

통계계산 중간고사 (draft)

1. 몬테카를로 방법을 활용하여 원주율을 유추하라.

2. 몬테카를로 방법을 활용하여 아래의 적분을 계산하라. (모든 확률변수를 생성할 수 있다고 가정한다)

(a) $\int_0^1 4\sqrt{1-x^2}dx$

(b) $\int_0^1 \sin(x)dx$

(c) $\int_0^1 x^3 dx$

(d) $\int_0^1 e^x dx$

(e) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2} dx$

3. 균등분포를 따르는 난수 $U_1, \dots, U_n \sim U[0, 1]$ 만을 생성할 수 있다고 가정하자. (a)-(d)의 확률밀도함수 $f(x)$ 를 가지는 확률변수 X_1, \dots, X_n 을 생성하라.

(a) $X_1, \dots, X_{100} \sim i.i.d. Ber(p), \quad \text{with } p = 0.3$

• $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$

(b) $X_1, \dots, X_{100} \sim i.i.d. bin(n, p), \quad \text{with } n = 10, p = 0.3$

• $f(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, 10$

(c) $X_1, \dots, X_{100} \sim i.i.d. Exp(\lambda), \quad \text{with } \lambda = 2.5$

• $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$

(d) $X_1, \dots, X_{100} \sim i.i.d. Gamma(\alpha, \beta), \quad \text{with } \alpha = 10, \beta = 1$

• $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0$

4. 아래의 확률밀도함수 $f(x)$ 를 따르는 확률변수 X_1, \dots, X_{100} 을 생성하라.

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 4|x - 1/2| & x \in (0, 1) \\ 0 & o.w \end{cases}$$

5. 균등분포를 따르는 난수 $U_1, \dots, U_n \sim U[0, 1]$ 만을 생성할 수 있다고 가정하자.

(a) 지수분포, 감마분포를 순차적으로 생성하고 이를 활용하여 $Beta(2, 6)$ 을 따르는 확률변수 X_1, \dots, X_{100} 을 생성하라. 단, $X \sim Beta(\alpha_1, \alpha_2)$ 인 확률변수 X 의 확률밀도함수는 아래와 같다.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1-1} (1-x)^{\alpha_2-1}, \quad x \in (0, 1)$$

(b) (a)의 결과를 활용하여 $Beta(2.7, 6.3)$ 를 따르는 확률변수 X_1, \dots, X_{100} 을 생성하라.

6. 아래의 물음에 답하라.

(a) $X_1, \dots, X_{10000} \sim N(0, 1)$ 를 활용하여 아래를 계산하라.

$$\int_{-1.96}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

(b) $X_1, \dots, X_{10000} \sim N(0, 1)$ 를 활용하여 아래를 계산하라.

$$\int_{4.5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

(c) (b)의 계산결과를 신뢰할 수 없는 이유를 설명하라. (1~2 문장으로 짧게 설명)

(d) importance sampling 을 활용하여 아래를 계산하라.

$$\int_{4.5}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

7. 아래의 물음에 답하라.

(a) 평균이 1인 지수분포를 생성할 수 있다고 가정하자. 지수분포를 활용하여 $X_1, \dots, X_{1000} \sim i.i.d. \text{Gamma}(2, 1)$ 을 생성하라.

(b) (a)를 활용하여 아래를 계산하라.

$$\int_0^{\infty} x(x-1)(x-2)(x-3)e^{-x} dx$$