3. 상자 A 에는 무수히 많은 검정색 공이 들어있고 상자 B 에는 하나의 흰색 공이 들어있다. 상자 A 에서 검정색 공을 꺼내어 상자 B 에 집어넣은 후 상자 B 에서 임의로 하나의 공을 선택하는 실험을 하였다. 이때 상자 A 에서 꺼내어 상자 B 로 옮기는 검정색 공의 수는 포아송 분포를 따른다고 한다.

(a) 상자 B 로부터 꺼낸 공이 흰색일 확률을 구하여라.

상자 A 에서 꺼내어 상자 B 로 옮기는 검정색 공의 수 : X

상자 B 에서 꺼낸 공이 흰색일 사건 : W

$X \sim Poi(\lambda)$, $P(X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$

$P(W|X=x) = \dfrac{P(W \cap X=x)}{P(X=x)} = \dfrac{1}{x+1}$

$P(W \cap X=x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \cdot \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x+1)!}$

$P(W) = \sum_{x=0}^{\infty} P(W \cap X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x+1)!} = \sum_{x=-1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x+1)!} - \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda}$ ($x+1=t$ 라 두면)

$= \sum_{t=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{t-1}}{t!} - \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\left(\sum_{t=0}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{t}}{t!}\right) - \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{e^{-\lambda}}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$

$\therefore P(W) = \dfrac{1}{\lambda}(1-e^{-\lambda})$

(b) 상자 B 로부터 꺼낸 공이 흰색이었을 때 상자 A 에서 꺼내어 상자 B 로 옮긴 검정색 공의 수에 대한 확률분포를 구하여라.

$$P(X=x \mid W) = \frac{P(X=x \cap W)}{P(W)} = \frac{\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{(x+1)!}}{\dfrac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x+1}}{(1-e^{-\lambda})(x+1)!}, \quad k=0,1,2,\cdots$$