수리통계학 Quiz 5 해설

2-1. $X_1, X_2, ..., X_n$이 $Poisson(\theta)$로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 가능도비 검정법의 기각역을 구하여라.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

sol)

$$\hat{\theta_0} = \theta_0$$
$$\hat{\theta} = \overline{X}$$

$$\lambda = \frac{L(\theta_0)}{L(\overline{x})} = \frac{\theta_0^{\sum x_i} e^{-n\theta_0}}{\overline{x}^{\sum x_i} e^{-n\overline{x}}} = \left(\frac{\theta_0}{\overline{x}}\right)^{n\overline{x}} e^{n(\overline{x}-\theta_0)}$$

λ는 $\overline{x}$의 함수로서 $\overline{x}=\theta_0$에서 최대값을 가지며, $\lambda \le k$에 대응되는 기각역의 형태는 다음과 같다.

$$\sum x_i \le a \ \text{ 또는 } \ \sum x_i \ge b$$

여기서 a와 b를 결정하는 것은 H_0하에서 $\sum x_i$가 모수 $n\theta_0$인 포아송분포에 따름을 이용하거나 정규근사에 의해 구할 수 있다.

2-2. $X_1, X_2, ..., X_n$이 평균이 θ인 지수분포로부터의 랜덤샘플일 때 다음 가설에 대한 가능도비 검정법의 기각역을 구하여라.

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

sol)

$$\hat{\theta_0} = \theta_0$$
$$\hat{\theta} = \overline{X}$$

$$\lambda = \frac{L(\theta_0)}{L(\overline{x})} = \frac{\theta_0^{-n} e^{-\frac{\sum x_i}{\theta_0}}}{\overline{x}^{-n} e^{-\frac{\sum x_i}{\overline{x}}}} = \left(\frac{\overline{x}}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{-\frac{n\overline{x}}{\theta_0} + \frac{n\overline{x}}{\overline{x}}\right\} = \left(\frac{\overline{x}}{\theta_0}\right)^n \exp\left\{-n\left(\frac{\overline{x}}{\theta_0} - 1\right)\right\}$$

λ는 $\overline{x}$의 함수로서 $\overline{x}=\theta_0$에서 최대값을 가지며, $\lambda \le k$에 대응되는 기각역의 형태는 다음과 같다.

$$\frac{\sum x_i}{\theta_0} \le a \ \text{ 또는 } \ \frac{\sum x_i}{\theta_0} \ge b$$

여기서 a와 b를 결정하는 것은 H_0하에서 $\sum x_i/\theta_0$가 모수 $(n,1)$인 감마분포에 따름을 이용하여 구할 수 있다.