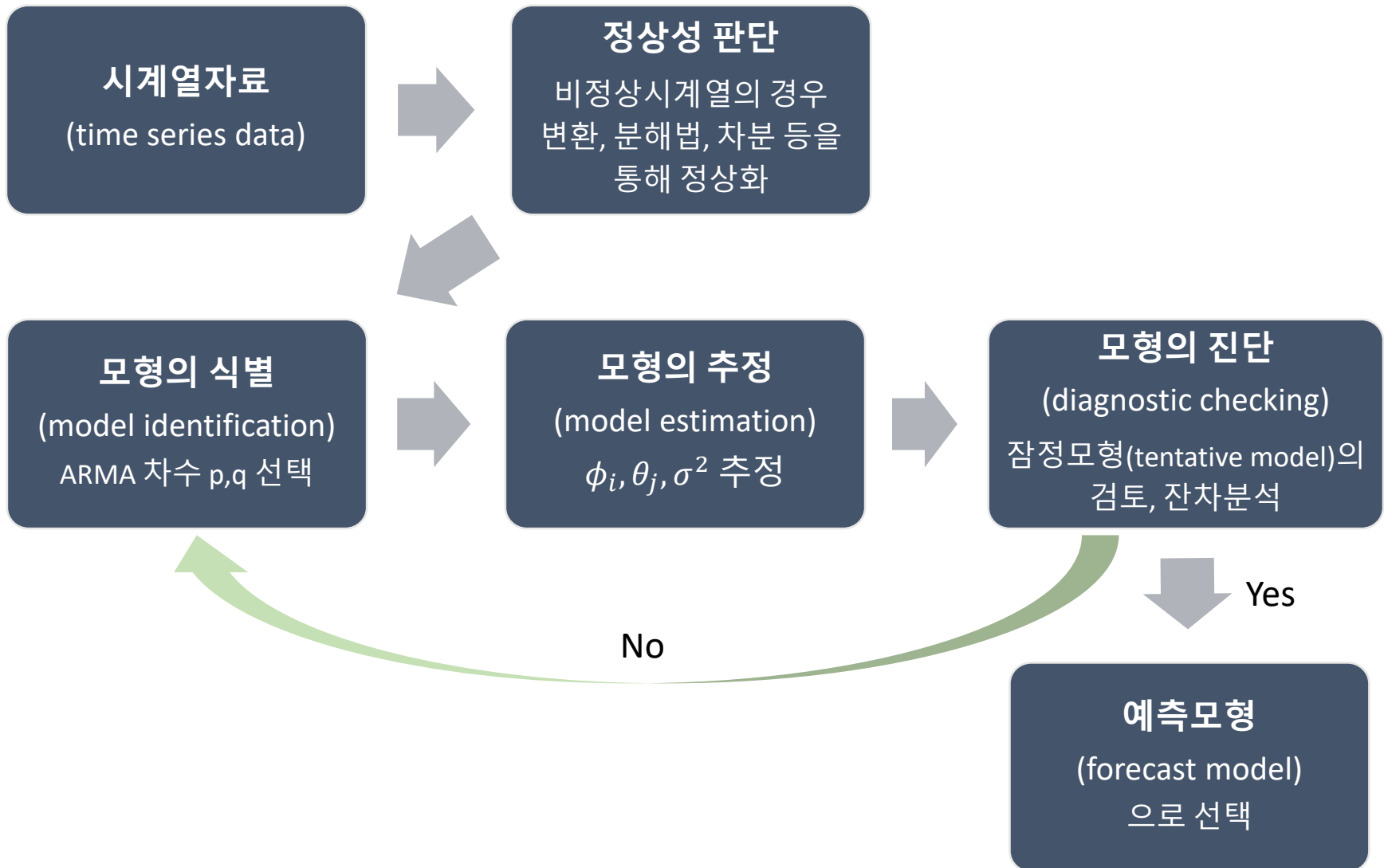


CH8. 정상 ARMA 모형의 적합

정상 ARMA 모형의 적합 절차



모형 식별 (model identification)

■ Step1 : 정상화

- 시계열 그림과 표본상관도표를 이용하여 비정상 시계열이라 판단되는 시계열을 정상시계열로 변환
- 시계열 그림 – 추세, 계절성, 분산의 변화, 이상값 등 파악
- 분산 변화 – 분산안정화 변환 시행
 - 대부분의 경제 관련 자료들은 로그 변환 이용
 - 일반적으로 log변환, Box-Cox 변환 등 시행

모형 식별 (model identification)

■ Step1 : 정상화

- 평균 변화 – 분해법 이용한거나 차분, 계절 차분 시행
 - 추세나 계절성이 존재 / SACF가 서서히 감소
 - 차분된 시계열의 분산이 이전 단계의 시계열의 분산보다 작다
 - Unit root test 결과 차분 필요 여부 판단
 - 과대차분을 하지 않도록 주의
 - 계절형 자료가 아닌 경우 대부분 차분의 차수는 0, 1, 2이면 충분하고, 계절형 자료의 경우는 계절의 주기와 같은 값의 차분이면 충분하다.

모형 식별 (model identification)

■ Step2 : ARMA 모형의 차수 결정

- SACF와 SPACF를 이용하여 차수 p,q 선택

확률과정	ACF	PACF
AR(p)	지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태	시차 p 이후에는 0으로 절단형태
MA(q)	시차 q 이후에는 0으로 절단형태	지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태
ARMA(p,q)	시차 (q-p) 이후에는 지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태	시차 (p-q) 이후에는 지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태

- $H_0: \phi_{kk} = 0 \text{ vs. } H_1: \phi_{kk} \neq 0 \Rightarrow |\hat{\phi}_{kk}| > 1.96/\sqrt{n}$ 이면 귀무가설 기각
- $H_0: \rho_k = 0 \text{ vs. } H_1: \rho_k \neq 0 \Rightarrow |\hat{\rho}_k| > 1.96 \text{ S.E. } (\hat{\rho}_k)$ 이면 귀무가설 기각

모형 식별 (model identification)

■ Step2 : ARMA 모형의 차수 결정

- 모형선택 기준 (model selection criterion) 이용
 - Akaike's Information Criterion, Akaike (1973, 1974)

$$AIC = n \ln(\hat{\sigma}^2) + 2(p + q)$$

- SBC (Schwartz's Bayesian Criterion, Schwartz (1978))

$$SBC = n \ln(\hat{\sigma}^2) + (p + q) \ln(n)$$

- AIC, SBC, FPE, BIC, CAT 등이 최소가 되도록 모형 선택

모형 식별 (model identification)

■ Step3 : 상수항 포함 여부

- 시계열을 차분한 경우, 상수항 δ 를 모형에 포함시킬지의 여부를 결정 필요
- 차분된 시계열 $W_t = (1 - B)^d Z_t$ 의 표본평균과 근사표준오차를 이용하여

$H_0: \delta = 0$ 의 유의성 검정을 시행

- 검정 통계량 : $t = \frac{\bar{W}}{S_{\bar{W}}}$
- $\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n W_t$
- $S_{\bar{W}} = \left\{ \frac{\hat{\gamma}_0}{n} (1 + 2\hat{\rho}_1 + \dots + 2\hat{\rho}_k) \right\}^{1/2}$

모수의 추정 (Parameter Estimation)

■ ARMA(p,q) Process

- $Z_t - \mu = \phi_1(Z_t - \mu) + \dots + \phi_p(Z_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$
- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
- 추정해야 할 모수
 - Mean : μ
 - AR coefficients : ϕ_1, \dots, ϕ_p
 - MA coefficients : $\theta_1, \dots, \theta_q$
 - Variance of WN : σ^2

모수의 추정 – 적률추정법

■ 적률추정법

- Method of moment estimation, MME
- 모집단의 적률을 상응하는 표본의 적률로 대체한 후 방정식을 풀어 추정량을 구하는 방법
- 보통 최종적인 추정 방법으로는 추천할 수 없고, 다른 추정 방법의 초기치로 사용됨
- ARMA(p,q) 모형 - 모수의 MME
 - $\mu = E(Z_t) \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t$
 - $\gamma_h = E(Z_t - E(Z_t))(Z_{t+h} - E(Z_{t+h})) \Rightarrow \hat{\gamma}_h = \frac{1}{n} \sum (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+h} - \bar{Z})$
 - Yule-Walker equation과 모수들간의 관계식을 이용하여 ϕ_i, θ_j 에 대한 MME 계산

모수의 추정 – 적률추정법

■ 적률추정법 (예) AR(1)

- $Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$
- 적률과 모수의 관계식
 - $\mu = E(Z_t)$
 - $Var(Z_t) = \phi^2 Var(Z_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \Rightarrow \gamma_0 = \phi^2 \gamma_0 + \sigma^2$
 - $Cov(Z_t, Z_{t-1}) = Cov(\phi Z_{t-1} + \mu - \phi\mu + \varepsilon_t, Z_{t-1}) \Rightarrow \gamma_1 = \phi\gamma_0$
- MME
 - $\hat{\mu} = \bar{Z}$
 - $\hat{\phi} = \hat{\gamma}_1 / \hat{\gamma}_0$
 - $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0(1 - \hat{\phi}^2)$

모수의 추정 – 적률추정법

■ 적률추정법 (예) MA(1)

- $Z_t - \mu = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$
- 적률과 모수의 관계식
 - $\mu = E(Z_t)$
 - $\gamma_0 = \text{Var}(Z_t) = \text{Var}(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2(1 + \theta^2)$
 - $\text{Cov}(Z_t, Z_{t-1}) = -\theta \sigma^2 \Rightarrow \gamma_1 = -\theta \sigma^2$
- MME
 - $\hat{\mu} = \bar{Z}$
 - $\hat{\theta} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \hat{\rho}_1^2}}{2 \hat{\rho}_1}$
 - $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{1 + \hat{\theta}^2}$

모수의 추정 – 최소제곱법

■ 최소제곱법

- least squares estimation, LSE
- 오차 (또는 잔차)의 제곱합이 최소가 되도록 모수를 추정하는 방법
- 조건부 최소제곱법 (conditional LSE, CLSE)
- 비조건부 최소제곱법 (unconditional LSE, ULSE)

모수의 추정 – 최소제곱법

■ 조건부 최소제곱법

- 조건부 오차제곱합 : $S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu) = \sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu | Z_*, \varepsilon_*, Z_1, \dots, Z_n)$
- Z_1, \dots, Z_n : 관측값
- $Z_* = (Z_{1-p}, \dots, Z_0)^T$: 관측되지 않은 Z 에 대한 초기값 : 보통 표본평균 사용
- $\varepsilon_* = (\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_0)^T$: 오차항의 초기값 : $E(\varepsilon_t) = 0$ 을 주로 사용
- 대부분의 시계열 분석용 패키지들은 다음을 이용하여 계산
 - 오차제곱합 : $S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu) = \sum_{t=p+1}^n \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu | \varepsilon_*, Z_1, \dots, Z_n)$
 - 초기값 : $\varepsilon_* = (\varepsilon_p, \dots, \varepsilon_{p+1-q})' = (0, \dots, 0)'$
- CLSE
 - $(\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mu}) = \arg \min_{(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu)} S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu)$
 - $\hat{\sigma}^2 = S_*(\hat{\boldsymbol{\phi}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mu}) / \nu$, ν =제곱합 항들의 수 - $(p + q + 1)$

모수의 추정 - 최소제곱법

■ 조건부 최소제곱법 (예) AR(1)

- $Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$
- 조건부 오차제곱합 : $S_*(\phi, \theta, \mu) = \sum_{t=2}^n \{(Z_t - \mu) - \phi(Z_{t-1} - \mu)\}^2$
- CLSE :

- 연립방정식 $\begin{cases} \frac{\partial S_*}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial S_*}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$ 의 해가 (μ, ϕ) 의 CLSE

- $\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^n Z_t - \phi \sum_{t=2}^n Z_{t-1}}{(n-1)(1-\phi)}, \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^n (Z_t - \mu)(Z_{t-1} - \mu)}{\sum_{t=2}^n (Z_{t-1} - \mu)^2}$

- n 이 충분히 큰 경우 : $\hat{\mu} \cong \bar{Z}, \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^n (Z_t - \bar{Z})(Z_{t-1} - \bar{Z})}{\sum_{t=2}^n (Z_{t-1} - \bar{Z})^2} \cong \hat{\rho}_1(MME)$

- $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_*(\hat{\phi}, \hat{\mu})}{\nu}, \nu = (n-1) - (1+0+1) = n-3$

모수의 추정 – 최소제곱법

- 조건부 최소제곱법 (예) MA(1)

모수의 추정 – 최소제곱법

■ 비조건부 최소제곱법

- 비조건부 오차제곱합 : $S(\phi, \theta, \mu) = \sum_{t=-\infty}^n [\varepsilon_t]^2 = \sum_{t=-Q}^n [\varepsilon_t]^2$
- $[\varepsilon_t] = E(\varepsilon_t | \phi, \theta, \mu, Z_1, \dots, Z_n)$
- 초기값 대신 미지의 과거 시계열값 Z_*, ε_* 를 후방 예측한 값을 사용
- 따라서 초기조건이 오차제곱합에 미치는 영향을 줄일 수 있어 조건부 최소제곱법보다 효율적인 추정법이다.
- 그러나 만약 모형이 잘못 적합되는 경우에는 비효율적이다.
- UCLSE
 - $(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\mu}) = \arg \min_{(\phi, \theta, \mu)} S(\phi, \theta, \mu)$
 - $\hat{\sigma}^2 = S(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\mu})/n$

모수의 추정 – MLE

■ 최대가능도 추정법

- maximum likelihood estimation, MLE
- White noise의 분포 가정 – 정규분포
- 가능도 함수 (likelihood function) 또는 로그-가능도 함수 (log-likelihood function)을 최대로 하는 모수의 값을 찾는 방법
- 예) AR(1) model의 가능도함수
 - $L(\phi, \mu, \sigma^2) = f(Z_1, \dots, Z_n) = f(Z_1) \prod_{t=2}^n f(Z_t | Z_{t-1})$
 - $Z_t | Z_{t-1} \sim N(\mu + \phi(Z_{t-1} - \mu), \sigma^2)$
 - $Z_1 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2})$

■ 추정량의 점근분포

- AR(p) model : $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_p)^T$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\phi}} - \boldsymbol{\phi}) \approx N(0, \sigma^2 \Gamma_p^{-1}), \text{ 단 } \Gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

- $p = 1 : \sqrt{n}(\hat{\phi} - \phi) \approx N(0, \sigma^2 / \gamma_0),$
- MA or ARMA model : Box(1994) 등

모형의 진단 - 잔차분석

■ 잔차분석 (residual analysis)

- 잔차 : $e_t = Z_t - \hat{Z}_t = \text{관측값} - \text{fitted value}$
- 잔차를 이용하여 $\varepsilon_t \sim iid N(0, \sigma^2)$ 인지 검정
 - 잔차그림
 - 잔차의 RSACF, RSPACF 그림을 이용한 white noise의 여부 판단
 - 잔차를 이용한 WN test (Portmanteau test)
 - $H_0: \rho_1(\varepsilon) = \dots = \rho_K(\varepsilon) = 0$
 - Box-Pierce test (1970) : $Q^* = n \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2(e) \approx \chi^2(K - p - q)$
 - Ljung-Box test (1978) : $Q = n(n+2) \sum_{k=1}^K \frac{\hat{\rho}_k^2(e)}{n-k} \approx \chi^2(K - p - q)$
 - Jarque and Bera(1980)의 정규성 검정

$$JB = \frac{n}{6} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{e_t^3}{\hat{\sigma}^3} \right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{e_t^4}{\hat{\sigma}^4} - 3 \right)^2 \approx \chi^2(2)$$

모형의 진단 – 과대적합

■ 과대적합 진단 (overfitting diagnostics)

- 과대적합
 - 잠정 모형에 모수를 추가하여 더 많은 개수의 모수를 포함하는 모형을 적합시키는 것
 - 예) AR(1) 모형이 잠정모형으로 선택되었다면 AR(1) 모형을 포함하는 AR(2) 또는 ARMA(1,1) 모형을 자료에 적합시켜 보는 것
- 과대적합 후 다음의 현상이 나타나면 잠정모형을 새로운 모형으로 대체
 - 잠정 모형에 추가된 모수가 유의하다고 판정되는 경우
 - 잠정모형에서의 모수추정값이 과대적합시킨 후 얻어지는 모수추정값과 큰 차이가 있는 경우
 - 과대적합된 모형에서 잔차들의 분산이 잠정모형에서 잔차들의 분산보다 작아진 경우

모형적합 예제 – 예 8.6

■ 최소제곱법

- least squares estimation, LSE
- 오차 (또는 잔차)의 제곱합이 최소가 되도록 모수를 추정하는 방법
- 조건부 최소제곱법 (conditional LSE, CLSE)
- 비조건부 최소제곱법 (unconditional LSE, ULSE)

모형적합 예제 – 예 8.7

■ 최소제곱법

- least squares estimation, LSE
- 오차 (또는 잔차)의 제곱합이 최소가 되도록 모수를 추정하는 방법
- 조건부 최소제곱법 (conditional LSE, CLSE)
- 비조건부 최소제곱법 (unconditional LSE, ULSE)

모형적합 예제 – 예 8.8

■ 최소제곱법

- least squares estimation, LSE
- 오차 (또는 잔차)의 제곱합이 최소가 되도록 모수를 추정하는 방법
- 조건부 최소제곱법 (conditional LSE, CLSE)
- 비조건부 최소제곱법 (unconditional LSE, ULSE)

모형적합 예제 – 예 8.9

■ 최소제곱법

- least squares estimation, LSE
- 오차 (또는 잔차)의 제곱합이 최소가 되도록 모수를 추정하는 방법
- 조건부 최소제곱법 (conditional LSE, CLSE)
- 비조건부 최소제곱법 (unconditional LSE, ULSE)

End of Document