202055364 황성윤

8.1 다음은 시계열자료 Z_t의 표본크기 n, 평균 $\bar{Z}$, 표준편차 S_Z, 그리고 시차 13까지의 SACF와 SPACF이다. 각 시계열자료를 잘 설명하는 모형은 무엇인지 식별하여라.

$n=100$, $\bar{Z}=24.75$, $S_Z=9.27$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\hat{\rho}_k$	-0.48	-0.04	-0.06	0.14	-0.22	0.19	-0.10	-0.02	0.09	0.03	-0.12	0.09	0.03
$\hat{\phi}_{kk}$	-0.48	-0.24	-0.21	0.01	-0.20	-0.01	-0.05	-0.15	-0.04	-0.06	-0.04	0.02	0.06

① $H_0: \rho_k=0$ vs $H_1: \rho_k \neq 0 \Rightarrow$ 기각역 : $|\hat{\rho}_k| > 1.96 \times S.E(\hat{\rho}_k)$

$Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}(1+2\rho_1^2+2\rho_2^2+\cdots+2\rho_q^2)$, $k \geq q+1$

$Var(\hat{\rho}_1) \approx \frac{1}{n} = \frac{1}{100} \Rightarrow |\hat{\rho}_1| = 0.48 > 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{100}} = 0.196 \Rightarrow H_1: \rho_1 \neq 0$

$Var(\hat{\rho}_2) \approx \frac{1}{n}(1+2\hat{\rho}_1^2) = 0.014608 \Rightarrow |\hat{\rho}_2| = 0.04 < 1.96 \times \sqrt{0.014608} = 0.2369 \Rightarrow H_0: \rho_2 = 0$

⋮ ⋮ ⋮

$Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{n}(1+2\hat{\rho}_1^2)$, $k \geq 2 \Rightarrow H_0: \rho_k = 0$, $k \geq 2$. → ρ_1만 유의하고 그 이후의 시차에서는 절단된 형태 ⇒ MA(1) 모형

② $H_0: \phi_{kk}=0$ vs $H_1: \phi_{kk} \neq 0 \Rightarrow$ 기각역 : $|\hat{\phi}_{kk}| > \frac{1.96}{\sqrt{n}}$

$Var(\hat{\phi}_{kk}) \approx \frac{1}{n} = \frac{1}{100} \Rightarrow$ If $|\hat{\phi}_{kk}| > \frac{1.96}{\sqrt{100}} = 0.196$, then reject H_0.

→ $\phi_{11}, \phi_{22}, \phi_{33}$ 까지는 유의하고 그 이후의 시차에서는 절단된 형태

⇒ AR(3) 모형

∴ 더 간단한 모형을 선택하는 것이 바람직하므로 MA(1) 모형을 선택한다.

$$Z_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \overset{iid}{\sim} WN(0, \sigma^2)$$

8.2 두 시계열 X_t와 Y_t가 각각 AR(1)과 MA(1) 모형을 따른다고 하자.

$$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma_\varepsilon^2),\ |\phi|<1$$

$$Y_t = a_t - \theta a_{t-1},\ a_t \sim WN(0, \sigma_a^2),\ |\theta|<1$$

$Z_t = X_t + Y_t$ 는 어떤 모형을 따르겠는가?

solve) 시계열 Z_t를 다음과 같이 적을 수 있다.

$$Z_t = X_t + Y_t = \frac{1}{(1-\phi B)}\varepsilon_t + (1-\theta B)a_t \Rightarrow (1-\phi B)Z_t = \varepsilon_t + (1-\phi B)(1-\theta B)a_t$$

여기에서 $(1-\phi B)Z_t = Q_t$ 라고 두고 시계열 Q_t에 대해 분산과 ACF를 구하면 다음과 같다.

$$Q_t = \varepsilon_t + a_t - (\theta+\phi)a_{t-1} - \phi\theta a_{t-2}$$

$$\Rightarrow Var(Q_t) = \sigma_\varepsilon^2 + \{1+(\theta+\phi)^2+\phi^2\theta^2\}\sigma_a^2$$

$$Cov(Q_t, Q_{t-1}) = Cov[\varepsilon_t + a_t - (\theta+\phi)a_{t-1} - \phi\theta a_{t-2},\ \varepsilon_{t-1} + a_{t-1} - (\theta+\phi)a_{t-2} - \phi\theta a_{t-3}]$$

$$= -(1-\phi\theta)(\theta+\phi)\sigma_a^2$$

$$Cov(Q_t, Q_{t-2}) = Cov[\varepsilon_t + a_t - (\theta+\phi)a_{t-1} - \phi\theta a_{t-2},\ \varepsilon_{t-2} + a_{t-2} - (\theta+\phi)a_{t-3} - \phi\theta a_{t-4}]$$

$$= -\phi\theta\sigma_a^2$$

$$Cov(Q_t, Q_{t-k}) = 0\ (k \geq 3)$$

즉, 시계열 Q_t의 ACF는 2번째 시차까지는 살아남고 그 이후는 절단되어 0이 된다.
따라서 Q_t는 MA(2) 모형이 적절하다고 보여지며,
결과적으로 시계열 Z_t는 ARMA(1,2) 모형을 따른다고 볼 수 있다.