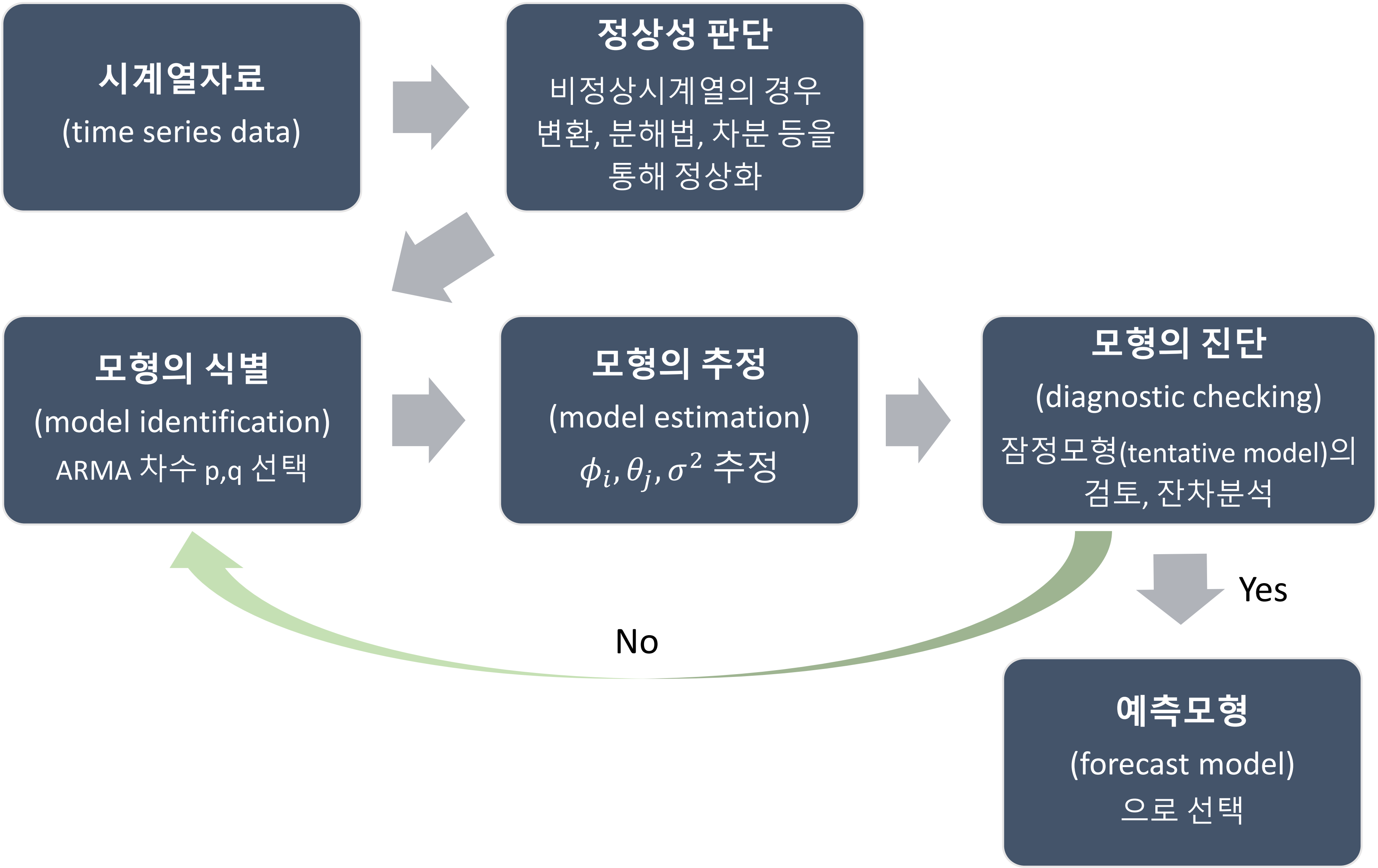
CH8. 정상 ARMA 모형의 적합

정상 ARMA 모형의 적합 절차



모형 식별 (model identification)

- **Step1 : 정상화**
  - 시계열 그림과 표본상관도표를 이용하여 비정상 시계열이라 판단되는 시계열을 정상시계열로 변환
  - 시계열 그림 – 추세, 계절성, 분산의 변화, 이상값 등 파악
  - 분산 변화 – 분산안정화 변환 시행
    - 대부분의 경제 관련 자료들은 로그 변환 이용
    - 일반적으로 log변환, Box-Cox 변환 등 시행

모형 식별 (model identification)

- **Step1 : 정상화**
  - 평균 변화 – 분해법 이용한거나 차분, 계절 차분 시행
    - 추세나 계절성이 존재 / SACF가 서서히 감소
    - 차분된 시계열의 분산이 이전 단계의 시계열의 분산보다 작다
    - Unit root test 결과 차분 필요 여부 판단
    - 과대차분을 하지 않도록 주의
    - 계절형 자료가 아닌 경우 대부분 차분의 차수는 0, 1, 2이면 충분하고, 계절형 자료의 경우는 계절의 주기와 같은 값의 차분이면 충분하다.

모형 식별 (model identification)

Step2 : ARMA 모형의 차수 결정

- SACF와 SPACF를 이용하여 차수 p,q 선택

확률과정	ACF	PACF
AR(p)	지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태	시차 p 이후에는 0으로 절단형태
MA(q)	시차 q 이후에는 0으로 절단형태	지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태
ARMA(p,q)	시차 (q-p) 이후에는 지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태	시차 (p-q) 이후에는 지수적으로 감소하거나 소멸하는 sine 함수 형태

- $H_0: \phi_{kk} = 0 \; vs. H_1: \; \phi_{kk} \neq 0 \Rightarrow |\hat{\phi}_{kk}| > 1.96/\sqrt{n}$ 이면 귀무가설 기각
- $H_0: \rho_k = 0 \; vs. H_1: \; \rho_k \neq 0 \Rightarrow \; |\hat{\rho}_k| > 1.96 \, S.E.(\hat{\rho}_k)$ 이면 귀무가설 기각

연습문제

- **예제 : n=100 인 어떤 시계열 자료의 SACF가 다음과 같을 때, 모형 적합**

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\hat{\rho}_k$	0.61	0.37	-0.05	0.06	-0.21	0.11	0.08	0.05	0.12	-0.01

- $Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}(1 + 2\rho_1^2 + 2\rho_2^2 + \cdots + 2\rho_q^2),\ k \geq q + 1$
- $H_0 : \rho_1 = 0 \ \Rightarrow\ Var(\hat{\rho}_1) \approx \frac{1}{n} = \frac{1}{100}$
- $H_0 : \rho_2 = 0 \ \Rightarrow\ Var(\hat{\rho}_2) \approx \frac{1}{100}(1 + 2\hat{\rho}_1^2)$
- $H_0 : \rho_k = 0 \ \Rightarrow\ Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{100}(1 + 2\hat{\rho}_1^2 + 2\hat{\rho}_2^2),\ k \geq 3$

연습문제

- **예제 : n=100 인 어떤 시계열 자료의 SACF가 다음과 같을 때, 모형 적합**

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\hat{\rho}_k$	0.61	0.37	-0.05	0.06	-0.21	0.11	0.08	0.05	0.12	-0.01

- AR 모형을 적합하기 위하여 ϕ_{kk} :

모형 식별 (model identification)

- **Step2 : ARMA 모형의 차수 결정**
  - 모형선택 기준 (model selection criterion) 이용
    - Akaike's Information Criterion, Akaike (1973, 1974)

$$\mathrm{AIC} = n\ln(\hat{\sigma}^2) + 2(p+q)$$

    - SBC (Schwartz's Bayesian Criterion, Schwartz (1978))

$$\mathrm{SBC} = n\ln(\hat{\sigma}^2) + (p+q)\ln(n)$$

    - AIC, SBC, FPE, BIC, CAT 등이 최소가 되도록 모형 선택

모형 식별 (model identification)

- **Step3 : 상수항 포함 여부**
  - 시계열을 차분한 경우, 상수항 δ를 모형에 포함시킬지의 여부를 결정 필요
  - 차분된 시계열 $W_t = (1 - B)^d Z_t$ 의 표본평균과 근사표준오차를 이용하여

    $H_0 : \delta = 0$ 의 유의성 검정을 시행

    - 검정 통계량 : $t = \frac{\bar{W}}{S_{\bar{W}}}$
    - $\bar{W} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} W_t$
    - $S_{\bar{W}} = \left\{ \frac{\hat{\gamma}_0}{n} (1 + 2\hat{\rho}_1 + \cdots + 2\hat{\rho}_k) \right\}^{1/2}$

모수의 추정 (Parameter Estimation)

- **ARMA(p,q) Process**
  - $Z_t - \mu = \phi_1(Z_t - \mu) + \cdots + \phi_p\left(Z_{t-p} - \mu\right) + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$
  - $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - 추정해야 할 모수
    - Mean : μ
    - AR coefficients : $\phi_1, \ldots, \phi_p$
    - MA coefficients : $\theta_1, \ldots, \theta_q$
    - Variance of WN : σ^2

모수의 추정 – 적률추정법

- **적률추정법**
  - Method of moment estimation, MME
  - 모집단의 적률을 상응하는 표본의 적률로 대체한 후 방정식을 풀어 추정량을 구하는 방법
  - 보통 최종적인 추정 방법으로는 추천할 수 없고, 다른 추정 방법의 초기치로 사용됨
  - ARMA(p,q) 모형 – 모수의 MME
    - $\mu = E(Z_t) \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t$
    - $\gamma_h = E\big(Z_t - E(Z_t)\big)\big(Z_{t+h} - E(Z_{t+h})\big) \Rightarrow \hat{\gamma}_h = \frac{1}{n}\sum(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+h} - Z)$
    - Yule-Walker equation과 모수들간의 관계식을 이용하여 ϕ_i, θ_j 에 대한 MME 계산

모수의 추정 – 적률추정법

- **적률추정법 (예) AR(1)**
  - $Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$
  - 적률과 모수의 관계식
    - $\mu = E(Z_t)$
    - $Var(Z_t) = \phi^2 Var(Z_{t-1}) + Var(\varepsilon_t) \Rightarrow \gamma_0 = \phi^2\gamma_0 + \sigma^2$
    - $Cov(Z_t, Z_{t-1}) = Cov(\phi Z_{t-1} + \mu - \phi\mu + \varepsilon_t, Z_{t-1}) \Rightarrow \gamma_1 = \phi\gamma_0$
  - MME
    - $\hat{\mu} = \bar{Z}$
    - $\hat{\phi} = \hat{\gamma}_1 / \hat{\gamma}_0$
    - $\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0\left(1 - \hat{\phi}^2\right)$

모수의 추정 – 적률추정법

- **적률추정법 (예) MA(1)**
  - $Z_t - \mu = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$
  - 적률과 모수의 관계식
    - $\mu = E(Z_t)$
    - $\gamma_0 = Var(Z_t) = Var(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2(1+\theta^2)$
    - $Cov(Z_t, Z_{t-1}) = -\theta\sigma^2 \Rightarrow \gamma_1 = -\theta\sigma^2$
  - MME
    - $\hat{\mu} = \bar{Z}$
    - $\hat{\theta} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\,\hat{\rho}_1^2}}{2\,\hat{\rho}_1}$
    - $\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\gamma}_0}{1+\hat{\theta}^2}$

모수의 추정 – 최소제곱법

- **최소제곱법**
  - least squares estimation, LSE
  - 오차 (또는 잔차)의 제곱합이 최소가 되도록 모수를 추정하는 방법
  - 조건부 최소제곱법 (conditional LSE, CLSE)
  - 비조건부 최소제곱법 (unconditional LSE, ULSE)

모수의 추정 – 최소제곱법

조건부 최소제곱법

- 조건부 오차제곱합 : $S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu) = \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu | Z_*, \varepsilon_*, Z_1, \cdots, Z_n)$
- $Z_1, \cdots, Z_n$: 관측값
- $Z_* = \left(Z_{1-p}, \dots, Z_0\right)^T$: 관측되지 않은 Z에 대한 초기값 : 보통 표본평균 사용
- $\varepsilon_* = \left(\varepsilon_{1-q}, \dots, \varepsilon_0\right)^T$: 오차항의 초기값 : $E(\varepsilon_t) = 0$ 을 주로 사용
- 대부분의 시계열 분석용 패키지들은 다음을 이용하여 계산
  - 오차제곱합 : $S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu) = \sum_{t=p+1}^{n} \varepsilon_t^2(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu | \varepsilon_*, Z_1, \cdots, Z_n)$
  - 초기값 : $\varepsilon_* = \left(\varepsilon_p, \cdots, \varepsilon_{p+1-q}\right)' = (0, \cdots, 0)'$
- CLSE
  - $\left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mu}\right) = \arg \min_{(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu)} S_*(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}, \mu)$
  - $\hat{\sigma}^2 = S_*\left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\mu}\right)/\nu$, ν=제곱합 항들의 수 – $(p + q + 1)$

모수의 추정 – 최소제곱법

- **조건부 최소제곱법 (예) AR(1)**
  - $Z_t - \mu = \phi(Z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$
  - 조건부 오차제곱합 : $S_*(\phi, \theta, \mu) = \sum_{t=2}^{n}\{(Z_t - \mu) - \phi(Z_{t-1} - \mu)\}^2$
  - CLSE :
    - 연립방정식 $\begin{cases} \frac{\partial S_*}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial S_*}{\partial \phi} = 0 \end{cases}$ 의 해가 (μ, ϕ) 의 CLSE
    - $\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=2}^{n} Z_t - \phi \sum_{t=2}^{n} Z_{t-1}}{(n-1)(1-\phi)}, \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(Z_t - \mu)(Z_{t-1} - \mu)}{\sum_{t=2}^{n}(Z_{t-1} - \mu)^2}$
    - n이 충분히 큰 경우 : $\hat{\mu} \cong \bar{Z}, \hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t-1} - \bar{Z})}{\sum_{t=2}^{n}(Z_{t-1} - \bar{Z})^2} \cong \hat{\rho}_1(MME)$
    - $\hat{\sigma}^2 = \frac{S_*(\hat{\phi}, \hat{\mu})}{\nu}, \nu = (n-1) - (1+0+1) = n-3$

모수의 추정 – 최소제곱법

- **조건부 최소제곱법 (예) MA(1)**

모수의 추정 – 최소제곱법

비조건부 최소제곱법

- 비조건부 오차제곱합 : $S(\phi, \theta, \mu) = \sum_{t=-\infty}^{n} [\varepsilon_t]^2 = \sum_{t=-Q}^{n} [\varepsilon_t]^2$
- $[\varepsilon_t] = E(\varepsilon_t | \phi, \theta, \mu, Z_1, \cdots, Z_n)$
- 초기값 대신 미지의 과거 시계열값 Z_*, ε_*를 후방 예측한 값을 사용
- 따라서 초기조건이 오차제곱합에 미치는 영향을 줄일 수 있어 조건부 최소제곱법보다 효율적인 추정법이다.
- 그러나 만약 모형이 잘못 적합되는 경우에는 비효율적이다.
- UCLSE
  - $(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\mu}) = \arg \min_{(\phi, \theta, \mu)} S(\phi, \theta, \mu)$
  - $\hat{\sigma}^2 = S(\hat{\phi}, \hat{\theta}, \hat{\mu})/n$

모수의 추정 – MLE

최대가능도 추정법

- maximum likelihood estimation, MLE
- White noise의 분포 가정 – 정규분포
- 가능도 함수 (likelihood function) 또는 로그-가능도 함수 (log-likelihood function)을 최대로 하는 모수의 값을 찾는 방법
- 예) AR(1) model의 가능도함수
  - $L(\phi, \mu, \sigma^2) = f(Z_1, \cdots, Z_n) = f(Z_1) \prod_{t=2}^{n} f(Z_t|Z_{t-1})$
  - $Z_t|Z_{t-1} \sim N(\mu + \phi(Z_{t-1} - \mu), \sigma^2)$
  - $Z_1 \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2})$

모수의 추정 – MLE

- **추정량의 점근분포**

  - AR(p) model : $\boldsymbol{\phi} = \left(\phi_1, \dots, \phi_p\right)^T$

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\phi}} - \boldsymbol{\phi}\right) \approx N(0, \sigma^2 \Gamma_p^{-1}),\ \text{단}\ \Gamma_p = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

  - $p = 1 : \sqrt{n}\left(\hat{\phi} - \phi\right) \approx N(0, \sigma^2/\gamma_0),$

  - MA or ARMA model : Box(1994) 등

모형의 진단 - 잔차분석

- **잔차분석 (residual analysis)**
  - 잔차 : $e_t = Z_t - \hat{Z}_t =$ 관측값 – fiited value
  - 잔차를 이용하여 $\varepsilon_t \sim_{iid} N(0, \sigma^2)$인지 검정
    - 잔차그림
    - 잔차의 RSACF, RSPACF 그림을 이용한 white noise의 여부 판단
    - 잔차를 이용한 WN test (Portmanteau test)
      - $H_0: \rho_1(\varepsilon) = \cdots = \rho_K(\varepsilon) = 0$
      - Box-Pierce test (1970) : $Q^* = n \sum_{k=1}^{K} \hat{\rho}_k^2\,(e) \approx \chi^2(K-p-q)$
      - Ljung-Box test (1978) : $Q = n(n+2) \sum_{k=1}^{K} \frac{\hat{\rho}_k^2(e)}{n-k} \approx \chi^2(K-p-q)$
    - Jarque and Bera(1980)의 정규성 검정

$$JB = \frac{n}{6}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{e_t^3}{\hat{\sigma}^3}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{e_t^4}{\hat{\sigma}^4} - 3\right)^2 \approx \chi^2(2)$$

모형의 진단 – 과대적합

- **과대적합 진단 (overfitting diagostics)**
  - 과대적합
    - 잠정 모형에 모수를 추가하여 더 많은 개수의 모수를 포함하는 모형을 적합시키는 것
    - 예) AR(1) 모형이 잠정모형으로 선택되었다면 AR(1) 모형을 포함하는 AR(2) 또는 ARMA(1,1) 모형을 자료에 적합시켜 보는 것
  - 과대적합 후 다음의 현상이 나타나면 잠정모형을 새로운 모형으로 대체
    - 잠정 모형에 추가된 모수가 유의하다고 판정되는 경우
    - 잠정모형에서의 모수추정값이 과대적합시킨 후 얻어지는 모수추정값과 큰 차이가 있는 경우
    - 과대적합된 모형에서 잔차들의 분산이 잠정모형에서 잔차들의 분산보다 작아진 경우

참고 : 단위근검정

단위근 검정

- $\Phi(B) = (1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p)$
    - 단위근 : $\Phi(B) = 0$의 근 중 크기가 1인 근
    - 단위근을 갖는 시계열은 비정상확률과정임
    - 차분을 통해 정상 확률 과정으로 변환 가능

참고 : 단위근검정

- **AR(1)에서의 단위근 검정 : Dickey-Fuller 단위근 검정**
  - $Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t, \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$
  - 검정통계량 : $t = \frac{\hat{\phi}-1}{\{s^2/\sum_{t=1}^{n} Z_{t-1}^2\}^{1/2}}, s^2 = \sum_{t=1}^{n}(Z_t - \hat{\phi}Z_{t-1})\text{^}2\ /(n-1)$
  - Case1
    - 실제 모형 : $Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t$
    - 적합 모형 : $Z_t = \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t$
  - Case2
    - 실제 모형 : $Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t$
    - 적합 모형 : $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \varepsilon_t$
  - Case3
    - 실제 모형 : $Z_t = \delta + Z_{t-1} + \varepsilon_t$
    - 적합 모형 : $Z_t = \delta + \phi Z_{t-1} + \beta_t + \varepsilon_t$

End of Document