Homework Week 3

1. 예제 문제: $E[(X_1 + X_2 + X_3)^2] = ?$
2. 표준화변수의 평균과 표준편차가 각각 0과 1임을 확인하고 베르누이 확률변수 표준화하기
3. $E(U_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$보이기
4. 두 확률변수 X와Y가 서로 독립이면
$$E(XY) = E(X)E(Y), \text{ 즉 } Cov(X, Y) = 0$$
5. 확률변수 X와 Y는 결합확률밀도함수가 다음과 같다.
   5.1 $E\left[\frac{X}{2} + \frac{Y}{3}\right]$
   5.2 $Corr(X, Y)$
$$f(x, y) = 6e^{-2x-3y} I(x > 0, y > 0)$$
6. 확률변수 X는 다음과 같은 확률분포를 따른다.
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$
   $E(e^{tX})$를 구하시오.
7. Cauchy-Schwarz inequality 증명
8. 교재 4장 연습문제 1, 15, 17

델타 방법

- X의 확률분포를 알고 있어도 $g(X)$의 형태가 복잡하면 $g(X)$의 기댓값과 분산 구하기 어려움

델타 방법

- X의 확률분포를 알고 있어도 $g(X)$의 형태가 복잡하면 $g(X)$의 기댓값과 분산 구하기 어려움
- **델타 방법(delta method)** : X의 기댓값과 분산을 이용하여 $g(X)$의 근사적인 기댓값과 분산 구하는 방법

델타 방법

- X의 확률분포를 알고 있어도 $g(X)$의 형태가 복잡하면 $g(X)$의 기댓값과 분산 구하기 어려움
- **델타 방법(delta method)** : X의 기댓값과 분산을 이용하여 $g(X)$의 근사적인 기댓값과 분산 구하는 방법
- 체비셰프 부등식에 따르면 X가 μ_X에서 멀리 떨어진 값을 가질 확률은 작다.

델타 방법

- X의 확률분포를 알고 있어도 $g(X)$의 형태가 복잡하면 $g(X)$의 기댓값과 분산 구하기 어려움
- **델타 방법(delta method)** : X의 기댓값과 분산을 이용하여 $g(X)$의 근사적인 기댓값과 분산 구하는 방법
- 체비세프 부등식에 따르면 X가 μ_X에서 멀리 떨어진 값을 가질 확률은 작다.
- X는 μ_X에 가까울 확률이 높음

델타 방법

- X의 확률분포를 알고 있어도 $g(X)$의 형태가 복잡하면 $g(X)$의 기댓값과 분산 구하기 어려움
- **델타 방법(delta method)** : X의 기댓값과 분산을 이용하여 $g(X)$의 근사적인 기댓값과 분산 구하는 방법
- 체비세프 부등식에 따르면 X가 μ_X에서 멀리 떨어진 값을 가질 확률은 작다.
- X는 μ_X에 가까울 확률이 높음
- $|X-\mu_X|$가 작으면 $|X-\mu_X|^k$는 k가 클수록 0에 가까움 $\rightarrow$ 대체로 $k=2$인 경우까지만 고려

델타 방법

테일러 전개

$g(X)$의 μ_X를 중심으로 한 테일러 전개

$$g(X) = g(\mu_X) + g'(\mu_X)(X - \mu_X) + \frac{g''(\mu_X)}{2}(X - \mu_X)^2 + \cdots$$

델타 방법

테일러 전개
$g(X)$의 μ_X를 중심으로 한 테일러 전개

$$g(X) = g(\mu_X) + g'(\mu_X)(X - \mu_X) + \frac{g''(\mu_X)}{2}(X - \mu_X)^2 + \cdots$$

델타 방법

$$\begin{aligned} E[g(X)] &\approx g(\mu_X) + g'(\mu_X)E(X - \mu_X) + \frac{g''(\mu_X)}{2}E[(X - \mu_X)^2] \\ &= g(\mu_X) + \frac{g''(\mu_X)}{2}\sigma^2 \\ V[g(X)] &\approx Var[g(\mu_X) + g'(\mu_X)(X - \mu_X)] \\ &= [g'(\mu_X)]^2\sigma_X^2 \end{aligned}$$

델타 방법

교재 예제 4.5
$X \sim Uniform(0,1)$일 때

1. $Y = \sqrt{X}$의 기댓값과 분산
2. 델타방법으로 $Y = \sqrt{X}$의 근사적인 기댓값과 분산