1. 평균이 θ인 지수분포 $\mathrm{Exp}(\theta),\ 0<\theta<\infty$에서의 랜덤표본 $X_1,\ \cdots,X_n$을 이용하여

$$H_0:\theta=\theta_0 \ \text{ vs } \ H_1:\theta\neq\theta_0 \ \ (\theta_0\text{는 주어진 값})$$

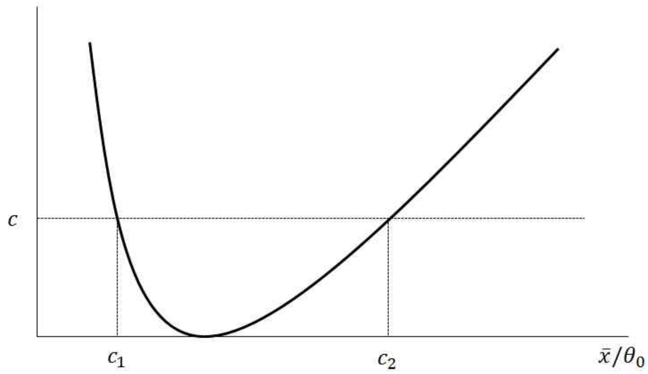
을 검정할 때 유의수준 $\alpha(0<\alpha<1)$의 최대가능도비 검정을 구하여라.

[풀이] 로그가능도와 각 모수공간에서의 최대가능도 추정값을 구하면 다음과 같다.

$$l(\theta)=-nlog\theta-n\overline{x}/\theta,\ \ \hat{\theta}^{MLE}=\overline{x},\ \ \hat{\theta_0}^{MLE}=\theta_0$$

$$\therefore\ 2(l(\hat{\theta}^{MLE})-l(\hat{\theta_0}^{MLE}))=2n(\overline{x}/\theta_0-1-\log(\overline{x}/\theta_0))$$

따라서 최대가능도비 검정의 기각역 형태는 "$2n(\overline{x}/\theta_0-1-\log(\overline{x}/\theta_0))\geq c$" 로 주어진다.



<그림 1>

<그림 1>에서 알 수 있듯이 이 기각역은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{cases}\overline{x}/\theta_0 \ \leq c_1 \text{ 또는 } \overline{x}/\theta_0 \ \geq c_2 \\ c_1-\log c_1=c_2-\log c_2\end{cases}$$

한편 표본분포 이론으로부터 $H_0:\theta=\theta_0$가 사실일 때

$$2n\overline{X}/\theta_0=2\sum_{i=1}^{n}X_i/\theta_0\sim\chi^2(2n)$$

이므로 유의수준 α의 최대가능도비 검정의 기각역은 다음과 같이 주어진다.

$$\text{유의수준 } \alpha\text{의 기각역 : }\begin{cases}\overline{x}/\theta_0 \ \leq c_1 \text{ 또는 } \overline{x}/\theta_0 \ \geq c_2 \\ c_1-\log c_1=c_2-\log c_2 \\ \int_{2nc_1}^{2nc_2}pdf_{\chi^2(2n)}(y)\,dy=1-\alpha\end{cases}$$

2. $X_1, X_2, \cdots, X_9$는 $f(X;\lambda) = \lambda e^{-\lambda X}$ 인 지수분포로부터의 랜덤샘플이라고 하자.

$$H_0 : \lambda = 8 \quad vs \quad H_1 : \lambda = 10$$

을 검정할 때 유의수준 0.05의 최대가능도비 검정을 구하여라.

[풀이] 가능도비 검정 통계량은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Lambda = \frac{L(\lambda=8)}{L(\lambda=10)} = \frac{\prod_{i=1}^{9} f(X;8)}{\prod_{i=1}^{9} f(X;10)} = \frac{8^9 e^{-8\sum_{i=1}^{9} X_i}}{10^9 e^{-10\sum_{i=1}^{9} X_i}} = (0.8)^9 e^{2\sum_{i=1}^{9} X_i}$$

만약

$$(0.8)^9 e^{2\sum_{i=1}^{9} X_i} < c \quad \text{즉,} \quad \sum_{i=1}^{9} X_i < \frac{1}{2} \ln(1.25^9 \times c)$$

이면 귀무가설을 기각 할 수 있다.

따라서 우변을 c_2라고 하면 가능도비 검정의 기각역은 다음과 같다.

$$(X_1, X_2, \cdots, X_9) \in R^9 | \sum_{i=1}^{9} X_i < c_2,\ X_i \ \geq 0.$$

$X_i \sim \mathrm{Exp}(8) = \ Gamma\,(1,8)$ 이므로 $\sum_{i=1}^{9} X_i$ $Gamma(9,8)$이다.

따라서

$$0.05 = P((X_1, X_2, \cdots, X_9) \in R | H_0) = P(\sum_{i=1}^{9} X_i < c_2 \,|\, H_0)$$

이고, $Gamma(9,8)$ 의 0.05 분위수는 0.5869 이므로 $c_2 = 0.5869$이다.