CH6. ARMA

자기회귀과정

- **자기회귀과정(autoregressive process)**
  - $Z_t = f(Z_{t-1}, Z_{t-2}, \cdots) + \varepsilon_t$
  - 현재의 관측값이 과거의 관측값들의 함수형태로 표현

- **자기회귀과정(autoregressive process)**

$$Z_t - \mu = \varphi_1 (Z_{t-1} - \mu) + \cdots + \varphi_p \left(Z_{t-p} - \mu\right) + \varepsilon_t, \qquad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

  - 후진연산자 이용

$$\left(1 - \varphi_1 B - \cdots - \varphi_p B^p\right)(Z_t - \mu) = \varepsilon_t \qquad \Rightarrow \qquad \underbrace{\Phi(B)}_{\text{AR operator}}(Z_t - \mu) = \varepsilon_t$$

  - 또는 $Z_t = \delta + \varphi_1 Z_{t-1} + \cdots + \varphi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t$

    단 , $\delta = (1 - \varphi_1 - \cdots - \varphi_p)\mu$

자기회귀과정 - AR(1)

- **AR(1)**

$$Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- $(1 - \phi B)(Z_t - \mu) = \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad \Phi(B)(Z_t - \mu) = \varepsilon_t$
- $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \delta = (1 - \phi)\mu$
- 선형모형으로 표현

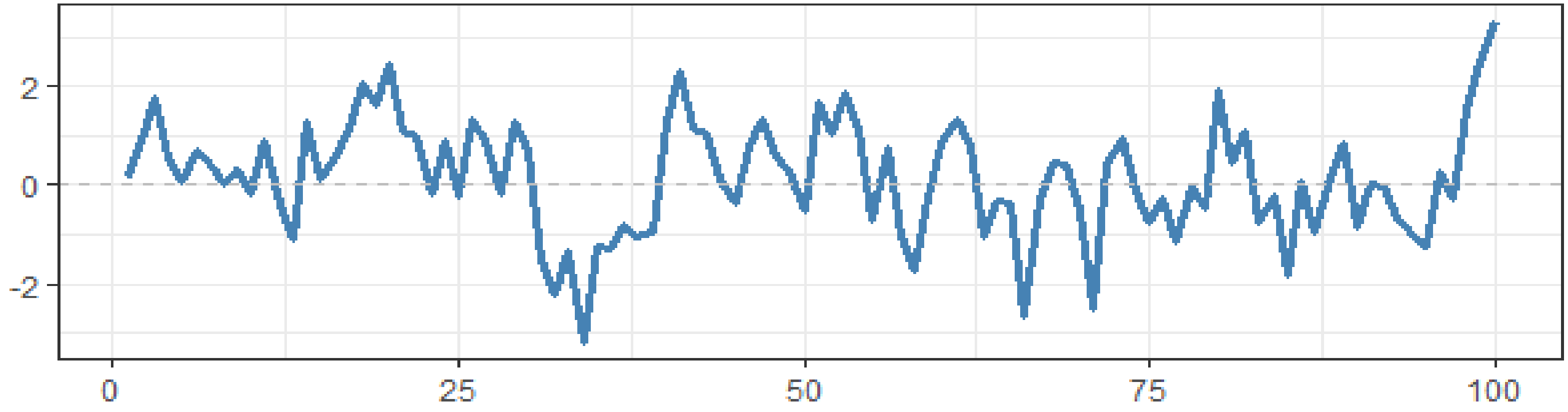
$$Z_t - \mu = \phi^t(Z_0 - \mu) + \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \cdots + \phi^{t-1}\varepsilon_1$$

- $E(Z_t) = \mu + \phi(E(Z_{t-1}) - \mu) = \mu + \phi^t(E(Z_0) - \mu)$
- $Var(Z_t) = \phi^2 Var(Z_{t-1}) + \sigma^2$
- 정상성을 만족하기 위해서는 최소한 $|\phi| < 1$ 이여야 함

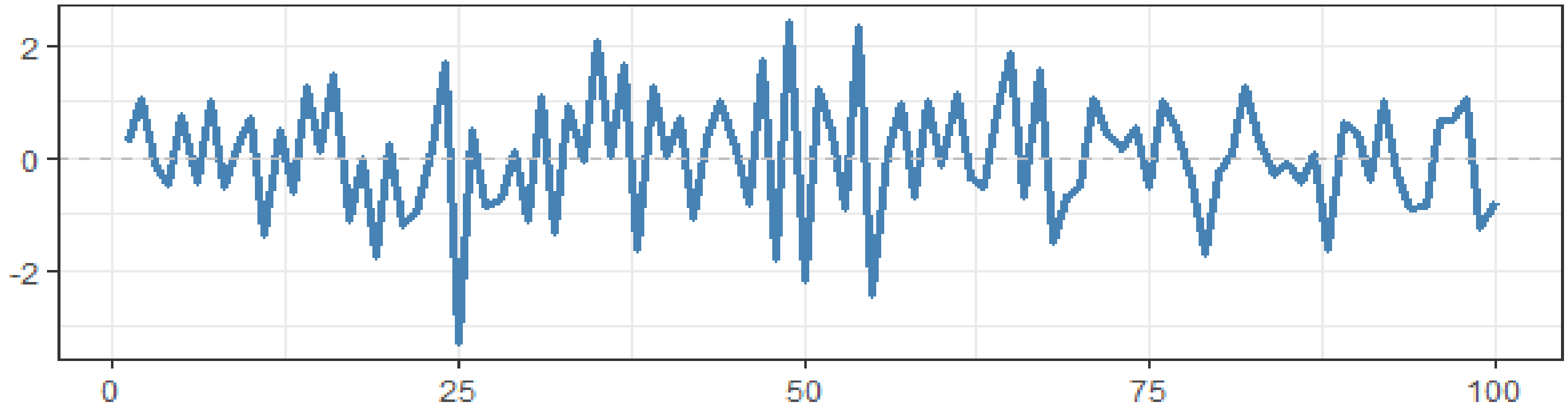
자기회귀과정 - AR(1)

- **AR(1)**

$$Z_t = 0.5Z_{t-1} + \varepsilon_t$$



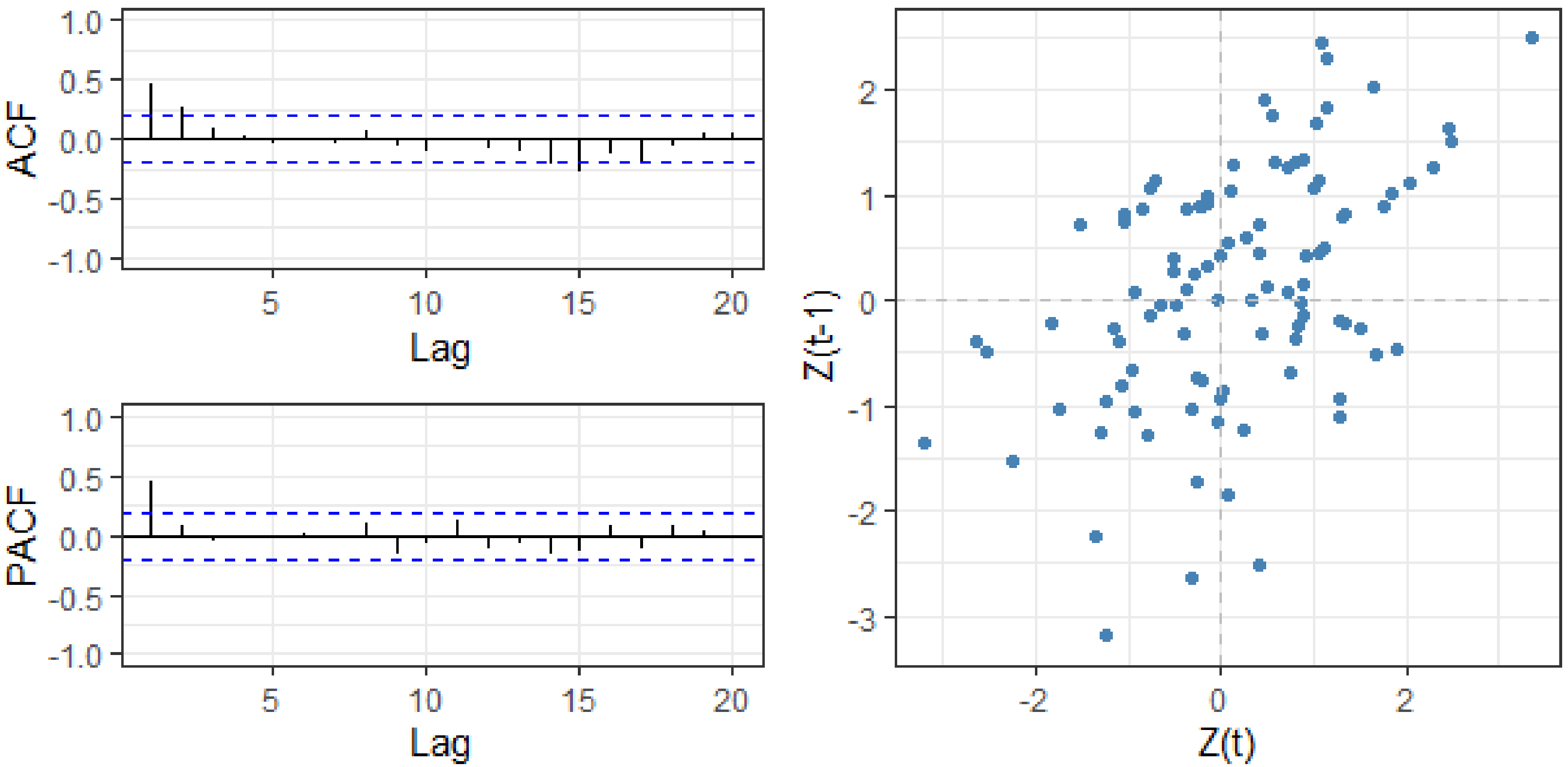
$$Z_t = -0.5Z_{t-1} + \varepsilon_t$$



자기회귀과정 - AR(1)

- **AR(1)**

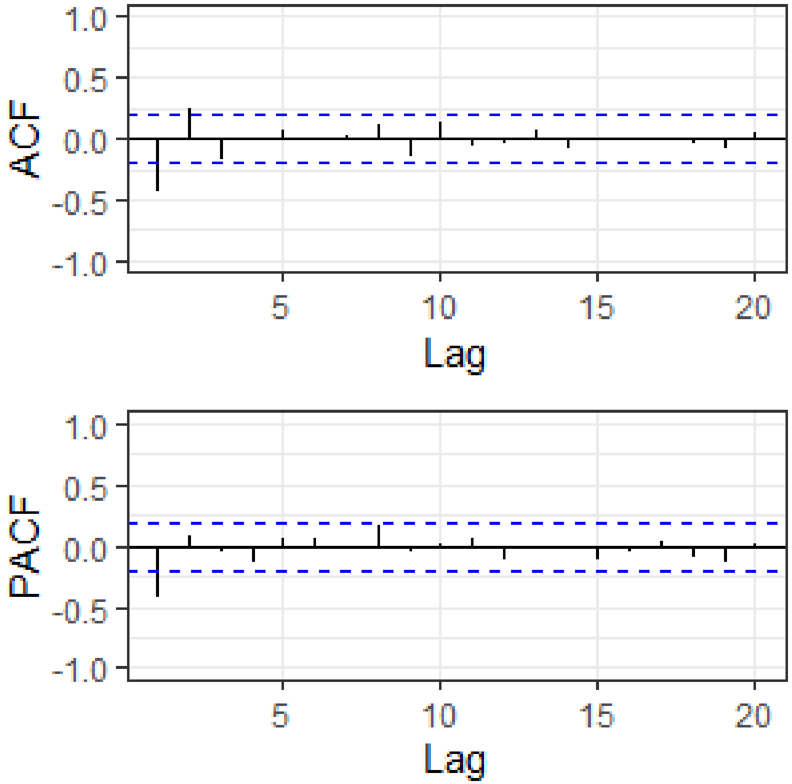
$$Z_t = 0.5Z_{t-1} + \varepsilon_t$$

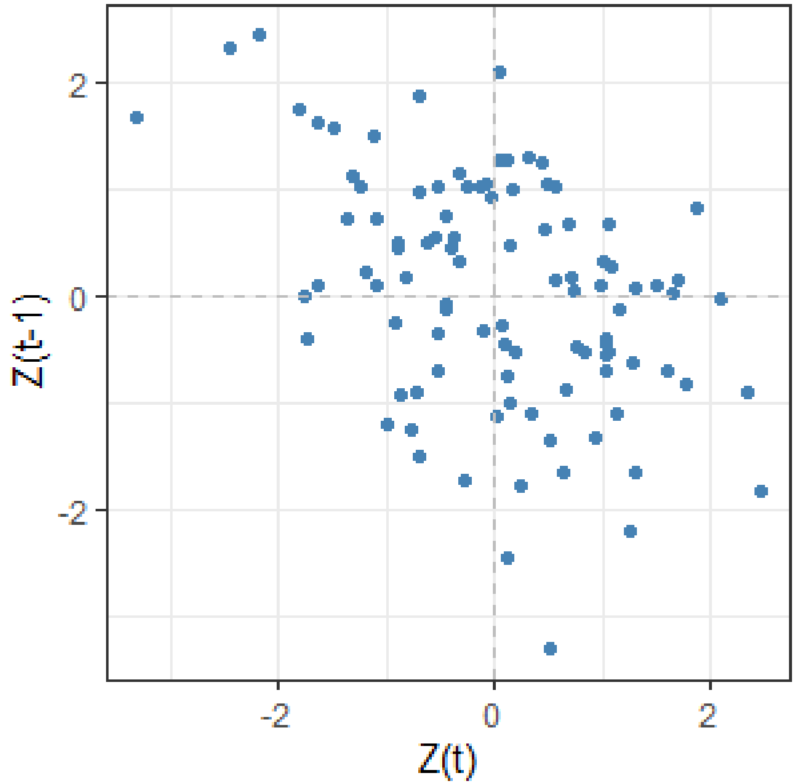


자기회귀과정 - AR(1)

- **AR(1)**

$$Z_t = -0.5Z_{t-1} + \varepsilon_t$$





자기회귀과정 - AR(1)

- **정상성 조건 (stationary condition)**

  - $\Phi(B)(Z_t - \mu) = \varepsilon_t$
  - $|\phi| < 1 \Leftrightarrow \Phi(B) = 1 - \phi B = 0$
  - Stationary linear process : $Z_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \varepsilon_{t-j}$
  - $E(Z_t) = \mu, Var(Z_t) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$
  - 자기공분산/자기상관함수

$$\gamma_h = Cov(Z_t, Z_{t+h})$$

$$= Cov\left(Z_t, \mu + \phi^h(Z_t - \mu) + \varepsilon_{t+h} + \phi\varepsilon_{t+h-1} + \cdots + \phi^{h-1}\varepsilon_{t+1}\right)$$

$$= \phi^h Var(Z_t)$$

$$\rho_h = Corr(Z_t, Z_{t+h}) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \phi^h, h = 0,1,2,\cdots$$

자기회귀과정 - AR(1)

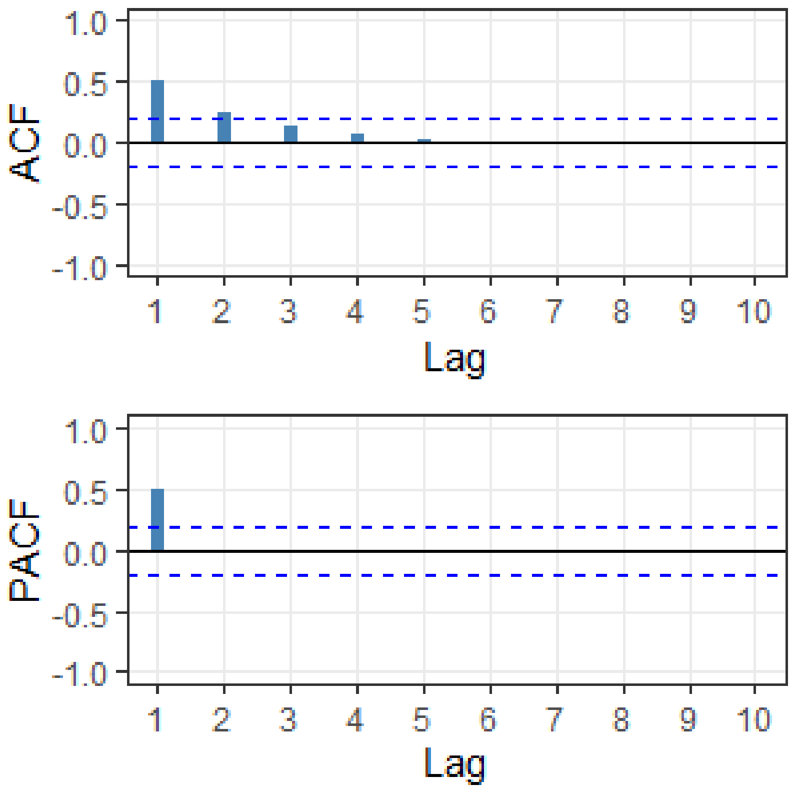
ACF와 PACF

- ACF : $\rho_h = Corr(Z_t, Z_{t+h}) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \phi^h,\ h = 0,1,2,\cdots$
- PACF
  - $\phi_{11} = Corr(Z_t^*, Z_{t+1}^*) = \rho_1 = \phi$
  - $\phi_{22} = Corr(Z_t^*, Z_{t+2}^*) = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\phi^2 - \phi^2}{1 - \varphi^2} = 0$
  - $\phi_{kk} = Corr(Z_t^*, Z_{t+k}^*) = 0,\quad k \geq 2$

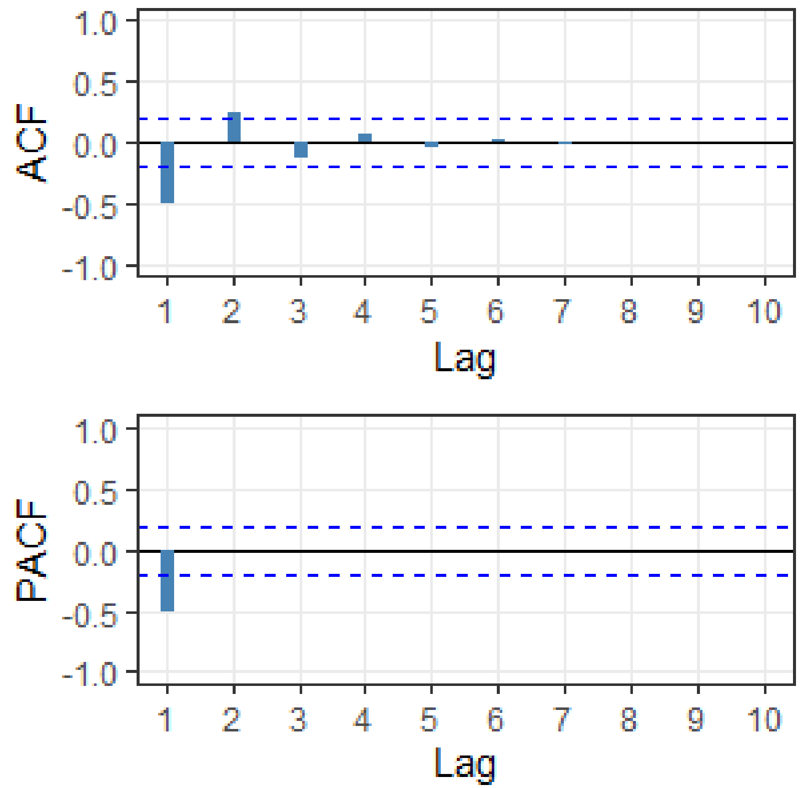
자기회귀과정 - AR(1)

- **ACF와 PACF (이론적인 형태)**

$Z_t = 0.5Z_{t-1} + \varepsilon_t$



$Z_t = -0.5Z_{t-1} + \varepsilon_t$



자기회귀과정 - AR(2)

- **AR(2) process**

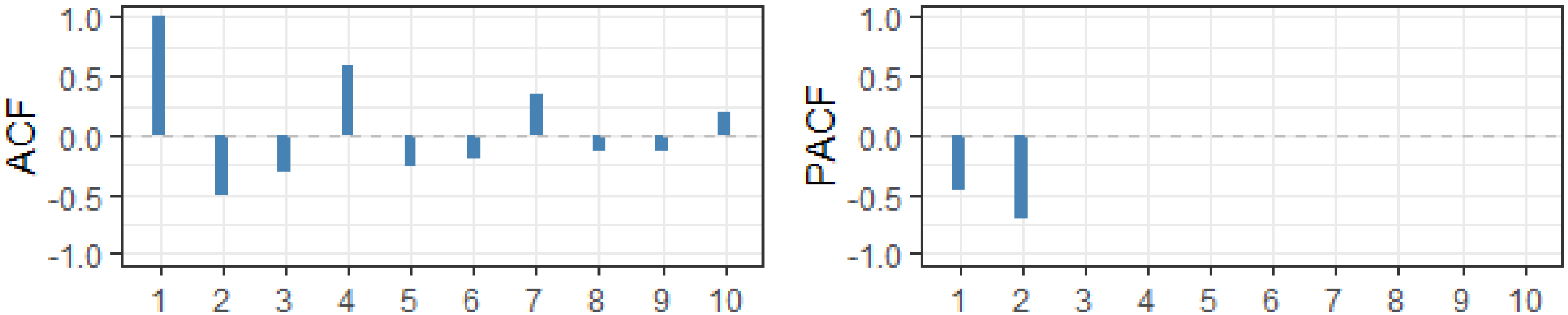
$$Z_t - \mu = \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \phi_2(Z_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(Z_t - \mu) = \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad \Phi(B)(Z_t - \mu) = \varepsilon_t$
- $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \delta = (1 - \phi_1 - \phi_2)\mu$
- 정상성 조건
  - 특성함수 $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$의 근의 절대값이 1보다 클 때
  - $\phi_1 + \phi_2 < 1, \phi_2 - \phi_1 < 1, -1 < \phi_2 < 1$
- 정상성을 만족할 때
  - 정상 선형과정으로 표현 가능 : $Z_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
  - 부분자기상관함수 (PACF) : $\phi_{kk} = f(x) = \begin{cases} \rho_1, & k = 1 \\ \phi_2, & k = 2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$

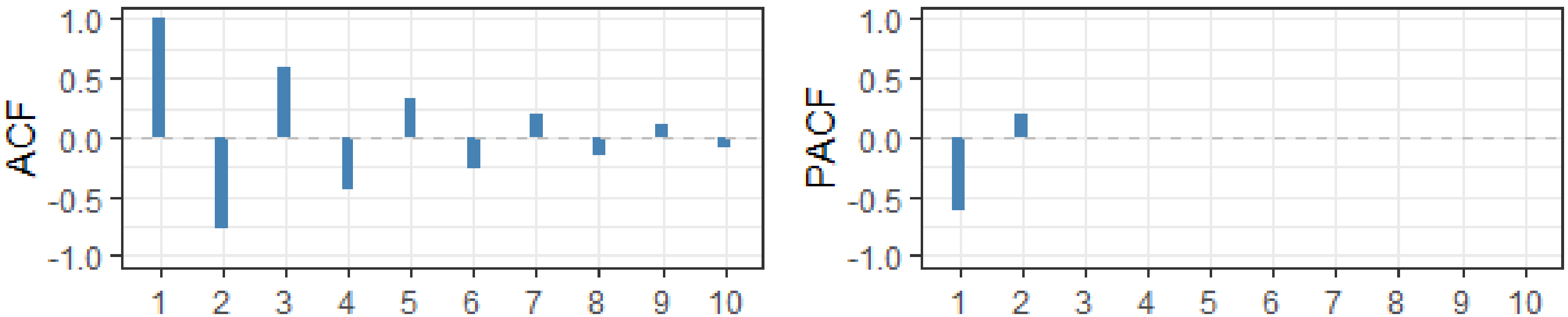
자기회귀과정 - AR(2)

- **AR(2) : ACF/PACF (이론적인 형태)**

$\phi_1 = -0.8, \phi_2 = -0.7$



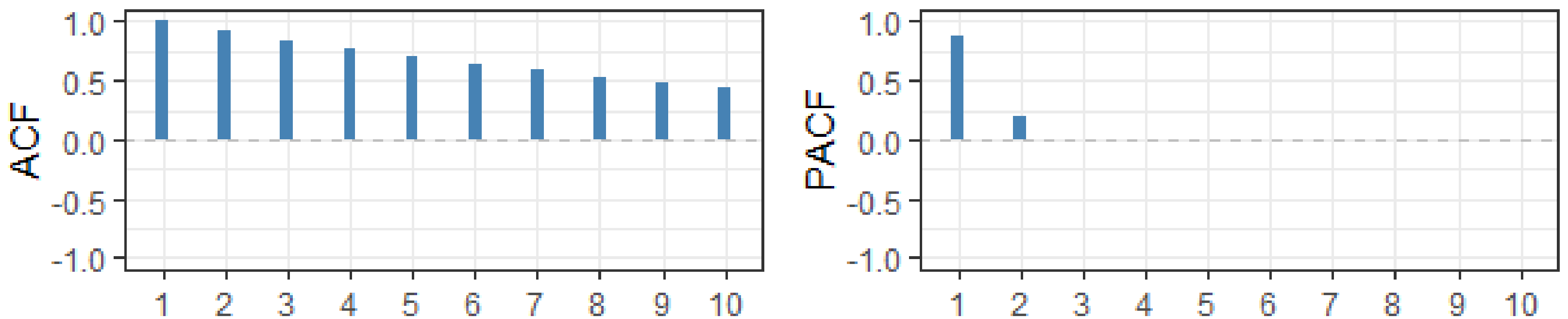
$\phi_1 = -0.5, \phi_2 = 0.2$



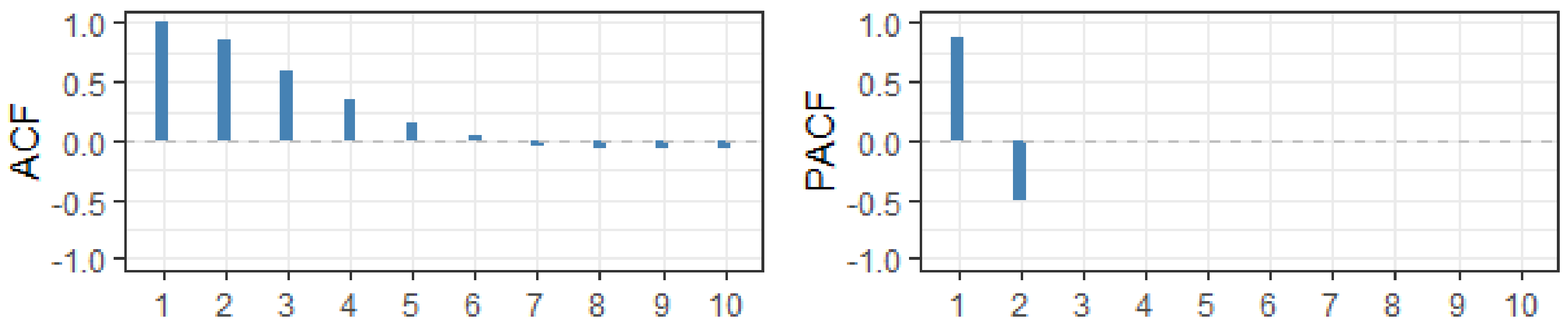
자기회귀과정 - AR(2)

- **AR(2) : ACF/PACF (이론적인 형태)**

$\phi_1 = 0.7, \phi_2 = 0.2$



$\phi_1 = 1.3, \phi_2 = -0.5$



자기회귀과정 - AR(p)

- **AR(p) process**

$$Z_t - \mu = \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p\left(Z_{t-p} - \mu\right) + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- $\left(1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p\right)(Z_t - \mu) = \varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad \Phi(B)(Z_t - \mu) = \varepsilon_t$
- $Z_t = \delta + \phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t, \quad \delta = (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)\mu$
- 정상성 조건
  - 특성함수 $\Phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 클 때
- 정상성을 만족할 때
  - 정상 선형과정으로 표현 가능 : $Z_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$
  - 평균과 분산, 자기공분산과 자기상관함수(ACF)
  - 부분자기상관함수 (PACF) : $\phi_{kk} = f(x) = \begin{cases} \rho_1, & k = 1 \\ \ldots\ , & k = 2 \\ 0\ , & k > p \end{cases}$

이동평균과정

- **MA(q) process**

$$Z_t - \mu = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- 후진연산자 이용

$$(Z_t - \mu) = \left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^p\right)\varepsilon_t \quad \Rightarrow \quad (Z_t - \mu) = \Theta(B)\varepsilon_t$$

MA operator

- Stationary linear process의 특별한 경우

- $E(Z_t) = \mu$

- $Var(Z_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2$

이동평균과정 - MA(1)

- **MA(1) process**

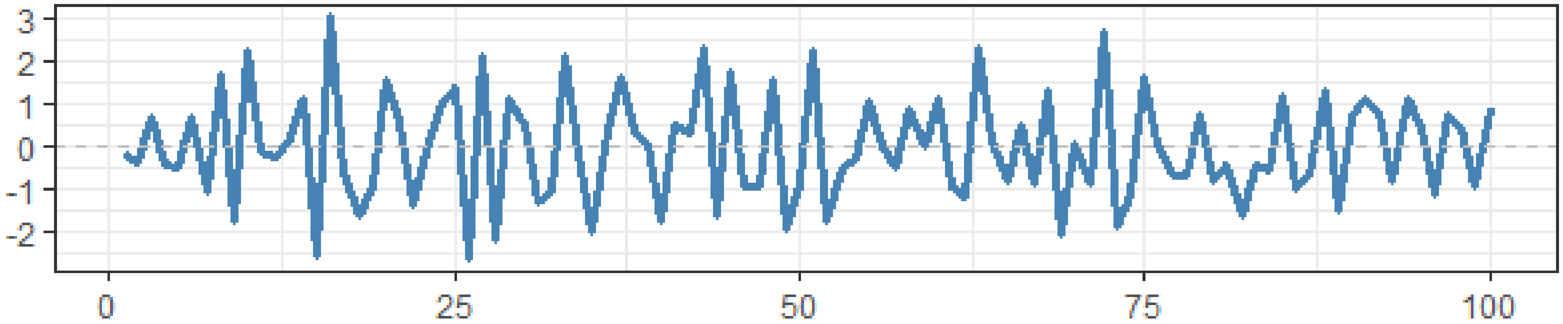
$$Z_t - \mu = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- $Z_t - \mu = (1 - \theta B)\varepsilon_t = \Theta(B)\varepsilon_t$
- 정상확률과정
- $E(Z_t) = \mu$
- $Var(Z_t) = (1 + \theta^2)\sigma^2$

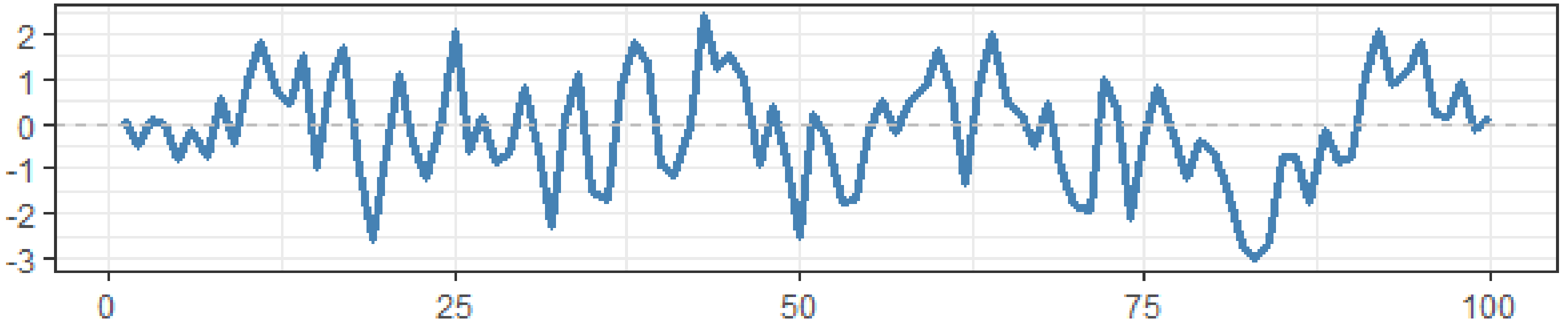
이동평균과정 - MA(1)

- **MA(1)**

$Z_t = \varepsilon_t - 0.6\ \varepsilon_{t-1}, \rho_1 = -0.44$



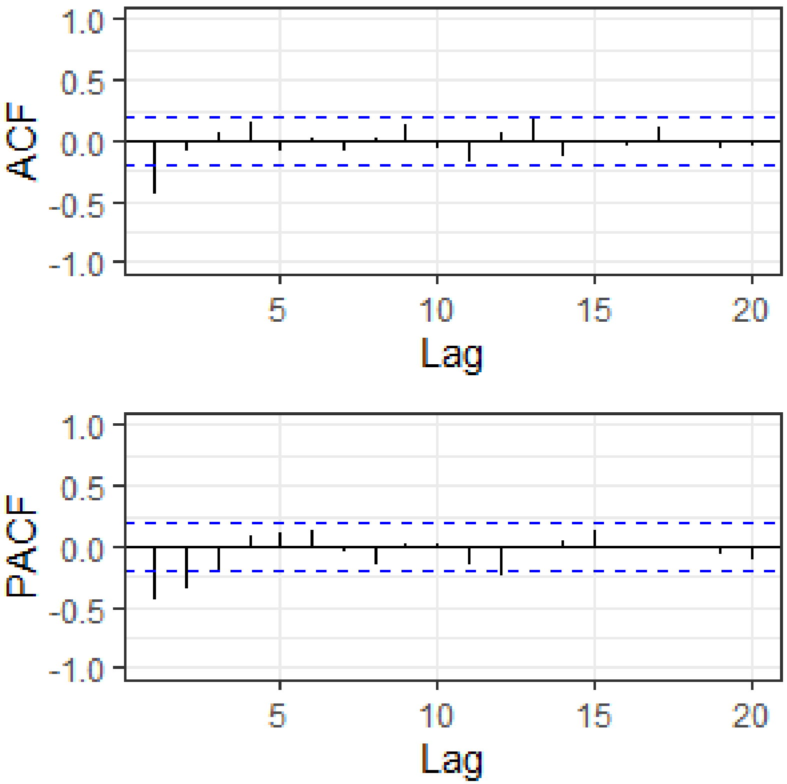
$Z_t = \varepsilon_t + 0.6\ \varepsilon_{t-1}, , \rho_1 = 0.44$

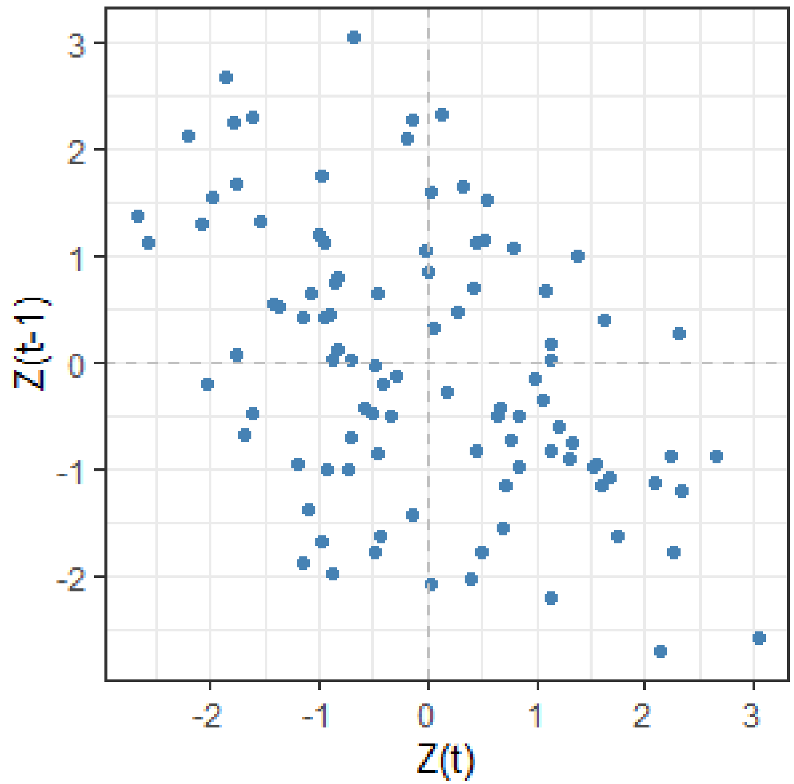


이동평균과정 - MA(1)

- **MA(1)**

$$Z_t = \varepsilon_t - 0.6\,\varepsilon_{t-1},\ \rho_1 = -0.44$$

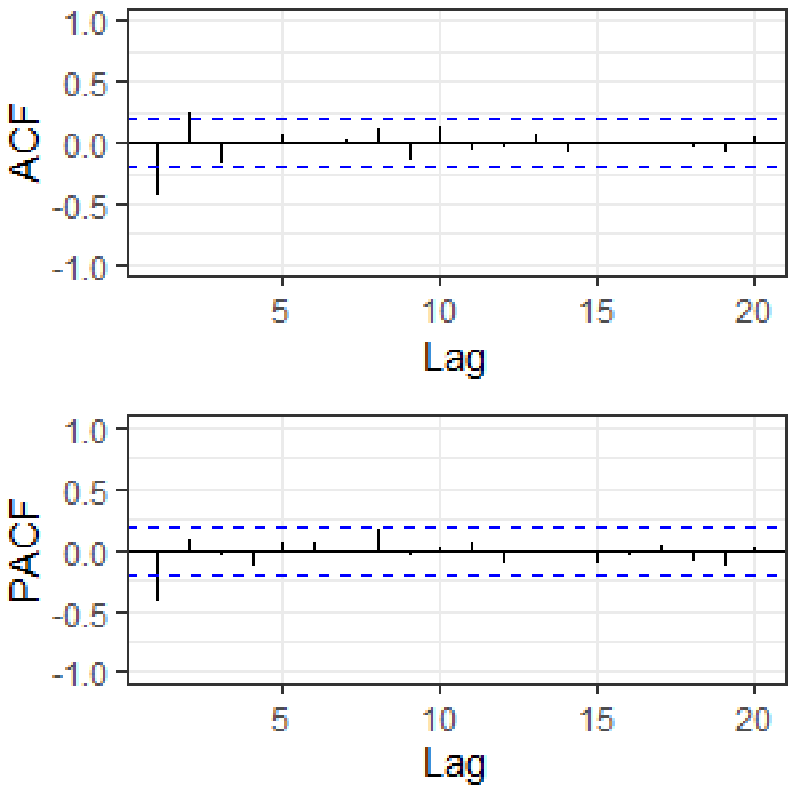


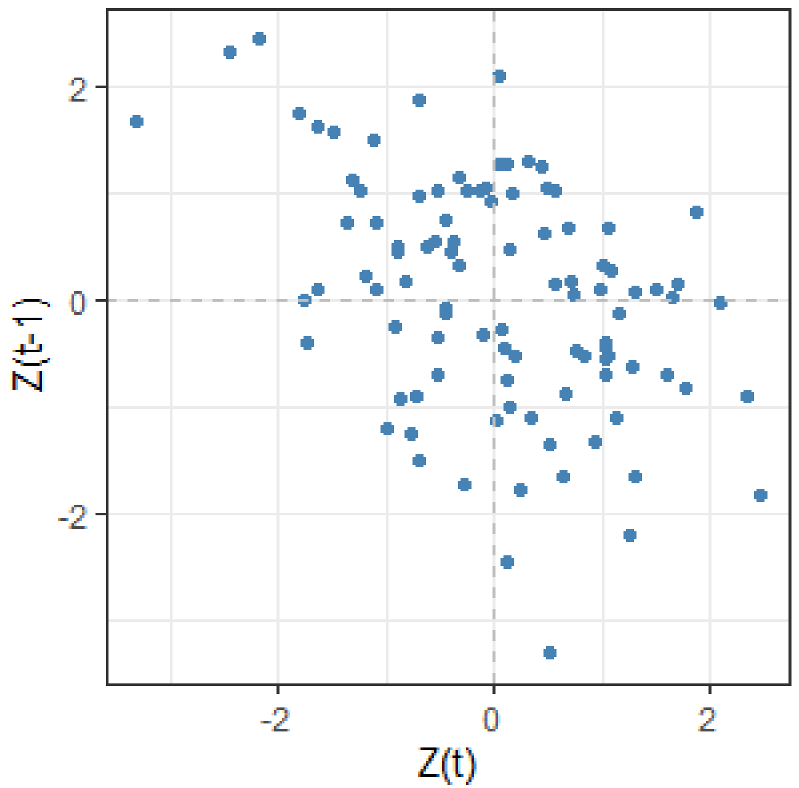


이동평균과정 - MA(1)

- **MA(1)**

$$Z_t = \varepsilon_t + 0.6\,\varepsilon_{t-1},\ \rho_1 = 0.44$$





이동평균과정 - MA(1)

- **MA(1) process**

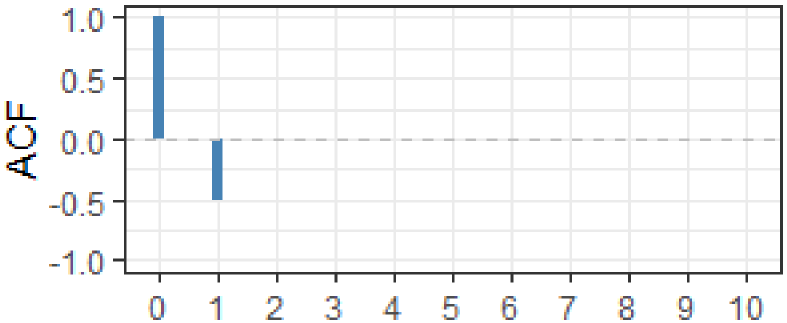
$$Z_t - \mu = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

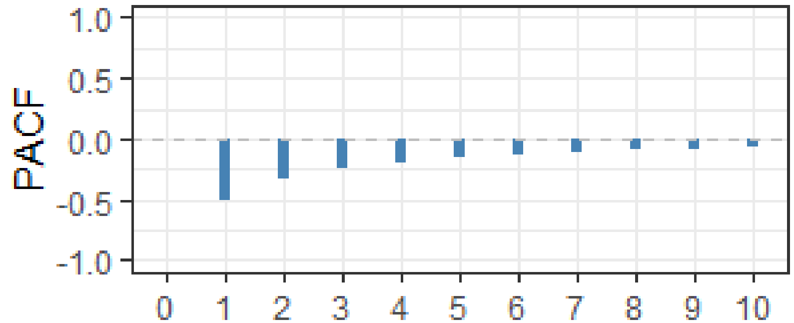
- $Z_t - \mu = (1 - \theta B)\varepsilon_t = \Theta(B)\varepsilon_t$
- 자기공분산 : γ_h
- 자기상관함수(ACF) : ρ_h
- 부분자기상관함수(PACF) = $\varphi_{kk} = \frac{-\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}, k \geq 1$

이동평균과정 - MA(1)

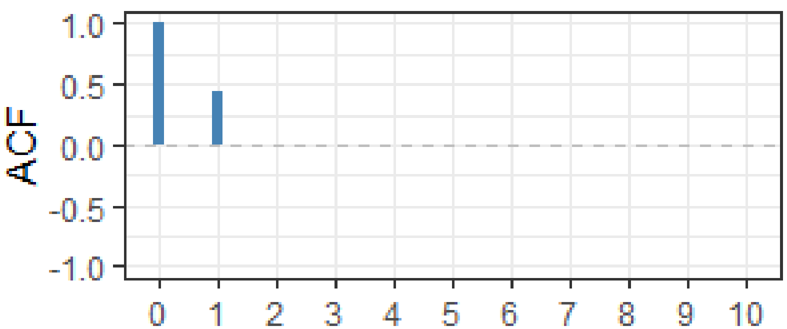
- **MA(1) : ACF/PACF (이론적인 형태)**

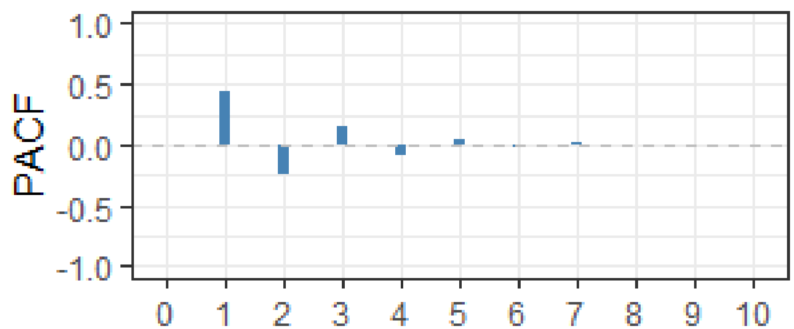
$\theta = 0.9$





$\theta = -0.6$





이동평균과정 - MA(1)

- **가역성(invertibilty)**
  - MA(1) : $Z_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ (편의상 $\mu = 0$)
  - $|\theta| < 1$ 이면 : $\varepsilon_t = Z_t + \theta\varepsilon_{t-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j Z_{t-j}$
    - 오차항 ε_t 를 과거의 관측값들의 함수로 표현가능 ⇒ 가역가능(invertible)
  - $|\theta| \geq 1$ 이면, 가역 가능하지 않다.
  - 가역성 조건 : $|\theta| < 1$

    $\Leftrightarrow \Theta(B) = 1 - \theta B = 0$의 근 $B = 1/\theta$의 절대값이 1보다 크다.
  - 가역성 조건을 부과하는 이유
    - 하나의 ACF에 하나의 모형이 대응
    - 관측 불가능한 오차항을 과거의 관측값들로 표현 가능

      → 잔차를 쉽게 구할 수 있음

이동평균과정 - MA(2)

- **MA(2) process**

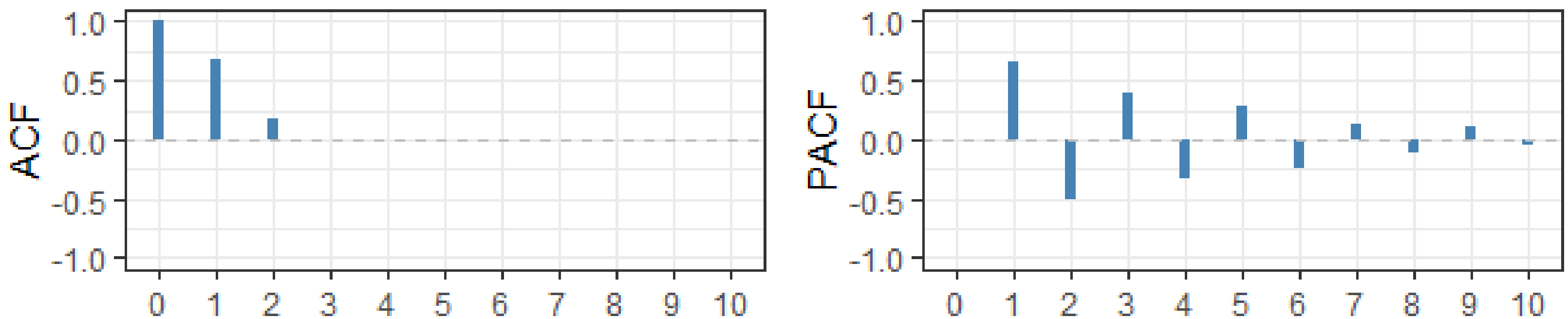
$$Z_t - \mu = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- $Z_t - \mu = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\varepsilon_t = \Theta(B)\varepsilon_t$
- 정상확률과정
  - $E(Z_t) = \mu$
  - $Var(Z_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$
  - 자기상관함수 (ACF) = $\rho_h = 0, h \geq 3$
  - 부분자기상관함수 (PACF) : 절대값이 지수적으로 감소
- 가역성 조건
  - $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다
  - $\theta_1 + \theta_2 < 1, \;\; \theta_2 - \theta_1 < 1, \;\; -1 < \theta_2 < 1$

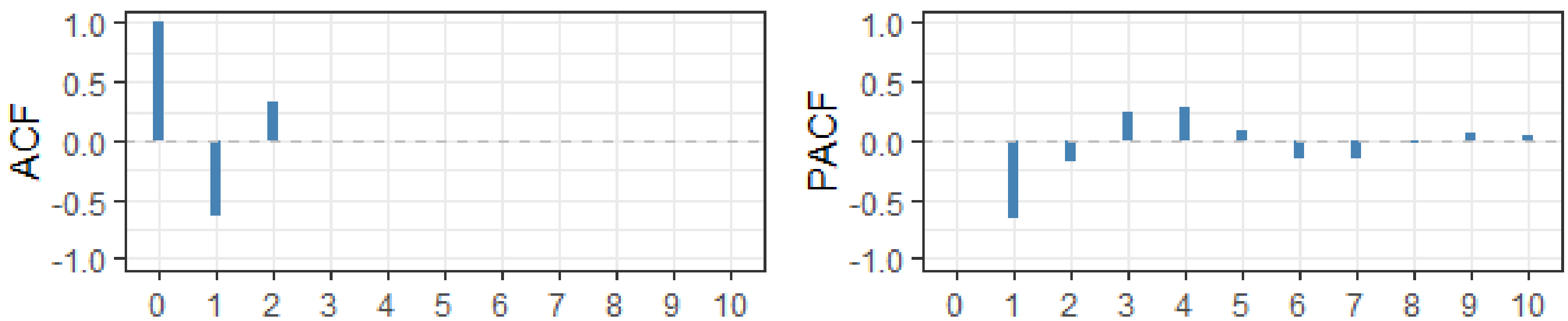
이동평균과정 - MA(2)

- **MA(2) : ACF/PACF (이론적인 형태)**

$\theta_1 = -1.6, \theta_2 = -0.7$



$\theta_1 = 0.8, \theta_2 = -0.7$



이동평균과정 - MA(q)

- **MA(q) process**

$$Z_t - \mu = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

- $Z_t - \mu = \left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\right)\varepsilon_t = \Theta(B)\varepsilon_t$
- 정상확률과정
    - $E(Z_t) = \mu$
    - $Var(Z_t) = (1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2$
    - 자기상관함수 (ACF) = $\rho_h = 0, h > q$
    - 부분자기상관함수 (PACF) : 절대값이 지수적으로 감소
- 가역성 조건
    - $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다

자기회귀이동평균과정

- **자기회귀과정과 이동평균과정의 쌍대성 (duality)**
  - $AR(p) \ \rightarrow \ MA(\infty)$ / $MA(q) \ \rightarrow \ AR(\infty)$ 로 표현 가능
  - AR(p)의 ACF와 MA(q)의 PACF : 지수적으로 감소하는 형태

    AR(p)의 PACF와 MA(q)의 ACF : 절단 형태
  - AR(p)는 가역성 조건은 필요하지 않으나 정상성 조건

    (“특성방정식 $\Phi(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다”)이 필요

    MA(q) 는 정상성 조건은 필요하지 않으나 가역성 조건

    (“특성방정식 $\Theta(B) = 0$의 근의 절대값이 1보다 크다”)이 필요

자기회귀이동평균과정

- **ARMA(p,q) process**

$$Z_t - \mu = \phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p\left(Z_{t-p} - \mu\right) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$$

- $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$

- 후진연산자

$$\left(1 - \phi_1 B - \cdots \phi_p B^p\right)(Z_t - \mu) = \left(1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q\right)\varepsilon_t$$

- 특성함수 (characteristic function)

  - AR polynomial : $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots \phi_p B^p$
  - MA polynomial : $\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_q B^q$
  - $\Phi(B)$, $\Theta(B)$ 는 공통인수를 갖지 않는다

자기회귀이동평균과정

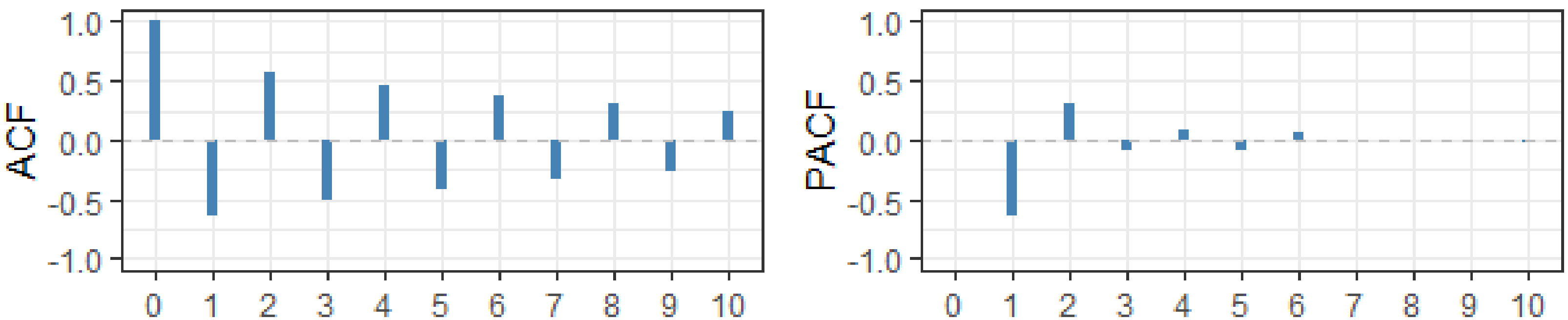
- **ARMA(p,q) process**
  - $\{Z_t\} \sim ARMA(p,q)$, stationary and invertible
  - 평균 : $E(Z_t) = \mu$
  - ACF와 PACF의 이론적인 특징

확률과정	ACF	PACF
AR(p)	지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태	시차 p 이후에는 0으로 절단형태
MA(q)	시차 q 이후에는 0으로 절단형태	지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태
ARMA(p,q)	시차 (q-p) 이후에는 지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태	시차 (p-q) 이후에는 지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태

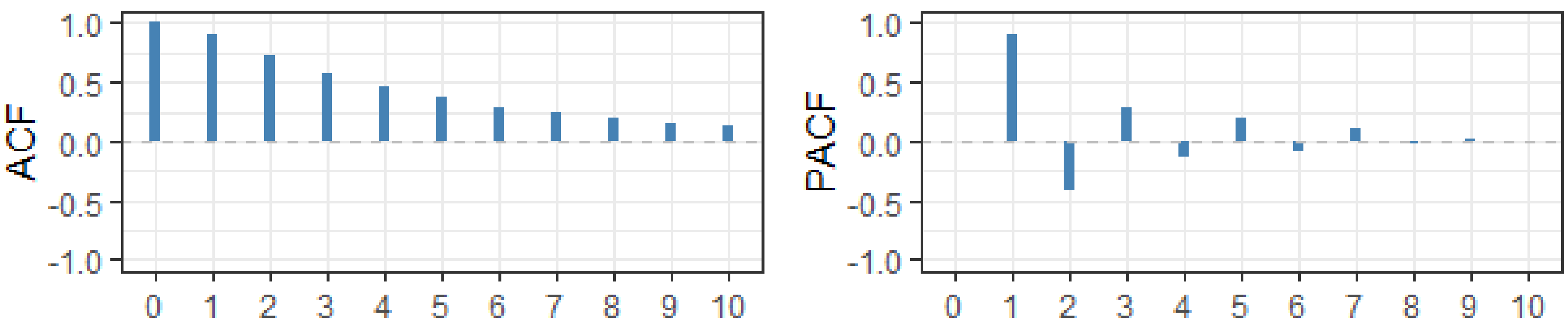
자기회귀이동평균과정

- **ARMA(1,1) : ACF/PACF (이론적인 형태)**

$\phi = -0.9, \theta = -0.5$



$\phi = 0.8, \theta = -0.7$



End of Document