(1) $\Gamma(n) = (n-1)!$

(2) $\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\,dx.$ $\quad z \to 1,2,3,4..$ $\quad$ (1) = (2)

$z=4$: (1) $\Gamma(4) = 3! = 3\cdot2\cdot1 = 6.$

(2) $\Gamma(4) = \int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx.$

$= \left[x^3(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty (3x^2)(-e^{-x})\,dx.$ ...① $= \underbrace{\left[x^3(-e^{-x})\right]_0^\infty}_{0-0} + 6 = 6.$

① $= \int_0^\infty 3x^2 e^{-x}\,dx.$

$= \left[3x^2(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty 3\cdot2\cdot x(-e^{-x})\,dx.$ .... ② $= \underbrace{\left[3x^2(-e^{-x})\right]_0^\infty}_{0-0} + 6. = 6$

② $= \int_0^\infty 6x\, e^{-x}\,dx$

$= \left[6x(-e^{-x})\right]_0^\infty - \int_0^\infty 6\cdot(-e^{-x})\,dx$

$= \left[6x(-e^{-x})\right]_0^\infty + 6\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

$= \underbrace{\left[6x(-e^{-x})\right]_0^\infty}_{0-0} + \underbrace{6\left[-e^{-x}\right]_0^\infty}_{0-(-6)} = 0 + 6.$

$z=4.$: $\Gamma(4) = \int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx.$ $\Rightarrow$

$= x^3(-e^{-x}) - \int$ ______

x^3	e^{-x}.	
$3x^2$	$-e^{-x}$	$\oplus$
$6x$	e^{-x}	$\ominus$
6	$-e^{-x}$	$\oplus$
$0.$	e^{-x}	$\ominus$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = \left[-x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} - 6e^{-x}\right]_0^\infty = \left[-6e^{-x}\right]_0^\infty$$

$= 6.$

$z = 6$: $\Gamma(6) = \int_0^\infty x^5 e^{-x}\,dx$ $\Rightarrow$

x^5	e^{-x}	
$5x^4$	$-e^{-x}$	$\oplus$
$5\cdot4\,x^3$	e^{-x}	$\ominus$
$5\cdot4\cdot3x^2$	$-e^{-x}$	$\oplus$
$5\cdot4\cdot3\cdot2\,x$	e^{-x}	$\ominus$
$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$	$-e^{-x}$	$\oplus$
0	e^{-x}	$\ominus$

$$= -\left[x^5 e^{-x} + 5x^4 e^{-x} + 5\cdot4x^3 e^{-x} + 5\cdot4\cdot3x^2 e^{-x} + 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot x e^{-x} + 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\, e^{-x}\right]_0^\infty$$

$= -\left[5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\; e^{-x}\right]_0^\infty$

$= 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$

$z = n+1$: $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ $\Rightarrow$

x^n	e^{-x}	
$n\,x^{n-1}$	$-\,e^{-x}$	$\oplus$
$n\cdot(n-1)\;x^{n-2}$	$+\;e^{-x}$	$\ominus$
$\vdots$	$\vdots$	
$n(n-1)\cdots2\cdot x$	? e^{-x}	?
$n(n-1)\cdots2\cdot1$	e^{-x}	

$= -\left[n x^{n-1} e^{-x} + \cdots + n!\,e^{-x}\right]_0^\infty$

$= -\left[n!\,e^{-x}\right]_0^\infty$

$= n!$