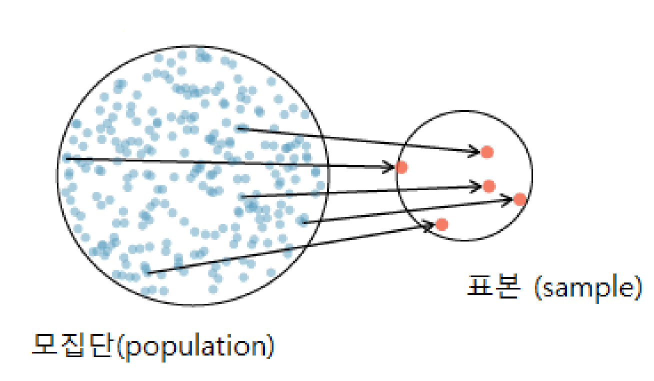
이론통계학

7장 모수의 추정 I

2021년 봄학기

전북대학교 통계학과

Introduction



통계적 추론

- 모집단 규명 $\leftarrow$ 모집단의 확률분포 $f(x|\theta)$ $\leftarrow$ 모수 θ 추론
- 추정(estimation) - 점추정(point estimation), 구간추정(interval estimation)
- 가설검정(hypothesis testing)

- **추정량 (estimator)** : $\hat{\theta}$ 모수 θ를 하나의 값으로 추측하는 방법

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

- **추정치 (estimate)** : 표본을 관측하여 실제로 얻은 자료를 이용하여 구한 추정량의 값

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

최대가능도법 (method of maximum likelihood estimation)

가능도 함수 (likelihood function): $L(\theta)$

$X_1, X_2, \ldots, X_n : f(x|\theta)$를 확률밀도함수로 갖는 모집단으로부터의 랜덤샘플

- 결합확률밀도함수

$$f(\boldsymbol{x}|\theta) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)\cdots f(x_n|\theta)$$

  - 주어진 θ에 대하여 $\boldsymbol{x}$를 관측할 확률밀도를 나타냄
  - 확률밀도함수는 고정된 모수 θ의 값에서 $\boldsymbol{x}$의 함수

- 가능도 함수 (likelihood function)

$$L(\theta) = f(x_1|\theta)f(x_2|\theta)\cdots f(x_n|\theta)$$

  - $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$를 관측한 후 $\boldsymbol{x}$는 고정되어 있는 것으로 생각하고 $f(\boldsymbol{x}|\theta)$를 θ의 함수로 간주.

최대가능도법 (method of maximum likelihood estimation)

최대가능도추정량(maximum likelihood estimator)
$\hat{\theta} = \mathrm{argmax}_{\theta} L(\theta)$: $L(\theta)$를 최대로 하는 θ

로그 가능도함수 (log-likelihood function) : $\log L(\theta)$, $l(\theta)$

$l(\theta)$를 이용한 MLE

- 로그함수는 증가함수이므로 $\hat{\theta} = \mathrm{argmax}_{\theta} l(\theta) = \mathrm{argmax}_{\theta} \sum_{i=1}^{n} \log f(x_i|\theta)$
- $l(\theta)$: 일반적으로 concave function (위로볼록), θ에 대하여 미분 가능

$$\hat{\theta} : \frac{d}{d\theta} l(\theta) = 0 \text{ 의 해}$$

MLE

예 7.1

모수 θ는 θ_1, θ_2 혹은 θ_3 중 하나의 값을 갖는다. 각 모수의 값에서 이산형 확률변수 X의 확률분포가 다음과 같을 때 모수 θ의 최대가능도추정량?

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x\|\theta_1)$	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1	0.05	0.05
$f(x\|\theta_2)$	0.05	0.05	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3
$f(x\|\theta_3)$	0.2	0.1	0.2	0.15	0.15	0.1	0.1

: 연습문제 2번

예 7.2∼4
$X_1, X_2, \ldots, X_n$가 다음 분포를 갖는 모집단으로부터의 랜덤표본일 때 θ의 MLE

- $Bernoulli(\theta)$
- $Poisson(\theta)$ **(과제)**
- $f(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} e^{-|x|/\theta}$